

# Fra Newton til Kvantemekanik

Rasmus Nielsen

Sidst redigeret: 28. februar 2022

I 1687 udgave Sir Isaac Newton sit epokegørende værk *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, hvori han beskrev sine 3 bevægelseslove, den universalle tyngdelov, samt en udeledning af Keplers love om planeternes bevægelse. Disse opdagelser af Newton ligger uden tvivl i blandt de mest indflydelsesrige og banebrydende i hele fysikens historie. Specielt opdagelsen af Newtons 2. lov:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (1)$$

gjorde det nu muligt (*i princippet*) at forudsige opførslen af et hvilket som helst mekanisk system, givet et sæt af kendte begyndelsesbetingelser. Et så præcist og utvetydigt værktøj til beskrivelse af mekaniske systemers udvikling over tid, var hidtil uset i fysikken. Man kan med rette sige, at opdagelsen af Newtons love (*specielt Newtons 2. lov*) er oprindelsespunktet for al moderne fysik. Selv den dag i dag, mere end 300 år efter deres opdagelse, ser Newtons love anvendelse i mange praktiske så vel som teoretiske sammenhænge.

Men er Newtons 2. lov (1) den eneste måde at beskrive udviklingen af et fysisk system over tid? Svaret på dette spørgsmål viser sig at være nej! Der findes op til flere forskellige formuleringer af love, der alle forudsiger samme tidsudvikling som Newtons 2. lov, for et givent klassisk system. Man kan da spørge sig selv; hvad er idéen med at indføre disse *alternative formuleringer*, hvis de i sidste ende er ækvivalente med Newtons 2. lov? Det kan ved første øjekast fremstå som en overflødig tilføjelse til fysikken. Lad mig her præsentere 3 vigtige grunde til at alternative formuleringer fortjener deres plads i fysikken:

1. For et givent system, kan en eller flere af de alternative formuleringer være mindre teknisk tunge end Newtons 2. lov. Et godt eksempel er det klassisk *dobbeltpendul*, som er nemmere beskrevet ved hjælp af så kaldt *Lagrange-mekanik*. Mange andre fysiske systemer med *begrænset frihed*, så som '*klods på skråplan på friktionsløst underlag-systemet*', er ligeledes mindre tunge at analysere i rammer af *Lagrange-mekanikken*.
2. De alternative formuleringer kan give ny indsigt i allerede kendt fænomener. Et godt eksempel er forbindelsen mellem *bevægelseslove* og *symmetrier* i et system. For eksempel vil der være *impulsbevarelse* i et system, præcis når systemet besidder *translationssymmetri*. Disse sammenhænge beskrives lettest ved hjælp af *Lagrange-mekanik*.

3. I opdagelsen af *nye fysiske love*, har alternative formuleringer fungeret som uvurderlige kilder til inspiration. Her er det primære eksempel *kvantemekanikken*, hvis formulering er stærkt indspireret af såkaldt *Hamilton-mekanik*. Et andet eksempel er i formuleringen af *statistiske fysik*; grenen af fysikken som sammenkobler mekanik og termodynamik, hvor mange koncepter fra Hamilton-mekanikken er komplet uundværlige.

Det kan desuden tilføjes, at både Lagrange og Hamilton-mekanik er langt mere velegnede som fundament for mange grene af den moderne fysik, et par eksempler på hvilke er:

- Faststoffysik (*kan beskrive fx laserer og transistorer*)
- Partikelfysik (*førte til opdagelsen af Higgs-partiklen samt resten af Standardmodellen*)
- General relativitetsteori (*kan beskrive fx sort huller og universets udvidelse*)
- Strengteori (*en af de få kendte teori, som kan beskrive tyngdekraft kvantemekanisk*)

Disse argumenter burde være tilstrækkelige til at overbevise selv de mest konservativt stemte, om anvendeligheden af de alternative formuleringer for den klassiske fysik. Med det sagt, vil vi nu give en kort oversigt over indholdet af disse noter:

- **Kapitel 1:** Motivation for indførelsen af *variationsregning*, samt udvikling af vigtige koncepter indenfor denne gren af matematikken.
- **Kapitel 2:** Introduktion til *Lagrange-mekanikken* samt *princippet om mindste virkning*. Vi vil desuden diskutere sammenhængen mellem *symmetrier* og *bevarelses love*.
- **Kapitel 3:** Introduktion til *Hamilton-mekanikken* og idéen om *faserum*. Vi vil kort beskrive hvordan Hamilton-mekanikken ledte til en af de første formuleringer af *kvantemekanikken*.

Vi er nu klar til begynde vores rejse fra Newton til kvantemekanik. Vi tager udgangspunkt i et interessant princip, udtænkt af den franske matematiker og advokat Pierre de Fermat.

# Kapitel 1

## Fermats princip og variationsregning

I 1662, 25 år før udgivelsen af *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, arbejdede matematikeren Pierre de Fermat på at forstå afbøjning af lys, passerende fra et medium til et andet. Det havde på dette tidspunkt været kendt i mere end 600 år, at normal-vinklen for en indkommende lysstråle og normal-vinklen for den tilhørende udgående lysstråle er relateret på følgende måde (*se fig. 1.1 for illustration*).

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.1)$$

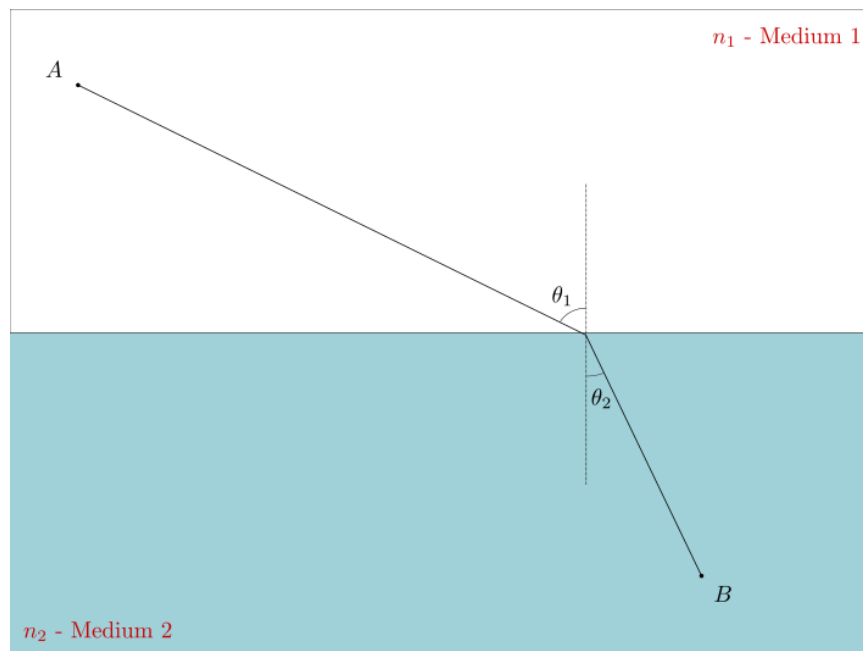
Størrelserne  $n_1$ ,  $n_2$  er de såkaldte *brydningsindekser* for medium 1 og 2 respektivt, og kan bestemmes ud fra de elektromagnetiske egenskaber for de givne medier. Brydningsindekserne relaterer lyshastighederne i medium 1 og 2 til lyshastigheden i vakuum.

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \quad , \quad v_2 = \frac{c}{n_2} \quad (1.2)$$

Hvor  $c \approx 10^8$  m/s, er lyshastigheden i vakuum. Sammenhængen (1.1) er typisk kendt under navnet *Snells lov*. Fermats bidrag til forståelsen af lysets brydning i passagen fra et medium til et andet, var formuleringen af følgende princip:

**Princip** (Fermat). *En lysstråle der udsendes fra punktet A til tiden  $t_A$ , og detekteres ved punktet B til tiden  $t_B$ , vil følge den vej fra A og B som minimerer størrelsen  $T \equiv t_B - t_A$ . Med andre ord: lyset følger den vej fra A til B som tager kortest tid.*

Lad os i første omgang påpege, at det ovenstående Fermats princip er konsistent med vores erfaring om at lys følger rette linjer gennem rummet, hvis det ikke passerer fra et medium



Figur 1.1: Eksempel på afbøjning af lys, passerende fra et medium til et andet.

til et andet. Dette er nemt at se, siden der for enhver vej gælder at lyshastigheden  $v$  i det givne medium er konstant. Dermed er tiden  $T$  det vil tage at gennemløbe en hver vej i mediet, givet ved følgende.

$$T = \frac{L}{v} \quad (1.3)$$

Hvor  $L$  er længden af vejen. Vi ser dermed at  $T$  er minimal når  $L$  er minimal, og siden den korteste vej mellem to punkter er en ret linje har vi overensstemmelse. Det er ligeledes muligt at udlede Snells lov (1.1) ved brug af Fermats princip om minimering af rejsetiden. Dette efterlades, med lidt vejledning, som en opgave til læseren 1.2.

Lad os nu påpege en interessant konceptuel forskel på Snells lov og Fermats princip. Snells lov beskriver hvad lyset gør *lokalt*; specifikt hvordan det afbøjes i passagen fra et medium til et andet. Derimod beskriver Fermats princip en *global* egenskab ved den vej lyset følger; specifikt at denne vej minimere rejsetiden fra  $A$  til  $B$ . Fermats princip kan altså tænkes på som en form for minimeringsproblem, og vi vil nu vise hvordan det kan reformuleres som sådan.

## 1.1 Reformulering af Fermats princip

Lad os i første omgang definere et passende matematiks object til beskrivelse af en lysstråles propagation gennem rummet.

**Definition 1.** En banekurve er en funktion  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , der til et hvert tidspunkt  $t \in \mathbb{R}$  beskriver positionen  $\gamma(t)$  for en given lysfront.

Vi vil antage at alle relevante banekurver er  $p$  gange kontinuert differentialbel. Vi siger at kurven  $\gamma$  er et element i sættet  $C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ , bestående af  $p$  gange kontinuert differentialbel funktioner fra  $\mathbb{R}$  til  $\mathbb{R}^3$ .

Vi vil, indtil et senere punkt i vores analyse, lade  $p$  forblive uspecificeret. Det vil på nuværende tidspunkt være passende at indføre en ofte anvendt notation; den såkaldte 'mærke notation'. Vi vil med  $\gamma'$ , benævne den 1. afledte af funktionen  $\gamma$ . Vi vil ligeledes med  $\gamma''$ , benævne den 2. afledte osv. Vi vil desuden med  $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}$ , benævne normen af hastighedsvektoren  $\gamma'(t)$ , defineret ud fra det sædvanlige skalar-produkt i  $\mathbb{R}^3$ . Vi er nu klar til næste definition.

**Definition 2.** En brydningsindeksfordeling er en funktion  $n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , der til et hvert punkt  $x \in \mathbb{R}^3$ , tilknytter brydningsindekset  $n(x)$  for det givne punkt i et materiale.

For enhver tilladt banekurve  $\gamma$ , og et hvert punkt  $\gamma(t)$  på denne banekurve, vil hastigheden  $\gamma'(t)$  i dette punkt være relateret til brydningsindekset  $n(\gamma(t))$  i samme punkt:

$$n(\gamma(t)) = \frac{c}{|\gamma'(t)|} \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

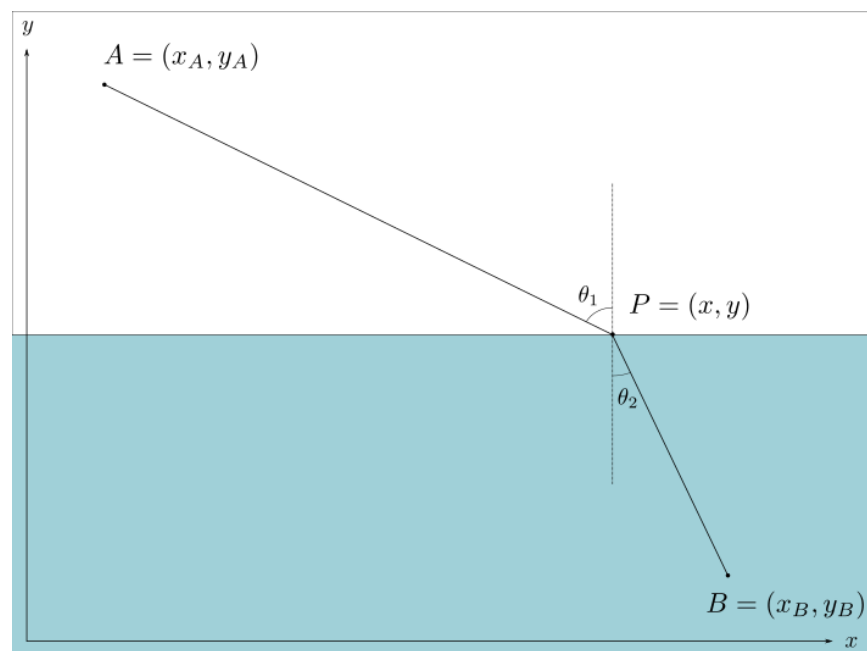
Ovenstående sammenhæng er analog til (1.2) for tilfældet med konstante brydningsindekser.

Vi kan nu inføre den sidste, og mest centrale, størrelse i vores matematiserings process.

**Definition 3.** Den såkaldte rejsetidsfunktional er en funktion  $T : C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ , der til enhver banekurve  $\gamma \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ , for hvilken  $\gamma(t_A) = A$  og  $\gamma(t_B) = B$ , tilknytter rejsetiden fra punktet  $A$  til punktet  $B$  langs  $\gamma$ :

$$T[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{t_A}^{t_B} n(\gamma(t)) \frac{|\gamma'(t)|}{c} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{n(\gamma(t))}{c} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad (1.5)$$

Hvor vi har anvendt (1.4) til at indsætte et passende 1-tal i det ovenstående integral.



Figur 1.2: Propagation af lys gennem to medier, med overgangspunkt  $P = (x, y)$ .

Vi kan nu give en mere matematisk præcis reformulering af Fermats princip, ved hjælp af vores nyligt indførte rejsetidsfunktional  $T$ .

**Princip** (Fermat, Ref.). *En lysstråle der udsendes fra punktet  $A$  til tiden  $t_A$  og detekteres ved punktet  $B$  til tiden  $t_B$ , vil følge kurven  $\gamma \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ , således at  $T[\gamma]$  er minimal.*

Opgaven med at finde den vej en lysstråle vil rejse fra punktet  $A$  til punktet  $B$  er altså, i følge Fermats princip, ækvivalent med at minimere rejsetidsfunktionalen  $T$  over mængden af alle banekurver  $\gamma$ , for hvilke  $\gamma(t_A) = A$  og  $\gamma(t_B) = B$ . Hvordan man rent matematisk bærer sig ad med at udføre en sådan minimering er et interessant spørgsmål, som vi snart skal se har stor relevans for alternative formuleringer af den klassiske mekanik.

## 1.2 Opgave: udledning af Snell's lov

Anvend Fermats princip til at udlede sammenhængen (1.1), idet lys passerer fra et medium med brydningsindeks  $n_1$  til et andet medium med brydningsindeks  $n_2$ . Opgaven kan med fordel løses i følgende trin:

- a) Opskriv et udtryk for rejsetiden  $T$  fra  $A$  til  $B$ , som funktion af  $x$  og andre indgående parametre (se fig. 1.2).
- b) Vi har nu et minimerings problem i én reel variable  $x$ , og vi kan opstille ligningen:

$$\frac{dT}{dx} = 0 \tag{1.6}$$

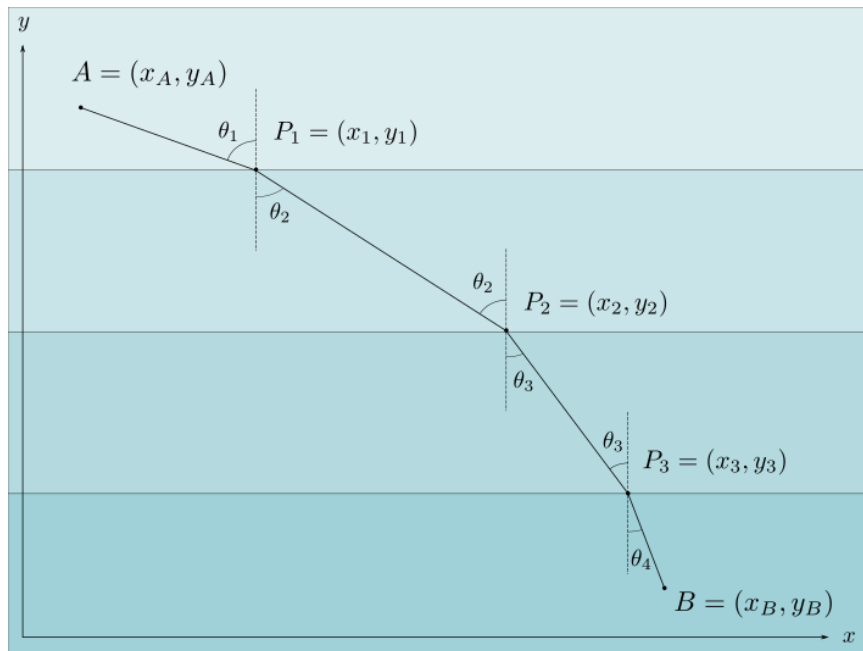
Omskriv nu ovenstående ligning i termer af  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\sin \theta_1$  og  $\sin \theta_2$ . Fig. 1.2 kan med fordel anvendes som reference for geometriske betragtninger.

- c) Generaliser til tilfældet hvor en lysstråle passere gennem flere medier med forskellige brydningsindekser. Opstil rejsetiden  $T$  som funktion af  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Opstil derefter ligningerne:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1.7}$$

Omskriv ovenstående ligninger i termer af  $n_1, n_2, \dots, n_n$  og  $\sin \theta_1, \sin \theta_2, \dots, \sin \theta_n$ . Fig. 1.3 kan med fordel anvendes som reference for geometriske betragtninger.





Figur 1.3: Propagation af lys gennem flere medier, med overgangspunkter  $P_i = (x_i, y_i)$ .

### 1.3 Ekstremisering af funktionaler

En funktion af typen  $T : C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ , der som input tager en anden funktion af typen  $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , for  $n \in \mathbb{N}$ , kaldes ofte for en *funktional*. Der findes utallige situationer inden for både matematikken og fysikken, hvor man har brug for at finde ekstremal-funktioner for en given funktional; altså funktioner som ekstremere denne funktional. Det er derfor af stor praktisk interesse at kunne finde disse ekstremal-funktioner på en systematisk måde. For en generisk funktional er dette dog et meget svært problem, og en generel fremgangsmåde er, om ikke andet for denne forfatter, ukendt. Det viser sig i midlertidigt, at der findes en mere medgørlig delmængde af alle funktionaler, for hvilke der findes en konkret strategi for bestemmelse af ekstremelfunktioner. Denne delmængde er funktionaler af følgende type:

$$F[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) dt \quad (1.8)$$

Hvor funktionen  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , kaldes funktionalens *Lagrange-funktion*. Funktionaler af ovenstående type kan for den uindviede læser virke som en meget begrænset delmængde af alle funktionaler. Det viser sig dog at et overvældende flertal af fysisk relevante funktionaler falder indenfor denne klasse. Vi har allerede set ét eksempel på en sådan fysisk relevant

funktional; nemlig rejsetidsfunktionalen  $T$ , som præcis er på formen (1.8), med  $n = 3$ , parameteren  $t$  identificeret med *tiden*, og Lagrange-funktion:

$$L(x, v, t) := \frac{n(x)}{c} \sqrt{v \cdot v} \quad (1.9)$$

Vi vil senere i dette kapitel diskutere flere eksempler på fysiske problemstillinger, som involvere bestemmelse af ekstremal-funktioner for funktionaler af typen (1.8). I første omgang må vi dog undersøge præcis hvordan det lader sig gøre at bestemme ekstremal-funktioner for funktionaler af typen (1.8). I analog til problemet om bestemmelse af ekstremal-værdier for funktioner af typen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , vil vi som udgangspunkt fokusere på bestemmelse af *stationære* funktioner til en given funktional  $F$ . For en funktion af typen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kan stationaritet defineres på følgende måde:

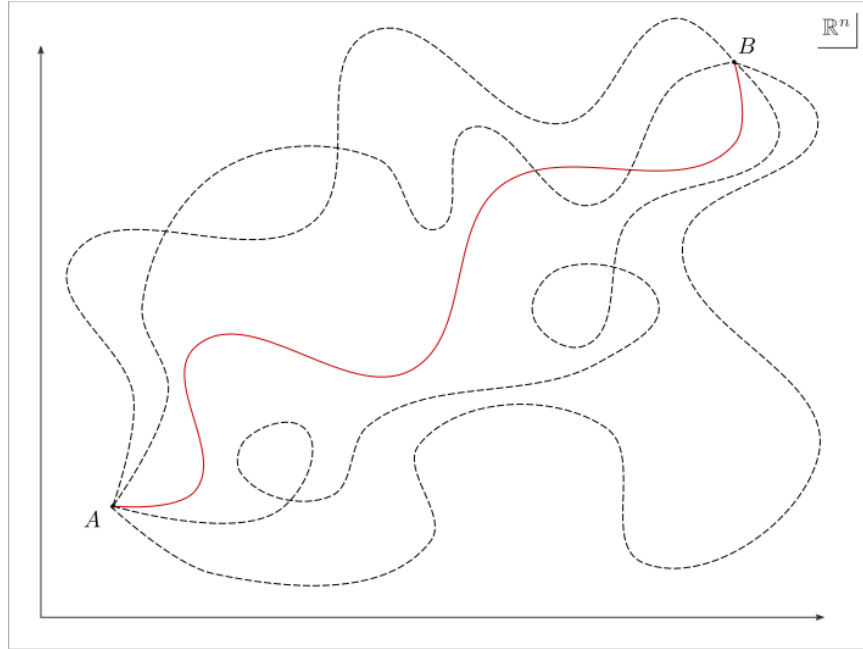
$$\bar{x} \text{ er et stationært punkt for } f \iff \left. \frac{df(\bar{x} + \varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.10)$$

(*Det ses ved brug af kædereolen, at ovenstående er ækvivalent med standard definitionen.*).

Men hvad præcis udgøre en brugbar definition af stationaritet for funktionaler? Svaret på dette spørgsmål vil vi nu forsøge at motivere så klart som muligt. Vi vil derefter vise hvordan stationære funktioner, for funktionaler af typen (1.8), kan bestemmes ved hjælp af de såkaldte *Euler-Lagrange-ligninger*, tilhørende disse funktionaler.

## 1.4 Stationære funktioner: Euler-Lagrange-ligninger

Lad os først forsøge at motivere definitionen af stationaritet for funktionaler. Antag først at der findes en funktion  $\bar{\gamma} \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  for hvilken  $F$  er stationær, på trods af at vi endnu ikke præcist ved hvad det vil sige. Vælg nu en *pertubationsfunktion*  $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , for hvilken  $\eta(t_A) = 0$  og  $\eta(t_B) = 0$ . Den sidste antagelse er grundet af, at man oftest ønsker at optimere  $F$  over kun de banekurver som opfylder randbetingelserne:  $\gamma(t_A) = A$  og  $\gamma(t_B) = B$ . Dette var for eksempel tilfældet for Fermats princip, hvor vi fokuserede på lysstråler startende fra punktet  $A$  og sluttende i punktet  $B$ .



Figur 1.4: Eksempler på mulige banekurver gennem  $\mathbb{R}^n$  fra punktet  $A$  til punktet  $B$ . Stiplede kurver repræsenterer ikke stationære baner mht. funktionen  $F$ , mens den røde kurve repræsenterer en stationær bane.

For en given stationær funktion  $\bar{\gamma}$  og perturbationsfunktion  $\eta$ , kan  $F[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta]$  betragtes som en funktion fra  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , og  $F[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta]$  kan dermed differentieres på sædvanlig vis. Et oplagt krav til en hver fornuftig definition af stationaritet for  $F$  vil dermed være:

$$\bar{\gamma} \text{ er en stationær funktion for } F \Rightarrow \left. \frac{dF[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.11)$$

Taylor-udviklingen af funktionen  $F[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta]$  omkring  $\bar{\gamma}$ , har altså intet 1. ordens led:

$$F[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta] = F[\bar{\gamma}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (1.12)$$

Hvilket præcist er tilfældet for en funktion af typen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , med stationært punkt  $\bar{x}$ :

$$f(\bar{x} + \varepsilon) = f(\bar{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (1.13)$$

Den opmærksomme læser vil måske have bemærket, at implikationspil i (1.11) kun går den ene vej. Dette skyldes at der sagtens kunne eksistere en anden perturbationsfunktion  $\eta$ , opfyldende  $\xi(t_A) = 0$  og  $\xi(t_B) = 0$ , således at:

$$\left. \frac{dF[\bar{\gamma} + \varepsilon \xi]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \neq 0 \quad (1.14)$$

Det vil i dette tilfælde ikke give mening at kalde  $\bar{\gamma}$  for en stationær funktion for  $F$ , af den simple årsag at  $F[\bar{\gamma} + \varepsilon \xi]$  ikke er stationær for  $\varepsilon = 0$ . Løsningen på dette problem er simpel. Vi definerer en funktion  $\bar{\gamma}$  som værende en stationær funktion for funktionalen  $F$ , hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\bar{\gamma} \text{ er en stationær funktion for } F \iff \forall \eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \left. \frac{dF[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.15)$$

Hvor det i ovenstående definition stadig er påkrævet at  $\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0$ . Med denne definition er vi sikret at (1.12) er opfyldt, ligegyldigt hvilken perturbationsfunktion  $\eta$  vi benytter. Lad os nu forsøge at anvende definitionen (1.15) til at bestemme de stationære funktioner for  $F$ . Ved anvendelse af den antagende form (1.8) for  $F$ , finder vi at.

$$\left. \frac{dF[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_A}^{t_B} \left. \frac{dL(\bar{\gamma}(t) + \varepsilon \eta(t), \bar{\gamma}'(t) + \varepsilon \eta'(t), t)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} dt \quad (1.16)$$

For fast  $t$  kan vi betragte  $\bar{\gamma}(t) + \varepsilon \eta(t)$  og  $\bar{\gamma}'(t) + \varepsilon \eta'(t)$  som funktioner fra  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , hvor  $\varepsilon$  spiller rollen som uafhængig variabel. Da Lagrange-funktionen  $L$  tager  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sådan at  $(x, v, t) \mapsto L(x, v, t)$ , har vi i ovenstående udtryk brug for at anvende *kædereglens* for funktioner af mere end én reel variable. Lad os til dette formål indføre følgende notation:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad , \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \quad (1.17)$$

$$\bar{\gamma}(t) := (\bar{\gamma}(t), \bar{\gamma}(t), \dots, \bar{\gamma}(t), \dots, \bar{\gamma}(t)) \quad , \quad \bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.18)$$

$$\eta(t) := (\eta_1(t), \eta_1(t), \dots, \eta_i(t), \dots, \eta_n(t)) \quad , \quad \eta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.19)$$

Lad os for et øjeblik indføre de to hjælpestørrelser  $z = \bar{\gamma}(t) + \varepsilon \eta(t)$  og  $w = \bar{\gamma}'(t) + \varepsilon \eta'(t)$ , for at lette notationen. Ved brug af kædereglens for funktioner af flere variable på integranden i udtryk (1.16), finder vi nu følgende.

$$\left. \frac{dL(z, w, t)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L(z, w, t)}{\partial x_i} \frac{dz_i}{d\varepsilon} + \frac{\partial L(z, w, t)}{\partial v_i} \frac{dw_i}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \quad (1.20)$$

Ud fra definitionerne  $z = \bar{\gamma}(t) + \varepsilon \eta(t)$  og  $w = \bar{\gamma}'(t) + \varepsilon \eta'(t)$ , ses det nu umiddelbart at:

$$z|_{\varepsilon=0} = \bar{\gamma}(t) \quad , \quad \left. \frac{dz_i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \eta_i(t) \quad (1.21)$$

$$w|_{\varepsilon=0} = \bar{\gamma}'(t) \quad , \quad \left. \frac{dw_i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \eta'_i(t) \quad (1.22)$$

Ved brug af de ovenstående resultater samt (1.20), kan vi nu opskrive følgende udtryk for den afledte funktion af  $F[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta]$ , evalueret ved  $\varepsilon = 0$ .

$$\left. \frac{dF[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L(\bar{\gamma}(t), \bar{\gamma}'(t), t)}{\partial x_i} \eta_i(t) + \frac{\partial L(\bar{\gamma}(t), \bar{\gamma}'(t), t)}{\partial v_i} \eta'_i(t) \right] dt \quad (1.23)$$

Ved delvis integration af andet led, og ved brug af  $\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0$ , finder vi nu følgende:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF[\bar{\gamma} + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L(\bar{\gamma}(t), \bar{\gamma}'(t), t)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\bar{\gamma}(t), \bar{\gamma}'(t), t)}{\partial v_i} \right] \eta_i(t) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L(\bar{\gamma}(t), \bar{\gamma}'(t), t)}{\partial v_i} \eta_i(t) \right]_{t_A}^{t_B} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L(\bar{\gamma}(t), \bar{\gamma}'(t), t)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\bar{\gamma}(t), \bar{\gamma}'(t), t)}{\partial v_i} \right] \eta_i(t) dt \end{aligned} \quad (1.24)$$

Hvis ovenstående udtryk, per definition (1.15), skal være lig 0 for alle  $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  for hvilke  $\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0$ , er vi nu tvunget til at konkludere, at kombinationen af partielt afledte i den firkantede parentes må være lig 0 for alle  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (1.25)$$

Hvor vi nu har blot benævner den ekstremmerende funktion  $\gamma$ . Dette sæt af koblede ordinære differentialligninger er *Euler-Lagrange-ligningerne* tilhørende funktionalen  $F$  givet ved (1.8). Vi ser på dette stadige i vores analyse, at  $p \geq 2$ , samt at Lagrange-funktionen  $L$  må kræves at være mindst én gang kontinuert differentiabel.

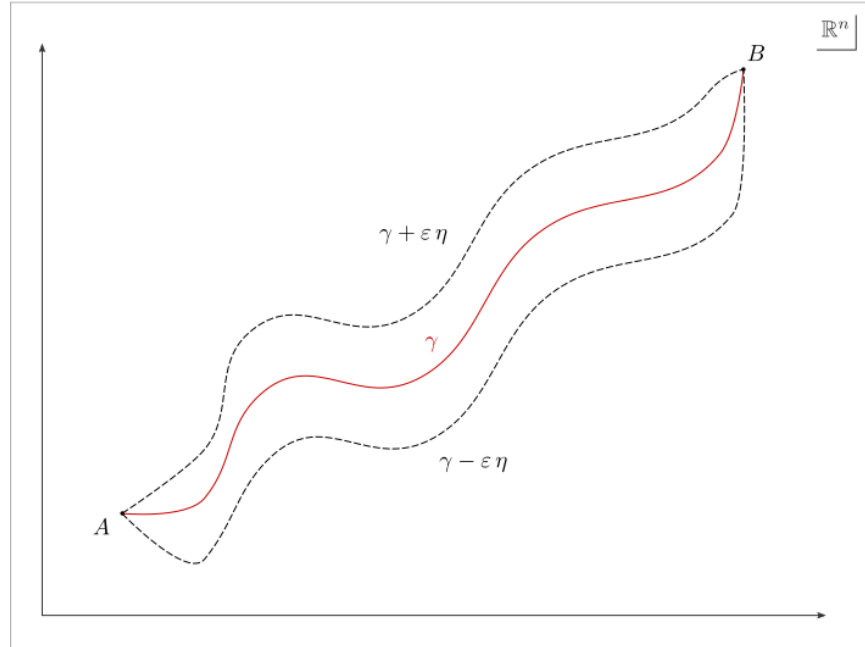
## 1.5 Analyse af rejsetidsfunktionalen

Lad os nu anvende vores nye værktøj; Euler-Lagrange-ligningerne, til at løse vores motive-rende problem; nemlig at finde de stationære funktioner for rejsetidsfunktionalen  $T$ :

$$T[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) dt \quad , \quad L(x, v, t) = \frac{n(x)}{c} \sqrt{v \cdot v} \quad (1.26)$$

Vi finder nu de partielt afledte af Lagrange-funktionen. Resultatet er følgende udtryk.

$$\frac{\partial L(x, v, t)}{\partial x_i} = \frac{1}{c} \frac{\partial n(x)}{\partial x_i} \sqrt{v \cdot v} \quad , \quad \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v_i} = \frac{n(x)}{c} \frac{v_i}{\sqrt{v \cdot v}} \quad (1.27)$$



Figur 1.5: Eksempel på en variation af banen  $\gamma$ , med endepunkterne  $A$  og  $B$ , ved brug af funktionen  $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , hvor  $\eta(t_A) = 0$ ,  $\eta(t_B) = 0$  og  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

Vi kan nu indsætte de ovenstående udtryk for de partielt afledte i Euler-Lagrange-ligningerne (1.25). Resultatet er følgende differentiaalligninger.

$$\frac{d}{dt} \left[ n(\gamma(t)) \frac{\gamma'_i(t)}{\sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}} \right] = \frac{\partial n(\gamma(t))}{\partial x_i} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} \quad (1.28)$$

Alt vi nu i princippet skal gøre for at bestemme de stationære funktionen for rejsetidsfunktionalen  $T$ , er at løse det ovenstående sæt af differentiaalligninger, med randbetingelserne  $\gamma(t_A) = A$  og  $\gamma(t_B) = B$ . I praksis er det dog stadig et svært problem at løse disse ligninger, med mindre  $n(x)$  er ekstraordinært simpel. Vi vil derfor nu introducere to vigtige idéer, som signifikant letter vores analyse af rejsetidsfunktionalen.

### 1.5.1 Hamilton-funktionen

En hver person, som har beskæftiget sig med problem analyse i den klassiske fysik, ved at bevarelseslove (*eksempelvis for impuls og energi*) typisk simplificere en given problemstilling drastisk. På samme måde kan bevarelseslove simplificere vores funktional analyse. Specifikt

kan det vises, at givet den såkaldte *Hamilton-funktion*  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$H(x, v, t) = \sum_{i=1}^n \left[ v_i \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v_i} \right] - L(x, v, t) \quad (1.29)$$

Da vil  $H(\gamma(t), \gamma'(t), t)$  være en bevaret størrelse, hvis følgende 2 betingelser er opfyldte:

1. Funktionen  $\gamma$  er en løsning til Euler-Lagrange-ligningerne (1.25).
2. Lagrange-funktionen  $L$  afhænger ikke explicit af  $t$ . Med andre ord:

$$\frac{\partial L(x, v, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.30)$$

Lad os nu demonstrere at  $H(\gamma(t), \gamma'(t), t)$  er en bevaret størrelse, givet at de ovenstående betingelser er opfyldt. Ved brug af multivariabelkædereglene finder vi at:

$$\begin{aligned} \frac{dH(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left[ \gamma''(t) \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} + \gamma'(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial x_i} \gamma'(t) + \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} \gamma''(t) \right] \\ &\quad - \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ved anvendelse af Euler-Lagrange-ligningerne (1.25) samt vores antagelse om explicit  $t$  uafhængighed (1.30), kan vi nu konkludere at:

$$\frac{dH(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(\gamma(t), \gamma'(t), t) = C \quad , \quad C \in \mathbb{R} \quad (1.32)$$

Vi kunne nu i princippet udregne Hamilton-funktionen for rejsetidsfunktionalen  $T$ . På dette stadie af vores analyse ville dette dog ikke hjælpe os meget. Dette skyldes at Hamilton-funktionen, udregnet på baggrund af Lagrange-funktionen (1.26), er identisk 0. Denne udregning er simpel, og vi opfordre læseren til udføre udregningen ved brug af definition (1.29). Årsagen til dette lidt mystiske resultat, skyldes i sidste ende såkaldt *reparametriseringsinvarians* af rejsetidsfunktionalen. Vi vil på dette tidspunkt ikke diskutere denne type af symmetri, da problemet med Hamilton-funktionen forsvinder efter indførelsen af vores næste simplificerende koncept.

### 1.5.2 Dimensionel reduktion

Når det kommer til evaluering af integraler, kan det ofte betale sig at foretage et passende koordinatskift. Det samme kan siges ift. funktional analyse, hvor et passende koordinatskift potentielt kan simplificere Lagrange-funktionen. Idéen bag såkaldt *dimensional reduktion*, er at foretage følgende skifte af integrationsvariable.

$$x_1 = \gamma_1(t) \quad \Rightarrow \quad t = \gamma_1^{-1}(x_1) \quad (1.33)$$

Hvor  $\gamma$  er input funktionen for den givne funktional, og  $\gamma_1$  er 1. komponenten af  $\gamma$ . For at kunne foretage det ovenstående variable skift, må vi antage at  $\gamma_1$  er bijektiv; altså at  $\gamma_1^{-1}$  eksisterer. Dette er ækvivalent med forudsætningen om at  $\gamma_1$  er en monotont voksende funktion. Dette er en yderst rimelig forudsætningen i mange sammenhænge, som vi snart skal se. Lad os først foretage variable skiftet fra  $t$  til  $x_1$  i funktionalen:

$$T[\gamma] = \frac{1}{c} \int_{t_A}^{t_B} n(\gamma(t)) \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad (1.34)$$

Vi kan nu med fordel definere nye banekurvefunktioner  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sådan at  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \gamma_1^{-1}$ . Dermed ses det umiddelbart at:

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma} \circ \gamma_1(t) = \tilde{\gamma}(\gamma_1(t)) = \tilde{\gamma}(x_1) \quad (1.35)$$

Ved brug af kædereolen finder vi desuden at  $\gamma'$  og  $\tilde{\gamma}'$  er relateret på følgende simple måde.

$$\gamma'(t) = (\tilde{\gamma} \circ \gamma_1)'(t) = \tilde{\gamma}'(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) = \tilde{\gamma}'(x_1) \gamma_1'(t) \quad (1.36)$$

Vi kan nu på sædvanlig vis finde Jacobiant-faktoren der relaterer de to mål  $dt$  og  $dx_1$ .

$$x_1 = \gamma_1(t) \quad \Rightarrow \quad dx_1 = \gamma_1'(t) dt \quad (1.37)$$

Dermed finder vi at outputværdien  $T[\gamma]$  for funktionalen  $T$ , kan omskrives til følgende.

$$\begin{aligned} T[\gamma] &= \frac{1}{c} \int_{x_{1;A}}^{x_{1;B}} \frac{n(\tilde{\gamma}(x_1))}{\gamma_1'(t)} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 \tilde{\gamma}'(x_1) \cdot \tilde{\gamma}'(x_1)} dx_1 \\ &= \frac{1}{c} \int_{x_{1;A}}^{x_{1;B}} n(\tilde{\gamma}(x_1)) \sqrt{\tilde{\gamma}'(x_1) \cdot \tilde{\gamma}'(x_1)} dx_1 \end{aligned} \quad (1.38)$$



Hvor  $x_{1;A} = \gamma_1(t_A)$  og  $x_{1;B} = \gamma_1(t_B)$ . Observer nu at 1. komponenterne for  $\tilde{\gamma}$  og  $\tilde{\gamma}'$  effektivt set er elimineret som frihedsgrader, da de i følge (1.35, 1.36) altid antager følgende værdier:

$$\tilde{\gamma}_1(x_1) = \gamma_1 \circ \gamma_1^{-1}(x_1) = x_1 \quad , \quad \tilde{\gamma}'_1(x_1) = \frac{\gamma'_1(t)}{\gamma'_1(t)} = 1 \quad (1.39)$$

Banekurve funktionen  $\tilde{\gamma}$  og dens afledte  $\tilde{\gamma}'$  er altså effektivt set funktioner fra  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , hvor vi i dette tilfælde har  $n = 3$ . Vi har altså reduceret dimensionen af billede-rummet for banekurve funktionerne med én. Rejsetidsfunktionalen  $T$  kan nu ækvivalent beskrives i termer af  $C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1})$  banekurve funktioner. Resultatet er følgende reducerede udtryk:

$$T[\gamma] = \frac{1}{c} \int_{x_{1;A}}^{x_{1;B}} n(x_1, \gamma(x_1)) \sqrt{1 + \gamma'(x_1) \cdot \gamma'(x_1)} dx_1 \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1}) \quad (1.40)$$

Hvor randbetingelserne for input funktionerne nu er  $(x_{1;A}, \gamma(x_{1;A})) = A$ ,  $(x_{1;B}, \gamma(x_{1;B})) = B$ . Lad os nu forsøge at finde Hamilton-funktionen  $H$  hørende til ovenstående funktional. Vi finder først de nødvendige partielt afledte af Lagrange-funktion  $L$ .

$$L(x, v, x_1) = \frac{n(x_1, x)}{c} \sqrt{1 + v \cdot v} \quad , \quad \frac{\partial L(x, v, x_1)}{\partial v_i} = \frac{n(x_1, x)}{c} \frac{v_i}{\sqrt{1 + v \cdot v}} \quad (1.41)$$

Hvor vi nu har  $x = (x_2, x_3, \dots, x_n)$  og  $v = (v_2, v_3, \dots, v_n)$ . Vi kan nu finde et udtryk for Hamilton-funktionen  $H$  ved brug af definitionen (1.29), hvor  $t$  erstattes med  $x_1$ :

$$H(x, v, x_1) = \frac{n(x_1, x)}{c} \frac{v \cdot v}{\sqrt{1 + v \cdot v}} - \frac{n(x_1, x)}{c} \sqrt{1 + v \cdot v} = -\frac{n(x_1, x)}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + v \cdot v}} \quad (1.42)$$

Såfremt brydningsindeksfunktionen  $n(x_1, x)$  ikke afhænger af parameteren  $x_1$  (*vi skriver i dette tilfælde blot  $n(x)$  for brydningsindexfunktionen*), har vi nu formået at finde en bevaret størrelse for det dimensionalt reducerede rejsetidsproblem:

$$H(\gamma(x_1), \gamma'(x_1), x_1) = -\frac{n(\gamma(x_1))}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma'(x_1) \cdot \gamma'(x_1)}} = C \quad , \quad C \in \mathbb{R} \quad (1.43)$$

For nu et dette enden på vores analyse af Fermats princip og rejsetidsproblemet. Motiveret af dette problem har vi udledt *Euler-Lagrange-ligningerne*, vist at *Hamilton-funktion* kan give os en nyttig bevaret størrelse, og kort diskuteret *dimensional reduktion*. Alle disse værktøjer vil visse sig uundværlige når vi i senere kapitler vil begynde introduktionen til alternative formuleringer af den klassiske mekanik. I resten af dette kapitel vil vi beskæftige os med at løse en række interessante variations-problemer ved brug af vores nye værktøjer.

## 1.6 Flere eksempler på variations-problemer

Vi vil nu analysere tre kendte variationsproblemer. Alle tre problemer kan formuleres i 2D, hvilket vil sige at banekurverne  $\gamma$  er funktioner fra  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Vi vil desuden se at alle tre problemer kan dimensionalt reduceres, sådan at vi kan betragte banekurve funktioner af typen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Lad os nu for et kort øjeblik diskutere valg af notation. Når der arbejdes med problemer i planen  $\mathbb{R}^2$ , benævner vi normalt et punkt som  $(x, y)$  i stedet for  $(x_1, x_2)$ . Desuden benævnes vektor-komponenter  $(v_x, v_y)$  i stedet for  $(v_1, v_2)$ . Med det sagt vil vi nu starte ud med at analysere det mest elementære problem indenfor variationsregningen.

### 1.6.1 Den korteste vej mellem to punkter

Vi vil demonstrere at den korteste vej mellem to punkter  $A = (x_A, y_A)$  og  $B = (x_B, y_B)$ , er den rette linje som forbinder de to punkter. For enhver banekurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , for hvilken  $\gamma(t_A) = A$  og  $\gamma(t_B) = B$ , ved vi at længden fra  $A$  til  $B$  målt langs  $\gamma$ , er givet ved følgende udtryk:

$$S[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \quad (1.44)$$

Vi observerer nu at funktionalen  $S$  blot er et special tilfælde af rejsetidsfunktional  $T$  (1.26), for hvilken:

$$\frac{n(\gamma(t))}{c} = 1 \quad (1.45)$$

Vi kan derfor dimensionalt reducere funktional  $S$ , sådan at  $S[\gamma]$  er givet som et special tilfælde af (1.40).

$$S[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (1.46)$$

Det er nu en simpelt at identificere Lagrange-funktionen  $L$  for den ovenstående funktional.

$$L(y, v_y, x) := \sqrt{1 + v_y^2} \quad (1.47)$$

Vi kan nu anvende den ovenstående Lagrange-funktionen for  $S$ , til at opskrive Euler-Lagrange-ligningerne for vores problem. Vi finder først de relevante partielt afledte for  $L$ .

$$\frac{\partial L(y, v_y, x)}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(y, v_y, x)}{\partial v_y} = \frac{v_y}{\sqrt{1 + v_y^2}} \quad (1.48)$$

Vi kan nu opskrive Euler-Lagrange-ligningerne (1.25) for funktionalen  $S$ . Da vores banekurver  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kun har én komponent, vil vi for dette problem kun have én Euler-Lagrange ligning:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L(\gamma(x), \gamma'(x), x)}{\partial v_y} = \frac{\partial L(\gamma(x), \gamma'(x), x)}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[ \frac{\gamma'(x)}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} \right] = 0 \quad (1.49)$$

Det er nu en simpel sag at integrere ovenstående udtryk, hvormed vi finder følgende ligning.

$$\frac{\gamma'(x)}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} = k \Rightarrow \gamma'(x) = \pm \sqrt{\frac{k^2}{1 - k^2}} \equiv a \quad (1.50)$$

Hvor  $k \in (-1, 1)$  er en integrations konstant, og  $a$  kan antage alle værdier i  $\mathbb{R}$ . Det er igen en simpel sag at integrere ovenstående udtryk. Resultatet er følgende.

$$\gamma(x) = ax + b \quad , \quad a \in \mathbb{R} \quad , \quad b \in \mathbb{R} \quad (1.51)$$

Integrations-konstanterne  $a, b$  kan nu bestemmes ved brug af de forudsatte randbetingelser:

$$\gamma(x_A) = y_A \quad , \quad \gamma(x_B) = y_B \quad (1.52)$$

## 1.6.2 Formen af en udspændt sæbehinde

Vi forestiller os nu en sæbehinde, udspændt mellem to cirkulære ringe som indikeret på figure 1.7. Grundet rotationssymmetri er det klart at den minimale sæbehinde må være en omdrejningsflade omkring  $x$ -aksen. Arealet af en sådant omdrejningsflade er da givet ved følgende integral.

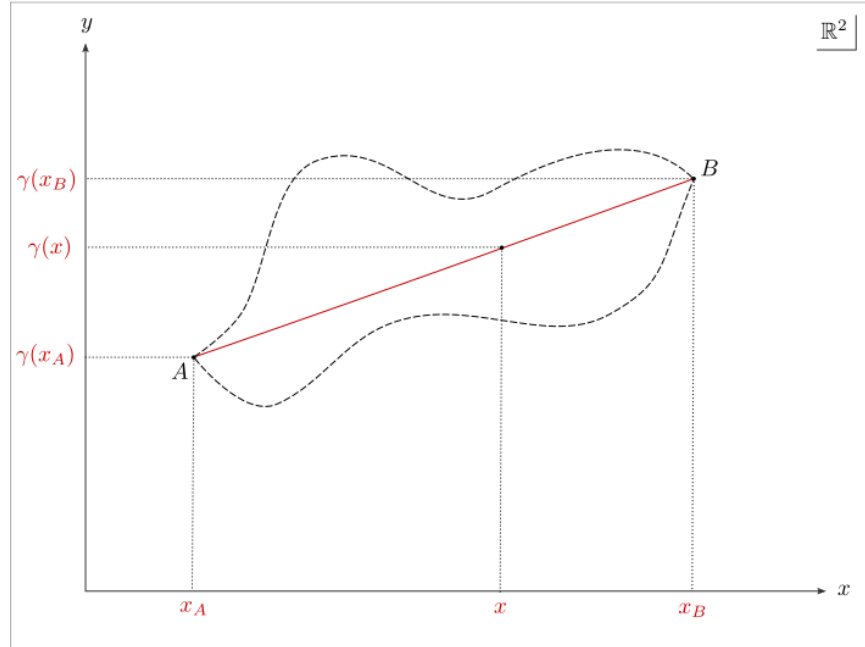
$$A[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} 2\pi \gamma_y(t) \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \quad (1.53)$$

Vi observerer, også for dette eksempel, at funktionalen  $A$  blot er et special tilfælde af rejsetidsfunktional  $T$  (1.26), nu med:

$$\frac{n(\gamma(t))}{c} = 2\pi \gamma_y(t) \quad (1.54)$$

Vi kan derfor også dimensionalt reducere funktionalen  $A$ , sådan at  $A[\gamma]$  er givet som et special tilfælde af (1.40).

$$A[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} 2\pi \gamma(x) \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (1.55)$$



Figur 1.6: Den røde banekurve  $\gamma$  repræsenterer den korteste vej fra  $A$  til  $B$ ; den rette linje. De stiplede banekurver repræsenterer ikke stationære baner.

Det er nu simpelt at identificere Lagrange-funktionen  $L$  for den ovenstående funktional.

$$L(y, v_y, x) := \frac{n(y)}{c} \sqrt{1 + v_y^2} \quad , \quad \frac{n(y)}{c} = 2\pi y \quad (1.56)$$

Vi kan nu, i princippet, anvende den ovenstående Lagrange-funktionen for  $A$ , til at opskrive Euler-Lagrange-ligningerne for vores problem. Lad os i stedet udnytte at  $L(y, v_y, x)$  ikke afhænger af  $x$ , hvilket betyder at (1.43) med  $n$  givet ved (1.56), er en bevaret størrelse.

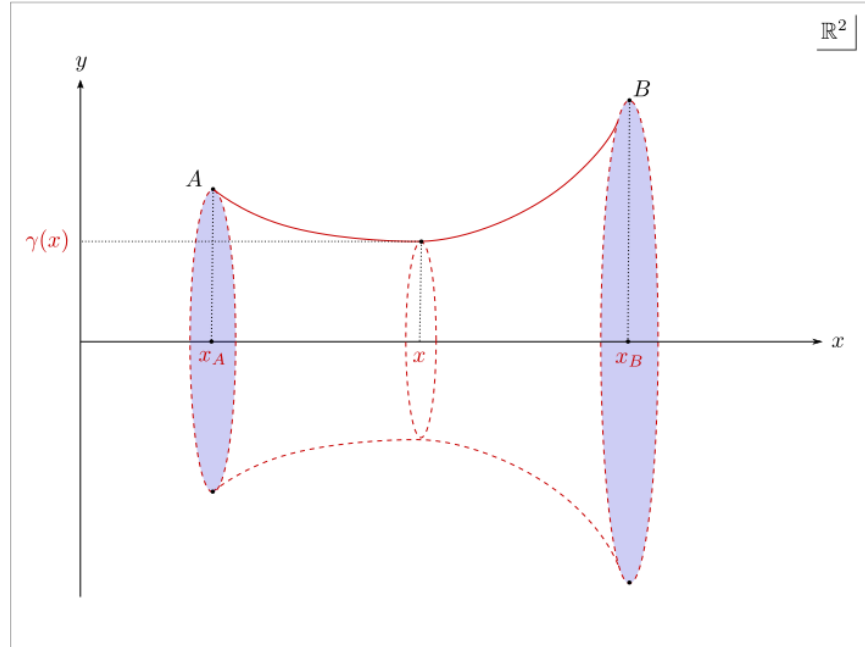
$$H(\gamma(x), \gamma'(x), x) = -\frac{2\pi \gamma(x)}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} = C \quad (1.57)$$

Hvor  $C \in \mathbb{R}$  kan betragtes som en integrationskonstant. Ved brug af ovenstående udtryk, finder vi nu følgende 1. ordens differentialligning for  $\gamma$ :

$$\gamma'(x) = \pm \sqrt{k^2 \gamma(x)^2 - 1} \quad , \quad k^2 \equiv \frac{4\pi^2}{C^2} \quad (1.58)$$

Da ovenstående ligning er separabel kan vi finde løsningskurven  $\gamma$  ved simpel integration:

$$\pm \int_{\gamma(x_A)}^{\gamma(x)} \frac{1}{\sqrt{k^2 w^2 - 1}} dw = \int_{x_A}^x dw \quad (1.59)$$



Figur 1.7: Den røde banekurve  $\gamma$  repræsenterer her meridiankurven hørende til den minimale sæbehinde overflade. Punkterne  $A$  og  $B$  er valgt sådan, at deres separation i retningen vinkelret på  $(x, y)$ -planen er 0.

Hvor vi har indført integrationsvariablen  $w$ . Integralet på højresiden er trivielt, mens integralet på venstresiden er givet i termer af den hyperbolske kosinusfunktion  $\cosh$ . Vi finder dermed følgende resultat, hvor vi også har gjort brug af randbetingelsen  $\gamma(x_A) = y_A$ :

$$\frac{1}{k} \left[ \cosh^{-1}(k\gamma(x)) - \cosh^{-1}(ky_A) \right] = x - x_A \quad (1.60)$$

Hvor  $k \in \mathbb{R}$ , og vi dermed ikke længere behøver  $\pm$  på venstresiden af det ovenstående udtryk. Det er nu en simpel sag at isolere  $\gamma(x)$  i ovenstående udtryk. Resultatet ser ud som følger.

$$\gamma(x) = \frac{\cosh \left[ k(x - x_A) + \cosh^{-1}(ky_A) \right]}{k} \quad (1.61)$$

Konstanten  $k$  kan nu bestemmes ved at gøre brug af den tilbageværende randbetingelse:

$$\gamma(x_B) = y_B \quad (1.62)$$

### 1.6.3 Det brakistokrone problem

Vi forestiller os nu en situation, hvor to punkter  $A$  og  $B$  er forbundet med en kurve  $\gamma$ . En partikel med masse  $m$  placeres nu i punktet  $A$  og bevæger sig, under påvirkning af tyngdekraften, langs  $\gamma$  til punktet  $B$ . Vi ønsker nu at bestemme  $\gamma$ , sådan at partiklens faldtid er mindst mulig.

Vi kan først udnytte at den mekaniske energi i 1-partikel systemet er bevaret, hvilket medfører at vi kan ækvivalere energien for *tiden*  $t_A$  og *tiden*  $t$ .

$$\frac{1}{2}m|\gamma'(t_A)|^2 - mg\gamma_y(t_A) = \frac{1}{2}m|\gamma'(t)|^2 - mg\gamma_y(t) \quad (1.63)$$

Hvor  $g$  er tyngdeaccelerationen og  $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}$  benævner normen af hastighedsvektoren  $\gamma'(t)$ . Antager vi at partiklen startes i hvile, sådan at  $\gamma'(t_A) = 0$ , og anvender randbetingelsen  $\gamma_y(t_A) = y_A$ , finder vi nu følgende udtryk for fald-tiden.

$$t_B - t_A = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\sqrt{2g(\gamma_y(t) - y_A)}} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad (1.64)$$

Hvor vi har anvendt energibevarelsen (1.63) til at indsætte et passende 1-tal, i det ovenstående integral. Faldtidsfunktionalen  $D$  kan dermed beskrives ved følgende udtryk:

$$D[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\sqrt{2g(\gamma_y(t) - y_A)}} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \quad (1.65)$$

Vi ser nu, at også fald-tids funktionalen  $D$  er et special tilfælde af rejsetidsfunktional  $T$  (1.26), i dette tilfælde med:

$$\frac{n(\gamma(t))}{c} = \frac{1}{\sqrt{2g(\gamma_y(t) - y_A)}} \quad (1.66)$$

Vi kan derfor også dimensionalt reducere funktional  $D$ , sådan at  $D[\gamma]$  er givet som et special tilfælde af (1.40).

$$D[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{\sqrt{2g(\gamma(t) - y_A)}} \sqrt{1 + \gamma'(t)^2} dx \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (1.67)$$

Det er igen simpelt at identificere Lagrange-funktionen  $L$  for den ovenstående funktional.

$$L(y, v_y, x) := \frac{n(y)}{c} \sqrt{1 + v_y^2} \quad , \quad \frac{n(y)}{c} = \frac{1}{\sqrt{2g(y - y_A)}} \quad (1.68)$$

Vi udnytter nu endnu en gang at  $L(y, v_y, x)$  ikke afhænger af  $x$ , hvilket betyder at (1.43) med  $n(y)$  givet ved (1.68), er en bevaret størrelse.

$$H(\gamma(x), \gamma'(x), x) = -\frac{1}{\sqrt{2g(\gamma(x) - y_A)}} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} = C \quad (1.69)$$

Hvor  $C \in \mathbb{R}$  igen kan betragtes som en integrationskonstant. Ved brug af ovenstående udtryk, finder vi nu følgende 1. ordens differentialligning for  $\gamma$ :

$$\gamma'(x) = \pm \sqrt{\frac{1 - k(\gamma(x) - y_A)}{k(\gamma(x) - y_A)}} \quad , \quad k \equiv 2g C^2 \quad (1.70)$$

Da ovenstående ligning er separabel kan vi finde løsningskurven  $\gamma$  ved simpel integration:

$$\pm \int_{\gamma(x_A)}^{\gamma(x)} \sqrt{\frac{k(w - y_A)}{1 - k(w - y_A)}} dw = \int_{x_A}^x dw \quad (1.71)$$

Hvor vi har indført integrationsvariablen  $w$ . Integralet på højresiden er igen trivielt, mens dette umiddelbart ikke er tilfældet for integralet på venstresiden. Dette integral kan dog bringes til en mere medgørlig form, ved at gennemføre følgende skift af integrationsvariabel:

$$k(w - y_A) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad dw = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (1.72)$$

Vi kan nu udregne integralet på venstresiden i termer af den nyligt indførte integrationsvariabel  $\theta$ . Resultatet bliver da følgende udtryk:

$$\pm \int_{\gamma(x_A)}^{\gamma(x)} \sqrt{\frac{k(z - y_A)}{1 - k(z - y_A)}} dz = \int_0^{\theta(x)} \frac{1}{k} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2k} [\theta(x) - \sin(\theta(x))] \quad (1.73)$$

Hvor  $k \in \mathbb{R}$ , og vi dermed ikke længere behøver  $\pm$  i ovenstående udtryk. Vi har i udregning ovenfor gjort brug af følgende dobbeltvinkel formel:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) \quad (1.74)$$

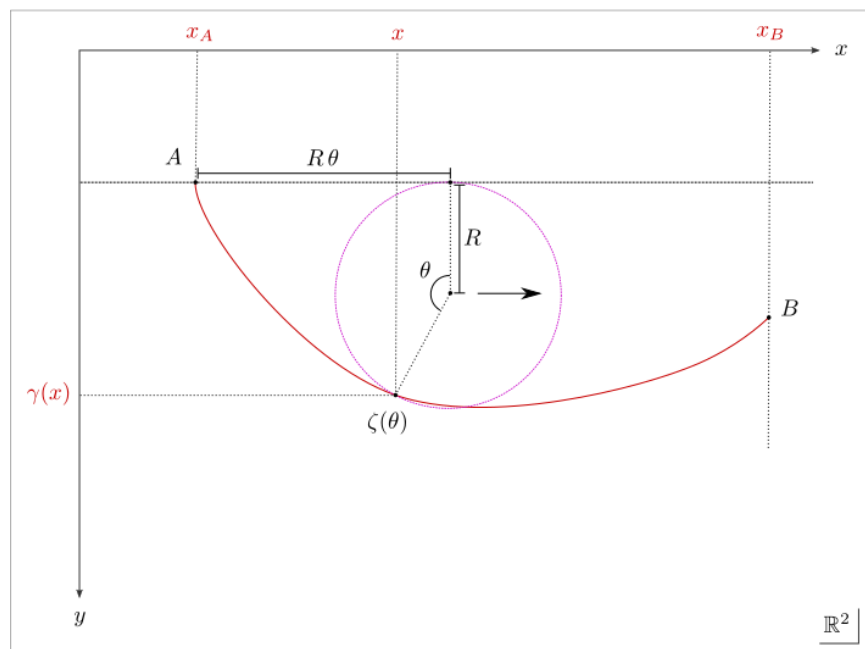
Desuden er størrelsen  $\theta(x)$ , på baggrund af (1.72), implicit defineret på følgende måde:

$$k(\gamma(x) - y_A) = \sin^2\left(\frac{\theta(x)}{2}\right) \quad (1.75)$$

Ved at kombinere (1.71, 1.73) og (1.74, 1.75), finder vi nu følgende trigonometriske udtryk for  $x$  og  $\gamma(x)$ , i termer af  $\theta(x)$ :

$$x = \frac{1}{2k} [\theta(x) - \sin(\theta(x))] + x_A \quad (1.76a)$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2k} [1 - \cos(\theta(x))] + y_A \quad (1.76b)$$



Figur 1.8: Den røde banekurve  $\gamma$  repræsenterer her cykloidestykket som forbinder punkterne  $A$  og  $B$ . Cykloiden genereres af den lille cirkel med radius  $R$  ved at følge punktet  $\zeta(\theta)$  på periferien når cirklen rulles langs den stiplede linje, liggende parallelt med  $x$ -aksen.

Vi kan nu i princippet løse for  $\theta(x)$  i ligning (1.76a), og derefter indsætte det fundene udtryk for  $\theta(x)$  i ligning (1.76b). Ser man på formen af (1.76a, 1.76b) virker det dog umiddelbart mere naturligt at beskrive vores løsning i form af en ny banekurve  $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , med komponentfunktioner  $\zeta_x$  og  $\zeta_y$ , sådan at:

$$\zeta_x(\theta) = \frac{1}{2k} [\theta - \sin(\theta)] + x_A \quad , \quad \zeta_y(\theta) = \frac{1}{2k} [1 - \cos(\theta)] + y_A \quad (1.77)$$

Vores løsningskurve  $\zeta$ , beskriver dermed et stykke af en *cykloide*, startende i punktet  $A$  og sluttende i punktet  $B$  (se figur 1.8), med radius:

$$R = \frac{1}{2k} \quad (1.78)$$

Konstanten  $k \in \mathbb{R}$  kan nu bestemmes ved brug af den tilbageværende randbetingelse, som nu tager følgende form når beskrevet i termer af  $\zeta$ :

$$\zeta_x(\theta_B) = x_B \quad , \quad \zeta_y(\theta_B) = y_B \quad (1.79)$$



## 1.7 Opgave: geodæter på hyperboloide

Vi søger i denne opgave den korteste vej mellem to punkter  $A$  og  $B$  på overfladen af en *hyperboloide*. En hyperboloide med struberadius  $R = 1$ , kan beskrives som mængden af punkter  $(x, y, z)$  i  $\mathbb{R}^3$ , der opfylder ligning:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (1.80)$$

Ovenstående ligning for hyperboloide-overfalden, kan løses ved følgende parameterisering:

$$x = \cos(\phi) \cosh(\omega) \quad (1.81a)$$

$$y = \sin(\phi) \cosh(\omega) \quad (1.81b)$$

$$z = \sinh(\omega) \quad (1.81c)$$

Hvor  $\omega \in \mathbb{R}$  og  $\phi \in S^1 = [0, 2\pi)$ . Opgaven kan nu med fordel løses i følgende trin:

1. Anvend ligningerne (1.81), og vis at linjeelementet  $ds^2$  på hyperboloide overfalden er beskrevet ved:

$$ds^2 = d\omega^2 + \cosh^2(\omega) d\phi^2 \quad (1.82)$$

Givet at linjeelementet i Euklidisk  $\mathbb{R}^3$  er beskrevet ved:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.83)$$

Følgende identiteter kan være nyttige at avende i dette trin.

$$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1 \quad , \quad \cosh^2(\omega) - \sinh^2(\omega) = 1 \quad (1.84)$$

2. Da vi har at gøre med en parameteriseret overfalde, kan vi med fordel snakke om banekurver  $\gamma$  gennem parameterrummet  $\mathbb{R} \times S^1$ , i stedet for banekurver gennem  $\mathbb{R}^3$ ; det rum hvor overfladen er indlejret. Fra linjeelementet (1.82) kan vi nu konkludere, at længden  $S[\gamma]$  af banekurven  $\gamma$  fra punktet  $(\omega_A, \phi_A)$  til punktet  $(\omega_B, \phi_B)$ , er givet ved:

$$S[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\gamma'_\omega(t)^2 + \cosh^2(\gamma_\omega(t)) \gamma'_\phi(t)^2} dt \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times S^1) \quad (1.85)$$

Hvor  $(\omega_A, \phi_A)$ ,  $(\omega_B, \phi_B)$  giver os punktene  $A$ ,  $B$  via (1.81). Efter dimensional reduktion, med parameter-skift  $\omega = \gamma_\omega(t)$ , finder vi at  $S[\gamma]$  nu kan skrives som:

$$S[\gamma] = \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sqrt{1 + \cosh^2(\omega) \gamma'(\omega)^2} d\omega \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, S^1) \quad (1.86)$$

Find nu Euler-Lagrange-ligningen for ovenstående funktional, og vis at den tager følgende form:

$$\frac{d}{d\omega} \left[ \frac{\cosh^2(\omega) \gamma'(\omega)}{\sqrt{1 + \cosh^2(\omega) \gamma'(\omega)^2}} \right] = 0 \quad (1.87)$$

3. Anvend nu ligning (1.87), og vis at  $\gamma'(\omega)$  opfylder følgende differentiaalligning.

$$\gamma'(\omega) = \frac{k}{\cosh^2(\omega) \sqrt{1 - k^2 + k^2 \tanh^2(\omega)}} \quad (1.88)$$

Hvor  $k \in \mathbb{R}$  er en integrationskonstant. Identiteterne (1.84) kan med fordel udnyttes til at vise ovenstående sammenhæng.

4. Efter integration af (1.88), finder vi at:

$$\gamma(\omega) - \gamma(\omega_A) = \int_{\omega_A}^{\omega} \frac{k}{\cosh^2(w) \sqrt{1 - k^2 + k^2 \tanh^2(w)}} dw \quad (1.89)$$

Hvor vi har indført integrationsvariablen  $w$ . Vis nu, at hvis vi udføre følgende skift af integrationsvariabel:

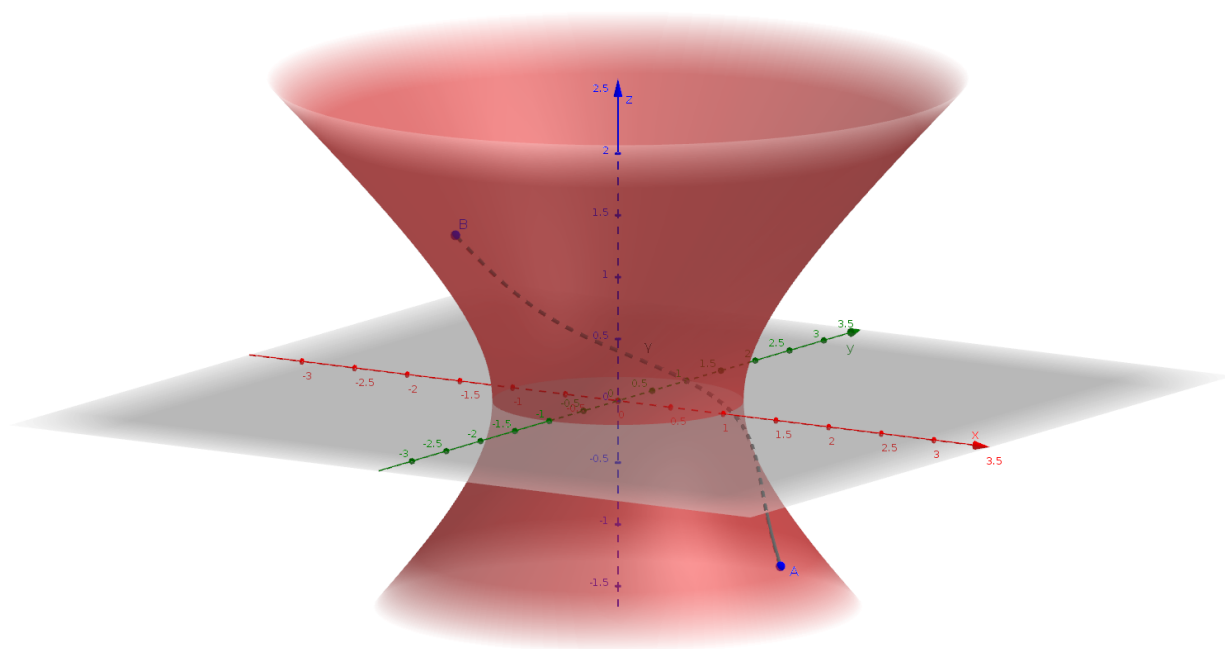
$$\alpha = \tanh(w) \quad (1.90)$$

Kan integralet i (1.89) bestemmes, og giver os følgende resultat:

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_A}^{\omega} \frac{k}{\cosh^2(w) \sqrt{1 - k^2 + k^2 \tanh^2(w)}} dw \\ &= \sinh^{-1} \left( \frac{k \tanh(\omega)}{\sqrt{1 - k^2}} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{k \tanh(\omega_A)}{\sqrt{1 - k^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.91)$$

Følgende differentialkvotienter for hyperbolske funktioner kan med fordel anvendes til at vise det ovenstående resultat:

$$\frac{d \sinh(w)}{dw} = \cosh(w) \quad , \quad \frac{d \cosh(w)}{dw} = \sinh(w) \quad , \quad \frac{d \sinh^{-1}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (1.92)$$



Figur 1.9: Den røde overfalde repræsenterer her hyperboloiden givet ved  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Den sorte stiplede linje  $\gamma$  repræsenterer den korteste vej fra punktet  $A$ :  $\omega_A = -1$ ,  $\phi_A = 0$ , til punktet  $B$ :  $\omega_B = 1$ ,  $\phi_B = \pi$ , på hyperboloideoverfladen.

5. Anvend nu (1.91) samt (1.89), og vis at:

$$\cosh(\omega) \sinh(\gamma(\omega) - \bar{\phi}) = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \sinh(\omega) \quad (1.93)$$

Hvor konstanten  $\bar{\phi}$  er givet ved:

$$\bar{\phi} = \gamma(\omega_A) - \sinh^{-1} \left( \frac{k \tanh(\omega_A)}{\sqrt{1 - k^2}} \right) \quad (1.94)$$

6. Find den korteste vej mellem punkterne  $A$ :  $\omega_A = -1$ ,  $\phi_A = 0$ , og  $B$ :  $\omega_B = 1$ ,  $\phi_B = \pi$ , på hyperboloideoverfladen, og skriv denne på formen (1.93).