§0 Mengen und Abbildungen

Zweck: Einführung von Schreibweisen

Mengenbegriff und Elementschreibweise

Naiver Mengenbegriff nach Cantor (1895):

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen.

Schreibweise:	$x \in M$	x ist **ein** Element von M
	$x \notin M$	x ist **kein** Element von M

Beispiele:
$\emptyset$: Menge, die keine Elemente beinhaltet.
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ganze Zahlen
$m \cdot \mathbb{Z} := \{\dots, -3m, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\} =: \{m \cdot z : \ z \in \mathbb{Z}\}$ ganzzahlige Vielfache von m ($m \in \mathbb{N}$ fest)
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0\}$ rationale Zahlen
$\mathbb{R}$: reelle Zahlen (siehe Analysis)

Zwei Mengen werden als gleich angesehen, wenn sie dieselben Elemente beinhalten. Wir vereinbaren, dass es bei der Schreibweise $\{\dots\}$ weder auf die Reihenfolge ankommt noch darauf, ob ein Element mehrfach aufgezählt wird. Z.B. gilt: $\{1, 2, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.
Mengen können wiederum Mengen als Elemente enthalten, z.B. ist $\{1, \{1, 2\}, \{\{3\}\}\}$ eine Menge.

Aussagen

Eine Aussage ist eine Zeichenreihe, der sich einer der Werte wahr (w) oder falsch (f) zuordnen lässt. [In der Mathematischen Logik lässt man allerdings nicht beliebige Aussagen zu, sondern bildet diese nach festen Regeln aus einem eingeschränkten Zeichenvorrat]

Beispiele:	6 ist gerade (w)	[$6 \in 2 \cdot \mathbb{Z}$ (w)]
	7 ist durch 3 ohne Rest teilbar (f)	[$7 \in 3 \cdot \mathbb{Z}$ (f)]

Man betrachtet auch Aussagen, die von Variablen abhängen, z.B. n ist gerade (Wahrheitswert dieser Aussage hängt vom konkreten Wert $n \in \mathbb{N}$ ab)

Mit derartigen Aussagen lassen sich weitere Mengen gewinnen:
Sei M eine Menge und $\mathcal{A}(x)$ für jedes $x \in M$ eine Aussage. Dann bezeichnet $\{x \in M : \ \mathcal{A}(x)\}$ die Menge aller $x \in M$, für die $\mathcal{A}(x)$ wahr ist, z.B.

$$\{n \in \mathbb{N} : \ n(n-1) \geq 5\} \qquad \text{ist eine Menge.}$$

Zusammengesetzte Aussagen:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

$\wedge$ "und"
$\vee$ "oder"

Bemerkung: "$\vee$" ist kein Entweder-Oder, denn $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ist auch wahr, wenn $\mathcal{A}$ wahr und $\mathcal{B}$ wahr ist.

Beispiel: 6 ist gerade $\wedge$ 6 ist durch 3 teilbar (w)

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
w	f
f	w

"nicht"

Mit Hilfe dieser logischen Operationen lassen sich Mengenoperationen definieren:

$$\begin{array}{rcll} A \cap B & \overbrace{:=}^{\text{Def.}} & \{x :\ x \in A \wedge x \in B\} & \text{"Durchschnitt"} \\ A \cup B & := & \{x :\ x \in A \vee x \in B\} & \text{"Vereinigung"} \\ A \setminus B & := & \{x :\ x \in A \wedge x \notin B\} & \text{"Differenz"} \end{array}$$

[Frage: Gilt für beliebige Mengen $A \cup B = B \cup A$ bzw. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?
Das lässt sich durch Rechnung entscheiden (nach Einführung der logischen Äquivalenz)]

Äquivalenz zweier Aussagen:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$

Sprechweisen:
$\mathcal{A}$ äquivalent zu $\mathcal{B}$
$\mathcal{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{B}$
$\mathcal{A}$ notwendig und hinreichend für $\mathcal{B}$

Beispiel: n ist durch 6 teilbar $\Leftrightarrow$ n ist durch 3 teilbar und n ist gerade.

Implikation: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	
w	w	w	"aus Richtigem folgt Richtiges"
w	f	f	"aus Richtigem kann nichts Falsches folgen"
f	w	w	} übliche Ergänzung "ex falso quodlibet" (Aus etwas Falschem folgt alles)
f	f	w	

Sprechweisen:
"Aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$"
"Wenn $\mathcal{A}$, dann $\mathcal{B}$"
"$\mathcal{A}$ ist hinreichend für $\mathcal{B}$"
"$\mathcal{B}$ ist notwendig für $\mathcal{A}$" [Begründung später]

Beispiel: n ist durch 6 teilbar $\Rightarrow$ n ist durch 3 teilbar.

Bemerkung:

1. Eine wahre Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ bedeutet nicht, dass $\mathcal{B}$ wahr ist. Vielmehr besagt sie, dass $\mathcal{B}$ wahr ist, vorausgesetzt $\mathcal{A}$ ist wahr.

2. Um zu zeigen, dass die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr ist, kann man annehmen, dass $\mathcal{A}$ wahr ist [*ohne* dies zu beweisen]. Man muss dann zeigen, dass $\mathcal{B}$ wahr ist.
   Die Annahme $\mathcal{A}$ falsch braucht nicht weiter untersucht zu werden, weil die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ – gleichgültig ob $\mathcal{B}$ wahr oder falsch ist – in diesem Fall immer wahr ist.
   Typische Formulierung: Sei $\mathcal{A}$ wahr. Zeige dann $\mathcal{B}$ ist wahr.

Mit der üblichen Ergänzung folgt, dass $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ und $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ dieselbe Wahrheitstafel besitzen*:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

Die Aussage $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ ist somit für alle Belegungen von $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wahr ("allgemein gültige Aussage", "Tautologie")

[*Bemerkung:* Eine weitere Tautologie ist $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$, die zeigt, dass die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ *keine* Kausalität von $\mathcal{A}$ für $\mathcal{B}$ formuliert.]

Um nicht zu viele Klammern schreiben zu müssen, vereinbaren wir folgende

Vorrangregel:
$$\left.\begin{array}{c} \neg \\ \wedge \\ \vee \\ \Rightarrow, \Leftrightarrow \end{array}\right\downarrow \text{ abnehmender Vorrang}$$

Beispiel: $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ ist zu interpretieren als $(\mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{B})) \vee \mathcal{C}$.

0.1 Satz

Die folgenden Aussagen sind allgemein gültig:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \vee \mathcal{A} \\ \text{(b)} & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \end{array}\right\} \text{Kommutativgesetze}$$

*Tatsächlich ist die übliche Ergänzung zwingend, wenn man Folgendes verlangt:
1. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ist äquivalent zu $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
2. $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ sollen unterschiedliche Verknüpfungen sein

$$\left.\begin{array}{lll}\text{(c)} & (\mathcal{A}\vee\mathcal{B})\vee\mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}\vee(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})\\ \text{(d)} & (\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\wedge\mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\wedge\mathcal{C})\end{array}\right\}\text{Assoziativgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{(e)} & (\mathcal{A}\vee\mathcal{B})\wedge\mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{A}\wedge\mathcal{C})\vee(\mathcal{B}\wedge\mathcal{C})\\ \text{(f)} & (\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\vee\mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{A}\vee\mathcal{C})\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})\end{array}\right\}\text{Distributivgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{(g)} & \neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \;\Leftrightarrow\; (\neg\mathcal{A})\wedge(\neg\mathcal{B})\\ \text{(h)} & \neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) \;\Leftrightarrow\; (\neg\mathcal{A})\vee(\neg\mathcal{B})\end{array}\right\}\text{De Morgan-Regeln}$$

$$\text{(i)}\quad \neg(\neg\mathcal{A}) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \quad\}\ \text{doppelte Verneinung}$$

Beweis: Nachrechnen mit Wahrheitstafeln (Übung)

Folgende Schlussweisen werden häufig verwendet:

0.2 Satz

Allgemein gültig sind

(a) $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\wedge(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}) \iff (\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$

(b) $(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})\wedge(\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{C}) \implies (\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{C})$

(c) $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\wedge(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}) \implies (\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C})$

Aussage (a) haben wir bereits nachgerechnet, (b),(c) analog.

Die beiden letzten Schlussweisen werden häufig (ungenau) als

$$\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{C}$$

bzw.

$$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$$

symbolisiert. Das verallgemeinert sich in naheliegender Weise auf

$$\mathcal{A}_1\Leftrightarrow\mathcal{A}_2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\mathcal{A}_n \qquad \text{bzw.} \qquad \mathcal{A}_1\Rightarrow\mathcal{A}_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow\mathcal{A}_n.$$

Implikation und Äquivalenz lassen sich mit $\neg,\vee,\wedge$ schreiben:

0.3 Satz

Allgemein gültig sind

(a) $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}) \iff \neg\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$

(b) $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A})$ (Kontrapositionsgesetz)

Beispiel zu (b):

$\overbrace{n \text{ ist durch 6 teilbar}}^{\mathcal{A}} \;\Rightarrow\; \overbrace{n \text{ ist durch 3 teilbar}}^{\mathcal{B}}$

n ist *nicht* durch 3 teilbar $\Rightarrow$ n ist *nicht* durch 6 teilbar.

Achtung! $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B})$ ist *nicht* allgemein gültig.

Beispiel: Die Aussage
n ist nicht durch 6 teilbar $\Rightarrow$ n ist nicht durch 3 teilbar
kann falsch sein, z.B. für $n = 9$.

Beweis:

(a) Übung

(b)
$$\begin{aligned}(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \overset{\text{a}}{\Longleftrightarrow} \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} &\overset{\substack{\text{0.1i (dopp.Vernein.)}\\ \text{angew. auf } \mathcal{B}}}{\Longleftrightarrow} \neg\mathcal{A} \vee (\neg(\neg\mathcal{B}))\\ &\overset{\text{0.1a (Komm.gesetz)}}{\Longleftrightarrow} \neg(\neg\mathcal{B}) \vee \neg\mathcal{A} \overset{\text{a}}{\Longleftrightarrow} (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})\end{aligned}$$

oder nachrechnen mit Wahrheitstafeln (Übung)

Bemerkung:

1. Das Kontrapositionsgesetz rechtfertigt für die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ die Sprechweise "$\mathcal{B}$ notwendig für $\mathcal{A}$". Denn wenn $\mathcal{B}$ falsch ist, dann ist $\neg\mathcal{B}$ wahr und somit $\neg\mathcal{A}$ wahr, d.h. $\mathcal{A}$ falsch. $\mathcal{A}$ ist also höchstens dann wahr, wenn $\mathcal{B}$ wahr ist. Anders ausgedrückt: $\mathcal{B}$ wahr ist notwendig für $\mathcal{A}$ wahr.

2. Zum Beweis der Wahrheit der Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wird oft der "Beweis durch Widerspruch" verwendet. Man nimmt an, dass $\mathcal{A}$ wahr und $\mathcal{B}$ falsch ist und folgert durch *korrekte* Schlüsse einen Widerspruch. (Da mit wahren Implikationen aus wahr immer wahr folgt, kann $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ nicht wahr sein. Falls $\mathcal{A}$ falsch ist, ist die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ohnehin wahr. Falls $\mathcal{A}$ wahr ist, muss $\neg\mathcal{B}$ falsch und somit $\mathcal{B}$ wahr sein. Auch in diesem Fall ergibt sich $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr.)

   Formal ausgedrückt zeigt man im Widerspruchsbeweis: $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Rightarrow f$ ist wahr

   Wegen
   $$\begin{aligned}\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Rightarrow f &\overset{0.3\text{a}}{\Longleftrightarrow} \neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \vee f \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})\\ &\overset{0.1\text{h}}{\Longleftrightarrow} \neg\mathcal{A} \vee \neg\neg\mathcal{B} \overset{0.1\text{i}}{\Longleftrightarrow} \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \overset{0.3a}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})\end{aligned}$$
   ergibt sich die Wahrheit der Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.
   [In $(*)$ haben wir die einfach zu beweisende Tautologie $\mathcal{C} \vee f \Leftrightarrow \mathcal{C}$ benutzt.]

Quantorenschreibweise

$\forall$ "für alle"

$\exists$ "es existiert (mindestens) ein"

0.4 Definition

Seien A, B Mengen.

(a) $A = B \quad \overbrace{:\Longleftrightarrow}^{\text{Aussagedefinition}} \quad \forall x: \ x \in A \Leftrightarrow x \in B$ (Mengengleichheit formal)

(b) $A \subset B \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall x: \ x \in A \Rightarrow x \in B$ ("A Teilmenge von B")

(c) $\mathcal{P}(A) := \{M : \ M \subset A\}$ Menge aller Teilmengen von A ("Potenzmenge")

Beispiel: $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

0.5 Folgerung

Seien A, B, C Mengen. Dann gilt

(a) $A \subset B \ \wedge \ B \subset A \quad \Leftrightarrow \quad A = B$

(b) $A \subset B \ \wedge \ B \subset C \quad \Rightarrow \quad A \subset C$

Beweis:

(a)
$$\begin{aligned} A = B &\overset{0.4a}{\Longleftrightarrow} \forall x: \ x \in A \Leftrightarrow x \in B \\ &\overset{0.2a}{\Longleftrightarrow} \forall x: \ (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A) \\ &\overset{\#}{\Longleftrightarrow} (\forall x: \ x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x: \ x \in B \Rightarrow x \in A) \\ &\overset{0.4b}{\Longleftrightarrow} A \subset B \ \wedge \ B \subset A \end{aligned}$$

[Zu #: Allgemein gültig sind folgende Regeln, von denen wir nur die erste beweisen:
$(\forall x : \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)) \ \Leftrightarrow \ (\forall x: \ \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall x: \ \mathcal{B}(x))$
$(\exists x : \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) \ \Leftrightarrow \ (\exists x: \ \mathcal{A}(x)) \vee (\exists x: \ \mathcal{B}(x))$

Beweis: "$\Rightarrow$": $(\forall x: \ \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x))$ sei wahr. Dann ist für jedes x $\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)$ wahr, also ist für jedes x $\mathcal{A}(x)$ wahr. D.h. $\forall x : \mathcal{A}(x)$ ist wahr. Entsprechend folgt $\forall x : \mathcal{B}(x)$ ist wahr. Hieraus: $(\forall x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall x : \mathcal{B}(x))$ ist wahr.

"$\Leftarrow$": $(\forall x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall x : \mathcal{B}(x))$ sei wahr. Für beliebiges x ist demnach $\mathcal{A}(x)$ wahr und $\mathcal{B}(x)$ wahr, also auch $\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)$. Wegen x beliebig folgt $\forall x: \ (\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x))$ wahr.

Achtung! Nicht allgemein gültig sind:
$(\forall x: \ \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) \ \Leftrightarrow \ (\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee (\forall x : \mathcal{B}(x))$
$(\exists x: \ \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)) \ \Leftrightarrow \ (\exists x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\exists x : \mathcal{B}(x))$

Gegenbsp. zur Allquantoraussage: $\mathcal{A}(x) :\Leftrightarrow x = 1, \quad \mathcal{B}(x) :\Leftrightarrow x \neq 1$
linke Seite wahr; rechte Seite falsch]

(b) analog

0.6 Regeln

Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(a)} \quad A \cup B = B \cup A \\ &\text{(b)} \quad A \cap B = B \cap A \end{aligned}\right\} \text{Kommutativgesetze}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{(c)} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ &\text{(d)} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{aligned}\right\} \text{Assoziativgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(e)} & (A\cup B)\cap C & = & (A\cap C)\cup(B\cap C) \\ \text{(f)} & (A\cap B)\cup C & = & (A\cup C)\cap(B\cup C) \end{array}\right\}\text{Distributivgesetze}$$

Beweis:
(e) $x\in(A\cup B)\cap C \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} (x\in A\cup B)\wedge(x\in C) \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} (x\in A\vee x\in B)\wedge x\in C \overset{0.1c}{\Longleftrightarrow}$
$(x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\in C) \Leftrightarrow (x\in A\cap C)\vee(x\in B\cap C) \Leftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$

Bemerkung:
Analog zeigt man die unmittelbar einsichtigen Beziehungen
$A\cup A=A,\ A\cap A=A,\ A\cup\emptyset=A,\ A\cap\emptyset=\emptyset$ über die Aussagen $\begin{array}{l}\mathcal{A}\vee\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{A}\\ \mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{A}\\ \mathcal{A}\vee f\Leftrightarrow\mathcal{A}\\ \mathcal{A}\wedge f\Leftrightarrow f\end{array}$

Die de Morgan-Regeln lassen sich ebenfalls auf Mengen übertragen

0.7 Satz

Seien A, B, M Mengen. Dann gilt:

(a) $M\setminus(A\cup B)=(M\setminus A)\cap(M\setminus B)$

(b) $M\setminus(A\cap B)=(M\setminus A)\cup(M\setminus B)$

(c) $M\setminus(M\setminus A)=M\cap A$

Beweis: Evtl. Übung

Quantoren über Mengen werden viel häufiger verwendet als universelle Quantoren. Sie werden wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcl}\forall x\in M:\mathcal{A}(x) & :\Longleftrightarrow & \forall x:(x\in M\Rightarrow\mathcal{A}(x))\\ \exists x\in M:\mathcal{A}(x) & :\Longleftrightarrow & \exists x:(x\in M\wedge\mathcal{A}(x))\end{array}$$

[In $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ setzen wir im Folgenden die Regeln für Addition, Subtraktion und Multiplikation sowie das Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen voraus.]

0.8 Beispiel und Definition

Sei $m\in\mathbb{N}$ und $a\in\mathbb{Z}$.

$$m\mid a\quad(\text{"}m\text{ Teiler von }a\text{", "}m\text{ teilt }a\text{"})\quad\underbrace{:\Longleftrightarrow}_{\text{Aussagedefinition}}\quad\exists k\in\mathbb{Z}:\ a=k\cdot m$$

Bemerkungen:

(a) Wir beschränken uns aus Gründen der Einfachkeit auf natürliche an Stelle von ganzzahligen Teilern.

(b) $$\begin{array}{rcl} m\mid a & \Longleftrightarrow & \exists k\in\mathbb{Z}:a=k\cdot m\\ & \Longleftrightarrow & a\in\{k\cdot m:\ k\in\mathbb{Z}\}\\ & \Longleftrightarrow & a\in m\cdot\mathbb{Z}\end{array}$$

0.9 Teilbarkeitsregeln

Seien $a, b \in \mathbb{Z},\ l, m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

(a) $m \mid a \ \wedge\ a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \leq |a|$

(b) $m \mid n \ \wedge\ n \mid m \quad \Rightarrow \quad m = n$

(c) $l \mid m \ \wedge\ m \mid n \quad \Rightarrow \quad l \mid n$

(d) $m \mid a \ \wedge\ m \mid b \quad \Rightarrow \quad m \mid (\alpha a + \beta b) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$

(e) $m \mid a \ \wedge\ n \mid b \quad \Rightarrow \quad m \cdot n \mid a \cdot b$

Beweis:

(a) $m \mid a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}:\ a = m \cdot k$
Wegen $a \neq 0$ folgt $k \neq 0$, also $|k| \geq 1$. Somit $|a| = m \cdot |k| \geq m$.

(b) $$\left.\begin{array}{l} m \mid n \ \stackrel{\text{(a)}}{\Longrightarrow}\ m \leq |n| = n \\ n \mid m \ \stackrel{\text{(a)}}{\Longrightarrow}\ n \leq |m| = m \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ m=n}$$

(c) $$\begin{aligned} l \mid m \ \wedge\ m \mid n \ &\Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} : m = k_1 \cdot l \ \wedge\ \exists k_2 \in \mathbb{Z} : n = k_2 \cdot m \\ &\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}:\ n = k_2 \cdot \overbrace{k_1 \cdot l}^{m} \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}:\ n = kl \\ &\Leftrightarrow l \mid n \end{aligned}$$

(d),(e) Evtl. Übung.

Negation von Quantoren: Allgemein gültig sind

$\neg(\forall x:\ \mathcal{A}(x)) \iff \exists x:\ \neg\mathcal{A}(x)$

$\neg(\exists x:\ \mathcal{A}(x)) \iff \forall x:\ \neg\mathcal{A}(x)$

Das überträgt sich auch auf Quantoren über Mengen

$\neg(\forall x \in M:\ \mathcal{A}(x)) \iff \exists x \in M:\ \neg\mathcal{A}(x)$

$\neg(\exists x \in M:\ \mathcal{A}(x)) \iff \forall x \in M:\ \neg\mathcal{A}(x)$

[*Beweis:*
$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in M:\ \mathcal{A}(x)) \ &\Leftrightarrow\ \neg(\forall x:\ x \in M \Rightarrow \mathcal{A}(x)) \\ &\Leftrightarrow\ \exists x:\ \neg(x \in M \Rightarrow \mathcal{A}(x)) \\ &\Leftrightarrow\ \exists x:\ \neg(\neg(x \in M) \vee \mathcal{A}(x)) \\ &\Leftrightarrow\ \exists x:\ \neg\neg(x \in M) \wedge (\neg\mathcal{A}(x)) \\ &\Leftrightarrow\ \exists x:\ x \in M \wedge \neg\mathcal{A}(x) \\ &\Leftrightarrow\ \exists x \in M : \neg\mathcal{A}(x) \end{aligned}$$
Zweite Aussage analog.]

Beispiel:
$$m \underbrace{\nmid}_{\text{"teilt nicht"}} a :\Leftrightarrow \neg(m \mid a) \ \Leftrightarrow\ \neg\exists k \in \mathbb{Z}:\ a = k \cdot m \ \Leftrightarrow\ \forall k \in \mathbb{Z}:\ a \neq k \cdot m \ (\Leftrightarrow\ a \notin m \cdot \mathbb{Z})$$

$\boxed{\mathbb{N} \text{ und die vollständige Induktion}}$

Wir gehen von folgender Eigenschaft von $\mathbb{N}$ aus, die wir als unmittelbar einsichtig voraussetzen.

0.10 Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$

Sei M eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann besitzt M ein kleinstes Element, d.h. es gilt

$$\exists m \in M: \ \forall k \in M: \ m \leq k$$

Schreibweise: $m = \min M$.

(Entsprechend definiert man $\min M$ und $\max M$ für $M \subset \mathbb{R}$. Dabei ist zu beachten, dass nicht jedes $M \subset \mathbb{R}$ ein kleinstes oder größtes Element besitzt.)

Bemerkung:

1. Das Wohlordnungsprinzip gilt auch für $\mathbb{N}_0$ oder allgemeiner für $z_0 + \mathbb{N}_0 := \{z_0, z_0 + 1, z_0 + 2, \ldots\}$ mit $z_0 \in \mathbb{Z}$ fest.

2. Quantoren unterschiedlicher Art dürfen im allgemeinen nicht vertauscht werden:
   Die Aussage $\quad \forall k \in \mathbb{Z}: \ \exists m \in \mathbb{Z}: \ m \leq k \quad$ ist wahr, weil man zu jedem vorgegebenen $k \in \mathbb{Z}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq k$ findet (z.B. $m := k$ oder $m := k - 1$).
   Die Aussage $\quad \exists m \in \mathbb{Z}: \ \forall k \in \mathbb{Z}: \ m \leq k \quad$ ist dagegen falsch, weil $\mathbb{Z}$ kein kleinstes Element besitzt.

0.11 Vollständige Induktion

Sei $\mathcal{A}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage. Wenn

1. $\mathcal{A}(1)$ wahr ist $\quad$ (Induktionsanfang), $\quad$ und

2. $\forall n \in \mathbb{N}: \ \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ wahr ist $\quad$ (Induktionsschluss),

dann ist $\quad \forall n \in \mathbb{N}: \ \mathcal{A}(n) \quad$ wahr.

Beweis:
Wir betrachten die Menge $M := \{n \in \mathbb{N}: \ \mathcal{A}(n) \text{ falsch}\}$ und zeigen $M = \emptyset$.
Annahme: $M \neq \emptyset$.
Nach dem Wohlordnungsprinzip 0.10 besitzt M ein kleinstes Element $m \in M$, d.h insbesondere $\mathcal{A}(m)$ ist falsch.
1. Fall $m = 1:$ Dann ist $\mathcal{A}(1)$ falsch im Widerspruch zur Induktionsannahme.
2. Fall $m \neq 1:$ Dann ist $m - 1 \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}(m-1)$ wahr. Aus dem Induktionsschluss folgt $\mathcal{A}(m)$ wahr. Widerspruch!
Also ist $M = \emptyset$ und somit $\mathcal{A}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Bemerkung:
Das Prinzip der vollständigen Induktion verallgemeinert sich auch auf die folgende Situation:

1. $\mathcal{A}(n_0)$ ist wahr für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, und
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 : \ \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ ist wahr.

Dann ist $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 : \ \mathcal{A}(n)$ wahr.

0.12 Satz (Division mit Rest)

Seien $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $q \in \mathbb{Z}$ und genau ein $r \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, so dass

$$a = bq + r$$

Beweis:
Existenz:
Betrachte $M = \{a - bq : \ q \in \mathbb{Z} \ \wedge \ a - bq \geq 0\}$. Es gilt $M \subset \mathbb{N}_0$ und $M \neq \emptyset$ (wegen $a - b(-|a|) = |a|b + a \geq |a|b - |a| = |a|(b-1) \geq 0$). Wegen 0.10 besitzt M ein kleinstes Element $r = a - bq^* \in \mathbb{N}_0$.
Noch zu zeigen $r < b$.
Annahme: $r \geq b$. Dann folgt $a - b(q^*+1) = \overbrace{a - bq^*}^{r} - b \geq 0$. Somit $0 \leq r - b < r$ und $r - b \in M$.
Widerspruch zu r kleinstes Element von M!

Eindeutigkeit: $a = bq + r, \quad a = b\bar{q} + \bar{r}$ mit $0 \leq r, \bar{r} < b$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \ b(q - \bar{q}) = \bar{r} - r \\
&\Longrightarrow \ b|q - \bar{q}| = |\bar{r} - r| = \max(\bar{r} - r, r - \bar{r}| \leq \max(\bar{r}, r) < b \\
&\Longrightarrow \ |q - \bar{q}| < 1 \Longrightarrow q = \bar{q} \Longrightarrow \bar{r} - r = b\underbrace{(q - \bar{q})}_{0} = 0
\end{aligned}$$

0.13 Definition

$p \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, wenn $p \geq 2$ ist und 1 und p die einzigen Teiler von p sind.

Formal: Sei $p \in \mathbb{N}$ und $p \geq 2$. Dann

$$p \text{ Primzahl} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall m \in \mathbb{N} : (m | p \ \Rightarrow \ m = 1 \ \vee \ m = p)$$

0.14 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann ist n ein Produkt von Primzahlen.

Bemerkung: Dabei sprechen wir auch im Fall nur eines Faktors von einem Produkt.

Beweis: Übung

0.15 Satz (Euklid)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis:
Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen, Bez. $p_1, \ldots, p_k$.

Betrachte $n := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \geq 1$. Nach Satz 0.14 ist $n+1 \geq 2$ ein Produkt von Primzahlen, also gibt es mindestens eine Primzahl $p \in \{p_1, \ldots, p_k\}$ mit $p \,|\, n+1$. Nach 0.9d folgt $p \,|\, (n+1) - n$, d.h. $p|1$. Somit wegen 0.9a $p = 1$. Widerspruch zur Primzahldefinition!

0.16 Definition (Größter gemeinsamer Teiler, Teilerfremdheit)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0$.

$$\mathrm{ggT}(a,b) := \max\{m \in \mathbb{N} : \ m|a \ \wedge \ m|b\}$$

(b) $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ heißen teilerfremd, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler außer 1 besitzen, d.h. $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$.

Beispiele: 4 und 15 sind teilerfremd
p, q Primzahlen, $p \neq q \ \Rightarrow \ p, q$ teilerfremd

0.17 Satz (Bezout)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0$. Dann gilt:

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \min\{a \cdot x + b \cdot y : \ x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y \in \mathbb{Z} \ \wedge \ ax + by \in \mathbb{N}\}$$

Beweis:
Die Menge $M := \{ax + by : \ x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \ \wedge ax + by \in \mathbb{N}\}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Es gilt $M \neq \emptyset$ wegen $a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0$. Also existiert nach Satz 0.10 $m := \min M$. Daher gibt es $x^*, y^* \in \mathbb{Z}$ mit $m = ax^* + by^*$.

1. Zeige: $\mathrm{ggT}(a,b) \leq m$
   $$\mathrm{ggT}(a,b)|a \ \wedge \ \mathrm{ggT}(a,b)|b \quad \overset{0.9\mathrm{d}}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{ggT}(a,b)|\underbrace{ax^* + by^*}_{m} \quad \overset{0.9\mathrm{a}}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{ggT}(a,b) \leq m$$

2. Zeige: $\mathrm{ggT}(a,b) \geq m$
   Wir zeigen zunächst $m|a$.
   Nach Satz 0.12 gilt
   $$a = m \cdot q + r \qquad (q \in \mathbb{Z}, \ r \in \mathbb{N}_0, \ 0 \leq r < m \text{ geeignet})$$
   Hieraus
   $$r = a - mq = a - (ax^* + by^*)q = a\underbrace{(1 - x^*q)}_{\in\mathbb{Z}} + b\underbrace{(-y^*q)}_{\in\mathbb{Z}}.$$
   Wäre $r \in \mathbb{N}$, dann wäre $r \in M$ und $r < m$. Dann wäre m nicht minimal.
   Also gilt $r \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N} = \{0\}$, d.h. $r = 0$. Somit $a = mq$, also $m|a$.
   Analog folgt $m|b$.
   Insgesamt: $m|a \ \wedge \ m|b \implies m \leq \mathrm{ggT}(a,b)$.

Weiterführende Bemerkung:
Der Satz 0.17 besagt auch, dass die Gleichung mit den ganzzahligen Koeffizienten a und b

$$ax + by = \mathrm{ggT}(a, b) \qquad (\sharp)$$

mindestens ein ganzzahliges Lösungspaar (x, y) besitzt, sofern $a \neq 0 \vee b \neq 0$.
Tatsächlich kann die Gleichung (mit $a, b \in \mathbb{Z}$ fest, $a \neq 0 \vee b \neq 0$)

$$ax + by = c \qquad (\sharp\sharp)$$

nach 0.9d nur dann ganzzahlige Lösungen haben, wenn $\mathrm{ggT}(a, b)|c$ gilt. In diesem Fall kann man zu jeder Lösung von ($\sharp$) leicht eine Lösung von ($\sharp\sharp$) berechnen. Eine Lösung von ($\sharp$) lässt sich mit dem hier nicht behandelten erweiterten Euklidischen Algorithmus finden.

0.18 Lemma

Sei $p \in \mathbb{N}$ Primzahl, $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$p \mid a \cdot b \quad \Longrightarrow \quad p|a \;\vee\; p|b$$

Beweis: Es gelte $p \mid a \cdot b$.

1.F.: $p|a$: Fertig

2.F.: $p \nmid a$: Dann $\mathrm{ggT}(p, a) = 1$
$\stackrel{0.17}{\Longrightarrow} \exists x, y \in \mathbb{Z} : \; 1 = ax + py$
$\Longrightarrow b = ab \cdot x + p \cdot by$
Wegen $p|ab$ und $p|p$ folgt nach 0.9d $p|b$.

0.19 Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellbar. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn die Primzahlen ihrer Größe nach geordnet sind.

Beweis:
Existenz: Satz 0.14
Eindeutigkeit: Übung

Kartesische Produkte

Seien A, B Mengen. $A \times B := \{\overbrace{(a,b)}^{\text{Paar}} : \ a \in A, \ b \in B\}$
Dabei sind zwei Paare genau dann gleich, wenn die entsprechenden Komponenten gleich sind, d.h.

$$(a,b) = (a',b') :\iff \quad a = a' \ \wedge \ b = b'$$

Bemerkung:

(a) Paare und Mengen sind verschieden, z.B. gilt

$$(1,2) \neq (2,1), \text{ aber } \{1,2\} = \{2,1\}$$

(b) Paare können auf Mengen zurückgeführt werden, z.B. kann man definieren

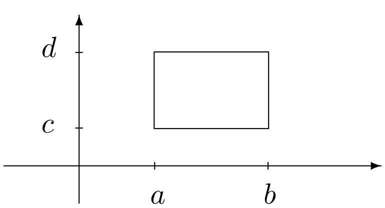
$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\} \qquad\qquad [\subset \mathcal{P}(A \cup B) \text{ bzw. } \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))]$$

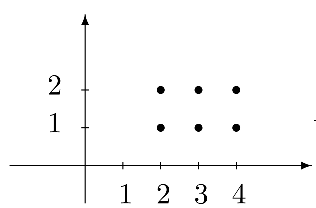
[Mit dieser Definition gilt $A \times B \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, genauer

$$A \times B = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : \ \exists a \in A, \ b \in B : \ x = \{\{a\},\{a,b\}\} \ \}$$

Potenzmengen- und Aussonderungsaxiom sichern die Existenz von $A \times B$ in der Mengenlehre]

Veranschaulichung kartesischer Produkte:





$\{2,3,4\} \times \{1,2\}$

$\underbrace{[a,b]}_{:= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}} \times [c,d]$

0.20 Definition (Kartesisches Produkt von Mengen)
Seien $A_1, \ldots, A_k$ endlich viele Mengen ($k \geq 2$), dann heißt

$$A_1 \times \ldots \times A_k := \{(a_1, \ldots, a_k) : \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} : \ a_i \in A_i\}$$

das kartesische Produkt der Mengen $A_1, \ldots, A_k$. Dabei sind zwei "k-Tupel" $(a_1, \ldots, a_k)$ und $(a'_1, \ldots, a'_k)$ genau dann gleich, wenn $a_1 = a'_1 \ \wedge \ a_2 = a'_2 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ a_k = a'_k$.
Falls $A_1 = \ldots = A_k = A$ schreibt man $A^k := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k-\text{mal}}$ und setzt $A^1 := A$.

$\boxed{\textbf{Relationen}}$

0.21 Definition (Relation)

Seien X, Y Mengen, $R \subset X \times Y$. Dann heißt das Tripel $\mathcal{R} := (X, Y, R)$ Relation zwischen (Elementen von) X und (Elementen von) Y.
Im Fall $X = Y$ spricht man von einer binären Relation oder einer Relation auf X. In diesem Fall benutzt man die Schreibweise

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x, y) \in R$$

und schreibt $(X, \sim)$ anstelle von (X, X, R).

Beispiel für binäre Relationen:
$(\mathbb{R}, \leq), (\mathbb{R}, <), (\mathbb{R}, \geq), (\mathbb{R}, =)$ sind jeweils Relationen auf $\mathbb{R}$. Die zugehörigen Mengen R lauten $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq y\}, \ R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < y\}$ usw.
(Da *jede* Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ eine Relation auf $\mathbb{R}$ definiert, ist auch $x \sim y \ :\Longleftrightarrow \ x^2 + y^2 \leq 1$ eine Relation. Hier $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.)

Ein wichtiges Beispiel für Relationen sind Äquivalenzrelationen, die eine Abschwächung der Gleichheitsrelation darstellen.

0.22 Definition (Äquivalenzrelation)

Eine binäre Relation $(X, \sim)$ heißt Äquivalenzrelation, wenn gilt:

(a) $\forall x \in X : \ x \sim x$ (Reflexivität)

(b) $\forall x, y \in X : \ x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ (Symmetrie)

(c) $\forall x, y, z \in X : \ x \sim y \ \wedge \ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Transitivität)

[Modell: X Menge von Computern: $x \sim y \ :\Longleftrightarrow \ x$ und y sind baugleich

Beispiele:

1. $(X, =)$ ist eine Äquivalenzrelation:

   (a) $x = x \quad (x \in X)$

   (b) $x = y \ \Leftrightarrow \ y = x \quad (x, y \in X)$

   (c) $x = y \wedge y = z \ \Rightarrow \ x = z \quad (x, y, z \in X)$

2. Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren folgende Relation auf $\mathbb{Z}$: $\quad a \sim b \ :\Longleftrightarrow \ m|(a - b)$.
   Dann ist $(\mathbb{Z}, \sim)$ eine Äquivalenzrelation.
   Denn:

   (a) $a \sim a \ \Leftrightarrow \ m|0 \ \Leftrightarrow \ w$

   (b) $a \sim b \ \Leftrightarrow \ m|(a - b) \ \Leftrightarrow \ m|(-1)(a - b) \ \Leftrightarrow \ m|(b - a) \ \Leftrightarrow \ b \sim a$

   (c) $a \sim b \wedge b \sim c \ \Rightarrow \ m|(a - b) \wedge m|(b - c) \ \overset{0.9\text{d}}{\Longrightarrow} \ m|\underbrace{(a - b) + (b - c)}_{a-c} \ \Leftrightarrow \ a \sim c$

Für die in 2. definierte Relation gibt es eine spezielle Schreibweise.

0.23 Definition (Kongruenz modulo)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann

$$a \equiv b \mod m \quad :\Longleftrightarrow \quad m \,|\, a - b.$$

Sprechweise: a kongruent b modulo m.

Beispiele: Es gilt $6 \equiv 1 \mod 5$ und $11 \equiv -5 \mod 4$.

0.24 Definition und Satz (Äquivalenzklasse)

Sei $(X, \sim)$ eine Äquivalenzrelation. Für $a \in X$ heißt die Menge $[a] := \{x \in X : x \sim a\}$ Äquivalenzklasse zu a.
Für $a, b \in X$ gilt entweder $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$. (Ersteres, falls $a \sim b$ und letzteres, falls $a \nsim b$).

Beweis:

1.F.: $a \sim b$:
Sei $x \in [a]$. Dann gilt $x \sim a$ und $a \sim b$, also wegen der Transitivität $x \sim b$. Somit $x \in [b]$, d.h. $[a] \subset [b]$. Analog zeigt man unter Verwendung von $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$, dass $[b] \subset [a]$.

2.F.: $a \nsim b$:
Annahme: $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Sei $x \in [a] \cap [b]$. Dann $x \sim b$ und $x \sim a$, d.h. $a \sim x$. Transitivität liefert $a \sim b$. Widerspruch!

Beispiele:

1. Für $(X, =)$ sind die Äquivalenzklassen zu $a \in X$ gegeben durch $[a] = \{a\}$.
2. Für $(\mathbb{Z}, \sim)$ mit $a \sim b :\Leftrightarrow m|(a - b)$ $(m \in \mathbb{N}$ fest) ist die Äquivalenzklasse zu a gegeben durch:
$$\begin{aligned}[a] &= \{x \in \mathbb{Z} : m|(x-a)\} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : x - a = k \cdot m\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : x = a + k \cdot m\} = \{a + k \cdot m : k \in \mathbb{Z}\} =: a + m \cdot \mathbb{Z}\end{aligned}$$
Wegen $[a] = [a+km]$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gibt es (bei festem m) nur m paarweise verschiedene Äquivalenzklassen:
$$[0], [1], \ldots, [m-1] \qquad \text{“Restklassen modulo } m\text{ “}$$
Schreibweise für die Menge dieser Restklassen:
$$\mathbb{Z}_m := \{[0], [1], \ldots, [m-1]\} \quad (=: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

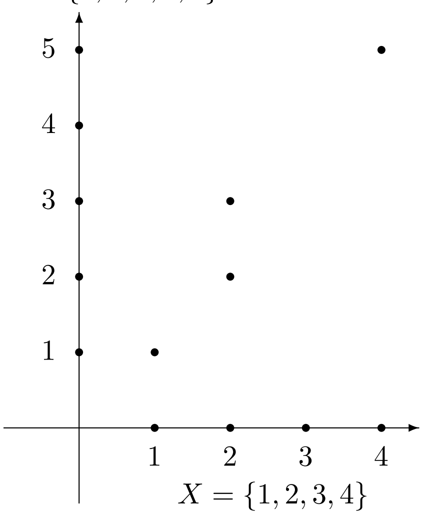
Bemerkung: Gelegentlich werden wir für die Restklassen modulo m $[a]_m$ statt $[a]$ schreiben.

Wir kehren zu allgemeinen Relationen zurück.

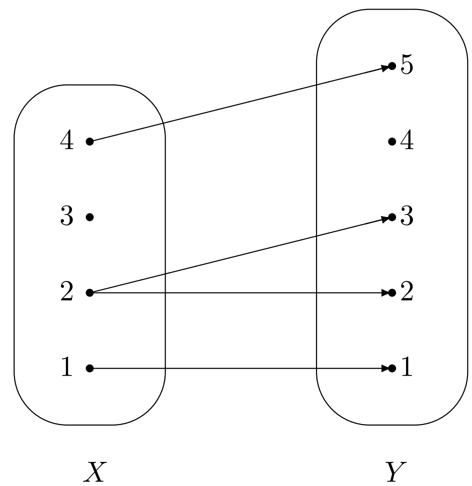
Veranschaulichung der Relation $\mathcal{R} = (X, Y, R)$ *mit*

$X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 5)\}$:

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Andere Möglichkeit: Pfeil von x nach y, falls $(x, y) \in R$



[Eine Interpretation: X Personen, Y Gegenstände,
$(x, y) \in R$:⇔ Person x besitzt Gegenstand y.
Person 1 besitzt einen Gegenstand (Nr. 1)
Person 2 besitzt zwei Gegenstände (Nr. 2 und 3)
Person 3 besitzt keinen Gegenstand
Person 4 besitzt einen Gegenstand (Nr. 5)
Gegenstand 4 ist herrenlos]

Die Beziehung "Gegenstand y gehört Person x" führt auf den Begriff der Umkehrrelation.]

0.25 Definition (Umkehrrelation)

Sei $\mathcal{R} = (X, Y, R)$ eine Relation. Die Relation (Y, X, R^{-1}) mit

$$R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$$

heißt Umkehrrelation von $\mathcal{R}$ (Bezeichnung: $\overset{-1}{\mathcal{R}}$.)

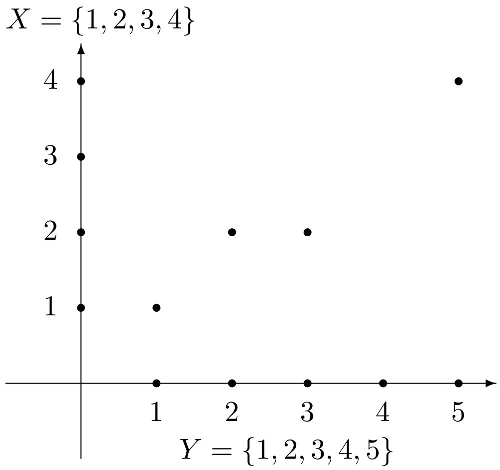
Bemerkungen

(a) Umkehrrelationen existieren immer (im Unterschied zu den noch zu betrachtenden Umkehrfunktionen)

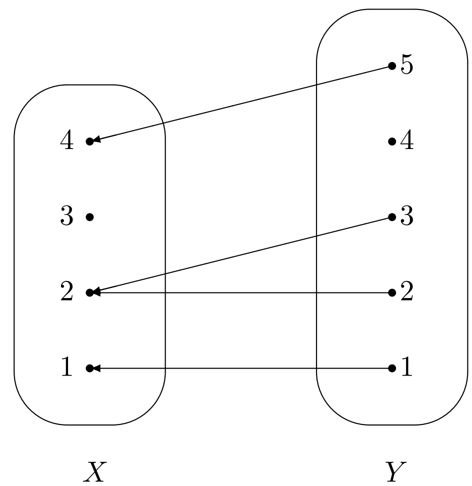
(b) Es gilt $\overset{-1}{\left(\overset{-1}{\mathcal{R}}\right)} = \mathcal{R}$.
Denn: $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \left(R^{-1}\right)^{-1}$, also $R = \left(R^{-1}\right)^{-1}$.
Somit: $\mathcal{R} = (X, Y, R) \Rightarrow \overset{-1}{\mathcal{R}} = (Y, X, R^{-1}) \Rightarrow \overset{-1}{\left(\overset{-1}{\mathcal{R}}\right)} = (X, Y, \left(R^{-1}\right)^{-1}) = (X, Y, R) = \mathcal{R}$.

Veranschaulichung der Umkehrrelation $\overset{-1}{\mathcal{R}} = (Y, X, R^{-1})$:

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (5, 4)\}.$



Andere Möglichkeit: Pfeil von y nach x, falls $(x, y) \in R$ (Pfeilumkehr)



Funktionen (Abbildungen)

0.26 Definition (Funktion, Abbildung)

Eine Relation $f = (X, Y, R)$ heißt Funktion oder Abbildung, wenn gilt

$$\forall x \in X \quad \underbrace{\exists_1}_{\text{genau ein}} \; y \in Y : \; (x, y) \in R,$$

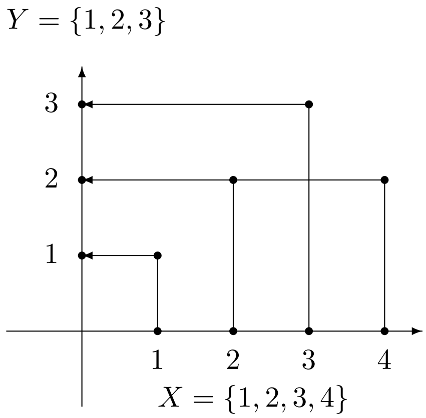
d.h. jedem $x \in X$ wird *genau ein* $y \in Y$ zugeordnet. Wir nennen y Funktionswert von f an der Stelle x und schreiben $y = f(x)$.
Anstelle von $f = (X, Y, R)$ schreiben wir $f : X \to Y$ und nennen X Definitionsbereich oder Quelle von f, Y Wertebereich oder Ziel von f und R Graph von f (Schreibweise: graph f)

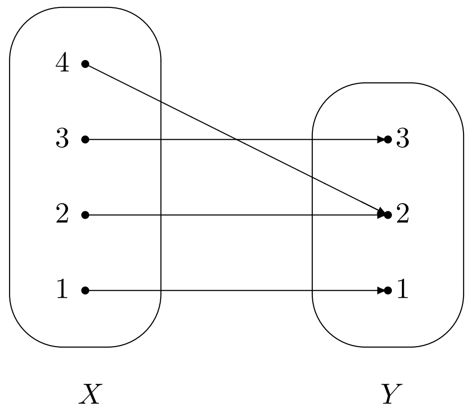
[Übliche Schreibweisen für Funktionen: $f : X \to Y, \; y = f(x)$ oder $f : X \to Y, \; x \mapsto y$]

Bemerkung: Es gilt also $R = \operatorname{graph} f = \{(x, y) \in X \times Y : \; y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : \; x \in X\}$

Beispiele:

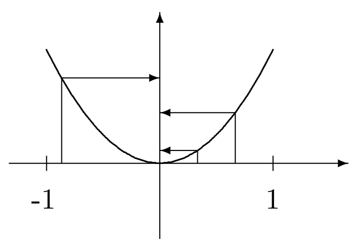
(a) $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\},\ f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3,\ f(4) = 2.$
Dann gilt $\operatorname{graph} f = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,2)\}$.





In das linke Diagramm sind zusätzlich zum Funktionsgraphen die Abbildungspfeile des rechten Diagramms eingezeichnet. Zur vollständigen Beschreibung der Funktion ist das nicht erforderlich, ausreichend sind Definitions- und Wertebereich und entweder der Funktionsgraph oder die Abbildungspfeile.

(b) $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.



(c) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}),\quad a \mapsto \underbrace{[a]}_{\text{Äquivalenzklasse}} = \overbrace{a + m \cdot \mathbb{Z}}^{\text{Teilmenge von } \mathbb{Z}} \quad \text{ist ebenfalls eine Funktion}$$

(d) Jedes k-Tupel $(x_1, \ldots, x_k) \in X^k$ kann als Abbildung $\{1, \ldots, k\} \to X,\ i \mapsto x_i$ aufgefasst werden

(e) Entsprechend sind reelle *Folgen* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto a_n$.
[Z.B. $a_n = \sqrt{n+1}$]

(f) Eine *Familie* $(x_i)_{i \in I}$ ist eine andere Schreibweise für eine Abbildung $I \to X,\ i \mapsto x_i$, worin I und X beliebige Mengen sind. I heißt auch Indexmenge.

(g) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Das rechteckige Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$$

heißt reelle $m \times n$-Matrix. Man schreibt auch $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

A kann als eine Abbildung $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden.

0.27 Bezeichnungen

(a) Sei X eine Menge. $\mathrm{id}_X : X \to X,\ x \mapsto x$ heißt Identität auf X

(b) Sei X eine Menge, $A \subset X$. $\iota_A : A \to X,\ x \mapsto x$ heißt Einbettung oder Inklusion von A in X.

(c) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, $A \subset X$. $f|_A : A \to Y,\ x \mapsto f(x)$ heißt Einschränkung oder Restriktion von f auf A.

Bemerkung: $\iota_A = \mathrm{id}_X|_A$.

0.28 Definition (Bild, Urbild)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A \subset X,\ B \subset Y$.

(a) $f(A) := \{f(x) :\ x \in A\} = \{y \in Y :\ \exists x \in A :\ y = f(x)\}$ heißt Bild von A unter f.

(b) $\overset{-1}{f}(B) := \{x \in X :\ f(x) \in B\} = \{x \in X :\ \exists y \in B :\ y = f(x)\}$ heißt Urbild von B unter f.

Bemerkung: Das Bild von X unter f (d.h. $f(X)$) darf nicht mit dem Wertebereich von f (d.h Y) verwechselt werden.

Beispiel:
Betrachte Beispiel (a) nach 0.26:

$f(\{1, 2, 4\}) = \{f(1), f(2), f(4)\} = \{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$
$\overset{-1}{f}(\{2\}) = \{x \in X :\ f(x) \in \{2\}\} = \{2, 4\}$

0.29 Definition (Verkettung von Abbildungen)

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Die Abbildung $X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$ heißt Verkettung von g mit f und wird mit $g \circ f$ bezeichnet.

0.30 Satz

Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h : Z \to W$ Abbildungen. Dann gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{ll} f: X \to Y, & x \mapsto f(x) \\ h \circ g: Y \to W, & y \mapsto h(g(y)) \end{array}\right\} (h \circ g) \circ f: X \to W,\ x \mapsto h(g(f(x)))$$

$$\left.\begin{array}{ll} g \circ f: X \to Z, & x \mapsto g(f(x)) \\ h: Z \to W, & z \mapsto h(z) \end{array}\right\} h \circ (g \circ f): X \to W,\ x \mapsto h(g(f(x)))$$

Also gilt $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$ $(x \in X)$ und daraus folgt wegen der jeweiligen Übereinstimmung der Definitions- und Wertebereiche

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Bemerkung:
Auch bei identischem Definitions- und Wertebereich gilt im allgemeinen: $f \circ g \neq g \circ f$.

Beispiel:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = x^2 + 1 + 1 = x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$

0.31 Definition

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

(a) f heißt injektiv, wenn $\forall x, x' \in X: \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

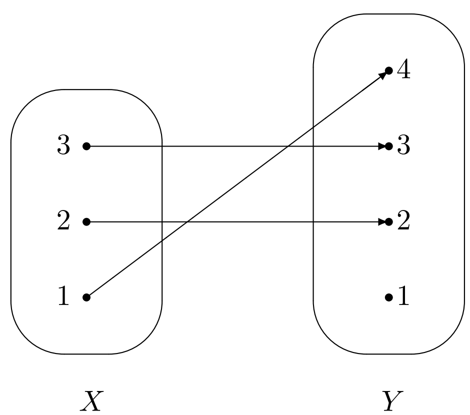
(b) f heißt surjektiv, wenn $f(X) = Y$

(c) f heißt bijektiv, wenn f zugleich injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung zu (a)*:*
Oft ist die Kontraposition einfacher zu beweisen: $\forall x, x' \in X: \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

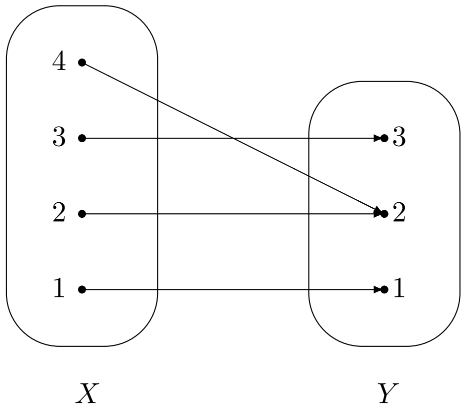
Beispiele:

1.



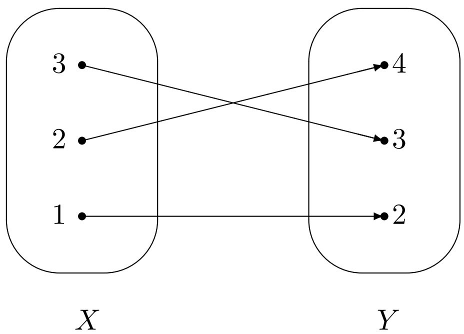
$X = \{1,2,3\},\ Y = \{1,2,3,4\}$
$f : X \to Y,\ f(1) = 4,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3$
injektiv, aber nicht surjektiv

2.



$X = \{1,2,3,4\},\ Y = \{1,2,3\}$
$f : X \to Y,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3,\ f(4) = 2$
surjektiv, aber nicht injektiv

3.



$X = \{1,2,3\},\ Y = \{2,3,4\}$
$f : X \to Y,\ f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 3$
bijektiv

0.32 Lemma

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann gilt

(a) $g \circ f$ injektiv $\Longrightarrow f$ injektiv

(b) $g \circ f$ surjektiv $\Longrightarrow g$ surjektiv

Beweis:

(a) $f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \overset{g\circ f \text{ inj.}}{\Rightarrow} x = x' \quad (x, x' \in X)$, also f injektiv.

(b) $$\left.\begin{array}{l} g(Y) \subset Z, \text{ weil } g : Y \to Z \\ Z \underset{\substack{\uparrow \\ g\circ f \text{ surj.}}}{=} (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y) \end{array}\right\} g(Y) = Z, \text{ d.h. } g \text{ surjektiv}$$

0.33 Definition und Satz (Umkehrfunktion, Umkehrabbildung)

Eine Abbildung $g : Y \to X$ heißt Umkehrfunktion oder Umkehrabbildung zu $f : X \to Y$, wenn gilt

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad \text{d.h.} \quad g(f(x)) = x \quad (x \in X)$$

und

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y, \quad \text{d.h.} \quad f(g(y)) = y \quad (y \in Y)$$

Falls f eine Umkehrabbildung besitzt, ist sie eindeutig bestimmt und bijektiv. (Bez.: f^{-1}.)
In diesem Fall ist f ebenfalls bijektiv.

Beweis:
id_X bijektiv $\overset{0.32}{\Longrightarrow}$ f injektiv $\wedge$ g surjektiv
id_Y bijektiv $\overset{0.32}{\Longrightarrow}$ f surjektiv $\wedge$ g injektiv
Somit f, g bijektiv.

Seien g_1, g_2 zwei Umkehrabbildungen zu f. Dann gilt:

$$g_1(f(x)) = x = g_2(f(x)) \quad (x \in X)$$

Wegen $f(X) = Y$ gibt es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.
Also: $\quad g_1(y) = g_2(y) \quad (y \in Y)$, d.h. $g_1 = g_2$.

Beispiel:
Umkehrabbildung zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a \cdot x + b \quad (a, b \in \mathbb{R}$ fest, $a \neq 0)$

$$\begin{aligned} f(g(y)) = y &\iff a \cdot g(y) + b = y \\ &\iff g(y) = \frac{y-b}{a} \qquad (y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Noch nachzuweisen: $g(f(x)) = x$, d.h. $g(ax + b) = \dfrac{ax + b - b}{a} = x$

0.34 Satz

Es gilt:

(a) $f : X \to Y$ bijektiv $\iff f$ besitzt eine Umkehrabbildung

(b) $f : X \to Y$ bijektiv, $B \subset Y \Longrightarrow \overset{-1}{f}(B) = f^{-1}(B)$

(c) $f : X \to Y$ bijektiv $\Longrightarrow f^{-1}$ bijektiv $\wedge$ $(f^{-1})^{-1} = f$

(d) $f : X \to Y$ bijektiv, $g : Y \to Z$ bijektiv $\Longrightarrow g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Beweis:

(a) "$\Leftarrow$" Satz 0.33

"$\Rightarrow$" f surjektiv, d.h. $f(X) = Y$, also $\forall y \in Y\ \exists x \in X:\ f(x) = y$
Es gilt sogar

$$\forall y \in Y\ \exists_1 x \in X:\ f(x) = y \qquad (*)$$

(Denn: $f(x) = y\ \wedge\ f(x') = y \Rightarrow f(x) = f(x') \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} x = x'$.)
Somit definiert $(*)$ eine Abbildung $g: Y \to X,\ x = g(y)$.
Hieraus und aus (*) folgen

$y = f(g(y)) \quad (y \in Y) \qquad (\sharp)$
$x = g(f(x)) \quad (x \in g(Y)) \quad (\sharp\sharp)$

[Zu $(\sharp\sharp)$: $x \in g(Y)\ \Rightarrow\ x = g(y)$ ($y \in Y$ geeignet) $\Rightarrow g(f(x)) = g(f(g(y))) \overset{(*)}{=} g(y) = x$]

Wenn wir $g(Y) = X$ bewiesen haben, ergibt sich nach Satz 0.33 aus $(\sharp)$ und $(\sharp\sharp)$, dass g Umkehrabbildung von f ist.
Zeige: $g(Y) = X$.
"$\subset$": Wegen $g: Y \to X$ folgt $g(Y) \subset X$.
"$\supset$": Sei $x \in X$ und $y := f(x)$. Aus $(\sharp)$ ergibt sich $f(x) = f(g(f(x)))$. Die Injektivität von f liefert $x = g(f(x))$. Wegen $x \in X$ beliebig, folgt $X = g(f(X)$, also $X \subset g(Y)$.

(b) $\overset{-1}{f}(B) = \{x \in X:\ \exists y \in B:\ y = f(x)\} \overset{f \text{ bij.}}{=} \{x \in X:\ \exists y \in B:\ f^{-1}(y) = x\}$
$= \{f^{-1}(y):\ \exists y \in B\} = f^{-1}(B)$

(c) Zeige: f^{-1} existiert und $f: X \to Y$ ist Umkehrabbildung von $f^{-1}: Y \to X$:

$$f \text{ bijektiv} \overset{0.33,0.34\text{a}}{\Longrightarrow} \begin{cases} f^{-1} \text{ existiert und ist bijektiv} \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \\ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \end{cases}$$

[Ersetzt man in 0.33 $f \to f^{-1}$ und $g \to f$ und $X \leftrightarrow Y$, so erkennt man, dass f Umkehrabbildung von f^{-1} ist.]
Die Eindeutigkeitsaussage von 0.33 liefert $(f^{-1})^{-1} = f$.

(d) Es gilt: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \overset{0.30 \text{ mehrfach}}{=} (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f = (f^{-1} \circ \mathrm{id}_Y) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$.
Analog: $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = (g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1} = (g \circ \mathrm{id}_Y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_Z$.
Aus 0.33 folgt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (Eindeutigkeit der Umkehrabbildung) und die Bijektivität von $g \circ f$ und $(g \circ f)^{-1}$.

(*Bemerkung:* $(\mathrm{id}_Y \circ f)(x) = \mathrm{id}_Y(f(x)) = f(x)\ \ (x \in X)$, also $\mathrm{id}_Y \circ f = f$ usw.)

$\boxed{\textbf{Endliche Mengen}}$

Eine Menge M heißt gleichmächtig zu einer Menge N, wenn eine bijektive Abbildung $\varphi : M \to N$ existiert. Es ist leicht zu sehen, dass die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von Mengen ist.

0.35 Definition

(a) Sei M eine nicht leere Menge, $n \in \mathbb{N}$.
M hat n Elemente $:\Longleftrightarrow\ \exists \varphi : \{1, \ldots, n\} \to M \ \wedge\ \varphi$ bijektiv.
(Schreibweise: $|M| = n$)

(b) $|\emptyset| = 0$.

(c) M heißt endlich, falls es $n \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $|M| = n$; andernfalls unendlich.

(d) M heißt abzählbar, wenn M gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

Bemerkungen

1. Wir verzichten auf den Beweis, dass in (a) die Elementzahl eindeutig bestimmt ist. Nur dann ist die Schreibweise $|M| = n$ gerechtfertigt. Ein solcher Beweis könnte sich auf die Aussage

$$m, n \in \mathbb{N} \wedge \psi : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\} \text{ bijektiv} \quad \Longrightarrow \quad m = n$$

stützen, die sich mit dem Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$ oder vollständiger Induktion beweisen lässt.

2. Für endliche Mengen gilt $M \subset N \wedge |M| = |N| \ \Rightarrow\ M = N$.

3. Für unendliche Mengen trifft die Aussage von 2. im allg. nicht zu:
Bsp.: $2 \cdot \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, $2 \cdot \mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ $[\varphi : \mathbb{N} \to 2 \cdot \mathbb{N},\ n \mapsto 2n$ bijektiv$]$,
aber $2 \cdot \mathbb{N} \neq \mathbb{N}$.

4. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind abzählbar (o. Bew.), $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (Bew. Analysis)

0.36 Lemma

Seien X, Y nicht leere endliche Mengen mit $|X| = |Y|$.
Dann sind für eine Abbildung $f : X \to Y$ äquivalent:

(a) f ist bijektiv.

(b) f ist injektiv.

(c) f ist surjektiv.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $(b) \Leftrightarrow (c)$ gilt.

(b)⇒(c) $f : X \to Y$ injektiv $\Rightarrow \hat{f} : X \to f(X),\ \hat{f}(x) = f(x)$ bijektiv
Daher: $|f(X)| = |X|$. Aus $|X| = |Y|$ folgt $|f(X)| = |Y|$, und wegen $f(X) \subset Y$ ergibt sich $f(X) = Y$, d.h. f surjektiv.

(c)⇒(b) Sei f surjektiv, d.h. $f(X) = Y$. Wäre f nicht injektiv, so würde $|f(X)| < |X|$ folgen, weil für $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden nicht alle $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ paarweise verschieden sind. Hieraus $|Y| = |f(X)| < |X|$ im Widerspruch zur Voraussetzung $|X| = |Y|$.

Bemerkung:
Für unendliche Mengen gilt im allgemeinen *nicht*:
f injektiv $\Longrightarrow f$ bijektiv (*Beispiel:* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = 2n$)
f surjektiv $\Longrightarrow f$ bijektiv (*Beispiel:* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(1) = 1,$
$f(n) = n - 1 \quad (n \geq 2)$)

Nochmals Mengenoperationen

0.37 Definition

Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen mit $I \neq \emptyset$.

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{a :\ \forall i \in I :\ a \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{a :\ \exists i \in I :\ a \in A_i\}$$

Insbesondere gilt

$$\bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i = A_1 \cap A_2 \quad \text{bzw.} \quad \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n$$

$$\bigcup_{i \in \{1,2\}} A_i = A_1 \cup A_2 \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

Beispiel: $\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} [z, z+1]$ (ohne Beweis)

Bemerkung:
Auch das kartesische Produkt lässt sich unter den Voraussetzungen von 0.37 verallgemeinern.

$$\bigtimes_{i \in I} A_i := \{(a_i)_{i \in I} :\ \forall i \in I :\ a_i \in A_i\}$$

Das Auswahlaxiom

$$(\forall i \in I :\ A_i \neq \emptyset) \ \Rightarrow\ \bigtimes_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

sichert die Existenz des verallgemeinerten kartesischen Mengenprodukts.
Ebenso lässt sich das kartesische Produkt gleicher Mengen verallgemeinern.

$$A^I := \bigtimes_{i \in I} A = \{(a_i)_{i \in I} :\ \forall i \in I :\ a_i \in A\} = \{a : I \to A\}$$

Z.B. bezeichnet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ für die Menge aller reellen Folgen.