ntic master

School

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
DE MADRID

Introducción al análisis de series temporales. Métodos de suavizado

Minería de Datos y Modelización Predictiva

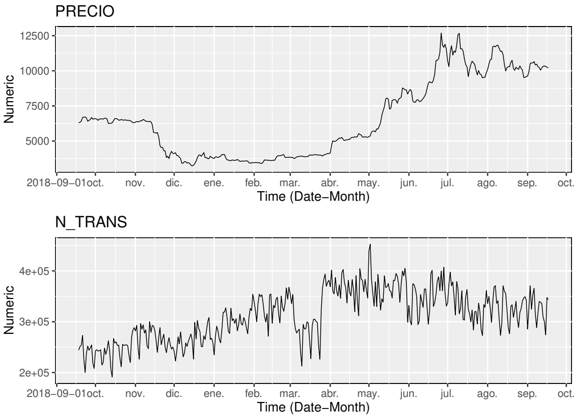
Máster Data Science, Big Data & Business Analytics
Universidad Complutense de Madrid
Curso 2024-2025

ntic master
revolucionamos la comunicación

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

DEFINICIÓN

Una serie temporal es una sucesión de observaciones de una variable tomadas en varios instantes de tiempo.



Evolución del Bitcoin

EN GENERAL...

Una serie temporal es una sucesión de observaciones de una variable tomadas en varios instantes de tiempo. Estas observaciones provienen de una distribución que puede ser diferente en cada instante del tiempo.

EL PROBLEMA ES QUE..

No somos capaces de tratar cualquier tipo de serie temporal, ya que en cada instante tenemos una variable con distinta distribución de la que sólo observamos un dato. Ignoramos mucho y tenemos poca información.

SIMPLIFICACIÓN

Se hace necesario imponer ciertas condiciones para el análisis y predicción de series de tiempo.

- Una serie es **estacionaria** si la media y la variabilidad se mantienen constantes a lo largo del tiempo.
- Una serie es **no estacionaria** si la media y/o la variabilidad cambian a lo largo del tiempo.
  - Series no estacionarias pueden mostrar **cambios de varianza.**
  - Series no estacionarias pueden mostrar una **tendencia**, es decir que la media aumenta o disminuye a lo largo del tiempo.
  - Además, pueden presentar efectos **estacionales**, es decir que el comportamiento de la serie es parecido en distintos momentos con cierta periodicidad.

RELACIÓN CON PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Una serie temporal de n datos es una **muestra extraída del proceso estocástico que representa dicho fenómeno dinámico**, por ello recordamos algunos conceptos básicos de procesos estocásticos:

- Proceso estacionario estricto: las distribuciones marginales de cualquier conjunto de k variables son idénticas, en distribución y parámetros.
- Proceso estacionario en sentido débil: La media y la varianza permanecen constantes con el tiempo, en cambio, la covarianza entre dos variables de la serie depende sólo de su separación en el tiempo.

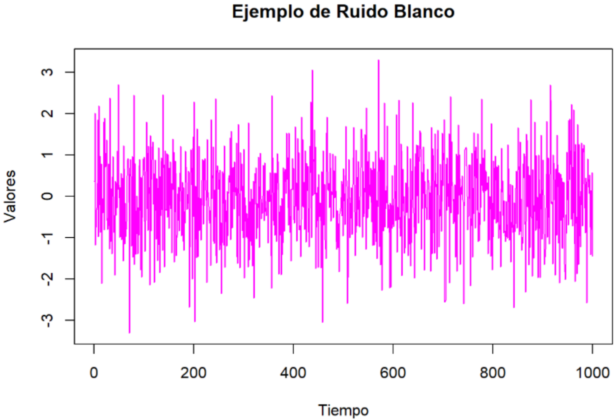
$$E[X_t] = \mu \ \forall t \tag{1}$$

$$Var[X_t] = \sigma^2 \ \forall t \tag{2}$$

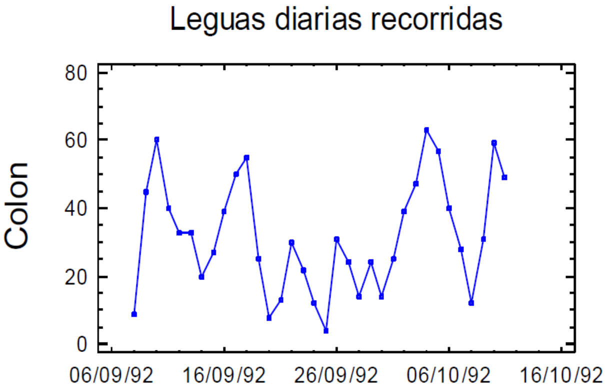
$$Cov[X_t, X_{t+k}] = \gamma_k \ \forall t, k \tag{3}$$

Un ejemplo clásico es el llamado **Ruido Blanco** con media y covarianza nulas.

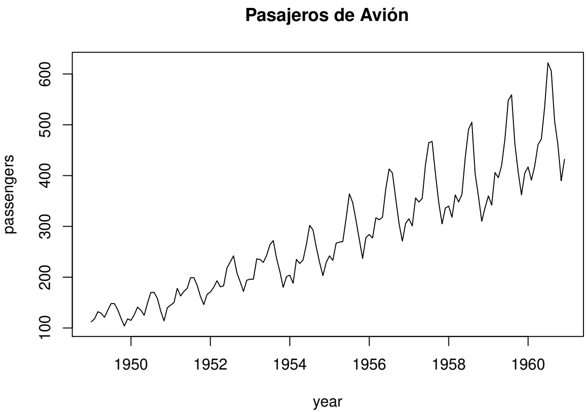
El ruido blanco es un proceso estacástico estacionario en el que no se observan patrones concretos de comportamiento temporal. Se puede asumir en general que es un proceso puramente aleatorio.



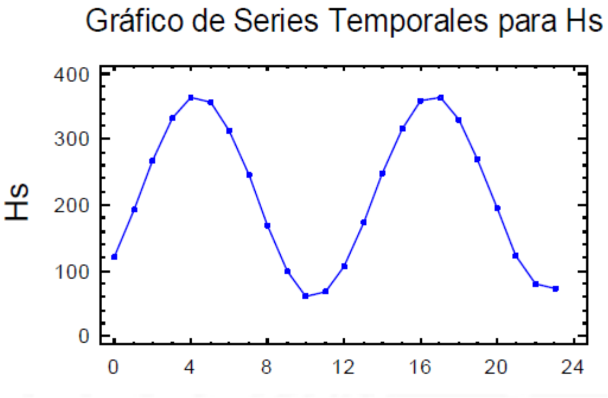
Consideramos una serie estacionaria cuando no presenta tendencia temporal en media y varianza.



Un claro ejemplo de serie no estacionaria con tendencia creciente es la de pasajeros de avión que se incluye en el trabajo de Box y Jenkings (1976).

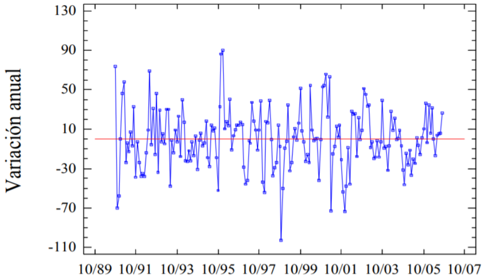


Un ejemplo muy claro de estacionalidad es el que representan las mareas. Si representamos el nivel del agua en un puerto solo 24 horas observamos claramente que presenta un comportamiento estacional cuyo periodo es de 12 horas.



¿POR QUÉ ES BUENO QUE LAS SERIES SEAN ESTACIONARIAS?

- Con series estacionarias podemos obtener predicciones fácilmente.
- Como la media es constante, podemos estimarla con todos los datos, y utilizar este valor para predecir una nueva observación.
- También se pueden obtener intervalos de predicción (confianza) para las predicciones asumiendo que X_t sigue una distribución conocida, por ejemplo, normal.



COMPONENTES FUNDAMENTALES

- Tendencia: comportamiento o movimiento suave de la serie a largo plazo.
- Estacionalidad: oscilaciones periódicas.
- Irregular: variaciones **aleatorias** en torno a los valores anteriores.

MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN

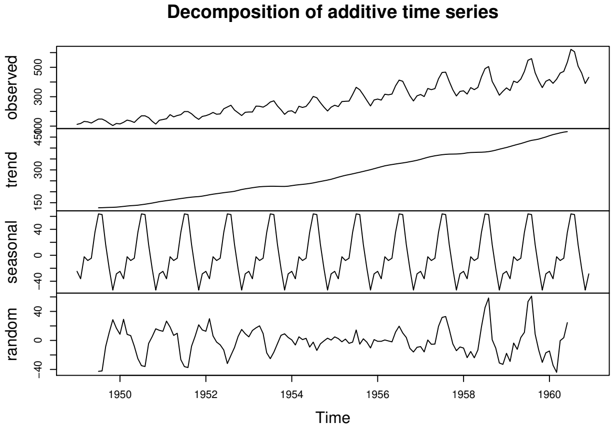
- Aditiva: apropiado cuando la magnitud de las fluctuaciones estacionales de la serie no varía al hacerlo la tendencia.

$$\boldsymbol{X_t = T_t + S_t + e_t}$$

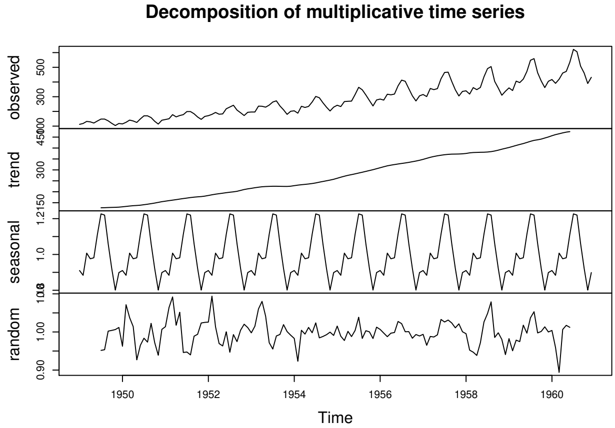
- Multiplicativa: apropiados cuando la magnitud de las fluctuaciones estacionales de la serie varía proporcionalmente con los cambios de tendencia.

$$\boldsymbol{X_t = T_t * S_t * e_t}$$

Como se ha visto, la serie de pasajeros de avión presenta una clara componente de tendencia así como una marcada componente estacional. Es posible aislar estos efectos mediante la descomposición de la serie, para ello utilizaremos la función `seasonal`$_{d}\boldsymbol{ecompose()dePython.}$



Como se ha visto, la serie de pasajeros de avión presenta una clara componente de tendencia así como una marcada componente estacional. Es posible aislar estos efectos mediante la descomposición de la serie, para ello utilizaremos la función `seasonal`$_{d}ecompose()dePython.$



HACIA LA ESTACIONAREIDAD DE LA SERIE

Como se ha visto, muchos de los métodos de predicción en series temporales trabjan sobre series que puedan considerarse estacionarias. Por ello, el objetivo es convertir la serie original en una serie aproximadamente estacionaria.

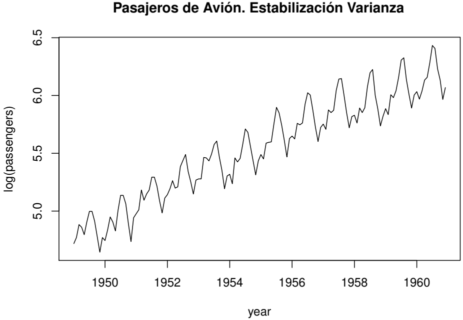
- ESTABILIZAR LA VARIANZA El primer paso es eliminar el efecto de **heterocedasticidad**.
- ELIMINAR LA TENDENCIA Una vez se tiene la serie con varianza estable, si se intuye una tendencia aproximadamente lineal, puede ser eliminada mediante una diferenciación.
- ELIMINAR LA ESTACIONALIDAD Si se observa comportamineto periódico, se puede tratar de eliminar aplicando una diferenciación estacional (mensual, trimestral, anual...)

ESTABILIZAR LA VARIANZA

La aplicación de transformaciones de tipo Box-Cox a la serie original es una herramienta útil para estabilizar su varianza.

$$w = \log(y) \tag{4}$$

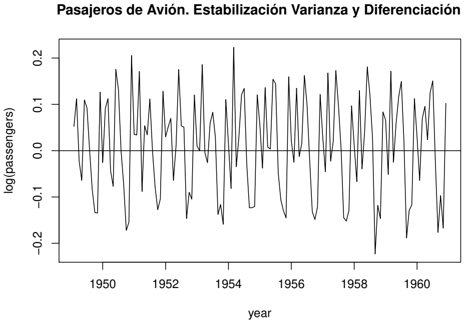
$$w = \frac{y^{\lambda} - 1}{\lambda} \tag{5}$$



ELIMINAR LA TENDENCIA

Una forma sencilla de eliminar una tendencia aproximadamente lineal es diferenciar la serie, es decir, considerar la serie de diferencias entre una observación y la anterior en lugar de la serie original. Si $\boldsymbol{X_t}$ es una serie contenida en $\boldsymbol{X}$, se calcula:

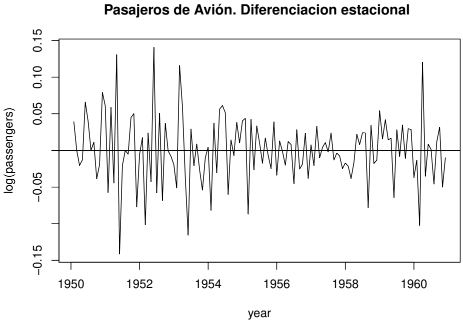
$$\boldsymbol{\Delta X_t = X_t - X_{t-1}}$$



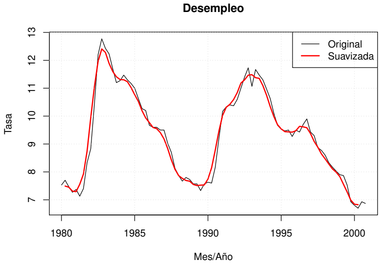
ELIMINAR LA ESTACIONALIDAD

La influencia de la periodicidad en series temporales puede se corregida mediante la aplicación de diferenciaciones de orden igual al periodo de la serie (ver periodograma). Si X_t es una serie a desestacionalizar, se calcula:

$$\Delta_{12} X_t = X_t - X_{t-12}$$



- En algunas series los parámetros de la función que ajusta la tendencia presentan pequeñas variaciones con el tiempo.
- En estos casos, existe la posibilidad de utilizar modelos con parámetros variables que son estimados dando mayor importancia a los datos recientes que a los antiguos.
- Estos métodos se denominan de **suavizado exponencial** porque los pesos concedidos a los valores de la serie decrecen de form exponencial.



El objetivo es hacer predicciones utilizando los datos de la serie eliminando las fluctuaciones aleatorias y quedádonos solo con la componente tendencia o tendencia-estacionalidad

ADECUADO SI..

Este método se utiliza cuando la serie **no presenta tendencia** o esta cambia lentamente, es decir, podemos modelizarla como

$$X_t = L_t + z_t$$

Comenzamos con una estimación inicial del valor medio que calculamos como la media de los primeros datos (normalmente la mitad de los datos históricos). Entonces calculamos el valor actualizado de la estimación del parámetro para el instante $t + 1$,

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + (1 - \alpha)\hat{x}_t \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Por tanto, sustituyendo recursivamente los términos de la serie se tiene,

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \ldots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1}x_1 + (1 - \alpha)^t \hat{x}_1$$

Si t es grande y α es pequeño, se cumple que:

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha(x_t + (1-\alpha)x_{t-1} + (1-\alpha)^2 x_{t-2} \ldots)$$

Que es la media ponderada de las observaciones históticas con pesos decrecientes que suman 1.

PREDICCIONES POR ALISADO SIMPLE

Así, las predicciones se obtienen mediante la expresión,

$$\hat{x}_{t+m} = \hat{x}_{t+1} \quad \forall m >= 2$$

Es importante observar que el alisado simple proporciona predicciones constantes en el tiempo, incapaces de captar tendencia alguna.

ADECUADO SI..

Este método se utiliza cuando la serie **presenta tendencia**, asumida como lineal con pendiente que varia en el tiempo, es decir, podemos modelizarla como

$$X_t = L_t + b_t t + z_t$$

En este caso se obtiene la serie suavizada a través de las siguientes expresiones,

$$L_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1}) \text{ con } L_1 = x_1$$

$$b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \text{ con } b_1 = x_2 - x_1$$

$$\hat{x}_{t+1} = L_t + b_t$$

PREDICCIONES POR ALISADO DOBLE DE HOLT

Así, las predicciones se obtienen mediante la expresión,

$$\hat{x}_{t+m} = L_t + b_t m \;\; \forall m >= 1$$

ADECUADO SI..

La presencia de **comportamientos estacionales** ha de ser modelada mediante la inclusión de un término adicional al modelo de alisado doble anterior.

- Si el efecto periódico se considera constante en el tiempo se considera un **modelo aditivo**,

$$X_t = (L_t + b_t t) + S_t + z_t$$

- Si el efecto periódico no es constante en el tiempo se considera una **modelo multiplicativo**,

$$X_t = (L_t + b_t t) * S_t + z_t$$

ADECUADO SI..

Se observa la presencia de fenómenos estacionales que no varian a lo largo del tiempo

En este caso se obtiene la serie suavizada a través de las siguientes expresiones,

$$L_t = \alpha(x_t - S_{t-S}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$

$$S_t = \gamma(x_t - L_t) + (1-\gamma)S_{t-S}$$

$$\hat{x}_{t+1} = (L_t + b_t) + S_{t+1-S}$$

PREDICCIONES POR ALISADO DE HOLT-WINTERS ADITIVO

Así, las predicciones se obtienen mediante la expresión,

$$\hat{x}_{t+m} = (L_t + b_t m) + S_{t+m-S} \quad \forall m >= 1$$

Adecuado si..

Se observa la presencia de fenómenos estacionales cuya influencia varía a lo largo del tiempo

En este caso se obtiene la serie suavizada a través de las siguientes expresiones,

$$L_t = \alpha \frac{x_t}{S_{t-S}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) b_{t-1}$$

$$S_t = \gamma \frac{x_t}{L_t} + (1-\gamma) S_{t-S}$$

$$\hat{x}_{t+1} = (L_t + b_t) S_{t+1-S}$$

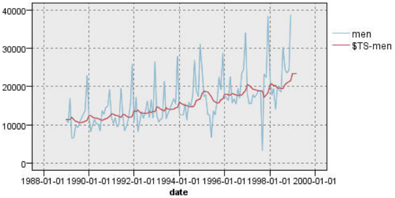
Predicciones por alisado de Holt-Winters Aditivo

Así, las predicciones se obtienen mediante la expresión,

$$\hat{x}_{t+m} = (L_t + b_t m) S_{t+m-S} \quad \forall m >= 1$$

INTERPRETACIÓN FILOSÓFICA

Lo que debemos saber es que los parámetros α, β y γ ponderan con su valor **lo observado** en el comportamiento de la serie en su camino hacia delante desde el estado inicial y con el **complementario a 1 de su valor el valor el comportamiento ya suavizado en el camino.**



CONCLUSIÓN

Modelos de suavizado con α, β y γ grandes (cercanas a 1) **no están suavizando nada** y están más bien reproduciendo el comportamiento observado 1 paso adelante. En cambio, modelos cuyos parámetros sean bajos **aplican un gran suavizado** a la serie de cara a la predicción a futuro.

PASOS PARA EL ESTUDIO DE SERIES

En la práctica es habitual seguir un esquema como el siguiente:

- REPRESENTACIÓN DE LA SERIE Importante pintar y ver la dinámica para intuir en **tendencias**, **estacionalidades** y posible **heterocedasticidad**.
- DESCRIPTIVO PREVIO Descomposición inocente para valorar con mayor seguridad la componente estacional especialmente. Posibles diferenciaciones regular y estacional y test de estacionariedad de resiudos (de cara a la aplicación de modelos ARIMA).
- MODELOS Aplicación del modelo que resulte adecuado en base al análisis anterior. Ejemplo: si tengo una clara compoente estacional, me voy a ahorrar aplicar los métodos Simple y de Holt porque no la van a captar.. Si hay duda entre aditivo/multiplicativo, aplicar los dos y comparar las evaluaciones.
- EVALUACIÓN Es importante evaluar el error cometido en la ventana de test y la adecuación de los residuos (errores de predicción) del modelo en especial mediante el test de autocorrelación de Ljung-Box.