TD7: Dérivation

Exercice 1 : Soit $f:\mathbb{R}\to]-1,1[$ dérivable en 0 telle que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.

1. Calculer $f(0)$, puis étudier la parité de f .
2. On pose $w=f'(0)$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=w\left(1-\left(f(x)\right)^2\right).$$
3. En déduire l'expression de f . (utiliser que : $\dfrac{1}{1-u^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-u}+\dfrac{1}{1+u}\right)$)

Exercice 2 : Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$, on suppose qu'elle admet des dérivées à tout ordre.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère sur $]0,+\infty[$: $f_n(x)=x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Etablir une relation entre f_{n+1} et f_n , puis écrire $f_{n+1}^{(n+1)}$ en fonction de $f_n^{(n+1)}$ et $f_n^{(n)}$.
2. Montrer que : $f_n^{(n)}(x)=\left(\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\right)f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. En déduire sur $]0,+\infty[$: $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1}e^{1/x}\right]$ et $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1}\ln(x)\right]$. (On pourra utiliser la formule $\dfrac{d^p}{dx^p}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(-1)^p p!}{x^{p+1}}$).

Exercice 3 : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$, avec $0\notin[a,b]$ et $bf(a)=af(b)$.

Montrer qu'existe $c\in]a,b[$ tel que : $f'(c)=\frac{f(c)}{c}$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 4 : Montrer que les fonctions suivantes sont lipchitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$t\mapsto e^{it};\ t\mapsto P(t)e^{-t^2}\ \text{où } P \text{ un polynôme}$$

(on pourra utiliser la question2 de l'exercice 13)

Exercice 5 : Soit f une application dérivable de $I=]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ avec $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to b}f(x)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Montrer que: il existe un $c\in]a,b[$ tel que : $f'(c)=0$.
(on pourra utiliser ce qu 'on vue dans l'exercice 10 de TD6 : limites et continuité)

Exercice 6 : Soit f une application n-fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en n+1 points de I.
Montrer que $f^{(n)}$ s'annule sur I.

Exercice 7 : Soit $f: I \to \mathbb{C}^*$ de classe C^p avec $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On note φ une primitive de l'application $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$ sur I.

1. Justifier que $\varphi \in C^p(I, \mathbb{C})$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto f(x)e^{\varphi(x)}$ est constante sur I non nulle.
3. En déduire l'existence d'une application $\psi \in C^p(I, \mathbb{C})$ tell que : $\forall x \in I, f(x) = e^{\psi(x)}$.
4. On suppose que $|f| = cte = 1$. Déduire l'existence d'une application $\alpha \in C^p(I, \mathbb{R})$ tell que : $\forall x \in I, f(x) = e^{i\alpha(x)}$.

Exercice 8 : Soit $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ non nulle et continue en 0. Vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$.

1. Vérifier que $\varphi(0) = 1$, puis montrer que $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}^*$.
2. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour un réel $a > 0$, justifier que l'application $x \mapsto \int_x^{x+a} \varphi(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
5. En utilisant seulement la définition d'une dérivée montrer φ vérifier une équation différentielle de 1^{ere} ordre, puis déduire l'existence d'un $\omega \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{\omega x}$.
6. Que peut-on dire si $|\varphi| = cte = 1$?

Exercice 9 : (Théorème de Darboux)

Soit f une application dérivable I dans $\mathbb{R}$, on propose de montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, y un réel entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On considère deux applications :

$$\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \; si\; x \neq a \; et\; \varphi(a) = f'(a).$$

$$\psi: [a, b] \to \mathbb{R}, \psi(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \; si\; x \neq b \; et\; \psi(b) = f'(b).$$

1. Justifier que : φ et ψ sont continues sur $[a, b]$.
2. Montrer que : $\varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$ est intervalle et que $y \in \varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$.
3. En déduire l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $y = f'(c)$.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1 - x^2)^n$.

1. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que $f^{(k)}$ s'annule en -1 et 1.
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, en utilisant le théorème de Rolle, montrer que $f^{(k)}$ s'annule en au moins $k + 2$ points de $[-1,1]$.
3. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, déduire que $f^{(n+k)}$ admet $n - k$ racines qui sont tous dans $]-1,1[$.

Exercice 11 :

Montrer que les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^*$: $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ et $x \longmapsto \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ admettent des prolongements de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que : $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

   a. Pour $\alpha > 0$, montrer l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \geq a, f(x) \geq 2\alpha(x-a) - f(a)$.

   b. En déduire $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

2. La réciproque de la question 1 est-elle vraie ?

3. On suppose que : $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. la réciproque est-elle vraie ?

Fonction convexe

Exercice 13 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$.

1. En utilisant la concavité du log, montrer que $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.
2. En déduire que $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$.
3. Montrer que $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$.

Exercice 14 :

$I \subset \mathbb{R}^{+*}$ un intervalle de $\mathbb{R}, J = \left\{x; \frac{1}{x} \in I\right\}$.

Montrer que J est un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$, puis que si $(x,y) \in I^2$, alors :

$$\forall \lambda \in [0,1], \exists \mu \in [0,1], \frac{1}{\lambda x + (1-\lambda)y} = \mu \frac{1}{x} + (1-\mu)\frac{1}{y}.$$

Soit f continue sur I, et g définie sur J par $g(x) = f(\frac{1}{x}), h$ définie sur I par $h(x) = xf(x)$.Montrer que

$$g \text{ est convexe} \Leftrightarrow h \text{ est convexe.}$$

Exercice 15 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe ou I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, dérivable en $x_0 \in I$ et telle que $f'(x_0) = 0$. Montrer que x_0 minimise f sur I.

Exercice 21 : Soit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que g est convexe si et seulement si :

$$\forall h \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R}), g\left(\int_0^1 h\right) \leqslant \int_0^1 g(h).$$