MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
F. Hänle, M. Oelker

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, so weit möglich, die Matrizenprodukte $A_i \cdot A_j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgende Gleichung für reelle 3×3-Matrizen durch vollständige Induktion:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 & -2^{n+1} + 2 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Sei $G := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ und $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \quad a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf H ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Tutoriumsaufgabe T14, dass H mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung eine Gruppe ist. (Hinweis: $\phi(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z & -\mathrm{Im}\, z \\ \mathrm{Im}\, z & \mathrm{Re}\, z \end{pmatrix} \quad (z \in G)$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Übungsaufgabe 14 das neutrale Element von H und das inverse Element zu $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in H$.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\phi : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $[z]_{mn} \mapsto ([z]_m, [z]_n)$ ist wohldefiniert.

(b) Die Abbildung ϕ aus (a) ist ein Ringhomomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}_{mn}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.

(c) Sei zusätzlich $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Dann sind die Ringe $(\mathbb{Z}_{mn}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ isomorph.

Abgabe einzeln, zu zweit oder zu dritt: Dienstag, 12.12.2017 bis 10^{15} Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock