Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
на тему:

Асимптотика згорток у випадку, коли ступінь згортки залежить від аргументу

студента 4 курсу
Кєльси Данила Юрійовича

Науковий керівник:
професор, д.ф-м.н.
Іксанов О.М.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № 11 від 25 травня 2022 р.

Завідувач кафедри ДО проф. Іксанов О.М.

Київ
2022

Зміст

Вступ

Нехай функція $V : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ - довільна неперервна справа, монотонно неспадна функція.
n-кратна згортка Лебега-Стілт'єса функції V з собою визначається так:

$$V^{*(1)}(t) := V(t),$$

$$V^{*(n)}(t) := \int_{[0,t]} V^{*(n-1)}(t-y)dV(y), \quad n \geq 2.$$

У попередній роботі ми досліджували асимптотичну поведінку функції $V^{*(n)}(t)$ при $t \to \infty$ та $n = n(t) \to \infty$ за деяких умов, що накладалися на функцію $V(t)$. основними результатами курсової роботи були наступні асимптотичні співвідношення:

- за умови $|V(t) - at| \leq c$ для деяких $a, c > 0$

$$V^{*(n)}(t) \sim \frac{(at)^n}{n!}, \quad t \to \infty$$

  для $n = n(t) = o(\sqrt{t})$;

- за умови $|V(t) - at| \leq b(t+1)^{\alpha}$, для деяких $a, b > 0$, $\alpha \in (0.1)$

$$V^{*(n)}(t) \sim \frac{(at)^n}{n!}, \quad t \to \infty$$

  для $n = n(t) = o(t^{\frac{1-\alpha}{2}})$.

Ці співвідношення були застосовані для функцій $V(t)$, що є функціями відновлення випадкових блукань з додатніми кроками, що стартують в нулі. А саме, нехай ξ - довільна додатня випадкова величина, $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ - послідовність незалежних копій ξ, $S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$,

$$\nu(t) := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > t\}, \quad V(t) := \mathbb{E}\nu(t)$$

- якщо $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, то

$$V^{*(n)}(t) \sim \frac{t^n}{\mu^n n!}, \quad t \to \infty, \quad n = o(\sqrt{t});$$

- якщо $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ для деякого $r \in (1, 2)$, то

$$V^{*(n)}(t) \sim \frac{t^n}{\mu^n n!}, \quad t \to \infty, \quad n = o(t^{\frac{r-1}{2}}).$$

Введемо додаткові позначення та умови, що будуть використовуватися у цій роботі. Вважаємо, що $V : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ неспадна, неперервна справа і не є кусково постійною зі стрибками у точках виду $\{nd, n \in \mathbb{N}\}$ для жодного $d > 0$. Перетворення Лапласа-Стілт'єса функції V

$$\varphi(s) := \int_{[0,\infty)} e^{-sx} dV(x)$$

є скінченним для деякого $s_0 > 0$ (звідки випливає, що $\varphi(s) < \infty$ для всіх $s > s_0$). Визначимо

$$\lambda(s) := \ln \varphi(s), \quad s \geq s_0,$$

$$\gamma := \inf_{s \geq s_0} \frac{\lambda(s)}{s}.$$

Припустимо, що існує таке значення $\theta^* > 0$, що $\theta^* \lambda'(\theta^*) - \lambda(\theta^*) = 0$. Тоді $\gamma = -\frac{\lambda(\theta^*)}{\theta^*} = -\lambda'(\theta^*)$.

Основним результатом цієї роботи є знаходження асимптотики функції $V^{*(n)}(an + y)$ при $a > \gamma$.

1 Допоміжні результати

Теорема 1. Визначимо невід'ємну випадкову величину ξ з розподілом, що задається функцією

$$x \mapsto \frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{[0,x]} e^{-\theta y} dV(y).$$

Нехай $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ - послідовність незалежних копій ξ.

$$S_0 := 0, \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді для довільної вимірної функції $f : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ виконуються рівності

$$\mathbb{E}f(\xi) = \frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta x} f(x) dV(x), \tag{1.1}$$

$$\mathbb{E}f(S_n) = \frac{1}{\varphi^n(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta x} f(x) dV^{*(n)}(x). \tag{1.2}$$

Доведення. Справді, функція $x \mapsto \frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{[0,x]} e^{-\theta y} dV(y)$ монотонно зростає, прямує до 1 при $x \to \infty$, бо

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,x]} e^{-\theta y} dV(y) = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta y} dV(y) = \varphi(\theta)$$

за означенням φ, дорівнює нулю при $x < 0$, тому вона є функцією розподілу невід'ємної випадкової величини.
Це доводить рівність (1.1) для функції $f(y) = \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(y)$, адже

$$\mathbb{E}f(\xi) = \mathbb{E}\mathbb{1}_{(-\infty,x]}(\xi) = \mathbb{P}\{\xi \le x\} = \frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta y} \mathbb{1}\{y \le x\} dV(y).$$

Зрозуміло, що рівність (1.1) виконується також і для функцій виду

$$f(y) = \mathbb{1}_{(-x_1,x_2]}(y),$$

бо

$$\mathbb{E}f(\xi) = \mathbb{P}\{\xi \le x_2\} - \mathbb{P}\{\xi \le x_1\}.$$

Нехай f - проста функція, тобто

$$f(x) = \sum_{n\ge 1} y_n \mathbb{1}_{A_n}(x), \quad A_n := \{z \ge 0 : f(z) = y_n\}, \quad y_n \ge 0.$$

Застосовуючи лінійність матсподівання та теорему Фубіні (умови якої виконануються за невід'ємністю кожного доданку у визначенні функції f), отримаємо

$$\mathbb{E}f(\xi) = \mathbb{E}\sum_{n\ge 1} y_n \mathbb{1}_{A_n}(\xi) = \sum_{n\ge 1} y_n \mathbb{E}\mathbb{1}_{A_n}(\xi) =$$

$$\sum_{n\ge 1} y_n \frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta y} \mathbb{1}_{A_n}(y) dV(y) =$$

$$\frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta y} \sum_{n\ge 1} y_n \mathbb{1}_{A_n}(y) dV(y) = \frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta y} f(y) dV(y).$$

Для доведення рівності (1.1) для довільної вимірної функції f скористаємося відомим твердженням про наближення вимірної функції послідовністю простих.

Твердження. Нехай $f : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ - вимірна функція. Тоді знайдеться неспадна послідовність простих функцій $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ таких, що $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ монотонно. Явний вигляд функцій g_n:

$$g_n(x) := \sup\left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z}, \frac{k}{2^n} \le \min\{g(x), 2^n\} \right\}.$$

Отже, ми знаємо, що рівність (1.1) виконується для довільної функції g_k. Зауважимо, що послідовність $\left(e^{-\theta x} g_k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ не спадає зі збільшенням k. Тоді за теоремою Леві про монотонну збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}g_n(\xi) = \mathbb{E}f(\xi),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta y} g_k(y) dV(y) = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta y} f(y) dV(y),$$

що доводить рівність (1.1) для функції f.

Для доведення рівності (1.2) спочатку покажемо, що вона виконується для індикаторної функції $f(y) = \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(y)$. Позначимо праву частину цієї рівності

$$\frac{1}{\varphi^n(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta y} \mathbb{1}\{y \le x\} dV^{*(n)}(y) = \frac{1}{\varphi^n(\theta)} \int_{[0,x]} e^{-\theta y} dV^{*(n)}(y) =: G_n(x).$$

Запишепо перетворення Лапласа-Стілт'єса функції $G_n(x)$:

$$\int_{[0,\infty)} e^{-ux} dG_n(x) = \int_{[0,\infty)} e^{-ux} d\left[\frac{1}{\varphi^n(\theta)} \int_{[0,x]} e^{-\theta y} dV^{*(n)}(y)\right] =$$

$$\frac{1}{\varphi^n(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-ux} e^{-\theta x} dV^{*(n)}(x) = \frac{\varphi^n(\theta+u)}{\varphi^n(\theta)}.$$

Також знайдемо перетворення Лапласа-Стілт'єса S_n:

$$\int_{[0,\infty)} e^{-ux} d\mathbb{P}\{S_n \le x\} = \mathbb{E}e^{-uS_n} = \left(\mathbb{E}e^{-u\xi}\right)^n,$$

$$\mathbb{E}e^{-u\xi} = \int_{[0,\infty)} e^{-ux} d\mathbb{P}\{\xi \le x\} = \int_{[0,\infty)} e^{-ux} d\left[\frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{[0,x]} e^{-\theta y} dV(y)\right] =$$

$$\frac{1}{\varphi(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-ux} e^{-\theta x} dV(x) = \frac{\varphi(\theta+u)}{\varphi(\theta)} \implies \mathbb{E}e^{-uS_n} = \frac{\varphi^n(\theta+u)}{\varphi^n(\theta)}.$$

Внаслідок теореми єдиності рівність перетворень Лапласа-Стілт'єса двох функцій еквавалентна рівності цих функцій, тому рівність (1.2) доведена для $f(y) = \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(y)$.

Доведення рівності (1.2) для інших вимірних функцій проводиться аналогічно до доведення рівності (1.1). $\square$

2 Основні результати

Позначимо

$$g_\theta(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda''(\theta)}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda''(\theta)}},$$

$g_\theta(x)$ - щільність нормального розподілу з середнім 0 та дисперсією $\lambda''(\theta)$.
Наступний результат міститься у теоремі 3 статті [2].

Теорема 2. *Локальна гранична теорема Стоуна для випадкових блукань.*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left\{ x - \lambda'(\theta)n - \frac{h}{2} < S_n \le x - \lambda'(\theta)n + \frac{h}{2} \right\} - hg_\theta\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right| = 0 \quad (2.1)$$

рівномірно по $x \in \mathbb{R}$ та локально рівномірно по $h \in (0, \infty)$.

Означення. Функція $f : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ є *безпосередньо інтегрованою за Ріманом* на $[0,\infty)$, якщо

- $\overline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$ та
- $\lim_{h\downarrow 0}(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)) = 0$, де

$$\overline{\sigma}(h) := h\sum_{n\ge 1} \sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y) \quad \text{та} \quad \underline{\sigma}(h) := h\sum_{n\ge 1} \inf_{(n-1)h\le y<nh} f(y).$$

Теорема 3. Для довільної безпосередньо інтегровної за Ріманом функції $f : \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$ виконується

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sqrt{n}}{\varphi^n(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta x} f(-\lambda'(\theta)n + y - x) dV^{*(n)}(x) - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right| = 0. \quad (2.2)$$

Доведення. Введемо позначення

$$\beta_n = \beta_n(\theta, y) := -\lambda'(\theta)n + y.$$

За аналогією з доведенням теореми 1 розіб'ємо доведення на декілька кроків, на кожному кроці поскладнюючи структуру функції f.

Крок 1. Зафіксуємо довільні $h > 0,\ k \in \mathbb{Z}$ та покладемо $f(x) = \mathbb{1}_{[(k-1)h,kh)}(x),\ x \in$

$\mathbb{R}$. Використовуючи рівність (1.2), маємо

$$\frac{\sqrt{n}}{\varphi^n(\theta)}\int_{[0,\infty)} e^{-\theta x} f(-\lambda'(\theta)n+y-x)dV^{*(n)}(x) = \sqrt{n}\int_{[0,\infty)} f(\beta_n - x)d\mathbb{P}\{S_n \le x\}$$

Оскільки $f(\beta_n - x) = 1 \iff x \in (\beta_n - kh, \beta_n - (k-1)h]$, то для достатньо великих n виконується рівність

$$\sqrt{n}\int_{[0,\infty)} f(\beta_n - x)d\mathbb{P}\{S_n \le x\} = \sqrt{n}\int_{(\beta_n - kh, \beta_n(k-1)h]} d\mathbb{P}\{S_n \le x\} =$$

$$\sqrt{n}\mathbb{P}\{\beta_n - kh < S_n \le \beta_n - (k-1)h\}.$$

Зауважимо, що $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = h$ та використаємо результат теореми (2.1), зробивши заміну $x = y - kh + \frac{h}{2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{n}\mathbb{P}\left\{x - \lambda'(\theta)n - \frac{h}{2} < S_n \le x - \lambda'(\theta)n + \frac{h}{2}\right\} - hg_\theta\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{n}\mathbb{P}\left\{y - kh + \frac{h}{2} - \lambda'(\theta)n - \frac{h}{2} < S_n \le y - kh + \frac{h}{2} - \lambda'(\theta)n + \frac{h}{2}\right\} -\right.$$

$$\left. -hg_\theta\left(\frac{y - kh + \frac{h}{2}}{\sqrt{n}}\right)\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{n}\mathbb{P}\left\{\beta_n - kh < S_n \le \beta_n - (k-1)h\right\} - hg_\theta\left(\frac{y - kh + \frac{h}{2}}{\sqrt{n}}\right)\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{n}\int_{[0,\infty)} f(\beta_n - x)d\mathbb{P}\{S_n \le x\} - hg_\theta\left(\frac{y - kh + \frac{h}{2}}{\sqrt{n}}\right)\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sqrt{n}}{\varphi^n(\theta)}\int_{[0,\infty)} e^{-\theta x} f(\beta_n - x)dV^{*(n)}(x) - g_\theta\left(\frac{y - kh + \frac{h}{2}}{\sqrt{n}}\right)\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right|$$

Для доведення рівності (2.2) залишилося показати, що

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - g_\theta\left(\frac{y - kh + \frac{h}{2}}{\sqrt{n}}\right)\right| = 0.$$

Для цього достатньо довести наступне твердження.

Твердження. Функція g_θ є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ (|x_1 - x_2| < \delta) \implies (|g_\theta(x_1) - g_\theta(x_2)| < \varepsilon).$$

Доведення. Функція g_θ неперервна на $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty} g_\theta(x) = \lim_{x\to-\infty} g_\theta(x) = 0,$$

тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $M > 0$, що для довільних $a < -M$ та $b > M$ виконується $g_\theta(a) < \frac{\varepsilon}{3}$, $g_\theta(b) < \frac{\varepsilon}{3}$.
Доведемо, що знайдеться таке значення $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ з того, що $|x - y| < \delta$ випливає, що $|g_\theta(x) - g_\theta(y)| < \varepsilon$.
Для цього розглянемо декілька випадків розташування точок x, y відносно значення M.

1. $x, y \in [-M, M]$.
   У цьому випадку g_θ неперервна на компакті, а отже і рівномірно неперервна, тому з означення рівномірної неперервності $|g_\theta(x) - g_\theta(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

2. $x \in (-\infty, -M)$, $y \in [-M, M]$.
$$|g_\theta(x) - g_\theta(y)| \le g_\theta(x) + g_\theta(-M) + |g_\theta(-M) - g_\theta(y)| \le 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

3. $x, y \in (-\infty, -M)$.
$$|g_\theta(x) - g_\theta(y)| \le |g_\theta(x)| + |g_\theta(y)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Інші варіанти взаємного розташування x та y аналогічні тим, що наведені вище, і у кожному випадку нерівність $|g_\theta(x) - g_\theta(y)| < \varepsilon$ виконується. □

Крок 2. Нехай
$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathbb{1}_{[(k-1)h, kh)}(x), \ t \in \mathbb{R},$$

де $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ - послідовність невід'ємних чисел, що задовольняють умові

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k < \infty.$$

Зробимо оцінку зверху послідовності у рівності (2.2), використовуючи теорему Фубіні для зміни порядку інтегрування та сумування за невід'ємністю кожного з доданків.

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sqrt{n}}{\varphi^n(\theta)}\int_{[0,\infty)} e^{-\theta x} f(\beta_n - x)dV^{*(n)}(x) - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right| =$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{n}\mathbb{E}f(\beta_n - S_n) - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right| =$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{n}\mathbb{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathbb{1}_{[(k-1)h,kh)}(\beta_n - S_n)\right] - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\int_{\mathbb{R}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathbb{1}_{[(k-1)h,kh)}(x)dx\right| =$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\mathbb{E}\,\mathbb{1}_{[(k-1)h,kh)}(\beta_n - S_n) - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)h\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\right| =$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\left(\sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in (\beta_n - kh, \beta_n - (k-1)h]\right\} - hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| \le$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in (\beta_n - kh, \beta_n - (k-1)h]\right\} - hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right|$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та виберемо $m, n \in \mathbb{N}$ такі, що виконуються

$$\sum_{|k|>m} c_k \le \varepsilon,$$

$$\sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in (\beta_n - kh, \beta_n - (k-1)h]\right\} \le hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon \le hg_\theta(0) + \varepsilon,$$

де друга нерівність випливає з граничного співвідношення (2.2) для випадку, що був доведений на попередньому кроці. Тоді

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in (\beta_n - kh, \beta_n - (k-1)h]\right\} - hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right| =$$

$$\sum_{k=-m}^{m} c_k \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in (\beta_n - kh, \beta_n - (k-1)h]\right\} - hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right| +$$

$$\sum_{|k|>m} c_k \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in (\beta_n - kh, \beta_n - (k-1)h]\right\} - hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right| \le$$

$$\sum_{k=-m}^{m} c_k \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in \ldots\right\} - hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right| +$$

$$\sum_{k=-m}^{m} c_k \sup_{y\in\mathbb{R}} \left(\sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in \ldots\right\} + hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right) \le$$

$$\sum_{k=-m}^{m} c_k \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in \ldots\right\} - hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right| + \sum_{|k|>m} c_k \left(2hg_\theta(0) + \varepsilon\right) \le$$

$$\sum_{k=-m}^{m} c_k \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in \ldots\right\} - hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right| + \varepsilon\left(2hg_\theta(0) + \varepsilon\right)$$

Спрямувавши ε до нуля, отримаємо, що

$$\varepsilon\left(2hg_\theta(0) + \varepsilon\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$\sum_{k=-m}^{m} c_k \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left\{S_n \in \ldots\right\} - hg_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \right| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} |\ldots| = 0.$$

Звідси маємо, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{E}f(\beta_n - S_n) - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right| \le 0,$$

а з того, що верхня границя невід'ємної послідовності ≤ 0 випливає, що повна границя існує і дорівнює 0.

Крок 3. Нехай f - довільна невід'ємна безпосередньо інтегровна за Ріманом функція. Для кожного $h > 0$ покладемо

$$\overline{f}_h(x) := \sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[(n-1)h,nh)} f(x)\mathbb{1}_{[(n-1)h,nh)}(x),\ x \geq 0$$

$$\underline{f}_h(x) := \sum_{n\geq 1} \inf_{x\in[(n-1)h,nh)} f(x)\mathbb{1}_{[(n-1)h,nh)}(x),\ x \geq 0.$$

За означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[(n-1)h,nh)} f(x) < \infty, \quad \sum_{n\geq 1} \inf_{x\in[(n-1)h,nh)} f(x) < \infty$$

для кожного $h > 0$. Тому функції $\overline{f}_h(x)$ та $\underline{f}_h(x)$ є простими функціями відповідної структури, і (2.2) для них була доведена на кроці 2. Оскільки для кожного $h > 0$

$$\underline{f}_h(x) \leq f(x) \leq \overline{f}_h(x),\ x \geq 0,$$

то

$$0 \leq \varliminf_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{E}\overline{f}_h(\beta_n - S_n) - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\int_{\mathbb{R}} \overline{f}_h(x)dx \right| \leq$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{E}f(\beta_n - S_n) - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right| \leq$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{E}f(\beta_n - S_n) - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right| \leq$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{n}\mathbb{E}\underline{f}_h(\beta_n - S_n) - g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\int_{\mathbb{R}} \underline{f}_h(x)dx \right| \leq 0.$$

З цього ланцюжка нерівностей отримуємо, що (2.2) виконуєтсья для f. $\square$

Теорема 4. Зафіксуємо довільне значення $a > \gamma$, виберемо $\theta > 0$ таке, що

$a = -\lambda'(\theta)$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sqrt{n}}{\varphi^n(\theta)}e^{-\theta(an+y)}V^{*(n)}(an+y)-\frac{1}{\theta}g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right|=0 \tag{2.3}$$

Зокрема, з цього випливає, що для фіксованих $y\in\mathbb{R}$

$$V^{*(n)}(an+y)\sim\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi\lambda''(\theta)n}}e^{-\frac{y^2}{2n\lambda''(\theta)}}e^{\theta(an+y)}\varphi^n(\theta),\ n\to\infty. \tag{2.4}$$

Доведення. У формулі (2.2) покладемо $f(x)=e^{-\theta x}\mathbb{1}\{x\geq 0\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sqrt{n}}{\varphi^n(\theta)}\int_{[0,\infty)}e^{-\theta x}e^{-\theta(an+y-x)}\mathbb{1}\{an+y-x\geq 0\}dV^{*(n)}(x)-\right.$$

$$\left.g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\int_{\mathbb{R}}e^{-\theta x}\mathbb{1}\{x\geq 0\}dx\right|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sqrt{n}}{\varphi^n(\theta)}\int_{[0,an+y]}e^{-\theta(an+y)}dV^{*(n)}(x)-g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\int_{[0,\infty)}e^{-\theta x}dx\right|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sqrt{n}}{\varphi^n(\theta)}e^{-\theta(an+y)}V^{*(n)}(an+y)-\frac{1}{\theta}g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right|=0.$$

Враховуючи, що $\frac{1}{\theta}g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\neq 0$ в кожній точці, отримаємо

$$\frac{\frac{\sqrt{n}}{\varphi^n(\theta)}e^{-\theta(an+y)}V^{*(n)}(an+y)-\frac{1}{\theta}g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\theta}g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)}=$$

$$\frac{V^{*(n)}(an+y)}{\frac{1}{\theta\sqrt{n}}g_\theta\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)e^{\theta(an+y)}\varphi^n(\theta)}-1\to 0,\ n\to\infty,$$

звідки і випливає асимптотична еквівалентність (2.4). $\square$

3 Приклади використання асимптотики

У цьому розділі ми проілюструємо теоретичні результати цієї роботи конкретними прикладами. Для цього виберемо такі функції $V(\cdot)$, для яких можна порахувати $n-$кратну згортку та її асимптотику у явному вигляді. Це дозволить нам перевірити асимптотику (2.4) основного результату.

Приклад 1. Нехай $V(x) = cx,\ x \geq 0,\ c > 0$. Тоді

$$V^{*(n)}(x) = \frac{(cx)^n}{n!},$$

і асимптотика (2.4) виконується для $V^{*(n)}$ при $y = O(\sqrt{n})$.

Доведення. Доведемо рівність $V^{*(n)}(x) = \frac{(cx)^n}{n!}$ за індукцією. При $n = 2$

$$V^{*(2)}(x) = \int_{[0,x]} V(x-y)dV(y) = \int_{[0,x]} c(x-y)d[cy] =$$

$$c^2 x \int_{[0,x]} dy - \int_{[0,x]} c^2 y dy = (cx)^2 - \frac{(cx)^2}{2} = \frac{(cx)^2}{2}.$$

Нехай рівність виконується для $n-1$. Тоді для n :

$$V^{*(n)}(x) = \int_{[0,x]} V^{*(n-1)}(x-y)dV(y) = \int_{[0,x]} \frac{c^{n-1}(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} d[cy] =$$

$$\frac{c^n}{(n-1)!} \int_{[0,x]} (x-y)^{n-1} dy = \frac{c^n}{(n-1)!} \frac{x^n}{n} = \frac{(cx)^n}{n!}.$$

Застосовуючи формулу Стірлінга та озничення експоненти $\left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \to e^c$, $n \to \infty$, отримаємо

$$V^{*(n)}(an+y) = \frac{c^n(an+y)^n}{n!} = \frac{(can)^n(1+\frac{y}{an})^n}{n!} \sim$$

$$\frac{e^{y/a}(can)^n}{n!} \sim \frac{e^{y/a}(can)^n}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = \frac{e^{y/a}(cae)^n}{\sqrt{2\pi n}}, \quad n \to \infty.$$

Розпишемо праву частину асимптотичної еквівалентності (2.4):

$$\varphi(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-sx} dV(x) = V(0) + \int_0^\infty e^{-sx} d[cx] = c\int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{c}{s},$$

$$\lambda(s) = \ln\varphi(s) = \ln c - \ln s,$$

$$a = -\lambda'(\theta) = \frac{1}{\theta},\ \lambda''(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \implies \theta = \frac{1}{a},\ \lambda''(\theta) = a^2,\ \varphi(\theta) = ac.$$

$$\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi\lambda''(\theta)n}} e^{-\frac{y^2}{2n\lambda''(\theta)}} e^{\theta(an+y)}\varphi^n(\theta) = \frac{a}{\sqrt{2\pi a^2 n}} e^{-\frac{y^2}{2na^2}} e^{n+\frac{y}{a}} (ac)^n =$$

$$\frac{e^{y/a}(cae)^n}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{y^2}{2na^2}} \sim \frac{e^{y/a}(cae)^n}{\sqrt{2\pi n}},\ n\to\infty.$$

Отже, асимптотична еквівалентність (2.4) доведена для $y = o(\sqrt{n})$.

Нехай $y \sim b\sqrt{n}$ при $n\to\infty$ для деякого $b>0$. Тоді

$$\left(1+\frac{y}{an}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{y}{an}\right)\right) =$$

$$\exp\left(n\left[\frac{y}{an} - \frac{y^2}{2a^2n^2} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]\right) \sim \exp\left(\frac{y}{a} - \frac{b^2}{2a^2}\right), \quad n\to\infty$$

Отже, з одного боку

$$V^{*(n)}(an+y) = \frac{c^n(an+y)^n}{n!} = \frac{(can)^n(1+\frac{y}{an})^n}{n!} \sim$$

$$\frac{(can)^n\exp\left(\frac{y}{a} - \frac{b^2}{2a^2}\right)}{n!} \sim \frac{\exp\left(\frac{y}{a} - \frac{b^2}{2a^2}\right)(cae)^n}{\sqrt{2\pi n}},$$

а з іншого

$$\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi\lambda''(\theta)n}} e^{-\frac{y^2}{2n\lambda''(\theta)}} e^{\theta(an+y)}\varphi^n(\theta) =$$

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi a^2 n}} e^{-\frac{y^2}{2na^2}} e^{n+\frac{y}{a}} (ac)^n \sim \frac{e^{\frac{y}{a}-\frac{b^2}{2a^2}}(cae)^n}{\sqrt{2\pi n}},\ n\to\infty,$$

бо $e^{\frac{-y^2}{2na^2}} \to e^{\frac{-b^2}{2a^2}},\ n\to\infty$. Отже, асимптотична еквівалентність (2.4) доведена для $y = O(\sqrt{n})$ $\square$.

Приклад 2. Покладемо $U(x) = e^{bx},\ V(x) = e^{bx} - 1,\ x \geq 0,\ b > 0$. Тоді

$$U * V^{*(n-1)}(x) = \frac{(bx)^{n-1}}{(n-1)!} e^{bx},$$

та для $U * V^{*(n-1)}(an + y)$ виконується аналог асимптотики (2.4) при $y = O(\sqrt{n})$:

$$U * V^{*(n-1)}(an + y) \sim \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi\lambda''(\theta)n}} e^{-\frac{y^2}{2n\lambda''(\theta)}} e^{\theta(an+y)} \psi(\theta)\varphi^{n-1}(\theta),$$

де $\psi(s) := \int_{[0,\infty)} e^{-sx} dU(x)$.

Доведення. Почнемо з доведення явного вигляду згортки $U * V^{*(n-1)}$. Для $n = 2$

$$U*V(x) = \int_{[0,x]} U(x-y)dV(y) = \int_0^x e^{b(x-y)} d[e^{by}-1] = \int_0^x e^{b(x-y)} b e^{by} dy = bxe^{bx}.$$

Нехай для $n - 1$ виконується рівність $U * V^{*(n-2)}(x) = \frac{(bx)^{n-2}}{(n-2)!} e^{bx}$, тоді для n

$$U*V^{*(n-1)}(x) = \int_{[0,x]} U*V^{*(n-2)}(x-y)dV(y) = \int_0^x \frac{(b(x-y))^{n-2}}{(n-2)!} e^{b(x-y)} b e^{by} dy =$$

$$\frac{b^{n-1}}{(n-2)!} e^{bx} \int_0^x (x-y)^{n-2} dy = \frac{(bx)^{n-1}}{(n-1)!} e^{bx}.$$

Знайдемо асимптотику $U * V^{*(n-1)}(an + y),\ n \to \infty$ для $y = O(\sqrt{n})$ з безпосередніх обчислень яквого вигляду функції.

$$U*V^{*(n-1)}(an+y) = \frac{b^{n-1}(an+y)^{n-1}}{(n-1)!} e^{b(an+y)} = \frac{n(abn)^{n-1}(1+\frac{y}{an})^{n-1}}{n!} e^{b(an+y)} \sim$$

$$\frac{n^n(ab)^{n-1}e^{b(an+y)}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} \left(1 + \frac{y}{an}\right)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} (ab)^{n-1} e^{abn+n+by} \left(1 + \frac{y}{an}\right)^{n-1},\ n \to \infty$$

за формулою Стірлінга. Аналогічно до прикладу 1, запишемо асимптотику останніх дужок у двох випадках:

- якщо $y = o(\sqrt{n})$, то

$$\left(1+\frac{y}{an}\right)^{n-1} \sim \exp\left(\frac{y}{a}\right),\ n\to\infty,$$

тому

$$U * V^{*(n-1)}(an+y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(ab)^{n-1}e^{abn+n+by+\frac{y}{a}},$$

- якщо $y \sim b\sqrt{n}$ для деякого $b>0$, то

$$\left(1+\frac{y}{an}\right)^{n-1} = \exp\left[(n-1)\ln\left(1+\frac{y}{an}\right)\right] \sim$$

$$\exp\left[(n-1)\left(\frac{y}{an}-\frac{y^2}{2a^2n^2}+o(n^{-3/2})\right)\right] \sim \exp\left(\frac{y}{a}-\frac{b^2}{2a^2}\right),\ n\to\infty,$$

звідки

$$U * V^{*(n-1)}(an+y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(ab)^{n-1}e^{abn+n+by+\frac{y}{a}-\frac{b^2}{2a^2}}.$$

Далі доведемо, що замінивши в асимптотиці (2.4) $V^{*(n)}$ на згортку $U*V^{*(n-1)}$ у правій частині замість множника $\varphi^n(\theta)$ з'явиться множинк $\psi(\theta)\varphi^{n-1}(\theta)$. Поглянувши на доведення теорем 3 та 4 стане зрозуміло, що множник $\varphi^n(\theta)$ у формулах (2.2)-(2.4) виникає із використання заміни міри (1.2) у теоремі 1. Тому тезово доведемо аналог теореми 1, в якому фігурує згортка $U*V^{*(n-1)}$.
Твердження. Нехай невід'ємні випадкові величини ξ та η є незалежними та мають розподіли

$$x \mapsto \frac{1}{\varphi(\theta)}\int_{[0,x]} e^{-\theta y}dV(y) \quad \text{та} \quad x \mapsto \frac{1}{\varphi(\theta)}\int_{[0,x]} e^{-\theta y}dU(y)$$

відповідно. Визначимо випадкове блукання $(S_n)_{n\geq 0}$:

$$S_0 := 0,\ S_n := \eta + \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i,$$

де $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність незалежних копій ξ. Тоді для довільної вимірної функції $f : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ виконується

$$\mathbb{E}f(S_n) = \frac{1}{\psi(\theta)\varphi^{n-1}(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta x} f(x) d\left[U * V^{*(n-1)}(x)\right]$$

Доведеня. Зауважимо, що рівності (1.1) для $\mathbb{E}f(\xi)$ та $\mathbb{E}f(\eta)$ доводяться аналогічно до теореми 1.
Покладемо $f(y) = \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(y)$ та запишемо праву частину рівості

$$\frac{1}{\psi(\theta)\varphi^{n-1}(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-\theta y} \mathbb{1}\{y \le x\} d\left[U * V^{*(n-1)}(y)\right] =$$

$$\frac{1}{\psi(\theta)\varphi^{n-1}(\theta)} \int_{[0,x]} e^{-\theta y} d\left[U * V^{*(n-1)}(y)\right] =: G_n(x).$$

Запишемо перетворення Лапласа-Стілт'єса функції $G_n(x)$ та використаємо відомий факт, що перетворення Лапласа-Стілт'єса згортки двох функцій дорівнює добутку перетворень Лапласа-Стілт'єса цих функцій.

$$\int_{[0,\infty)} e^{-ux} dG_n(x) = \int_{[0,\infty)} e^{-ux} d\left[\frac{1}{\psi(\theta)\varphi^{n-1}(\theta)} \int_{[0,x]} e^{-\theta y} d\left[U * V^{*(n-1)}(y)\right]\right] =$$

$$\frac{1}{\psi(\theta)\varphi^{n-1}(\theta)} \int_{[0,\infty)} e^{-x(u+\theta)} d\left[U * V^{*(n-1)}(x)\right] = \frac{\psi(u+\theta)\varphi^{n-1}(u+\theta)}{\psi(\theta)\varphi^{n-1}(\theta)}.$$

Також знайдемо перетворення Лапласа-Стілт'єса S_n:

$$\mathbb{E}e^{-uS_n} = \left(\mathbb{E}e^{-u\eta}\right)\left(\mathbb{E}e^{-u\xi}\right)^{n-1},$$

$$\mathbb{E}e^{-u\xi} = \frac{\varphi(\theta+u)}{\varphi(\theta)},\ \mathbb{E}e^{-u\eta} = \frac{\psi(\theta+u)}{\psi(\theta)}$$

$$\mathbb{E}e^{-uS_n} = \frac{\psi(\theta+u)\varphi^{n-1}(\theta+u)}{\psi(\theta)\varphi^{n-1}(\theta)}.$$

Рівність перетворень Лапласа-Стілт'єса двох функцій еквавалентна рівності цих функцій, тому рівність (1.2) доведена. Інші кроки доведення теорми 1 переносяться на це твердження без змін. □

Тепер, коли ми довели справедливість асимптотичної еквівалентності для нашого прикладу, запишему її праву частину у явному вигляді.

$$\varphi(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-sx} dV(x) = \int_0^\infty e^{-sx} d[e^{bx} - 1] = b \int_0^\infty e^{x(b-s)} dx = \frac{b}{s-b},$$

$$\psi(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-sx} dU(x) = U(0) + \int_0^\infty e^{-sx} d[e^{bx}] = 1 + b \int_0^\infty e^{x(b-s)} dx = \frac{s}{s-b},$$

$$\lambda(s) = \ln \varphi(s) = \ln(b) - \ln(s-b),\ \lambda'(s) = -\frac{1}{s-b},\ \lambda''(s) = \frac{1}{(s-b)^2},$$

$$a = -\lambda'(\theta) = \frac{1}{\theta - b} \implies \theta = \frac{ab+1}{a},\ \lambda''(\theta) = a^2,\ \varphi(\theta) = ab,\ \psi(\theta) = ab+1.$$

Отже,

$$\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi\lambda''(\theta)n}} e^{-\frac{y^2}{2n\lambda''(\theta)}} e^{\theta(an+y)} \psi(\theta) \varphi^{n-1}(\theta) =$$

$$\frac{a}{(ab+1)\sqrt{2\pi n a^2}} e^{-\frac{y^2}{2na^2}} e^{\frac{ab+1}{a}(an+y)} (ab+1)(ab)^{n-1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} (ab)^{n-1} e^{abn+n+by+\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2na^2}}.$$

Якщо $y = o(\sqrt{n})$, то $e^{-\frac{y^2}{2na^2}} \to 1,\ n \to \infty$, якщо ж $y \sim b\sqrt{n}$, то $e^{-\frac{y^2}{2na^2}} \to e^{\frac{b^2}{2a^2}},\ n \to \infty$, тому в обох випадках асимптотика правої частини збігається з асимптотикою $U * V^{*(n-1)}(an+y)$, отриманою з явного вигляду функції. $\square$

Висновки

В даній дипломній роботі були доведені результати щодо рівномірної збіжності та, як наслідок, асимптотичної поведінки згорток від неперервних справа монотонно неспадних функцій, при цьому ступінь згортки залежить від аргументу.

Принциповим теоретичним засобом для доведень основних результатів цієї роботи (теореми 3, 4) є локальна гранична теорема Стоуна для випадкових блукань (теорема 2). Вона була застосована після належної заміни міри, справедливість якої доведена у теоремі 1.

Нами було помічено, що зв'язок між локальною граничною теоремою Стоуна та основним результатом роботи є схожим на зв'язок теореми Блекуелла та ключової теореми відновлення. Тому доведення теореми 3 використовує ідеї, пов'язані з безпосередньо інтегрованими за Ріманом функціями та має схожу з доведеням ключової теореми відновлення структуру, а саме підхід поступового ускладнення вигляду функції $f(\cdot)$.

Теоретичні результати роботи, а саме асимптотична еквівалентність (2.4) були проілюстровані конкретними прикладами функцій, у яких n-кратну згортку та її асимптотику вдається порахувати у явному вигляді. Це дозволило перевірити асимптотику основного результату.

Література

[1] Іксанов, О. М. (2012) Елементи теорії відновлення. Електронний навчальний посібник. Київ, 121 с.

[2] J. D. Biggins (1992) Uniform convergence of martingales in the branching random walk. The Annals of Probability, Vol. 20, No. 1, 137-151.