CPI1A

TD10 : Structures algébriques

Exercice1:

Soient X un ensemble et $f: X \to \mathbb{R}$ une bijection. Pour $(x,y) \in X^2$, on pose $x * y = f^{-1}(f(x)+f(y))$.

1. Montrer que la loi * est commutative, possède un élément neutre et tout élément admet un inverse
2. En déduire que $(X,*)$ est un groupe abélien
3. Exemple : Sur $G =]-1,1[$,on définit $*$ par $\forall (x,y) \in G^2,\ x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

   Montrer que: (G,*) est un groupe abélien.

Exercice 2: Soit $(G,.)$ un groupe dont l'élément neutre noté: e.

1. On suppose que : $(x,y) \in G^2$, $(xy)^2 = x^2y^2$, Montrer que G est abélien.
2. On suppose dans la suite que : $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Exercice3: Soit $(G,.)$ un groupe abélien fini de cardinal n. On note e l'élément neutre .

1. Pour $a \in G$ montrer que : $\prod_{x\in G} ax = \prod_{x'\in G} x'$.(penser à l'application $x \mapsto ax$)
2. En déduire $\forall a \in G$, $a^n = e$.
3. Une application : pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{U}_n$ est l'unique sous groupe fini de cardinal n de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Exercice 4:

1. $(2\mathbb{Z}) \cup (3\mathbb{Z})$ est il un sous groupe de $\mathbb{Z}$.
2. Que peut on dire de l'intersection de deux sous groupes d'un groupe ?
3. Soit $(G,.)$ un groupe , H et K deux sous groupes. Montrer que : $H \cup K$ est un sous groupe si et seulement si $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

Exercice 5

On considère le groupe $(\mathbb{U},\times)$ et 1 son élément neutre. On considère $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

a. Montrer que z est d'ordre fini si et seulement si $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.

b. On suppose que z est d'ordre fini et on considère l'écriture irréductible du rationnel $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q}$, calculer alors $o(z)$ en fonction de q.

Exercice 6 :

1. Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$, on note : $N(a+\sqrt{3}b) = a^2 - 3b^2$.
   a. Montrer que si $a+\sqrt{3}b = a'+\sqrt{3}b'$ alors $a = a' et\ b = b'$. on note dans la suite: $N(a+\sqrt{3}b) = a^2 - 3b^2$.
   b. Montrer que : $N\left((a+\sqrt{3}b)(a'+\sqrt{3}b')\right) = N(a+\sqrt{3}b)N(a'+\sqrt{3}b')$.
2. Montrer que $H = \{x+\sqrt{3}y,\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2-3y^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

Exercice 7 : On suppose que G est un groupe fini d'ordre $2n$.

1. Justifier que l'on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur G en posant: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$ ou $y = x^{-1}$
2. En déduire que G posséde au moins un élément d'ordre 2.

Exercice 8 :

1. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe monogéne est groupe monogéne.
2. Soit $n \geq 2$, montrer que les groupes produit suivants: $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ne sont pas des groupes mongénes.

Exercice9:

1. pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{U}_n$ est l'unique sous groupe fini de cardinal n de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
2. Montrer que l'image d'un élément d'ordre fini par un morphisme de groupes est un élément d'ordre fini.

Exercice 10: Pour $x \in G$ on note $\langle x\rangle$ le sous groupe engendré par x.On considère x et y deux éléments de G d'ordres finis qu'on note: $o(x) = p$, $o(y) = q$.

1. Montrer que si xy est d'ordre fini, alors yx est d'ordre fini et que $o(xy) = o(yx)$.
2. On suppose dans cette question que: $xy = yx$.
   2-a Supposons que $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{e\}$, montrer que $o(xy) = p \vee q$.
   2-b Supposons que $p \wedge q = 1$, montrer que $o(xy) = pq$.
3. Généralisation : Soient $x_1,x_2,..,x_n \in G^n$ des éléments d'ordres deux à deux premier entre eux tel que :$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2$, $x_ix_j = x_jx_i$. Montrer que leur produit est d'ordre fini égale au PPCM des ordres de $x_1,x_2,..,x_n$.

Exercice 11: Soit $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \left\{a + b\sqrt{d} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

Exercice 12: Soit A un anneau, on note 1 l'élément neutre de la multiplication.

1. Soit $x, y \in A$ tel que $1 - xy$ est inversible, on pose : $c = (1 - xy)^{-1}$

   En considérant $1 + ycx$ montrer que : $1 - yx$ est inversible.

2. Un élément $x \in A$ est dit nilpotent si : $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que x^n=0.

   a. Soit $x \in A$ nilpotent, montrer que $1 - x$ est inversible.

   b. Soient $x, y \in A$ montrer que : xy est nilpotent si et seulement si yx est nilpotent.

   c. On suppose que A est commutative, on note $Nil(A)$ l'ensemble de tout les éléments nilpotent de A

   Montrer que $Nil(A)$ est un idéal.

Exercice 13: Soit p, q deux nombres premier distincts. On pose $A_{p,q} = \left\{\frac{k}{(pq)^n}, tel\ que\ n \in \mathbb{N}\ et\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrer que : tout sous-anneau de $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que : $A_{p,q}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in A_{p,q}$, montrer que : $\exists!\,(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que : $a \wedge p = a \wedge q = 1\ et\ x = ap^bq^c$.
4. Justifier que : $p, q \in U(A_{p,q})$.
5. Déduire que : $U(A_{p,q}) = \{\varepsilon p^b q^c, tel\ que\ \varepsilon \in \{-1,1\}\ et\ b, c \in \mathbb{Z}\}$.
6. Montrer que le groupe $U(A_{p,q})$ n'est pas monogéne.

Exercice 14:

1. Soit A un anneau, on note 1 l'élément neutre de la multiplication. On pose $B = \{k.1\ ;\ \ tel\ que : k \in \mathbb{Z}\}$.
   a. Montrer que B est sous-anneau de A et que B est le plus petit sous-anneau de A.
   b. Montrer que A est de caractéristique non nulle si et seulement si B est fini, puis montrer dans ce cas que : caract$(A) = card(B)$.
2. Dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ résoudre l'équation : $\bar{y}^2 = \bar{5}$, puis déduire les solutions de : $\bar{x}^2 + \bar{x} + \bar{9} = \bar{0}$.
3. Résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$: $\bar{x}^2 - \bar{3}.\bar{x} + \bar{2} = \bar{0}$.

Exercice 15: On pose $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; tel\ que\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 16: Soit $\mathbb{K}$ un sous corps de $(\mathbb{C},+,\times)$, montrer que : $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$. En déduire que si $\mathbb{K}$ un sous corps de $\mathbb{Q}$ alors $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Exercice 16: Soit G un groupe abélien tel que qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $x^n = e$, pour tout $x \in G$. On suppose que $n = ab$ avec $a \wedge b = 1$. On pose alors $H_a = \left\{x^a \setminus x \in G\right\}$ et $H_b = \left\{x^b \setminus x \in G\right\}$.

1. Montrer que H_a et H_b sont des sous groupes de G.
2. Soit $t \in H_a \cap H_b$, vérifier que: $t^a = e$ puis déduire que: $t = e$.
3. En déduire que: $\forall x \in G, \exists!(r,s) \in H_a \times H_b$ tel que: $x = rs$.
4. Soient k un entier premier avec n et une application φ de G dans lui même définie par: $\varphi(x) = x^k$.
   a. Justifier que φ est un morphisme de groupes.
   b. Montrer que φ est un automorphisme de G. (ind: on pourra chercher un entier α tel que $\varphi^{-1}(x) = x^\alpha$).