Domácí úkol ZMA

Jaroslav Urban

12. listopadu 2019

Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+10}$$

Upravení řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+10} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

$$a_k = \frac{\sqrt{k}}{k+10}$$

Liebnizovo kritérium:

Výpočet limity a_k :

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{k+10} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\frac{10}{\sqrt{k}})} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\infty + \frac{10}{\infty}} = 0$$

Dokázání monotonie a_k

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{k}}{k+10} &> \frac{\sqrt{k+1}}{k+11} \\
\sqrt{k}(k+11) &> \sqrt{k+1}(k+10) \\
k(k+11)^2 &> (k+1)(k+10)^2 \\
k^3+22k^2+121k &> k^3+21k^2+120k+100 \\
k^2+k-100 &> 0 \\
k &> 20
\end{aligned}$$

Dle Leibnizova kritéria je tedy řada $\sum_{k=21}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergentní.

A protože přidání či odebrání konečné konstanty nezmění konvergenci řady, tak i řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konverguje.