EMINES-UM6P
CPI1A 2025-2026

TD3
Nombres réels

Exercice 1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations :*

$$|2x+1|-|x-1|=x;\ \sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=4$$

Exercice 2.

1. *Calculer le minimum sur* $\mathbb{R}^{+}$*de la fonction :* $x \mapsto x+\frac{1}{x}$.
2. *Soient* $x_1, x_2, ..., x_n \mathbb{R}^{*+}$.
   (a) *Montrer que :* $n^2 \leq (x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}...+\frac{1}{x_n}\right)$*, puis donner une CNS sur* $x_1, x_2, ..., x_n$ *pour avoir l'égalité.*
   (b) *En déduire que :* $\min\left\{(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}...+\frac{1}{x_n}\right) \mid (x_1,x_2,...,x_n)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^n\right\}$ *existe, à déterminer.*

Exercice 3. *Déterminer lorsqu'elles existent* sup, max, inf, min *dans* $\mathbb{R}$ *des parties suivantes :*

$$A=\left\{\frac{n+(-1)^n}{2n+1} \mid n\in\mathbb{N}\right\};\ B=\left\{\frac{x+1}{x+2} \mid x\in\mathbb{R}^{+}\right\};\ C=\left\{2^{(-1)^n n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$$

Exercice 4. *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$*, montrer que :* $\max\left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ *et* $\min\left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ *existent, à déterminer.*

Exercice 5.

1. *Soient* $a_1, a_2, ..., a_{n^2-1}\in\mathbb{R}$*, montrer que :* $\sum_{k=1}^{n^2-1} a_k = \sum_{p=1}^{n-1}\left(\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} a_k\right)$.
2. *En déduire la somme :* $\sum_{k=1}^{n^2} E\left(\sqrt{k}\right)$.

Exercice 6.

1. *Soient* $x\in\mathbb{R}$ *et* $p\in\mathbb{N}$ *avec* $p\geq 2$*, montrer que :* $\left|x-E\left(x+\frac{1}{p}\right)\right| \leq \frac{p-1}{p}$
2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $E(2x+3)=E(x+1)$.

Exercice 7.

1. *Soit* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   (a) *Donner des exemples où :* $E(x+y)=E(x)+E(y)$ *et* $E(x+y)\neq E(x)+E(y)$.
   (b) *Justifier que :* $E(x+y)=E(x)+E(y)+E(x+y-E(x)-E(y))$.
   (c) *Vérifier que :* $0\leq E(x+y-E(x)-E(y))\leq 1$*, puis déduire que* $E(x+y)=E(x)+E(y)+a$ *avec* $a\in\{0,1\}$.
2. *Soient* $x\in\mathbb{R}$ *et* $n\in\mathbb{N}^*$.
   (a) *Montrer que :* $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$.
   (b) *Montrer que :* $0\leq x-\frac{E(nx)}{n}<\frac{1}{n}$.
   (c) *En déduire que tout nombre réel est limite de deux suites l'une rationnelles et l'autre irrationnelles.*

Exercice 8. *Soit* $x\in\mathbb{R}$.

1. *Montrer l'existence deux suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rationnelles telles que :* $\forall n\in\mathbb{N}, a_n<x<b_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} b_n=x$.
2. *Montrer que l'on peut choisir les deux suites ci-dessus strictement monotones.*

Exercice 9. *Soit $(u_n)_n$ une suite de réelles strictement positives tel que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. On pose $A = \{ku_n \mid (k,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$.*

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n E\left(\frac{x}{u_n}\right) = x$.*
2. *Déduire que A est dense dans $\mathbb{R}$.*
3. *Soit $(v_n)_n$ une suite réelles non nulles, déduire que la partie $\{kv_n \mid (k,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
4. *Soient B et C deux parties de $\mathbb{R}$ avec $C \subseteq B$ et C est dense, vérifier C est dense.*
5. *Soit $a \in \mathbb{R}^*$ avec $|a| < 1$, montrer que les parties suivantes sont dense dans $\mathbb{R}$:*

$$\{ka^n \mid (k,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}, \left\{\sqrt{m}-\sqrt{n} \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$$

Exercice 10. *Soit $(u_p)_{p\geq 0}$ une suite réelle tel que : $\lim_{p\to+\infty} u_p = +\infty$. $D = \left\{\sqrt{n}-u_p \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2\right\}$. On se propose de montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a < b$.*

1. *Justifier l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < b-a$.*
2. *Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{n_0}-u_{k_0} \leq x$.*
3. *Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \text{et } \sqrt{n}-u_{k_0} \leq x.\}$.*
   (a) *Montrer que A est non vide et finie.*
   (b) *Déduire l'existence d'un $p \in A$ et $p+1 \notin A$.*
4. *Vérifier que : $a < \sqrt{p+1}-u_{k_0} < b$.*
5. *Conclure.*

Exercice 11. *Soit une application continue $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)+f(x-y) = 2(f(x)+f(y))$.*

1. *Calculer $f(0)$. Étudier la parité de f.*
2. *Montrer que : $\forall (k,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, $f(kx) = k^2 f(x)$.*
3. *Montrer que : $\forall (r,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, $f(rx) = r^2 f(x)$.*
4. *Déduire toutes les applications continues $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)+f(x-y) = 2(f(x)+f(y))$.*

Exercice 12. *Soit une application $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Dans la suite on pose $f(1) = a$.*

1. *Calculer $f(0)$, puis déduire la parité de f.*
2. *Montrer que : $\forall (k,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, $f(kx) = kf(x)$, puis déduire que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.*
3. *Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ dans les cas suivantes :*
   — *f est continue.*
   — *f est monotone.*
4. *On suppose que dans cette question f est non nulle vérifiant de plus : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$.*
   (a) *Montrer que : $a = 1$ et f est croissante.*
   (b) *Déduire que : $f = id_{\mathbb{R}}$.*