§2 Vektorräume und lineare Abbildungen

Vektorräume

2.1 Definition (Vektorraum)

Sei K ein Körper. Eine Menge V mit den Abbildungen

$$+ : V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w \quad (\text{"Vektoraddition"})$$
$$\cdot : K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \quad (\text{"skalare Multiplikation"})$$

heißt Vektorraum über K oder K-Vektorraum, wenn gilt:

(a) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(b) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \qquad (\lambda \in K,\ v, w \in V)$

(c) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \qquad (\lambda, \mu \in K,\ v \in V)$

(d) $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \qquad (\lambda, \mu \in K,\ v \in V)$

(e) $1 \cdot v = v \qquad (v \in V)$

Die Elemente von V heißen Vektoren, die Elemente von K Skalare.

Bemerkungen:

1. (b),(c) ähneln Distributivgesetzen
   (d) ähnelt Assoziativgesetz
   (e) i. Ohne (e) wäre z. B. die Definition $\lambda \cdot v = 0$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ möglich. Damit wäre jede Gruppe V mit jedem Körper K ein K-Vektorraum.
   ii. Aus (d) folgt $1 \cdot (1 \cdot v) = (1 \cdot v)$, was (e) nahelegt, aber nicht erzwingt.

2. K ist K-Vektorraum.

Beispiele:

1. K^n (oder $\mathbb{R}^n$) ist Vektorraum über K (bzw. $\mathbb{R}$) [wichtigstes Beispiel]:

$$(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) := (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n) \qquad (v, w \in K^n)$$
$$\lambda \cdot (v_1, \dots, v_n) := (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) \qquad (\lambda \in K,\ v \in K^n)$$

(a): $(K^n, +)$ Gruppe, weil $(K, +)$ Gruppe (ÜA 16)
Neutrales Element: $(0, \dots, 0)$ "Nullvektor": Bez. 0_V oder $\mathbf{0}$.
Inverses Element zu $(v_1, \dots, v_n)$: $(-v_1, \dots, -v_n)$

(b):
$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (v + w) &= \lambda \cdot ((v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n)) \\
&\overset{Def.Add}{=} \lambda \cdot (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n) \\
&\overset{Def.skal.M.}{=} (\lambda \cdot (v_1 + w_1), \dots, \lambda \cdot (v_n + w_n)) \\
&\overset{Distr.G.in\ K}{=} (\lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot w_1, \dots, \lambda \cdot v_n + \lambda \cdot w_n) \\
&\overset{Def.Add}{=} (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) + (\lambda w_1, \dots, \lambda w_n) \\
&\overset{Def.skal.M.}{=} \lambda \cdot (v_1, \dots, v_n) + \lambda \cdot (w_1, \dots, w_n) \\
&= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w
\end{aligned}$$

(c)-(e): analog

Geometrische Deutung in $\mathbb{R}^2$: Vektoraddition mit Parallelogramm *(Skizze weggelassen)*

(a): inverses Element zu v: -v (Pfeil in umgekehrter Richtung mit Ansatz im Ursprung)

(b): Skalieren der Seiten des Parallelogramms mit dem Faktor λ bewirkt dieselbe Skalierung der Diagonalen.

(c),(d): analog

2. Sei W ein K-Vektorraum, M eine nicht leere Menge.
Dann ist $\mathrm{Abb}(M,W) := \{f : M \to W\}$ ein K-Vektorraum mit den Operationen

$f+g$: $M \to W$, $\quad (f+g)(x) := f(x)+g(x)$
$\lambda \cdot f : M \to W$, $\quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$

(a) $(\mathrm{Abb}(M,W),+)$ ist Gruppe mit der Nullfunktion [$\mathrm{null} : M \to W$, $\mathrm{null}(x) = 0$] als neutralem und der Funktion $-f$ [$-f : M \to W$, $x \mapsto -f(x)$] als zu f inversem Element.

(c) $(\lambda+\mu)\cdot f = \lambda\cdot f+\mu\cdot f$ wegen $((\lambda+\mu)\cdot f)(x) \overset{Def}{=} \underbrace{(\lambda+\mu)}_{\in K}\cdot\underbrace{f(x)}_{\in W} \overset{(c)\ f\ddot{u}r\ Vektorraum\ W}{=}$

$$\underbrace{\lambda\cdot f(x)}_{\in W}+\underbrace{\mu\cdot f(x)}_{\in W} \overset{Def}{=} (\lambda\cdot f)(x)+(\mu\cdot f)(x) \overset{Def}{=} (\lambda\cdot f+\mu\cdot f)(x)$$

(b),(d),(e) analog.

Wir betrachten folgende vier Spezialisierungen:

2.1 $M = W = K$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. D.h. $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}$) und $\mathrm{Abb}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ (komplexwertige Funkt. auf $\mathbb{C}$) sind jeweils Vektorräume.

2.2 $M = \mathbb{N}$, $W = K$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. D.h.
$\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R} \text{ für } n \in \mathbb{N}\}$ (Folgen reeller Zahlen)
$\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C} \text{ für } n \in \mathbb{N}\}$ (Folgen komplexer Zahlen)
mit
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Addition)
$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (skalare Multiplikation)
bilden jeweils einen Vektorraum.

2.3 $M = K^n$, $W = K^m$ ($m, n \in \mathbb{N}$ fest), d.h. $\mathrm{Abb}(K^n, K^m)$ ist ein K-Vektorraum.

2.4 $M = \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$, $W = K$, daher ist $\mathrm{Abb}(\{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}, K)$ ein K-Vektorraum.

2.2 Rechenregeln

Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt:

(a) $0 \cdot v = \mathbf{0} \qquad (v \in V)$

(b) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad (\lambda \in K)$

(c) $\lambda \cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = \mathbf{0} \quad (\lambda \in K,\ v \in V)$

(d) $(-1) \cdot v = -v \qquad (v \in V)$

Bemerkung: Ab jetzt schreiben wir für $0 \in K$ und $\mathbf{0} \in V$ einheitlich 0.

Beweis:

(a) $$\left.\begin{array}{lcr} 0 \cdot v + 0 \cdot v & \overset{2.1c}{=} & (0+0)\cdot v = 0 \cdot v \\ 0 \cdot v + 0 & = & 0 \cdot v \end{array}\right\} \overset{1.6c}{\Longrightarrow} 0 \cdot v = 0$$

(b) $$\left.\begin{array}{lcr} \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 & \overset{2.1b}{=} & \lambda \cdot (0+0) = \lambda \cdot 0 \\ \lambda \cdot 0 + 0 & = & \lambda \cdot 0 \end{array}\right\} \overset{1.6c}{\Longrightarrow} \lambda \cdot 0 = 0$$

(c) Sei $\lambda \cdot v = 0$.

1. Fall: $\lambda = 0$: fertig
2. Fall: $\lambda \neq 0$: Dann $v \overset{2.1e}{=} 1 \cdot v \overset{\lambda \neq 0,\ K\ \text{Körper}}{=} (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda)v \overset{2.1d}{=} \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) \overset{Vorauss.}{=} \frac{1}{\lambda} \cdot 0 \overset{(b)}{=} 0.$

(d) $$\left.\begin{array}{lcr} v + (-1)\cdot v & \overset{2.1e}{=} & 1 \cdot v + (-1) \cdot v \overset{2.1c}{=} (1+(-1)) \cdot v = 0 \cdot v \overset{(a)}{=} 0 \\ v + (-v) & = & 0 \end{array}\right\} \overset{\textit{Eind. des inv.Elements in } (V,+)}{\Longrightarrow}$$

$\Longrightarrow (-1) \cdot v = -v$

Lineare Abbildungen, Matrizen

Beispiel für ein lineares Gleichungssystem:
Gesucht $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 7x_2 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 8 \end{array}$$

Verallgemeinerung:
Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in K$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$, $b_i \in K$ $(i = 1, \ldots, m)$.
Gesucht $x_1, \ldots, x_n \in K$, so dass

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad (*)$$

<u>*1. Betrachtungsweise:*</u> (mit Hilfe linearer Abbildungen)
Setze mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$(\#) \left\{\begin{array}{ll} f_i : K^n \to K, & f_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, \ldots, m) \\ f\ : K^n \to K^m, & x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \\ [\text{ oder ausführlicher: } & \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{\in K^n} \mapsto \underbrace{(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))}_{\in K^m}] \end{array}\right.$$

Damit wird das lineare Gleichungssystem $(*)$ zu einer Gleichung im Vektorraum K^m:
Gegeben $f : K^n \to K^m$ wie in $(\#)$, $b \in K^m$.
Gesucht $x \in K^n$, so dass $f(x) = b$.

Ziel: Charakterisierung von f ohne Verwendung der a_{ij}

Seien $x, y \in K^n,\ \lambda \in K$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} f_i(x+y) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j + y_j) = \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j + a_{ij}y_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = f_i(x) + f_i(y) \\ f_i(\lambda \cdot x) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda x_j) = \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \lambda f_i(x) \end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (f_1(x+y), \ldots, f_m(x+y)) = (f_1(x) + f_1(y), \ldots, f_m(x) + f_m(y)) \\ &= (f_1(x), \ldots, f_m(x)) + (f_1(y), \ldots, f_m(y)) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda \cdot x) &= (f_1(\lambda \cdot x), \ldots, f_m(\lambda \cdot x)) = (\lambda f_1(x), \ldots, \lambda f_m(x)) \\ &= \lambda \cdot (f_1(x), \ldots, f_m(x)) = \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

2.3 Definition (lineare Abbildung, $\mathrm{Hom}(V, W)$)

(a) Seien V, W K-Vektorräume. $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung oder Vektorraumhomomorphismus , wenn gilt

$$\begin{aligned} \forall v, w \in V : &\qquad f(v+w) = f(v) + f(w) \\ \forall v \in V,\ \lambda \in K : &\qquad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \end{aligned}$$

(b) Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Vektorraumisomorphismus und V und W isomorphe Vektorräume.

(c) $\mathrm{Hom}(V, W) := \{f : V \to W :\ f \text{ linear}\}$ (Menge der linearen Abb. von V nach W)

Bemerkungen:

1. $f : V \to W$ linear, $v_1, \ldots, v_n \in V,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \ \Rightarrow\ f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(v_i)$.

   [Denn: $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i) = f(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n) = f(\lambda_1 \cdot v_1) + \ldots + f(\lambda_n \cdot v_n) =$

   $$= \lambda_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(v_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(v_i) \ ]$$

2. $f : V \to W$ linear $\Rightarrow$ $f(0) = 0$.

   [Denn: $f(0) \overset{2.2a \text{ für } v=0}{=} f(0 \cdot 0) \overset{f(\lambda v) = \lambda f(v)}{=} 0 \cdot f(0) \overset{2.2a}{=} 0$]

   In der Analysis bezeichnet man das reelle Polynom vom Grad 1 $p(x) = a \cdot x + b$ ($x \in \mathbb{R}$) mit $a \neq 0$ häufig als linear. Im Sinne der linearen Algebra handelt es sich nur um eine lineare Abbildung, wenn $b = 0$.

3. $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist mit der Addition und skalaren Multiplikation aus $\mathrm{Abb}(V, W)$ ebenfalls ein K-Vektorraum. (Bew.: Evtl. Übung)

4. Wir werden in Kürze sehen, dass sich jede lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ in der Gestalt (#) schreiben lässt.

2. Betrachtungsweise: (mit Hilfe von Matrizen)

2.4 Definition ($m \times n$-Matrix über K, $K^{m\times n}$)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in K$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$. Das rechteckige Schema mit m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt $m \times n$-Matrix (über K) und wird als $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ oder abgekürzt (a_{ij}) geschrieben.
$K^{m\times n}$ bezeichnet die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K.

$a_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m} \in K^{m\times 1}$ heißt j-te Spalte von A

$a^{(i)} = (a_{i1} \dots a_{in}) = (a_{ij})_{j=1,\dots,n} \in K^{1\times n}$ heißt i-te Zeile von A.

Bemerkung:

1. Der erste äußere Index von $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ – hier i – ist immer der Zeilenindex, der zweite der Spaltenindex. Dabei kommt es nicht auf die Benennung an und auch nicht auf die Schreibweise der zu durchlaufenden Indizes in $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Letztere ist rein drucktechnisch bedingt und könnte genauso gut als $(a_{ij})_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n}$ oder umgekehrt $(a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}}$ geschrieben werden. (Die äußeren Indizes können weggelassen werden, wenn die inneren Indizes in der gleichen Reihenfolge wie die äußeren angeordnet sind und die zu durchlaufenden Indexbereiche aus dem Zusammenhang hervorgehen.)

2. $K^{m\times 1} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : \ x_i \in K$ für $i = 1, \dots, m\}$ "Spaltenvektoren"
   $K^{1\times n} = \{(x_1 \dots x_n) : \ x_i \in K$ für $i = 1, \dots, n\}$ "Zeilenvektoren"
   Zum Vergleich: $K^n = \{(x_1, \dots, x_n) : \ x_i \in K$ für $i = 1, \dots, n\}$ "n-Tupel"

3. Wie in Beispiel (g) zu Definition 0.26 kann jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ als eine Funktion $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$ aufgefasst werden.
   Man kann daher $K^{m\times n}$ mit $\mathrm{Abb}(\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}, K)$ identifizieren.

$K^{m\times n}$ ist somit nach Beispiel 2.4 zu Def. 2.1 ein K-Vektorraum.
Zusammengefasst:

2.5 Definition und Satz (Matrizenaddition, skalare Multiplikation)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in K^{m\times n}$, $\lambda \in K$.

$$\begin{aligned} A + B &:= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} && \text{(Matrizenaddition)} \\ \lambda A &:= (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} && \text{(skalare Multiplikation)} \end{aligned}$$

Mit diesen Operationen ist $K^{m\times n}$ ein K-Vektorraum.

Bemerkung: Insbesondere gilt also nach Definition 2.1

$$\begin{aligned} \lambda\cdot(A+B) &= \lambda\cdot A+\lambda\cdot B \\ (\lambda+\mu)\cdot A &= \lambda\cdot A+\mu\cdot A \\ (\lambda\cdot\mu)\cdot A &= \lambda\cdot(\mu\cdot A) \\ 1\cdot A &= A \end{aligned}$$

und den Rechenregeln 2.2

$$\begin{aligned} \underbrace{0}_{\in K}\cdot A &= \underbrace{0}_{\text{Nullmatrix}} \\ \lambda\cdot 0 &= 0 \\ (-1)\cdot A &= -A \end{aligned}$$

Wir wollen ein Produkt zwischen Matrizen definieren:

Spezialfall:

$$\underbrace{(\alpha_1\dots\alpha_n)}_{\in K^{1\times n}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}}_{\in K^{n\times 1}} = \underbrace{(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_n\beta_n)}_{\in K^{1\times 1}}$$

Verallgemeinerung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \mathbf{a_{i1}} & \dots & \mathbf{a_{in}}\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}}_{\in K^{m\times n}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{x_1}\\ \vdots\\ \mathbf{x_n}\end{pmatrix}}_{\in K^{n\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n\\ \mathbf{a_{i1}x_1}+\ldots+\mathbf{a_{in}x_n}\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}}_{\in K^{m\times 1}} = \begin{pmatrix}\vdots\\ \sum\limits_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{a_{ij}x_j}\\ \vdots\end{pmatrix}$$

d.h. $A\cdot x=b$ mit $b_i=(A\cdot x)_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \ (i=1,\ldots,m)$

Allgemeiner Fall:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Ersetze } x_j \text{ durch } b_{jk} & & k-\text{te Spalte} & \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \mathbf{a_{i1}} & \dots & \mathbf{a_{in}}\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} b_{11} & \mathbf{b_{1k}} & b_{1r}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & \mathbf{b_{nk}} & b_{nr}\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} c_{11} & \vdots & c_{1r}\\ \dots & \mathbf{c_{ik}} & \dots\\ c_{m1} & \vdots & c_{mr}\end{pmatrix} & \leftarrow i-\text{te Zeile} \\ A & \cdot & B & = & C & \\ \in K^{m\times n} & & \in K^{n\times r} & & \in K^{m\times r} & \end{array}$$

d.h. $A\cdot B=C$ mit $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$

2.6 Definition (Matrizenmultiplikation)

Sei K ein Körper, $m,n,r\in\mathbb{N}$, $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}\in K^{m\times n}$, $B=(b_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,r}}\in K^{n\times r}$. Dann setze

$$A\cdot B := \left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ k=1,\ldots,r}} \in K^{m\times r}$$

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ ist nur definiert, wenn Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B.

Wir haben bereits gesehen, dass sich das lineare Gleichungssystem als Matrizenprodukt

$$\underbrace{A}_{\in K^{m\times n}} \cdot \underbrace{x}_{\in K^{n\times 1}} = \underbrace{b}_{\in K^{m\times 1}}$$

schreiben lässt. Wir gelangen so zu einer Abbildung

$$\tilde{f} : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1},\ \tilde{f}(x) = A \cdot x,$$

die in der 1. Betrachtungsweise der Abbildung

$$f : K^n \to K^m,\ f(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right)$$

entspricht.

Bei $K^{n\times 1}$ (Spaltenvektoren) [und $K^{1\times n}$ (Zeilenvektoren)] handelt es sich um zu K^n isomorphe K-Vektorräume. Die Matrixschreibweise ist so praktisch, dass wir in Zukunft K^n mit $K^{n\times 1}$ (und K^m mit $K^{m\times 1}$) identifizieren, d.h. Vektoren aus K^n (bzw. K^m) normalerweise als *Spaltenvektoren* schreiben.

2.7 Definition (Kroneckersymbol, Einheitsmatrix, Einheitsvektoren)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$ heißt Kroneckersymbol.

(b) $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \in K^{n\times n}$ heißt Einheitsmatrix (über K).

(c) Die j-te Spalte von E_n $e_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$ wird als j-ter Einheitsvektor von K^n bezeichnet.

Bemerkung: $e_j = (\delta_{ij})_{i=1,\ldots,n}$.

2.8 Definition und Satz (Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen)
Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Zu jeder linearen Abbildung $f : K^n \to K^m$ existiert genau eine Matrix $A \in K^{m\times n}$, so dass
$$f(x) = A\cdot x \quad (x \in K^n).$$
Insbesondere gilt $a_{ij} = f_i(e_j)$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$ und $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = f(e_j)$.

A heißt darstellende Matrix von f.

(b) Für jedes $A \in K^{m\times n}$ ist die Abbildung $f : K^n \to K^m,\ f(x) = A\cdot x$ linear.

Merke: Die Spalten der darstellenden Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren.

Beweis:

(a) *Existenz:* Wir setzen $a_{ij} := f_i(e_j)$ und erhalten $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(e_j) \\ \vdots \\ f_m(e_j) \end{pmatrix} = f(e_j)$.

Wegen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j$$

folgt $f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j\right) \overset{f \text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_j,$

daher $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix},$

d.h. $f(x) = A \cdot x$ und $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = (Ax)_i \qquad (\diamond)$.

Eindeutigkeit: $A\cdot x = A'\cdot x$ $(x \in K^n)$ $\Rightarrow$ $Ae_j = A'e_j$ $(j = 1, \dots, n)$
$\Rightarrow$ $a_j = a'_j$ $(j = 1, \dots, n)$ $\Rightarrow$ $a_{ij} = a'_{ij}$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$ $\Rightarrow$ $A = A'$.

(b) Bereits im Abschnitt vor Definition 2.3 bewiesen.

Beispiel: $D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ "Drehmatrix um den Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$"

Veranschaulichung: [Ebene Geometrie und Trigonometrie als bekannt vorausgesetzt]
Drehung (um den Ursprung) $d_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist linear, denn:
$d_\varphi(a+b) = d_\varphi(a) + d_\varphi(b)$ (Diagonale eines Parallelogramms mit einer Ecke im Ursprung wird um den gleichen Winkel gedreht wie die Seiten mit dieser Ecke)
$d_\varphi(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot d_\varphi(a)$ (Drehstreckung = Streckdrehung)
Die Spalten von D_φ sind die Bilder der Einheitsvektoren, die sich folgendermaßen ergeben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

2.9 Folgerung

Sei K ein Körper, $m, n, r \in \mathbb{N}$, seien $f : K^n \to K^m$ und $g : K^r \to K^n$ lineare Abbildungen mit den darstellenden Matrizen $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann ist $C := A \cdot B \in K^{m\times r}$ die darstellende Matrix für die lineare Abbildung $f \circ g : K^r \to K^m$.

Beweis:
$f \circ g$ ist linear (evtl. Übungsaufgabe)
$(f \circ g)(e_k) = f(g(e_k)) = f(B \cdot e_k) = A \cdot (B \cdot e_k)$
Sei C die darstellende Matrix von $f \circ g$. Dann

$$c_{ik} \overset{2.8}{=} (f \circ g)_i(e_k) = (A \cdot (B \cdot e_k))_i \overset{(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \text{ mit } x = B\cdot e_k}{\overset{\downarrow}{=}} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \underbrace{(B \cdot e_k)_j}_{b_{jk}} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} =$$

$$\overset{2.6}{=} (A \cdot B)_{ik} \quad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r)$$

Beispiel: Trigonometrische Additionstheoreme
Für Drehungen um den Ursprung in $\mathbb{R}^2$ gilt: $d_{\varphi+\psi} = d_\varphi \circ d_\psi$, also $D_{\varphi+\psi} = D_\varphi \cdot D_\psi$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,$$
$$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi.$$

2.10 Rechenregeln für Matrizen

Sei K ein Körper, $m, n, r, s \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $A \in K^{m\times n},\ B \in K^{n\times r},\ C \in K^{r\times s}$
$\Rightarrow A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(b) $A \in K^{m\times n}$
$\Rightarrow E_m \cdot A = A = A \cdot E_n$

(c) $A \in K^{m\times n},\ B, C \in K^{n\times r}$
$\Rightarrow A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

(d) $A, B \in K^{m\times n},\ C \in K^{n\times r}$
$\Rightarrow (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

(e) $\lambda \in K,\ A \in K^{m\times n},\ B \in K^{n\times r}$
$\Rightarrow \lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Beweis:

(a) Betrachte $h : K^s \to K^r,\ g : K^r \to K^n,\ f : K^n \to K^m$ mit den darstellenden Matrizen A, B, C. Wegen

$$(f \circ g) \circ h \overset{\text{Satz 0.27}}{=} f \circ (g \circ h)$$

und Folgerung 2.9 ergibt sich

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

(b) $(E_m \cdot A)_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\delta_{ij}}_{\substack{1 \quad \text{für } i=j \\ 0 \quad \text{sonst}}} a_{jk} = a_{ik} = (A)_{ik} \quad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$

$\Rightarrow E_m \cdot A = A$.
Analog $A \cdot E_n = A$.

(c)-(d) Evtl. Übung, Tutorium.

(e) $(\lambda \cdot (A \cdot B))_{ik} = \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda \cdot a_{ij}) \cdot b_{jk} = ((\lambda \cdot A) \cdot B)_{ik}$ usw.

Bemerkung:
Die quadratischen Matrizen $K^{n\times n}$ bilden wegen (b)-(d) mit der Matrizenaddition und der Matrizenmultiplikation einen Ring mit E_n als Einselement.
Dieser Ring ist für $n \geq 2$ weder kommutativ noch nullteilerfrei.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Nullmatrix}}$$

2.11 Definition (transponierte Matrix)
Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in K^{m \times n}$.
$A^T := (a_{ij})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,m}} = (a_{ji})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} \in K^{n \times m}$ heißt die zu A transponierte Matrix.

Bemerkung: Die Zeilen von A sind die Spalten von A^T und umgekehrt.

Beispiel:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.
$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $b^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

2.12 Rechenregeln (für transponierte Matrizen)
Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $A \in K^{m\times n} \Rightarrow (A^T)^T = A$

(b) $A, B \in K^{m\times n} \Rightarrow (A + B)^T = A^T + B^T$

(c) $\lambda \in K,\ A \in K^{m\times n} \Rightarrow (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

(d) $A \in K^{m\times n},\ B \in K^{n\times r} \Rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Beweis:

(a)-(c) Klar.

(d) $A \cdot B \in K^{m\times r} \Rightarrow (A \cdot B)^T \in K^{r\times m}$

$$((A \cdot B)^T)_{ik} = (A \cdot B)_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{A_{kj}}_{a_{kj}} \cdot \underbrace{B_{ji}}_{b_{ji}} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(A^T)_{jk}}_{\in K} \cdot \underbrace{(B^T)_{ij}}_{\in K} = \sum_{j=1}^{n} (B^T)_{ij} \cdot (A^T)_{jk}$$
$$= (B^T \cdot A^T)_{ik} \quad (i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, m)$$

2.13 Definition und Lemma (inverse Matrix, $GL(n.K)$)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn $B \in K^{n\times n}$ existiert mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$.
B ist eindeutig bestimmt und heißt inverse Matrix zu A (Bezeichnung: A^{-1}). Die Menge der invertierbaren Matrizen aus $K^{n\times n}$ ist bzgl. der Matrixmultiplikation eine Gruppe und wird als $GL(n, K)$ ("general linear group") bezeichnet.

Beweis:
$GL(n, K) = \{A \in K^{n\times n}\colon\ A \text{ invertierbar}\}$ ist die Einheitengruppe des Rings $(K^{n\times n}, +, \cdot)$.
Die Aussagen folgen aus Satz und Definition 1.18.

2.14 Rechenregeln (für inverse Matrizen)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow A \cdot B$ invertierbar, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(b) $A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow A^{-1}$ invertierbar, $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) $A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis:

(a) $A, B \in GL(n,K),\ GL(n,K)$ Gruppe $\overset{\text{Lemma 1.6a}}{\Rightarrow} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(b) Analog mit Lemma 1.6b.

(c) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \overset{2.12\text{d}}{\Rightarrow} (A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = E_n^T = E_n$
$\Rightarrow A^T \in GL(n,K),\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2.15 Elementarmatrizen und elementare Zeilen/Spaltenumformungen

Die folgenden 3 Matrizen heißen Elementarmatrizen. Es handelt sich dabei um quadratische Matrizen, die sich nur an wenigen Stellen von der Einheitsmatrix unterscheiden.

$$S_i(\lambda) := \begin{array}{c l} \begin{array}{ccccc} & & i\text{-te Spalte} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad (\lambda \in K \setminus \{0\})$$

$$Q_i^j(\lambda) := \begin{array}{c l} \begin{array}{cccc} & & j\text{-te Spalte} & \\ & & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad (\lambda \in K,\ i \neq j)$$

$$P_i^j := \begin{array}{c l} \begin{array}{ccccccc} & & & & j\text{-te Spalte} & & \\ & & & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad (i \neq j)$$

Wirkung auf $A \in K^{m\times n}$: $\quad A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} = (a_1 \dots a_n)$:

Zeilenumformungen:

El. Matrix	Inverse	Matrizenmultiplikation	element. Zeilenumformung	Kürzel
$S_i(\lambda) \in K^{m\times m}$	$S_i(\frac{1}{\lambda})$	$S_i(\lambda) \cdot A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$	Multipl. der i-ten Zeile mit λ	EZU I
$Q_i^j(\lambda) \in K^{m\times m}$	$Q_i^j(-\lambda)$	$Q_i^j(\lambda) \cdot A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(i)} + \lambda a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$	Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile	EZU II
$P_i^j \in K^{m\times m}$	P_i^j	$P_i^j \cdot A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$	Vertauschung der i-ten und der j-ten Zeile	EZU III

Spaltenumformungen:
(Deutlichkeitshalber schreiben wir hier neben $A = (a_1 \dots a_n)$ auch $A = (a_1, \dots, a_n)$.

El. Matrix	Inverse	Matrizenmultiplikation	element. Spaltenumformung	Kürzel
$S_i(\lambda) \in K^{n\times n}$	$S_i(\frac{1}{\lambda})$	$A \cdot S_i(\lambda)$ $= (a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n)$	Multiplikation der i-ten Spalte mit λ	ESU I
$Q_i^j(\lambda) \in K^{n\times n}$	$Q_i^j(-\lambda)$	$A \cdot Q_i^j(\lambda)$ $= (a_1, \dots, a_j + \lambda a_i, \dots, a_n)$	Addition des λ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte	ESU II
$P_i^j \in K^{n\times n}$	P_i^j	$A \cdot P_i^j$ $= (a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$	Vertauschung der i-ten und der j-ten Spalte	ESU III

Wir rechnen exemplarisch ESU II nach: $Q_i^j = E_n + \lambda \cdot (0, \dots, \overset{j\text{-te Spalte}}{e_i}, \dots, 0)$
$A \cdot Q_i^j(\lambda) = A \cdot (E_n + \lambda \cdot (0, \dots, \overset{j\text{-te Spalte}}{e_i}, \dots, 0))$
$= (a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) + \lambda \cdot (0, \dots, \overset{j\text{-te Spalte}}{a_i}, \dots, 0) = (a_1, \dots, \underbrace{a_j + \lambda a_i}_{j\text{-te Spalte}}, \dots, a_n)$

(Entsprechend bewirkt $Q_j^i(\lambda)$ in $A^T \cdot Q_j^i(\lambda)$ die Addition des λ-fachen der j-ten Spalte von A^T zur i-ten Spalte von A^T. Hieraus folgt durch Transposition, dass $Q_j^i(\lambda)^T = Q_i^j(\lambda)$ in $Q_j^i(\lambda)^T \cdot A^{T^T} = Q_i^j(\lambda) \cdot A$ die Addition des λ-fachen der j-ten Zeile von A zur i-ten Zeile von A bewirkt.)
Durch Nachrechnen (Übung): $Q_i^j(\lambda) \cdot Q_i^j(-\lambda) = E_n$. Mit der Ersetzung $\lambda \to -\lambda$ folgt hieraus $Q_i^j(-\lambda) \cdot Q_i^j(\lambda) = E_n$, daher $Q_i^j(\lambda)$ invertierbar mit $(Q_i^j(\lambda))^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$.

2.16 Lemma

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times n}$, $a_{11} \neq 0$. Dann gilt:

(a) Es existiert $G \in K^{m\times m}$ invertierbar und $\tilde{A} \in K^{(m-1)\times(n-1)}$, so dass

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

(b) Außerdem existiert $G \in K^{m\times m}$ und $H \in K^{n\times n}$, beide invertierbar, und $\hat{A} \in K^{(m-1)\times(n-1)}$, so dass

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H.$$

Bemerkung: Wir lassen die Fälle $m = 1$ und $n = 1$ zu, was als Nichtvorhandensein der Matrix $\tilde{A}$ bzw. $\hat{A}$ und der Nullelemente in der ersten Spalte oder Zeile interpretiert werden soll.

Beweis:

(a) Zeilenumformungen vom Typ II liefern für $m > 1$ das Resultat:
$G = \left[Q_m^1(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}) \cdot Q_{m-1}^1(-\frac{a_{m-1\,1}}{a_{11}}) \cdot \ldots \cdot Q_2^1(-\frac{a_{21}}{a_{11}})\right]^{-1}$
[Die Anwendung von $Q_i^1(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$ auf A bewirkt die Annullierung von a_{i1}.]
G ist wohldefiniert und invertierbar, da jede einzelne Elementarmatrix invertierbar ist.

(b) Wende für $n > 1$ Spaltenumformungen vom Typ II und Typ I auf $G^{-1}A$ aus (a) an. Damit ergibt sich
$H = [\ Q_1^2(-\frac{a_{12}}{a_{11}}) \cdot Q_1^3(-\frac{a_{13}}{a_{11}}) \cdot \ldots \cdot Q_1^n(-\frac{a_{1n}}{a_{11}}) \cdot \underbrace{S_1(\frac{1}{a_{11}})}_{\text{Skalierung auf 1}}\ ]^{-1}$

2.17 Satz (Äquivalenznormalform)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times n}$. Dann gibt es $G \in K^{m\times m}$ und $H \in K^{n\times n}$, beide invertierbar, und $r \in \{0, \ldots, \min(m,n)\}$, so dass

$$A = G \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \cdot H \quad \Big\} m \text{ Zeilen}$$

Bemerkung: Wir lassen explizit die Fälle $r = 0$, $r = m$ und $r = n$ zu, was zum Verschwinden von E_r bzw. der Nullzeilen oder Nullspalten führt.

Beweis:

1.F.: $A = 0$: In diesem Fall gilt $r = 0$ und $A = E_m \cdot 0 \cdot E_n$.

2.F.: $A \neq 0$: [Setze im folg. $P_k^k := E_m$ bzw. E_n bei linker/rechter Multiplikation mit A.]

(i) $a_{11} \neq 0$: Wende Lemma 2.16b an.

(ii) $a_{11} = 0$: Wegen $A \neq 0$ existiert mindestens ein Matrixelement $a_{ij} \neq 0$. Mit elementaren Zeilen- und Spaltenvertauschungen (vom Typ III) erhält man, dass in

$A' := P_i^1 \cdot A \cdot P_j^1 \quad a'_{11} \neq 0$ gilt. Nach Lemma 2.16b $A' = G' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H'$,

also $A \overset{\substack{(P_i^1)^{-1} = P_i^1 \\ \downarrow}}{=} P_i^1 \cdot G' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H' \cdot P_j^1$.

Insgesamt: $A \neq 0 \Rightarrow \exists \hat{G} \in K^{m\times m}$ invertierbar, $\hat{H} \in K^{n\times n}$ invertierbar, $\hat{A} \in K^{(m-1)\times(n-1)}$, so dass

$$A = \hat{G} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \hat{H} \, .$$

Im Fall $\hat{A} = 0$ oder des Nichtvorhandenseins von $\hat{A}$ für $m = 1$ oder $n = 1$ ist die Äquivalenzform bereits gefunden.
Ist $\hat{A} \neq 0$, so lässt sich das Verfahren mit der mittleren Matrix der rechten Seite und Zielelement $\hat{a}_{11}$ fortsetzen. Dabei kommen dann nur noch elementare Zeilen/Spaltenumformungen ab der 2. Zeile und 2. Spalte zum Einsatz. Man gelangt zu

$$A = \hat{G} \cdot \hat{\hat{G}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \hat{\hat{A}} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \cdot \hat{\hat{H}} \cdot \hat{H} \, .$$

Die Fortsetzung dieser Vorgehensweise liefert die Behauptung.

2.18 Satz

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $f : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung und $A \in K^{m \times n}$ ihre darstellende Matrix. Dann gilt:

$$f \text{ bijektiv} \quad \Leftrightarrow \quad m = n \ \wedge \ A \text{ invertierbar}$$

Beweis:

"$\Leftarrow$" Sei $A \in K^{n \times n}$ invertierbar. Dann besitzt $f : K^n \to K^n$, $f(x) = A \cdot x$ die Umkehrabbildung $f^{-1} : K^n \to K^n$, $f(x) = A^{-1} \cdot x$, also ist f bijektiv nach Definition und Satz 0.33.
[$f^{-1}(f(x)) = A^{-1} \cdot A \cdot x = x \quad (x \in K^n), \quad f(f^{-1}(x)) = A \cdot A^{-1} \cdot x = x \quad (x \in K^n)$]

"$\Rightarrow$" Sei $f : K^n \to K^m$ bijektiv, $A \in K^{m \times n}$ darstellende Matrix von f. Nach Satz 2.17 gilt

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

mit $G \in K^{m \times m}$ und $H \in K^{n \times n}$ invertierbar. Somit sind die linearen Abbildungen $g : K^m \to K^m$, $g(x) = G \cdot x$ und $h : K^n \to K^n$, $h(x) = H \cdot x$ jeweils bijektiv und $\tilde{f} : K^n \to K^m$, $\tilde{f} = g^{-1} \circ f \circ h^{-1}$ ebenfalls bijektiv. $\tilde{f}$ besitzt die darstellende Matrix $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\tilde{f}$ bijektiv kann diese Matrix keine Nullzeile *und* keine Nullspalte enthalten.

Denn: Ist die j-te Spalte eine Nullspalte, so folgt $\tilde{f}(e_j) = 0 = \tilde{f}(0)$, d.h. $\tilde{f}$ ist *nicht* injektiv.
Ist die i-te Zeile eine Nullzeile, so folgt $\tilde{f}_i(x) = 0$ $(x \in K^n)$, d.h. $e_i \notin \tilde{f}(K^n)$, also $\tilde{f}(K^n) \neq K^m$, somit $\tilde{f}$ *nicht* surjektiv.

Daher folgt $r = m$ und $r = n$, somit $m = n$ und $A = G \cdot E_n \cdot H = G \cdot H$. Wegen G, H invertierbar ist auch A invertierbar.

2.19 Satz

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $f : K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(a) f ist bijektiv,

(b) f ist injektiv,

(c) f ist surjektiv.

Beweis:
Wir benutzen die Abbildung $\tilde{f} : K^n \to K^n$ aus dem Beweis zu 2.18. Ihre darstellende Matrix ist $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$, wobei die Fälle $r = 0$ und $r = n$ explizit zugelassen sind.
Wegen $\tilde{f} = g^{-1} \circ f \circ h^{-1}$ und g, h bijektiv gilt:
f injektiv $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ injektiv,
f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ surjektiv.

Wir zeigen: $\tilde{f}$ injektiv $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ bijektiv

$$\tilde{f} \text{ injektiv} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ enthält \textit{keine} Nullspalte (vgl. Beweis zu 2.18)}$$

$$\overset{\text{Matrix quadrat.}}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ enthält \textit{keine} Nullzeile}$$

$$\Rightarrow \quad E_r = E_n \text{ ist darstellende Matrix von } \tilde{f} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} \text{ bijektiv.}$$

Analog zeigt man: $\tilde{f}$ surjektiv $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ bijektiv.

2.20 Corollar

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$,$A \in K^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist invertierbar.

(b) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (x \in K^n)$, d.h. die homogene Gleichung $Ax = 0$ besitzt *nur* die triviale Lösung [d.h. $x = 0$].

(c) $\forall\, b \in K^n\, \exists\, x \in K^n : Ax = b$, d.h. das lineare Gleichungssytem besitzt für jede rechte Seite *mindestens* eine Lösung.

(d) $\forall\, b \in K^n\, \exists_1\, x \in K^n : Ax = b$, d.h. das lineare Gleichungssytem besitzt für jede rechte Seite *genau* eine Lösung.

Bemerkung: Corollar 2.20 enthält die *Fredholmsche Alternative*: Entweder besitzt die homogene Gleichung $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung oder die inhomogene Gleichung $Ax = b$ ist für jede rechte Seite eindeutig lösbar.

Beweis:
Betrachte $f : K^n \to K^n,\ f(x) = Ax$

(d)$\Leftrightarrow$(a): (d) $\Leftrightarrow f$ bijektiv $\overset{2.18}{\Leftrightarrow} A$ invertierbar

(d)$\Leftrightarrow$(b): (d) $\Leftrightarrow f$ bijektiv $\overset{2.19}{\Leftrightarrow} f$ injektiv

Zeige: f injektiv $\Leftrightarrow (\forall x \in K^n : \overbrace{f(x) = 0}^{Ax=0} \Rightarrow x = 0)$
"$\Rightarrow$": f injektiv, dann insbesondere $f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$
"$\Leftarrow$": $f(x) = f(x') \overset{f \text{ linear}}{\Leftrightarrow} f(x - x') = 0 \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} x - x' = 0 \Leftrightarrow x = x'$

(d)$\Leftrightarrow$(c): (d) $\Leftrightarrow f$ bijektiv $\overset{2.19c}{\Leftrightarrow} f$ surjektiv $\Leftrightarrow$ (c)

2.21 Folgerung

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. $A \in K^{n\times n}$ ist bereits dann invertierbar, wenn ein $B \in K^{n\times n}$ existiert, so dass $A \cdot B = E_n$ oder $B \cdot A = E_n$. In diesem Fall gilt $B = A^{-1}$.

Beweis:
1.Fall: $A \cdot B = E_n$.
Dann: $\forall\, b \in K^n : (A \cdot B) \cdot b = b \Rightarrow \forall\, b \in K^n : A \cdot (B \cdot b) = b \overset{2.20c\Rightarrow a}{\Rightarrow} A$ invertierbar.
Somit: $A \cdot B = E_n \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot E_n \Rightarrow B = A^{-1}$.

2.Fall: $B \cdot A = E_n$.
Sei $Ax = 0$. Dann $x = E_n x = B \cdot \underbrace{Ax}_{0} = B \cdot 0 = 0 \overset{2.20b \Rightarrow a}{\Rightarrow} A$ invertierbar.
Also: $B \cdot A = E_n \Rightarrow B \cdot A \cdot A^{-1} = E_n \cdot A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$

Wir wollen jetzt zeigen, dass sich invertierbare Matrizen allein durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix transformieren lassen.

1. Phase: Transformation in eine obere Dreiecksmatrix
2. Phase: Transformation der oberen Dreiecksmatrix in die Einheitsmatrix

2.22 Definition (Dreiecksmatrix)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.
$R \in K^{n\times n}$ heißt rechte oder obere Dreiecksmatrix, wenn $r_{ij} = 0$ für $1 \le j < i \le n$.
$L \in K^{n\times n}$ heißt linke oder untere Dreiecksmatrix, wenn $l_{ij} = 0$ für $1 \le i < j \le n$.

2.23 Satz (Transformation auf Dreiecksform)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Jede invertierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ kann durch elementare Zeilenumformungen von Typ II und III auf obere Dreiecksform gebracht werden. Alle Diagonalelemente der Dreiecksmatrix sind $\neq 0$.

Beweis: Gaußsches Eliminationsverfahren.
Vollständige Induktion nach n:
$n = 1$: $A \in K^{1\times 1}$ invertierbar $\Leftrightarrow a_{11} \neq 0$. Also ist A Dreiecksmatrix mit Diagonale $\neq 0$.
$n \to n+1$: Die Behauptung sei für n bewiesen (Induktionsannahme).
Betrachte $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$ invertierbar.

$$A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n+1)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EZU III, falls } a_{11}=0} \begin{pmatrix} a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n+1)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{EZU II mehrfach} \\ \text{wie in Lemma 2.16a}}} \begin{pmatrix} \overbrace{a_{i1}}^{\alpha:=} & \overbrace{a_{i2} \;\cdots\; a_{in+1}}^{\tilde{a}^T:=} \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Eine EZU III ist nur erforderlich, wenn $a_{11} = 0$. Sie ist möglich, weil die 1. Spalte *keine* Nullspalte ist. (Andernfalls wäre $Ae_1 = 0$, d.h. A nicht invertierbar nach Corollar 2.20.)
Nach Induktionsannahme kann $\tilde{A} \in K^{n\times n}$ durch elementare Zeilenumformungen vom Typ II und III auf obere Dreiecksform mit Nichtnulldiagonalelementen gebracht werden, *falls* $\tilde{A}$ invertierbar ist.
Zeige: $\tilde{A}\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x} = 0$. (Dann $\tilde{A}$ invertierbar nach Corollar 2.20.)
Sei $\tilde{A}\tilde{x} = 0$. Wähle $x_1 \in K$ so, dass $\alpha x_1 + \tilde{a}^T\tilde{x} = 0$. [Möglich, weil $\alpha \neq 0$.]
Dann gilt: $\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \tilde{a}^T \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{invertierbar, da durch} \\ \text{Anwendung von EZUs} \\ \text{auf invertierbares } A \\ \text{entstanden}}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also $\begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D.h. $\tilde{x} = 0$.

Die auf $\hat{A}$ angewandten elementaren Zeilenumformungen lassen sich entsprechend auch auf die Gesamtmatrix $\begin{pmatrix} \alpha & \tilde{a}^T \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}$ anwenden und verändern deren erste Zeile und Spalte nicht.

So gelangt man zu der Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \tilde{a}^T \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix}$ mit oberer Dreiecksmatrix $\tilde{R} \in K^{n\times n}$, deren Diagonalelemente alle $\neq 0$ sind. Wegen $\alpha \neq 0$ und den Eigenschaften von $\tilde{R}$ ist das eine obere Dreiecksmatrix aus $K^{(n+1)\times(n+1)}$, deren Diagonalelemente sämtlich ungleich 0 sind.

2.24 Lemma

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $R \in K^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, bei der alle Diagonalelemente $\neq 0$ sind. Dann kann R durch elementare Zeilenumformungen vom Typ I und II in die Einheitsmatrix transformiert werden.

Beweis:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{mehrfache} \\ \text{EZU II}}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} r_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & r_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{EZU I}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} r_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{usw.}$$

2.25 Berechnung von A^{-1}

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Falls $A \in K^{n\times n}$ durch elementare Zeilenumformungen in E_n transformiert wird, dann ist A invertierbar und E_n wird durch dieselben Zeilenumformungen in A^{-1} transformiert:

$$A \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} E_n \quad \Longrightarrow \quad E_n \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} A^{-1}$$

Beweis: $\underbrace{C}_{\substack{\text{Prod.von} \\ \text{El.matr.}}} \cdot A = E_n \overset{2.21}{\Rightarrow} C = A^{-1} \Leftrightarrow C \cdot E_n = A^{-1}$

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

2.26 Berechnung der Lösung von $Ax = b$ ($A \in K^{n\times n}$ invertierbar, $b \in K^n$)

Schema: 1. Schritt: $A \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} R$

$b \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} b'$

2. Schritt: löse $Rx = b'$ durch Rückwärtseinsetzen, d.h. zuerst n-te Gleichung lösen, mit dem Ergebnis die $(n-1)$-te Gleichung usw.

Bemerkung:
Das Rückwärtseinsetzen ist äquivalent zur Anwendung der EZU aus dem Beweis von Lemma 2.24 auf b' in geänderter Reihenfolge: Zuerst wird jeweils das Diagonalelement auf 1 skaliert und dann die darüberliegende Spalte annulliert.

$$R \overset{\text{EZU I,II}}{\longrightarrow} E_n$$
$$b' \overset{\text{EZU I,II}}{\longrightarrow} x$$

Denn: $$\left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & \dots & \dots & r_{1n} & b'_1 \\ & r_{22} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & r_{n-1\,n} & b'_{n-1} \\ & & & r_{nn} & b'_n \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & \dots & \dots & r_{1n} & b'_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & r_{n-1\,n-1} & r_{n-1\,n} & b'_{n-1} \\ & & & 1 & \frac{b'_n}{r_{nn}} \end{array}\right) \quad \leftarrow x_n$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|l} r_{11} & \dots & \dots & 0 & b'_1 - r_{1n}x_n \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & r_{n-1\,n-1} & 0 & b'_{n-1} - r_{n-1\,n}x_n \\ & & & 1 & x_n \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|l} r_{11} & \dots & \dots & 0 & \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & 1 & 0 & \frac{1}{r_{n-1\,n-1}}(b'_{n-1} - r_{n-1\,n}x_n) \\ & & & 1 & x_n \end{array}\right) \quad \leftarrow x_{n-1} \qquad \text{usw.}$$