

3. Übung zur Vorlesung Grundlagen der Analysis

Aufgabe 3-1 (Grenzwerte; 4 Punkte) Berechnen Sie die folgende Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4x}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 2x}$

Hinweis: Wenn ein Polynom p eine Nullstelle x_0 hat, dann kann man $(x - x_0)$ ausklammern, d.h. man kann p als $(x - x_0) \cdot q$ für ein Polynom q schreiben.

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - \sqrt{4x + 5}}{5 - x}$

Hinweis: Die Gleichung $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ kann hilfreich sein, um den Zähler zu vereinfachen.

Aufgabe 3-2 (Logarithmengesetz) Beweisen Sie die Formel $\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}$ unter Zuhilfenahme der Rechenregeln für Logarithmen und Potenzen.

Aufgabe 3-3 (Rechnen mit Logarithmen) Vereinfachen Sie mithilfe der in der Vorlesung behandelten Rechenregeln folgende Ausdruck soweit wie möglich:

a) $\ln x^2 - \ln x$

c) $\log 1 - 2(\log 2 + \log 8)$

b) $\ln x^3 - 6 \ln x + \ln(6x^4 + 3x^3)$

d) $\frac{\log(\sqrt{a})^3}{0,5 \log a} \cdot \log a^{-1}$

Dabei ist $\log x := \log_{10} x$ und $\ln x := \log_e x$.

Aufgabe 3-4 (Exponentialfunktion; 4 Punkte) Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf:

a) $e^{-0.3x} = 27$

b) $e^{2 \ln x} = 4$

c) $e^{\sqrt{x}} = y^2$

d) $e^x = e^{y^2} \cdot e^{2y+1}$

Aufgabe 3-5 (Grenzwerte; 4 Punkte)

a) Angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \infty$. Zeigen Sie, dass eine Zahl $C > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert: Es gibt ein N , so dass $|f(n)| < C \cdot |g(n)|$ für alle $n > N$ gilt.

b) Geben Sie für $f(n) = n^2$ und $g(n) = e^n$ ein konkretes $C > 0$ mit der Eigenschaft aus a) an. Begründen Sie.

Abgabe: Sie können Ihre Lösung bis zum Freitag, den 24.11. um 10 Uhr über UniWorX abgeben. Es werden Dateien im **txt**-Format (reiner Text) oder im **pdf**-Format akzeptiert.