§3 Untervektorräume, lineare Abhängigkeit, Basen

$\boxed{\textbf{Untervektorräume}}$

3.1 Definition (Untervektorraum)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine nicht leere Menge $U \subset V$ heißt Untervektorraum von V, wenn gilt

(a) $\forall\, u, v \in U: \qquad u + v \in U$

(b) $\forall\, \lambda \in K,\ u \in U: \qquad \lambda{\cdot}u \in U$

Bemerkung:
Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum, insbesondere gilt $0 \in U$.
[Denn: 2.1a: $(U, +)$ ist Untergruppe von V, weil $U \neq \emptyset$,

$$u, v \in U \overset{(a)}{\Longrightarrow} u + v \in U$$
$$u \in U \overset{(b)}{\Longrightarrow} \underbrace{(-1){\cdot}u}_{-u} \in U \Rightarrow -u \in U$$

2.1b-e: folgt sofort aus $U \subset V$]

Beispiele:

1. $U = \{0\}$ ist Untervektorraum jedes Vektorraums.

2. Sei $w \in V$ fest gewählt. Dann ist $U := \{\alpha{\cdot}w :\ \alpha \in K\}$ ein Untervektorraum von V.
   $[u, v \in U \Rightarrow u = \alpha{\cdot}w,\ v = \beta{\cdot}w \Rightarrow u + v = (\alpha + \beta){\cdot}w \in U$
   $\lambda \in K,\ u \in U \Rightarrow \lambda{\cdot}u = \lambda{\cdot}(\alpha{\cdot}w) \overset{2.1\mathrm{d}}{=} (\lambda{\cdot}\alpha){\cdot}w \in U]$
   Geometrische Deutung: $V = \mathbb{R}^2$, z.B. $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
   $U := \{\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ Untervektorraum von V. U ist die Gerade durch den Ursprung, die den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

3. Verallgemeinerung: $w_1, \cdots, w_r \in V$
   $U := \{\alpha_1{\cdot}w_1 + \ldots + \alpha_r{\cdot}w_r :\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K\}$ Untervektorraum von V
   Geometrische Deutung: $V = \mathbb{R}^3,\ r = 2,\ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$U := \{\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} :\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \text{ Untervektorraum von } \mathbb{R}^3$$
   $$= \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} :\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \qquad (xy\text{-Ebene})$$

   Komplizierter: $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$U := \underbrace{\{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}}_{\text{Von den Vektoren } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aufgespannte Ebene}} \qquad \text{Untervektorraum von } \mathbb{R}^3$$

4. $V = \mathbb{R}^2,\ U := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - 2x_2 = 0\}$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
   Das folgt aus dem nächsten Lemma durch Betrachtung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 - 2x_2,$ und $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ f(x) = 0\}$.
   (Wegen $x_1 - 2x_2 = 0$, d.h. $x_2 = \frac{x_1}{2}$ handelt es sich um dieselbe Gerade wie in 2.)

3.2 Definition und Lemma

Seien V, W K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

(a) $\operatorname{Kern} f := \{v \in V : \ f(v) = 0\}$ ist Untervektorraum von V
(Sprechweise: Kern von f)

(b) $\operatorname{Bild} f := f(V)$ ist ein Untervektorraum von W
(Sprechweise: Bild von f)

Beweis:

(a) $\operatorname{Kern} f \neq \emptyset$ wegen $f(0) = 0$ und $0 \in V$
$u_1, u_2 \in \operatorname{Kern} f \Rightarrow f(u_1) = 0 \wedge f(u_2) = 0 \Rightarrow$
$$f(u_1 + u_2) \overset{f \text{ linear}}{=} f(u_1) + f(u_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u_1 + u_2 \in \operatorname{Kern} f$$
$$\lambda \in K,\ u \in \operatorname{Kern} f \Rightarrow f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \underbrace{f(u)}_{0} = 0 \Rightarrow \lambda \cdot u \in \operatorname{Kern} f$$

(b) $\operatorname{Bild} f \neq \emptyset$ wegen $V \neq \emptyset$.
$w_1, w_2 \in \operatorname{Bild} f \Rightarrow w_1 = f(v_1),\ w_2 = f(v_2)$ ($v_1, v_2 \in V$ geeignet)
$$\Rightarrow w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) \overset{f \text{ linear}}{=} f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in V}) \in \operatorname{Bild} f$$
$$\lambda \in K,\ w \in \operatorname{Bild} f \Rightarrow w = f(v) \ (v \text{ geeignet}) \Rightarrow \lambda \cdot w = \lambda \cdot f(v) \overset{f \text{ linear}}{=} f(\underbrace{\lambda \cdot v}_{\in V}) \in \operatorname{Bild} f$$

Bemerkung: Sei $A \in K^{m \times n}$. Die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $Ax = 0$
$\{x \in K^n : \ Ax = 0\}$ bildet einen Untervektorraum von K^n.

3.3 Lemma

Sei V ein K-Vektorraum.

(a) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine nicht leere Familie von Untervektorräumen von V.
Dann ist $\bigcap\limits_{i\in I} U_i$ ein Untervektorraum von V.

(b) Sei $r \in \mathbb{N}$ und $U_1, \ldots, U_r$ Untervektorräume von V.
Dann ist $U_1 + U_2 + \ldots + U_r := \{u_1 + u_2 + \cdots + u_r : \; u_1 \in U_1, \ldots, u_r \in U_r\}$ ein Untervektorraum von V.

Bemerkung:
Es sind zwar $U_1 \cap U_2, \; U_1 + U_2$ Untervektorräume von V, im allgemeinen aber *nicht* $U_1 \cup U_2$.
[$U_1 := \{\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \; \alpha \in \mathbb{R}\}$ und $U_2 := \{\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \; \alpha \in \mathbb{R}\}$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U_1 \cup U_2$, aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$.]

Beweis: Wegen $0 \in U_i$ folgt sowohl $0 \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$ als auch $0 \in U_1 + \ldots + U_r$.

(a) $u, v \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow u, v \in U_i \; (i \in I) \overset{U_i \text{ UVR}}{\Longrightarrow} u + v \in U_i \; (i \in I) \Rightarrow u + v \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$
$\lambda \in K, \; u \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow \lambda \in K, \; u \in U_i \; (i \in I) \overset{U_i \text{ UVR}}{\Longrightarrow} \lambda \cdot u \in U_i \; (i \in I) \Rightarrow \lambda \cdot u \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$

(b) $u, v \in U_1 + \ldots + U_r \Rightarrow u = u_1 + \ldots + u_r, \; v = v_1 + \ldots + v_r$ mit $u_i, v_i \in U_i \; (i = 1, \ldots, r)$
$\Rightarrow u + v = (u_1 + v_1) + \ldots + (u_r + v_r) \in U_1 + \ldots + U_r$
$\lambda \in K, \; u \in U_1 + \ldots + U_r \Rightarrow \lambda \cdot u \in U_1 + \ldots + U_r$ analog

Basis, Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit

Sei V ein K-Vektorraum, $b_1, \ldots, b_r \in V$ (fest).
Fragestellungen:

1. Gibt es für jedes $v \in V$ *genau ein* r-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$, so dass
$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_r \cdot b_r$? $\rightsquigarrow b_1, \ldots, b_r$ Basis

2. Gibt es für jedes $v \in V$ *mindestens ein* r-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$, so dass
$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_r \cdot b_r$? $\rightsquigarrow b_1, \ldots, b_r$ Erzeugendensystem

3. Gibt es für jedes $v \in V$ *höchstens ein* r-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$, so dass
$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_r \cdot b_r$? $\rightsquigarrow b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig

Beispiele: $V = \mathbb{R}^3$

1. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = x_1,\ \lambda_2 = x_2,\ \lambda_3 = x_3$ eindeutig bestimmt $\quad \rightsquigarrow b_1, b_2, b_3$ Basis von $\mathbb{R}^3$
Verallgemeinerung: $\ e_1, \ldots, e_n$ ist Basis von K^n $(n \in \mathbb{N})$.

2. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Für $\mu \in \mathbb{R}$ setze $\lambda_1 := x_1 + \mu,\ \lambda_2 := x_2 + \mu,\ \lambda_3 := x_3 + \mu,\ \lambda_4 := -\mu$
$\rightsquigarrow b_1, \ldots, b_4$ Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, aber *keine* Basis von $\mathbb{R}^3$.

3. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$
$\Leftrightarrow \lambda_1 = x_1,\ \lambda_2 = x_2,\ x_3 = 0$
λ_1, λ_2 sind eindeutig bestimmt [allerdings ist nicht jedes $x \in \mathbb{R}^3$ durch $(*)$ darstellbar]
$\rightsquigarrow b_1, b_2$ linear unabhängig, aber *keine* Basis von $\mathbb{R}^3$.

3.4 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem, endlich erzeugter Vektorraum)

Sei V ein K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N},\ b_1, \ldots, b_r \in V$.

(a) $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) := \{\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i :\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\}$
"Menge der Linearkombinationen der $b_1, \ldots, b_r$"

(b) $b_1, \ldots, b_r$ Erzeugendensystem von $V :\Leftrightarrow \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) = V$

(c) V heißt endlich erzeugt, wenn es ein Erzeugendensystem von V gibt.

Bemerkung: Offensichtlich gilt:
$b_1, \ldots, b_r$ Erzeugendensystem von $V \quad \Leftrightarrow \quad \forall v \in V\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K :\ v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$
(D.h. für jedes $v \in V$ gibt es mindestens ein $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$ mit $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$.)

3.5 Lemma

Sei V ein K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_r \in V$. Dann ist $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$ der kleinste Untervektorraum von V, der $b_1, \ldots, b_r$ enthält, d.h. für jeden Untervektorraum U von V mit $b_1, \ldots, b_r \in U$ gilt $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) \subset U$.

Beweis:
$\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$ Untervektorraum von V: Klar nach Def. 3.1.
$b_1, \ldots, b_r \in U \overset{U\ \text{UVR}}{\Longrightarrow} \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_r \cdot b_r \in U \ \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K)$
$\Longrightarrow \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) \subset U$.

3.6 Definition (lineare Unabhängigkeit)

Sei V ein K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_r \in V$, $v \in V$.

(a) $b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig $:\Leftrightarrow \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K : \left(\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0 \right)$

(b) $b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig $:\Leftrightarrow \quad b_1, \ldots, b_r$ *nicht* linear unabhängig

(c) v linear abhängig von $b_1, \ldots, b_r \quad :\Leftrightarrow \quad v \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$

Bemerkung:

$b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \quad \forall \lambda, \mu \in K^r : \left(\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \ (i = 1, \ldots, r) \right)$.

(D.h. für jedes $v \in V$ gibt es höchstens ein $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$ mit $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$).

Denn:

$''\Leftarrow''$: $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$.

$$''\Rightarrow'': \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \mu_i) \cdot b_i = 0 \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} \lambda_i - \mu_i = 0 \ (i = 1, \ldots, r)$$
$$\Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i \ (i = 1, \ldots, r).$$

3.7 Lemma

Sei V ein K-Vektorraum.

(a) Sei $b \in V$. Dann gilt: $\quad b$ linear abhängig $\Leftrightarrow b = 0$.

(b) Sei $r \geq 2$ und $b_1, \ldots, b_r \in V$. Dann gilt:
$b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig $\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \{1, \ldots, r\} : \ b_k \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_r)$.

(c) Sei $r \geq 1$ und $b_1, \ldots, b_{r+1} \in V$. Dann gilt:
b_{r+1} linear abhängig von $b_1, \ldots, b_r \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$.

(d) Sei $r \geq 1$ und $b_1, \ldots, b_{r+1} \in V$. Dann gilt:
$b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig $\wedge\, b_{r+1} \notin \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) \quad \Leftrightarrow \quad b_1, \ldots, b_{r+1}$ linear unabhängig.

Beweis:

Vorbemerkung: $\quad b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K, k \in \{1, \ldots, r\} : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i = 0 \ \wedge \ \lambda_k \neq 0$$

(a) $''\Rightarrow''$: b linear abhängig $\overset{\text{Vorbem}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \lambda \in K, \lambda \neq 0 : \ \lambda \cdot b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{1}{\lambda} \cdot \underbrace{(\lambda \cdot b)}_{=0} = 0$

$''\Leftarrow''$: $b = 0 \implies 1 \cdot b = 0 \ \wedge \ 1 \neq 0 \overset{\text{Vorbem}}{\Longrightarrow} b$ linear abhängig

(b) $''\Rightarrow''$: $b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig $\overset{\text{Vorbem}}{\Longrightarrow} \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} \cdot b_k + \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r} \lambda_i \cdot b_i = 0$ ($\lambda \in K^r$ geeignet)

$\Rightarrow b_k = \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r} (-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}) \cdot b_i \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_r)$

$''\Leftarrow''$: $b_k \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_r)$

$\Longrightarrow b_k = \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r} \lambda_i \cdot b_i \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r \in K$ geeignet)

$\overset{\lambda_k := -1}{\Longrightarrow} \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i b_i = 0 \Longrightarrow b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig.

(c) b_{r+1} linear abhängig von $b_1, \ldots, b_r \overset{\text{Def.3.6c}}{\Longleftrightarrow} b_{r+1} \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$

$\overset{?}{\Longleftrightarrow} \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$

$''\Leftarrow''$: $b_{r+1} \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$.

$''\Rightarrow''$: $b_{r+1} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i$ ($\mu_1, \ldots, \mu_r \in K$ geeignet)

Zeige: $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$

$''\supset''$ klar

$''\subset''$ $v \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) \Rightarrow v = \sum\limits_{i=1}^{r+1} \lambda_i \cdot b_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i + \lambda_{r+1} \cdot b_{r+1} =$

$\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i + \lambda_{r+1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \underbrace{(\lambda_i + \lambda_{r+1}\mu_i)}_{\in K} \cdot b_i \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$

(d) $''\Rightarrow''$: Sei $\sum\limits_{i=1}^{r+1} \lambda_i \cdot b_i = 0$. Zu zeigen: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{r+1} = 0$.

1.F.: $\lambda_{r+1} \neq 0$. Dann $b_{r+1} = \sum\limits_{i=1}^{r} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{r+1}}\right) \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$. Widerspruch!

2.F.: $\lambda_{r+1} = 0$. Dann $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i b_i = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $b_1, \ldots, b_r$ folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.

$''\Leftarrow''$: Klar.

3.8 Definition (Basis)

Sei V ein K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_r \in V$.
$b_1, \ldots, b_r$ heißt Basis von V, wenn $b_1, \ldots, b_r$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.
Für den Vektorraum $\{0\}$ wird die leere Aufzählung (oder leere Menge) $\emptyset$ als Basis festgelegt.

Bemerkung:

$b_1, \ldots, b_r$ Basis von $V \Leftrightarrow \forall v \in V \ \exists_1 (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r : \ v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$

(D.h. für jedes $v \in V$ gibt es genau ein $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$ mit $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$.)

Das folgt sofort aus den Bemerkungen zu Definition 3.4 und 3.6.

3.9 Basisauswahlsatz

Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_r$ ein Erzeugendensystem von V. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq r$, so dass (nach geeigneter Umnummerierung) $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V bildet.

[Knapp ausgedrückt: Durch Weglassen passender Vektoren (evtl. keiner) aus einem Erzeugendensystem erhält man eine Basis.]

Beweis: Sei $b_1, \ldots, b_r$ ein Erzeugendensystem von $V \neq \{0\}$.
O.E.d.A.: $b_1, \ldots, b_r \neq 0$. (Durch Weglassen der Nullvektoren ändert sich nichts am Wert einer Linearkombination für Nichtnullvektoren. Es können auch nicht alle $b_i = 0$ sein, weil sonst $V = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) = \{0\}$ folgen würde.)

1. Fall: $b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig. Dann ist $b_1, \ldots, b_r$ Basis von V.

2. Fall: $b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig.
   Wegen $b_1 \neq 0, \ldots, b_r \neq 0$ ist $r \geq 2$. (Andernfalls wäre b_1 linear abhängig, also nach Lemma 3.7a $b_1 = 0$.)
   Nach Lemma 3.7b gibt es ein k, so dass b_k linear abhängig von $b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_r$ ist. Wir benennen b_k in b_r und b_r in b_k um. Mit der neuen Bezeichnung ist b_r linear abhängig von $b_1, \ldots, b_{r-1}$. Nach Lemma 3.7c folgt $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r-1}) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$, also ist $b_1, \ldots, b_{r-1}$ ein Erzeugendensystem von V.
   Wir wiederholen diesen Schluss so lange, bis wir zu einem Erzeugendensystem $b_1, \ldots, b_n$ gelangt sind, das linear unabhängig ist. Das ist wegen $b_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ und Lemma 3.7a spätestens der Fall, wenn $n = 1$. $b_1, \ldots, b_n$ ist dann die gesuchte Basis.

3.10 Lemma

Seien V, W K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \Longleftrightarrow \operatorname{Kern} f = \{0\} .$$

Beweis:
$''\Rightarrow''$ $v \in \operatorname{Kern} f \Leftrightarrow f(v) = 0 \overset{f \text{ linear}}{\Longleftrightarrow} f(v) = f(0) \overset{f \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} v = 0$
$''\Leftarrow''$ $f(v) = f(w) \overset{f \text{ linear}}{\Longleftrightarrow} f(v - w) = 0 \Leftrightarrow v - w \in \operatorname{Kern} f \overset{\operatorname{Kern} f = \{0\}}{\Longrightarrow} v - w = 0 \Leftrightarrow v = w$

3.11 Hilfssatz

Sei V ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n \in V$. Dann gilt:

$$b_1, \ldots, b_n \text{ Basis von } V \quad \Rightarrow \quad \exists\, f : K^n \to V \text{ linear und bijektiv}, f(e_i) = b_i \;\; (i = 1, \ldots, n)$$

Beweis:
$f : K^n \to V,\ f(\lambda) := \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j$.

f ist linear, denn $f(\lambda + \mu) = \sum\limits_{j=1}^{n} (\lambda_j + \mu_j) \cdot b_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j + \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j \cdot b_j = f(\lambda) + f(\mu)$
und $f(\alpha \cdot \lambda) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha \cdot \lambda_j \cdot b_j = \alpha \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j = \alpha \cdot f(\lambda)$.

f ist injektiv, denn $f(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j = 0 \overset{b_1,\ldots,b_n \text{lin.unabh.}}{\Rightarrow} \lambda = 0$, d.h. Kern $f = \{0\}$.
f ist surjektiv, weil $b_1, \ldots, b_n$ Erzeugendensystem von V.
Außerdem: $f(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_{ij} \cdot b_j = b_i \;\; (i = 1, \ldots, n)$.

3.12 Lemma

Seien V, W K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear und bijektiv. Dann ist f^{-1} linear und bijektiv.

Beweis:
Die Bijektivität von f folgt aus 0.34c.

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2)))$$
$$\overset{f \text{linear}}{=} f^{-1}(f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2))) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2).$$
$$\lambda \in K, w \in W \Rightarrow f^{-1}(\lambda \cdot w) = f^{-1}(\lambda \cdot f(f^{-1}(w))) \overset{f \text{linear}}{=} f^{-1}(f(\lambda \cdot f^{-1}(w))) = \lambda \cdot f^{-1}(w).$$

Bemerkung:
Zwei K-Vektorräume V und W heißen isomorph, wenn eine bijektive lineare Abb. $f : V \to W$ existiert. Folgerung 2.9, Lemma 3.12 und Satz 0.34d implizieren, dass die Isomorphie eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von K-Vektorräumen ist.

3.13 Satz und Definition (Dimension eines Vektorraums)

Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum V besitzt eine Basis. Alle Basen von V enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren, diese Zahl $\in \mathbb{N}_0$ wird als Dimension von V bezeichnet. (Schreibweise: $\dim V$).
Endlich erzeugte Vektorräume werden endlichdimensional genannt.
Ist V *nicht* endlich erzeugt, so setzt man $\dim V := \infty$.

Bsp: $\dim \{0\} = 0$, $\dim K^n = n$ (weil $e_1, \ldots, e_n$ Basis von K^n)

Beweis:

1. Fall: $V = \{0\}$. Eine Basis von V ist die leere Aufzählung (oder Menge). Da $0 \in V$ linear abhängig ist, kann eine Basis von V *keine* Vektoren enthalten.

2. Fall: $V \neq \{0\}$. Da V endlich erzeugt ist, existiert nach dem Basisauswahlsatz 3.9 eine Basis von V. Die leere Basis ist definitionsgemäß keine Basis von $V \neq \{0\}$. Seien $b_1, \ldots, b_n$ und $b'_1, \ldots, b'_m$ zwei Basen von V mit $m, n \in \mathbb{N}$. Nach Hilfssatz 3.11 existieren $f : K^n \to V$ und $g : K^m \to V$, beide linear und bijektiv. Also ist nach 2.9 und 3.10 $g^{-1} \circ f : K^n \to K^m$ linear und bijektiv. Nach Satz 2.18 folgt $m = n$.

3.14 Satz

Jeder K-Vektorraum mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$ ist isomorph zu K^n.

Beweis: Hilfssatz 3.11, Satz 3.13.

3.15 Corollar

Seien V, W K-Vektorräume mit $\dim V = \dim W < \infty$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(a) f ist injektiv,

(b) f ist surjektiv,

(c) f ist bijektiv.

Beweis:
Der Fall $\dim V = \dim W = 0$ ist unmittelbar klar.
Sei $n := \dim V = \dim W \in \mathbb{N}$. Die Aussage folgt dann sofort aus den Sätzen 2.19 und 3.14.

3.16 Basisergänzungssatz

Seien $r, n \in \mathbb{N}$, V ein K-Vektorraum mit einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ und $a_1, \ldots, a_r \in V$ linear unabhängig.
Dann gilt $r \leq n$ und es gibt $a_{r+1}, \ldots, a_n \in \{b_1, \ldots, b_n\}$, so dass $a_1, \ldots, a_n$ Basis von V ist.

[Knapp ausgedrückt: linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_r$ lassen sich durch passende Vektoren aus einer vorhandenen Basis zu einer Basis ergänzen.]

Bemerkung: Im Fall $r = n$ besagt der Satz, dass $a_1, \ldots, a_n$ Basis ist. Es ist üblich, diesen Fall einzuschließen, obwohl zu $a_1, \ldots, a_n$ keine weiteren Basisvektoren hinzukommen.

Beweis:

1. Fall: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \; b_i \in \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_r)$.
   Dann $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_n) \subset \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_r)$, d.h. $a_1, \ldots, a_r$ Erzeugendensystem von V. Wegen $a_1, \ldots, a_r$ linear unabhängig ist $a_1, \ldots, a_r$ Basis. Nach Satz 3.13 folgt $r = n$.

2. Fall: $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \; b_i \notin \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_r)$.
   Wir setzen $a_{r+1} := b_i$. Nach Lemma 3.7d ist $a_1, \ldots, a_{r+1}$ linear unabhängig. Durch fortgesetzte Wiederholung finden wir (unter Hinzunahme geeigneter b_i) $a_1, \ldots, a_{r+m}$ mit $m \in \mathbb{N}$, so dass $a_1, \ldots, a_{r+m}$ linear unabhängig ist und $b_1, \ldots, b_n \in \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_{r+m})$. Wie im 1. Fall folgt $a_1, \ldots, a_{r+m}$ Basis. Also $r + m = n$, insbesondere $r < n$.

3.17 Folgerung

Sei V ein K-Vektorraum mit $n = \dim V \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n \in V$. Dann sind äquivalent:

(a) $b_1, \ldots, b_n$ Basis,

(b) $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig,

(c) $b_1, \ldots, b_n$ Erzeugendensystem.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b),(c) Klar.
(b) $\Rightarrow$ (a) Basisergänzungssatz mit $r = n$.
(c) $\Rightarrow$ (a) Basisauswahlsatz und Satz 3.13.

3.18 Folgerung (lineare Fortsetzung)

Seien V, W K-Vektorräume, $b_1, \dots, b_n$ Basis von V, $c_1, \dots, c_n \in W$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(b_i) = c_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Beweis: Für $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i$ setze $f(v) := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot c_i$.

- $f : V \to W$ ist wegen der eindeutigen Bestimmtheit der λ_i wohl definiert.
- $f(v + w) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \cdot b_i\right) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \cdot b_i\right) \overset{\text{Def.}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \cdot c_i$
  $= \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot c_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \cdot c_i = f(v) + f(w) \quad (v, w \in V)$
  $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ analog
- Sei $g : V \to W$ lineare Abbildung mit $g(b_i) = c_i$. Dann erfüllt die lineare Abbildung $h := f - g$ $\;h(b_i) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, woraus $h(v) = h\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot h(b_i) = 0$ folgt, d.h. $f(v) = g(v)$ $(v \in V)$.

3.19 Lemma

Seien V, W K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear, $b_1, \dots, b_n$ Basis von V. Dann gilt:

(a) f injektiv $\Leftrightarrow$ $f(b_1), \dots, f(b_n)$ linear unabhängig (in W) ,

(b) f surjektiv $\Leftrightarrow$ $f(b_1), \dots, f(b_n)$ Erzeugendensystem von W ,

(c) f bijektiv $\Leftrightarrow$ $f(b_1), \dots, f(b_n)$ Basis von W .

Beweis: (a),(b) Übung, Tutorium
(c) folgt sofort aus (a),(b)

3.20 Satz

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, U ein Untervektorraum von V. Dann ist U endlich erzeugt und es gilt $\dim U \leq \dim V$.

Beweis:
O.E.d.A.: $U \neq \{0\}$, $V \neq \{0\}$.
Für jede linear unabhängige Aufzählung $u_1, \dots, u_r \in U \subset V$ gilt nach dem Basisergänzungssatz $r \leq n := \dim V$. Wegen $U \neq \{0\}$ können wir daher linear unabhängige $u_1, \dots, u_r \in U$ mit *maximalem* $r \in \{1, \dots, n\}$ finden.
Bhpt.: $\forall u \in U\colon\ u \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_r)$
Andernfalls gäbe es ein $u_{r+1} \in U$ mit $u_{r+1} \notin \operatorname{span}(u_1, \dots, u_r)$. Nach Lemma 3.7d wäre $u_1, \dots, u_{r+1}$ linear unabhängig und r somit nicht maximal.
Also ist $u_1, \dots, u_r$ Erzeugendensystem von U und daher $\dim U = r$.

3.21 Dimensionsformel für Untervektorräume

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Dann gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)\ .$$

Beweis:
Wegen V endlichdimensional sind nach Satz 3.20 auch U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ endlichdimensional. Sei $b_1, \ldots, b_r$ Basis von $U_1 \cap U_2$ ($r = 0$: leere Basis).

$$\left.\begin{array}{ll} b_1, \ldots, b_r, b'_{r+1}, \ldots, b'_s & \text{Basis von } U_1 \\ b_1, \ldots, b_r, b''_{r+1}, \ldots, b''_t & \text{Basis von } U_2 \end{array}\right\} \text{nach Basisergänzungssatz}$$

Behauptung: $b_1, \ldots, b_r, b'_{r+1}, \ldots, b'_s, b''_{r+1}, \ldots, b''_t$ Basis von $U_1 + U_2$:

- $b_1, \ldots, b_r, b'_{r+1}, \ldots, b'_s, b''_{r+1}, \ldots, b''_t$ Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$: klar
- lineare Unabhängigkeit:

  $$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i}_{u_0 \in U_1 \cap U_2} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{s} \lambda'_i \cdot b'_i}_{u_1 \in U_1} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{t} \lambda''_i \cdot b''_i}_{u_2 \in U_2} = 0$$

  $u_0 + u_1 \in U_1$, außerdem $u_0 + u_1 = -u_2 \in U_2 \Rightarrow$

  $$\left.\begin{array}{ll} u_0 + u_1 \in U_1 \cap U_2 \overset{b_1,\ldots,b_r \text{ Basis von } U_1\cap U_2}{\Longrightarrow} & u_0 + u_1 = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i \\ \text{Andererseits:} & u_0 + u_1 = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i + \sum\limits_{i=r+1}^{s} \lambda'_i \cdot b'_i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

  $\overset{b_1,\ldots,b_r,b'_{r+1},\ldots,b'_s \text{ Basis von } U_1}{\Longrightarrow} \quad \lambda_i = \mu_i \quad (i = 1, \ldots, r),\ \lambda'_i = 0 \quad (i = r+1, \ldots, s)$

  Analog durch Betrachtung von $u_0 + u_2$: $\lambda''_i = 0 \quad (i = r+1, \ldots, t)$.

  Also $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i = 0 \overset{b_1,\ldots,b_r \text{ Basis von } U_1\cap U_2}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.

  Somit: $\dim U_1 = s$, $\dim U_2 = t$, $\dim(U_1 \cap U_2) = r$,
  $\dim(U_1 + U_2) = s + t - r$.

3.22 Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Seien V, W K-Vektorräume, $\dim V < \infty$, $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\dim \text{Kern}\, f + \dim \text{Bild}\, f = \dim V\ .$$

Beweis: $n := \dim V$. O.E.d.A.: $n \in \mathbb{N}$.
Sei $b_1, \ldots, b_r$ Basis von Kern f ($r = 0$: leere Basis). Ergänze diese zu einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V.

1. Zeige: $f(b_{r+1}), \ldots, f(b_n)$ ist Basis von Bild f.
   - Erzeugendensystem: $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ Erzeugendensystem von Bild $f \overset{f(b_i)=0\ (i=1,\ldots,r)}{\Longrightarrow}$

     $f(b_{r+1}), \ldots, f(b_n)$ Erzeugendensystem von Bild f

- lineare Unabhängigkeit: $\sum\limits_{i=r+1}^{n} \lambda_i \cdot f(b_i) = 0 \overset{f \text{ linear}}{\Longleftrightarrow} f\left(\sum\limits_{i=r+1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) = 0$

  $\Rightarrow \sum\limits_{i=r+1}^{n} \lambda_i \cdot b_i \in \operatorname{Kern} f$

  $\Rightarrow \sum\limits_{i=r+1}^{n} \lambda_i \cdot b_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i$ $(\mu_1, \ldots, \mu_r \in K$ geeignet$)$

  $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{r} (-\mu_i) \cdot b_i + \sum\limits_{i=r+1}^{n} \lambda_i \cdot b_i = 0$

  $\overset{b_1,\ldots,b_n \text{ Basis von} V}{\Longrightarrow} \quad -\mu_i = 0 \ (i = 1, \ldots, r), \ \lambda_i = 0 \ (i = r+1, \ldots, n)$

2. Somit $\dim \operatorname{Kern} f = r$, $\dim \operatorname{Bild} f = n - r \Rightarrow$ Behauptung.

Bemerkung: Aus der Dimensionsformel 3.22 folgt mit Lemma 3.10 wieder Corollar 3.15.

Rang einer Matrix

3.23 Definition

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m \times n}$, $A = (a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{lll} \text{Spaltenraum}(A) & := \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n) & \\ \text{Spaltenrang}(A) & := \dim \text{Spaltenraum}(A) & [\text{Anzahl der linear unabhängigen Spalten von } A] \\ \text{Zeilenraum}(A) & := \operatorname{span}(a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}) & \\ \text{Zeilenrang}(A) & := \dim \text{Zeilenraum}(A) & [\text{Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von } A] \end{array}$$

Bemerkungen:

1. $\text{Spaltenraum}(A) = \underbrace{\{Ax : \ x \in K^n\}}_{=\operatorname{Bild} A}$

   [Denn: $\operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n) = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\} = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot Ae_i : \ \lambda \in K^n\} = \{A\,(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i}_{\lambda}) : \ \lambda \in K^n\} = \{Ax : \ x \in K^n\}$]

   $\text{Spaltenrang}(A) = \dim \operatorname{Bild} A$

2. $\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A^T)$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Zeilenrang}(A) = 2 \\ \text{Spaltenrang}(A) = 2 \end{array}$$

3.24 Lemma

Sei K ein Körper, $m,n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times n}$, $S \in K^{m\times m}$ invertierbar, $T \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Spaltenrang}(S\cdot A\cdot T) &= \text{Spaltenrang}(A) \\ \text{Zeilenrang}(S\cdot A\cdot T) &= \text{Zeilenrang}(A) \end{aligned}$$

Beweis:

1. Zeige: Spaltenrang$(A\cdot T)$ = Spaltenrang(A)

   Spaltenrang$(A) \overset{\text{Bem.1}}{=} \dim\{A\cdot x:\ x \in K^n\} \overset{\substack{T(K^n)=K^n \\ \text{weil } T \text{ invertierbar} \\ \downarrow}}{=} \dim\{A\cdot x:\ x\in T(K^n)\} = \dim\{A\cdot x:\ x = T\cdot y,\ y\in K^n\} = \dim\{A\cdot T\cdot y:\ y\in K^n\} =$ Spaltenrang$(A\cdot T)$

2. Spaltenrang$(S\cdot A)$ = Spaltenrang(A)
   Spaltenraum$(A) = \text{span}(A\cdot e_1,\dots,A\cdot e_n)$, $r :=$ Spaltenrang(A)
   $A\cdot e_{j_1},\dots,A\cdot e_{j_r}$ sei Basis des Spaltenraums von $A \overset{\text{Lemma3.19c}}{\Longrightarrow} S\cdot A\cdot e_{j_1},\dots,S\cdot A\cdot e_{j_r}$ Basis von $\text{span}(S\cdot A\cdot e_1,\dots,S\cdot A\cdot e_n) \Rightarrow$ Spaltenrang$(S\cdot A) = r =$ Spaltenrang(A)

3. Spaltenrang$(S\cdot A\cdot T) \overset{1.}{=}$ Spaltenrang$(S\cdot A) \overset{2.}{=}$ Spaltenrang(A)

4. Zeilenrang$(S\cdot A\cdot T) \overset{\text{Bem.2 zu 3.23}}{=}$ Spaltenrang$((S\cdot A\cdot T)^T)$ = Spaltenrang$(T^T\cdot A^T\cdot S^T) \overset{3.}{=}$ Spaltenrang$(A^T) \overset{\text{Bem.2 zu 3.23}}{=}$ Zeilenrang(A)

3.25 Satz und Definition (Rang von A)

Sei K ein Körper, $m,n\in\mathbb{N}$, $A\in K^{m\times n}$. Dann gilt:

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)\ .$$

Diese Zahl wird als Rang von A bezeichnet. (Schreibweise: rang A)

Beweis:

Nach Satz 2.17 gibt es $G\in K^{m\times m}$ und $H\in K^{n\times n}$, beide invertierbar, und $r\in\{0,\dots,\min(m,n)\}$, so dass $A = G\cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot H$

Aus Lemma 3.24 folgt

$$\begin{aligned} \text{Spaltenrang}(A) &= \text{Spaltenrang}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r\ , \\ \text{Zeilenrang}(A) &= \text{Zeilenrang}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r\ . \end{aligned}$$

3.26 Folgerung

Sei K ein Körper, $m,n,r \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$. Dann gilt:

(a) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$,

(b) $\operatorname{rang} A \le \min(m,n)$,

(c) $\operatorname{rang}(A\cdot B) \le \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$,

(d) $S \in K^{m\times m}$ invertierbar, $T \in K^{n\times n}$ invertierbar $\quad\Rightarrow\quad \operatorname{rang}(S\cdot A\cdot T) = \operatorname{rang} A$.

Beweis:

(a) Satz 3.25 und Bem. 1 zu 3.23.

(b) $\operatorname{rang} A \overset{\text{Bild } A\subset K^m}{\le} \dim K^m = m, \quad \operatorname{rang} A^T \overset{\text{Bild } A^T\subset K^n}{\le} n \overset{(a)}{\Longrightarrow} \operatorname{rang} A \le \min(m,n)$.

(c) $$\operatorname{rang}(A\cdot B) \overset{\text{Bem.1 zu 3.23}}{=} \dim \underbrace{\operatorname{span}\{A\cdot \overbrace{B\cdot x}^{\in K^n} :\ x\in K^r\}}_{\subset \operatorname{span}\{Ay:\ y\in K^n\}}$$
$$\le \dim \operatorname{span}\{Ay:\ y\in K^n\} = \operatorname{rang} A \qquad (\sharp)$$
$$\operatorname{rang}(A\cdot B) \overset{(a)}{=} \operatorname{rang}(A\cdot B)^T = \operatorname{rang}(B^T\cdot A^T) \overset{(\sharp)}{\le} \operatorname{rang} B^T \overset{(a)}{=} \operatorname{rang} B \qquad (\sharp\sharp)$$
$$\overset{(\sharp),(\sharp\sharp)}{\Longrightarrow} \operatorname{rang}(A\cdot B) \le \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$$

(d) Lemma 3.24 und Satz 3.25.

$\boxed{\text{Zeilenstufenform}}$

Mit elementaren Zeilenumformungen vom Typ II und III lässt sich bei quadratischen Matrizen nicht immer Dreiecksform mit nicht verschwindenden Diagonalelementen erreichen. Problematisch sind die in der aktuellen Untermatrix führenden Nullspalten. Übergeht man diese im Algorithmus und betrachtet man allgemeiner auch rechteckige Matrizen, so gelangt man zur Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 0 & \circledast & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & \circledast & * & * & * & * & * & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \circledast & * & * & * & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \circledast & * \\
0 & & & & & & & & & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \uparrow & \uparrow & & & & & & \uparrow & \\
 & & j_1 & j_2 & & & & & & j_r &
\end{array}
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} r$$

$*$ Matrixelement
$\circledast$ Matrixelement $\neq 0$

Formal aufgeschrieben erhält man:

3.27 Definition (Zeilenstufenform)

Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. $A \in K^{m\times n}$ mit $A \neq 0$ hat Zeilenstufenform, wenn es $r \in \{1, \ldots, \min(m, n)\}$ und $j_1, \ldots, j_r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$ gibt, so dass

$$
\begin{array}{lll}
a_{ij} \neq 0 & i = k,\ j = j_k & (k = 1, \ldots, r) \\
a_{ij} = 0 & i \geq k,\ j_{k-1} \leq j < j_k & (k = 1, \ldots, r+1)
\end{array}
$$

mit $j_0 := 1$ und $j_{r+1} := n + 1$.

3.28 Satz (Transformation auf Zeilenstufenform, Rang)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$. Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $A \neq 0$ kann durch elementare Zeilenumformungen vom Typ II und III auf Zeilenstufenform gebracht werden.
Es gilt $\operatorname{rang} A = r$ mit r aus Definition 3.27.

Bemerkung: Satz 3.28 gestattet die Bestimmung des Matrixrangs auf einfachere Weise als mit der Äquivalenznormalform 2.17.

Beweis:
Die Transformation auf Zeilenstufenform erfolgt wie oben beschrieben.
[Der Unterschied zum Gaußalgorithmus 2.26 für invertierbare Matrizen besteht darin, dass folgende Situation eintreten kann:

$$
\begin{array}{ccccc l}
\circledast & * & * & * & * \qquad\qquad\qquad * & \leftarrow k\text{-te Zeile} \\
 & \multicolumn{4}{c}{\boxed{\begin{array}{cccc} 0&0&0&* \\ &&&* \\ &&&* \\ 0&\ldots&0&* \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}*\\*\\*\\*\end{array}}\right\}\begin{array}{l}\text{mind. ein}\\\text{Matrixelement}\\ \neq 0\end{array}}} & \text{aktuelle Untermatrix} \\
\uparrow & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}} & \uparrow & \\
j_k & \multicolumn{3}{c}{\begin{array}{c}\text{mehrere}\\\text{Nullsp.}\\\text{der}\\\text{Unter-}\\\text{matrix}\end{array}} & j_{k+1} &
\end{array}
$$

Außerdem können die Spalten $1, \ldots, j_1 - 1$ und $j_r + 1, \ldots, n$ Nullspalten sein.

Alle diese Spalten werden einfach unverändert gelassen.]

Also gibt es eine invertierbare Matrix $\tilde{G} \in K^{m\times m}$ (als Inverse eines Produkts von Elementarmatrizen) und eine Zeilenstufenmatrix $\tilde{R} \in K^{m\times n}$, so dass

$$A = \tilde{G} \cdot \tilde{R}\ .$$

Nach 3.26d folgt $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{R}$.

Zeige: $\operatorname{rang}\tilde{R} = r$.

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \; r \text{ Zeilen} \\ \} \; m-r \text{ Zeilen} \end{matrix} \text{. Also } \operatorname{rang}\tilde{R} = \text{Zeilenrang}(\tilde{R}) = \text{Zeilenrang}(\hat{R}) = \operatorname{rang}\hat{R}.$$

1. $\operatorname{rang}\hat{R} \overset{3.26b}{\leq} r$.

2. $\hat{R} = (\hat{r}_1 \dots \hat{r}_n)$. Bhpt.: $\hat{r}_{j_1}, \dots, \hat{r}_{j_r}$ sind linear unabhängig.
$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot \hat{r}_{j_k} = 0 \;\Rightarrow\; (\hat{r}_{j_1} \dots \hat{r}_{j_r}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0,$$
weil $(\hat{r}_{j_1} \dots \hat{r}_{j_r}) \in K^{r \times r}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nicht verschwindenden Diagonalelementen ist.
Somit $\operatorname{rang}\hat{R} = \text{Spaltenrang}(\hat{R}) \geq r$.

Weitere Bemerkungen zu Satz 3.28:

1. Die Spalten $a_{j_1}, \dots, a_{j_r}$ bilden eine Basis des Spaltenraums von A.

2. Sei $j_k < j < j_{k+1}$ für ein $k \in \{1, \dots, r\}$. Dann ist a_j linear abhängig von $a_{j_1}, \dots, a_{j_k}$ und ebenfalls von $a_1, \dots, a_{j-1}$.

Beweis:

1. Im Beweis zu Satz 3.28 wurde gezeigt, dass $\hat{r}_{j_1}, \dots, \hat{r}_{j_r}$ linear unabhängig sind. Die gleiche Argumentation liefert $\tilde{r}_{j_1}, \dots, \tilde{r}_{j_r}$ linear unabhängig. Wegen $\tilde{G}$ invertierbar folgt $\tilde{G} \cdot \tilde{r}_{j_1}, \dots, \tilde{G} \cdot \tilde{r}_{j_r}$ linear unabhängig. Aus $A = \tilde{G} \cdot \tilde{R}$ ergibt sich $a_j = A \cdot e_j = \tilde{G} \cdot \tilde{R} \cdot e_j = \tilde{G} \cdot \tilde{r}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ und daher $a_{j_1}, \dots, a_{j_r}$ linear unabhängig. Wegen $\dim \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n) = r$ ist $a_{j_1}, \dots, a_{j_r}$ Basis von $\operatorname{span}(a_1, \dots, a_n)$.

2. Betrachte die Matrix $A' = (a_1 \dots a_j) \in K^{m \times j}$. $A' \neq 0$ wegen $a_{j_1} \neq 0$. Ihre Zeilenstufenform kann aus den ersten j Spalten der Zeilenstufenform von A gewonnen werden. Nach 1. bildet $a_{j_1}, \dots, a_{j_k}$ eine Basis von $\operatorname{span}(a_1, \dots, a_j)$, d.h $a_j \in \operatorname{span}(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) \subset \operatorname{span}(a_1, \dots, a_{j-1})$ (wegen $j_k < j$).

$\boxed{\textbf{Allgemeine lineare Gleichungssysteme}}$ $\quad (Ax = b \text{ mit } A \in K^{m\times n}, x \in K^n, b \in K^m)$

3.29 Lemma

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times n}$, $r = \operatorname{rang} A$, $b \in K^m$.

(a) Es gilt: $\dim \{x \in K^n : A\cdot x = 0\} = n - r$.

(b) Falls $x^* \in K^n$ existiert mit $A\cdot x^* = b$, dann gilt:
$\{x \in K^n : A\cdot x = b\} \ = \ \{x^* + x^{**} : \ x^{**} \in K^n, A\cdot x^{**} = 0\}$.

Bemerkung: Nach (b) erhält man die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ durch Addition einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems.

Beweis:

(a) Folgt aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen 3.22:
$\dim \operatorname{Kern} A + \underbrace{\dim \operatorname{Bild} A}_{r} = \underbrace{\dim K^n}_{n}$.

(b) $Ax = b \iff A(x^* + (x - x^*)) = b \overset{Ax^*=b}{\iff} A\cdot\underbrace{(x - x^*)}_{=:x^{**}} = 0 \iff x = x^* + x^{**} \wedge Ax^{**} = 0$

3.30 Satz (Auflösbarkeit des allgemeinen linearen Gleichungssystems)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$. Dann gilt:

(a) $\operatorname{rang}(A \ \ b) = \operatorname{rang} A \iff A\cdot x = b$ besitzt mindestens eine Lösung $x \in K^n$.

(b) $\operatorname{rang} A = n \implies A\cdot x = b$ besitzt höchstens eine Lösung $x \in K^n$.

(c) $\operatorname{rang}(A \ \ b) = \operatorname{rang} A = n \iff A\cdot x = b$ besitzt genau eine Lösung $x \in K^n$.

Bemerkung: Unter $(A \ \ b)$ ist die aus A und b zusammengesetzte Matrix $\in K^{m\times(n+1)}$ zu verstehen (“erweiterte Matrix“).

Beweis:

(a) $\operatorname{rang}(A \ \ b) = \operatorname{rang} A \iff \dim \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n, b) = \dim \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n) \iff$
$\operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n, b) = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n) \overset{3.7c}{\iff} b \in \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$
$\iff \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\cdot a_j = b \iff \exists\, \lambda \in K^n : \ A\cdot\lambda = b.$

(b) $\operatorname{rang} A = n \iff a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig $\overset{\text{Bem.zu3.6}}{\Longrightarrow}$ Es exist. höchstens eine Linearkombination mit $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\cdot a_j = b \iff A\cdot\lambda = b$ besitzt höchstens eine Lösung $\lambda \in K^n$.

(c) $''\Rightarrow''$: Folgt sofort aus (a) und (b).
$''\Leftarrow''$: $A\cdot x = b$ besitzt genau eine Lösung $\overset{3.29b}{\Longrightarrow} A\cdot x = 0$ besitzt nur die Lösung $x = 0$
$\iff a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig $\iff \operatorname{rang} A = n$.
$\operatorname{rang}(A \ \ b) = \operatorname{rang} A$ folgt aus (a).

3.31 Berechnung der Lösungen des allgemeinen linearen Gleichungssystems

Voraussetzung: $A \neq 0$.

$$\begin{array}{lcl} A & \overset{\text{EZU II,III}}{\longrightarrow} & \tilde{R} \quad \text{(Zeilenstufenform)} \\ b & \overset{\text{EZU II,III}}{\longrightarrow} & \tilde{b} \end{array}$$

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; \tilde{R}x = \tilde{b} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{\hat{b}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}r \text{ Zeilen} \\ \}m-r \text{ Zeilen} \end{array}$$

$Ax = b$ besitzt mindestens eine Lösung $\Leftrightarrow \hat{\hat{b}} = 0$

[Das ergibt sich aus dem Lösungsverfahren, kann aber auch direkt so eingesehen werden: $\hat{\hat{b}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde{b} \in \operatorname{span}(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n) \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang}(\tilde{R}\;\;\tilde{b}) = \operatorname{rang}\tilde{R} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang}(A\;\;b) = \operatorname{rang} A$.]

Sei ab jetzt $\hat{\hat{b}} = 0$.

Wir betrachten die Spalten $\hat{r}_{j_1}, \ldots, \hat{r}_{j_r}$ von $\hat{R}$ und schreiben $\hat{R}{\cdot}x = \hat{b}$ in der Form

$\sum\limits_{k=1}^{r} x_{j_k} {\cdot} \hat{r}_{j_k} = \hat{b} - \sum\limits_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j_1,\ldots,j_r\}} x_j {\cdot} \hat{r}_j$, d.h.

$$(\hat{r}_{j_1} \ldots \hat{r}_{j_r}) \cdot \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_k} \end{pmatrix} = \hat{b} - \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j_1,\ldots,j_r\}} x_j \cdot \hat{r}_j \qquad (*)$$

Setze $x_j := \underbrace{\mu_j}_{\text{beliebig}} \in K \quad (j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\})$

Durch diese μ_j ist die rechte Seite von $(*)$ festgelegt. Da auf der linken Seite eine Dreiecksmatrix mit nicht verschwindenden Diagonalelementen steht, ist $(*)$ eindeutig nach $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ auflösbar.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)}_{A \qquad\quad b} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -5 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ j_1 & j_2 & j_3 & & & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_4 &=& \mu_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& 1 - 2\mu_4 \\ -5x_2 - 7x_3 &=& 1 + 5\mu_4 \\ -4x_3 &=& 4\mu_4 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} x_3 = -\mu_4 \\ x_2 = -\frac{1}{5}(1 - 2\mu_4) = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mu_4 \\ x_1 = 1 - 2\mu_4 + 3\mu_4 + \frac{2}{5}(1 - 2\mu_4) = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}\mu_4 \end{array}$$

d.h. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$