TD4
Suites numériques

Exercice 1.

1. *Calculer le terme général d'une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *dans les cas suivantes :*
   — $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + 3u_n$.
   — $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$. *(pose :* $v_n = \frac{1}{u_n}$*)*
2. *Soient les suites vérifiant :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + n$, (E).
   (a) *Chercher une solutions particulière de* (E) *sous la forme* $an + b$*, puis déduire toutes les suites vérifiant* (E).
   (b) *Déduire la valeur de* $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$.

Exercice 2.

1. *Soit la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *définie par :* $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt[3]{u_n}$.
   (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   (b) *En calculant* u_n*, montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.*
2. *Soit la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *définie par :* $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2+3u_n}{4+u_n}$.
   (a) *Montrer que l'équation sur* $\mathbb{R}$ *:* $\frac{2+3x}{4+x} = x$ *admet deux solutions* a, b *avec* $a < b$.
   (b) *En posant :* $v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$*, calculer* u_n *en fonction de* n.

Exercice 3.

1. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.
   (a) Calculer u_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,$u_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} 2^n C_n^{2k}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $u_0 = 1$, $u_1 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 1$.

Exercice 4. *Prouver qu'une suite convergente de* $\mathbb{Z}$ *est stationnaire.*

Exercice 5. *On pose* $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. *Montrer que :* $P_n(x) = 0$ *possède dans* $\mathbb{R}$ *une solution unique* x_n *qui appartient* $[0, 1]$.
2. *Montrer que la suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *est minorée par* $\frac{1}{2}$.
3. *Montrer que* $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* $\frac{1}{2}$.

Exercice 6. *Étudier l'existence de la limite (finie ou non) de la suite* $(u_n)_n$*, puis déterminer cette limites dans les cas suivantes :*

$$u_n = \frac{n\sin(n)}{n^2+1};\ u_n = n^2 + (-1)^n\sqrt{n};\ u_n = n^{\frac{\sin(n)}{n}};\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k};\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 7. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle*

1. *On suppose* $(u_n)_n$ *est non majoré, montrer qu'elle existe une suite extraite de* $(u_n)_n$ *qui diverge vers* $+\infty$.
2. *On suppose que* $(u_n)_n$ *est bornée telle que :* $(u_{n+1} - u_n)_n$ *est monotone. Montrer l'existence d'un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *telle que :* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est monotone, puis déduire que la suite* $(u_n)_n$ *est convergente.*

3. *On suppose que les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente.*
4. *On suppose que $(u_n)_n$ est monotone et admet une suite extraite convergente. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente.*

Exercice 8. *On pourra utiliser au besoin : pour tout $x > 0, \ln(1+x) < x$.*
on pose : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.

1. *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$.*
2. *En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones et adjacentes.*
3. *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite γ (appelé la constante d'Euler).*
4. *la suite H_n est-elle convergente ?*

Exercice 9. *Pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, on définit deux suites : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.*

1. *Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont positives et que : $\forall n \geq 1$, $u_n \leq v_n$.*
2. *Montrer que les suites : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.*

Exercice 10. *On considère la suite : $u_0 \geq 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} - 1$.*

1. *Montrer que la suite u_n set bien définie . (on pourra considérer la fonction $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ sur un bon intervalle).*
2. *Montrer l'existence d'un $k \in [0, 1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq k^n u_0$, puis déduire la limite de la suite u_n.*

Exercice 11. *On considère la fonction $h(x) = \sqrt{1+x}$.*

1. *Justifier que h est dérivable sur $[0, 2]$ et que : $\forall x \in [0, 2]$, $|h('x)| \leq \frac{1}{2}$.*
2. *Montrer que : $h([0, 2]) \subseteq [0, 2]$.*
3. *Montrer que équation sur $[0, 2]$: $h(x) = x$ possède une solution unique α, à déterminer.*
4. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [0, 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = h(u_n)$.*
   (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$, puis déduire la limite de (u_n).*
   (b) *Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 12. *Soit une application continue $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivantes :*

- *$f(x) = \sin(x)$. (on pourra commencer par le cas où $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)*
- *$f(x) = \cos(x)$. (on pourra commencer par le cas où $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).*

Exercice 13. *Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k\right)$.*

Exercice 14. *Soit $z \in \mathbb{C}$, on se propose de montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$. dans la suite $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer cette limite dans le cas où $z = x \in \mathbb{R}$.*

Dans la suite $y \neq 0$

2. *Soit $Z = X + iY \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, et $\theta = arg(Z) \in]-\pi, \pi[$. Montrer que : $\theta = 2arctan\left(\frac{Y}{X+|Z|}\right)$.*
3. *Soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que : $|Z - 1| < 1$, montrer que $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.*
4. *Déduire que $1 + \frac{z}{n} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ à partir d'un certain rang. dans la suite on pose $\theta_n = arg(1 + \frac{z}{n}) \in]-\pi, \pi[$.*
5. *Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} n\theta_n = y$.*
6. *Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = e^x$.*
7. *Conclure.*
8. *Application : Pour $z \in \mathbb{C}$, calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k\right)$.*