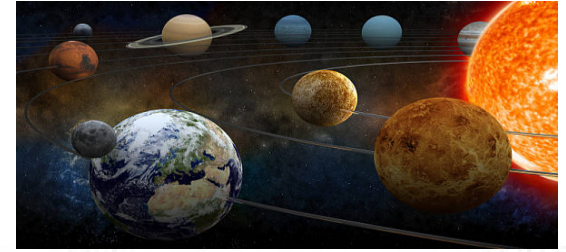




Mécanique du point matériel



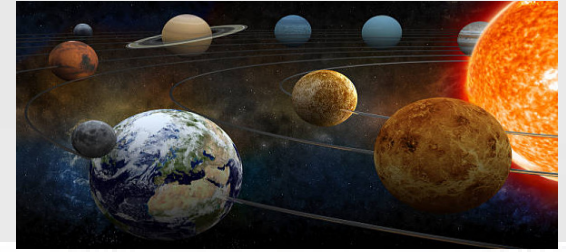
Oscillateurs mécaniques

A – Etude en régime libre



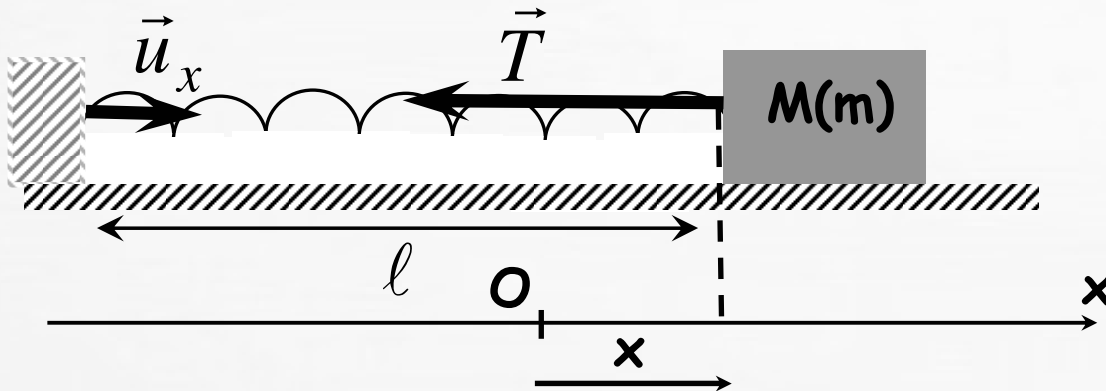


Mécanique du point matériel



➤ 1 - Un 1^{er} exemple simple : système {masse - ressort horizontal} :

* En l'absence de frottements : le PFD ou une étude énergétique conduisent à :



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

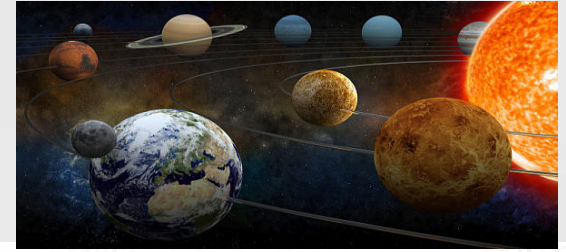
La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = C \cos(\omega_0 t - \varphi)$$





Mécanique du point matériel



➤ Un 1er exemple simple : système {masse - ressort horizontal} :

* En présence de frottement fluide en $-hm\vec{v}$:

Le PFD s'écrit alors, en projection sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = -kx - hm\dot{x} \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad h = 2\lambda = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$

σ est le facteur d'amortissement de l'oscillateur et Q le facteur de qualité.

Alors :

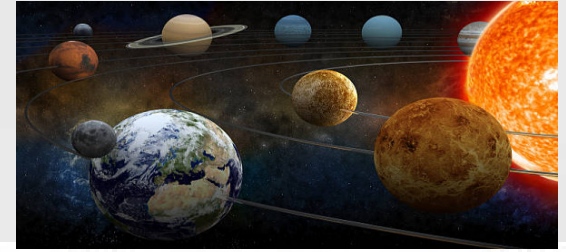
$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Différents régimes, selon les valeurs prises par σ (ou $Q = 1/2\sigma$) : régime pseudo-périodique, régime apériodique ou régime apériodique.





Mécanique du point matériel



➤ 2 - Méthode de résolution de l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On recherche des solutions de la forme $\exp(rt)$, avec r appartenant *a priori* au corps des complexes. On aboutit au polynôme caractéristique :

$$r^2 + 2\sigma\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Dont le discriminant est :

$$\Delta = 4\omega_0^2(\sigma^2 - 1)$$

$\Delta < 0$ soit $\sigma < 1$: régime pseudo-périodique ($r_1, r_2 \in \mathbb{C}$)

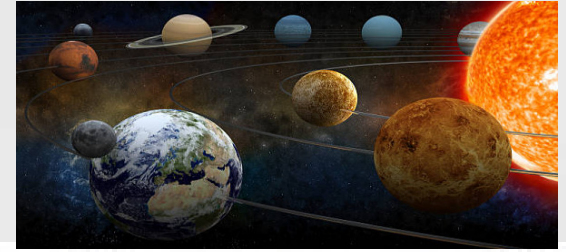
$\Delta > 0$ soit $\sigma > 1$: régime apériodique ($r_1, r_2 \in \mathbb{R}$)

$\Delta = 0$ soit $\sigma = 1$: régime apériodique critique (racine unique, $r = -\omega_0$)





Mécanique du point matériel



Régime pseudo-périodique : ($\sigma < 1$) (**CI :** $x(0)=x_0$ et vitesse initiale nulle)

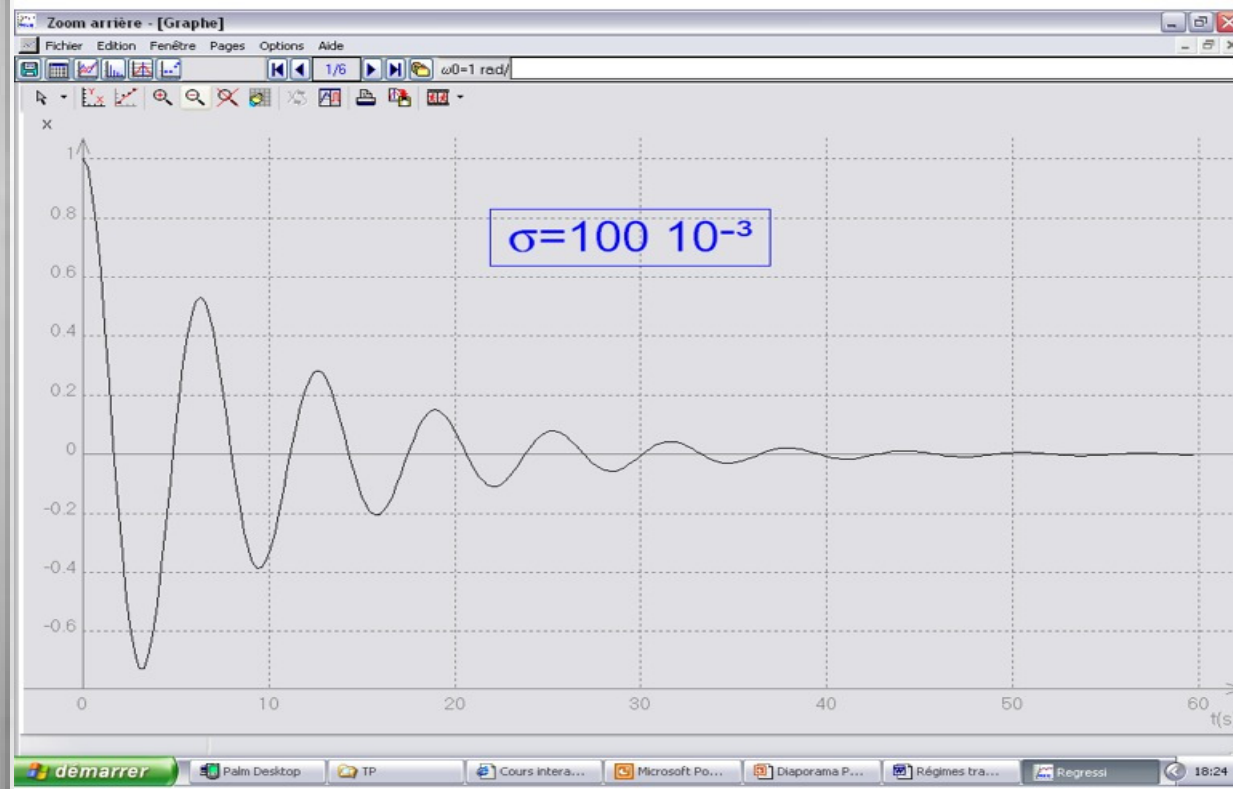
$$x(t) = x_0 e^{-\sigma \omega_0 t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\sigma \omega_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$$x(t) = C e^{-\sigma \omega_0 t} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$C = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma \omega_0}{\omega} \right)^2} ; \quad \tan \varphi = \frac{\sigma \omega_0}{\omega}$$

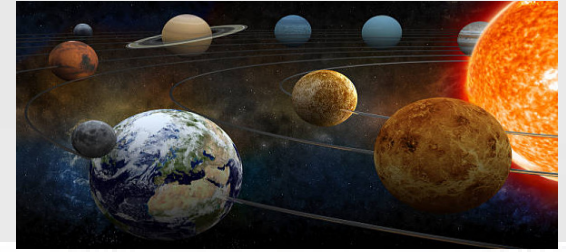
$$(avec \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2})$$

(Pseudo - pulsation)





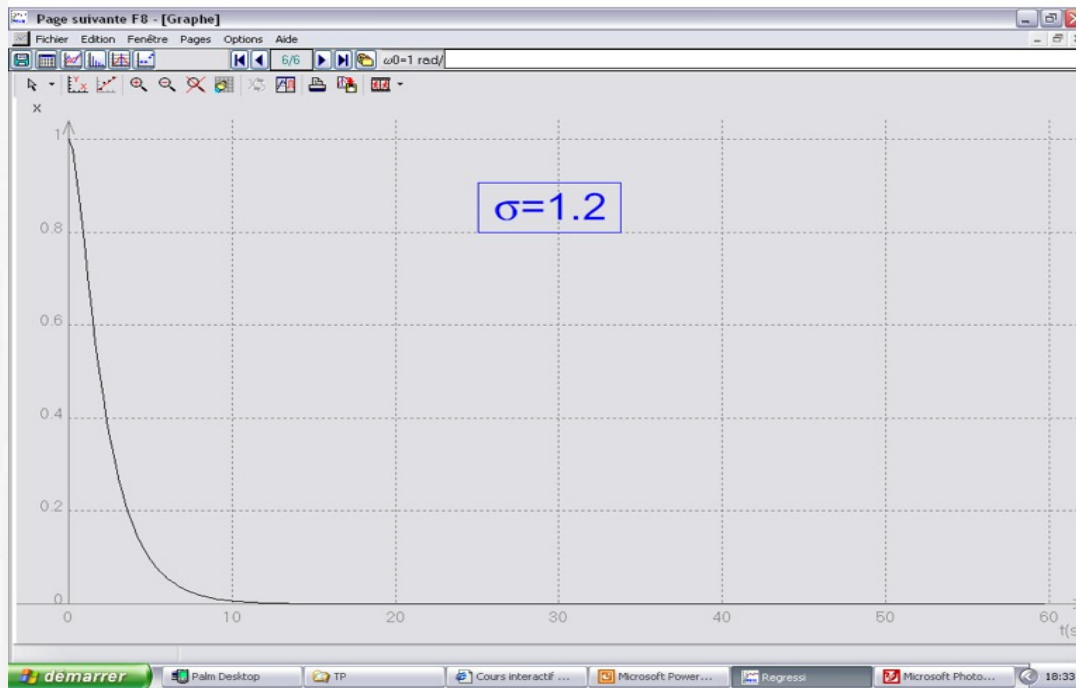
Mécanique du point matériel



Régime apériodique :

$(\sigma > 1)$

(CI : $x(0)=x_0$ et vitesse initiale nulle)



$$r_1 = -\sigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1} ; r_2 = -\sigma\omega_0 - \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1}$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1}$$

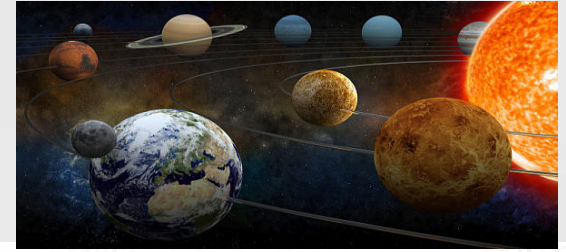
$$x(t) = x_0 e^{-\sigma\omega_0 t} \left(ch(\omega t) + \frac{\sigma\omega_0}{\omega} sh(\omega t) \right)$$

$$x(t) = \frac{x_0}{2} e^{-\sigma\omega_0 t} \left(\left(1 - \frac{\sigma\omega_0}{\omega} \right) e^{-\omega t} + \left(1 + \frac{\sigma\omega_0}{\omega} \right) e^{\omega t} \right)$$





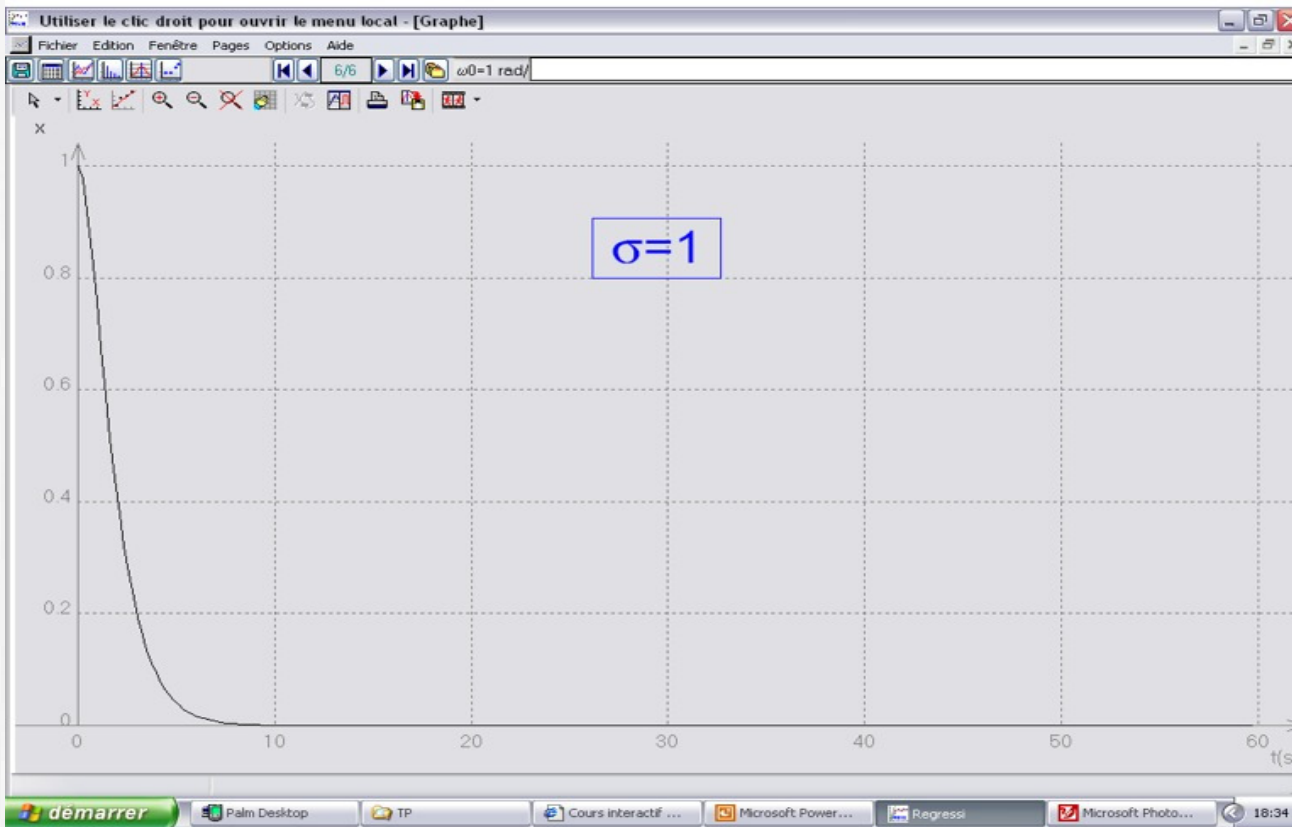
Mécanique du point matériel



Régime apériodique critique :

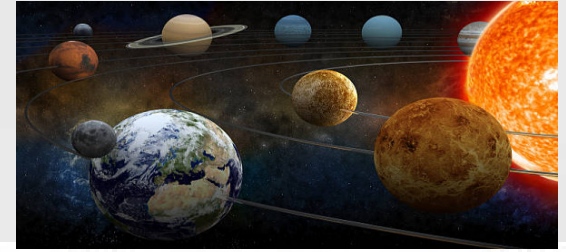
($\sigma = 1$) (CI : $x(0)=x_0$ et vitesse initiale nulle)

$$x(t) = x_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}$$

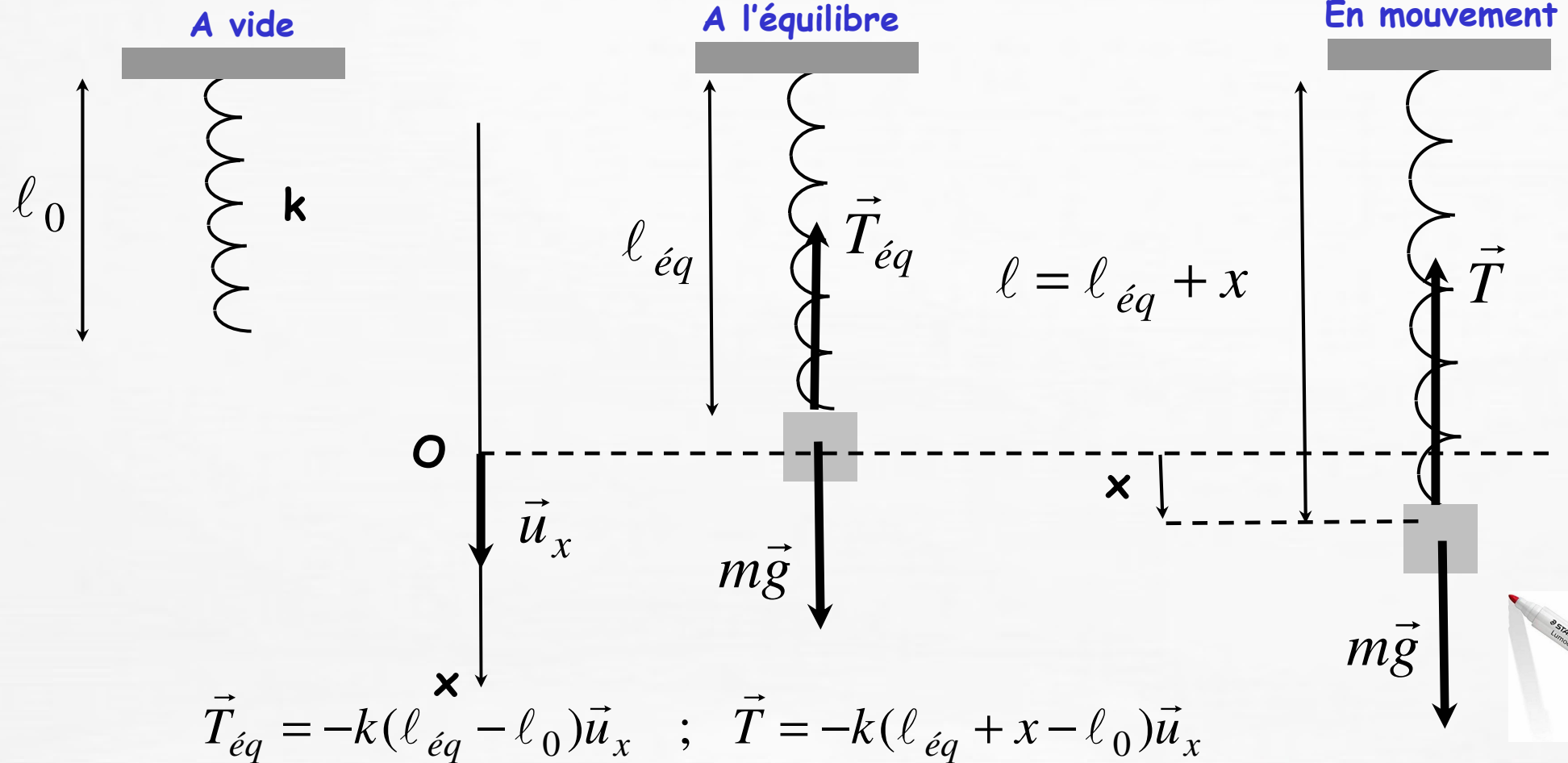




Mécanique du point matériel

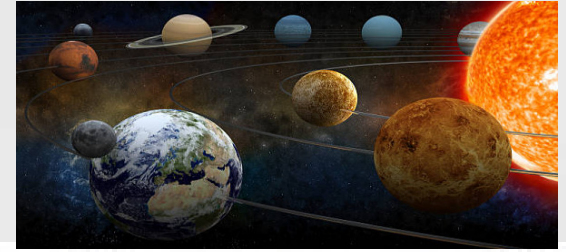


➤ 3 - Autres exemples d'oscillateurs : Le ressort vertical





Mécanique du point matériel



En l'absence de frottements :

A l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{T}_{eq} = \vec{0} \quad ; \quad -k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = \vec{0} \quad ; \quad \ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

En mouvement : $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \quad ; \quad -k(\ell_{eq} + x - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$

En tenant compte de la relation obtenue à l'équilibre :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \left(\text{Avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

En présence de frottements fluides :

Par un raisonnement similaire, on obtient :

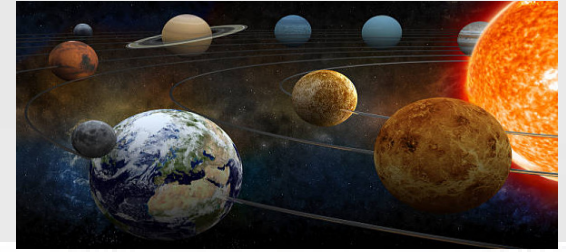
$$m\vec{g} + \vec{T} - hm\vec{v} = m\vec{a} \quad ; \quad -k(\ell_{eq} + x - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x - hm\dot{x}\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \left(\text{Avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } 2\sigma\omega_0 = h \right)$$

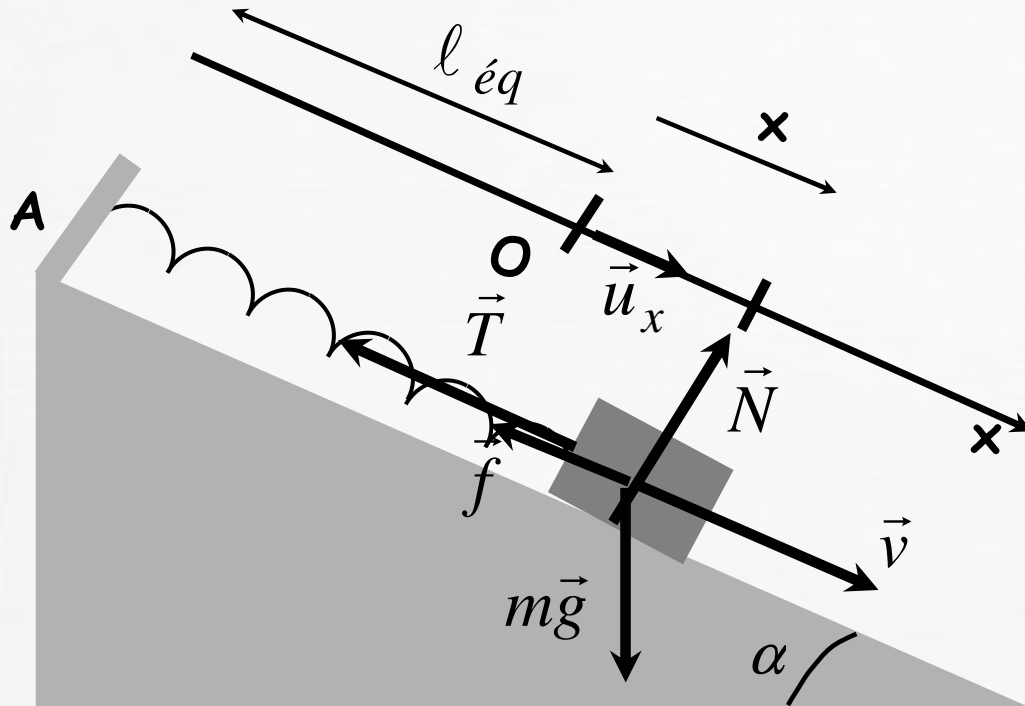




Mécanique du point matériel



Ressort sur un plan incliné :



$$-k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\vec{u}_x + mg \sin \alpha \vec{u}_x = \vec{0}$$

$$\text{d'où} : \ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

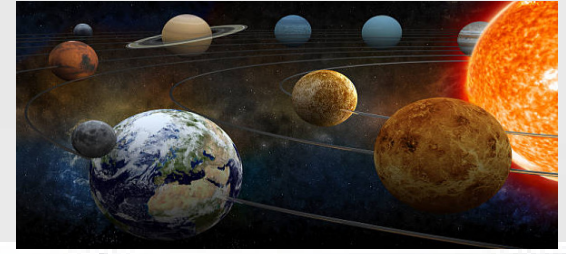
En présence d'une force de frottement fluide de la forme $-hm\vec{v}$, l'équation différentielle vérifiée par la variable x peut encore s'écrire sous la forme canonique :

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$





Mécanique du point matériel



Oscillateurs couplés :

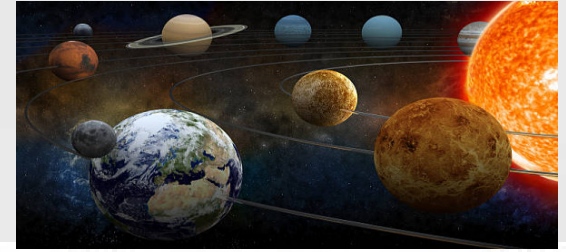
Enoncé du problème : (fichier au format pdf)

[pdf](#)





Mécanique du point matériel



Le pendule simple :

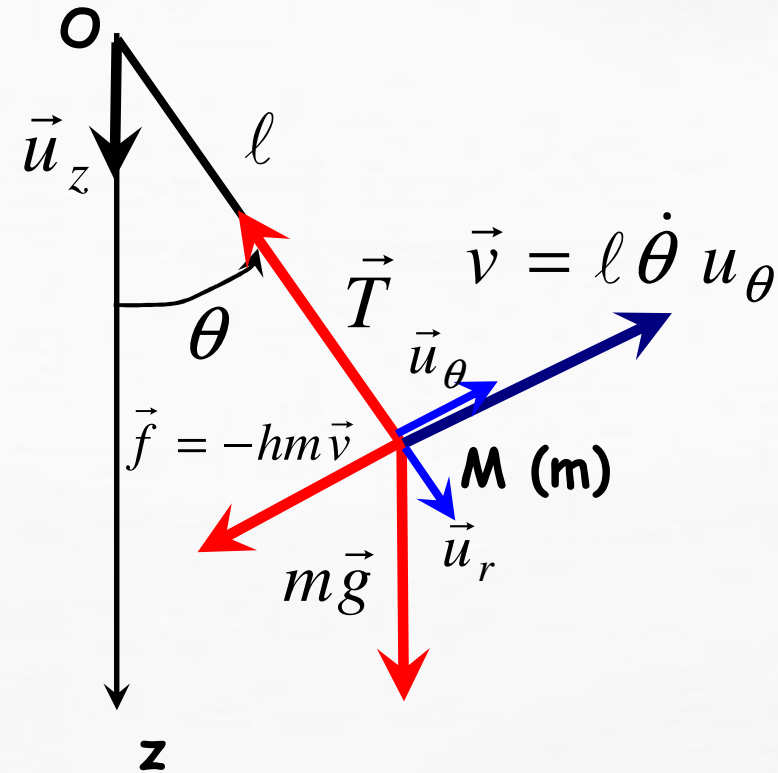
En présence d'une force de frottement fluide : $-hm\vec{v}$

PFD sur \vec{u}_θ : $m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - hm(\ell\dot{\theta})$

Soit : $\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = \ddot{\theta} + 2\sigma\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$

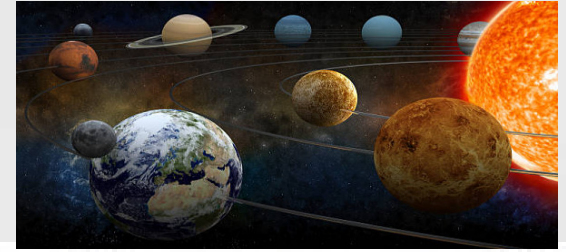
Si l'angle θ reste « petit », alors on retrouve l'équation habituelle :

$$\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = \ddot{\theta} + 2\sigma\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$





Mécanique du point matériel



➤ 4 - Notion d'espace des phases :

Cet espace est le produit de l'espace ordinaire par l'espace des vitesses. En d'autres termes, un point matériel M est repéré dans cet espace par les coordonnées (x, y, z) de son vecteur position ainsi que par celles de son vecteur vitesse, notées (v_x, v_y, v_z) .

On se limite aux cas où un point matériel M est animé, dans l'espace ordinaire, d'un mouvement à une dimension, le long de l'axe (Ox) .

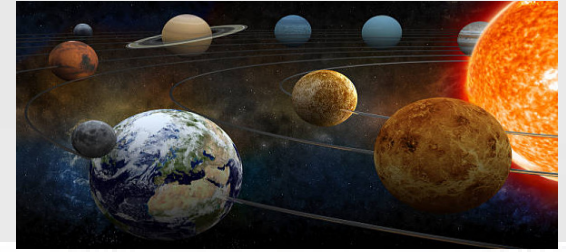
Dans l'espace des phases, le point représentatif de l'état de M se déplace alors dans une région à deux dimensions.

Ce point, de coordonnées (x, v) , décrit lors du mouvement de M une courbe appelée "courbe des phases". Cette "trajectoire" de M dans l'espace des phases a pour origine le point $M_0(x_0, v_0)$ correspondant à l'état initial de M .





Mécanique du point matériel



La position du point matériel est complètement déterminée par la donnée des conditions initiales et par la connaissance des équations du mouvement.

Comme l'évolution de la particule est univoque, **deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent pas se croiser**. Si cela était possible, en prenant ce point d'intersection comme conditions initiales, on pourrait obtenir deux solutions distinctes des équations du mouvement, ce qui est interdit pour des raisons mathématiques.

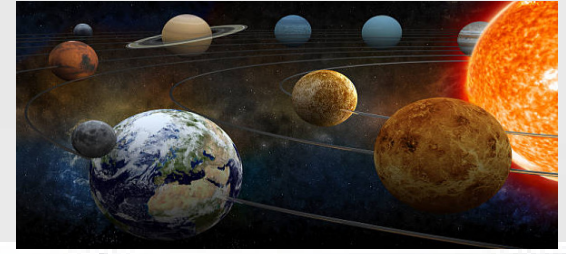
Exemples de courbes des phases :

- *** initialement en mouvement, M n'est soumis à aucune force.
- *** initialement immobile, M est soumis à une force constante F .
- *** initialement en mouvement, M est soumis à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse : $F = -hmv$ (a : constante positive).





Mécanique du point matériel



*** initialement immobile hors d'équilibre, M est soumis à une force de rappel proportionnelle à son élongation : $F = -kx$ (k : constante positive).

La courbe des phases peut se retrouver en écrivant l'intégrale ^{1ère} du mouvement.

Quelle est l'équation de la courbe des phases dans le plan $(x, v/\omega_0)$?

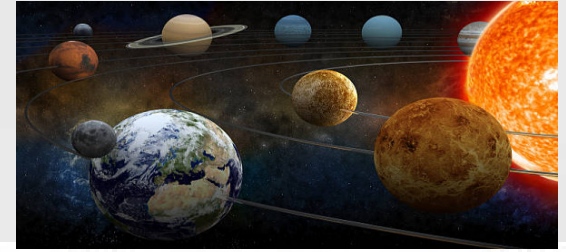
*** Déterminer, par la même loi de conservation, la courbe de phase pour un pendule simple (masse m et longueur L).

Quelle est l'équation de la courbe des phases dans le plan $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$?





Mécanique du point matériel



➤ 5 - Portrait de phase d'un oscillateur :

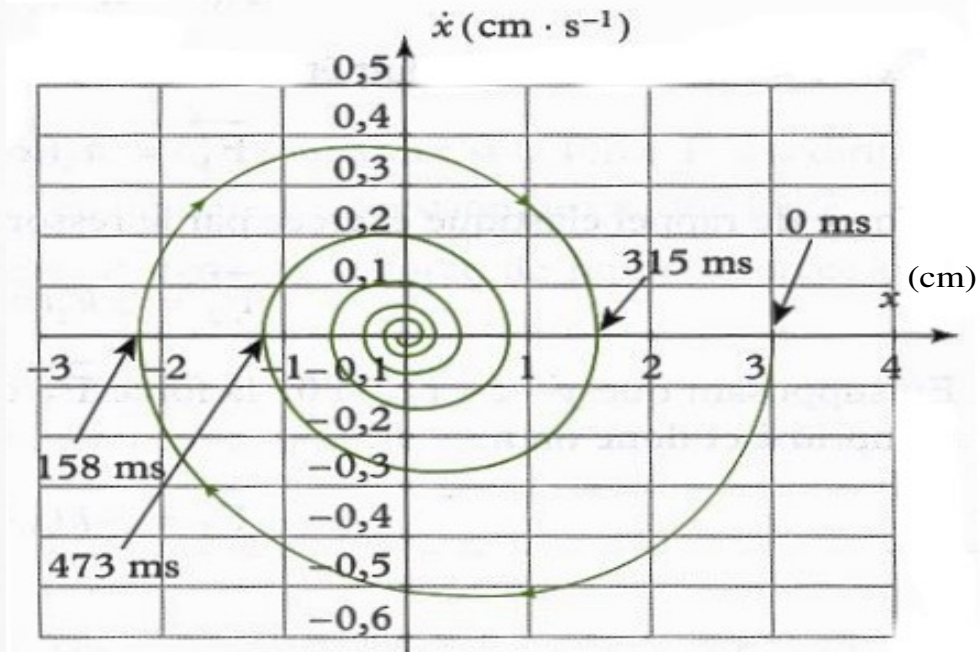
Lecture de portrait de phase : on considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse $m = 500 \text{ g}$ soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide (λ étant la vitesse de la masse m et on note x l'écart à la position d'équilibre). L'étude est réalisée dans le référentiel galiléen du laboratoire.

a) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.

b) Déterminer, par lecture graphique :

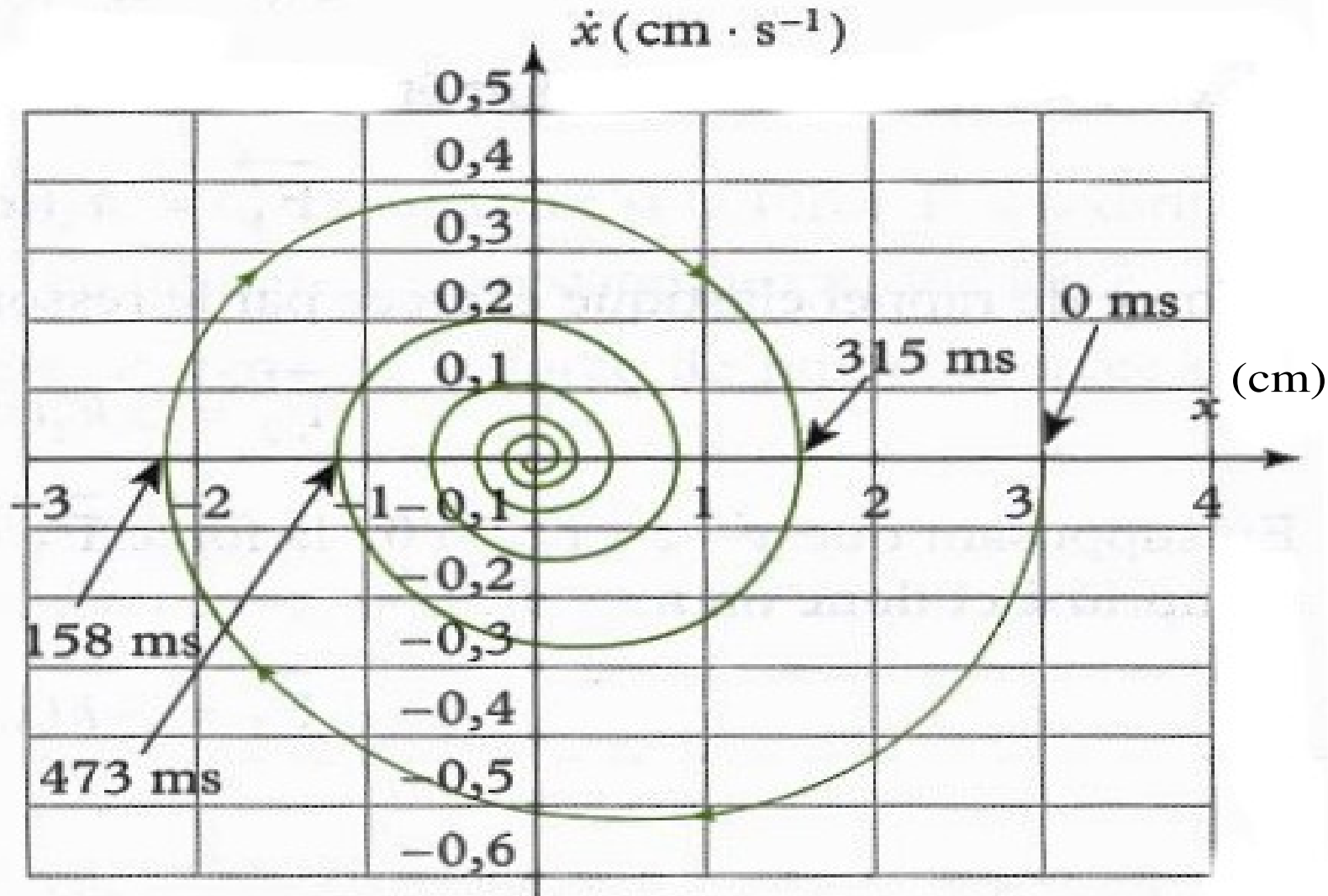
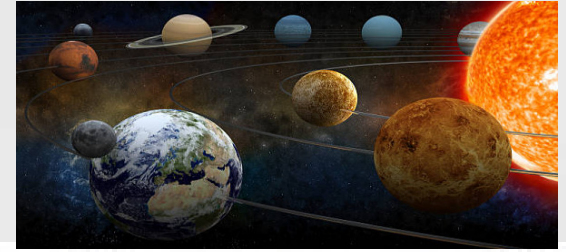
- * La valeur initiale de la position x_0 .
- * La valeur finale de la position x_f .
- * La pseudo période T_a .
- * Le décrément logarithmique δ .

c) En déduire la pulsation propre ω_0 , le facteur de qualité Q de l'oscillateur, la raideur k du ressort et le coefficient de frottement fluide λ .



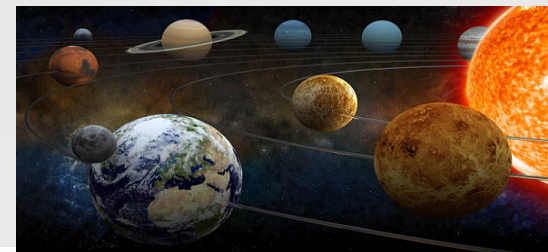


Mécanique du point matériel





Mécanique du point matériel



a) **Régime pseudo-périodique** : présence de frottements, la courbe de phase n'est pas fermée. Elle se termine en un point d'équilibre stable (ici le point O), appelé **attracteur**.

b) $x_0 = 3 \text{ cm}$; $x_f = 0 \text{ cm}$ (attracteur) ; $T_a = 315 \text{ ms}$;

$$\delta = \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = \ln\left(\frac{3 \cdot 10^{-2}}{1,6 \cdot 10^{-2}}\right) = 0,628 \quad ; \quad x(t + T_a) = e^{-\delta} x(t) = e^{-\sigma \omega_0 T_a} x(t)$$

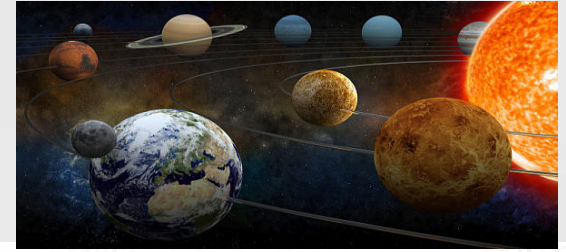
c) $Q = 5$; $\omega_0 = 20,05 \text{ rad.s}^{-1}$; $\sigma = \frac{1}{2Q} = 0,1$

$$k = m\omega_0^2 = 201 \text{ N.m}^{-1} \quad ; \quad \lambda = m \frac{\omega_0}{Q} = 2 \text{ Nm}^{-1} \cdot \text{s}$$

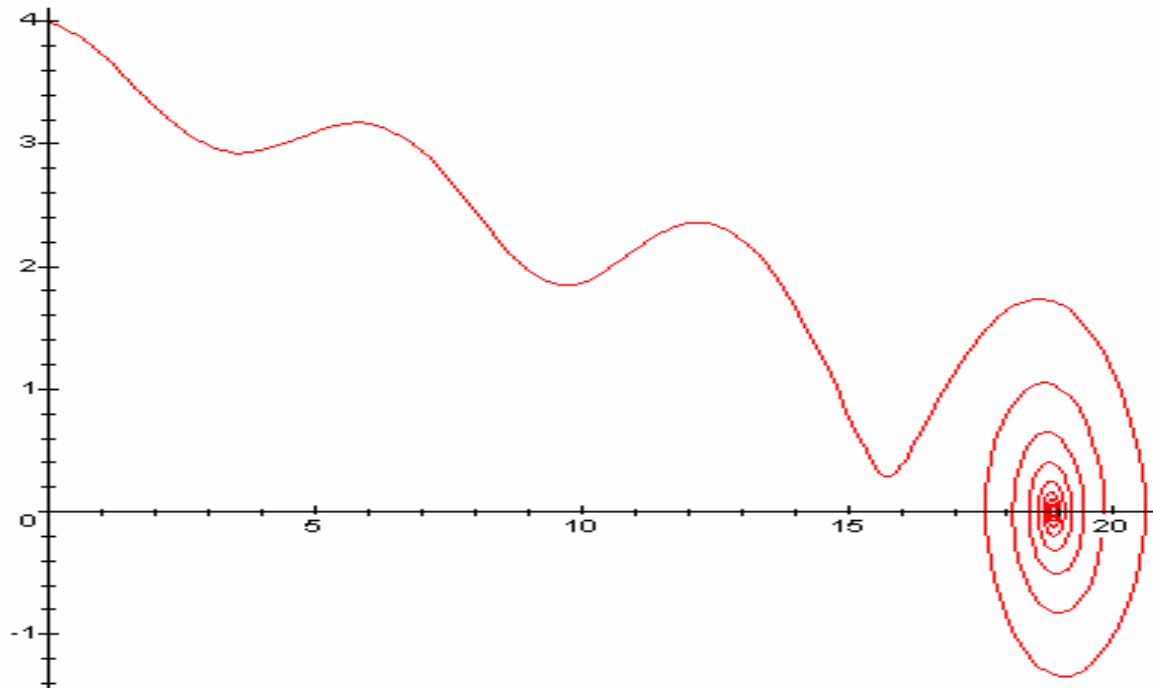




Mécanique du point matériel

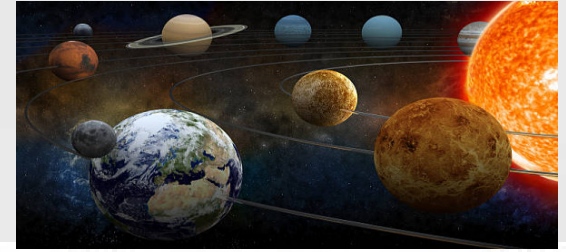


➤ Portrait de phase d'un pendule simple :





Mécanique du point matériel



Trampoline :

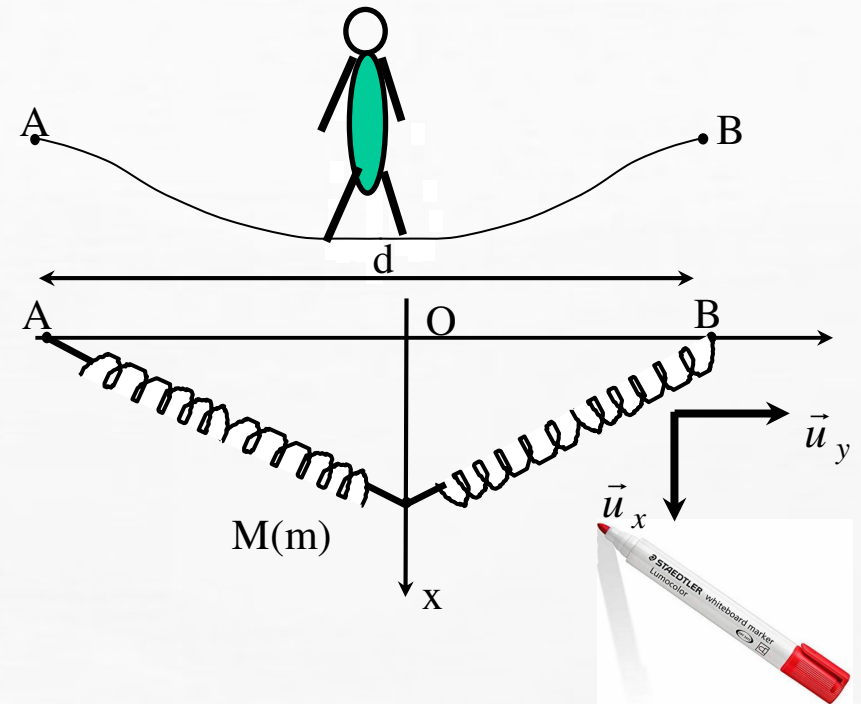
On considère la modélisation d'un trampoline à l'aide de deux ressorts de longueur à vide l_0 et de raideur k . Un homme, assimilé à un point matériel M de masse m monte sur le trampoline qui s'enfonce ; son mouvement est vertical le long de l'axe (Ox) .

Données : $k = 3\,300 \text{ N.m}^{-1}$; $\ell_0 = 1 \text{ m}$; $m = 80 \text{ kg}$; $d = 5 \text{ m}$

Dans les deux premières questions, on suppose que l'homme reste en contact avec le trampoline : il est solidaire du trampoline.

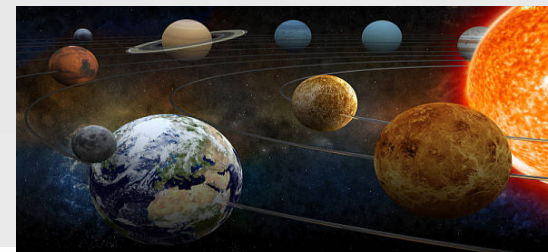
a) Déterminer la distance d'enfoncement x_{eq} à l'équilibre lorsque l'homme monte sur le trampoline. En déduire l'allongement des ressorts.

b) L'oscillateur obtenu est-t-il harmonique ?





Mécanique du point matériel



a) Bilan des forces à l'équilibre :

Le poids : $mg \vec{u}_x$

La tension du ressort de droite :

$$\vec{T}_d = k(MB - \ell_0) \frac{\overrightarrow{MB}}{MB}$$

$$\overrightarrow{MB} = -x \vec{u}_x + (d/2) \vec{u}_y \quad ; \quad MB = \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad , \text{ d'où :}$$

$$\vec{T}_d = k \left(\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \ell_0 \right) \left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{u}_x + \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{u}_y \right]$$

De même :

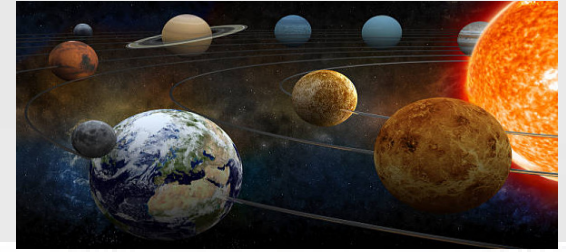
$$\vec{T}_g = k \left(\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \ell_0 \right) \left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{u}_x - \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{u}_y \right]$$

(tension du ressort de gauche)





Mécanique du point matériel



A l'équilibre : $mg \vec{u}_x + \vec{T}_d + \vec{T}_g = \vec{0}$

En projection sur l'axe (Ox) :

$$mg - 2kx_{eq} \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x_{eq}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \right) = 0$$

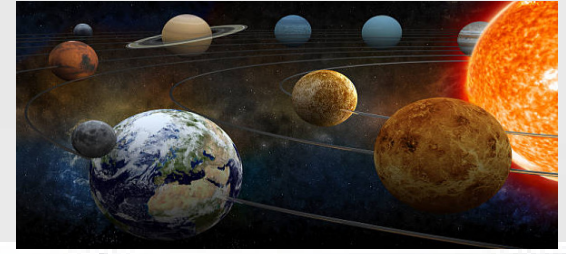
Une résolution numérique conduit à $x_{eq} = 19,8 \text{ cm}$. L'allongement des ressorts est alors :

$$\sqrt{x_{eq}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \ell_0 = 1,5 \text{ m}$$





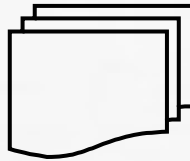
Mécanique du point matériel



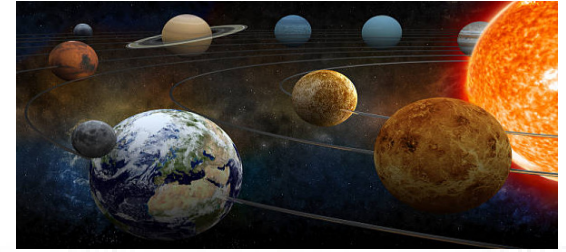
En mouvement, le PFD appliqué à la masse m donne, en projection sur (Ox) :

$$m\ddot{x} = -2kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \right) + mg$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre non linéaire : l'oscillateur n'est pas harmonique.



Mécanique du point matériel



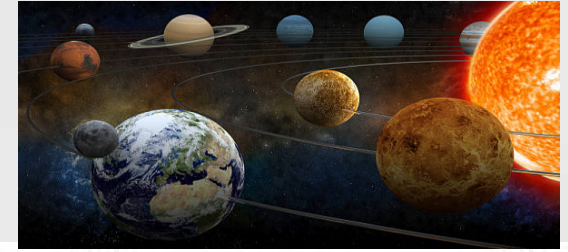
Oscillateurs mécaniques

B – Etude en régime sinusoïdal forcé

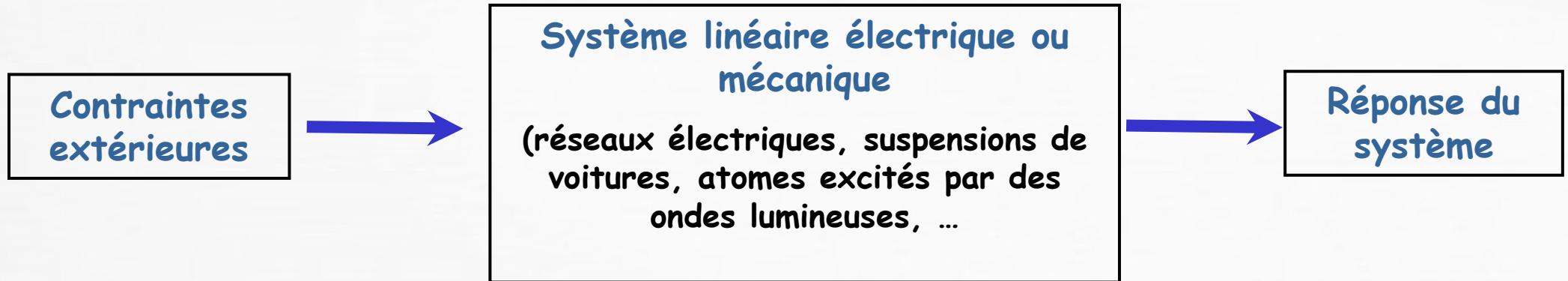




Mécanique du point matériel



➤ 1 - Intérêt de l'étude :

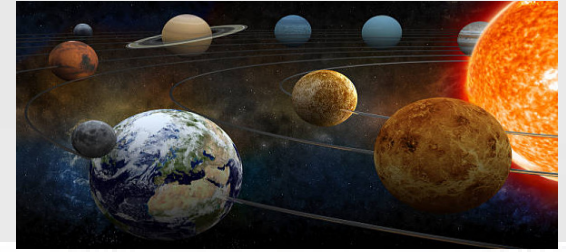


L'analyse harmonique (ou fréquentielle) d'un système est son étude au moyen de sa réponse harmonique $s(t)$, c'est-à-dire de sa réponse en régime permanent sinusoïdal lorsqu'il est soumis à une entrée sinusoïdale $e(t)$ dont on fait varier la pulsation ω .





Mécanique du point matériel



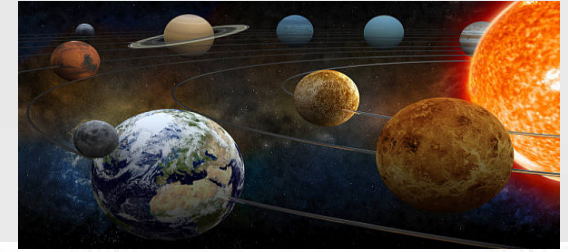
Fonction de transfert complexe - Gain - phase - Diagramme de Bode - dB - Filtre du 1^{er} ordre - Filtre du 2^{ème} ordre - Pulsation de coupure - Asymptotes - Coefficient d'amortissement ξ ($= \sigma$!) - Pulsation propre - Résonance - Bande passante.

Le pont de Tacoma





Mécanique du point matériel



➤ 2 - Description et équation de l'oscillateur étudié :

Dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m\ddot{x} = mg - hm\dot{x} - k(\ell_{\text{éq}} + x - x_A - \ell_0)$$

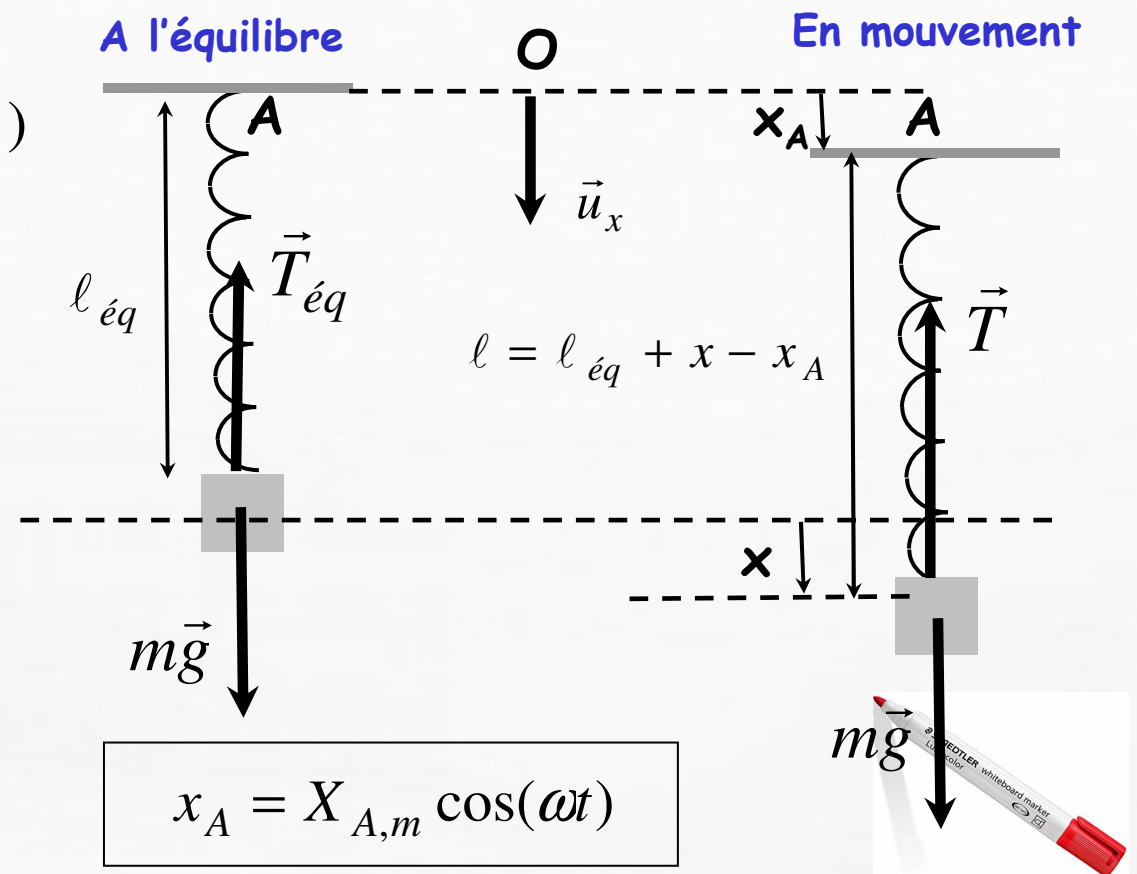
En utilisant la condition d'équilibre :

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_A$$

Soit, avec :

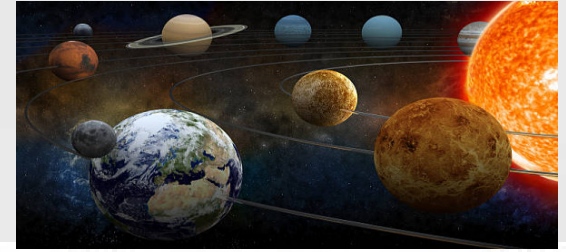
$$h = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2x_A$$





Mécanique du point matériel



Cette équation est formellement identique à celle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit série (RLC) alimenté par un GBF (voir cours d'électricité) :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t), \text{ soit, avec } q = Cu_C :$$

$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}u_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}e(t)$$

Méthode de résolution choisie : la même qu'en électricité !

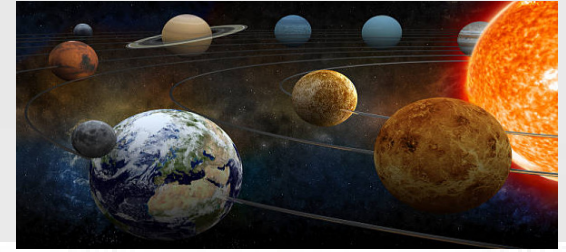
$$\underline{x}_A = X_{A,m} e^{i\omega t} \quad ; \quad \underline{x} = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (x = X_m \cos(\omega t + \varphi))$$

$$\underline{\dot{x}} = i\omega \underline{x} \quad \text{et} \quad \underline{\ddot{x}} = i\omega \underline{\dot{x}} = (i\omega)^2 \underline{x} = -\omega^2 \underline{x}$$





Mécanique du point matériel



➤ 3 - Détermination de la réponse en amplitude $x(t)$:

$$\ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A$$

$$-\omega^2 \underline{x} + 2\sigma\omega_0(i\omega \underline{x}) + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 \underline{x}_A$$

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega \right] \underline{x} = \omega_0^2 \underline{x}_A$$

Soit :

$$\underline{x} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega} \underline{x}_A$$

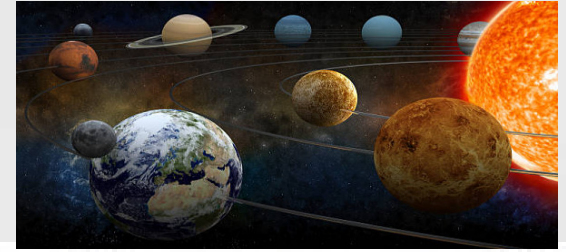
Ou encore :

$$X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega} X_{A,m}$$





Mécanique du point matériel



Etude de l'amplitude maximale $X_m(\omega)$:

En prenant le module de l'expression précédente :

$$X_m = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2 \omega_0^2 \omega^2}} X_{A,m}$$

Etude mathématique : $\lim_{\omega \rightarrow 0} X_m = X_{A,m}$; $\lim_{\omega \rightarrow \infty} X_m = 0$

On note : $D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2 \omega_0^2 \omega^2$

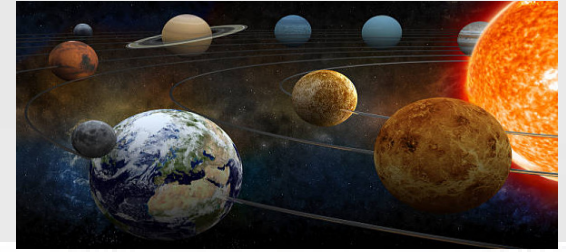
Alors $X_m(\omega)$ sera extrême si $D(\omega)$ l'est aussi. On calcule ainsi une dérivée plus simple :

$$\frac{dD(\omega)}{d\omega} = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\sigma^2 \omega_0^2 \omega = 4\omega(-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\sigma^2 \omega_0^2) = 0$$





Mécanique du point matériel



On obtient ainsi : $\omega = 0$ ou $-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\sigma^2 \omega_0^2 = 0$

Soit, en oubliant la solution non harmonique (correspondant à $\omega = 0$) :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 (1 - 2\sigma^2)$$

Cette pulsation de « résonance d'amplitude » (c'est à dire correspondant à une **réponse harmonique en amplitude maximale**) n'existe que si :

$$1 - 2\sigma^2 > 0 \quad \text{soit}$$

$$\sigma < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Elle vaut alors :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\sigma^2}$$

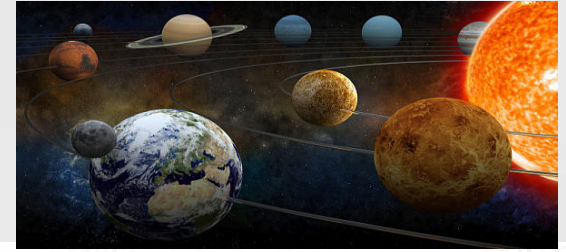
Et l'amplitude maximale à la « **résonance d'amplitude** » est :

$$X_m(\omega_r) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}} X_{A,m}$$





Mécanique du point matériel



Les formules précédentes deviennent, en utilisant le **facteur de qualité Q** à la place du coefficient d'amortissement σ ($Q = 1/2\sigma$) :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{avec} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$X_m(\omega_r) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} X_{A,m}$$

Remarque : pour de **faibles amortissements** (σ «faible» et Q «grand»), alors :

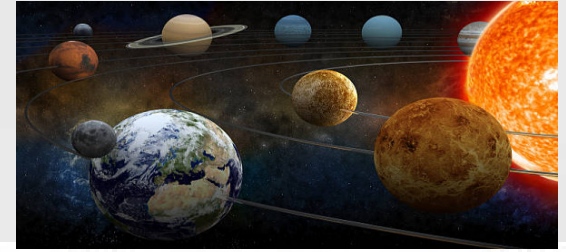
$$\omega_r \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad X_m(\omega_r) \approx Q X_{A,m}$$

Ainsi, si $Q=10$, l'amplitude lors de la résonance vaut 10 fois celle de l'excitation : la résonance est dite «aiguë» et peut causer la destruction du système oscillant.

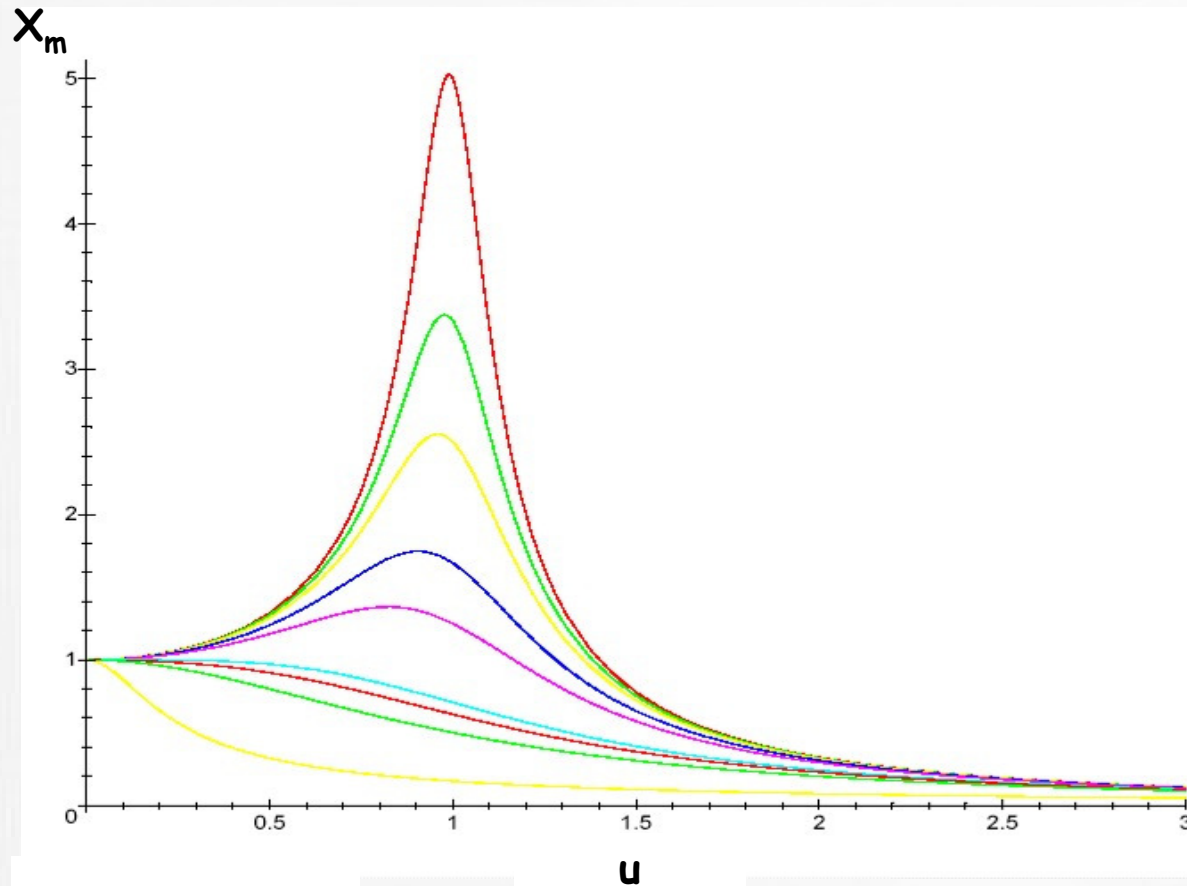




Mécanique du point matériel



Tracés des courbes $X_m(\omega)$ pour différentes valeurs de σ (ou Q) :

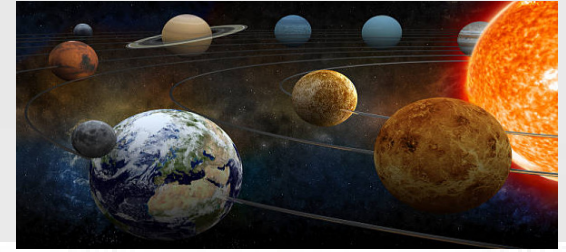


- * On a choisi : $X_{A,m} = 1$
- * $u = \omega/\omega_0$ désigne la pulsation réduite
- * On vérifie bien que, pour σ faible, la résonance est obtenue pour $u \sim 1$ (soit $\omega \sim \omega_0$).
- * L'oscillateur constitue un **filtre passe-bas**
- * Bande passante du filtre





Mécanique du point matériel



Etude du déphasage $\varphi(\omega)$:

La réponse complexe est :

$$X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega} X_{A,m}$$

Le déphasage φ est l'opposé de l'argument θ du complexe

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega$$

Par conséquent :

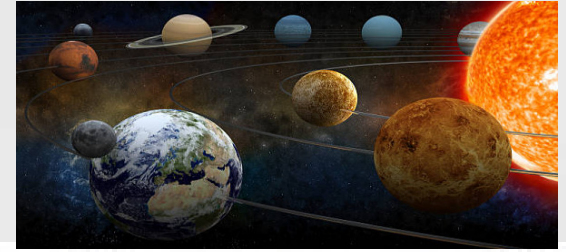
$$\left. \begin{array}{l} \tan \varphi = -\tan \theta = -\frac{2\sigma\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \sin \varphi = -\sin \theta < 0 \quad (\text{signe de } -2\sigma\omega\omega_0) \end{array} \right\} \rightarrow \text{donc } \varphi \in [-\pi, 0]$$

Tracé des courbes $\varphi(\omega)$:





Mécanique du point matériel



Fonction de transfert complexe en amplitude :

La fonction de transfert complexe en amplitude est définie par :

$$\underline{H}_x(i\omega) = \frac{\underline{x}(t)}{\underline{x}_A(t)}$$

Soit :

$$\underline{H}_x(i\omega) = \frac{X_m}{X_{A,m}} e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega}$$

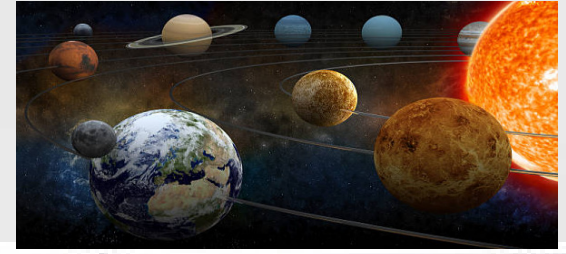
$$G_x(\omega) = \frac{X_m}{X_{A,m}} \quad \text{est le gain (réel) en amplitude.}$$

Diagramme de Bode : c'est l'ensemble des deux courbes $G_{x,dB} = 20\log(G_x)$ et φ en fonction de la pulsation ω , tracées en échelle semi-logarithmique (voir l'étude des filtres en électricité).





Mécanique du point matériel



➤ 4 - Détermination de la réponse en vitesse $v(t)$:

En notation réelle : $v(t) = V_m \cos(\omega t + \psi)$

En notation complexe : $\underline{v}(t) = V_m e^{i(\omega t + \psi)}$

La vitesse complexe \underline{v} s'obtient à partir de l'amplitude complexe \underline{x} en remarquant que $\underline{v} = \dot{\underline{x}} = i\omega \underline{x}$.
Par conséquent :

$$\underline{v} = i\omega \left(\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega} \underline{x}_A \right) = \frac{\omega_0}{i \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + 2\sigma} \underline{x}_A$$

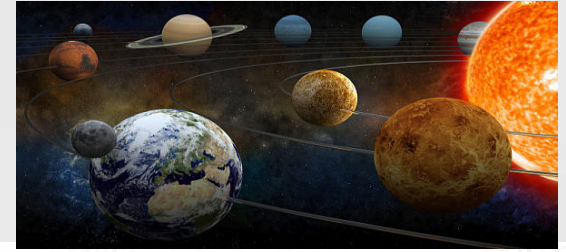
Ou encore :

$$V_m e^{i\psi} = \frac{\omega_0}{2\sigma + i \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} X_{A,m}$$





Mécanique du point matériel



Etude de l'amplitude maximale $V_m(\omega)$ de la vitesse :

En prenant le module de l'expression précédente :

$$V_m(\omega) = \frac{\omega_0}{\sqrt{4\sigma^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} X_{A,m}$$

Etude mathématique :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} V_m = 0 \quad ; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} V_m = 0$$

$V_m(\omega)$ sera maximale (on parle alors de **résonance de vitesse**, si le dénominateur est minimal, c'est à dire pour une pulsation telle que :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0 \quad \text{soit} \quad \omega = \omega_0$$

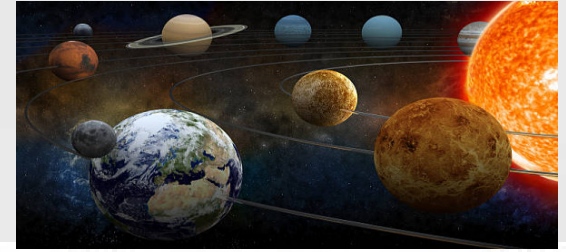
L'amplitude de la vitesse valant alors :

$$V_m(\omega_0) = \frac{\omega_0}{2\sigma} X_{A,m} = Q \omega_0 X_{A,m}$$

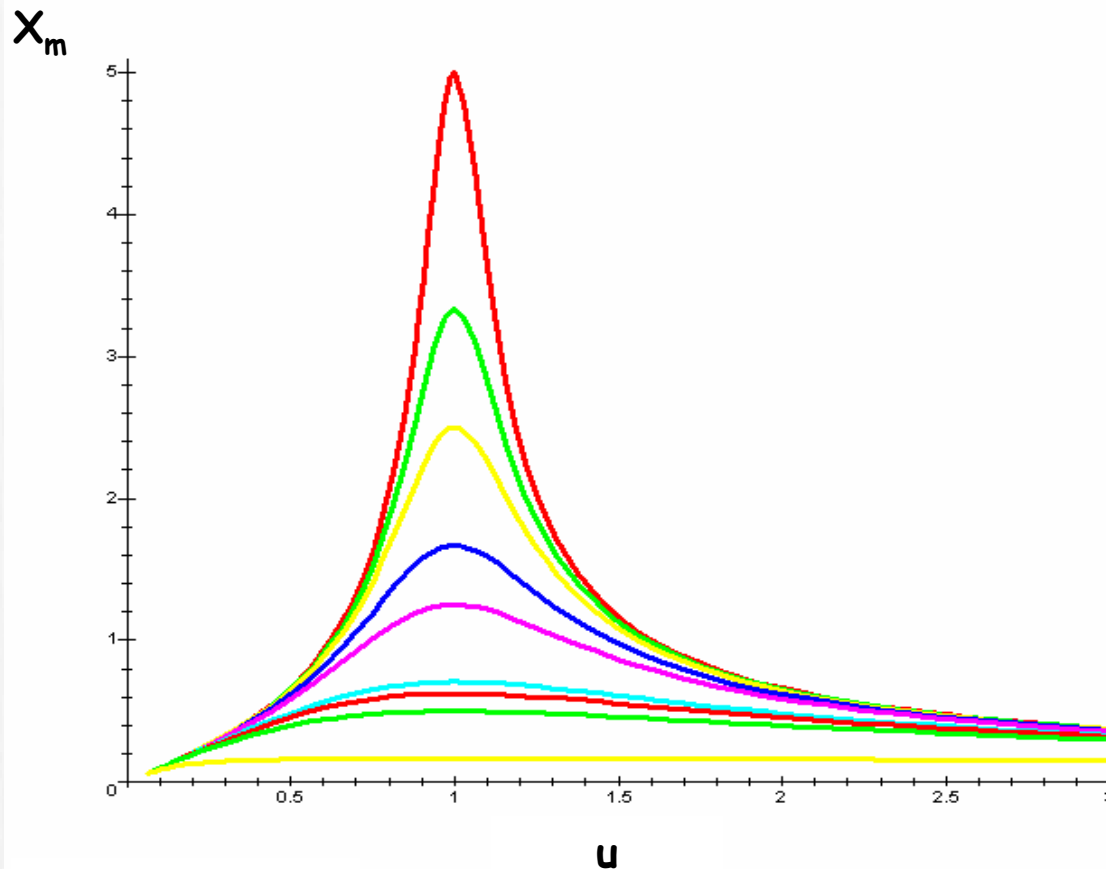




Mécanique du point matériel



Tracés des courbes $V_m(\omega)$ pour différentes valeurs de σ (ou Q) :



* On a choisi :

$$X_{A,m} = 1 \text{ et } \omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}.$$

* $u = \omega/\omega_0$ désigne la pulsation réduite

* Pour σ faible (ou Q grand), la résonance est très aiguë.

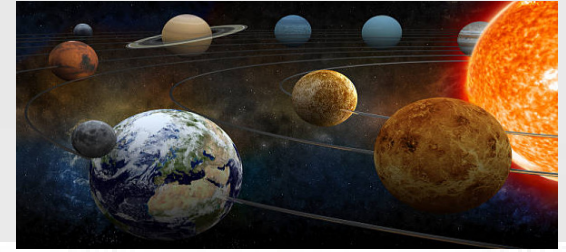
* L'oscillateur constitue un **filtre passe-bande**.

* Bande passante du filtre





Mécanique du point matériel



Fonction de transfert complexe en vitesse et bande passante :

La fonction de transfert complexe en vitesse est définie par :

$$\underline{H}_v(i\omega) = \frac{\underline{v}(t)}{\underline{x}_A(t)}$$

Soit :

$$\underline{H}_v(i\omega) = \frac{V_m}{X_{A,m}} e^{i\psi} = \frac{\omega_0}{2\sigma + i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$G_v(\omega) = \frac{V_m}{X_{A,m}}$$

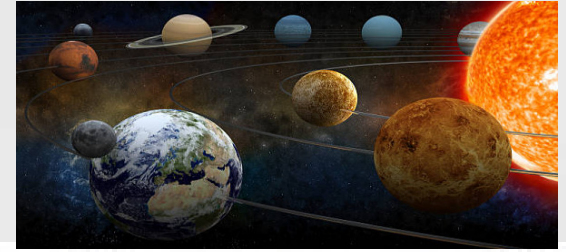
est le **gain (réel) en vitesse**. Il est maximal pour $\omega = \omega_0$ et vaut :

$$G_v(\omega_0) = \frac{\omega_0}{2\sigma} = Q\omega_0$$





Mécanique du point matériel



Bande passante du filtre passe-bande : c'est l'ensemble des pulsations ω pour lesquelles le gain en vitesse reste, par convention, supérieur au gain maximal (obtenu pour ω_0) divisé par $\sqrt{2}$.

$$G_v(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} G_v(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{2\sigma} \quad \text{pour} \quad \omega \in [\omega_{c_1}, \omega_{c_2}]$$

Les pulsations ω_{c_1} et ω_{c_2} sont appelées **pulsations de coupure**. Elles vérifient :

$$G_v(\omega_{c_1}) = G_v(\omega_{c_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{2\sigma} \quad (\text{Les placer sur les courbes fournies})$$

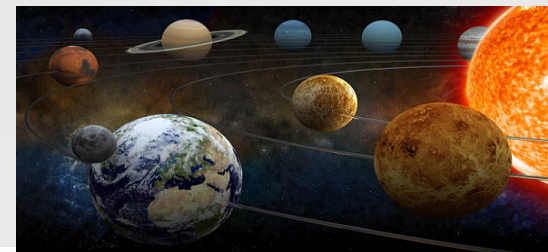
Ces pulsations de coupure vérifient ainsi l'équation :

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{4\sigma^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{2\sigma}$$





Mécanique du point matériel



En élevant au carré et en prenant l'inverse :

$$4\sigma^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 8\sigma^2 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 4\sigma^2$$

ou

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 2\sigma$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = -2\sigma$$

La 1^{ère} équation conduit à :

$$\omega^2 - 2\sigma\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0$$

Dont la seule racine positive est :

$$\omega_{c_2} = \sigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{1+\sigma^2}$$

La 2^{ème} équation conduit à :

$$\omega^2 + 2\sigma\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0$$

Dont la seule racine positive est :

$$\omega_{c_1} = -\sigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{1+\sigma^2}$$

La **largeur de la bande passante** est :

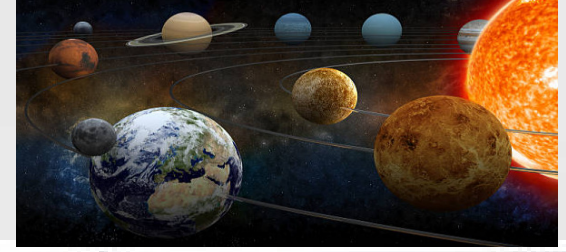
$$\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Elle est d'autant plus faible (résonance aiguë) que l'amortissement est faible (et le facteur de qualité grand).





Mécanique du point matériel



Etude du déphasage $\varphi(\omega)$:

La réponse complexe est :

$$V_m e^{i\psi} = \frac{\omega_0}{2\sigma + i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} X_{A,m}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan \psi = -\frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ \cos \psi > 0 \quad (\text{signe de } 2\sigma) \end{array} \right\} \rightarrow \text{donc } \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

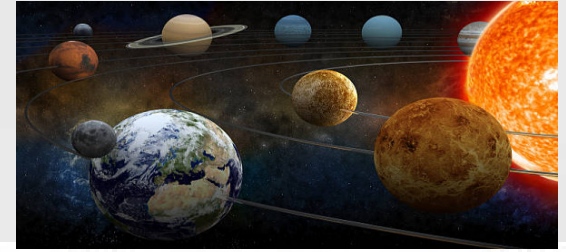
Remarque : $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$

Tracé des courbes $\varphi(\omega)$:





Mécanique du point matériel



➤ 5 - Bilan énergétique, réponse en puissance :

En multipliant par v l'équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = kx_A$$

On fait apparaître différents termes énergétiques :

$$mv\ddot{x} + hmv\dot{x} + kvx = kvx_A \quad \text{soit} \quad m\dot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = kvx_A - hmvv$$

$$\text{D'où :} \quad m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) + k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) = kvx_A - hmv^2$$

$$\text{Soit :} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = kvx_A - hmv^2$$

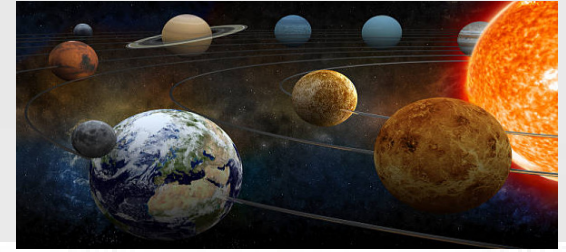
Le 1^{er} membre est la dérivée temporelle de **l'énergie mécanique** de l'oscillateur :

$$E_m = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$





Mécanique du point matériel



Le 2nd membre est la somme de la puissance P_d dissipée par les forces de frottement et la puissance P_f fournie par l'excitation :

$$P_d = -hm v^2 \quad \text{et} \quad P_f = kx_A v$$

On note P la puissance instantanée totale reçue par l'oscillateur :

$$P = P_d + P_f$$

De la même manière qu'en électricité, déterminons la **puissance moyenne** sur une période :

$$\langle P \rangle = \langle P_d \rangle + \langle P_f \rangle$$

Avec :

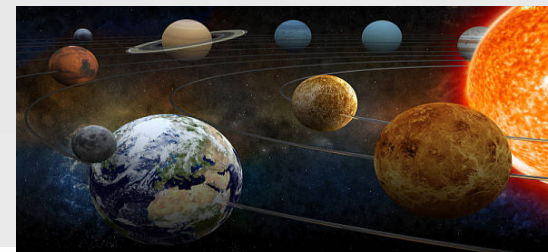
$$\langle P_d \rangle = \langle -hm v^2 \rangle = -hm \frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt = -hm \frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \psi) dt = -\frac{hm V_m^2}{2}$$

$$\langle P_f \rangle = \langle kx_A v \rangle = k \frac{1}{T} \int_0^T X_{A,m} V_m \cos \omega t \cos(\omega t + \psi) dt$$





Mécanique du point matériel



$$\langle P_f \rangle = k \frac{X_{A,m} V_m}{2T} \left[\int_0^T \cos(2\omega t + \psi) dt + \int_0^T \cos \psi dt \right] = k \frac{X_{A,m} V_m}{2} \cos \psi$$

Or, avec :

$$V_m e^{i\psi} = \frac{\omega_0}{2\sigma + i \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} X_{A,m}$$

$$\cos \psi = \frac{2\sigma}{\sqrt{4\sigma^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad \text{et} \quad X_{A,m} = \frac{V_m}{\omega_0} \sqrt{4\sigma^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

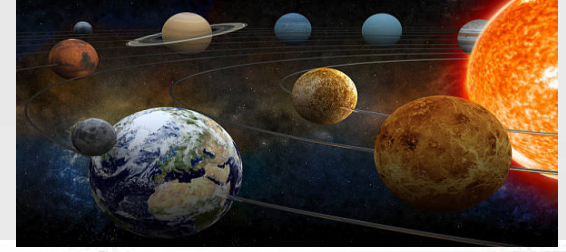
Finalement :

$$\langle P_f \rangle = k \frac{1}{2} 2\sigma \frac{V_m}{\omega_0} V_m = \frac{1}{2} (m \omega_0^2) \left(\frac{h}{\omega_0} \right) \frac{V_m^2}{\omega_0} = \frac{1}{2} h m V_m^2 = -\langle P_d \rangle$$





Mécanique du point matériel



En définitive :

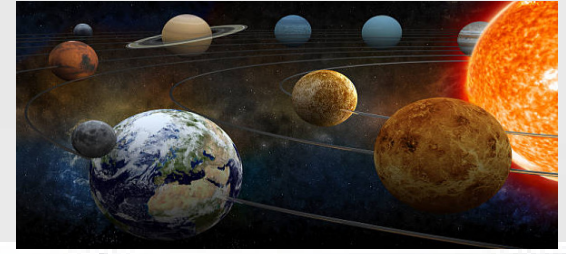
$$\langle P \rangle = \langle P_f \rangle + \langle P_d \rangle = 0$$

En régime forcé, la puissance moyenne fournie par l'excitation est égale à la puissance moyenne dissipée en chaleur par l'oscillateur.





Mécanique du point matériel



➤ 6 - Autres oscillateurs :

- * Modélisation d'un haut parleur
- * Étude d'un sismographe
- * Pourquoi le ciel est-il bleu par beau temps ?

