MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
F. Hänle, M. Oelker

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Seien K ein Körper, V und W K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear, $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_n$ ein Erzeugendensystem von V. Zeigen Sie:

(a) f surjektiv $\implies$ $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ Erzeugendensystem von W

(b) $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ linear unabhängig in W $\implies$ f injektiv

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m \times n}$. Folgern Sie aus (a) und (b):

(c) $(\forall\, b \in K^m\, \exists\, x \in K^n : \ Ax = b) \implies \operatorname{rang} A = m$

(d) $\operatorname{rang} A = n \implies \forall\, x \in K^n : (Ax = 0 \Rightarrow x = 0)$

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Gegeben sei der Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{span}((0,3,1,-1),(2,7,4,-2),(6,0,5,1),(1,2,0,1)) .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\dim U = 3$ ist und geben Sie eine Basis von U an.

(b) Zeigen Sie ohne Rechnung, dass sich jede Basis von U durch die Hinzunahme eines geeigneten Einheitsvektors von $\mathbb{R}^4$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen lässt.

(c) Geben Sie alle Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^4$ an, mit denen sich die in (a) berechnete Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen lässt.
(Hinweis: Erweitern Sie die Matrix, die Sie in Zeilenstufenform transformieren, um die Einheitsmatrix E_4.)

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{P}_n := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\phi : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\phi(p) = (p(0), p'(0), \ldots, p^{(n)}(0))$ ist eine lineare bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen.
(Dabei bezeichnet $p^{(k)}(0)$ die k-te Ableitung von p an der Stelle 0.)

(b) Die Monome $m_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m_k(x) = x^k$, $k = 0, \ldots, n$ bilden eine Basis von $\mathcal{P}_n$.

(c) Die Funktionen $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_0(x) = 1$, $p_k(x) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$, $k = 1, \ldots, n$ bilden ebenfalls eine Basis von $\mathcal{P}_n$.

Bitte wenden!

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, X, Y, Z endlichdimensionale K-Vektorräume und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Für $\tilde{g} := g|_{f(X)}$ gilt: $\quad \operatorname{Kern} \tilde{g} \subset \operatorname{Kern} g \ \wedge \ \operatorname{Bild} \tilde{g} = \operatorname{Bild}(g \circ f)$

(b) $\dim \operatorname{Bild} f + \dim \operatorname{Bild} g \ \leq \ \dim Y + \dim \operatorname{Bild}(g \circ f)$
(Hinweis: Dimensionsformel für $\tilde{g}$)

(c) Seien $m, n, r \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times r}$. Dann gilt: $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B \ \leq \ n + \operatorname{rang} AB$

Abgabe einzeln, zu zweit oder zu dritt: Dienstag, 16.1.2018 bis 10^{15} Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock

$*******$ *Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch in das Neue Jahr!* $*******$