Graphes et ordonnancement

Laurent Debize

Mathématiques appliquées à l'informatique

Graphes simples orientés

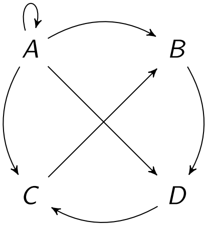
Graphe - représentation sagittale

On considère l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$ où A, B, C et D sont 4 points du plan.
L'ensemble
$G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$, formé par des couples d'éléments de S, définit un **graphe orienté** sur S.

Graphes simples orientés

Graphe - représentation sagittale

On considère l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$ où A, B, C et D sont 4 points du plan.
L'ensemble
$G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$, formé par des couples d'éléments de S, définit un **graphe orienté** sur S.



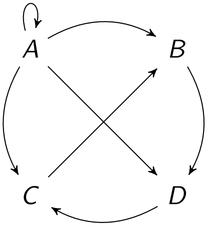
Graphes simples orientés

Graphe - représentation sagittale

On considère l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$ où A, B, C et D sont 4 points du plan.

L'ensemble

$G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$, formé par des couples d'éléments de S, définit un **graphe orienté** sur S.



Les couples de G sont représentés par des arcs orientés. Le schéma ci-dessus est la représentation sagittale de G (ou représentation par points et flèches).

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

Pour la représentation sagittale précédente :

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

Pour la représentation sagittale précédente :

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**
- Les couples de G sont appelés **arcs**

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

Pour la représentation sagittale précédente :

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**
- Les couples de G sont appelés **arcs**
- (A, D) est un **chemin de longueur 1** qui va de A à D et (A, B, D, C) est un **chemin de longueur 3** qui va de A à C

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

Pour la représentation sagittale précédente :

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**
- Les couples de G sont appelés **arcs**
- (A, D) est un **chemin de longueur 1** qui va de A à D et (A, B, D, C) est un **chemin de longueur 3** qui va de A à C
- Le chemin (A, A) est appelé une **boucle**

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

Pour la représentation sagittale précédente :

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**
- Les couples de G sont appelés **arcs**
- (A, D) est un **chemin de longueur 1** qui va de A à D et (A, B, D, C) est un **chemin de longueur 3** qui va de A à C
- Le chemin (A, A) est appelé une **boucle**
- Le chemin (B, D, C, B) est un **circuit**

Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Définitions

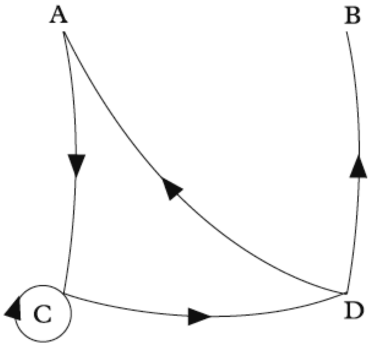
Pour la représentation sagittale précédente :

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**
- Les couples de G sont appelés **arcs**
- (A, D) est un **chemin de longueur 1** qui va de A à D et (A, B, D, C) est un **chemin de longueur 3** qui va de A à C
- Le chemin (A, A) est appelé une **boucle**
- Le chemin (B, D, C, B) est un **circuit**
- (A, B, D, C) est un chemin de longueur 3 qui passe par **tous les sommets** du graphe, et ne passe **qu'une fois** par chacun d'eux : (A, B, D, C) est un chemin **hamiltonien**

Exercice 1

On considère le graphe suivant.

- Définir G en extension.
- Donner 2 chemins de longueur 3 partant de D.
- Donner un chemin hamiltonien.



Prédécesseurs – successeurs

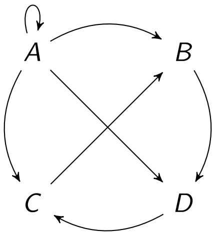
Définitions

Si (A, B) est un arc d'un graphe alors on dira que A est un **prédécesseur** de B et que B est un **successeur** de A.

L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet A est noté $\Gamma^{-}(A)$ et l'ensemble des successeurs d'un sommet A est noté $\Gamma^{+}(A)$.

Prédécesseurs – successeurs

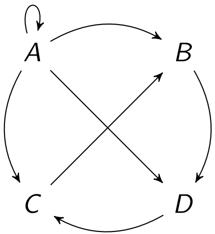
Exemple



Sommets	Successeurs Γ^+	Prédécesseurs Γ^-
A		
B		
C		
D		

Prédécesseurs – successeurs

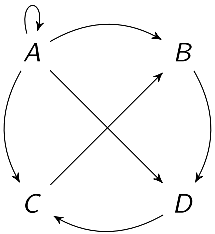
Exemple



Sommets	Successeurs Γ^+	Prédécesseurs Γ^-
A	A, B, C, D	A
B		
C		
D		

Prédécesseurs – successeurs

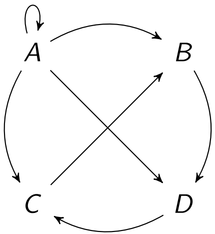
Exemple



Sommets	Successeurs Γ^+	Prédécesseurs Γ^-
A	A, B, C, D	A
B	D	A,C
C		
D		

Prédécesseurs – successeurs

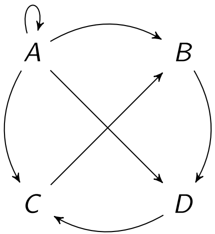
Exemple



Sommets	Successeurs Γ^+	Prédécesseurs Γ^-
A	A, B, C, D	A
B	D	A,C
C	B	A,D
D		

Prédécesseurs – successeurs

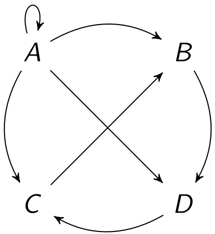
Exemple



Sommets	Successeurs Γ^+	Prédécesseurs Γ^-
A	A, B, C, D	A
B	D	A,C
C	B	A,D
D	C	A,B

Prédécesseurs – successeurs

Exemple

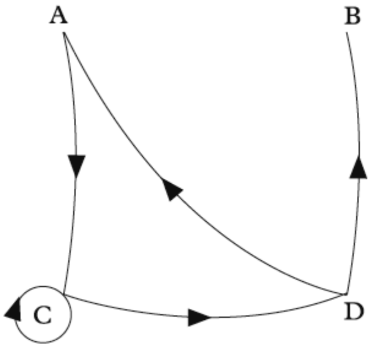


Sommets	Successeurs Γ^+	Prédécesseurs Γ^-
A	A, B, C, D	A
B	D	A,C
C	B	A,D
D	C	A,B

$$\Gamma^-(A) = \{A\} \text{ et } \Gamma^+(A) = \{A, B, C, D\}$$

Exercice 2

On considère le graphe suivant. Déterminer l'ensemble Γ^- des prédécesseurs de A, B, C et D et l'ensemble Γ^+ de leurs successeurs.



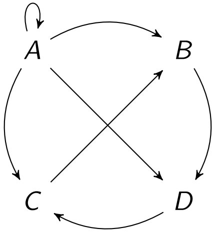
Matrice adjacente

À un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.

Matrice adjacente

À un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.

Exemple :

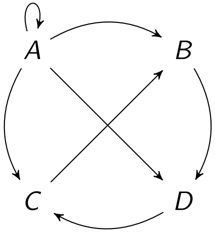


Successeurs / Prédécesseurs	A	B	C	D
A	1	1	1	1

Matrice adjacente

À un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.

Exemple :

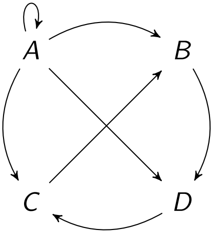


Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	0	0	0	1

Matrice adjacente

À un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.

Exemple :

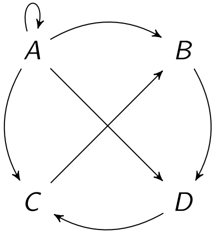


Successeurs / Prédécesseurs	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	1	0	0

Matrice adjacente

À un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.

Exemple :



Successeurs / Prédécesseurs	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	1	0	0
D	0	0	1	0

Matrice adjacente

On appelle alors **matrice adjacente** M associée au graphe pour les sommets A, B, C et D dans cet ordre, la matrice booléenne :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice adjacente

On appelle alors **matrice adjacente** M associée au graphe pour les sommets A, B, C et D dans cet ordre, la matrice booléenne :

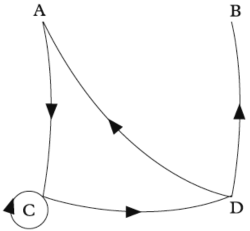
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rappel :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	1	0	0
D	0	0	1	0

Exercice 3

1. Déterminer la matrice adjacente du graphe suivant.



2. On considère la matrice adjacente ci-dessous d'un graphe G. Déterminer la représentation sagittale de G.

Successeurs / Prédécesseurs	A	B	C
A	0	0	0
B	1	0	1
C	1	1	0

Somme, produit et puissance des matrices

Définitions

Les opérations somme, produit et puissance des matrices ont été définies dans le cours de 1re année chapitre ≪ Calcul matriciel ≫. On les note $A + B$, $A \times B$ et A^n.

Somme, produit et puissance des matrices

Définitions

Les opérations somme, produit et puissance des matrices ont été définies dans le cours de 1re année chapitre ≪ Calcul matriciel ≫. On les note $A + B$, $A \times B$ et A^n.

Propriété

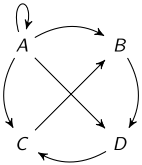
Soit M la matrice adjacente associée à un graphe.

Le coefficient m_{ij} de la matrice M^n indique le nombre de chemins de longueur n reliant le i-ième prédécesseur au j-ième successeur.

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée au graphe :


A
B
C
D

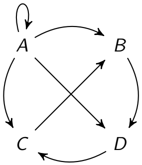
Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée au graphe :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

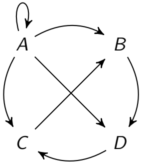

A
B
C
D

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée au graphe :

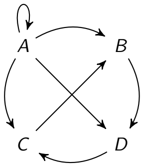
$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M^2 = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$


A
B
C
D

Somme, produit et puissance des matrices

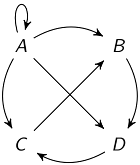
$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$



Somme, produit et puissance des matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

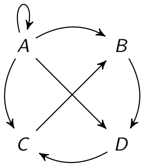


- $m_{11} = 1$ indique qu'il
  existe 1 chemin de longueur 2 reliant A à A.

Somme, produit et puissance des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

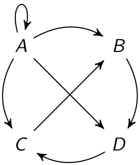
$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- $m_{11} = 1$ indique qu'il existe 1 chemin de longueur 2 reliant A à A.
- $m_{12} = 2$ indique qu'il existe 2 chemins de longueur 2 reliant A à B.

Somme, produit et puissance des matrices

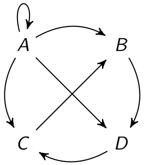
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



- $m_{11} = 1$ indique qu'il existe 1 chemin de longueur 2 reliant A à A.
- $m_{12} = 2$ indique qu'il existe 2 chemins de longueur 2 reliant A à B.
- $m_{21} = 0$ indique qu'il existe 0 chemin de longueur 2 reliant B à A...

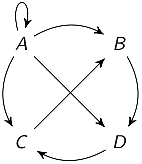
Somme, produit et puissance des matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ M^2 = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$



Somme, produit et puissance des matrices

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ M^2 = & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

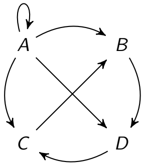


En lisant les lignes de M^2 il existe :

- 1+2+2+2
  chemins de longueur 2 partant de A,

Somme, produit et puissance des matrices

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
M^2 = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

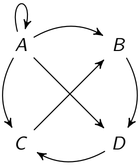


En lisant les lignes de M^2 il existe :

- 1+2+2+2
  chemins de longueur 2 partant de A,
- 1 chemin de longueur 2 partant de B, etc.

Somme, produit et puissance des matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

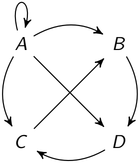


En lisant les lignes de M^2 il existe :

- 1+2+2+2
  chemins de longueur 2 partant de A,
- 1 chemin de longueur 2 partant de B, etc.
- et au total 10 chemins de longueur 2.

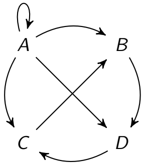
Somme, produit et puissance des matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \\ M^2 = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$



Somme, produit et puissance des matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

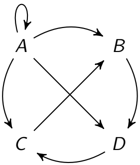


En lisant les colonnes de M^2, il existe :

- 1+0+0+0
  chemins de longueur 2 arrivant en A,

Somme, produit et puissance des matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



En lisant les colonnes de M^2, il existe :

- $1+0+0+0$
  chemins de longueur 2 arrivant en A,
- $2+0+0+1$
  chemins de longueur 2 arrivant en B.

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe :

- 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe :

- 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,
- 1 chemin de longueur 3 partant de B,

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe :

- 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,
- 1 chemin de longueur 3 partant de B,
- et au total 13 chemins de longueur 3,

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe :

- 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,
- 1 chemin de longueur 3 partant de B,
- et au total 13 chemins de longueur 3,
- 1 chemin de longueur 3 arrivant en A,

Somme, produit et puissance des matrices

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe :

- 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A,
- 1 chemin de longueur 3 partant de B,
- et au total 13 chemins de longueur 3,
- 1 chemin de longueur 3 arrivant en A,
- 4 chemins de longueur 3 arrivant en B...

Exercice 4

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée à un graphe G.

- Déterminer le nombre de chemins de longueur 2 reliant deux points quelconques du graphe.
- Combien existe-t-il de chemins de longueur 2 arrivant en C ?

Somme, produit et puissance des matrices

Définitions

Soient M et M' deux matrices booléennes. La somme booléenne des matrices M et M', notée $M \oplus M'$, est la matrice obtenue en effectuant la somme booléenne des coefficients de M et M'.

On définit de façon analogue le produit matriciel booléen $M \otimes M'$ et la puissance n-ième booléenne d'une matrice M, notée $M^{[n]}$:
$M^{[n]} = M \otimes M \otimes \ldots \otimes M$ (M est présente n fois).

Somme, produit et puissance des matrices

Définitions

Soient M et M' deux matrices booléennes. La somme booléenne des matrices M et M', notée $M \oplus M'$, est la matrice obtenue en effectuant la somme booléenne des coefficients de M et M'.

On définit de façon analogue le produit matriciel booléen $M \otimes M'$ et la puissance n-ième booléenne d'une matrice M, notée $M^{[n]}$: $M^{[n]} = M \otimes M \otimes \ldots \otimes M$ (M est présente n fois).

Rappel

Pour les constantes booléennes 0 et 1 :

$$\begin{array}{ccc} 0+0=0 & 1+0=1 & 1+1=1 \\ 0\cdot 0=0 & 1\cdot 0=0 & 1\cdot 1=1 \end{array}$$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somme, produit et puissance des matrices

Remarques

Soit M une matrice carrée quelconque. Alors :

1. On note $M^{[1]}$ la matrice booléenne qui lui est associée (en conservant les 0 et en remplaçant chaque nombre non nul par 1).

Somme, produit et puissance des matrices

Remarques

Soit M une matrice carrée quelconque. Alors :

1. On note $M^{[1]}$ la matrice booléenne qui lui est associée (en conservant les 0 et en remplaçant chaque nombre non nul par 1).
2. Pour déterminer $M^{[n]}$ on pourra :
   - soit déterminer $M^n = M \times M \times \ldots \times M$ (M étant présente n fois) puis prendre la matrice booléenne $M^{[n]}$ associée,

Somme, produit et puissance des matrices

Remarques

Soit M une matrice carrée quelconque. Alors :

1. On note $M^{[1]}$ la matrice booléenne qui lui est associée (en conservant les 0 et en remplaçant chaque nombre non nul par 1).
2. Pour déterminer $M^{[n]}$ on pourra :
   - soit déterminer $M^n = M \times M \times \ldots \times M$ (M étant présente n fois) puis prendre la matrice booléenne $M^{[n]}$ associée,
   - soit déterminer directement $M^{[n]} = M^{[1]} \otimes M^{[1]} \otimes \ldots \otimes M^{[1]}$ ($M^{[1]}$ étant présente n fois).

Somme, produit et puissance des matrices

Exemples

- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Somme, produit et puissance des matrices

Exemples

- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemples

- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemples

- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

  d'où $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemples

- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

  d'où $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  ou alors $M^{[2]} = M^{[1]} \otimes M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemples

- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

  d'où $M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  ou alors $M^{[2]} = M^{[1]} \otimes M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Somme, produit et puissance des matrices

Propriété

Un coefficient non nul de $M^{[n]}$ indique qu'il existe au moins un chemin de longueur n reliant deux points du graphe (propriété admise).

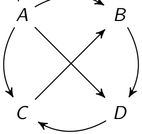
Exercice 5

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les matrices $M \oplus M'$, $M' \otimes M$, $M^{[2]}$, $M'^{[3]}$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Reprenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$


A
B
C
D

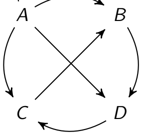
Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Reprenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$


A
B
C
D

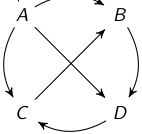
Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

Reprenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


A
B
C
D

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

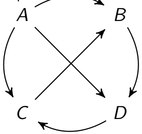
Reprenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe des chemins :

- allant de A vers A, B, C et D,


A
B
C
D

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

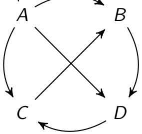
Reprenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe des chemins :

- allant de A vers A, B, C et D,
- allant de B vers C, etc.


A
B
C
D

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

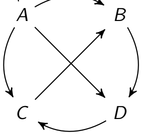
Reprenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche l'existence de chemins de longueur 2 :

$$M^{[2]} = M \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe des chemins :

- allant de A vers A, B, C et D,
- allant de B vers C, etc.
- il y a au total 7 couples de points que l'on peut relier par des chemins de longueur 2.


A
B
C
D

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

On cherche l'existence de chemins de longueur 3 :

$$M^{[3]} = M^{[2]} \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

On cherche l'existence de chemins de longueur 3 :

$$M^{[3]} = M^{[2]} \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somme, produit et puissance des matrices

Exemple

On cherche l'existence de chemins de longueur 3 :

$$M^{[3]} = M^{[2]} \otimes M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il n'existe pas de chemin de longueur 3 allant de B vers A, C et D, etc.

Exercice 6

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée à un graphe G.

Existe-t-il au moins un chemin de longueur 3 reliant deux points du graphe ?

Fermeture transitive d'un graphe

Définition

Soit un graphe G. On appelle fermeture transitive du graphe G, et non note $G^\star$ le graphe obtenu en complétant G de la façon suivante : s'il existe un chemin allant d'un certain X à un certain Y, alors on rajoute l'arc (X, Y) à G.

Fermeture transitive d'un graphe

Définition

Soit un graphe G. On appelle fermeture transitive du graphe G, et non note $G^\star$ le graphe obtenu en complétant G de la façon suivante : s'il existe un chemin allant d'un certain X à un certain Y, alors on rajoute l'arc (X, Y) à G.

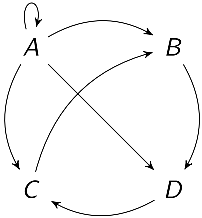
Remarques

- On rappelle que : chemin $\neq$ arc
- On a évidemment : $G \subset G^\star$

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

On considère le graphe
$G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.

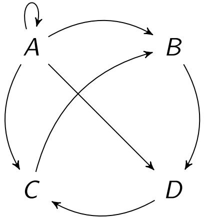


Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

On considère le graphe $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.

- On remarque le chemin (B, D, C) : on rajoute donc l'arc (B, C)

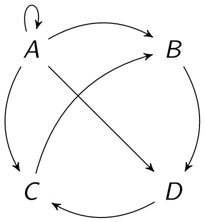


Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

On considère le graphe
$G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.

- On remarque le chemin (B, D, C) : on rajoute donc l'arc (B, C)
- On remarque le chemin (B, D, C, B) : on rajoute donc l'arc (B, B)

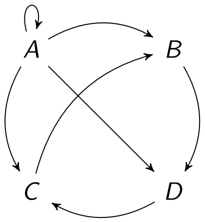


Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

On considère le graphe $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.

- On remarque le chemin (B, D, C) : on rajoute donc l'arc (B, C)
- On remarque le chemin (B, D, C, B) : on rajoute donc l'arc (B, B)
- On remarque le chemin (D, C, B) : on rajoute donc l'arc (D, B), etc.

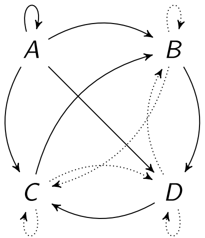


Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

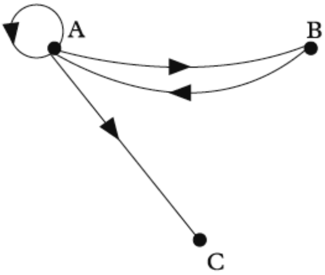
On considère le graphe $G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$ défini sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$. Il est dessiné en flèches pleines.

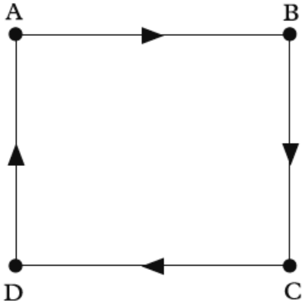
- On remarque le chemin (B, D, C) : on rajoute donc l'arc (B, C)
- On remarque le chemin (B, D, C, B) : on rajoute donc l'arc (B, B)
- On remarque le chemin (D, C, B) : on rajoute donc l'arc (D, B), etc.
- On obtient ainsi la représentation de $G^\star$ (flèches pleines et pointillées) :



Exercice 7

Tracer la fermeture transitive des graphes ci-dessous :





Fermeture transitive d'un graphe

Propriété

Si G est un graphe simple orienté à n sommets de matrice M alors $G^\star$ a pour matrice adjacente :

$$M^\star = M \oplus M^{[2]} \oplus \ldots \oplus M^{[n]}$$

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

Reprenons la matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe G vu précédemment. Le graphe comportant $n = 4$ sommets on calcule :

$$M^\star = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]}$$

$$=$$

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

Reprenons la matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe G vu précédemment. Le graphe comportant $n = 4$ sommets on calcule :

$$\begin{aligned}
M^\star &= M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

Reprenons la matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe G vu précédemment. Le graphe comportant $n = 4$ sommets on calcule :

$$\begin{aligned} M^{\star} &= M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fermeture transitive d'un graphe

Exemple

Reprenons la matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe G vu précédemment. Le graphe comportant $n = 4$ sommets on calcule :

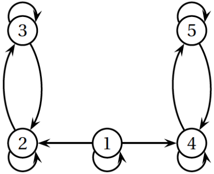
$$\begin{aligned}
M^\star &= M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On vérifiera sur la figure précédente que (B, A), (C, A) et $(D, A) \notin G^\star$.

Exercice 8

La salle informatique d'une entreprise doit comprendre cinq postes numérotés de 1 à 5 et branchés en réseau selon le graphe orienté ci-contre.

Dans ce graphe, une flèche d'un poste A vers un poste B traduit le fait que l'on peut envoyer des données de A vers B.



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe en prenant les numéros des postes dans l'ordre croissant.
2. Déterminer la matrice M^* de la fermeture transitive de ce graphe.
3. Pour permettre l'envoi de données entre les postes, même en cas de défaillance d'une connexion on utilise la fermeture transitive du graphe.

   Dessiner le graphe correspondant à cette fermeture transitive.

La méthode PERT en deux mots

- PERT = Program Evaluation and Review Technique
- Méthode **d'ordonnancement** et **d'optimisation** pour la réalisation de projets comportant un grand nombre de tâches.
- Créée en 1958 à la demande de la marine américaine, pour son programme de missiles balistiques nucléaires miniaturisés **Polaris**
- Objectif rattraper le retard sur l'URSS (projet avec 9000 sous-traitants, 250 fournisseurs). Delai initial : 7 ans. Grâce au PERT : 4 ans
- Utile pour planifier des travaux de construction de maisons, de navires, d'avions
- Utilise les graphes orientés décrivant des **tâches** et des **étapes**
- Une méthode similaire a été inventée la même année par le Français Bernard Roy sous le nom de MPM pour « Méthode des Potentiels Metra » pour l'usine de fabrication de villebrequins Mavilor.

La méthode MPM

Définitions

On appelle **tâche** ou **étape** le déroulement dans le temps d'une opération.

La méthode MPM

Exemple 1

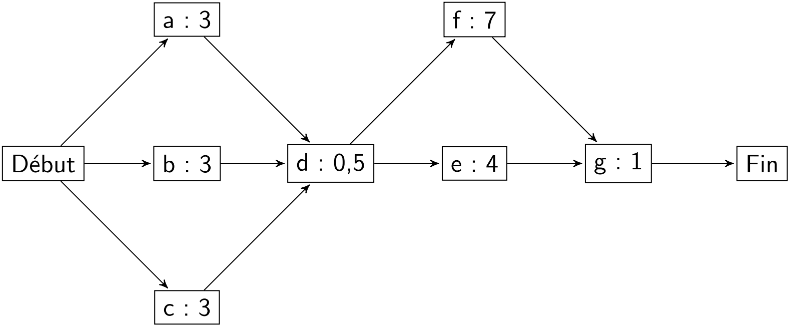
La construction de 2 immeubles doit être réalisée à partir des 2 projets choisis parmi 3 conçus simultanément. La planification des travaux nécessite les tâches ci-dessous :

- a : conception du projet 1 (durée : 3 mois)
- b : conception du projet 2 (durée : 3 mois)
- c : conception du projet 3 (durée : 3 mois)
- d : analyse et choix des 2 projets (durée : 15 jours)
- e : réalisation de l'immeuble 1 (durée : 4 mois)
- f : réalisation de l'immeuble 2 (durée : 7 mois)
- g : réception des travaux / reprise de finitions (durée : 1 mois)

La méthode MPM

Exemple 1

L'application de la méthode MPM donnera ce graphe où les nombres expriment des mois :



La méthode MPM

Remarques

- Une **tâche** est représentée par un rectangle dans lequel on indique le nom de la tâche et la durée de réalisation de celle-ci. Le positionnement des tâches doit respecter les niveaux du graphe.

La méthode MPM

Remarques

- Une **tâche** est représentée par un rectangle dans lequel on indique le nom de la tâche et la durée de réalisation de celle-ci. Le positionnement des tâches doit respecter les niveaux du graphe.
- Les **contraintes d'antériorité** sont représentées par des flèches. Les flèches sont de durée nulle.

Niveaux des sommets d'un graphe

Définition

On appelle **graphe simple orienté** un graphe orienté ne contenant pas de circuit (et donc pas de boucles).

Un graphe simple orienté peut être ordonné par niveaux.

Niveaux des sommets d'un graphe

Définition

On appelle **graphe simple orienté** un graphe orienté ne contenant pas de circuit (et donc pas de boucles).

Un graphe simple orienté peut être ordonné par niveaux.

Définition

On appelle **sommets de niveau 0** dans un graphe simple orienté, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur.

Si l'on note S l'ensemble des sommets du graphe et S_0 l'ensemble des sommets de niveau 0, on appellera **sommets de niveau 1**, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur dans l'ensemble $S \setminus S_0$ et ainsi de suite.

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs / Prédécesseurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	B, E

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	B, E
D	

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	B, E
D	A

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	B, E
D	A
E	

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs / Prédécesseurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	B, E
D	A
E	A

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	B, E
D	A
E	A

Le sommet A n'a pas de prédécesseur, il est donc de niveau 0 et $S_0 = \{A\}$.

Niveaux des sommets d'un graphe

On retire tous les sommets de niveau 0 (c'est-à-dire A). Le tableau des prédécesseurs des sommets restants est :

Sommets	Prédécesseurs
B	
C	
D	
E	

Niveaux des sommets d'un graphe

On retire tous les sommets de niveau 0 (c'est-à-dire A). Le tableau des prédécesseurs des sommets restants est :

Sommets	Prédécesseurs
B	D, E
C	
D	
E	

Niveaux des sommets d'un graphe

On retire tous les sommets de niveau 0 (c'est-à-dire A). Le tableau des prédécesseurs des sommets restants est :

Sommets	Prédécesseurs
B	D, E
C	B, E
D	
E	

Niveaux des sommets d'un graphe

On retire tous les sommets de niveau 0 (c'est-à-dire A). Le tableau des prédécesseurs des sommets restants est :

Sommets	Prédécesseurs
B	D, E
C	B, E
D	aucun
E	

Niveaux des sommets d'un graphe

On retire tous les sommets de niveau 0 (c'est-à-dire A). Le tableau des prédécesseurs des sommets restants est :

Sommets	Prédécesseurs
B	D, E
C	B, E
D	aucun
E	aucun

Niveaux des sommets d'un graphe

On retire tous les sommets de niveau 0 (c'est-à-dire A). Le tableau des prédécesseurs des sommets restants est :

Sommets	Prédécesseurs
B	D, E
C	B, E
D	aucun
E	aucun

Les sommets D et E n'ont pas de prédécesseur dans $S \setminus S_0$, ils sont donc de niveau 1 et $S_1 = \{D, E\}$.

Niveaux des sommets d'un graphe

On recommence en retirant tous les sommets de niveau 0 (A) et de niveau 1 (D et E) :

Sommets	Prédécesseurs
B	
C	

Niveaux des sommets d'un graphe

On recommence en retirant tous les sommets de niveau 0 (A) et de niveau 1 (D et E) :

Sommets	Prédécesseurs
B	aucun
C	

Niveaux des sommets d'un graphe

On recommence en retirant tous les sommets de niveau 0 (A) et de niveau 1 (D et E) :

Sommets	Prédécesseurs
B	aucun
C	B

Niveaux des sommets d'un graphe

On recommence en retirant tous les sommets de niveau 0 (A) et de niveau 1 (D et E) :

Sommets	Prédécesseurs
B	aucun
C	B

Le sommet B n'a pas de prédécesseur dans $S \setminus (S_0 \cup S_1)$, il est donc de niveau 2 et $S_2 = \{B\}$.

Niveaux des sommets d'un graphe

Et enfin, on retire tous les sommets de niveau 0 (A), de niveau 1 (D et E) et de niveau 2 (B) :

Sommets	Prédécesseurs
C	

Niveaux des sommets d'un graphe

Et enfin, on retire tous les sommets de niveau 0 (A), de niveau 1 (D et E) et de niveau 2 (B) :

Sommets	Prédécesseurs
C	aucun

Niveaux des sommets d'un graphe

Et enfin, on retire tous les sommets de niveau 0 (A), de niveau 1 (D et E) et de niveau 2 (B) :

Sommets	Prédécesseurs
C	aucun

Le sommet C n'a pas de prédécesseur dans $S \setminus (S_0 \cup S_1 \cup S_2)$, il est donc de niveau 3 et $S_3 = \{C\}$.

Niveaux des sommets d'un graphe

On peut réunir toutes ces démarches en seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
A	aucun				
B	D, E				
C	B, E				
D	A				
E	A				

Niveaux des sommets d'un graphe

On peut réunir toutes ces démarches en seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
A	aucun	A			
B	D, E				
C	B, E				
D	A				
E	A				

Niveaux des sommets d'un graphe

On peut réunir toutes ces démarches en seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
A	aucun	A			
B	D, E				
C	B, E				
D	A		D		
E	A		E		

Niveaux des sommets d'un graphe

On peut réunir toutes ces démarches en seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
A	aucun	A			
B	D, E			B	
C	B, E				
D	A		D		
E	A		E		

Niveaux des sommets d'un graphe

On peut réunir toutes ces démarches en seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
A	aucun	A			
B	D, E			B	
C	B, E				C
D	A		D		
E	A		E		

Niveaux des sommets d'un graphe

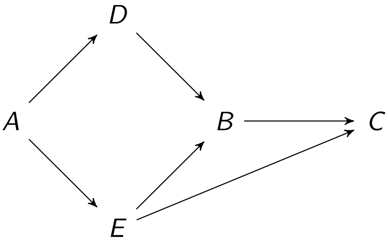
On peut réunir toutes ces démarches en seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
A	aucun	A			
B	D, E			B	
C	B, E				C
D	A		D		
E	A		E		

Le sommet C n'a pas de prédécesseur dans $S \setminus (S_0 \cup S_1 \cup S_2)$, il est donc de niveau 3 et $S_3 = \{C\}$.

Niveaux des sommets d'un graphe

On obtient donc le graphe orienté suivant, organisé par niveaux :



Exercice 9

Sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ on considère le graphe G défini par :

$$G = \begin{array}{l} \{(A,B);(A,C);(A,F);(B,D);(C,D);(C,F);(D,G);(D,E); \\ (F,E);(F,G);(G,E)\} \end{array}.$$

1. Ordonner ses sommets par niveaux.
2. Donner une représentation par niveaux de G.

La méthode MPM

Exemple 2

Pour la conception et la réalisation d'un nouveau produit une entreprise estime qu'elle doit réaliser les 10 tâches a, b, c, d, e, f, g, h, j et k en tenant compte de l'ordre et des durées indiquées ci-dessous :

Tâches	Durée des tâches en jours	Tâches antérieures
a	1	-
b	2	-
c	6	d
d	3	-
e	4	a
f	1	b
g	4	f, j
h	5	g, c
j	3	a
k	6	e

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Etape 1 : On ordonne les tâches par niveaux

Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-				
b	-				
c	d				
d	-				
e	a				
f	b				
g	f, j				
h	g, c				
j	a				
k	e				

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Etape 1 : On ordonne les tâches par niveaux

Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-	a			
b	-	b			
c	d				
d	-	d			
e	a				
f	b				
g	f, j				
h	g, c				
j	a				
k	e				

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Etape 1 : On ordonne les tâches par niveaux

Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-	a			
b	-	b			
c	d		c		
d	-	d			
e	a		e		
f	b		f		
g	f, j				
h	g, c				
j	a		j		
k	e				

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Etape 1 : On ordonne les tâches par niveaux

Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-	a			
b	-	b			
c	d		c		
d	-	d			
e	a		e		
f	b		f		
g	f, j			g	
h	g, c				
j	a		j		
k	e			k	

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Etape 1 : On ordonne les tâches par niveaux

Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-	a			
b	-	b			
c	d		c		
d	-	d			
e	a		e		
f	b		f		
g	f, j			g	
h	g, c				h
j	a		j		
k	e			k	

La méthode MPM

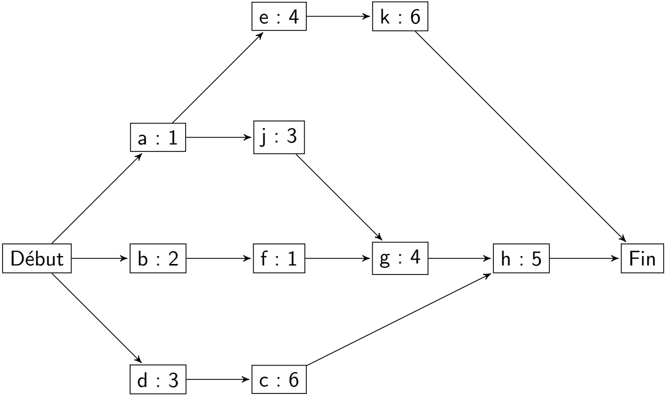
Etape 2 : On représente le graphe associé

Les tâches sont classées par niveaux.

La méthode MPM

Etape 2 : On représente le graphe associé

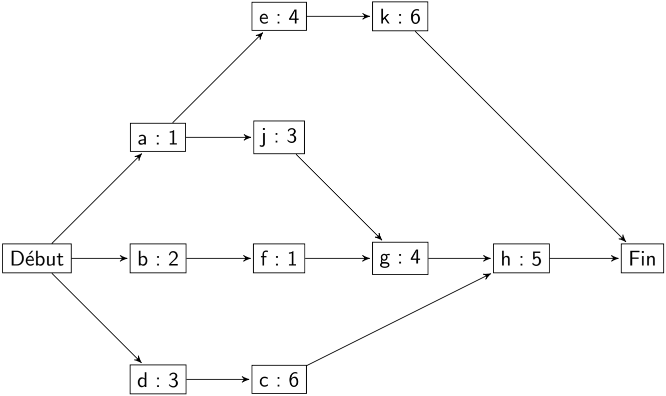
Les tâches sont classées par niveaux.



La méthode MPM

Etape 2 : On représente le graphe associé

Les tâches sont classées par niveaux.

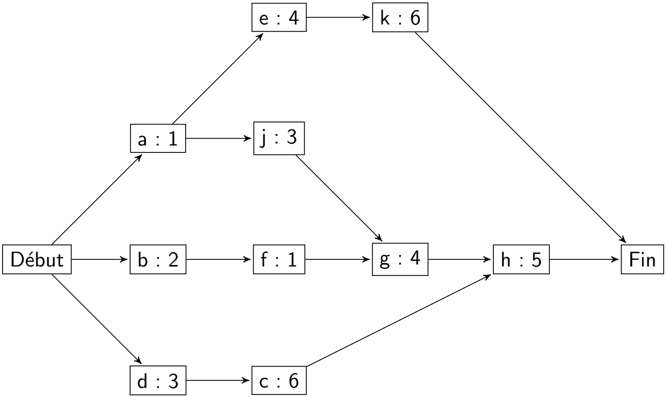


Les tâches de niveau 0 doivent provenir d'une tâche « Début » de durée nulle.

La méthode MPM

Etape 2 : On représente le graphe associé

Les tâches sont classées par niveaux.



Les tâches de niveau 0 doivent provenir d'une tâche « Début » de durée nulle.

Les tâches finales doivent se rejoindre en une même tâche de durée nulle.

La méthode MPM

Etape 3 : dates au plus tôt et au plus tard

Date au plus tôt : date de début au plus tôt de la tâche.
Date au plus tard : date de début au plus tard de la tâche.
Ces dates sont indiquées sur chaque tâche.

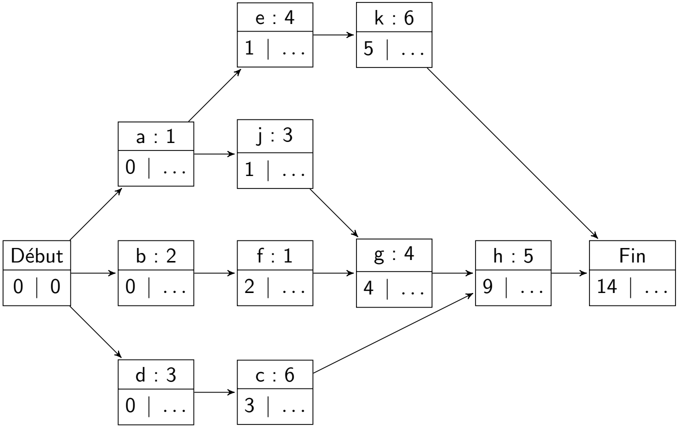
Tâche	
Date au plus tôt	Date au plus tard

Pour la tâche « Début » ces dates sont nulles.

La méthode MPM

Etape 3.1 : Date de début au plus tôt d'une tâche.

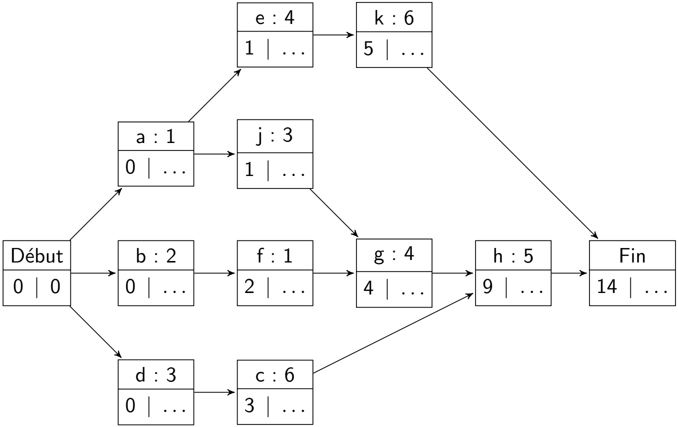
Pour chaque étape c'est la longueur du plus long chemin pour y arriver.



La méthode MPM

Etape 3.1 : Date de début au plus tôt d'une tâche.

Pour chaque étape c'est la longueur du plus long chemin pour y arriver.

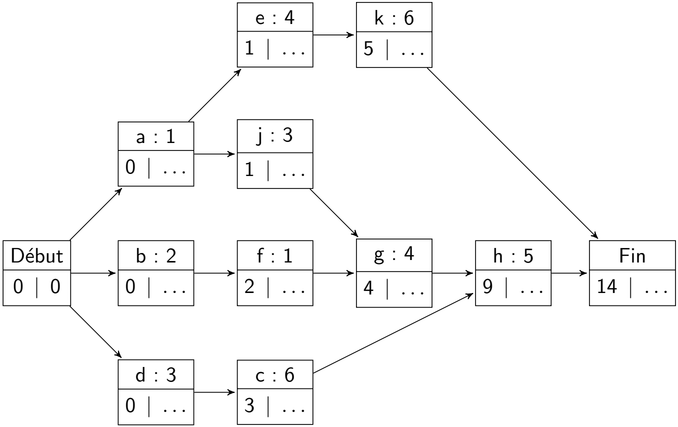


Le plus long chemin pour arriver à tâche g est (a, j) : $4 = 1 + 3$

La méthode MPM

Etape 3.1 : Date de début au plus tôt d'une tâche.

Pour chaque étape c'est la longueur du plus long chemin pour y arriver.

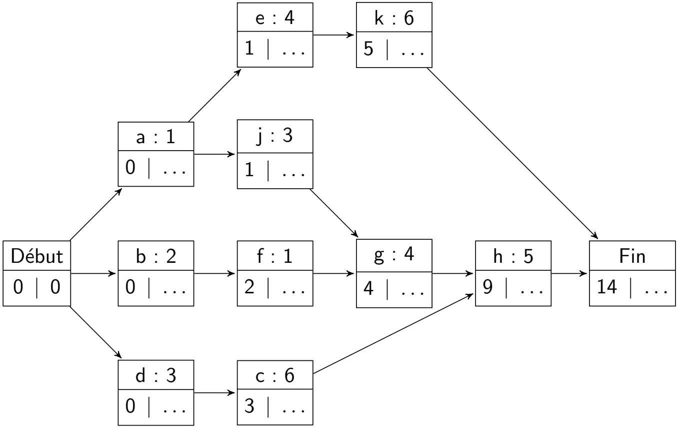


Le plus long chemin pour arriver à tâche g est (a, j) : $4 = 1 + 3$
Le plus long chemin pour arriver à tâche h est (d, c) : $9 = 3 + 6$

La méthode MPM

Etape 3.1 : Date de début au plus tôt d'une tâche.

Pour chaque étape c'est la longueur du plus long chemin pour y arriver.



Le plus long chemin pour arriver à tâche g est (a, j) : $4 = 1 + 3$
Le plus long chemin pour arriver à tâche h est (d, c) : $9 = 3 + 6$
Le projet peut être réalisé en 14 jours.

La méthode MPM

Etape 3.2 : Date de début au plus tard d'une tâche

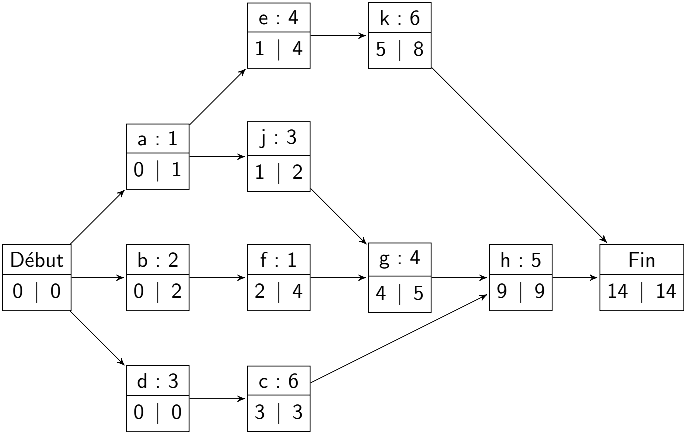
C'est la date au-delà de laquelle le projet ne peut avoir que du retard.

- Pour l'étape terminale la date de début au plus tard est égale à la date de début au plus tôt.
- Pour les autres étapes les dates se calculent en partant de la fin du réseau, de la manière suivante :
  Pour une tâche quelconque i, le début au plus tard est la différence :
  durée de tâche terminale – (durée du plus long chemin pour aller de la tâche i à tâche finale).

La méthode MPM

Etape 3.2 : Date de début au plus tard d'une tâche

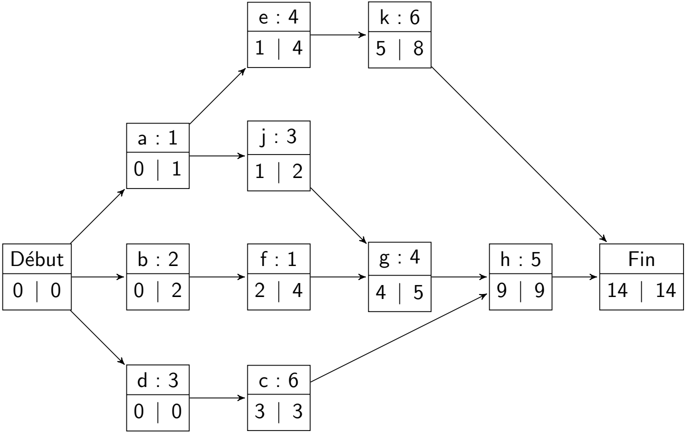
On obtient ainsi le graphe :



La méthode MPM

Etape 3.2 : Date de début au plus tard d'une tâche

On obtient ainsi le graphe :



La durée du plus long chemin pour relier les tâches a et Fin est 13 : $14 - 13 = 1$

La méthode MPM

Etape 4 : détermination du chemin critique

Le **chemin critique** est le chemin pour lequel tout retard pris sur l'une des tâches entraîne un retard dans la réalisation du projet.

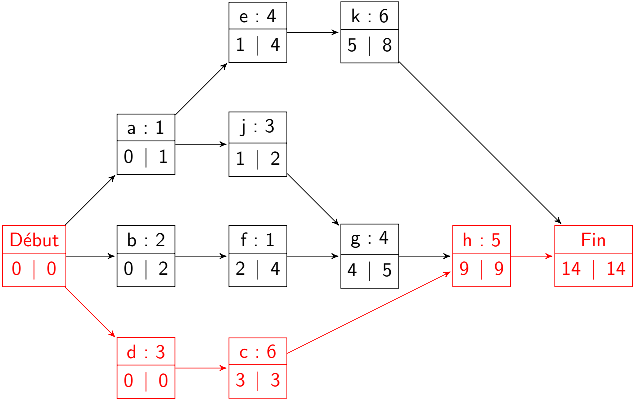
C'est le chemin sur lequel les dates de début au plus tôt sont égales aux dates de début au plus tard (en rouge ci-dessous).

La méthode MPM

Etape 4 : détermination du chemin critique

Le **chemin critique** est le chemin pour lequel tout retard pris sur l'une des tâches entraîne un retard dans la réalisation du projet.

C'est le chemin sur lequel les dates de début au plus tôt sont égales aux dates de début au plus tard (en rouge ci-dessous).



Le chemin critique est donc (d, c, h).

La méthode MPM

Etape 5 : détermination des marges d'une tâche

- On appelle **marge totale** d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que le **projet global** ne soit retardé.
  Marge totale = date au plus tard - date au plus tôt

La méthode MPM

Etape 5 : détermination des marges d'une tâche

- On appelle **marge totale** d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que le **projet global** ne soit retardé.
  Marge totale = date au plus tard - date au plus tôt

  Exemple : marge totale de la tâche f : $4 - 2 = 2$ jours.

La méthode MPM

Etape 5 : détermination des marges d'une tâche

- On appelle **marge totale** d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que le **projet global** ne soit retardé.
  Marge totale = date au plus tard - date au plus tôt

  Exemple : marge totale de la tâche f : $4 - 2 = 2$ jours.
- On appelle **marge libre** d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que **les tâches suivantes** ne soient retardées.
  Marge libre = plus petite des dates au plus tôt des tâches immédiatement suivantes - fin au plus tôt de la tâche considérée.
  Exemple : marge libre de la tâche f : $4 - (2 + 1) = 1$ jour.

Exercice 10

Un lycée a été doté de postes informatiques et de logiciels.
Le proviseur envisage de transformer une salle de cours en salle informatique. Pour cela, le responsable du projet définit les tâches à réaliser avec leur durée. Le tableau suivant regroupe l'ensemble de ces données.

Exercice 10

Tâche à réaliser	**Repère**	**Durée en jours**	**Tâches précédentes**
Vider la salle de cours et démonter le matériel inutilisé.	A	2	–
Nettoyer et repeindre la salle.	B	4	A
Installer les tables et fixer un tableau.	C	1	B
Commander et réceptionner le matériel de câblage.	D	10	–
Déballer et contrôler le matériel de câblage livré.	E	1	D
Câbler la salle.	F	3	B, E
Installer et brancher les postes informatiques.	G	1	C, F
Installer les logiciels, configurer les postes et tester leur fonctionnement.	H	7	G

Exercice 10

Le but de cet exercice est d'ordonner la réalisation de ces tâches de façon à ce que la salle soit disponible le plus rapidement possible. On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

1. Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe.
2. Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode P.E.R.T. ou M.P.M.) Déterminer pour chaque tâche les dates au plus tôt et au plus tard.
3. En déduire le chemin critique et la durée minimale de réalisation du projet.
4. En fait, la réalisation de la tâche B a nécessité 10 jours au lieu de 4 car il a fallu enduire un mur et le laisser sécher avant de le peindre. Ce changement a-t-il une incidence sur la durée du projet ? Expliquer pourquoi.