Domácí úkol ZMA

Jaroslav Urban

17. prosince 2019

Příklad č. 8879: Nalezněte přibližnou hodnotu čísla $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pomocí druhého Taylorova polynomu funkce $f(x) = \sqrt{1+x}$ v bodě $a = 0$. Odhadněte chybu, které jste se dopustili. V odhadu můžete použít nerovnost $\sqrt{2} < 2$

Derivace:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x+1} \\
f(x)' &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+1}} \\
f(x)'' &= \frac{-1}{4 \cdot (x+1)^{3/2}} \\
f(x)''' &= \frac{3}{8 \cdot (x+1)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Taylorův polynom:

$$
\begin{aligned}
T_{2,0} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \\
\sqrt{x+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
x + 1 &= \frac{1}{2} \\
x &= -\frac{1}{2} \\
T_{2,0}(-\frac{1}{2}) &= \frac{23}{32}
\end{aligned}
$$

Odhad chyby:

$$R_{2,0}(-\frac{1}{2}) = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot x^3\right|$$

$$\xi = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$R_{3,0}(-\frac{1}{2}) \leq \left|\frac{3}{2^3 \cdot (1-\frac{1}{2})^{5/2}} \cdot \frac{1}{3! \cdot 2^3}\right|$$

$$R_{3,0}(-\frac{1}{2}) \leq \left|\frac{1}{2^3 \cdot \frac{1}{2^{5/2}}} \cdot \frac{1}{2^4}\right|$$

$$R_{3,0}(-\frac{1}{2}) \leq \left|\frac{2^{5/2}}{2^7}\right|$$

$$R_{3,0}(-\frac{1}{2}) \leq 2^{-9/2}$$

Příklad č. 1171: Vypočtěte

$$\int_{\pi/2}^{0} x \cdot \sin^2 x dx$$

Per partes:

$$\int \sin^2 x = \begin{bmatrix} u = \sin x & dv = \sin x dx \\ du = \cos x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x$$

$$\int sin^2 x = \frac{x - \sin x \cos x}{2}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{0} x \cdot \sin^2 x dx &= \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin^2 x dx \\ du = dx & v = \dfrac{x - \sin x \cos x}{2} \end{bmatrix} \\ &= x \cdot \frac{x - \sin x \cos x}{2} - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{0} x - \sin x \ cosxdx \\ &= x \cdot \frac{x - \sin x \cos x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{0} \sin x \cos x dx \end{aligned}$$

Substituce:

$$u = \sin x$$
$$du = \cos x dx$$
$$\int_{\pi/2}^{0} u du = \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2}$$

Zbytek výpočtu:

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{0} x \cdot \sin^2 x dx &= x \cdot \frac{x - \sin x \cos x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{\sin^2 x}{4} \\
&= [\frac{x^2 - \sin 2x + \sin^2 x}{4}] \\
&= \frac{0^2 - \sin 0 - sin^2 0}{4} - \frac{\frac{\pi^2}{4} - \sin \pi + sin^2 \frac{\pi}{2}}{4} \\
&= -\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{-1}{16}(4 + \pi^2)
\end{aligned}
$$