Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

Курсова робота
на тему:

Асимптотика згорток у випадку, коли ступінь згортки залежить від аргументу

студента 3 курсу
Кєльси Д. Ю.

Науковий керівник:
професор, д.ф-м.н.
Іксанов О.М.

Київ
2021

Зміст

Вступ

У задачах **1-3** ми вважаємо, що функція $U : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ - довільна неперервна справа, монотонно неспадна функція.
n-кратна згортка функції U з собою визначається так:

$$U^{*(1)}(t) := U(t),$$

$$U^{*(n)}(t) := \int_{[0,t]} U^{*(n-1)}(t-y) dU(y), \quad n \geq 2, t \geq 0$$

Ми будемо досліджувати асимптотичну поведінку функції $U^{*(n)}(t)$ при $t \to \infty$. При цьому нас особливо буде цікавити випадок, коли ступінь згортки n не є фіксованим натуральним числом, а залежить від аргументу t, тобто $n = n(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.
У задачах **4** та **5** застосуємо результати перших трьох задач до функцій відновлення випадкових блукань.
Наведемо означення випадкового блукання та функції відновлення. Нехай на деякому ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ визначена послідовність незалежних однаково розподілених невід'ємних випадкових величин $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, та випадкова величина ξ з таким же розподілом, що і ξ_k.
Послідовність $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, що визначається так:

$$S_0 := 0, \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad n \in \mathbb{N}$$

називається *випадковим блуканням*, що стартує в нулі.
Величина $\nu(t)$ - час першого проходження вище рівня t:

$$\nu(t) := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > t\}, \quad t \geq 0$$

Функція відновлення $U(t)$ випадкового блукання $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ визначається так:

$$U(t) := \mathbb{E}\nu(t) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\{S_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

1 Асимптотика згортки при фіксованому n за умови, що $\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}=a$.

Теорема 1. Нехай $a>0$. Припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}=a.$$

Тоді для фіксованого $n\in\mathbb{N}$ виконується

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U^{*(n)}(t)}{t^n}=\frac{a^n}{n!} \tag{1}$$

Доведення. Розглянемо випадок $n=2$. Відомо, що

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists t_0:\forall t\geq t_0\quad\left|\frac{U(t)}{t}-a\right|<\varepsilon.$$

$$U^{*(2)}(t)=\int_{[0,t]}U(t-y)dU(y)=\int_{[0,t-t_0]}U(t-y)dU(y)+\int_{(t-t_0,t]}U(t-y)dU(y)\leq$$

$$(a+\varepsilon)\int_{[0,t-t_0]}(t-y)dU(y)+U(t_0)\int_{(t-t_0,t]}dU(y)\leq$$

$$\leq(a+\varepsilon)\int_{[0,t]}(t-y)dU(y)+U(t_0)\left(U(t)-U(t-t_0)\right).$$

Розглянемо кожен з доданків окремо:

- За теоремою про інтегрування частинами для інтеграла Лебега-Стілтьеса ([2] c. 287):

$$\int_{[0,t]}(t-y)dU(y)=tU(0)+\int_{(0,t]}(t-y)dU(y)=$$

$$tU(0)+(t-t)U(t)-tU(0)-\int_0^t U(y)d(t-y)=\int_0^t U(y)dy$$

- За умовою $\frac{U(t)}{t} \to a$, звідки $\frac{U(t-t_0)}{t} \to a$, отже $\frac{U(t)-U(t-t_0)}{t} \to 0$, тому

$$U(t_0)\left(U(t) - U(t-t_0)\right) = o(t).$$

Маємо, що

$$U^{*(2)}(t) \leq (a+\varepsilon)\int_0^t U(y)dy + o(t).$$

За правилом Лопіталя

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t U(y)dy}{t^2/2} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = a.$$

З цього отримаємо

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{U^{*(2)}(t)}{t^2/2} \leq (a+\varepsilon)a,$$

спрямувавши ε до нуля отримаємо остаточну оцінку верхньої границі

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{U^{*(2)}(t)}{t^2/2} \leq a^2.$$

Далі розглянемо оцінку знизу:

$$U^{*(2)}(t) = \int_{[0,t]} U(t-y)dU(y) \geq \int_{[0,t-t_0]} U(t-y)dU(y) > (a-\varepsilon)\int_{[0,t-t_0]} (t-y)dU(y)$$

$$\int_{[0,t-t_0]} (t-y)dU(y) = tU(0) + \int_{(0,t-t_0]} (t-y)dU(y) =$$

$$= tU(0) + t_0U(t-t_0) - tU(0) - \int_0^{t-t_0} U(y)d(t-y) =$$

$$= t_0U(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} U(y)dy \geq \int_0^{t-t_0} U(y)dy$$

З цього маємо

$$U^{*(2)}(t) > (a-\varepsilon)\int_0^{t-t_0} U(y)dy,$$

звідки за правилом Лопіталя

$$\underline{lim}_{t\to\infty}\frac{U^{*(2)}(t)}{t^2/2} \geq a^2.$$

Отже, доведено, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U^{*(2)}(t)}{t^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Припустивши, що $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{U^{*(n)}(t)}{t^n} = \frac{a^n}{n!}$, доведення кроку індукції для $U^{*(n+1)}(t)$ є повністю аналогічним:

- $U^{*(n+1)}(t) = \int_{[0,t]} U(t-y)dU^{*(n)}(y) = \int_{[0,t-t_0]} U(t-y)dU^{*(n)}(y) +$
  $+\int_{(t-t_0,t]} U(t-y)dU^{*(n)}(y) \leq (a+\varepsilon)\int_{[0,t]}(t-y)dU^{*(n)}(y) +$
  $+U(t_0)(U^{*(n)}(t) - U^{*(n)}(t-t_0) = (a+\varepsilon)\int_0^t U^{*(n)}(y)dy + o(t^n),$
  звідки
  $$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{U^{*(n+1)}(t)}{t^{n+1}} \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$
- $U^{*(n+1)}(t) = \int_{[0,t]} U(t-y)dU^{*(n)}(y) \geq \int_{[0,t-t_0]} U(t-y)dU^{*(n)}(y) >$
  $(a-\varepsilon)\int_{[0,t-t_0]}(t-y)dU^{*(n)}(y) \geq (a-\varepsilon)\int_0^{t-t_0} U^{*(n)}(y)dy,$
  звідки
  $$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{U^{*(n+1)}(t)}{t^{n+1}} \geq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отже, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{U^{*(n+1)}(t)}{t^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$. $\square$

2 Асимптотика n-кратної згортки функції $U(t)$ за умови, що $|U(t) - at| \leq c$.

З попередньої задачі ми знаємо, що асимптотична поведінка функції $U^{*(n)}(t)$ при фіксованому n повністю визначається асимптотикою функції $U(t)$ та має вигляд (1). Тому природнім буде припущення, що для деяких $n = n(t) \to \infty, \quad t \to \infty$, що зростають достатньо повільно, ця асимптотика також буде справджуватись. Проте у цьому випадку інформації про поведінку $U(t)$ недостатньо для оцінки $n(t)$, тому виникає необхідність накласти умови другого порядку, тобто вимагати обмеженість величини $|U(t) - at|$. Цей розділ присвячений дослідженню випадку, коли ця величина обмежена константою.

Означення. Функції $f(x)$ та $g(x)$ називаються асмптотично еквівалентими (позначаються $f \sim g$ при $x \to x_0$), якщо справджується

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Припустимо, що

$$|U(t) - at| \leq c, \quad t \geq 0 \tag{$*$}$$

для деяких $a, c > 0$. Поставимо за мету дізнатися, для яких $n(t) \to \infty, t \to \infty$ залишається справедливим асимптотичне співвідношення (1). Для цього в першу чергу отримаємо аналог нерівності $(*)$ для функції $U^{*(n)}(t)$.

Теорема 2. Нехай справджується $(*)$. Тоді для функції $U^{*(n)}(t)$ виконується нерівність

$$\left| U^{*(n)}(t) - \frac{(at)^n}{n!} \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{(at)^i}{i!} c^{n-i}, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

Доведення. Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема 1. Для довільного $m \in \mathbb{N}_0$ виконується

$$\left| \int_{[0,t]} (t-y)^m dU(y) - \frac{at^{m+1}}{m+1} \right| \leq ct^m, \quad t \geq 0$$

Доведення. Для доведення леми використовується така рівність:

$$\int_{[0,t]} (t-y)^m dU(y) = m \int_0^t \int_{[0,s]} (s-y)^{m-1} dU(y) ds. \tag{3}$$

Вона виконується, бо

$$m \int_0^t \int_{[0,s]} (s-y)^{m-1} dU(y) ds = m \int_{[0,t]} \int_y^t (s-y)^{m-1} ds dU(y) =$$

$$\int_{[0,t]} \int_0^{t-y} m s^{m-1} ds dU(y) = \int_{[0,t]} (t-y)^m dU(y).$$

При $m = 1$ маємо

$$\left| \int_{[0,t]} (t-y) dU(y) - \frac{at^2}{2} \right| = \left| \int_0^t U(y) dy - \frac{at^2}{2} \right| =$$

$$= \left| \int_0^t \left(U(y) - ay \right) dy \right| \le \int_0^t |U(y) - ay| dy \le \int_0^t c dy = ct.$$

Остання нерівність виконується за припущенням початкового твердження. Нехай лема виконується при $m = n-1$. Тоді для $m = n$ маємо

$$\left| \int_{[0,t]} (t-y)^n dU(y) - \frac{at^{n+1}}{n+1} \right| = \left| n \int_0^t \int_{[0,s]} (s-y)^{n-1} dU(y) ds - a \int_0^t s^n ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^t n \left(\int_{[0,s]} (s-y)^{n-1} dU(y) - \frac{as^n}{n} \right) ds \right| \le$$

$$\le \int_0^t n \left| \int_{[0,s]} (s-y)^{n-1} dU(y) - \frac{as^n}{n} \right| ds \le$$

$$\le \int_0^t n c s^{n-1} ds = ct^n. \quad \square$$

Почнемо доведення початкової нерівності. При $n = 2$ маємо

$$\left| U^{*(2)}(t) - \frac{(at)^2}{2} \right| = \left| \int_{[0,t]} U(t-y) dU(y) - \frac{(at)^2}{2} \right| =$$

$$= \left| \int_{[0,t]} U(t-y)dU(y) - \int_{[0,t]} a(t-y)dU(y) + \int_{[0,t]} a(t-y)dU(y)\frac{(at)^2}{2} \right| \le$$

$$\le \int_{[0,t]} \left|U(t-y) - a(t-y)\right| dU(y) + a\left| \int_{[0,t]} (t-y)dU(y) - \frac{at^2}{2} \right| \le$$

$$\le \int_{[0,t]} cdU(y) + act = cU(t) + act \le c(at+c) + act = c^2 + 2act.$$

Друга нерівність виконується за припущенням задачі та за лемою 1.

Припустимо, що нерівність виконується для деякого $n \in \mathbb{N}$, тоді для $n+1$ отримаємо

$$\left| U^{*(n+1)}(t) - \frac{(at)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \le$$

$$\le \int_{[0,t]} \left| U^{*(n)}(t-y) - \frac{a^n(t-y)^n}{n!} \right| dU(y) + \frac{a^n}{n!} \left| \int_{[0,t]} (t-y)^n dU(y) - \frac{at^{n+1}}{n+1} \right| \le$$

$$\int_{[0,t]} \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{(a(t-y))^i}{i!} c^{n-i} dU(y) + c\frac{(at)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i c^{n-i}}{i!} \int_{[0,t]} (t-y)^i dU(y) + c\frac{(at)^n}{n!} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i c^{n-i}}{i!} \left| \int_{[0,t]} (t-y)^i dU(y) - \frac{at^{i+1}}{i+1} \right| + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i c^{n-i}}{i!} \frac{at^{i+1}}{i+1} + c\frac{(at)^n}{n!} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i c^{n-i}}{i!} ct^i + c\frac{(at)^n}{n!} + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i c^{n-i} \frac{(at)^{i+1}}{(i+1)!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i c^{n-i+1} \frac{(at)^i}{i!} + \sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} c^{n-i+1} \frac{(at)^i}{i!} =$$

$$= c^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \left(C_n^i + C_n^{i-1} \right) c^{n-i+1} \frac{(at)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i c^{n-i+1} \frac{(at)^i}{i!}. \quad \square$$

Отже, нерівність (2) доведена.

З неї безпосередньо слідує, що для довільного фіксованого n виконується

$$U^{*(n)}(t) \sim \frac{(at)^n}{n!}, \quad t \to \infty \tag{4}$$

Нехай тепер n залежить від параметру t, тобто $n = n(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Співвідношення (4) виконується і в цьому випадку, за умови, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{(at)^i}{i!} c^{n-i}}{\frac{(at)^n}{n!}} = 0$$

Спочатку знайдемо, при яких $n(t)$ відношення елемента суми з індексом $n-1$ до знаменника прямує до 0:

$$\frac{C_n^{n-1} \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!} c}{\frac{(at)^n}{n!}} = \frac{n^2 c}{at} \to 0, \quad t \to \infty \iff n = o(\sqrt{t})$$

Звідси робимо висновок, що коли n зростає швидше, ніж $\sqrt{t}$, твердження (4) точно не виконується. Тепер розглянемо, при яких $n(t)$ сума $\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{(at)^i}{i!} c^{n-i}$ зростає, як $(n-1)$-й елемент:

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{(at)^i}{i!} c^{n-i} \sim C_n^{n-1} \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!} c, \quad t \to \infty \iff \frac{\sum_{i=0}^{n-2} C_n^i \frac{(at)^i}{i!} c^{n-i}}{C_n^{n-1} \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!} c} \to 0, \quad t \to \infty$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-2} C_n^i \frac{(at)^i}{i!} c^{n-i}}{C_n^{n-1} \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!} c} = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{C_n^i}{n} \frac{(n-1)!}{i!} \left(\frac{c}{at}\right)^{n-i-1} \le \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{(n-1)!}{i!}\right)^2 \left(\frac{c}{at}\right)^{n-i-1} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-2} \left(n^{n-i-1}\right)^2 \left(\frac{c}{at}\right)^{n-i-1} = \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{n^2 c}{at}\right)^{n-i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{n^2 c}{at}\right)^i \le \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 c}{at}\right)^i =$$

$$= \frac{\frac{n^2 c}{at}}{1 - \frac{n^2 c}{at}} = \frac{1}{1/\frac{n^2 c}{at} - 1} \to 0, \quad t \to \infty \iff n = o(\sqrt{t})$$

Перша та друга нерівності справедливі, бо виконується ланцюг нерівностей

$$\frac{C_n^i}{n} = \frac{n!}{i!(n-i)!n} \leq \frac{(n-1)!}{i!} = (i+1)(i+2)\dots(n-1) \leq (n-1)^{n-i-1} \leq n^{n-i-1}$$

Отже, остаточно робимо висновок, що співвідношення (4) виконується для $n(t) = o(\sqrt{t})$.

3 Асимптотика n-кратної згортки функції $U(t)$ за умови, що $|U(t)-at| \le b(t+1)^\alpha$.

Продовжуючи міркування попереднього розділу, накладемо на величину $|U(t)-at|$ більш слабкі умови.
Нехай для деяких $a, b > 0, \alpha \in (0,1)$ виконується

$$|U(t)-at| \le b(t+1)^\alpha, \quad t \ge 0 \tag{$**$}$$

Бажаємо дізнатися, для яких порядків згортки $n(t)$ за умов $(**)$ буде виконуватись асимптотичне співвідношення (1).
Лема 2. Доведемо, що за припущення $(**)$ виконується нерівність

$$\left| \int_{[0,t]} (t-y)^n dU(y) - \frac{at^{n+1}}{n+1} \right| \le b(t+1)^\alpha t^n, , \quad t \ge 0$$

Доведення. Проведемо доведення за індукцією з використанням рівності (3).
Для $n=1$:

$$\left| \int_{[0,t]} (t-y) dU(y) - \frac{at^2}{2} \right| = \left| \int_0^t U(y)dy - a\int_0^t ydy \right| = \left| \int_0^t (U(y)-ay)\, dy \right| \le$$

$$\le \int_0^t |U(y)-ay|dy \le \int_0^t b(y+1)^\alpha dy \le b(t+1)^\alpha \int_0^t dy = b(t+1)^\alpha t.$$

Нехай нерівність виконується для деякого n, тоді для $n+1$ маємо

$$\left| \int_{[0,t]} (t-y)^{n+1} dU(y) - \frac{at^{n+2}}{n+2} \right| =$$

$$= \left| (n+1)\int_0^t \int_{[0,s]} (s-y)^n dU(y) ds - a\int_0^t s^{n+1} ds \right| \le$$

$$\le (n+1)\int_0^t \left| \int_{[0,s]} (s-y)^n dU(y) - \frac{as^{n+1}}{n+1} \right| ds \le$$

$$\leq (n+1)\int_0^t b(s+1)^\alpha s^n ds \leq b(t+1)^\alpha \int_0^t (n+1)s^n ds = b(t+1)^\alpha t^{n+1}. \quad \square$$

Теорема 3. Нехай справджується $(**)$. Тоді для функції $U^{*(n)}(t)$ виконується нерівність

$$\left| U^{*(n)}(t) - \frac{(at)^n}{n!} \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i b^{n-i}}{i!}(t+1)^{\alpha(n-i)} t^i, \quad t \geq 0 \tag{5}$$

Доведення. За індукцією для $n = 2$:

$$\left| U^{*(2)}(t) - \frac{(at)^2}{2} \right| =$$

$$= \left| \int_{[0,t]} (U(t-y) - a(t-y))dU(y) + \int_{[0,t]} a(t-y)dU(y) - \frac{(at)^2}{2} \right| \leq$$

$$\leq \int_{[0,t]} |U(t-y) - a(t-y)|dU(y) + a\left| \int_{[0,t]} (t-y)dU(y) - \frac{at^2}{2} \right| \leq$$

$$\leq \int_{[0,t]} b(t-y+1)^\alpha + ab(t+1)^\alpha t \leq b(t+1)^\alpha U(t) + ab(t+1)^\alpha t \leq$$

$$\leq b(t+1)^\alpha (b(t+1)^\alpha + at) + ab(t+1)^\alpha t = b^2(t+1)^{2\alpha} + 2ab(t+1)^\alpha t.$$

Друга нерівність виконується за припущенням задачі для першого доданку та за лемою 2 для другого доданку.

Якщо для деякого n нерівність виконується, то для $(n+1)$ крок індукції має вигляд

$$\left| U^{*(n+1)}(t) - \frac{(at)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \int_{[0,t]} \left| U^{*(n)}(t-y) - \frac{a^n(t-y)^n}{n!} \right| dU(y) +$$

$$+ \frac{a^n}{n!} \left| \int_{[0,t]} (t-y)^n dU(y) - \frac{at^{n+1}}{n+1} \right| \leq$$

$$\leq \int_{[0,t]} \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i b^{n-i}}{i!}(t-y+1)^{\alpha(n-i)}(t-y)^i dU(y) + \frac{a^n}{n!} b(t+1)^\alpha t^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i b^{n-i}}{i!} \int_{[0,t]} (t-y+1)^{\alpha(n-i)} (t-y)^i dU(y) + \frac{a^n}{n!} b(t+1)^\alpha t^n \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i b^{n-i}}{i!} (t+1)^{\alpha(n-i)} \int_{[0,t]} (t-y)^i dU(y) + \frac{a^n}{n!} b(t+1)^\alpha t^n \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i b^{n-i}}{i!} (t+1)^{\alpha(n-i)} \left(\frac{at^{i+1}}{i+1} + b(t+1)^\alpha t^i \right) + \frac{a^n}{n!} b(t+1)^\alpha t^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^{i+1} b^{n-i}}{(i+1)!} (t+1)^{\alpha(n-i)} t^{i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i b^{n-i+1}}{i!} (t+1)^{\alpha(n-i+1)} t^i + \frac{a^n}{n!} b(t+1)^\alpha t^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} \frac{a^i b^{n-i+1}}{i!} (t+1)^{\alpha(n-i+1)} t^i + \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{a^i b^{n-i+1}}{i!} (t+1)^{\alpha(n-i+1)} t^i =$$

$$= b^{n+1} (t+1)^{\alpha(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} (C_n^i + C_n^{i-1}) \frac{a^i b^{n-i+1}}{i!} (t+1)^{\alpha(n-i+1)} t^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i \frac{a^i b^{n-i+1}}{i!} (t+1)^{\alpha(n-i+1)} t^i. \quad \square$$

Отже, нерівність доведена. З неї робимо висновок, що для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ виконується $U^{*(n)}(t) \sim \frac{(at)^n}{n!}, \quad t \to \infty$. Розглянемо тепер $n = n(t) \to \infty \quad t \to \infty$. За міркуваннями, аналогічними до задачі **2**, досліджуємо, за яких $n(t)$ $(n-1)$-й доданок суми є $o\left(\frac{(at)^n}{n!}\right)$:

$$\frac{\frac{a^{n-1} b}{(n-1)!} C_n^{n-1} (t+1)^\alpha t^{n-1}}{\frac{(at)^n}{n!}} = \frac{n^2 b(t+1)^\alpha}{t} \to 0 \iff n = o\left(t^{\frac{1-\alpha}{2}}\right).$$

Тепер дослідимо, коли сума зростає, як її $(n-1)$-й доданок:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \frac{a^i b^{n-i}}{i!} (t+1)^{\alpha(n-i)} t^i}{\frac{a^{n-1} b}{(n-1)!} C_n^{n-1} (t+1)^\alpha t^{n-1}} \to 1 \iff \frac{\sum_{i=0}^{n-2} C_n^i \frac{a^i b^{n-i}}{i!} (t+1)^{\alpha(n-i)} t^i}{\frac{a^{n-1} b}{(n-1)!} C_n^{n-1} (t+1)^\alpha t^{n-1}} \to 0 \iff$$

$$\sum_{i=0}^{n-2} \frac{\frac{(n-1)!}{i!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{1}{n} b^{n-i-1} (t+1)^{\alpha(n-i-1)}}{(at)^{n-i-1}} \le \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{n^2 b(t+1)^\alpha}{at} \right)^{n-i-1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{n^2b(t+1)^\alpha}{at}\right)^i \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{n^2b(t+1)^\alpha}{at}\right)^i =$$

$$\frac{1}{1/\frac{n^2b(t+1)^\alpha}{at}-1} \to 0 \quad t\to\infty \iff n = o\left(t^{\frac{1-\alpha}{2}}\right).$$

Отже, отримали, що $U^{*(n)}(t) \sim \frac{(at)^n}{n!}, \quad t \to \infty$ для всіх $n(t)$ таких, що $n = o\left(t^{\frac{1-\alpha}{2}}\right)$.

4 Нерівність Лордена та асимптотика n-кратної згортки функції відновлення.

Тут і далі функція $U(t)$ - функція відновлення випадкового блукання (S_n). Якщо $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, то виконується нерівність Лордена ([1], с.24):

$$U(t) \leq \frac{t}{\mu} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2}, \quad t \geq 0, \quad \mathbb{E}\xi = \mu \tag{6}$$

Також нам відомо, що

$$U(t) \geq \frac{t}{\mu}, \quad t \geq 0$$

З цих тверджень отримуємо нерівність

$$\left|U(t) - \frac{t}{\mu}\right| \leq \frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2}, \quad t \geq 0$$

Вона дозволяє застосувати до функції $U(t)$ результат задачі **2**, а саме

$$U^{*(n)}(t) \sim \frac{t^n}{\mu^n n!}, \quad t \to \infty \iff n = o(\sqrt{t}).$$

5 Довести, що при $\mathbb{E}\xi^r < \infty, r \in (1,2)$ виконується $\lim_{t\to\infty} t^{r-2}\left(U(t) - \frac{t}{\mu}\right) = 0.$

Теорема 4. Нехай U є функцією відновлення випадкового блукання, що стартує в нулі та має моменти скінченного порядку $r \in (1,2)$, тобто $\mathbb{E}\xi^r < \infty$. Тоді виконується

$$\lim_{t\to\infty} t^{r-2}\left(U(t) - \frac{t}{\mu}\right) = 0 \tag{7}$$

Доведення. Доведемо, що $\mathbb{E}\widehat{S_0}^{\,r-1} < \infty$, де $\widehat{S_0}$ - випадкова величина з розподілом

$$\mathbb{P}\{\widehat{S_0} \le x\} = \frac{1}{\mu}\int_0^x \mathbb{P}\{\xi > y\}dy, \quad x > 0.$$

Розглянемо альтернативне представлення величини $\mathbb{E}\xi^r$:

$$\mathbb{E}\xi^r = \int_0^\infty x^r d\mathbb{P}\{\xi \le x\} = \int_0^\infty -x^r d\mathbb{P}\{\xi > x\} =$$

$$-x^r\mathbb{P}\{\xi > x\}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mathbb{P}\{\xi > x\}d(-x^r) = \int_0^\infty r x^{r-1}\mathbb{P}\{\xi > x\}dx.$$

Тепер розглянемо величину $\mathbb{E}\widehat{S_0}^{\,r-1}$:

$$\mathbb{E}\widehat{S_0}^{\,r-1} = \int_0^\infty x^{r-1}d\mathbb{P}\{\widehat{S_0} \le x\} = \int_0^\infty x^{r-1}d\left(\frac{1}{\mu}\int_0^x \mathbb{P}\{\xi > y\}dy\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty x^{r-1}\mathbb{P}\{\xi > x\}dx = \frac{1}{\mu r}\mathbb{E}\xi^r < \infty.$$

Знаємо, що ([1], с.20)

$$\mathbb{E}U(t - \widehat{S_0})\mathbb{1}_{\{\widehat{S_0} \le t\}} = \frac{t}{\mu}, \quad t \ge 0.$$

З цієї рівності маємо

$$U(t) - \frac{t}{\mu} = U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S_0} > t\} + \mathbb{E}\left(U(t) - U(t - \widehat{S_0})\right)\mathbb{1}_{\{\widehat{S_0} \le t\}} \le$$

$$\leq U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} + \mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \leq t\}}$$

Нерівність виконується за субадитивністю $U(t)$:

$$U(t) - U(t - \widehat{S}_0) \leq U(\widehat{S}_0).$$

Доведемо, що при $\mathbb{E}\widehat{S}_0^{\,r-1} < \infty$ виконується $\lim\limits_{t\to\infty} t^{r-1}\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = 0$:

$$\mathbb{E}\widehat{S}_0^{\,r-1} = \int_{[0,\infty)} x^{r-1} d\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \leq x\} \implies \lim_{t\to\infty} \int_{(t,\infty)} x^{r-1} d\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \leq x\} = 0$$

За монотонністю

$$\int_{(t,\infty)} x^{r-1} d\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \leq x\} \geq t^{r-1} \int_{(t,\infty)} d\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \leq x\} = t^{r-1}\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} \to 0.$$

За елементарною теоремою відновлення

$$lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 > 0 : \quad U(x) \leq \left(\frac{1}{\mu} + \varepsilon\right) x \text{ при } x \geq x_0,$$

звідки

$$U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} \sim \frac{t^{2-r}}{\mu} t^{r-1}\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = o\left(t^{2-r}\right), \quad t \to \infty,$$

і також для $t \geq x_0$

$$\mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \leq t\}} = \mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \leq x_0\}} + \mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{x_0 \leq \widehat{S}_0 \leq t\}} \leq$$

$$\leq O(\mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \leq 1\}}) + \left(\frac{1}{\mu} + \varepsilon\right) \mathbb{E}\widehat{S}_0\mathbb{1}_{\{x_0 \leq \widehat{S}_0 \leq t\}} \leq$$

$$\leq O(1) + \left(\frac{1}{\mu} + \varepsilon\right) \mathbb{E}\widehat{S}_0\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \leq t\}} \implies$$

$$\mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\le t\}} = O\left(\mathbb{E}\widehat{S}_0\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\le t\}}\right). \tag{8}$$

Доведемо, що при $\mathbb{E}\widehat{S}_0^{\,r-1} < \infty$ виконується

$$t^{r-2}\mathbb{E}\widehat{S}_0\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\le t\}} \to 0, \quad t\to\infty. \tag{9}$$

Розглянемо

$$\int_0^t \mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > y\}dy = \mathbb{E}(\widehat{S}_0 \wedge t) = \mathbb{E}\widehat{S}_0\mathbb{1}_{(\widehat{S}_0\le t)} + t\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\}.$$

За правилом Лопіталя

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > y\}dy}{t^{2-r}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\}}{(2-r)t^{1-r}} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{r-2}t\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = 0 \quad \text{бо} \quad \mathbb{E}\widehat{S}_0^{\,r-1} < \infty.$$

З (8) та (9) випливає

$$\mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\le t\}} = o\left(t^{2-r}\right).$$

Отже,

$$U(t) - \frac{t}{\mu} \le o\left(t^{2-r}\right) + o\left(t^{2-r}\right) \implies t^{r-2}\left(U(t) - \frac{t}{\mu}\right) \to 0, \quad t\to\infty. \quad \square$$

З доведеної рівності випливає, що $t^{r-2}\left(U(t) - \frac{t}{\mu}\right)$ обмежена, отже

$$\left|U(t) - \frac{t}{\mu}\right| \le bt^{2-r} < b(t+1)^{2-r}, \quad b > 0, \quad 2-r \in (0,1).$$

Тому до функції $U(t)$ за цих умов можна застосувати результат задачі **3**:

$$U^{*(n)}(t) \sim \frac{t^n}{\mu^n n!}, \quad t\to\infty \iff n = o\left(t^{\frac{1-(2-r)}{2}}\right) = o\left(t^{\frac{r-1}{2}}\right).$$

Висновки

У цій роботі були проведені дослідження асимптотичної поведінки n-кратної згортки монотонно неспадних, неперервних справа функцій. У задачі **1** було з'ясовано, що для фіксованого порядку згортки $n \in \mathbb{N}$ поведінка функції $U^{*(n)}(t)$ на нескінченності повністю визначається поведінкою самої функції $U(t)$.

Проте, якщо порядок згортки залежить від аргументу $n = n(t)$, то для отримання аналогічних результатів інформації про асимптотику першого порядку недостатньо, необхідно також робити припущення щодо обмеженості величини $|U(t) - at|$. При чому функція, що обмежує зверху цю величину, суттєво впливає на те, для яких саме порядків $n(t)$ зберігається ця асимптотична поведінка. Відповідні дослідження для обмеженості константою та деякою степеневою функцією були проведені у розділах **2** та **3**.

У розділах **4** та **5** результати попередніх задач, що були отримані для довільних функцій U, були застосовані до функцій відновлення випадкових блукань.

Література

[1] Іксанов, О. М. (2012) Елементи теорії відновлення. Електронний навчальний посібник. Київ, 121 с.

[2] Ширяев, А. Н. (2007) Вероятность - 1. Москва: МЦНМО, 552 с.