MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
F. Hänle, M. Oelker

WS 17/18
- Blatt 2 -

## Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

(a) Seien $A, B, C, D$ Mengen. Zeigen Sie:

$$(A \cup B) \times (C \cup D) \;=\; (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$$

(b) Seien $A, B, C$ Mengen. Zeigen Sie:

$$(A \cup C) \times (B \cup C) \;\supset\; (A \times B) \cup (C \times C)$$

(c) Gilt

$$(A \cup C) \times (B \cup C) \;\subset\; (A \times B) \cup (C \times C)$$

für beliebige Mengen $A, B, C$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

(a) Seien $A, B$ Mengen. Zeigen Sie, dass

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} \qquad (a \in A, b \in B)$$

ein Paar ist, d.h.

$$\forall a, a' \in A \;\; \forall b, b' \in B : \quad (a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a' \wedge b = b'$$

(b) Seien $A, B, C$ Mengen mit der Eigenschaft, dass $A \cap B \cap C$ mindestens 2 Elemente enthält. Zeigen Sie, dass

$$\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \qquad (a \in A, b \in B, c \in C)$$

*kein* 3-Tupel (Tripel) ist.

**Aufgabe 7** (4 Punkte)

(a) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$a \equiv b \mod m \;\wedge\; c \equiv d \mod m \;\Longrightarrow\; ac \equiv bd \mod m$$

(b) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$a_1 \equiv b_1 \mod m \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; a_n \equiv b_n \mod m \;\Longrightarrow\; a_1 \cdots a_n \equiv b_1 \cdots b_n \mod m$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$2^{n+2} + 7^n$ hat die Endziffer 5.

*Bitte wenden!*

**Aufgabe 8** (4 Punkte)

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ und $p$ eine Primzahl. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$p \mid a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \quad \Rightarrow \quad p|a_1 \vee p|a_2 \vee \ldots \vee p|a_n$$

(b) Seien $r, s \in \mathbb{N}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ und $q_1 < q_2 < \ldots < q_s$ Primzahlen. Außerdem seien $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$, $l_1, l_2, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} = q_1^{l_1} q_2^{l_2} \cdots q_s^{l_s}$$

Zeigen Sie:

$$r = s, \quad p_i = q_i \wedge k_i = l_i \quad (i = 1, \ldots, r) \qquad \text{(„Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung“)}$$

*Hinweis:* Beweisen Sie zunächst $\{p_1, \ldots, p_r\} = \{q_1, \ldots, q_s\}$. Daraus dürfen Sie ohne weiteren Beweis folgern, dass $r = s$ und $p_i = q_i \quad (i = 1, \ldots, r)$.

**Abgabe einzeln, zu zweit oder zu dritt:** Dienstag, 14.11.2017 bis $10^{15}$ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock