MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
F. Hänle, M. Oelker

WS 17/18
- Blatt 8 -

**Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker**

**Aufgabe 29** (4 Punkte)
Sei $K$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{m\times n}$, $C \in K^{n\times m}$.

(a) Zeigen Sie: $A - BC$ invertierbar $\iff \begin{pmatrix} A & B \\ C & E_n \end{pmatrix}$ invertierbar

(b) Sei $A - BC$ invertierbar. Geben Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} A & B \\ C & E_n \end{pmatrix}$ in Blockschreibweise an.

**Aufgabe 30** (4 Punkte)
Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $R \in K^{n\times n}$, $r \in K^n$ und $\rho \in K$. Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} R & r \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \text{ invertierbar} \iff R \text{ invertierbar} \wedge \rho \neq 0$$

(b) Sei $R \in K^{n\times n}$ eine rechte Dreiecksmatrix. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$R \text{ invertierbar} \iff \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : r_{ii} \neq 0$$

**Aufgabe 31** (4 Punkte)
Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $a \in K^n$, $b_1, \ldots, b_n \in K^n$. Zeigen Sie:

(a) $(\forall x \in K^n : a^\top x = 0) \iff a = 0$

(b) Ist $b_i$, $i = 1, \ldots n$, Basis von $K^n$, dann ist $b_i b_j^\top$, $i, j = 1, \ldots, n$, Basis von $K^{n\times n}$.

*Bitte wenden!*

**Aufgabe 32** (4 Punkte)

Sei $\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} : \ w, z \in \mathbb{C} \right\}$

und $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie:

(a) $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ ist mit der Matrizenaddition und -multiplikation ein Ring mit Einselement und $(\mathcal{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.
Hinweis: Zeigen Sie unter Verwendung von T32a, dass $(\mathcal{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$ ist.

*Bemerkung:* Eine algebraische Struktur mit diesen Eigenschaften heißt Schiefkörper. Der Unterschied zum Körper besteht darin, dass die Multiplikation nicht als kommutativ vorausgesetzt ist.

(b) $I^2 = J^2 = K^2 = -E,\ IJ = K = -JI,\ JK = I = -KJ,\ KI = J = -IK.$

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ mit der Matrizenaddition und skalaren Matrixmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $E$,$I$,$J$,$K$ ist.

*Bemerkung:* Mit der bijektiven Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathcal{H}$, $(a, b, c, d) \mapsto \begin{pmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - ib \end{pmatrix}$ und der durch die Matrizenmultiplikation induzierten Multiplikation $*$ wird $(\mathbb{R}^4, +, *)$ zum Hamiltonschen Quaternionenschiefkörper

**Abgabe einzeln, zu zweit oder zu dritt:** Dienstag, 9.1.2018 bis $10^{15}$ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock