CPI1A

TD6: Limites et continuité

I désigne dans la suite un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Exercice 1 :

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, T −périodique où $T > 0$, donner une **CNS** pour que f admet la limite (finie ou non) en $+\infty$.
2. On définit les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right), g(x) = \frac{1}{x}E(x)$. Etudier l'existence des limites en 0.

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes dans le cas d'existence :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+2}{2x^3-x^2+1};\ \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4};\ \lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1};\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2};\ \lim_{x\to0^+}\sqrt{x}E\left(\frac{1}{x}\right);\ \lim_{x\to+\infty}e^xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{x-\sin(x)};\ \lim_{x\to+\infty}\sin(\ln(x));\ \lim_{x\to0}\frac{\tan(5x)}{\sin(x)};\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}-x+1}{e^{3x}+e^{-x}};\ \lim_{x\to0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3};\ \lim_{x\to1^+}\ln(x)\ln(\ln(x))$$

$$\lim_{x\to1}x+E(x);\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(x\ln(x))}{\ln(x)};\ \lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{arccox(x)};\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \text{ où } a\in\mathbb{R}$$

Exercice 3 :

Montrer à l'aide des suites que : $f: x \longrightarrow \frac{x^x}{E(x)^{E(x)}}$ définie sur $[1,+\infty[$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 4 : Etudier la continuité en tout point des applications :

- $f: x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}\ \ sur\ \mathbb{R}.$
- $g: x \mapsto (-1)^{E(x)}\left(x - E(x) - \frac{1}{2}\right)\ \ sur\ \mathbb{R}.$
- $h: x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)\ sur\ \mathbb{R}^{*+}.$

Exercice 5 : Soient a, b deux réels. On propose de déterminer toutes les applications continues $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax + b)$. On note $S_{a,b}$ l'ensemble de toutes ces applications et $f \in S_{a,b}$.

1. Déterminer $S_{a,b}$ pour $|a| = 0\ ou\ |a| = 1$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $|a|(|a| - 1) \neq 0$, Pour $x \in \mathbb{R}$ on considère la suite $u_0 = x\ et\ u_{n+1} = au_n + b$.

2. Justifier que la suite $(f(u_n))$ est constante.
3. Calculer la suite (u_n).
4. Montrer que $S_{a,b} = S_{A,B}$ avec $A = \frac{1}{a}$ et $B = \frac{-b}{a}$.
5. En déduire alors $S_{a,b}$.

Exercice 6 :

1. Soit $f\ et\ g$ deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : f est bornée et g continue. Montrer que : $fog\ et\ gof$ sont bornées.
2. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ de telle que $\mathbb{R}\backslash A$ est dense dans $\mathbb{R}$ et f une application continue de I à valeur dans A. Montrer que f est constante.

Exercice 7 :

1. Donner un exemple d'une fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'a pas de racines.

2.Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré impair admet au moins une racine.

Exercice 8 : *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x.$

2. En déduire que f un unique point fixe.

Exercice 9 : Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ continue vérifiant : $fof = id$, c'est-à-dire que : $\forall x \geq 0, f\big(f(x)\big) = x.$

1. Justifier que f est bijective.

2.En déduire que f est strictement croissante, puis en déduire que $f = id$.

Exercice 10 :

1. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

   a. Justifier l'existence de deux réels A et B tel que : $\mathrm{A} < B$ *et* $\forall x \in]-\infty, \mathrm{A}[\cup]\mathrm{B}, +\infty[,$
   $\mathrm{f(x)} > f(0).$

   b. En déduire que f admet un minimum.

2. Soit f une application continue I dans $\mathbb{R}$, et $\mathrm{a, b} \in \overline{\mathbb{R}}$ les extrémités de I. On suppose que :
   $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$

   a. Justifier que f est bornée dans sur des voisinages de a et b.

   b. En déduire que : f est bornée.

Exercice 11 : On considère : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer, puis justifier que f^{-1} est continue.

Exercice 12 :

1.En calculant $(5+i)(3+2i)$, montrer que : $arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$

2.Résoudre les équations :

a. $\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{1}{4}\right).$

b. $\arcsin(2x) - \arcsin\big(x\sqrt{3}\big) = \arcsin(x).$

Exercice 13 :

1. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\cos(2\arccos x)$	(c) $\sin(2\arccos x)$	(e) $\sin(2\arctan x)$
(b) $\cos(2\arcsin x)$	(d) $\cos(2\arctan x)$	(f) $\tan(2\arcsin x)$

2. Simplifier la fonction $x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ sur son intervalle de définition.

3. Simplifier : $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

Exercice 14 :

1. Fixons $a \in \mathbb{R}$:

   a. Calculer la dérivée de la fonction : $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(a) - arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$, pour $ax \neq 1$.

   b. Déterminer alors : $\arctan(x) + \arctan(a) - arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$ dans les cas suivants :

      i. $ax > 1$ *et* $a > 0.$

      ii. $ax > 1$ *et* $a < 0.$

      iii. $ax < 1.$

2. En déduire : $\arctan(x) + \arctan(y)$ en fonction de $arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $xy \neq 1$

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, en calculant $\arctan(p+1) - \arctan(p)$, déduire la limite de la suite S_n:

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan \frac{1}{p^2+p+1}.$$

Exercice 18 : Déterminer $\lim_{x\to 0+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ (à l'aide d'un changement de variable)