

Fra Newton til Kvantemekanik

Rasmus Nielsen

Sidst redigeret: 27. februar 2022

I 1687 udgave Sir Isaac Newton sit epokegørende værk *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, hvori han beskrev sine 3 bevægelses-love, den universalle tyngde-lov, samt en udeledning af Keplers love om planeternes bevægelse. Disse opdagelser af Newton ligger uden tvivl i blandt de mest indflydelsesrige og banebrydende i hele fysikens historie. Specielt opdagelsen af Newtons 2. lov:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (1)$$

gjorde det nu muligt (*i principet*) at forudsige opførslen af et hvilket som helst mekanisk system, givet et sæt af kendte begyndelsesbetingelser. Et så præcist og utvetydig værktøj til beskrivelse af mekaniske systemers udvikling over tid, var hidtil uset i fysiken. Man kan med rette sige, at opdagelsen af Newtons love (*specielt Newtons 2. lov*) er oprindelsepunktet for al moderne fysik. Selv den dag i dag, mere end 300 år efter deres opdagelse, ser Newtons love anvendelse i mange praktiske så vel som teoretiske sammenhænge.

Men er Newtons 2. lov (1) den eneste måde at beskrive udviklingen af et fysisk system over tid? Svaret på dette spørgsmål viser sig at være nej! Der findes op til flere forskellige formuleringer af love, der alle forudsiger samme tidsudvikling som Newtons 2. lov, for et givent klassisk system. Man kan da spørge sig selv; hvad er ideén med at indføre disse *alternative formuleringer*, hvis de i sidste ende er ækvivalente med Newtons 2. lov? Det kan ved første øjekast fremstå som en overflødig tilføjelse til fysiken. Lad mig her præsentere 3 vigtige grunde til at alternative formuleringer fortjener deres plads i fysiken:

1. For et givent system, kan en eller flere af de alternative formuleringer være mindre teknisk tunge end Newtons 2. lov. Et godt eksempel er det klassisk *dobbelt-pendul*, som er nemere beskrevet ved hjælp af så kaldt *Lagrange mekanik*. Mange andre fysiske systemer med *begrænset frihed*, så som '*klods på skråplan på fladt underlag -systemet*', er ligeledes mindre tunge at analysere i rammer af *Lagrange mekanik*.
2. De alternative formuleringer kan give ny indsigt i allerede kendt fænomener. Et godt eksempel er forbindelsen mellem *bevarelses love* og *symmetrier* i et system. For eksempel vil der være *impuls-bevarelse* i et system, præcis når systemet besidder *translations-symmetri*. Disse sammenhænge beskrives lettest ved hjælp af *Lagrange mekanik*.

3. I opdagelsen af *nye fysiske love*, har alternative formuleringer fungeret som uvurderlige kilder til inspiration. Her er det primære eksempel *kvantemekanikken*, hvis formulering er stærkt indspireret af såkaldt *Hamilton mekanik*. Et andet eksempel er i formuleringen af *statistiske fysik*; grenen af fysiken som sammenkobler mekanik og termodynamik, hvor mange koncepter fra Hamilton mekaniken er komplet uunværlige.

Det kan desuden tilføjes, at både Lagrange og Hamilton mekanik er langt mere velegnede som fundamenter for mange grene af den moderne fysik. et par eksempler på hvilke er:

- Faststof fysik (*kan beskrive fx laserer og transistorer*)
- Partikelfysik (*førte til opdagelsen af Higgs partiklen samt resten af Standardmodellen*)
- General relativitetsteori (*kan beskrive fx sort huller og universets udvidelse*)
- Streng-teori (*en af de få kendte teori, som kan beskrive tyngdekraft kvantemekanisk*)

Disse argumenter burde være tilstrækkelige til at overbevise selv de mest konservativt stemte, om anvendeligheden af de alternative formuleringer for den klassiske fysik. Med det sagt, vil vi nu give en kort oversigt over indholdet af disse noter:

- **Kapitel 1:** Motivation for indførelsen af *variations-regning*, samt udvikling af vigtige koncepter indenfor denne gren af matematiken.
- **Kapitel 2:** Introduktion til *Lagrange mekaniken* samt *princippet om mindste virkning*. Vi vil desuden diskutere sammenhængen mellem *symmetrier* og *bevarelses love*.
- **Kapitel 3:** Introduktion til *Hamilton mekaniken* og idéen om *fase-rum*. Vi vil kort beskrive hvordan Hamilton mekaniken ledte til en af de første formuleringer af *kvante mekaniken*.

Vi er nu klar til begynde vores rejse fra Newton til kvante mekanik. Vi tager udgangspunkt i et interessant princip, udtænkt af den franske matematiker og advokat Pierre de Fermat.

Kapitel 1

Fermat's princip og variationsregning

I 1662, 25 år før udgivelsen af *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, arbejdede matematikeren Pierre de Fermat på at forstå afbøjning af lys, passerende fra et medium til et andet. Det havde på dette tidspunkt været kendt i mere end 600 år, at normal-vinklen for en indkommende lysstråle og normal-vinklen for den tilhørende udgående lysstråle er relateret på følgende måde (*se fig. 1.1 for illustration*).

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.1)$$

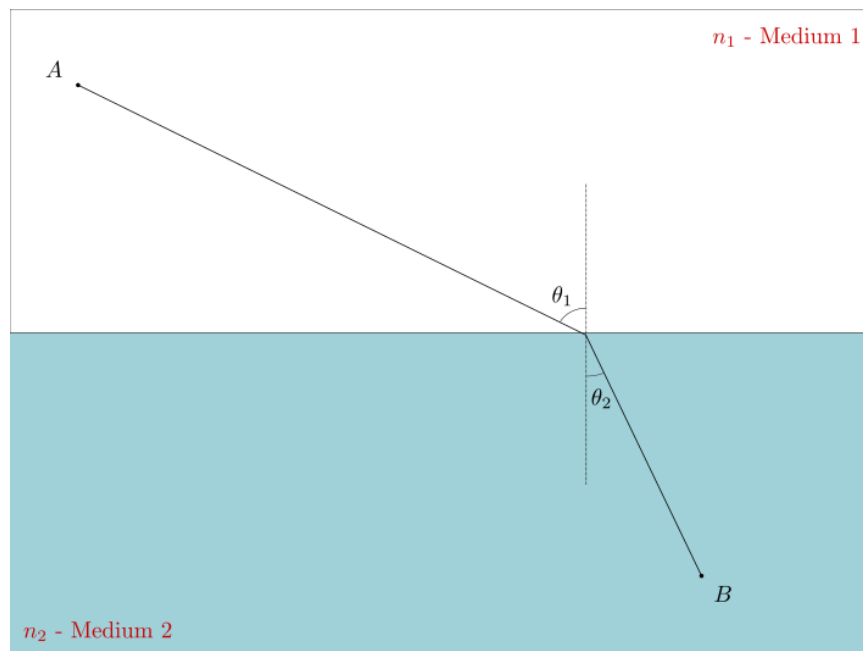
Størrelserne n_1 , n_2 er de såkaldte *brydnings-indekser* for medium 1 og 2 respektivt, og kan bestemmes ud fra de elektro-magnetiske egenskaber for de givne medier. Brydningsindekserne relaterer lyshastighederne i medium 1 og 2 til lyshastigheden i vakuum.

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \quad , \quad v_2 = \frac{c}{n_2} \quad (1.2)$$

Hvor $c \approx 10^8$ m/s, er lyshastigheden i vakuum. Sammenhængen (1.1) er typisk kendt under navnet *Snell's lov*. Fermat's bidrag til forståelsen af lyssets brydning i passagen fra et medium til et andet, var formuleringen af følgende princip:

Princip (Fermat). *En lysstråle der udsendes fra punktet A til tiden t_A , og dedekteres ved punktet B til tiden t_B , vil følge den vej fra A og B som minimerer størrelsen $T \equiv t_B - t_A$. Med andre ord: lyset følger den vej fra A til B som tager kortest tid.*

Lad os i første omgang påpeje, at det ovenstående Fermat's princip er konsistent med vores erfaring om at lys følger rette linjer gennem rummet, hvis det ikke passerer fra et medium



Figur 1.1: Eksempel på afbøjning af lys, passerende fra et medium til et andet.

til et andet. Dette er nemt at se, siden der for enhver vej gælder at lyshastigheden v i det givne medium er konstant. Dermed er tiden T det vil tage at gennemløbe en hver vej i mediet, givet ved følgende.

$$T = \frac{L}{v} \quad (1.3)$$

Hvor L er længden af vejen. Vi ser dermed at T er minimal når L er minimal, og siden den korteste vej mellem to punkter er en ret linje har vi overensstemmelse. Det er ligeledes muligt at udlede Snell's lov (1.1) ved brug af Fermat's princip om minimering af rejsetiden. Dette efterlades, med lidt vejledning, som en opgave til læseren 1.2.

Lad os nu påpeje en interessant konceptuel forskel på Snell's lov og Fermat's princip. Snell's lov beskriver hvad lyset gør *lokalt*; nævnlige hvordan det abøjes i passagen fra et medium til et andet. Derimod beskriver Fermats princip en *global* egenskab ved den vej lyset følger; nævnlige at denne vej minimere rejsetiden fra A til B . Fermat's princip kan altså tænkes på som en form for minimeringsproblem, og vi vil nu vise hvordan det kan reformuleres som sådan.

1.1 Reformulering af Fermat's princip

Lad os i første omgang definere et passende matematiks object til beskrivelse af en lysstråles propagation gennem rummet.

Definition 1. En bane-kurve er en funktion $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, der til et hvert tidspunkt $t \in \mathbb{R}$ beskriver positionen $\gamma(t)$ for en given lysfront.

Vi vil antage at alle relevante bane-kurver er p gange kontinuert differentiabel. Vi siger at kurven γ er et element i sættet $C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, bestående af p gange kontinuert differentiabel funktioner fra \mathbb{R} til \mathbb{R}^3 .

Vi vil, indtil et senere punkt i vores analyse, lade p forblive ufastlagt. Det vil på nuværende tidspunkt være passende at indføre en ofte anvendt notation; den såkaldte 'mærke notation'. Vi vil med γ' , benævne den 1. afledte af funktionen γ . Vi vil ligeledes med γ'' , benævne den 2. afledte osv. Vi vil desuden med $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}$, benævne normen af hastighedsvektoren $\gamma'(t)$, defineret udfra det sædvanlige skalar-produkt i \mathbb{R}^3 . Vi er nu klar til næste definition.

Definition 2. En brydning-indeks fordeling er en funktion $n : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, der til et hvert punkt $x \in \mathbb{R}^3$, tilknytter brydnings-indekset $n(x)$ for det givne punkt i et materiale.

For enhver tilladt bane-kurve γ , og et hvert punkt $\gamma(t)$ på denne bane-kurve, vil hastigheden $\gamma'(t)$ i dette punkt være relateret til brydning-indekset $n(\gamma(t))$ i samme punkt:

$$n(\gamma(t)) = \frac{c}{|\gamma'(t)|} \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

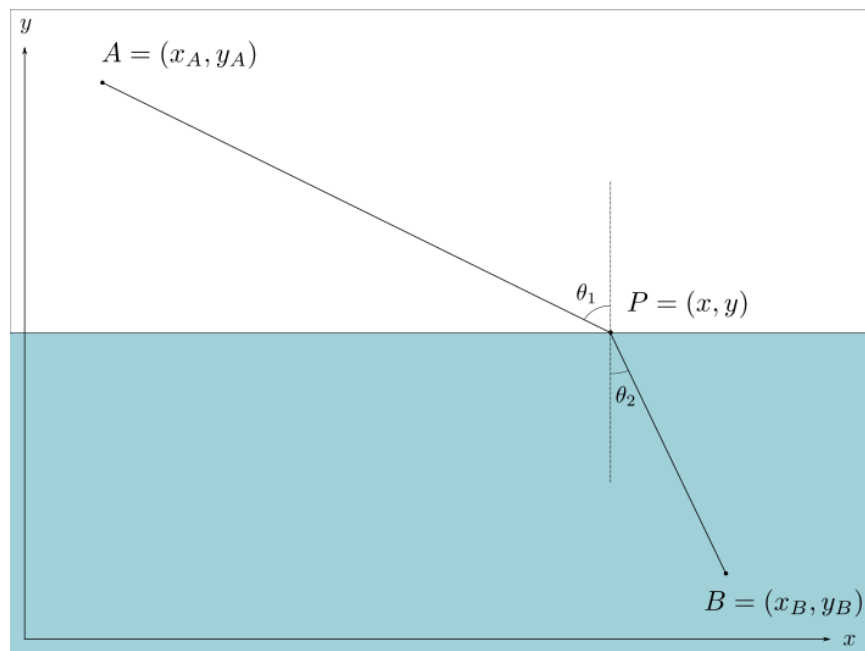
Ovenstående sammenhæng er analog til (1.2) for tilfældet med konstante brydnings-indekser.

Vi kan nu inføre den sidste, og mest centrale, størrelse i vores matematiserings process.

Definition 3. Den såkaldte rejse-tids funktional er en funktion $T : C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$, der til enhver bane-kurve $\gamma \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, for hvilken $\gamma(t_A) = A$ og $\gamma(t_B) = B$, tilknytter rejse-tiden fra punktet A til punktet B langs γ :

$$T[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{t_A}^{t_B} n(\gamma(t)) \frac{|\gamma'(t)|}{c} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{n(\gamma(t))}{c} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad (1.5)$$

Hvor vi har anvendt (1.4) til at indsætte et passende 1-tal i det ovenstående integral.



Figur 1.2: Propagation af lys gennem to medier, med overgangspunkt $P = (x, y)$.

Vi kan nu give en mere matematisk præcis reformulering af Fermat's princip, ved hjælp af vores nyeligt indførte rejse-tids funktional T .

Princip (Fermat, Ref.). *En lysstråle der udsendes fra punktet A til tiden t_A og dedekteres ved punktet B til tiden t_B , vil følge kurven $\gamma \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, således at $T[\gamma]$ er minimal.*

Opgaven med at finde den vej en lysstråle vil rejse fra punktet A til punktet B er altså, i følge Fermat's princip, ækvivalent med at minimere rejse-tids funktionen T over mængden af alle bane-kurver γ , for hvilke $\gamma(t_A) = A$ og $\gamma(t_B) = B$. Hvordan man rent matematisk bærer sig ad med at udføre en sådan minimering er et interessant spørgsmål, som vi snart skal se har stor relevans for alternative formuleringer af den klassiske mekanik.

1.2 Opgave: udledning af Snell's lov

Anvend Fermat's princip til at udlede sammenhængen (1.1), idet lys passerer fra et medium med brydnings-indeks n_1 til et andet medium med brydnings-indeks n_2 . Opgaven kan med fordel løses i følgende trin:

- Opskriv et udtryk for rejse-tiden T fra A til B , som funktion af x og andre indgående parametre (se fig. 1.2).
- Vi har nu et minimerings problem i én reel variable x , og vi kan opstille ligningen:

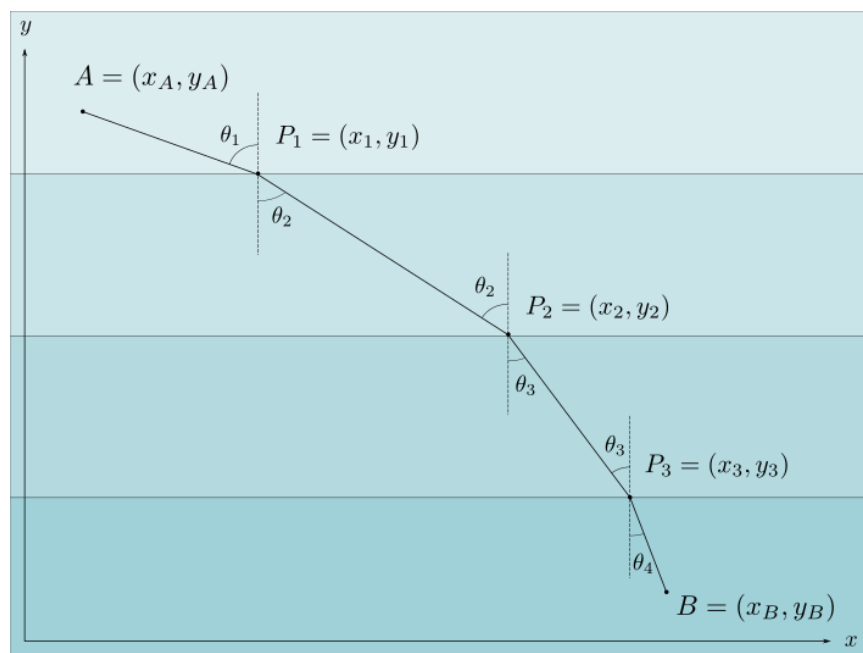
$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad (1.6)$$

Omskriv nu ovenstående ligning i termer af n_1 , n_2 , $\sin \theta_1$ og $\sin \theta_2$. Fig. 1.2 kan med fordel anvendes som reference for geometriske betragtninger.

- Generaliser til tilfældet hvor en lysstråle passere gennem flere medier med forskellige brydnings-indekser. Opstil rejse-tiden T som funktion af x_1, x_2, \dots, x_n . Opstil derefter ligningerne:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.7)$$

Omskriv ovenstående ligninger i termer af n_1, n_2, \dots, n_n og $\sin \theta_1, \sin \theta_2, \dots, \sin \theta_n$. Fig. 1.3 kan med fordel anvendes som reference for geometriske betragtninger.



Figur 1.3: Propagation af lys gennem flere medier, med overgangspunkter $P_i = (x_i, y_i)$.

1.3 Ekstremering af funktionaler

En funktion af typen $T : C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, der som input tager en anden funktion af typen $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, for $n \in \mathbb{N}$, kaldes ofte for en *funktional*. Der findes utallige situationer inden for både matematikken og fysikken, hvor man har brug for at finde ekstremal-funktioner for en given funktional; altså funktioner som ekstremerer denne funktional. Det er derfor af stor praktisk interesse at kunne finde disse ekstremal-funktioner på en systematisk måde. For en generisk funktional er dette dog et meget svært problem, og en generel fremgangsmåde er, om ikke andet for denne forfatter, ukendt. Det viser sig imidlertid at der findes en mere medgørlig delmængde af alle funktionaler, for hvilke der findes en konkret strategi for bestemmelse af ekstremal-funktioner. Denne delmængde er funktionaler af følgende type:

$$F[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) dt \quad (1.8)$$

Hvor funktionen $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, kaldes funktionalens *Lagrange-funktion*. Funktionaler af ovenstående type kan for den uindviede læser virke som en meget begrænset delmængde af alle funktionaler. Det viser sig dog at et overvældende flertal af fysisk relevante funktionaler falder indenfor denne klasse. Vi har allerede set ét eksempel på en sådan fysisk relevant

funktional; nævnlige rejse-tids funktionen T , som præcis er på formen (1.8), med $n = 3$, parameteren t identificeret med *tiden*, og Lagrange-funktion:

$$L(x, v, t) := \frac{n(x)}{c} \sqrt{v \cdot v} \quad (1.9)$$

Vi vil senere i dette kapitel diskutere flere eksempler på fysiske problemstillinger, som involvere bestemmelse af ekstremal-funktioner for funktioner af typen (1.8). I første omgang må vi dog undersøge præcis hvordan det lader sig gøre at bestemme ekstremal-funktioner for funktioner af typen (1.8). I analog til problemet om bestemmelse af ekstremal-værdier for funktioner af typen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vil vi som udgangspunkt fokusere på bestemmelse af *stationære* funktioner til en given funktional F . For en funktion af typen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kan stationærhed defineres på følgende måde:

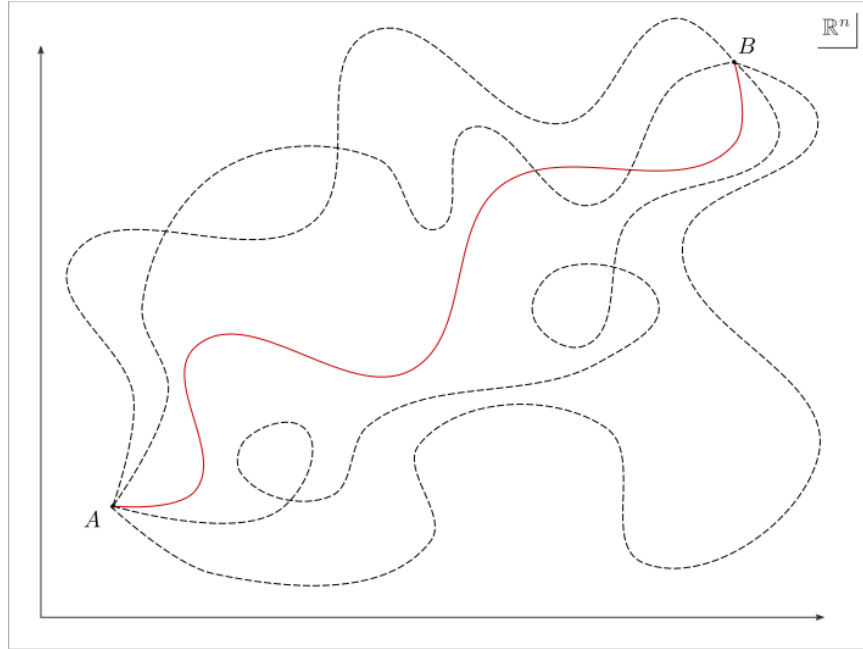
$$x \text{ er et stationært punkt for } f \iff \left. \frac{df(x + \varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.10)$$

(Det ses ved brug af kædereglene, at ovenstående er ækvivalent med standard definitionen.).

Men hvad præcis udgøre en brugbar definition af stationærhed for funktioner? Svaret på dette spørgsmål vil vi nu forsøge at motivere så klart som muligt. Vi vil derefter vise hvordan stationære funktioner, for funktioner af typen (1.8), kan bestemmes ved hjælp af de såkaldte *Euler-Lagrange ligninger*, tilhørende disse funktioner.

1.4 Stationære funktioner: Euler-Lagrange ligninger

Lad os først forsøge at motivere definitionen af stationærhed for funktioner. Antag først at der findes en funktion $\gamma \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ for hvilken F er stationær, på trods af at vi endnu ikke præcis ved hvad det vil sige. Vælg nu en *perturbations-funktion* $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, for hvilken $\eta(t_A) = 0$ og $\eta(t_B) = 0$. Den sidste antagelse er grundet af, at man oftest ønsker at optimere F over kun de bane-kurver som opfylder: $\gamma(t_A) = A$ og $\gamma(t_B) = B$. Dette var for eksempel tilfældet for Fermat's princip, hvor vi fokuserede på lysstråler startende fra punktet A og slutende i punktet B .



Figur 1.4: Eksempler på mulige bane-kurver gennem \mathbb{R}^n fra punktet A til punkt B . Stiplede kurver repræsenterer ikke-stationære baner mht. funktionalen F , mens den røde kurve repræsenterer en stationær bane.

For en given stationær funktion γ og perturbations-funktion η , kan $F[\gamma + \varepsilon \eta]$ betragtes som en funktion fra $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, og $F[\gamma + \varepsilon \eta]$ kan dermed differentieres på sædvanlig vis. Et oplagt krav til en hver fornuftig definition af stationærhed for F vil dermed være:

$$\gamma \text{ er en stationær funktion for } F \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dF[\gamma + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.11)$$

Taylor-udviklingen af funktionen $F[\gamma + \varepsilon \eta]$ omkring inputet γ , har altså intet 1. ordens led:

$$F[\gamma + \varepsilon \eta] = F[\gamma] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (1.12)$$

Hvilket præcist er tilfældet for en funktion af typen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, med stationært punkt x :

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (1.13)$$

Den opmærksomme læser vil måske have bemærket, at implikationspil i (1.11) kun går den éne vej. Dette skyldes at der sagtens kunne eksistere en anden perturbations-funktion η , opfyldende $\xi(t_A) = 0$ og $\xi(t_B) = 0$, således at:

$$\left. \frac{dF[\gamma + \varepsilon \xi]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \neq 0 \quad (1.14)$$

findes Det vil i dette tilfælde ikke give mening at kalde γ for en stationær funktion for F , af den simple årsag at $F[\gamma + \varepsilon \xi]$ ikke er stationær for $\varepsilon = 0$. Løsningen på dette problem er simpel. Vi definerer en funktion γ som værende en stationær funktion for funktionalen F , hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\gamma \text{ er en stationær funktion for } F \iff \forall \eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \left. \frac{dF[\gamma + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (1.15)$$

Hvor det i ovenstående definition stadig er påkrævet at $\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0$. Med denne definition er vi sikret at (1.12) er opfyldt, ligegyldigt hvilken perturbations-funktion η vi benytter. Lad os nu forsøge at anvende definitionen (1.15) til at bestemme de stationære funktioner for F . Ved anvendelse af den antagede form (1.8) for F , finder vi at.

$$\left. \frac{dF[\gamma + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_A}^{t_B} \left. \frac{dL(\gamma(t) + \varepsilon \eta(t), \gamma'(t) + \varepsilon \eta'(t), t)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} dt \quad (1.16)$$

For fast t kan vi betragte $\gamma(t) + \varepsilon \eta(t)$ og $\gamma'(t) + \varepsilon \eta'(t)$ som funktioner fra $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor ε spiller rollen som uafhængig variabel. Da Lagrange-funktionen L tager $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sådan at $(x, v, t) \mapsto L(x, v, t)$, har vi i ovenstående udtryk brug for at anvende *kæde-reglen* for funktioner af mere end én reel variable. Lad os til dette formål indføre følgende notation:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad , \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \quad (1.17)$$

$$\gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_i(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad , \quad \gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.18)$$

$$\eta(t) := (\eta_1(t), \eta_1(t), \dots, \eta_i(t), \dots, \eta_n(t)) \quad , \quad \eta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.19)$$

Lad os for et øjeblik indføre de to hjælpe-størrelser $z = \gamma(t) + \varepsilon \eta(t)$ og $w = \gamma'(t) + \varepsilon \eta'(t)$, for at lette notationen. Ved brug af kæderegele for funktioner af flere variable på integranden i udtryk (1.16), finder vi nu følgende.

$$\left. \frac{dL(z, w, t)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L(z, w, t)}{\partial x_i} \frac{dz_i}{d\varepsilon} + \frac{\partial L(z, w, t)}{\partial v_i} \frac{dw_i}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \quad (1.20)$$

Ud fra definitionerne $z = \gamma(t) + \varepsilon \eta(t)$ og $w = \gamma'(t) + \varepsilon \eta'(t)$, ses det nu umiddelbart at:

$$z|_{\varepsilon=0} = \gamma(t) \quad , \quad \left. \frac{dz_i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \eta_i(t) \quad (1.21)$$

$$w|_{\varepsilon=0} = \gamma'(t) \quad , \quad \left. \frac{dw_i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \eta'_i(t) \quad (1.22)$$

Ved brug af de ovenstående resultater samt (1.20), kan vi nu opskrive følgende udtryk for den afledte funktion af $F[\gamma + \varepsilon \eta]$, evalueret ved $\varepsilon = 0$.

$$\left. \frac{dF[\gamma + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial x_i} \eta_i(t) + \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} \eta'_i(t) \right] dt \quad (1.23)$$

Ved delvis integration af andet led, og ved brug af $\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0$, finder vi nu følgende:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF[\gamma + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} \right] \eta_i(t) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} \eta_i(t) \right]_{t_A}^{t_B} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} \right] \eta_i(t) dt \end{aligned} \quad (1.24)$$

Hvis ovenstående udtryk, per definition (1.15), skal være lig 0 for alle $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ for hvilke $\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0$, er vi nu tvunget til at konkludere, at kombinationen af partielt afledte i den firkantede parentes må være lig 0 for alle $t \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (1.25)$$

Dette sæt af koblede ordinære differential-ligninger er *Euler-Lagrange ligningerne* tilhørende funktionalen F givet ved (1.8). Vi ser på dette stadige i vores analyse, at $p \geq 2$, samt at Lagrange-funktionen L må kræves at være mindst én gang kontinuert differentiable.

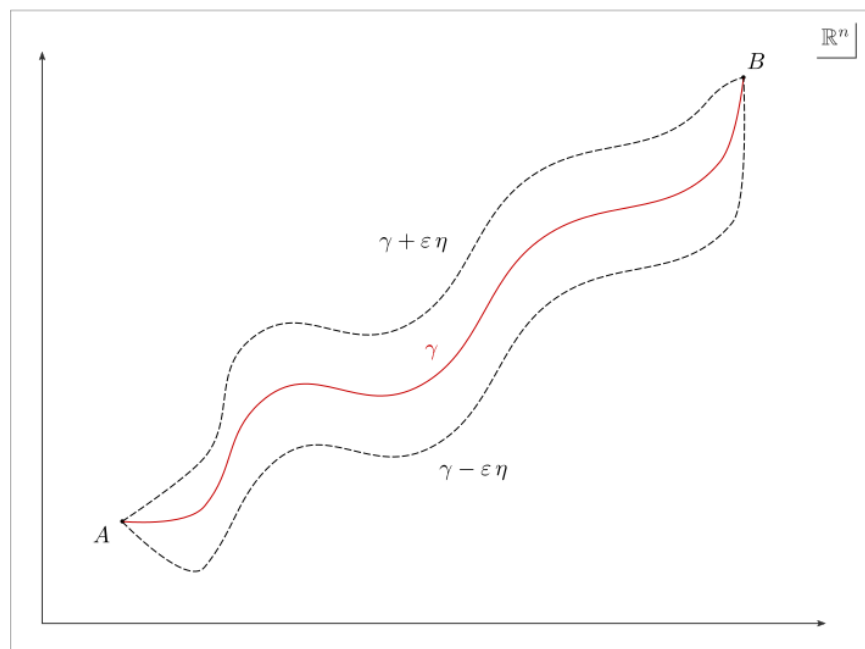
1.5 Analyse af rejse-tids funktionalen

Lad os nu anvende vores nye værktøj; Euler-lagrange ligningerne, til at løse vores motiverende problem; nævnlige at finde de stationære funktioner for rejse-tids funktionalen T :

$$T[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) dt \quad , \quad L(x, v, t) = \frac{n(x)}{c} \sqrt{v \cdot v} \quad (1.26)$$

Vi finder nu de partielt afledte af Lagrange-funktionen. Resultatet er følgende udtryk.

$$\frac{\partial L(x, v, t)}{\partial x_i} = \frac{1}{c} \frac{\partial n(x)}{\partial x_i} \sqrt{v \cdot v} \quad , \quad \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v_i} = \frac{n(x)}{c} \frac{v_i}{\sqrt{v \cdot v}} \quad (1.27)$$



Figur 1.5: Eksempel på en variation af banen γ , med endepunkterne A og B , ved brug af funktionen $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, hvor $\eta(t_A) = 0$, $\eta(t_B) = 0$ og $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Vi kan nu indsætte de ovenstående udtryk for de partielt afledte i Euler-Lagrange ligningerne (1.25). Resultatet er følgende differential-ligninger.

$$\frac{d}{dt} \left[n(\gamma(t)) \frac{\gamma'_i(t)}{\sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}} \right] = \frac{\partial n(\gamma(t))}{\partial x_i} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} \quad (1.28)$$

Alt vi nu i princippet skal gøre for at bestemme de stationære funktionen for rejse-tids funktionalen T , er at løse det ovenstående sæt af differential-ligninger, med randbetingelserne $\gamma(t_A) = A$ og $\gamma(t_B) = B$. I praksis er det dog stadig et svært problem at løse disse ligninger, med mindre $n(x)$ er ekstraordinært simpel. Vi vil derfor nu introducere to vigtige idéer, som signifikant letter vores analyse af rejse-tids funktionalen.

1.5.1 Hamilton-funktionen

En hver person, som har beskæftiget sig med problem analyse i den klassiske fysik, ved at bevarelses-love (*eksempelvis for impuls og energi*) typisk simplificere en given problemstilling dræstisk. På samme måde kan bevarelses-love simplificere vores funktional analyse. Specifikt

kan det vises, at givet den såkladte *Hamilton-funktion* $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$H(x, v, t) = \sum_{i=1}^n \left[v_i \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v_i} \right] - L(x, v, t) \quad (1.29)$$

Da vil $H(\gamma(t), \gamma'(t), t)$ være en bevaret størrelse, hvis følgende 2 betingelser er opfyldte:

1. Funktionen γ er en løsning til Euler-Lagrange ligningerne (1.25).
2. Lagrange-funktionen L afhænger ikke explicit af t . Med andre ord:

$$\frac{\partial L(x, v, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.30)$$

Lad os nu demonstrerer at $H(\gamma(t), \gamma'(t), t)$ er en bevaret størrelse, givet at de ovenstående betingelser er opfyldt. Ved brug af multi variabelle kæde-reglen finder vi at:

$$\begin{aligned} \frac{dH(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left[\gamma''(t) \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} + \gamma'(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial x_i} \gamma'(t) + \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial v_i} \gamma''(t) \right] \\ &\quad - \frac{\partial L(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ved anvendelse af Euler-Lagrange ligningerne (1.25) samt vores antagelse om explicit t uafhængighed (1.30), kan vi nu konkludere at:

$$\frac{dH(\gamma(t), \gamma'(t), t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(\gamma(t), \gamma'(t), t) = C \quad , \quad C \in \mathbb{R} \quad (1.32)$$

Vi kunne nu i princippet udregne Hamilton-funktionen for rejse-tids funktionalen T . På dette stadige af vores analyse ville dette dog ikke hjælpe os meget. Dette skyldes at Hamilton-funktionen, udregnet på baggrund af Lagrange-funktionen (1.26), er identisk 0. Denne udregning er simpel, og vi opfordre læseren til udføre udregningen ved brug af definition (1.29). Årsagen til dette lidt mystiske resultat, skyldes i sidste ende såkaldt *reparameteriserings invariants* af rejse-tids funktionalen. Vi vil på dette tidspunkt ikke diskutere denne type af symmetri, da problemet med Hamilton-funktionen forsvinder efter indførelsen af vores næste simplificerende koncept.

1.5.2 Dimensionel reduktion

Når det kommer til evaluering af integraler, kan det ofte betale sig at foretage et passende koordinat-skift. Det samme kan siges ift. funktional analyse, hvor et passende koordinat-skift potentielt kan simplificere Lagrange-funktionen. Idéen bag såkaldt *dimensional reduktion*, er at foretage følgende skifte af integrations-variable.

$$x_1 = \gamma_1(t) \quad \Rightarrow \quad t = \gamma_1^{-1}(x_1) \quad (1.33)$$

Hor γ er input funktionen for den givne funktional, og γ_1 er 1. komponenten af γ . For at kunne foretage det ovenstående variable skift, må vi antage at γ_1 er bijektiv; altså at γ_1^{-1} eksisterer. Dette er ækvivalent med forudsætningen om at γ_1 er en monotont-voksende funktion. Dette er en yderst rimelig forudsætningen i mange sammenhænge, som vi snart skal se. Lad os først foretage variable skiftet fra t til x_1 i funktionalen:

$$T[\gamma] = \frac{1}{c} \int_{t_A}^{t_B} n(\gamma(t)) \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad (1.34)$$

Vi kan nu med fordel definere nye bane-kurve funktioner $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, sådan at $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \gamma_1^{-1}$. Dermed ses det umiddelbart at:

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma} \circ \gamma_1(t) = \tilde{\gamma}(\gamma_1(t)) = \tilde{\gamma}(x_1) \quad (1.35)$$

Ved brug af kæde-reglen finder vi desuden at γ' og $\tilde{\gamma}'$ er relateret på følgende simple måde.

$$\gamma'(t) = (\tilde{\gamma} \circ \gamma_1)'(t) = \tilde{\gamma}'(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) = \tilde{\gamma}'(x_1) \gamma_1'(t) \quad (1.36)$$

Vi kan nu på sædvanlig vis finde Jacobaint-faktoren der relaterer de to mål dt og dx_1 .

$$x_1 = \gamma_1(t) \quad \Rightarrow \quad dx_1 = \gamma_1'(t) dt \quad (1.37)$$

Dermed finder vi at output-værdien $F[\gamma]$ for funktionalen F , kan omkrives til følgende.

$$\begin{aligned} T[\gamma] &= \frac{1}{c} \int_{x_{1;A}}^{x_{1;B}} \frac{n(\tilde{\gamma}(x_1))}{\gamma_1'(t)} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 \tilde{\gamma}'(x_1) \cdot \tilde{\gamma}'(x_1)} dx_1 \\ &= \frac{1}{c} \int_{x_{1;A}}^{x_{1;B}} n(\tilde{\gamma}(x_1)) \sqrt{\tilde{\gamma}'(x_1) \cdot \tilde{\gamma}'(x_1)} dx_1 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Hvor $x_{1;A} = \gamma_1(t_A)$ og $x_{1;B} = \gamma_1(t_B)$. Observer nu at 1. komponenterne for $\tilde{\gamma}$ og $\tilde{\gamma}'$ effektivt set er elimineret som frihedsgrader, da de i følge (1.35, 1.36) altid antager følgende værdier:

$$\tilde{\gamma}_1(x_1) = \gamma_1 \circ \gamma_1^{-1}(x_1) = x_1 \quad , \quad \tilde{\gamma}'_1(x_1) = \frac{\gamma'_1(t)}{\gamma'_1(t)} = 1 \quad (1.39)$$

Bane-kruve funktionen $\tilde{\gamma}$ og dens afledte $\tilde{\gamma}'$ er altså effektivt set funktioner fra $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, hvor vi i dette tilfælde har $n = 3$. Vi har altså reduceret dimensionen af billede-rummet for bane-kruve funktionerne med én. Rejse-tids funktionalen T kan nu ækvivalent beskrives i termer af $C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1})$ bane-kruve funktioner. Resultatet er følgende reducerede udtryk:

$$T[\gamma] = \frac{1}{c} \int_{x_{1;A}}^{x_{1;B}} n(x_1, \gamma(x_1)) \sqrt{1 + \gamma'(x_1) \cdot \gamma'(x_1)} dx_1 \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1}) \quad (1.40)$$

Hvor randbetingelserne for input funktionerne nu er $(x_{1;A}, \gamma(x_{1;A})) = A$, $(x_{1;B}, \gamma(x_{1;B})) = B$. Lad os nu forsøge at finde Hamilton-funktionen H hørende til ovenstående funktional. Vi finder først de nødvendige partielt afledte af Lagrange-funktion L .

$$L(x, v, x_1) = \frac{n(x_1, x)}{c} \sqrt{1 + v \cdot v} \quad , \quad \frac{\partial L(x, v, x_1)}{\partial v_i} = \frac{n(x_1, x)}{c} \frac{v_i}{\sqrt{1 + v \cdot v}} \quad (1.41)$$

Hvor vi nu har $x = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ og $v = (v_2, v_3, \dots, v_n)$. Vi kan nu finde et udtryk for Hamilton-funktionen H ved brug af definitionen (1.29), hvor t erstattes med x_1 :

$$H(x, v, x_1) = \frac{n(x_1, x)}{c} \frac{v \cdot v}{\sqrt{1 + v \cdot v}} - \frac{n(x_1, x)}{c} \sqrt{1 + v \cdot v} = -\frac{n(x_1, x)}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + v \cdot v}} \quad (1.42)$$

Såfremt brydnings-indeksfunktionen $n(x_1, x)$ ikke afhænger af parameteren x_1 (*vi skriver i dette tilfælde blot $n(x)$ for brydningsindex-funktionen*), har vi nu formået at finde en bevaret størrelse for det dimensionelt reducerede rejse-tids problem:

$$H(\gamma(x_1), \gamma'(x_1), x_1) = -\frac{n(\gamma(x_1))}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma'(x_1) \cdot \gamma'(x_1)}} = C \quad , \quad C \in \mathbb{R} \quad (1.43)$$

For nu et dette enden på vores analyse af Fermat's princip og rejse-tids problemet. Motiveret af dette problem har vi udledt *Euler-Lagrange ligningerne*, vist at *Hamilton-funktion* kan give os en nyttig bevaret størrelse, og kort diskuteret *dimensionel reduktion*. Alle disse værktøjer vil visse sig uundværlige når vi i senere kapitler vil begynde introduktionen til alternative formuleringer af den klassiske mekanik. I resten af dette kapitel vil vi beskæftige os med at løse en række interessante variations-problemer ved brug af vores nye værktøjer.

1.6 Flere eksempler på variations-problemer

Vi vil nu analysere tre kendte variations-problemer. Alle tre problemer kan formuleres i 2D, hvilket vil sige at bane-kurverne γ er funktioner fra $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Vi vil desuden se at alle tre problemer kan dimensionelt reduceres, sådan at vi kan betragte bane-kruve funktioner af typen $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Lad os nu for et kort øjeblik diskutere valg af notation. Når der arbejdes med problemer i planen \mathbb{R}^2 , benævner vi normalt et punkt som (x, y) i stedet for (x_1, x_2) . Desuden benævnes vektor-komponenter (v_x, v_y) i stedet for (v_1, v_2) . Med det sagt vil vi nu starte ud med at analysere det mest elementære problem indenfor variations-regningen.

1.6.1 Den korteste vej mellem to punkter

Vi vil demonstrere at den korteste vej mellem to punkter $A = (x_A, y_A)$ og $B = (x_B, y_B)$, er den rette linie som forbinder de to punkter. For enhver bane-kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, for hvilken $\gamma(t_A) = A$ og $\gamma(t_B) = B$, ved vi at længden fra A til B målt langs γ , er givet ved følgende udtryk:

$$S[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \quad (1.44)$$

Vi observerer nu at funktionalen S blot er et special tilfælde af rejse-tids funktional T (1.26), for hvilken:

$$\frac{n(\gamma(t))}{c} = 1 \quad (1.45)$$

Vi kan derfor dimensionelt reducere funktional S , sådan at $S[\gamma]$ er givet som et special tilfælde af (1.40).

$$S[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (1.46)$$

Det er nu en simpelt at identificere Lagrange-funktionen L for den ovenstående funktional.

$$L(y, v_y, x) := \sqrt{1 + v_y^2} \quad (1.47)$$

Vi kan nu anvende den ovenstående Lagrange-funktionen for S , til at opskrive Euler-Lagrange ligningerne for vores problem. Vi finder først de relevante partielt afledte for L .

$$\frac{\partial L(y, v_y, x)}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(y, v_y, x)}{\partial v_y} = \frac{v_y}{\sqrt{1 + v_y^2}} \quad (1.48)$$

Vi kan nu opskrive Euler-Lagrange ligningerne (1.25) for funktionalen S . Da vores bane-kurver $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kun har én komponent, vil vi for dette problem kun have én Euler-Lagrange ligning:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L(\gamma(x), \gamma'(x), x)}{\partial v_y} = \frac{\partial L(\gamma(x), \gamma'(x), x)}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{\gamma'(x)}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} \right] = 0 \quad (1.49)$$

Det er nu en simpel sag at integrere ovenstående udtryk, hvormed vi finder følgende ligning.

$$\frac{\gamma'(x)}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} = k \Rightarrow \gamma'(x) = \pm \sqrt{\frac{k^2}{1 - k^2}} \equiv a \quad (1.50)$$

Hvor $k \in (-1, 1)$ er en integrations konstant, og a kan antage alle værdier i \mathbb{R} . Det er igen en simpel sag at integrere ovenstående udtryk. Resultatet er følgende.

$$\gamma(x) = a x + b \quad , \quad a \in \mathbb{R} \quad , \quad b \in \mathbb{R} \quad (1.51)$$

Integrations-konstanterne a, b kan nu bestemmes ved brug af de forudsatte randbetingelser:

$$\gamma(x_A) = y_A \quad , \quad \gamma(x_B) = y_B \quad (1.52)$$

1.6.2 Formen af en udspændt sæbehinde

Vi forestiller os nu en sæbehinde, udspændt mellem to cirkulære ringe som indikeret på figure 1.7. Grundet rotations-symmetri er det klart at den minimale sæbehinde må være en omdrejningsflade omkring x -aksen. Arealet af en sådant omdrejningsflade er da givet ved følgende integral.

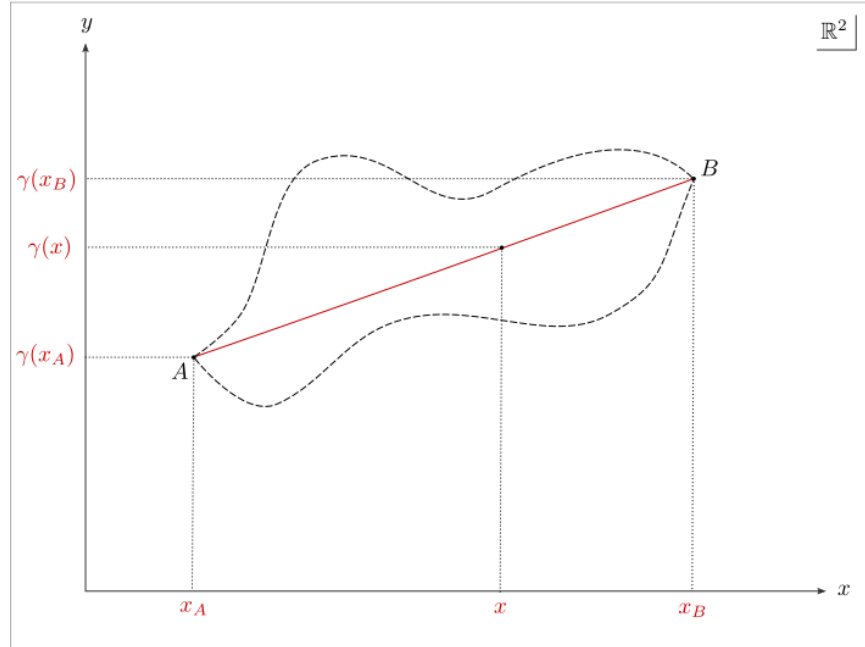
$$A[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} 2\pi \gamma_y(t) \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \quad (1.53)$$

Vi observerer, også for dette eksempel, at funktionalen A blot er et special tilfælde af rejse-tids funktional T (1.26), nu med:

$$\frac{n(\gamma(t))}{c} = 2\pi \gamma_y(t) \quad (1.54)$$

Vi kan derfor også dimensionelt reducere funktional A , sådan at $A[\gamma]$ er givet som et special tilfælde af (1.40).

$$A[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} 2\pi \gamma(x) \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (1.55)$$



Figur 1.6: Den røde bane-kurve γ repræsenterer den koreste vej fra A til B ; den rette linie. De stiplede bane-kurver repræsenterer ikke-stationære baner.

Det er nu simpelt at identificere Lagrange-funktionen L for den ovenstående funktional.

$$L(y, v_y, x) := \frac{n(y)}{c} \sqrt{1 + v_y^2} \quad , \quad \frac{n(y)}{c} = 2\pi y \quad (1.56)$$

Vi kan nu, i princippet, anvende den ovenstående Lagrange-funktionen for A , til at opskrive Euler-Lagrange ligningerne for vores problem. Lad os i stedet udnytte at $L(y, v_y, x)$ ikke afhænger af x , hvilket betyder at (1.43) med n givet ved (1.56), er en bevaret størrelse.

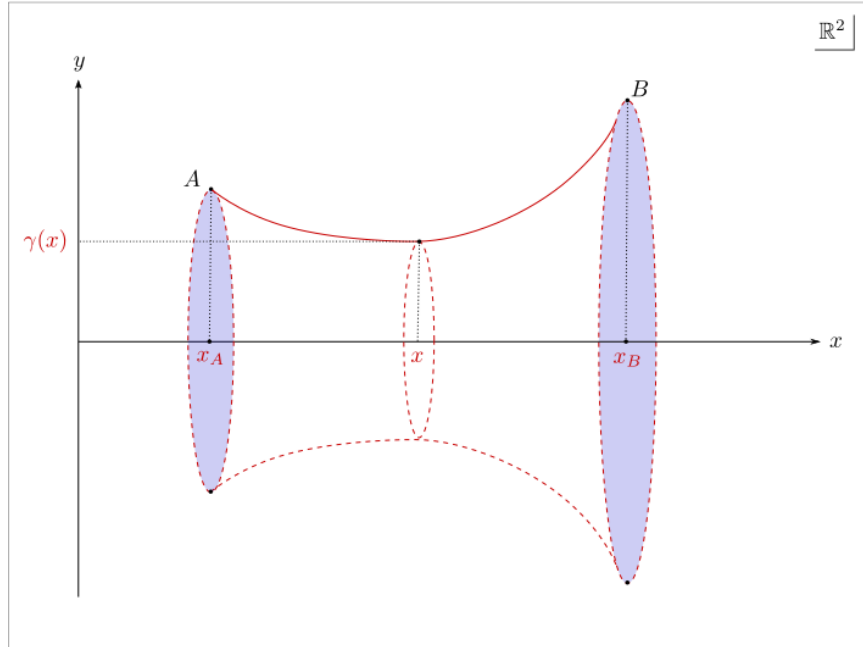
$$H(\gamma(x), \gamma'(x), x) = -\frac{2\pi \gamma(x)}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} = C \quad (1.57)$$

Hvor $C \in \mathbb{R}$ kan betragtes som en integrations-konstant. Ved brug af ovenstående udtryk, finder vi nu følgende 1. ordens differential-ligning for γ :

$$\gamma'(x) = \pm \sqrt{k^2 \gamma(x)^2 - 1} \quad , \quad k^2 \equiv \frac{4\pi^2}{C^2} \quad (1.58)$$

Da ovenstående ligning er separabel kan vi finde løsnings-kurven γ ved simpel integration:

$$\pm \int_{\gamma(x_A)}^{\gamma(x)} \frac{1}{\sqrt{k^2 w^2 - 1}} dw = \int_{x_A}^x dw \quad (1.59)$$



Figur 1.7: Den røde bane-kurve γ repræsenterer her meridian-kurven hørende til den minimale sæbehinde overflade. Punkterne A og B er valgt sådan, at deres separation i retningen vinkelret på (x, y) -planen er 0.

Hvor vi har indført integrations variabelen w . Integralet på højresiden er trivielt, mens integralet på venstresiden er givet i termer af den hyperbolske cosinus-funktion \cosh . Vi finder dermed følgende resultat, hvor vi også har gjort brug af randbetingelsen $\gamma(x_A) = y_A$:

$$\frac{1}{k} \left[\cosh^{-1}(k\gamma(x)) - \cosh^{-1}(ky_A) \right] = x - x_A \quad (1.60)$$

Hvor $k \in \mathbb{R}$, og vi dermed ikke længere behøver \pm på venstresiden af det ovenstående udtryk. Det er ny en simpel sag at isolere $\gamma(x)$ i ovenstående udtryk. Resultatet ser ud som følger.

$$\gamma(x) = \frac{\cosh \left[k(x - x_A) + \cosh^{-1}(ky_A) \right]}{k} \quad (1.61)$$

Konstanten k kan nu bestemmes ved at gøre brug af den tilbageværende randbetingelse:

$$\gamma(x_B) = y_B \quad (1.62)$$

1.6.3 Det brakistokrone problem

Vi forestiller os nu en situation, hvor to punkter A og B er forbundet med en kurve γ . En partikel med masse m placeres nu i punktet A og bevæger sig, under påvirkning af tyngdekraften, langs γ til punktet B . Vi ønsker nu at bestemme γ , sådan at partiklens fald-tid er mindst mulig.

Vi kan først udnytte at den mekaniske energi i 1-partikel systemet er bevaret, hvilket medfører at vi kan ækvivalere energien for tiden t_A og tiden t .

$$\frac{1}{2}m|\gamma'(t_A)|^2 - mg\gamma_y(t_A) = \frac{1}{2}m|\gamma'(t)|^2 - mg\gamma_y(t) \quad (1.63)$$

Hvor g er tyngdeaccelerationen og $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}$ benævner normen af hastighedsvektoren $\gamma'(t)$. Antager vi at partiklen startes i hvile, sådan at $\gamma'(t_A) = 0$, og anvender randbetingelsen $\gamma_y(t_A) = y_A$, finder vi nu følgende udtryk for fald-tiden.

$$t_B - t_A = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\sqrt{2g(\gamma_y(t) - y_A)}} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad (1.64)$$

Hvor vi har anvendt energi-bevarelsen (1.63) til at indsætte et passende 1-tal, i det ovenstående integral. Fald-tids funktionalen D kan dermed beskrives ved følgende udtryk:

$$D[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\sqrt{2g(\gamma_y(t) - y_A)}} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \quad (1.65)$$

Vi ser nu, at også fald-tids funktionalen D er et special tilfælde af rejse-tids funktional T (1.26), i dette tilfælde med:

$$\frac{n(\gamma(t))}{c} = \frac{1}{\sqrt{2g(\gamma_y(t) - y_A)}} \quad (1.66)$$

Vi kan derfor også dimensionelt reducere funktional D , sådan at $D[\gamma]$ er givet som et special tilfælde af (1.40).

$$D[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{\sqrt{2g(\gamma(t) - y_A)}} \sqrt{1 + \gamma'(t)^2} dx \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (1.67)$$

Det er igen simpelt at identificere Lagrange-funktionen L for den ovenstående funktional.

$$L(y, v_y, x) := \frac{n(y)}{c} \sqrt{1 + v_y^2} \quad , \quad \frac{n(y)}{c} = \frac{1}{\sqrt{2g(y - y_A)}} \quad (1.68)$$

Vi udnytter nu endnu en gang at $L(y, v_y, x)$ ikke afhænger af x , hvilket betyder at (1.43) med $n(y)$ givet ved (1.68), er en bevaret størrelse.

$$H(\gamma(x), \gamma'(x), x) = -\frac{1}{\sqrt{2g(\gamma(x) - y_A)}} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} = C \quad (1.69)$$

Hvor $C \in \mathbb{R}$ igen kan betragtes som en integrations-konstant. Ved brug af ovenstående udtryk, finder vi nu følgende 1. ordens differential-ligning for γ :

$$\gamma'(x) = \pm \sqrt{\frac{1 - k(\gamma(x) - y_A)}{k(\gamma(x) - y_A)}} \quad , \quad k \equiv 2g C^2 \quad (1.70)$$

Da ovenstående ligning er separabel kan vi finde løsnings-kurven γ ved simpel integration:

$$\pm \int_{\gamma(x_A)}^{\gamma(x)} \sqrt{\frac{k(w - y_A)}{1 - k(w - y_A)}} dw = \int_{x_A}^x dw \quad (1.71)$$

Hvor vi har indført integrations varibalen w . Integralet på højresiden er igen trivielt, mens dette umiddelbart ikke er tilfældet for integralet på venstresiden. Dette integral kan dog bringes til en mere medgørlig form, ved at gennemføre følgende skift af integrations-variabel:

$$k(w - y_A) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad dw = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (1.72)$$

Vi kan nu udregne venstreside-integralet i termer af den nyeligt indførte integrations-variabel θ . Resultatet bliver da følgende udtryk:

$$\pm \int_{\gamma(x_A)}^{\gamma(x)} \sqrt{\frac{k(z - y_A)}{1 - k(z - y_A)}} dz = \int_0^{\theta(x)} \frac{1}{k} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2k} [\theta(x) - \sin(\theta(x))] \quad (1.73)$$

Hvor $k \in \mathbb{R}$, og vi dermed ikke længere behøver \pm i ovenstående udtryk. Vi har i udregning ovenfor gjort brug af følgende dobbelt-vinkel formel:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) \quad (1.74)$$

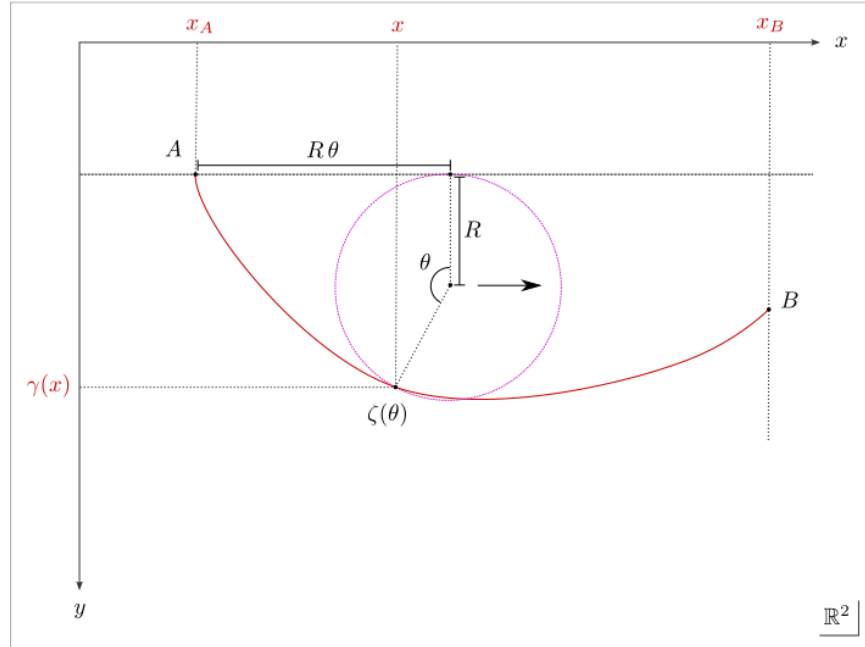
Desuden er størrelsen $\theta(x)$, på baggrund af (1.72), implicit defineret på følgende måde:

$$k(\gamma(x) - y_A) = \sin^2\left(\frac{\theta(x)}{2}\right) \quad (1.75)$$

Ved at kombinere (1.71, 1.73) og (1.74, 1.75), finder vi nu følgende trigonometriske udtryk for x og $\gamma(x)$, i termer af $\theta(x)$:

$$x = \frac{1}{2k} [\theta(x) - \sin(\theta(x))] + x_A \quad (1.76a)$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2k} [1 - \cos(\theta(x))] + y_A \quad (1.76b)$$



Figur 1.8: Den røde bane-kurve γ repræsenterer her cykloide-stykket som forbinder punkterne A og B . Cykloiden genereres af den lille cirkel med radius R ved at følge punktet $\zeta(\theta)$ på periferien når cirklen rulles langs den stiplede linie, liggende parallelt med x -aksen.

Vi kan nu i princippet løse for $\theta(x)$ i ligning (1.76a), og derefter indsætte det fundende udtryk for $\theta(x)$ i ligning (1.76b). Ser man på formen af (1.76a, 1.76b) virker det dog umiddelbart mere naturligt at beskrive vores løsning i form af en ny bane-kurve $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, med komponent-funktioner ζ_x og ζ_y , sådan at:

$$\zeta_x(\theta) = \frac{1}{2k} [\theta - \sin(\theta)] + x_A \quad , \quad \zeta_y(\theta) = \frac{1}{2k} [1 - \cos(\theta)] + y_A \quad (1.77)$$

Vores løsnings-kurve ζ , beskriver dermed et stykke af en *cykloide*, startende i punktet A og sluttende i punktet B (se figur 1.8), med radius:

$$R = \frac{1}{2k} \quad (1.78)$$

Konstanten $k \in \mathbb{R}$ kan nu bestemmes ved brug af den tilbageværende randbetingelse, som nu tager følgende form når beskrevet i termer af ζ :

$$\zeta_x(\theta_B) = x_B \quad , \quad \zeta_y(\theta_B) = y_B \quad (1.79)$$

1.7 Opgave: geodæter på hyperboloide

Vi søger i denne opgave den korteste vej mellem to punkter A og B på overfladen af en *hyperboloide*. En hyperboloide med strobe-radius $R = 1$, kan beskrives som mængden af punkter (x, y, z) i \mathbb{R}^3 , der opfylder ligning:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (1.80)$$

Ovenstående ligning for hyperboloide-overfalden, kan løses ved følgende parameterisering:

$$x = \cos(\phi) \cosh(\omega) \quad (1.81a)$$

$$y = \sin(\phi) \cosh(\omega) \quad (1.81b)$$

$$z = \sinh(\omega) \quad (1.81c)$$

Hvor $\omega \in \mathbb{R}$ og $\phi \in S^1 = [0, 2\pi)$. Opgaven kan nu med fordel løses i følgende trin:

1. Anvend ligningerne (1.81), og vis at linie-elementet ds^2 på hyperboloide overfalden er beskrevet ved:

$$ds^2 = d\omega^2 + \cosh^2(\omega) d\phi^2 \quad (1.82)$$

Givet at linie-elementet i Euklidisk \mathbb{R}^3 er beskrevet ved:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.83)$$

Følgende identiteter kan være nyttige at avende i dette trin.

$$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1 \quad , \quad \cosh^2(\omega) - \sinh^2(\omega) = 1 \quad (1.84)$$

2. Da vi har at gøre med en parameteriseret overfalde, kan vi med fordel snakke om bane-kurver γ gennem parameter-rummet $\mathbb{R} \times S^1$, i stedet for bane-kruver gennem \mathbb{R}^3 ; det rum hvor overfladen er indlejret. Fra linie-elementet (1.82) kan vi nu konkludere, at længden $S[\gamma]$ af bane-kruven γ fra punktet (ω_A, ϕ_A) til punktet (ω_B, ϕ_B) , er givet ved:

$$S[\gamma] = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\gamma'_\omega(t)^2 + \cosh^2(\gamma_\omega(t)) \gamma'_\phi(t)^2} dt \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times S^1) \quad (1.85)$$

Hvor (ω_A, ϕ_A) , (ω_B, ϕ_B) giver os punktene A , B via (1.81). Efter dimensionel reduktion, med parameter-skift $\omega = \gamma_\omega(t)$, finder vi at $S[\gamma]$ nu kan skrives som:

$$S[\gamma] = \int_{\omega_A}^{\omega_B} \sqrt{1 + \cosh^2(\omega) \gamma'(\omega)^2} d\omega \quad , \quad \gamma \in C^2(\mathbb{R}, S^1) \quad (1.86)$$

Find nu Euler-Lagrange ligningen for ovenstående funktional, og vis at den tager følgende form:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{\cosh^2(\omega) \gamma'(\omega)}{\sqrt{1 + \cosh^2(\omega) \gamma'(\omega)^2}} \right] = 0 \quad (1.87)$$

3. Anvend nu ligning (1.87), og vis at $\gamma'(\omega)$ opfylder følgende differentiaalligning.

$$\gamma'(\omega) = \frac{k}{\cosh^2(\omega) \sqrt{1 - k^2 + k^2 \tanh^2(\omega)}} \quad (1.88)$$

Hvor $k \in \mathbb{R}$ er en integrations-konstant. Identiteterne (1.84) kan med fordel udnyttes til at vise ovenstående sammenhæng.

4. Efter integration af (1.88), finder vi at:

$$\gamma(\omega) - \gamma(\omega_A) = \int_{\omega_A}^{\omega} \frac{k}{\cosh^2(w) \sqrt{1 - k^2 + k^2 \tanh^2(w)}} dw \quad (1.89)$$

Hvor vi har indført integrations-variablen w . Vis nu, at hvis vi udføre følgende skift af integrations-variabel:

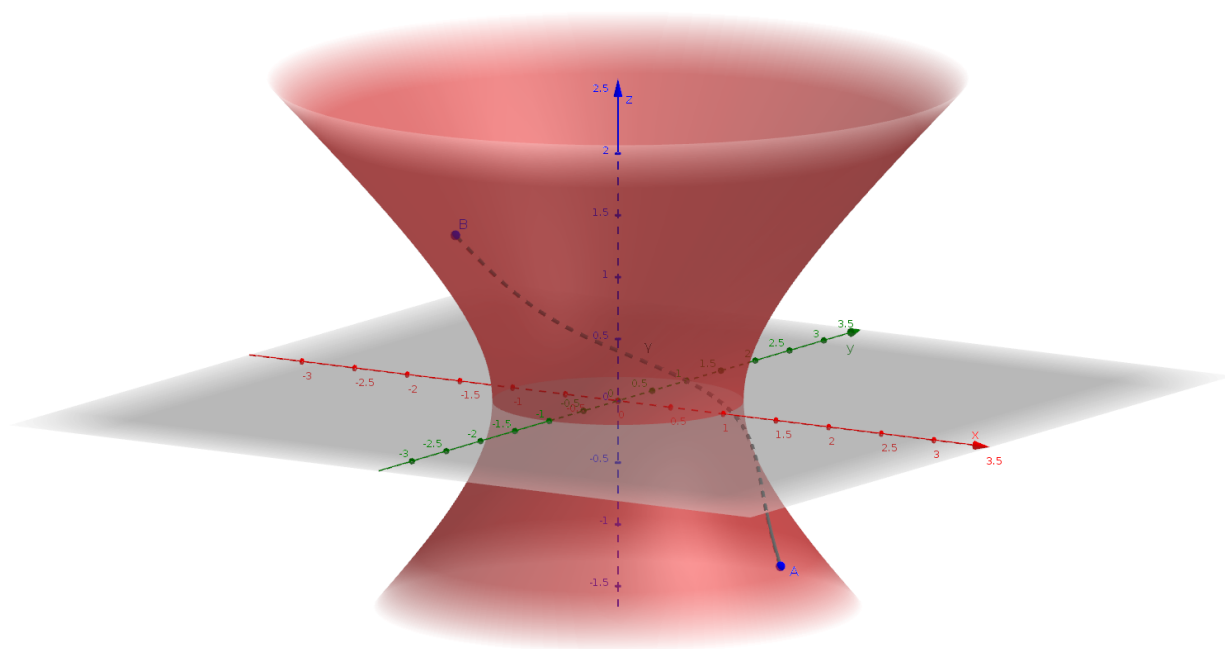
$$\alpha = \tanh(w) \quad (1.90)$$

Kan integralet i (1.89) bestemmes, og giver os følgende resultat:

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_A}^{\omega} \frac{k}{\cosh^2(w) \sqrt{1 - k^2 + k^2 \tanh^2(w)}} dw \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{k \tanh(\omega)}{\sqrt{1 - k^2}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{k \tanh(\omega_A)}{\sqrt{1 - k^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.91)$$

Følgende differential-kvotienter for hyperbolske funktioner kan med fordel anvendes til at vise det ovenstående resultat:

$$\frac{d \sinh(w)}{dw} = \cosh(w) \quad , \quad \frac{d \cosh(w)}{dw} = \sinh(w) \quad , \quad \frac{d \sinh^{-1}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (1.92)$$



Figur 1.9: Den røde overfalde repræsenterer her hyperboloiden givet ved $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Den sorte stiplede linie γ repræsenterer den korteste vej fra punktet A : $\omega_A = -1$, $\phi_A = 0$, til punktet B : $\omega_B = 1$, $\phi_B = \pi$, på hyperboloide-overfladen.

5. Anvend nu (1.91) samt (1.89), og vis at:

$$\cosh(\omega) \sinh(\gamma(\omega) - \bar{\phi}) = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \sinh(\omega) \quad (1.93)$$

Hvor konstanten $\bar{\phi}$ er givet ved:

$$\bar{\phi} = \gamma(\omega_A) - \sinh^{-1} \left(\frac{k \tanh(\omega_A)}{\sqrt{1 - k^2}} \right) \quad (1.94)$$

6. Find den koreste vej mellem punkterne A : $\omega_A = -1$, $\phi_A = 0$, og B : $\omega_B = 1$, $\phi_B = \pi$, på hyperboloide-overfladen, og skriv denne på formen (1.93).