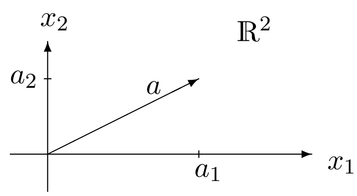
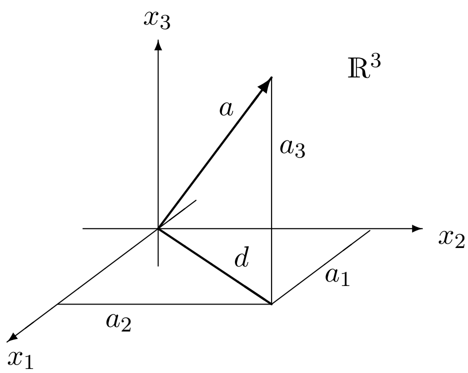
§4 $\mathbb{R}^n$ als euklidischer Vektorraum

Länge, Skalarprodukt und Orthogonalität in $\mathbb{R}^n$



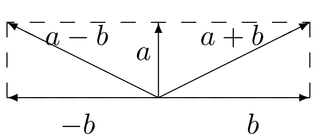
$$\underbrace{|a|}_{\text{Länge von } a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{d^2 + a_3^2} \qquad d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{aligned}$$

4.1 Definition (Länge)
Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ Länge von x.

Wir wollen mit Hilfe der Länge Orthogonalität zweier Vektoren a und b definieren:



$$\begin{aligned} a \perp b :&\Leftrightarrow |a - b| = |a + b| \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = 0 \end{aligned}$$

4.2 Definition (Kanonisches Skalarprodukt, Orthogonalität)

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (kanonisches) Skalarprodukt von x und y.

(b) $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.
Schreibweise: $x \perp y$.

Bemerkungen:

1. $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y = y^T \cdot x \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$
2. $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

4.3 Lemma

Die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ erfüllt

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{array}{lll} \langle x+x',y\rangle &= \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle & (x,x',y \in \mathbb{R}^n) \\ \langle \lambda\cdot x,y\rangle &= \lambda\cdot\langle x,y\rangle & (\lambda\in\mathbb{R},\ x,y\in\mathbb{R}^n) \\ \langle x,y+y'\rangle &= \langle x,y\rangle + \langle x,y'\rangle & (x,y,y' \in \mathbb{R}^n) \\ \langle x,\lambda\cdot y\rangle &= \lambda\cdot\langle x,y\rangle & (\lambda\in\mathbb{R},\ x,y\in\mathbb{R}^n) \end{array}\right\} \quad \text{("Bilinearität")}$$

(b) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad (x,y\in\mathbb{R}^n)$ ("Symmetrie")

(c) $\langle x,x\rangle \ > \ 0 \quad (x\in\mathbb{R}^n,\ x\neq 0)$ ("Positive Definitheit")

Bemerkungen:

1. Ersetzt man in Lemma 4.3 $\mathbb{R}^n$ durch einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V, so heißt eine Abbildung $V\times V\to\mathbb{R}$, die (a) erfüllt, *Bilinearform auf* V. Wenn sie zusätzlich (b) und (c) erfüllt, spricht man von einem *Skalarprodukt auf* V. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt wird als *euklidischer Vektorraum* bezeichnet.

2. Für $x,y\in\mathbb{R}^n$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ gilt:
$$\langle \lambda\cdot x+\mu\cdot y,\lambda\cdot x+\mu\cdot y\rangle = \langle \lambda\cdot x+\mu\cdot y,\lambda\cdot x\rangle + \langle \lambda\cdot x+\mu\cdot y,\mu\cdot y\rangle$$
$$= \langle\lambda\cdot x,\lambda\cdot x\rangle + \langle\mu\cdot y,\lambda\cdot x\rangle + \langle\lambda\cdot x,\mu\cdot y\rangle + \langle\mu\cdot y,\mu\cdot y\rangle$$
$$= \lambda^2\langle x,x\rangle + \lambda\mu\underbrace{\langle y,x\rangle}_{=\langle x,y\rangle} + \lambda\mu\langle x,y\rangle + \mu^2\langle y,y\rangle$$
$$= \lambda^2\langle x,x\rangle + 2\lambda\mu\langle x,y\rangle + \mu^2\langle y,y\rangle\ .$$
Da nur Eigenschaften (a,),(b) des Skalarprodukts verwendet wurden, gilt diese Beziehung auch in euklidischen Vektorräumen.

4.4 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Seien $x,y\in\mathbb{R}^n$. Dann gilt: $|\langle x,y\rangle| \le |x|\cdot|y|$.
Gleichheit tritt genau dann ein, wenn x,y linear abhängig sind.

Bemerkung: Die Aussage bleibt gültig, wenn man $\mathbb{R}^n$ durch einen euklidischen Vektorraum V ersetzt.
Beweis:

1.F: $x=0$. Dann sind x,y linear abhängig und es gilt $|\langle x,y\rangle| = 0 = |x|\cdot|y|$

2.F: $x\neq 0$.
[Erinnerung: Seien $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$. Betrachte
$a\cdot\lambda^2 + b\cdot\lambda + c = 0 \qquad (*)$
$D := b^2-4ac$ (Diskriminante)
$(*)$ hat genau eine reelle Lösung $\lambda \Longleftrightarrow D=0$
$(*)$ hat keine reelle Lösung $\lambda \Longleftrightarrow D<0$]

2.1: x, y linear unabhängig $\overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \forall\,\lambda \in \mathbb{R}: \; y \neq \lambda\cdot x$

["$\Rightarrow$" Klar. [Sonst $\lambda\cdot x + (-1)\cdot y = 0$]

"$\Leftarrow$" $\mu\cdot x + \nu\cdot y = 0$. Zeige: $\mu = \nu = 0$.

Wäre $\nu \neq 0,$ so würde $y = (-\frac{\mu}{\nu})\cdot x$ folgen im Widerspruch zu $y \neq \lambda\cdot x$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Daher $\nu = 0,$ also $\mu\cdot x = 0,$ somit $\mu = 0$ wegen $x \neq 0$.]

$$\overset{4.3c}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\langle \lambda\cdot x - y, \lambda\cdot x - y\rangle}_{\lambda\cdot x - y \neq 0} > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\Longleftrightarrow \lambda^2\cdot\langle x, x\rangle - \lambda\cdot 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\overset{\text{Diskr.}<0}{\Longleftrightarrow} 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\cdot\langle y, y\rangle < 0 \Longleftrightarrow |\langle x, y\rangle| < \underbrace{\sqrt{\langle x, x\rangle}}_{|x|}\underbrace{\sqrt{\langle y, y\rangle}}_{|y|}$$

2.2: x, y linear abhängig $\overset{2.1}{\Longleftrightarrow} \exists\lambda \in \mathbb{R}: \; y = \lambda\cdot x \Longleftrightarrow \exists_1\lambda \in \mathbb{R}: \; y = \lambda\cdot x$

[Denn: $y = \lambda\cdot x = \lambda'\cdot x \Rightarrow (\lambda - \lambda')\cdot x = 0 \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda = \lambda'$]

$$\overset{\text{vgl.}2.1}{\Longleftrightarrow} \exists_1\lambda \in \mathbb{R}: \; \lambda^2\cdot\langle x, x\rangle - \lambda\cdot 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = 0 \overset{\text{Diskr.}=0}{\Longleftrightarrow} |\langle x, y\rangle| = |x|\cdot|y|$$

4.5 Lemma

Für die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; x \mapsto |x|$ gilt:

(a) $|x| \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$
$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$

(b) $|\lambda\cdot x| = |\lambda||x| \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^n)$

(c) $|x + y| \leq |x| + |y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkung:
Ersetzt man in Lemma 4.5 $\mathbb{R}^n$ durch einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V und die Betragsfunktion $|\cdot|$ durch eine Abbildung $\|\cdot\|$: $V \to \mathbb{R}$, wobei in (b) $|\lambda|$ *nicht* ersetzt wird, so heißt diese Abbildung *Norm auf* V. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer Norm $\|\cdot\|$ wird als *normierter Vektorraum* bezeichnet. (Schreibweise: (V,$\|\cdot\|$)).

Beweis:
(a),(b) Klar.
(c)
$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
$$\overset{4.4}{\leq} \underbrace{\langle x, x\rangle}_{|x|^2} + 2\underbrace{\sqrt{\langle x, x\rangle}}_{|x|}\underbrace{\sqrt{\langle y, y\rangle}}_{|y|} + \underbrace{\langle y, y\rangle}_{|y|^2} = (|x| + |y|)^2$$

Bemerkung: Mit der gleichen Argumentation folgt, dass jeder euklidische Vektorraum ein normierter Vektorraum ist. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht.

Winkel

4.6 Lemma und Definition (Winkel)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gibt es genau ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit $\cos\varphi = \dfrac{\langle x, y\rangle}{|x|\cdot|y|}$.
φ heißt Winkel zwischen x und y. Schreibweise: $\varphi = \sphericalangle(x, y)$.

Bemerkung: $\langle x, y\rangle = |x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi$ mit $\varphi = \sphericalangle(x, y)$.

Beweis:
Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt $-1 \leq \dfrac{\langle x, y\rangle}{|x|\cdot|y|} \leq 1$.
Der Kosinus bildet $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab, also gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in [0, \pi]$ mit $\cos\varphi = \dfrac{\langle x, y\rangle}{|x|\cdot|y|}$.

4.7 Folgerung

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt:

(a) $|x \pm y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \pm 2|x||y|\cos\varphi$ mit $\varphi = \sphericalangle(x, y)$

(b) $x \perp y \Rightarrow |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ (Satz des Pythagoras)

Bemerkung: Im Fall der Subtraktion in (a) erhält man den Kosinussatz der ebenen Geometrie.

Beweis:

(a) $|x \pm y|^2 = |x|^2 \pm 2\langle x, y\rangle + |y|^2 = |x|^2 \pm 2|x||y|\cos\varphi + |y|^2$ mit $\varphi = \sphericalangle(x, y)$.

(b) Analog.

Orthogonale Matrizen

4.8 Definition

Sei $k \in \mathbb{N}$. $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}^n$ heißt Orthonormalsystem (ONS), wenn

$$\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, k).$$

Beispiel: $e_1, \ldots, e_k$ ist für $k \leq n$ ein ONS.

4.9 Lemma (Entwicklung nach einer Orthonormalbasis)

Sei $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem. Dann ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ (Orthonormalbasis, ONB) und es gilt

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle b_j, x\rangle \cdot b_j \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Beweis:
$b_1, \ldots, b_n$ ONS $\Rightarrow b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig

[Denn: $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = 0 \;\Rightarrow\; \langle b_i, \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j b_j\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle b_i, b_j\rangle}_{\delta_{ij}} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_i = 0 \;\; (i = 1, \ldots, n)$]

$\overset{\dim \mathbb{R}^n = n \text{ und } 3.17}{\Longrightarrow} b_1, \ldots, b_n$ Basis von $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists_1 \lambda \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j$

$\Rightarrow \langle b_i, x\rangle = \langle b_i, \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle b_i, b_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \lambda_i \;\; (i = 1, \ldots, n)$

4.10 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt orthogonal, wenn $A^T \cdot A = E_n$.

Bemerkungen:

(a) Diese Forderung ist äquivalent dazu, dass die Spalten von A ein Orthonormalsystem bilden.

(b) Die Matrix heißt ortho*gonal*, ihre Spalten bilden aber ein Ortho*normal*system.

Beispiele für Orthogonalmatrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

4.11 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(a) A orthogonal.

(b) A^T orthogonal, d.h. $A \cdot A^T = E_n$.

(c) A invertierbar und $A^{-1} = A^T$.

[*Bemerkung:* (b) besagt, dass die Zeilen von A ein Orthonormalsystem (in $\mathbb{R}^{1\times n}$) bilden.]

Beweis:

(a)⇒(c): $A^T \cdot A = E_n \overset{2.21}{\Longrightarrow} A$ invertierbar und $A^{-1} = A^T$

(b)⇒(c): $A^T \cdot A = E_n \overset{2.21}{\Longrightarrow} A$ invertierbar und $A^{-1} = A^T$

(c)⇒(a): $A^T \cdot A \overset{(c)}{=} A^{-1} \cdot A = E_n$

(c)⇒(b): analog.

4.12 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(a) A orthogonal.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ |A\cdot x| = |x|$ (längentreue Abbildung, Isometrie).

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \ \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.

Beweis:

(a)⇒(b): $|Ax|^2 = (Ax)^T\cdot(Ax) = x^T\cdot\underbrace{A^T\cdot A}_{E_n}x = x^T\cdot x = |x|^2$

(b)⇒(c): Es gilt $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2)$ $(*)$ (Übungsaufgabe)
also $\langle Ax, Ay\rangle = \frac{1}{4}(|Ax+Ay|^2 - |Ax-Ay|^2) = \frac{1}{4}(|A\cdot(x+y)|^2 - |A\cdot(x-y)|^2)$
$\overset{(b)}{=} \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2) \overset{(*)}{=} \langle x, y\rangle$

(c)⇒(a): $\langle x, (A^T\cdot A - E_n)\cdot y\rangle = \langle A\cdot x, A\cdot y\rangle - \langle x, y\rangle \overset{(c)}{=} 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$
$\overset{x:=(A^TA-E_n)y}{\Longrightarrow} |(A^T\cdot A - E_n)\cdot y|^2 = 0 \quad (y \in \mathbb{R}^n) \Longrightarrow A^T\cdot A = E_n$

Bemerkung (ohne Bew.):
Allgemeiner gilt: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d.h. $|f(x)-f(y)| = |x-y| \ \ (x, y \in \mathbb{R}^n)$, dann gibt es eine Orthogonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein $b \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x) = A\cdot x + b \ \ (x \in \mathbb{R}^n)$.