CPI-1A

TD5 : Equations différentielles

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

- Pour $\alpha \in \mathbb{R} : tx' - \alpha x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathbb{R}_-^*$.
- $x' + x = 2\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$.
- $t(\ln^2(t) + 1)x' + 2\ln(t)\, x = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\sqrt{1-t^2}x' + x = 1$, sur $]-1,1[$.

Exercice 2 : Déterminer les applications dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall t \in \mathbb{R},\ t^3 f'(t) - 2f(t) = 0$.

Exercice 3 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$x'' + x = t^2 + 1;\ \ x'' - 3x' + 2x = 2t^2;\ x'' + x' - 2x = te^t;\ x'' + x = sh(t); x'' + x = 2cos^2(t).$$

Exercice 4 : On cherche les applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) : $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(\pi - t)$. On considère une telle application f.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, puis trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifier par f.
2. En déduire alors toutes les applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

Exercice 5 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+e^t)x'' + 2e^t x' + (1+2e^t)x = te^t$ en posant $Z(t) = (1+e^t)x(t)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $t^2x'' + tx' + x = 0$ en posant le changement de variable $t = e^u$.

Exercice 6 : On cherche les applications dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant (E) : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(t) = f(1/t)$. On considère une telle application f.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifier par f.
2. En posant le changement de variable $t = e^u$, résoudre l'équation trouvée dans la question 1.
3. Conclure.

Exercice 7 : Soit l'équation différentielle $(E_1)\ :\ z''(t) - 2z'(t) + 2z(t) = e^t\cos(t)$.

1) Résoudre l'équation homogène associée à (E_1).

2) a) Donner une solution particulière de l'équation: $z''(t) - 2z'(t) + 2z(t) = e^{(1+i)t}$.

b) En déduire une solution particulière de (E_1).

3) Donner toutes les solutions de (E_1).

On se propose de résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle:

$$(E_2)\ :\ x^2y''(x) - xy'(x) + 2y(x) = x\cos(\ln x).$$

4) On pose $z(t) = y(e^t)$.

Montrer que y est solution de (E_2) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

5) Déduire les solutions de (E_2) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 8 : $y'' + y = \cot an(x)$ sur $]0,\pi[$.