MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
F. Hänle, M. Oelker

WS 17/18

8. Tutorium zur Linearen Algebra für Informatiker und Statistiker

T29) Sei K ein Körper.

(a) Seien $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$ und
$A_1 \in K^{m\times p}$, $A_2 \in K^{m\times q}$, $C_1 \in K^{p\times r}$, $D_1 \in K^{p\times s}$,
$B_1 \in K^{n\times p}$, $B_2 \in K^{n\times q}$, $C_2 \in K^{q\times r}$, $D_2 \in K^{q\times s}$.

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1C_1 + A_2C_2 & A_1D_1 + A_2D_2 \\ B_1C_1 + B_2C_2 & B_1D_1 + B_2D_2 \end{pmatrix}$$

(b) Sei $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{m\times n}$. Zeigen Sie:

A invertierbar $\iff$ $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ invertierbar

(c) Zusätzlich zu den Voraussetzungen von (b) sei A invertierbar. Geben Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ in Blockschreibweise an.

T30) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $L \in K^{n\times n}$ eine linke Dreiecksmatrix mit Diagonale 1, d.h. alle Diagonalelemente sind 1.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Aussage von Aufgabe 30b, dass L invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass L^{-1} eine linke Dreiecksmatrix mit Diagonale 1 ist.

T31) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $e_1, \dots, e_n$ die Einheitsvektoren von K^n. Zeigen Sie:

(a) $\dim K^{n\times n} = n^2$

(b) $e_i e_j^\top$, $i, j = 1, \dots, n$ ist eine Basis von $K^{n\times n}$.

T32) (a) Sei K ein Körper, $a, b, c, d \in K$ mit $ad - bc \neq 0$, $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$.

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ gilt.

(b) Seien $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie: $\begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} = \operatorname{Re} w \cdot E + \operatorname{Im} w \cdot I + \operatorname{Re} z \cdot J + \operatorname{Im} z \cdot K \quad (w, z \in \mathbb{C})$.