CPI1A

TD8: intégration sur un segment

Exercice 1 : On note $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.
2. Calculer alors : $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

On pourra utiliser dans la suite au besoin la formule d'intégration par partie généraliser:
Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\int_a^b f^{(n+1)}(t)g(t)dt = \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(n-k)}(t)g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b f(t)g^{(n+1)}(t)dt.$$

Exercice 2 :

1. Calculer les primitives en précisant le domaine de définition, à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties :
   $x \mapsto \ln(x)$; $x \mapsto \arctan(x)$; $x \mapsto x^p \ln(x)$; $x \mapsto x\arctan(x)$; $x \mapsto x^2 \sin(x)$; $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x^3}$.
2. Calculer les primitives en précisant le domaine de définition, à l'aide d'un changement de variables :
   $x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$; : $x \mapsto \frac{1}{e^{2x}+e^{-x}}$; $x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$; $x \mapsto \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $x \mapsto \frac{ch(x)}{1+ch^2(x)}$; $x \mapsto \frac{th(x)}{1+ch(x)}$; $x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}$.

Exercice 3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 t\sqrt{t^2+t+1}\ dt \ ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+sin(x)} \ ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\cos(x)sin(x)} \ ; \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{e^x-1}} \ ; \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$$

Exercice 4 :

1. Pour $a > 0$, calculer $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan(x)}{x}dx$, (on pourra poser : $t = \frac{1}{x}, puis\ actan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\ pour\ x > 0$)
2. Justifier que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right))\,dt$, puis en déduire $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(t))dt$.