§5 Determinanten

Betrachte das folgende reelle lineare Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}\right\} \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22} - \overbrace{a_{12}a_{21}}^{a_{21}a_{12}}$$

Durch Nachrechnen: Falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist, dann ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

(Cramersche Regel 1750, bereits für allgemeines $n \in \mathbb{N}$)

5.1 Definition und Satz (Determinante)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau eine Abbildung $\det : (K^n)^n \to K$, so dass gilt:

(a) det ist eine Multilinearform auf K^n, d.h. für $j = 1, \dots, n$ gilt:
$\det(a_1, \dots, \lambda \cdot a_j, \dots, a_n) = \lambda \cdot \det(a_1, \dots, a_n) \quad (a_1, \dots, a_n \in K^n,\ \lambda \in K)$
$\det(a_1, \dots, a_j' + a_j'', \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_j', \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, a_j'', \dots, a_n)$
$(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n, a_j', a_j'' \in K^n)$.

(b) det ist alternierend, d.h. sind von den n Vektoren $a_1, \dots, a_n \in K^n$ zwei gleich, so gilt $\det(a_1, \dots, a_n) = 0$.

(c) det ist normiert, d.h. $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Für $A = (a_1 \dots a_n) \in K^{n \times n}$ setzen wir $\det A := \det(a_1, \dots, a_n)$.

Bemerkung:
Wir brauchen also nicht zwischen $\det(a_1, \dots, a_n)$ und $\det(a_1 \dots a_n)$ zu unterscheiden.

Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.1. Dafür benötigen wir noch einige Hilfssätze und Lemmata.

5.2 Lemma

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, det eine alternierende Multilinearform auf K^n, $a_1, \dots, a_n \in K^n$. Dann gilt:

(a) $a_1, \dots, a_n$ linear abhängig $\Longrightarrow \det(a_1, \dots, a_n) = 0$.

(b) $\det(\dots, a_j, \dots, a_i, \dots) = -\det(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) \quad (i < j)$.
(D.h. vertauscht man zwei der Vektoren $a_1, \dots, a_n$, so ändert sich das Vorzeichen von det.)

Beweis:

(a) O.E.d.A.: a_n linear abhängig von $a_1, \dots, a_{n-1}$, d.h. $a_n = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j \cdot a_j$.

Dann $\det(a_1, \dots, a_n) \overset{5.1\text{a}}{=} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j \underbrace{\det(a_1, \dots, a_{n-1}, a_j)}_{=0 \text{ nach } 5.1\text{b}} = 0.$

(b) $\det(\dots, a_i + a_j, \dots, a_i + a_j, \dots) = 0 \overset{5.1\text{a}}{\Longrightarrow} \underbrace{\det(\dots, a_i, \dots, a_i, \dots)}_{=0} + \det(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) +$

$\det(\dots, a_j, \dots, a_i, \dots) + \underbrace{\det(\dots, a_j, \dots, a_j, \dots)}_{=0} = 0 \Rightarrow$ Behauptung .

5.3 Hilfssatz

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, det eine alternierende Multilinearform auf K^n, $A \in K^{n \times n}$, $\lambda \in K$. Dann gilt (mit den Bezeichnungen aus 2.15):

(a) $\det(A \cdot S_j(\lambda)) = \det A \cdot \lambda \quad (\lambda \neq 0)$.

(b) $\det(A \cdot Q_i^j(\lambda)) = \det A \quad (i \neq j)$.

(c) $\det(A \cdot P_i^j) = -\det A \quad (i \neq j)$.

Beweis:

(a) $\det(A \cdot S_j(\lambda)) = \det(a_1, \dots, \lambda \cdot a_j, \dots, a_n) \overset{5.1\text{a}}{=} \lambda \cdot \det A$.

(b) $\det(A \cdot Q_i^j(\lambda)) = \det(a_1, \dots, \underbrace{a_j + \lambda \cdot a_i}_{j-\text{te Position}}, \dots, a_n) \overset{5.1\text{a,b}}{=} \det A$.

(c) $\det(A \cdot P_i^j) = \det(\dots, a_j, \dots, a_i, \dots) \overset{5.2\text{b}}{=} -\det A$.

5.4 Folgerung und Hilfssatz

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, det eine normierte alternierende Multilinearform auf K^n, $A \in K^{n \times n}$, $\lambda \in K$. Dann gilt (mit den Bezeichnungen aus 2.15):

(a) $\det(S_j(\lambda)) = \lambda, \quad \det(A \cdot S_j(\lambda)) = \det A \cdot \det S_j(\lambda) \quad (\lambda \neq 0)$.

(b) $\det(Q_i^j(\lambda)) = 1, \quad \det(A \cdot Q_i^j(\lambda)) = \det A \cdot \det Q_i^j(\lambda) \quad (i \neq j)$.

(c) $\det(P_i^j) = -1, \qquad \det(A \cdot P_i^j) = \det A \cdot \det P_i^j \quad (i \neq j)$.

Beweis: Linke Hälfte: 5.3 mit $A = E_n$.
Rechte Hälfte: linke Hälfte und 5.3 .

Die folgenden in §2, §3 implizit enthaltenen Aussagen werden in diesem Paragraphen noch häufiger benötigt.

5.5 Lemma

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

(a) $\operatorname{rang} A = n \Longleftrightarrow A$ invertierbar .

(b) A invertierbar $\Longleftrightarrow A$ Produkt von Elementarmatrizen .

Beweis: $A = (a_1 \dots a_n) \in K^{n \times n}$.

(a) $$\begin{aligned} A \text{ invertierbar } &\overset{2.20}{\Longleftrightarrow} A\lambda = 0 \text{ besitzt nur die Lösung } \lambda = 0 \\ &\Longleftrightarrow \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot a_j = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0\Big) \\ &\Longleftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{ linear unabhängig} \Longleftrightarrow \operatorname{rang} A = n \ . \end{aligned}$$

(b) Äquivalenznormalform 2.17 mit $r = n$.

Beweis der Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.1:
Seien det und $\widetilde{\det}$ normierte alternierende Multilinearformen auf K^n.
Zeige: $\det A = \widetilde{\det} A$.

1.F.: A invertierbar $\overset{5.5b}{\Longrightarrow} \exists\, C_1, \ldots, C_l$ Elementarmatrizen: $A = C_1 \cdots C_l$

$\overset{5.4 \text{ re.Hälfte}}{\Longrightarrow} \det A = \det (C_1 \cdots C_{l-1}) \cdot \det C_l = \ldots = \det C_1 \cdots \det C_l$

$\overset{5.4 \text{ li.Hälfte}}{\Longrightarrow} \det A = \widetilde{\det}\, C_1 \cdots \widetilde{\det}\, C_l \overset{5.4 \text{ re.Hälfte}}{=} \widetilde{\det}(C_1 \cdots C_l) = \widetilde{\det}\, A$.

2.F.: A nicht invertierbar $\overset{5.5a}{\Longrightarrow} \operatorname{rang} A < n \Longrightarrow a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig

$\overset{5.2a}{\Longrightarrow} \det(a_1, \ldots, a_n) = 0,\ \widetilde{\det}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \Longrightarrow \det A = 0 = \widetilde{\det}\, A$.

Bemerkung:
Wegen $\det C_i \neq 0$ enthält der Beweis zum 1. Fall die Aussage A invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

5.6 Rechenregeln

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, det eine normierte alternierende Multilinearform auf K^n,
$A, B \in K^{n \times n}$, $\lambda \in K$. Dann gilt:

(a) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$.

(b) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (Determinantenmultiplikationssatz) .

(c) A invertierbar $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

(d) A invertierbar $\Longrightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

(e) $\det A^T = \det A$.

Bemerkung:
Im allg. gilt: $\det(\lambda \cdot A) \neq \lambda \cdot \det A$.
$\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

Beweis:

(a) $\det(\lambda\cdot A) = \det(\lambda\cdot a_1,\dots,\lambda\cdot a_n) = \lambda\cdot\det(a_1,\lambda\cdot a_2,\dots,\lambda\cdot a_n) = \ldots = \lambda^n\cdot\det(a_1,\dots,a_n)$.

(c) Siehe die Bemerkung vor 5.6.

(b) Vorbemerkung: $A\cdot B$ invertierbar $\Longleftrightarrow A$ invertierbar $\wedge$ B invertierbar
[„$\Rightarrow$“ : $A\cdot B$ invert. $\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(A\cdot B) = n \overset{3.26c}{\Rightarrow} \operatorname{rang}(A),\ \operatorname{rang}(B) \geq n \Rightarrow A, B$ invert.
„$\Leftarrow$“ : 2.14a]

1.F.: $\det A \neq 0$.
$(b_1,\dots,b_n) \mapsto \dfrac{\det(Ab_1,\dots,Ab_n)}{\det A} = \dfrac{\det(A\cdot B)}{\det A}$ ist eine normierte alternierende Multilinearform auf K^n ebenso wie $(b_1,\dots,b_n) \mapsto \det(b_1,\dots,b_n) = \det B$.
Aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.1 folgt $\dfrac{\det(A\cdot B)}{\det A} = \det B$.

2.F.: $\det A = 0$.
Dann A nicht invertierbar $\overset{\text{Vorbem.}}{\Rightarrow}$ $A\cdot B$ nicht invertierbar
$\overset{(c)}{\Rightarrow} \det(A\cdot B) = 0 = \det A\cdot\det B$.

(d) A invertierbar $\Longrightarrow \det A\cdot\det A^{-1} \overset{(b)}{=} \det\underbrace{(A\cdot A^{-1})}_{E_n} = 1 \overset{(c)}{\Longrightarrow} \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

(e) Für Elementarmatrizen C gilt $\det C^T = \det C$.
$[S_j(\lambda)^T = S_j(\lambda),\ Q_j^i(\lambda)^T = Q_i^j(\lambda),\ {P_j^i}^T = P_j^i$ und linke Hälfte von 5.4.]
$G = C_1\cdots C_l \Rightarrow G^T = C_l^T\cdots C_1^T \Rightarrow \det G^T = \det G$.
$A \overset{2.17b}{=} G\cdot\begin{pmatrix} E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot H \Rightarrow A^T = H^T\cdot\begin{pmatrix} E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot G^T \overset{(b)}{\Rightarrow} \det A^T = \det A$.