MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
F. Hänle, M. Oelker

WS 17/18

6. Tutorium zur Linearen Algebra für Informatiker und Statistiker

T21) Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 := \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, so weit möglich, die Matrizenprodukte $A_i \cdot A_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

T22) (a) Zeigen Sie die folgende Gleichung für reelle 2×2 Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}^k = 2^{k-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

(b) Gilt die Gleichung aus (a) auch für $k = 0$?

T23) Sei $G := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\phi : G \to G$, $z \mapsto z^n$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist ϕ aus (b) ein Gruppenisomorphismus?

T24) (a) Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, \oplus, \odot)$ Ringe mit Einselement 1_R bzw. 1_S. Zeigen Sie: $(R \times S, \boxplus, \boxdot)$ mit

$$\begin{aligned} (r_1, s_1) \boxplus (r_2, s_2) &:= (r_1 + r_2, s_1 \oplus s_2) \quad \text{und} \\ (r_1, s_1) \boxdot (r_2, s_2) &:= (r_1 \cdot r_2, s_1 \odot s_2) \end{aligned}$$

ist ein Ring mit Einselement $(1_R, 1_S)$.
(Bez.: $(R, +, \cdot) \times (S, \oplus, \odot)$)

(b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) > 1$. Zeigen Sie, dass die Ringe $(\mathbb{Z}_{mn}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ *nicht* isomorph sind.

Definition: Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, \oplus, \odot)$ Ringe mit Einselement 1_R bzw. 1_S.
Eine Abbildung $\phi : R \to S$ heißt Ringhomomorphismus, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \phi(a + b) &= \phi(a) \oplus \phi(b) \quad (a, b \in R) \\ \phi(a \cdot b) &= \phi(a) \odot \phi(b) \quad (a, b \in R) \\ \phi(1_R) &= 1_S \end{aligned}$$

Ist sie zusätzlich bijektiv, so wird sie Ringisomorphismus genannt. Entsprechend sind die Begriffe Körperhomomorphismus und Körperisomorphismus definiert.