Prof. Martin Hofmann, PhD
Dr. Ulrich Schöpp
Sabine Bauer

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
18. Oktober 2017

Lösungsvorschlag zur 1. Übung zur Vorlesung

Grundlagen der Analysis

Aufgabe 1-1 (Grenzwerte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte, falls diese existieren. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+3}$ $= 3$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5+n}{3n+3}$ $= \frac{1}{3}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^n}$ $= 0$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-4n^2}{4n^3+2}$ $= \frac{1}{2}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2}$ $= \infty$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $= 0$

Lösungsskizze

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+3} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+3-3}{n+3} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{3}{n+3} = 3$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5+n}{3n+3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1+4}{n+1} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{4}{n+1} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{-2} \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{3^n} = -\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-4n^2}{4n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2n^2}{2n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1-2n^2-1}{2n^3+1} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2-1}{2n^3+1} = \frac{1}{2}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$ (da Kehrwert der nächsten Teilaufgabe)

f) Wir zeigen $0 \leq \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ für hinreichend große n. Das macht die Aufgabe einfach, da wir schon $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ wissen.

Die Ungleichung $0 \leq \frac{n^2}{2^n}$, da n^2 und 2^n beide stets positiv sind.

Die Ungleichung $\frac{n^2}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ ist äquivalent zu $n^3 \leq 2^n$ (beide Seiten mit $n \cdot 2^n$ multiplizieren).

Wir beweisen zuerst mit Induktion, dass das für alle $n \geq 10$ gilt. Induktionsanfang: $10^3 = 1000 \leq 1024 = 2^{10}$. Induktionsschritt: Wir müssen $(n+1)^3 \leq 2^{n+1}$ zeigen. Das ist äquivalent zu $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq 2 \cdot 2^n$. Die Induktionsannahme ist $n^3 \leq 2^n$. Es genügt also $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq 2 \cdot n^3$ zu zeigen. Das ist äquivalent zu $3n^2 + 3n + 1 \leq n^3$ und weiter zu $3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \leq n$. Dies ist für $n > 10$ aber offentsichtlich wahr, da die beiden Brüche bereits kleiner als 1 sind. Somit haben wir die gewünschte Behauptung gezeigt.

Aufgabe 1-2 (Grenzwerte) Beweisen Sie folgende Aussage für jede beliebige Folge (a_n) und jede beliebige Zahl b: Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann $\lim_{n\to\infty} b \cdot a_n = b \cdot a$.

Lösungsskizze

Für $b = 0$ ist die Aussage sofort klar, da die Folge $(b \cdot a_n)$ dann konstant gleich 0 ist. Wir brauchen also nur noch den Fall $b \neq 0$ zu betrachten.

Wir nehmen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ an und müssen $\lim_{n\to\infty} b \cdot a_n = b \cdot a$ zeigen. Die Annahme besagt nach Definition, dass es für jedes $\varepsilon' > 0$ es ein N' gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon'$ für alle $n > N'$ gilt. Wir müssen zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so dass $|b \cdot a_n - b \cdot a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Setze $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{|b|}$. Nach Annahme gibt es dann ein N', so dass $|a_n - a| < \varepsilon'$ für alle $n > N'$ gilt. Aus $|a_n - a| < \varepsilon'$ folgt $|b \cdot a_n - b \cdot a| < \varepsilon$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
|a_n - a| < \varepsilon' &\implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|b|} && \text{(Wahl von } \varepsilon'\text{)} \\
&\implies |b| \cdot |a_n - a| < \varepsilon && \text{(Multiplizieren beider Seiten mit } |b|\text{)} \\
&\implies |b \cdot (a_n - a)| < \varepsilon \\
&\implies |b \cdot a_n - b \cdot a| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Somit haben wir gezeigt, dass $|b \cdot a_n - b \cdot a| < \varepsilon$ für alle $n > N'$ gilt. Also können wir einfach $N := N'$ wählen und haben dann $|b \cdot a_n - b \cdot a| < \varepsilon$ für alle $n > N$, was zu zeigen war.

Aufgabe 1-3 (Reihen) Welche der folgenden Reihen konvergiert? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+k^2)^2}{(1+k^3)^2}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Lösungsskizze

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+k^2)^2}{(1+k^3)^2}$: konvergiert, Beweis mit Majoranten-Kriterium, denn es gilt:
$\frac{(1+k^2)^2}{(1+k^3)^2} < \frac{(1+k^2)^2}{(k^3)^2} < \frac{(k^2+k^2)^2}{k^6} = \frac{4k^4}{k^6} = \frac{4}{k^2}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ konvergiert, Leibniz-Kriterium

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}$ konvergiert, Quotienten-Kriterium

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ konvergiert, Quotienten-Kriterium

Aufgabe 1-4 (Der kleine Gauß) Beweisen Sie mit Induktion den "kleinen Gauß":

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Lösungsskizze

Induktionsanfang: Für $n = 1$ rechnen wir es einfach nach. $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Wir müssen beweisen, dass $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ gilt. Dabei dürfen wir $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ als Induktionshypothese voraussetzen.

Wir rechnen

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(2+n) \cdot (n+1)}{2}$$

Die zweite Gleichung verwendet hier die Induktionshypothese für n.

Abgabe: Sie können Ihre Lösung bis zum Mittwoch, den 25.10. um 12 Uhr über UniWorX abgeben. Auf dieses Übungsblatt gibt es keine Bonuspunkte. Die Korrektur dient Ihrem Verständnis des Stoffes.