MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
F. Hänle, M. Oelker

WS 17/18

4. Tutorium zur Linearen Algebra für Informatiker und Statistiker

T13) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $\emptyset \neq U \subset G$. Zeigen Sie:

U ist Untergruppe von G genau dann, wenn die Verknüpfung $U \times U \to U$, $(a, b) \mapsto a \circ b$ wohldefiniert ist und U mit dieser Verknüpfung eine Gruppe ist.

T14) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $(H, *)$ eine Menge mit einer Verknüpfung. Zeigen Sie:

(a) $\phi : G \to H$ bijektiv $\wedge\ \forall a, b \in G : \phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b) \implies (H, *)$ Gruppe

(b) $a^{m+n} = a^m \circ a^n \quad (a \in G,\ m, n \in \mathbb{Z})$

(c) G zyklisch und unendlich $\implies$ $\mathbb{Z}$ isomorph zu G

T15) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Für alle $a, b \in G$ gilt $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

(b) Für alle $a, b \in G$ besitzen die Gleichung $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ jeweils eindeutig bestimmte Lösungen $x, y \in G$.

(c) Sei $a \in G$. Dann sind die Abbildungen $l_a : G \to G$, $l_a(x) = a \circ x$ und $r_a : G \to G$, $r_a(x) = x \circ a$ jeweils bijektiv.

T16) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und e ihr neutrales Element.

(a) Zeigen Sie: Für alle $a \in G$ gilt $(a^{-1})^{-1} = a$.

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\phi : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ ist bijektiv.

(c) Zeigen Sie: Ist G endlich und abelsch, so gilt:

$$\prod_{g \in G} g \circ g = e$$

(d) Folgern Sie aus Aufgabe 16c den Satz von Wilson:
Sei p eine Primzahl. Dann gilt $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.