TD1 : Calculs algébriques

Exercice 1. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right), \text{et } \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(n+1-k)^2}\right)$$

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

1. Simplifier la somme suivante : $\sum_{k=p-3}^{q-1} u_{k+1}-u_{k-1}$ avec (u_k) une suite complexe.
2. Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$ et $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2$
3. Calculer la somme : $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$.

Exercice 3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On définit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $b_n=B_{n+1}-B_n$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{n} B_k a_k = A_nB_n-\sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.
2. Application : pour tout $z\in\mathbb{C}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} kz^k$.

Exercice 4. Pour $p\in\mathbb{N}$ on considère la somme $S_p=\sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Rappeler S_0, S_1et S_2 en fonction de n.
2. Calculer de deux façons $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1}-k^{p+1}$
3. Déduire une expression de S_p en fonction de $S_0, S_1, ..., S_{p-1}$, puis calculer S_3.

Exercice 5. .

1. Calculer les sommes doubles : $\displaystyle\sum_{1\le j\le k\le n} k-j$ et $\displaystyle\sum_{1\le j<k\le n} k-j$,

   En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|k-j|$
2. Vérifier que pour deux réels a et b : $max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$.
3. En déduire la somme double $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} max(k,j)$

Exercice 6. .

1. Calculer les produits : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$
2. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$

   (On pourra trouver une suite $(v_k)_{k\ge 1}$ avec $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\frac{v_k}{v_{k-1}}$ pour $k\ge 2$)
3. Justifier que pour tout $k\ge 2$: $1+\frac{1}{k^2}\le\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$. Déduire que la suite $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ est convergente.

Exercice 7. On considère les polynômes : $P = X^2 - 2X + 1$, $P_0 = 1$, $P_1 = X + 1$ et $P_2 = (X+1)(X+2)$.

1. Trouver les réels α, β et γ tels que : $P = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k!$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cos(kx),\ \sum_{k=0}^{n} \cos(kx),\ \sum_{k=0}^{n} k \sin(kx)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$A_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} C_n^k \text{ et } B_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} C_n^k$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n}^{2k} \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^{2k+1}$$

(mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $(1+i)^{2n}$)

Exercice 9.

1. Soient $a_1, a_2, ..., a_n$des réels positifs. Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$, puis donner une CNS pour avoir l'égalité.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{(n+1)^2} \max(k, n^2)$ et $\sum_{k=0}^{(n+1)^2} \min(k, n^2)$.

Exercice 10. Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant une inversion des sommes doubles, calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} k z^k$$

Exercice 11. Calculer les sommes doubles :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kj,\ \sum_{1 \leq j \neq k \leq n} kj,\ \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} kj \text{ et } \sum_{1 \leq j < k \leq n} kj$$

Exercice 12. Calculer les sommes et les produits suivantes :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (2j - i),\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j),\ \prod_{1 \leq i,j \leq n} x^{i+j},\ \sum_{1 \leq i,j \leq n} x^{i+j},\ \prod_{1 \leq i,j \leq n} i^j,\ \prod_{p=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p} 2^{p!.k} \right),\ \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$$

Exercice 13.

1. Par un changement d'indice calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k$.
2. Montrer que : $\prod_{k=1}^{n} (n+k) = \prod_{k=1}^{n} (4k-2)$.(utiliser les nombres factorielles)

Exercice 14. Soient k, p et n des entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$

1. Montrer que : $C_{n-p}^{k-p} C_n^p = C_n^k C_k^p$.
2. En déduire la valeur des sommes : $\sum_{p=0}^{\mathrm{k}} C_{n-p}^{k-p} C_n^p$ et $\sum_{k=p}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^p$

Exercice 15.

1. En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k ; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k ; \sum_{k=1}^{n} k C_n^k ; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$$

2. Calculer les sommes suivantes pour $z \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} z^{2k}$et $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1} z^{2k+1}$.

Exercice 16. Soient n, p et q des entiers naturels tel que : $n \leq p$ et $n \leq q$. Démontrer la formule Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} C_p^k C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$$

Déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$

Exercice 17. Dans cet exercice on se propose de calculer : $A_0 = \sum_{p=0 \text{ et } p \equiv 0[3]}^{n} C_n^p$

On considère le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

$$\text{On pose : } A_1 = \sum_{p=0 \text{ et } p \equiv 1[3]}^{n} C_n^p \text{ et } A_2 = \sum_{p=0 \text{ et } p \equiv 2[3]}^{n} C_n^p$$

1. Calculer $\sum_{p=0}^{n} C_n^p j^p$.
2. Calculer $A_0 + A_1 + A_2$ et $A_0 + jA_1 + j^2 A_2$.
3. Déduire A_0.

Exercice 18.

1. Résoudre les systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + y - 7z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (1-a)x + y + z = 0 \\ x + (1-a)y + z = 0 \\ x + y + (1-a)z = 0 \end{cases} \quad \text{selon le paramètre réel } a$$

2. Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles le système : $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$

   — Possède une solution unique.
   — Ne possède pas de solution.
   — Possède une infinité de solutions.

3. Résoudre le système d'inconnue $(x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$: $\begin{cases} x_1 + x_2 + .. + x_n = 1 \\ \quad x_2 + ... + x_n = 1 \\ \quad \vdots \\ \quad x_{n-1} + x_n = 1 \\ \quad x_n = 1 \end{cases}$