Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

A = B si et seulement si $\begin{cases} a - b = 3 \\ b - 5 = 4b \end{cases}$

Par substitution :

$$\begin{cases} a = 3 + b \\ b - 5 = 4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 + b \\ -5 = 4b - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 + b \\ -5 = 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 + b \\ b = -5/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 - \dfrac{5}{3} \\ b = -5/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{9}{3} - \dfrac{5}{3} \\ b = -5/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{4}{3} \\ b = -5/3 \end{cases}$$

Exercice 3 :

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ -10 & 14 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ -24 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$
$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 5 & 17 & -4 \\ -34 & 26 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 17 & 13 \\ 17 & 13 & 8 & 9 \\ 9 & 11 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 4:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B \times A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 \\ 6 & 17 & -8 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 5 :
AB n’existe pas car A a 2 colonnes et B a 3 lignes
BA existe car B a 2 colonnes et A a aussi 2 lignes et BA sera de taille 3 x 2

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 6 :

1. AB existe car A a 3 colonnes et B a 3 lignes et AB est une matrice 2x2

BC existe et est de dimension 3x2

2.

$$ABC = (AB)C = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & -36 \\ 16 & -24 \end{pmatrix}$$

$$ABC = A(BC) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -8 & -2 \\ 20 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & -36 \\ 16 & -24 \end{pmatrix}$$

Ex 7 :

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^4 = A \times A^3 = A \times I_3 = A$$

$$A^5 = A^4 \times A = A^2$$

2. $A^{2003} = A$

$$2003 = 3 \times 667 + 2$$

2001 est multiple de 3

$$A^{2003} = A^{2001} = A^{3\times 667+2} \times A^2 = (A^3)^{667} \times A^2 = I_3^{667} \times A^2$$

$$A^{2003} = A^2$$