Image Deformation Using Moving Least Squares 阅读笔记

张建伟

2017 年 8 月 10 日

1 Moving Least Squares Deformation

- p: 一列控制顶点.
- q: 控制顶点变换后的坐标.

给定图上的一点 v, 求解一个最优的仿射变换来最小化

$$\sum_i w_i |l_v(p_i) - q_i|^2, \tag{1}$$

其中 p_i 和 q_i 都是行向量, 每行的分量为点的坐标, 权重 w_i 有如下的形式

$$w_i = \frac{1}{|p_i - v|^{2\alpha}}.$$

因为该最小二乘问题中的权重 w_i 独立于 v 变形后的点, 所以我们称之为移动最小二乘最小化. 对于不同的 v, 可以得到不同的变换 $l_v(x)$. 由于 $l_v(x)$ 是仿射变换, 所以可以写成

$$l_v(x) = xM + T. \tag{2}$$

令原始的优化函数对 T 求偏导数并令其为 0, 解出

$$T = q^* - p^* M,$$

其中 p^* 和 q^* 是原来一系列控制顶点的加权质心,

$$p^* = \frac{\sum_i w_i p_i}{\sum_i w_i}, \qquad q^* = \frac{\sum_i w_i q_i}{\sum_i w_i}.$$

所以有

$$l_v(x) = (x - p^*)M + q^*. \tag{3}$$

所以原优化函数可以修改为

$$\sum_i w_i |\hat{p}_i M - \hat{q}_i|^2, \tag{4}$$

其中 $\hat{p}_i = p_i - p^*$, $\hat{q}_i = q_i - q^*$, 考虑二维图像时, M 就是一个 2×2 的矩阵.

1.1 Affine Deformation

要找一个仿射变换来极小化方程 (4), 直接用古典方法求解优化问题得

$$M = \left(\sum_i \hat{p}_i^\top w_i \hat{p}_i \right)^{-1} \sum_j \hat{p}_j^\top w_j \hat{q}_j.$$

从而我们可以写出仿射变换的表达式

$$f_a(v) = (v - p^*) \left(\sum_i \hat{p}_i^\top w_i \hat{p}_i \right)^{-1} \sum_j \hat{p}_j^\top w_j \hat{q}_j + q^*. \tag{5}$$

又因为 p_i 是固定的, 所以上式可以变为

$$f_a(v) = \sum_j A_j \hat{q}_j + q^*,$$

其中 A_j 可以预计算

$$A_j = (v - p^*) \left(\sum_i \hat{p}_i^\top w_i \hat{p}_i \right)^{-1} w_j \hat{p}_j^\top.$$