orientés

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

rriati ice adjacem

matrices adjacentes

puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléen des matrices

Fermeture transitiv

La méthode

PERT/MPN

Exemple 1

Niveau des somme

Exercice 9

Exemple 2

Exercice 10

Graphes et ordonnancement

Laurent Debize

Mathématiques appliquées à l'informatique

Graphes simples orientés

1 Graphes simples orientés

Graphes: définitions

Prédécesseurs - successeurs

Matrice adjacente

Graphes : définitions

Graphes simples orientés

Graphe - représentation sagittale

On considère l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$ où A, B, C et D sont 4 points du plan.

L'ensemble

 $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}, \text{ formé}$ par des couples d'éléments de S, définit un graphe orienté sur S.

Graphes : définitions

Predecesseurs successeurs

Matrice adjacer

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Exemple 1

d'un grapi

Evennle 2

Exercice 1

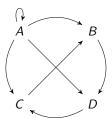
Graphes simples orientés

Graphe - représentation sagittale

On considère l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$ où A, B, C et D sont 4 points du plan.

L'ensemble

 $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$, formé par des couples d'éléments de S, définit un **graphe orienté** sur S.



Somme, produit puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Niveau des somn

Exercice !

Exemple 2

Exercice

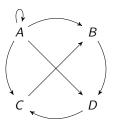
Graphes simples orientés

Graphe - représentation sagittale

On considère l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$ où A, B, C et D sont 4 points du plan.

L'ensemble

 $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$, formé par des couples d'éléments de S, définit un **graphe orienté** sur S.



Les couples de G sont représentés par des arcs orientés. Le schéma ci-dessus est la représentation sagittale de G (ou représentation par points et flèches).

Graphes simple

Graphes : définitions

Prédécesseurs –

Natrice adjace

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

des matrices

Fermeture transition

La méthode

PERT/MPI

Définitio

Niveau des somme

Exercice

Exemple 2

_ .

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

Pour la représentation sagittale précédente :

• Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**

Graphes simple orientés

Graphes : définitions

successeurs

iviatrice adjace

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, prod puissance des matrices

puissance booléens des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPM

Définition

Niveau des somm

Evercice

Exemple 2

Evereiee

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**
- Les couples de *G* sont appelés **arcs**

Debize

Graphes : définitions

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit - chemin hamiltonien

Définitions

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés sommets
- Les couples de G sont appelés arcs
- (A, D) est un **chemin de longueur 1** qui va de A à D et (A, B, D, C) est un **chemin de longueur 3** qui va de A à C

Graphes simpl

Graphes : définitions

successeurs

Natrice adjace

Opérations sur le matrices

Somme, produ puissance des matrices

puissance booléens des matrices

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommet

Exercice 9

Evercice :

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**
- Les couples de *G* sont appelés **arcs**
- (A, D) est un chemin de longueur 1 qui va de A à D et
 (A, B, D, C) est un chemin de longueur 3 qui va de A à C
- Le chemin (A, A) est appelé une **boucle**

Debize

Graphes : définitions

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit - chemin hamiltonien

Définitions

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés sommets
- Les couples de G sont appelés arcs
- (A, D) est un **chemin de longueur 1** qui va de A à D et (A, B, D, C) est un **chemin de longueur 3** qui va de A à C
- Le chemin (A, A) est appelé une **boucle**
- Le chemin (B, D, C, B) est un **circuit**

Graphes : définitions

successeurs

Matrice adjacer

Opérations sur le matrices

Somme, produ puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transitiv

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9 Exemple 2

Exercice

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**
- Les couples de *G* sont appelés **arcs**
- (A, D) est un chemin de longueur 1 qui va de A à D et
 (A, B, D, C) est un chemin de longueur 3 qui va de A à C
- Le chemin (A, A) est appelé une boucle
- Le chemin (B, D, C, B) est un circuit
- (A, B, D, C) est un chemin de longueur 3 qui passe par **tous les sommets** du graphe, et ne passe **qu'une fois** par chacun d'eux : (A, B, D, C) est un chemin **hamiltonien**

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

puissance booléen des matrices

d'un graphe

La méthode

PERT/MF

Exemple 1

d'un graphe

Exercice

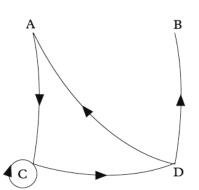
Exemple 2

Evercice 1

Exercice 1

On considère le graphe suivant.

- Définir G en extension.
- Donner 2 chemins de longueur 3 partant de D.
- Donner un chemin hamiltonien.



Graphes : définition

Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur

matrices adjacentes

puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPM

Définition

Niveau des somme

Exercice 9

Evereice 1

Prédécesseurs – successeurs

Définitions

Si (A, B) est un arc d'un graphe alors on dira que A est un **prédécesseur** de B et que B est un **successeur** de A.

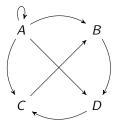
L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet A est noté $\Gamma^-(A)$ et l'ensemble des successeurs d'un sommet A est noté $\Gamma^+(A)$.

Prédécesseurs successeurs

matrices

des matrices

Prédécesseurs – successeurs



Sommets	Successeurs Γ ⁺	Prédécesseurs Γ^-
А		
В		
С		
D		

orientés

Graphes : définition

Prédécesseurs – successeurs

Matrice adjace

Opérations sur matrices adiacentes

Somme, produ puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléer des matrices

Fermeture transition

La méthode

PERT/MP

Exemple

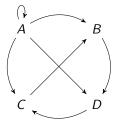
Niveau des somm d'un graphe

Exercice

Exemple 2

Exercice 1

Prédécesseurs – successeurs



Sommets	Successeurs Γ ⁺	Prédécesseurs Γ^-
А	A, B, C, D	A
В		
С		
D		

Graphes : définition

Prédécesseurs – successeurs

Matrice adjace

Opérations sur matrices

Somme, produ puissance des matrices

Somme, produit puissance boolée des matrices

Fermeture transition d'un graphe

La méthode

PERT/MP Définition

Exemple

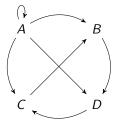
Niveau des somm d'un graphe

Exercice

Exemple 2

Exercice 1

Prédécesseurs – successeurs



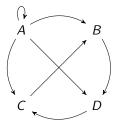
Sommets	Successeurs Γ ⁺	Prédécesseurs Γ^-
А	A, B, C, D	A
В	D	A,C
С		
D		

Prédécesseurs successeurs

matrices

des matrices

Prédécesseurs – successeurs



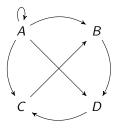
Sommets	Successeurs Γ ⁺	Prédécesseurs Γ^-
А	A, B, C, D	A
В	D	A,C
С	В	A,D
D		

Prédécesseurs successeurs

matrices

des matrices

Prédécesseurs – successeurs



Sommets	Successeurs Γ ⁺	Prédécesseurs Γ^-
А	A, B, C, D	A
В	D	A,C
С	В	A,D
D	С	A,B

Graphes : définition

Prédécesseurs – successeurs

Matrice adjace

Opérations sur matrices

Somme, produi

Somme, produit puissance booléer

Fermeture transit

La méthode

Définition

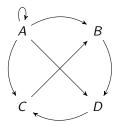
Nivoru dos som

Eversies

Evennle 2

_ . .

Prédécesseurs - successeurs



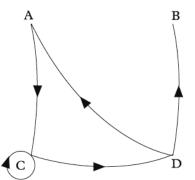
Sommets	Successeurs Γ ⁺	Prédécesseurs Γ^-
А	A, B, C, D	A
В	D	A,C
С	В	A,D
D	С	A,B

$$\Gamma^{-}(A) = \{A\} \text{ et } \Gamma^{+}(A) = \{A, B, C, D\}$$

Prédécesseurs successeurs

Exercice 2

On considère le graphe suivant. Déterminer l'ensemble Γ^- des prédécesseurs de A, B, C et D et l'ensemble Γ^+ de leurs successeurs.



Matrice adjacente

A un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.

Graphes : définitions

Matrice adjacente

Opérations sur le matrices

Somme, produ puissance des

Somme, produit puissance booléer des matrices

Fermeture transit d'un graphe

La méthode

PERT/MP

Exemple

Niveau des somm d'un graphe

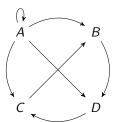
Exercice !

Exemple 2

Evercice 1

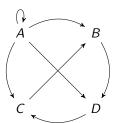
Matrice adjacente

 \grave{A} un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.



Successeurs Prédécesseurs	А	В	С	D
А	1	1	1	1

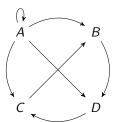
À un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.



Successeurs Prédécesseurs	А	В	С	D
А	1	1	1	1
В	0	0	0	1

Matrice adjacente

À un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.



Successeurs Prédécesseurs	А	В	С	D
А	1	1	1	1
В	0	0	0	1
C	0	1	0	0

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produ puissance des

Somme, produit of puissance booléer

Fermeture transiti

La méthode

PERT/MP

Exemple 1

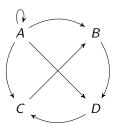
d'un graph

Evennle 2

. . .

Matrice adjacente

 \grave{A} un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.



Successeurs Prédécesseurs	А	В	С	D
А	1	1	1	1
В	0	0	0	1
C	0	1	0	0
D	0	0	1	0

Somme, produ puissance des matrices

puissance booléer des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somm

Exercice

Exemple 2

Exercice 10

Matrice adjacente

On appelle alors **matrice adjacente** M associée au graphe pour les sommets A, B, C et D dans cet ordre, la matrice booléenne :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produi puissance des

Somme, produit e puissance booléen

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode

PERT/MPN

Evennele

Niveau des somn d'un graphe

Exercice !

Exemple 2

Exercice 1

Matrice adjacente

On appelle alors **matrice adjacente** M associée au graphe pour les sommets A, B, C et D dans cet ordre, la matrice booléenne :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rappel:

Successeurs Prédécesseurs	А	В	С	D
A	1	1	1	1
В	0	0	0	1
С	0	1	0	0
D	0	0	1	0

Orientés
Graphes : définition

Matrice adjacente

0 / 2

matrices adjacentes

Somme, produ puissance des

Somme, produit e puissance booléer

Fermeture transiti

La méthode

PERT/MPN

E.......

Niveau des somme d'un graphe

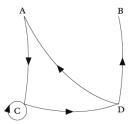
Exercice

Exemple 2

. . .

Exercice 3

1 Déterminer la matrice adjacente du graphe suivant.



② On considère la matrice adjacente ci-dessous d'un graphe G. Déterminer la représentation sagittale de G.

Successeurs Prédécesseurs	А	В	С
A	0	0	0
В	1	0	1
С	1	1	0

Graphes simples

orientés Granhes : définiti

Matrice adjacen

Opérations sur les matrices adjacentes

Somme, produit of puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Delinitio

Niveau des somme

Exercice !

Exemple 2

1 Graphes simples orientés Graphes : définitions

Prédécesseurs – successeurs

Matrice adjacente

Opérations sur les matrices adjacentes Somme, produit et puissance des matrices Somme, produit et puissance booléens des matrices Fermeture transitive d'un graphe

3 La méthode PERT/MPM

Définition

Exemple 1

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Exercice 10

Graphes : définition

Matrice adjacer

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléens des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Niveau des somme

Exercice 9

Exemple 2

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

Définitions

Les opérations somme, produit et puissance des matrices ont été définies dans le cours de $1^{\rm re}$ année chapitre « Calcul matriciel ». On les note A+B, $A\times B$ et A^n .

Graphes simples

Graphes : définition

Matrice adjacer

Opérations sur le matrices

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPM

PERT/MPN Définition

Niveau des somme

Exercice 9

Evercice

Somme, produit et puissance des matrices

Définitions

Les opérations somme, produit et puissance des matrices ont été définies dans le cours de 1^{re} année chapitre « Calcul matriciel ». On les note A+B, $A\times B$ et A^n .

Propriété

Soit M la matrice adjacente associée à un graphe.

Le coefficient m_{ij} de la matrice M^n indique le nombre de chemins de longueur n reliant le i-ième prédécesseur au j-ième successeur.

Somme, produit et puissance des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 la matrice adjacente associée au graphe :

Graphes et ordonnancement

L. Debize

Graphes s

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices adiacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléens des matrices

d'un graphe

La méthode

Définition

Exemple 1 Niveau des sommets

Evercice

Evennle 2

Evercice 10



Somme, produit et puissance des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 la matrice adjacente associée au graphe :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphes et ordonnancement

L. Debize

Graphes s

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléens des matrices

Fermeture transition d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Exemple 1 Niveau des sommets

Exercice

Exemple 2

Evereice 10



Somme, produit et

puissance des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 la matrice adjacente associée au graphe :

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphes et ordonnancement

L. Debize

Graphes si

Graphes : définitions Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices adiacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléens des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Exemple 1 Niveau des sommets

Exercice

Evennle 2

Evercice 10



Matrice adjaces

Opérations su

matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

Somme, produit puissance boolé

Fermeture transitiv

La méthode

PERT/MP

Définitio

Niveau des som

Evercice

Evennle 2

Evercice 10

$$\mathcal{M}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Somme, produit et puissance des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



• $m_{11} = 1$ indique qu'il existe 1 chemin de longueur 2 reliant A à A.

4 D > 4 A > 4 B > 4 B >

Matrice adjacen

Opérations sur l matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléer des matrices

Fermeture transitiv

La méthode

PERT/MP

Exemple

Niveau des somm d'un graphe

Exemple 2

Exercice :

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- m₁₁ = 1 indique qu'il existe 1 chemin de longueur 2 reliant A à A.
- $m_{12} = 2$ indique qu'il existe 2 chemins de longueur 2 reliant $A \ni B$.

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPI

PERT/MP Définition

Exemp

Niveau des somr d'un graphe Exercice 9

Exercice 9 Exemple 2

Exercice

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- m₁₁ = 1 indique qu'il existe 1 chemin de longueur 2 reliant A à A.
- m₁₂ = 2 indique qu'il existe 2 chemins de longueur 2 reliant A à B.
- m₂₁ = 0 indique qu'il existe 0 chemin de longueur 2 reliant B à A...



Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit puissance boolé des matrices

Fermeture transiti

d'un graphe

La méthode PERT/MP

Définition

Exemple

d'un graphe

Exercice

Exemple 2

Exercice 1

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Somme, produit et puissance des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



En lisant les lignes de M^2 il existe :

• 1+2+2+2 chemins de longueur 2 partant de A, Prédécesseurs – successeurs

Matrice adjacer

matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MP

PERT/MF Définition

Exemple

Niveau des somn d'un graphe

Exercice

Exemple

Exercice

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



En lisant les lignes de M^2 il existe :

- 1+2+2+2 chemins de longueur 2 partant de *A*,
- 1 chemin de longueur 2 partant de B, etc.

successeurs

Matrice adjacen

matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MP

Définition

Exemple

Niveau des somn d'un graphe

Exercice

Exercice

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



En lisant les lignes de M^2 il existe :

- 1+2+2+2 chemins de longueur 2 partant de *A*,
- 1 chemin de longueur 2 partant de B, etc.
- et au total 10 chemins de longueur 2.

Matrice adiace

Opérations su

matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

Somme, produit puissance boolé

Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Exemple

d'un graphe

Exercice

Exemple 2

Exercice 1

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Somme, produit e puissance booléer

Fermeture transition

La méthode

PERT/MP

Exemple

d'un graphe

Exercice 9

Exercice

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



En lisant les colonnes de M^2 , il existe :

• 1+0+0+0 chemins de longueur 2 arrivant en A,

orientés Graphes : définition

Matrice adjacen

Opérations sur l matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transition d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Exemple

Niveau des somm d'un graphe

Exercice

Exercice

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



En lisant les colonnes de M^2 , il existe :

- 1+0+0+0 chemins de longueur 2 arrivant en A,
- 2+0+0+1 chemins de longueur 2 arrivant en B.



Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur

matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transiti d'un graphe

La méthode

Définition

Exemple 1

d'un graph

Exercice 9

Exercice 10

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$M^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice adiac

Opérations sur matrices

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transition d'un graphe

La méthode PERT/MPN

PERT/MPN Définition

Niveau des sor

d'un graphe

Exercice 9

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe:

• 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,

successeurs

Matrice adjacer

matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléer des matrices

Fermeture transition

La méthode

PERT/MPN

Définition

Niveau des somme d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,
- 1 chemin de longueur 3 partant de B,

Prédécesseurs – successeurs

Opérations su

matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode PERT/MPN

PERT/MPN Définition

Exemple 1 Niveau des somn

d'un graphe Evercice 9

Exemple 2

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,
- 1 chemin de longueur 3 partant de B,
- et au total 13 chemins de longueur 3,

Matrice adjace

Opérations sur matrices adiacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode PERT/MPM

PERT/MPN Définition

Exemple 1 Niveau des son

d'un graphe

Exemple 2

Exercice

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,
- 1 chemin de longueur 3 partant de B,
- et au total 13 chemins de longueur 3,
- 1 chemin de longueur 3 arrivant en A,

Graphes : définition Prédécesseurs =

Matrice adjace

Opérations sur matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transition d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somn

d'un graphe Evercice 9

Exemple 2

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,
- 1 chemin de longueur 3 partant de B,
- et au total 13 chemins de longueur 3,
- 1 chemin de longueur 3 arrivant en A,
- 4 chemins de longueur 3 arrivant en B...

Matrice adjace

Opérations sur matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices

des matrices

Fermeture transiti

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Niveau des somme

d'un graphe

Exemple 2

Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 la matrice adjacente associée à un graphe

G.

- Déterminer le nombre de chemins de longueur 2 reliant deux points quelconques du graphe.
- Combien existe-t-il de chemins de longueur 2 arrivant en C?

Orientés Graphes : définition

successeurs

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices adjacentes

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somm

Exercice !

Exemple 2

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

Définitions

Soient M et M' deux matrices booléennes. La somme booléenne des matrices M et M', notée $M \oplus M'$, est la matrice obtenue en effectuant la somme booléenne des coefficients de M et M'.

On définit de façon analogue le produit matriciel booléen $M \otimes M'$ et la puissance n-ième booléenne d'une matrice M, notée $M^{[n]}$: $M^{[n]} = M \otimes M \otimes \ldots \otimes M$ (M est présente n fois).

Somme, produit et

puissance booléens dec matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Définitions

Soient M et M' deux matrices hooléennes. La somme hooléenne des matrices M et M', notée $M \oplus M'$, est la matrice obtenue en effectuant la somme booléenne des coefficients de M et M'.

On définit de façon analogue le produit matriciel booléen $M \otimes M'$ et la puissance *n*-ième booléenne d'une matrice M, notée $M^{[n]}$: $M^{[n]} = M \otimes M \otimes \ldots \otimes M$ (M est présente n fois).

Rappel

Pour les constantes booléennes 0 et 1 :

$$0+0=0$$
 $1+0=1$ $1+1=1$
 $0\cdot 0=0$ $1\cdot 0=0$ $1\cdot 1=1$

Matrice adjace

operations si matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transitive

d'un graphe

PERT/MPI

Définition

Niveau des somm

Exercice

Exemple 2

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

Soient
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Matrice adjace

Opérations si matrices adiacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Niveau des somn

Exercice

Exemple 2

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

Soient
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Soient
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Soient
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice adjace

Opérations sur matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transitive

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somn d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

Soient
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Somme, produit et puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices

d'un graphe

PERT/MPN

Définition

Niveau des somm d'un graphe

Exercice 9

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

Soient
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice adjaces

Opérations sur les matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode

PERT/MPN

Niveau des somme

Exercice 9

Exemple 2

.

Somme, produit et puissance des matrices

Remarques

Soit *M* une matrice carrée quelconque. Alors :

① On note $M^{[1]}$ la matrice booléenne qui lui est associée (en conservant les 0 et en remplaçant chaque nombre non nul par 1).

Matrice adjacer

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode PERT/MPM

Définition

Niveau des somme d'un graphe

Exercice 9

Evercice :

Somme, produit et puissance des matrices

Remarques

Soit *M* une matrice carrée quelconque. Alors :

- **0** On note $M^{[1]}$ la matrice booléenne qui lui est associée (en conservant les 0 et en remplaçant chaque nombre non nul par 1).
- **2** Pour déterminer $M^{[n]}$ on pourra :
 - soit déterminer $M^n = M \times M \times ... \times M$ (M étant présente n fois) puis prendre la matrice booléenne $M^{[n]}$ associée,

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPM

Définition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9
Exemple 2

Exercice :

Somme, produit et puissance des matrices

Remarques

Soit M une matrice carrée quelconque. Alors :

- ① On note $M^{[1]}$ la matrice booléenne qui lui est associée (en conservant les 0 et en remplaçant chaque nombre non nul par 1).
- **2** Pour déterminer $M^{[n]}$ on pourra :
 - soit déterminer Mⁿ = M × M × ... × M (M étant présente n fois) puis prendre la matrice booléenne M^[n] associée,
 - soit déterminer directement $M^{[n]} = M^{[1]} \otimes M^{[1]} \otimes \ldots \otimes M^{[1]}$ $(M^{[1]}$ étant présente n fois).

Graphes : définition Prédécesseurs –

Natrice adjace

Opérations sur l matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

matrices

Somme, produit et puissance booléens

des matrices
Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somme

Exercice

Exemple 2

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
 alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

matrices adjacentes

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitive

d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Niveau des som

Exercice

Exemple 2

Exercice 10

Somme, produit et puissance des matrices

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
 alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
 alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$

puissance des matrices

Somme, produit et

puissance booléens des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des som

Exercice

Exemple 2

Exercice 10

Somme, produit et puissance des matrices

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
 alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
 alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

successeurs

Opérations sur

matrices adjacentes

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode

PERT/MPI Définition

Niveau des som

d'un graph

Evennle 2

Evercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
 alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
 alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ d'où $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Somme, produit et puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somme

Exercice 9

Exemple 2

Exercice

Somme, produit et puissance des matrices

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
 alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
 alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ d'où $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ou alors
$$M^{[2]}=M^{[1]}\otimes M^{[1]}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=$$

Graphes : définition Prédécesseurs –

Matrice adjace

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somme d'un graphe

Exercice !

Exemple 2

Exercice

Somme, produit et puissance des matrices

Exemples

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
 alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Si
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
 alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

d'où
$$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou alors
$$M^{[2]}=M^{[1]}\otimes M^{[1]}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Somme, produit et

puissance booléens des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Propriété

Un coefficient non nul de $M^{[n]}$ indique qu'il existe au moins un chemin de longueur n reliant deux points du graphe (propriété admise).

orientés

Graphes : définition

Prédécesseurs – successeurs

Matrice adjace

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

matrices

Somme, produit et puissance booléens

des matrices
Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Exemple 1

d'un grap

E 1.0

Evercice 10

On considère les matrices
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices $M \oplus M'$, $M' \otimes M$, $M^{[2]}$, $M'^{[3]}$

orientés

successeurs Matrico adiacon

Opérations su matrices

Somme, produit

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices

Fermeture transiti d'un graphe

La méthode PERT/MP

Définition

Définition

Niveau des somme d'un graphe

Exercice

Exemple 2

Exercice 10

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Reprenons
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphes et ordonnancement

L. Debize

Graphes s

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices adjacentes

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitiv

d'un graphe

PERT/MPM

Définition Exemple 1

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Evercice 10



Somme, produit et puissance booléens des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Reprenons
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Graphes et ordonnancement

L. Debize

Graphes s

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices adjacentes

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitiv

d'un graphe

PERT/MPM

Définition Exemple 1

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Evercice 10



Somme, produit et puissance booléens des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Reprenons
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphes et ordonnancement

L. Debize

Graphes s

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices adjacentes

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitiv

d'un graphe

PERT/MPM

Définition Exemple 1

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Evercice 10



Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transition

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somr d'un graphe

Exercice

Evercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Reprenons
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe des chemins :

• allant de A vers A, B, C et D,

Graphes et ordonnancement

L. Debize

Graphes s

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices adjacentes

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitiv

d'un graphe

PERT/MPM

Définition Exemple 1

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Evercice 10



Somme, produit of puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transiti d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somi d'un graphe

Exercice !

Evercice

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Reprenons
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe des chemins :

- allant de A vers A, B, C et D,
- allant de B vers C, etc.

Graphes et ordonnancement

L. Debize

Graphes :

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices adjacentes

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPM

PERT/MPM Définition

Exemple 1 Niveau des sommets

Exercice !

Exemple 2

Evercice 10



Somme, produit et

puissance booléens des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Reprenons
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe des chemins :

- allant de A vers A. B. C et D.
- allant de B vers C, etc.
- il y a au total 7 couples de points que l'on peut relier par des chemins de longueur 2.

Graphes et ordonnancement

L. Debize

Graphes :

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices adjacentes

puissance des matrices Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPM

PERT/MPM Définition

Exemple 1 Niveau des sommets

Exercice !

Exemple 2

Evercice 10



Somme, produit et puissance booléens des matrices

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

On cherche l'existence de chemins de longueur 3 :

$$M^{[3]} = M^{[2]} \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Graphes : définition

successeurs

watrice adjace

matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens

des matrices
Fermeture transitiv

d'un graphe

PERT/MPN

Définitio

Niveau des som

Exercice

_ . .

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

On cherche l'existence de chemins de longueur 3 :

$$M^{[3]} = M^{[2]} \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Graphes : définition

Matrice adjacer

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des

matrices

Somme, produit et

puissance booléens des matrices Fermeture transitive

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somm

Exercice 9

Exercice 1

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

On cherche l'existence de chemins de longueur 3 :

$$M^{[3]} = M^{[2]} \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il n'existe pas de chemin de longueur 3 allant de B vers A, C et D, etc.

orientés

Granhes : définitio

Graphes : définition

Matrice adjace

Opérations sur le matrices adiacentes

Somme, produit et puissance des

Somme, produit et puissance booléens

des matrices
Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somm

d'un graphe

Evennle 2

Evereice 1

Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 la matrice adjacente associée à un graphe

(

Existe-t-il au moins un chemin de longueur 3 reliant deux points du graphe?

Formeture transitive d'un graphe

Fermeture transitive d'un graphe

Définition

Soit un graphe G. On appelle fermeture transitive du graphe G, et non note G^* le graphe obtenu en complétant G de la façon suivante : s'il existe un chemin allant d'un certain X à un certain Y, alors on rajoute l'arc (X, Y) à G.

Formeture transitive d'un graphe

Fermeture transitive d'un graphe

Définition

Soit un graphe G. On appelle fermeture transitive du graphe G, et non note G^* le graphe obtenu en complétant G de la façon suivante : s'il existe un chemin allant d'un certain X à un certain Y, alors on rajoute l'arc (X, Y) à G.

Remarques

On rappelle que : chemin ≠ arc

On a évidemment : G ⊂ G*

Graphes simple orientés

Graphes : définition

Natrice adjacent

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produi puissance des matrices

matrices Somme, produit puissance boolé

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode

PERT/MP

Definition

Niveau des somme

Exercice !

Exemple 2

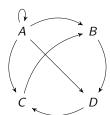
Exercice 1

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

On considère le graphe

 $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.



Matrice adjacente

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit puissance boolée

Fermeture transitive d'un graphe

d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Niveau des somm

Exercice 9

Exemple 2

Exercice 1

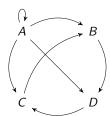
Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

On considère le graphe

 $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.

• On remarque le chemin (B, D, C): on rajoute donc l'arc (B, C)



Formeture transitive d'un graphe

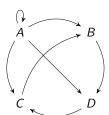
Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

On considère le graphe

 $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.

- On remarque le chemin (B, D, C): on rajoute donc l'arc (B, C)
- On remarque le chemin (B, D, C, B): on rajoute donc l'arc (B, B)



Formeture transitive d'un graphe

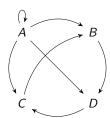
Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

On considère le graphe

 $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.

- On remarque le chemin (B, D, C): on rajoute donc l'arc (B, C)
- On remarque le chemin (B, D, C, B): on rajoute donc l'arc (B, B)
- On remarque le chemin (D, C, B): on rajoute donc l'arc (D, B), etc.



Formeture transitive d'un graphe

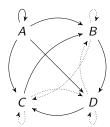
Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

On considère le graphe

 $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.

- On remarque le chemin (B, D, C): on rajoute donc l'arc (B, C)
- On remarque le chemin (B, D, C, B): on rajoute donc l'arc (B, B)
- On remarque le chemin (D, C, B): on rajoute donc l'arc (D, B), etc.
- On obtient ainsi la représentation de G^* (flèches pleines et pointillées):



Graphes : définition

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

Somme, produit puissance boolée

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode

PERT/MP

Exemple 1

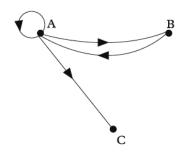
Niveau des somn d'un graphe

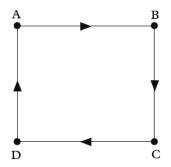
Exercice

Exemple 2

Evercice 1

Tracer la fermeture transitive des graphes ci-dessous :





Formeture transitive d'un graphe

Fermeture transitive d'un graphe

Propriété

Si G est un graphe simple orienté à n sommets de matrice M alors G^* a pour matrice adjacente :

$$M^{\star} = M \oplus M^{[2]} \oplus \ldots \oplus M^{[n]}$$

orientés Graphes : définition

Graphes : définitio

latrice adjacent

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produi puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléer

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode

PERT/MP

Exemple 1 Niveau des somm

Exercice

Exemple 2

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

Reprenons la matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe ${\it G}$ vu précédemment. Le graphe comportant n=4 sommets on calcule :

$$M^{\star} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]}$$

=

Matrice adjacent

Opérations sur les matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somm

Exercice

Exemple 2

Evercice 1

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

Reprenons la matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe G vu précédemment. Le graphe comportant n=4 sommets on calcule :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}^{\star} & = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{[2]} \oplus \mathcal{M}^{[3]} \oplus \mathcal{M}^{[4]} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Somme, produit puissance des matrices

des matrices
Fermeture transitive

Fermeture transit d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Niveau des somr

Exercice

Exemple 2

_ .

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

Reprenons la matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe G vu précédemment. Le graphe comportant n=4 sommets on calcule :

Formeture transitive

d'un graphe

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

Reprenons la matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe G vu précédemment. Le graphe comportant n = 4 sommets on calcule :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}^{\star} & = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{[2]} \oplus \mathcal{M}^{[3]} \oplus \mathcal{M}^{[4]} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On vérifiera sur la figure précédente que (B, A), (C, A) et $(D, A) \notin G^*$.

orientés

successeurs

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit

Fermeture transitive d'un graphe

La méthode

PERT/MPI

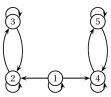
Exemple 1 Niveau des somme d'un graphe

Exemple 2

Exercice 8

La salle informatique d'une entreprise doit comprendre cinq postes numérotés de 1 à 5 et branchés en réseau selon le graphe orienté ci-contre.

Dans ce graphe, une flèche d'un poste A vers un poste B traduit le fait que l'on peut envoyer des données de A vers B.



- **1** Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe en prenant les numéros des postes dans l'ordre croissant.
- 2 Déterminer la matrice M^* de la fermeture transitive de ce graphe.
- 3 Pour permettre l'envoi de données entre les postes, même en cas de défaillance d'une connexion on utilise la fermeture transitive du graphe.

Dessiner le graphe correspondant à cette fermeture transitive.

Graphes simples orientés

Graphes : définition

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices

Somme, produit e puissance des matrices

des matrices

Fermeture transitiv

La méthode

PERT/MPM

Niveru des some

d'un graphe

- . .

Graphes simples orientés

Graphes : définitions
Prédécesseurs — successeurs

2 Opérations sur les matrices adjacentes

Somme, produit et puissance des matrices Somme, produit et puissance booléens des matrices Fermeture transitive d'un graphe

3 La méthode PERT/MPM

Définition

Exemple 1

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Exercice 10

Graphes simples orientés

Graphes : définitio

Matrice adjacente

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

des matrices Fermeture transiti

d'un graphe

PERT/MP

Définitio

Niveau des somme d'un graphe

Exemple 2

La méthode PERT en deux mots

- PERT = Program Evaluation and Review Technique
- Méthode d'ordonnancement et d'optimisation pour la réalisation de projets comportant un grand nombre de tâches.
- Créée en 1958 à la demande de la marine américaine, pour son programme de missiles balistiques nucléaires miniaturisés Polaris
- Objectif rattraper le retard sur l'URSS (projet avec 9000 sous-traitants, 250 fournisseurs). Delai initial: 7 ans. Grâce au PERT: 4 ans
- Utile pour planifier des travaux de construction de maisons, de navires, d'avions
- Utilise les graphes orientés décrivant des tâches et des étapes
- Une méthode similaire a été inventée la même année par le Français Bernard Roy sous le nom de MPM pour « Méthode des Potentiels Metra » pour l'usine de fabrication de villebrequins Mavilor.

Définition

La méthode MPM

Définitions

On appelle tâche ou étape le déroulement dans le temps d'une opération.

Orientés Graphes : définitio

successeurs

Matrice adjacen

Opérations sur le matrices adiacentes

Somme, produit puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

PERT/MF

Définition

Exemple 1

d'un graphe

Exemple 2

Evercice

La méthode MPM

Exemple 1

La construction de 2 immeubles doit être réalisée à partir des 2 projets choisis parmi 3 conçus simultanément. La planification des travaux nécessite les tâches ci-dessous :

a : conception du projet 1 (durée : 3 mois)

b : conception du projet 2 (durée : 3 mois)

3 (durée : 3 mois)

c : conception du projet 3 (durée : 3 mois)

d : analyse et choix des 2 projets (durée : 15 jours)

e : réalisation de l'immeuble 1 (durée : 4 mois)

f : réalisation de l'immeuble 2 (durée : 7 mois)

g : réception des travaux / reprise de finitions (durée : 1

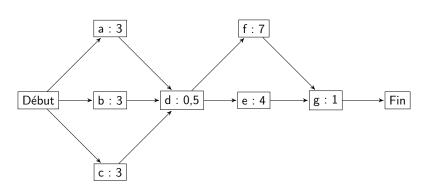
mois)

Exemple 1

La méthode MPM

Exemple 1

L'application de la méthode MPM donnera ce graphe où les nombres expriment des mois :



Graphes : définition

Natrice adjace

Opérations sur le matrices

Somme, produ puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

PERT/MPN

Exemple 1

Niveau des somme d'un graphe

Exercice 9

. . . .

La méthode MPM

Remarques

 Une tâche est représentée par un rectangle dans lequel on indique le nom de la tâche et la durée de réalisation de celle-ci. Le positionnement des tâches doit respecter les niveaux du graphe.

Exemple 1

La méthode MPM

Remarques

- Une tâche est représentée par un rectangle dans lequel on indique le nom de la tâche et la durée de réalisation de celle-ci. Le positionnement des tâches doit respecter les niveaux du graphe.
- Les contraintes d'antériorité sont représentées par des flèches. Les flèches sont de durée nulle.

Graphes : définition

Matrice adjacen

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produi puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens des matrices

des matrices Fermeture transiti

La méthode

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Exemple 2

Exercice 10

Niveaux des sommets d'un graphe

Définition

On appelle **graphe simple orienté** un graphe orienté ne contenant pas de circuit (et donc pas de boucles).

Un graphe simple orienté peut être ordonné par niveaux.

Graphes simples

Graphes : définition

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices adiacentes

Somme, produi puissance des matrices

puissance booléens des matrices

Fermeture transiti d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition Exemple 1

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Niveaux des sommets d'un graphe

Définition

On appelle **graphe simple orienté** un graphe orienté ne contenant pas de circuit (et donc pas de boucles).

Un graphe simple orienté peut être ordonné par niveaux.

Définition

On appelle **sommets de niveau 0** dans un graphe simple orienté, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur.

Si l'on note S l'ensemble des sommets du graphe et S_0 l'ensemble des sommets de niveau 0, on appellera **sommets de niveau 1**, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur dans l'ensemble $S \setminus S_0$ et ainsi de suite.

Graphes simples

Graphes : définitions Prédécesseurs –

Natrice adjacent

Opérations sur l matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléen

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Evenule 3

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Е
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Sommets	Prédécesseurs
А	

Niveau des sommets d'un graphe

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Е
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
С	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Sommets	Prédécesseurs
Α	aucun

Graphes : définitions

Prédécesseurs =

Matrice adjacent

matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléer

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Exercice 9

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Е
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
С	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Prédécesseurs
aucun

Matrice adjacent

Opérations sur matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléen des matrices

Fermeture transitiv

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Exemple 2

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Е
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
С	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Sommets	Prédécesseurs
А	aucun
В	D, E

Niveau des sommets d'un graphe

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Ε
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Sommets	Prédécesseurs
Α	aucun
В	D, E
C	

Opérations su

matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléen des matrices

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Exercice 9

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Е
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Sommets	Prédécesseurs
Α	aucun
В	D, E
С	B, E

Graphes : définitions
Prédécesseurs –

Matrice adjacent

matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléer des matrices

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Exercice 9

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Ε
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
С	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Sommets	Prédécesseurs
Α	aucun
В	D, E
C	B, E
D	

Niveau des sommets d'un graphe

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Е
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Sommets	Prédécesseurs
Α	aucun
В	D, E
C	B, E
D	Α

Graphes simples orientés

successeurs

Opérations su

matrices adjacentes

puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléen

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Exemple 1 Niveau des sommets

d'un graphe

Exercice 9

Evercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Е
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
С	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Sommets	Prédécesseurs
Α	aucun
В	D, E
C	B, E
D	Α
E	

Matrice adjacent

matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

Somme, produit e puissance booléer des matrices

Fermeture transitiv d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Ε
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
С	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Sommets	Prédécesseurs
Α	aucun
В	D, E
С	B, E
D	Α
E	A

Graphes : définitions Prédécesseurs –

Opérations sur

matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

des matrices
Fermeture transiti

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs Prédécesseurs	Α	В	С	D	Е
A	0	0	0	1	1
В	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet?

Sommets	Prédécesseurs
Α	aucun
В	D, E
C	B, E
D	Α
E	Α

Le sommet A n'a pas de prédécesseur, il est donc de niveau 0 et $S_0 = \{A\}$.

orientés

Graphes : définitions Prédécesseurs –

Matrice adiace

Opérations su matrices adiacentes

Somme, produit puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transition d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Exemple

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs
В	
С	
D	
Е	

Graphes : définition Prédécesseurs – successeurs

Opérations su matrices

Somme, produit puissance des

Somme, produit

Fermeture transitiv

La méthode

PERT/MPI

Exemple

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice

Eversies 10

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs
В	D, E
C	
D	
Е	

orientés Granhes définition

Graphes : définition

Matrice adjace

Opérations sur matrices adjacentes

puissance des matrices

des matrices

Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Exercice s

E.....10

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs
В	D, E
С	B, E
D	
E	

Niveau des sommets d'un graphe

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs
В	D, E
C	B, E
D	aucun
E	

orientés

Graphes : définition Prédécesseurs –

Matrice adjace

Opérations sur matrices adjacentes

puissance des matrices

des matrices

Fermeture transitiv

d'un graphe

La méthode PERT/MPI

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Exercice 9

Exercice 10

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs			
В	D, E			
C	B, E			
D	aucun			
E	aucun			

orientés Graphes : définition

Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

puissance booléens des matrices

d'un graphe

PERT/MP

Définition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

On retire tous les sommets de niveau 0 (c'est-à-dire A). Le tableau des prédécesseurs des sommets restants est :

Sommets	Prédécesseurs		
В	D, E		
C	B, E		
D	aucun		
E	aucun		

Les sommets D et E n'ont pas de prédécesseur dans $S \setminus S_0$, ils sont donc de niveau 1 et $S_1 = \{D, E\}$.

Niveau des sommets

d'un graphe

Niveaux des sommets d'un graphe

On recommence en retirant tous les sommets de niveau 0 (A) et de niveau 1 (D et E):

Sommets	Prédécesseurs
В	
С	

successeurs

Opérations sur l matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

puissance booléens des matrices

d'un graphe

PERT/MP

Définition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exercice 10

Niveaux des sommets d'un graphe

On recommence en retirant tous les sommets de niveau 0 (A) et de niveau 1 (D et E) :

Sommets	Prédécesseurs
В	aucun
C	

puissance des

Niveau des sommets d'un graphe

Niveaux des sommets d'un graphe

On recommence en retirant tous les sommets de niveau 0 (A) et de niveau 1 (D et E):

Sommets Prédécesse		
В	aucun	
C	В	

adjacentes

Somme, produit e puissance des

Somme, produit puissance boolé

des matrices
Fermeture transitiv

d'un graphe

PERT/MP

Définition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

On recommence en retirant tous les sommets de niveau 0 (A) et de niveau 1 (D et E) :

Sommets	Prédécesseurs
В	aucun
C	В

Le sommet B n'a pas de prédécesseur dans $S \setminus (S_0 \cup S_1)$, il est donc de niveau 2 et $S_2 = \{B\}$.

adjacentes
Somme, produit

puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Exercice 9

Exercice 10

Niveaux des sommets d'un graphe

Et enfin, on retire tous les sommets de niveau 0 (A), de niveau 1 (D et E) et de niveau 2 (B) :

Sommets	Prédécesseurs
С	

orientés

Graphes : définition

Matrice adjacen

Opérations sur matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des sommets

d'un graphe

Exercice

Exemple :

Exercice 10

Niveaux des sommets d'un graphe

Et enfin, on retire tous les sommets de niveau 0 (A), de niveau 1 (D et E) et de niveau 2 (B) :

Sommets	Prédécesseurs		
С	aucun		

Graphes : définitions Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur matrices

Somme, produit puissance des

Somme, produit e puissance booléen

des matrices Fermeture transitive

La méthode

PERT/MPN Définition

Exemple

Niveau des sommets d'un graphe

Exemple 2

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Et enfin, on retire tous les sommets de niveau 0 (A), de niveau 1 (D et E) et de niveau 2 (B) :

Sommets	Prédécesseurs			
С	aucun			

Le sommet C n'a pas de prédécesseur dans $S \setminus (S_0 \cup S_1 \cup S_2)$, il est donc de niveau 3 et $S_3 = \{C\}$.

Graphes simples orientés

Graphes : définition

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

puissance booléens des matrices

d'un graphe

PERT/MP

Evennle

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Evereiee 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
А	aucun				
В	D, E				
С	B, E				
D	Α				
E	Α				

orientés

Graphes : définition

Successeurs

Matrice adiacent

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

puissance booléens des matrices

Fermeture transiti d'un graphe

PERT/MP

Evennele

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

E.....

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
А	aucun	Α			
В	D, E				
С	B, E				
D	А				
E	Α				

Graphes simples orientés

Graphes : définition

Successeurs

Matrice adiacent

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des

puissance booléens des matrices

d'un graphe

PERT/MP

Evennle

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

E.....

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
А	aucun	Α			
В	D, E				
С	B, E				
D	Α		D		
E	Α		Е		

Graphes simples orientés

Graphes : définition

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des

puissance booléens des matrices

Fermeture transitiv

La méthod PERT/MP

Définition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Exercice 1

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
А	aucun	Α			
В	D, E			В	
С	B, E				
D	А		D		
E	Α		Е		

Graphes simples

Graphes : définition

successeurs

Matrice adiacent

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

des matrices
Fermeture transitiv

d'un graphe

PERT/MP

Delinition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice !

E.....

Niveaux des sommets d'un graphe

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
Α	aucun	Α			
В	D, E			В	
С	B, E				С
D	Α		D		
E	Α		Е		

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

puissance booléens des matrices

d'un graphe

PERT/MP

Définition

Niveau des sommets d'un graphe

Exercice 9

Evercice

Niveaux des sommets d'un graphe

On peut réunir toutes ces démarches en seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
Α	aucun	Α			
В	D, E			В	
С	B, E				С
D	А		D		
E	А		Е		

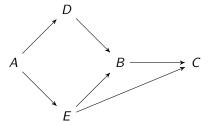
Le sommet C n'a pas de prédécesseur dans $S \setminus (S_0 \cup S_1 \cup S_2)$, il est donc de niveau 3 et $S_3 = \{C\}$.

Niveau des sommets

d'un graphe

Niveaux des sommets d'un graphe

On obtient donc le graphe orienté suivant, organisé par niveaux :



Exercice 9

Exercice 9

Sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ on considère le graphe G défini par :

$$G = \{(A,B); (A,C); (A,F); (B,D); (C,D); (C,F); (D,G); (D,E); (F,E); (F,G); (G,E)\}$$

- Ordonner ses sommets par niveaux.
- Donner une représentation par niveaux de G.

Exemple 2

La méthode MPM

Exemple 2

Pour la conception et la réalisation d'un nouveau produit une entreprise estime qu'elle doit réaliser les 10 tâches a, b, c, d, e, f, g, h, j et k en tenant compte de l'ordre et des durées indiquées ci-dessous :

Tâches	Durée des tâches en jours	Tâches antérieures
а	1	-
b	2	-
С	6	d
d	3	-
е	4	a
f	1	b
g	4	f, j
h	5	g, c
j	3	a
k	6	е

Exemple 2

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-				
b	-				
С	d				
d	-				
е	a				
f	b				
g	f, j				
h	g, c				
j	a				
k	е				

Graphes : définition

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produi puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

PERT/MPN

Définition Exemple 1

Niveau des somme d'un graphe

Exemple 2

Exemple 2

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-	a			
b	-	b			
С	d				
d	-	d			
е	a				
f	b				
g	f, j				
h	g, c				
j	a				
k	е				

orientés Graphes : définition

Prédécesseurs – successeurs

Natrice adjacen

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produi puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somm d'un graphe

Exemple 2

Exemple 2

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-	a			
b	-	b			
С	d		С		
d	-	d			
е	a		е		
f	b		f		
g	f, j				
h	g, c				
j	a		j		
k	е				

orientés Graphes : définition

Prédécesseurs – successeurs

Natrice adjacen

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Definition

Niveau des somme d'un graphe

Exemple 2

Exemple 2

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-	a			
b	-	b			
С	d		С		
d	-	d			
е	a		е		
f	b		f		
g	f, j			g	
h	g, c				
j	a		j		
k	е			k	

orientés Graphes : définition

Prédécesseurs – successeurs

Matrice adjacen

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produit puissance des matrices

des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somme d'un graphe

Exemple 2

Exemple 2

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

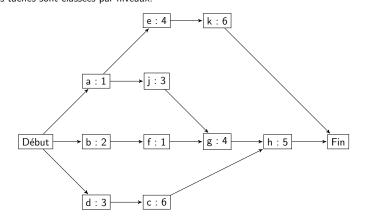
Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-	a			
b	-	b			
С	d		С		
d	-	d			
е	a		е		
f	b		f		
g	f, j			g	
h	g, c				h
j	a		j		
k	е			k	

La méthode MPM

Etape 2 : On représente le graphe associé Les tâches sont classées par niveaux.

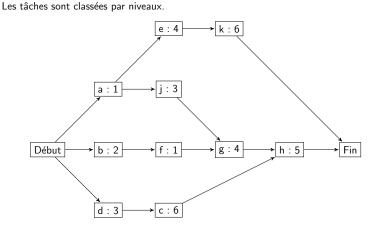
La méthode MPM

Etape 2 : On représente le graphe associé Les tâches sont classées par niveaux.



La méthode MPM

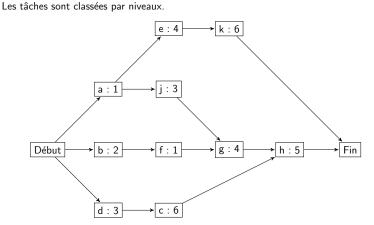
Etape 2 : On représente le graphe associé



Les tâches de niveau 0 doivent provenir d'une tâche « Début » de durée nulle.

La méthode MPM

Etape 2 : On représente le graphe associé



Les tâches de niveau 0 doivent provenir d'une tâche « Début » de durée nulle.

Les tâches finales doivent se rejoindre en une même tâche de durée nulle.

Graphes : définition

Matrice adjace

Opérations sur le matrices adiacentes

Somme, produit puissance des matrices

des matrices

Eermeture transiti

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somme d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

Exercice 10

La méthode MPM

Etape 3 : dates au plus tôt et au plus tard Date au plus tôt : date de début au plus tôt de la tâche. Date au plus tard : date de début au plus tard de la tâche. Ces dates sont indiquées sur chaque tâche.

Tâche						
Date au plus Date au plus						
tôt	tard					

Pour la tâche « Début » ces dates sont nulles.

orientés

Craphes : définition

Graphes : définitions Prédécesseurs –

atrice adjacent

Opérations sur matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

Somme, produit puissance boolée des matrices

Fermeture transit d'un graphe

La méthode

PERT/MP Définition

Exemple 1 Niveau des som

d'un graphe Exercice 9

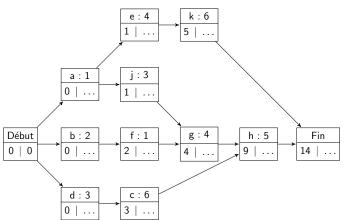
Exemple 2

Exercice 10

La méthode MPM

Etape 3.1 : Date de début au plus tôt d'une tâche.

Pour chaque étape c'est la longueur du plus long chemin pour y arriver.

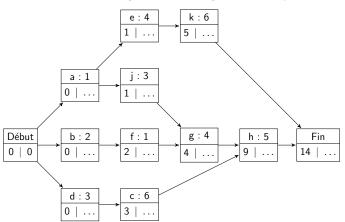


Exemple 2

La méthode MPM

Etape 3.1 : Date de début au plus tôt d'une tâche.

Pour chaque étape c'est la longueur du plus long chemin pour y arriver.



Le plus long chemin pour arriver à tâche g est (a, j): 4 = 1 + 3

Graphes simples orientés

Graphes : définitions Prédécesseurs –

Matrice adjacent

Opérations sur l matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

puissance booléen des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MP

Définition

Niveau des somm

d'un graphe Exercice 9

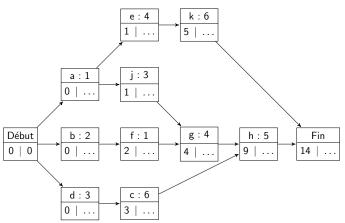
Exemple 2

Eversion 10

La méthode MPM

Etape 3.1 : Date de début au plus tôt d'une tâche.

Pour chaque étape c'est la longueur du plus long chemin pour y arriver.



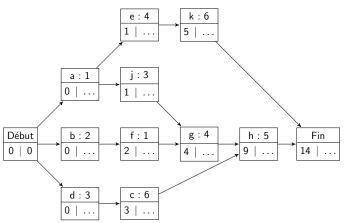
Le plus long chemin pour arriver à tâche g est (a, j) : 4=1+3 Le plus long chemin pour arriver à tâche h est (d, c) : 9=3+6

Exemple 2

La méthode MPM

Etape 3.1 : Date de début au plus tôt d'une tâche.

Pour chaque étape c'est la longueur du plus long chemin pour y arriver.



Le plus long chemin pour arriver à tâche g est (a, j): 4 = 1 + 3Le plus long chemin pour arriver à tâche h est (d, c): 9 = 3 + 6Le projet peut être réalisé en 14 jours. ◆□ > ◆圖 > ◆園 > ◆園 > □ ■ Graphes : définition

Matrice adjacen

Opérations sur le matrices adiacentes

Somme, produ puissance des matrices

des matrices
Fermeture transiti

d'un graphe

PERT/MPN

Définition

Niveau des sommet: d'un graphe

Exercice !

Exemple 2 Exercice 10

La méthode MPM

Etape 3.2 : Date de début au plus tard d'une tâche C'est la date au-delà de laquelle le projet ne peut avoir que du retard.

- Pour l'étape terminale la date de début au plus tard est égale à la date de début au plus tôt.
- Pour les autres étapes les dates se calculent en partant de la fin du réseau. de la manière suivante :
 - Pour une tâche quelconque *i*, le début au plus tard est la différence :
 - durée de tâche terminale (durée du plus long chemin pour aller de la tâche i à tâche finale).

Successeurs
Matrico adiaconto

Opérations sur

matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

Somme, produit puissance boolée des matrices

Fermeture transiti

La méthode

PERT/MP Définition

Exemple 1

Niveau des somme d'un graphe

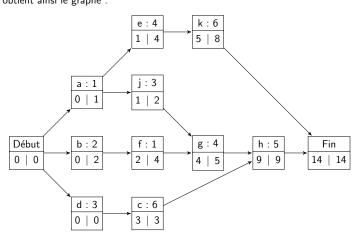
Exercice 9

Exemple 2

Exercice 10

La méthode MPM

Etape 3.2 : Date de début au plus tard d'une tâche On obtient ainsi le graphe :



orientés Graphes : définitions

Prédécesseurs –

Matrice adjacent

Opérations su matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

Somme, produit puissance boolée des matrices

Fermeture transiti

La méthode PERT/MPI

Définition

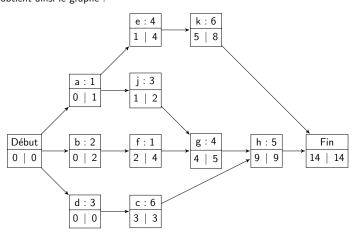
Niveau des somme d'un graphe

Exercice 9

Exemple 2

La méthode MPM

Etape 3.2 : Date de début au plus tard d'une tâche On obtient ainsi le graphe :



La durée du plus long chemin pour relier les tâches a et Fin est 13:14-13=1

Graphes : définition

Natrice adjacent

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

puissance boolée des matrices

Fermeture transiti

La méthode

PERT/MP Définition

Niveau des somme

Exercice 9

Exemple 2

La méthode MPM

Etape 4 : détermination du chemin critique

Le **chemin critique** est le chemin pour lequel tout retard pris sur l'une des tâches entraîne un retard dans la réalisation du projet.

C'est le chemin sur lequel les dates de début au plus tôt sont égales aux dates de début au plus tard (en rouge ci-dessous).

orientés

Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produ puissance des matrices

des matrices

Fermeture transiti d'un graphe

La méthode

Définition

Niveau des somme d'un graphe

Exercice

Exemple 2

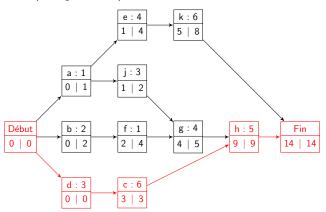
Evereice 10

La méthode MPM

Etape 4 : détermination du chemin critique

Le **chemin critique** est le chemin pour lequel tout retard pris sur l'une des tâches entraîne un retard dans la réalisation du projet.

C'est le chemin sur lequel les dates de début au plus tôt sont égales aux dates de début au plus tard (en rouge ci-dessous).



Le chemin critique est donc (d, c, h).



Graphes : définition Prédécesseurs –

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produi puissance des matrices

Somme, produit et puissance booléens

des matrices Fermeture transiti

La méthode

PERT/MP

Exemple 1

d'un graph

Exemple 2

Evercice 10

La méthode MPM

Etape 5 : détermination des marges d'une tâche

 On appelle marge totale d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que le projet global ne soit retardé.

 $\mathsf{Marge}\ \mathsf{totale} = \mathsf{date}\ \mathsf{au}\ \mathsf{plus}\ \mathsf{tard}\ \mathsf{-}\ \mathsf{date}\ \mathsf{au}\ \mathsf{plus}\ \mathsf{t\^{o}t}$

Orientés
Graphes : définition

Matrice adiacent

Opérations sur les matrices adjacentes

Somme, produi puissance des matrices

puissance booléens des matrices

d'un graphe

La méthode PERT/MPN

Définition

Niveau des somme

Evercice

Exemple 2

Exercice 10

La méthode MPM

Etape 5 : détermination des marges d'une tâche

 On appelle marge totale d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que le projet global ne soit retardé.

 $\mathsf{Marge}\ \mathsf{totale} = \mathsf{date}\ \mathsf{au}\ \mathsf{plus}\ \mathsf{tard}\ \mathsf{-}\ \mathsf{date}\ \mathsf{au}\ \mathsf{plus}\ \mathsf{t\^{o}t}$

Exemple : marge totale de la tâche f: 4-2=2 jours.

Etape 5 : détermination des marges d'une tâche

• On appelle marge totale d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que le projet global ne soit retardé.

Marge totale = date au plus tard - date au plus tôt

Exemple: marge totale de la tâche f: 4-2=2 jours.

• On appelle marge libre d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que les tâches suivantes ne soient retardées.

Marge libre = plus petite des dates au plus tôt des tâches immédiatement suivantes - fin au plus tôt de la tâche considérée. Exemple: marge libre de la tâche f: 4-(2+1)=1 jour.

Graphes simples

Graphes : définition

Matrice adjace

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transiti d'un graphe

La méthode PERT/MPM

PERT/MPN

Exemple 1 Niveau des somm

Exercice 9

Exemple 2

Exercice 10

Un lycée a été doté de postes informatiques et de logiciels. Le proviseur envisage de transformer une salle de cours en salle informatique. Pour cela, le responsable du projet définit les tâches à réaliser avec leur durée. Le tableau suivant regroupe l'ensemble de ces données.

Prédécesseurs – successeurs

Opérations sur le matrices

Somme, produit puissance des matrices

puissance booléen des matrices

Fermeture transiti d'un graphe

La méthode PERT/MPM

Exemple 1

d'un graphe

Exemple 2

Exercice 10

Exercice 10

Tâche à réaliser	Repère	Durée en jours	Tâches précé- dentes
Vider la salle de cours et démonter le matériel inutilisé.	А	2	_
Nettoyer et repeindre la salle.	В	4	Α
Installer les tables et fixer un tableau.	С	1	В
Commander et réceptionner le matériel de câblage.	D	10	_
Déballer et contrôler le matériel de câblage livré.	E	1	D
Câbler la salle.	F	3	B, E
Installer et brancher les postes informatiques.	G	1	C, F
Installer les logiciels, configurer les postes et tester leur fonctionnement.	Н	7	G

Prédécesseurs – successeurs

Matrice adjacent

Opérations sur le matrices adjacentes

Somme, produi puissance des matrices

puissance booléens des matrices Fermeture transitive

La méthode

Définition

Exemple 1

Niveau des somme

Exercice 9

Exercice 10

Le but de cet exercice est d'ordonner la réalisation de ces tâches de façon à ce que la salle soit disponible le plus rapidement possible. On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

- 1 Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe.
- 2 Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode P.E.R.T. ou M.P.M.) Déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard.
- 3 En déduire le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.
- 4 En fait, la réalisation de la tâche B a nécessité 10 jours au lieu de 4 car il a fallu enduire un mur et le laisser sécher avant de le peindre. Ce changement a-t-il une incidence sur la durée du projet ? Expliquer pourquoi.