EMINES-UM6P
CPI1A 2025-2026

TD2
Nombres complexes

Exercice 1.

1. *Déterminer la forme algébrique et le module de :* $\frac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$
2. *Soit* $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$, *montrer que* $\frac{z-1}{z+1}$ *est imaginaire pur.*

Exercice 2. *Dans* $\mathbb{C}$, *résoudre géométriquement les équations :* $|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right|$.

Exercice 3.

1. *Soient* u *et* v *deux éléments de* $\mathbb{U}$. *Montrer que* $\frac{(u+v)^2}{uv}$*est un réel*
2. *Soit* $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *et* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Montrer que :* $\frac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$.

Exercice 4. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *montrer que :* $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{Z}$. *Donner une CNS sur* n *pour qu'il soit positif.*

Exercice 5. *Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de* $\sqrt{3}+i$. *En déduire les valeurs exactes de cos* $\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et sin* $\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 6. *.Déterminer le module et l'argument de* $z \in \mathbb{C}$ *dans les cas suivantes :*

— $z = 1 + e^{i\theta}$ *pour* $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$.
— $z = \frac{1}{1+i\tan(\alpha)}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.
— $z = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ *pour* $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$.

Exercice 7.

1. *Résoudre les équations dans* $\mathbb{C}$ *:*

$$z^2 - 2iz + 2i;\ (z+1)^3 = 3i;\ z^n = \overline{z};\ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

2. *Résoudre le système dans* $\mathbb{C}^2$ *:* $\begin{cases} x+y = 1+i \\ xy = 2-i \end{cases}$.

Exercice 8. *On considère deux suite réelles* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qu'on définit par la relation :* $x_0 = 0$ *et* $y_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \sqrt{2}x_{n+1} = x_n - y_n \\ \sqrt{2}y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$

On pose : $z_n = x_n + iy_n$

1. *Établir une relation entre* z_{n+1} *et* z_n.
2. *Calculer alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9. *Soit* $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. *On pose :* $x = -1-\omega^2-\omega^3$ *et* $y = \omega^2+\omega^3$.

1. *Calculer* $x+y$ *et* xy.
2. *Déterminer* $a, b \in \mathbb{R}$ *tel que* x *et* y *soient solutions de* $z^2+az+b = 0$.
3. *Établir une relation entre* x *et* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, *puis déduire que :* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 10. *Calculer les intégrales suivantes :* $\int_0^{2\pi} \sin(x)\cos^2(2x)dx$ *et* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos^2(x)dx$.

Exercice 11. *Soient* $\mathit{\Pi} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ *et* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 0\}$.

1. *Montrer que* $\forall z \in \mathit{\Pi}$, $\frac{z-i}{z+i} \in D$.
2. *Montrer que l'application* $f : \mathit{\Pi} \longrightarrow D$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ *est une bijection puis calculer l'application réciproque.*

Exercice 12.

1. *Montrer que :* $\forall n \in {}^*\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - n i^{n} - (n+1) i^{n+1}}{2}$.
2. *Déduire les sommes :*

$$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + ... + (-1)^{p}(2p+1) \text{ et } S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + ... + (-1)^{p+1} 2p$$

Exercice 13. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Calculer la somme* $\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. *Résoudre les équations dans* $\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^{k}(x)}$ *et* $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} \cos(k\alpha)$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. *On considère l'application* $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z+|z|}{2}$.

1. *Résoudre l'équation :* $f(z) = 0$.
2. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *tel que :* $z \notin \mathbb{R}^-$:
   (a) *Justifier que* z *possède un argument* $\theta \in]-\pi, \pi[$.
   (b) *En déduire que* $Re(f(z)) > 0$.
3. *Déterminer alors* $f(\mathbb{C}) = \{f(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 15. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$, *montrer que* $e^{i\theta}$ *est une racine* $n^{i\grave{e}me}$*de l'unité si et seulement si* $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.

Exercice 16. *On se propose de montrer que* $\frac{2+i}{2-i}$ *n'est pas une racine* $n^{i\grave{e}me}$*de l'unité. On suppose l'existence d'un entier* $n \geq 2$ *tel que :*$\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^{n} = 1$.

1. *Justifier que* $\frac{2+i}{2-i}$ *est de module* 1.
2. *En écrivant* $2 + i = 2 - i + 2i$, *montrer que :*$\sum_{k=1}^{n} C_n^k (2-i)^{n-k} (2i)^{k} = 0$.
3. *En déduire que :* $(2-i)\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (2-i)^{n-k-1} (2i)^{k}\right) = -(2i)^{n}$.
4. *Montrer alors l'existence des entiers* $a, b \in \mathbb{Z}$ *tels que :* $(2-i)(a+ib) = -(2i)^{n}$.
5. *Aboutir à une contradiction.*

Exercice 17. *Soit* $\omega \neq 1$ *une racine* $n^{i\acute{e}me}$ *de l'unité*

1. *Calculer les sommes :* $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \omega^k$; $\sum_{k=0}^{n-1} \left(1+\omega^k\right)^{n}$; $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k}^{n-1} C_l^k \omega^{k+l}$.
2. *On pose* $S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$. *Calculer* $(\omega - 1) S$, *puis déduire* S.

Exercice 18. *Soient* $n \geq 3$, $\omega_1, ..., \omega_n$ *avec* $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 1, .., n$.

1. *Calculer pour* $p \in \mathbb{Z}$, $S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^p$.
2. *Montrer que :* $\sum_{k=1}^{n-1} cotg\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$.
3. *Déduire :* $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_k}$.

Exercice 19. *Soient* X, Y *et* Z *des complexes de module* 1 *tel que :* $X + Y + Z = 0$.
On pose $x = arg(X)$, $y = arg(Y)$ *et* $z = arg(Z)$. *On considère* $\alpha = y - x$ *et* $\beta = z - x$.

1. *Montrer que :* $\alpha \equiv -\beta\,[2\pi]$ *ou* $\alpha \equiv \pi + \beta\,[2\pi]$.
2. *En déduire que :* $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$.

Exercice 20. *Quelle est l'image du cercle unité par l'application* $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$?