CPI1A

TD9 : Analyse asymptotique

Comparaison de suites

Exercice 1 : Soient $a, b > 1$. Montrer que $n^n = o(a^{b^n})$.

Exercice 2 : Trouver un équivalent simple des suites suivantes et en déduire leur limite :

$u_n = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}$; $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$; $u_n = C_n^p$ *où* $p \in \mathbb{N}$; $u_n = \ln(n+1) - \ln(n-1)$;
$u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$; $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, $u_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)$; $u_n = (1 - th(n))^{th\left(\frac{1}{n}\right)}$; $u_n = \sqrt[n]{ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}$.

Exercice 3 :

1. Déterminer la limite de la suite : $\frac{(2n+1)!}{2^{2n}\sqrt{n}(n!)^2}$.
2. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.
3. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ *et* $(t_n)_{n\geq 0}$ des suites de réels positifs telle que : $u_n \sim v_n$ *et* $w_n \sim t_n$.
   Montrer que : $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.
4. Donner un équivalent de la suite définie par : $u_1 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n > 0$, $u_{n+1} = \frac{n + \ln(n) u_n}{\ln(n+1)}$. (on pourra poser : $v_n = \ln(n) u_n$).

Exercice 4 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 e^t t^n \, dt$.

1. Montrer que (u_n) est positive et décroissante
2. Par une intégration par partie, donner une relation de récurrence entre u_{n+1} *et* u_n.
3. Montrer que (u_n) tend vers 0, puis déduire un équivalent simple de (u_n) .

Exercice 5 : Soit $u_0 > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) strictement positive et converge vers 0.
2. Déterminer un réel α tel que la fonction $(\ln(1+x))^\alpha - x^\alpha$ converge vers un réel non nul quand x tend vers 0^+.
3. En utilisant la moyenne de Cesàro, déterminer un équivalent simple de u_n.

Exercice 6 :

1. Soit $f: x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}(0)$.
2. Soit f: $]0,2[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(x)}{2-x}$. Calculer $f^{(k)}(1)$ pour $k \in [\![0,4]\!]$.

Exercice 7 : Déterminer les développements limités suivants :

$$\mathrm{DL}_3\left(\frac{\pi}{4}\right) \; de \; \sin(x) \; ; \; \mathrm{DL}_3(0) \; de \; \ln(1+\sin(x)) \; ; \; ; \; \mathrm{DL}_2(0) \; de \; \frac{\arctan(x)}{\tan(x)} ; \; \mathrm{DL}_2(0) \; de \; (1+x)^{\frac{1}{x}} \; ;$$

$$\mathrm{DL}_3(0) \; de \; (\ln(1+x))^2 \; ; \; \mathrm{DL}_{n+2}(0) \; de \; (\sin(x))^n \; avec \; n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \mathrm{DL}_2(2) \; de \; x^x \; ;$$
$$\mathrm{DL}_{10}(0) \; de \; \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt.$$

Exercice 8 :

1. Ecrire un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ à l'aide de nombres factoriels, puis en déduire un $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de la fonction Arcsin.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = tan^{(n)}(0)$.
   a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer des réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tel que : $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, u_k u_{n-k}$.
   b. Déduire alors un $\mathrm{DL}_7(0)$ de $\tan(x)$.

Exercice 9 : En utilisant un développements limité, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3}, \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right), \lim_{x\to 0}\left(1+\sin(x)\right)^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0}\left(2^x + 3^x - 4^x\right)^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)\right)^{\alpha} - \left(\ln(x)\right)^{\alpha} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10 : Montrer que l'application $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = xe^{x^2}$admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$, puis former le $\mathrm{DL}_5(0)$ de f^{-1}.

Exercice 11 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ de classe C^2, on considère $g=\sqrt{f}$ et $a\in\mathbb{R}$

1. Si $f(a)\neq 0$. Justifier que g est dérivable en a.
2. On suppose que $f(a)=0$, montrer que $f'(a)=0$ et que $f''(a)\geq 0$. Puis montrer que si $f''(a)>0$, alors g n'est pas dérivable en a.

Exercice 12 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2, on suppose que l'existence de M_0, M_2 deux réels positifs tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$

1. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, \forall h>0$ on a
$$\left|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\right| \leq M_2\frac{h^2}{2} \text{ et que } \left|f(x-h)-f(x)+hf'(x)\right| \leq M_2\frac{h^2}{2}.$$
2. En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}, \forall h>0$, $\left|f'(x)\right| \leq \frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2$.
3. Etudier la variation de la fonction sur $\mathbb{R}_+^*$: $h\mapsto \frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2$. En déduire que f' est bornée et que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 13 :

On considère la fonction :

$$\begin{array}{cccc} f & : &]-1,0[\cup]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} \end{array}$$

a) Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
b) Si oui, ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
c) Si oui, quelle est la position de sa courbe représentative par rapport à sa tangente à l'origine ?

Exercice 14 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considére l'application $f : t \to (e^t - 1)^n$

1. *Donner de deux façons le développement limité à l'ordre n en 0 de$f$*
2. *En déduire la valeur de $S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^p$ où $0 \leq p \leq n$*

Exercice 15 : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : Soit $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.