Prof. Martin Hofmann, PhD
Dr. Ulrich Schöpp
Sabine Bauer

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
27. November 2017

Lösungsvorschlag zur 4. Übung zur Vorlesung

Grundlagen der Analysis

Aufgabe 4-1 (Landau Symbole; 4 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für $x \to \infty$.

a) $x^2 + 9x = O(x^2)$ wahr

b) $x^3 + 9x = O(x^2)$ falsch

c) $x + \sin x = O(x)$ wahr

d) $e^x = O(2^x)$ falsch

Lösungsskizze

a) Wir können Aufgabe 3-5 benutzen, denn $\lim_{x\to\infty} |\frac{x^2+9x}{x^2}| = 1$.

b) Angenommen es gibt $C > 0$ und N, so dass $|x^3 + 9x| \leq C|x^2|$ für alle $x > N$ gilt. Dann gilt $x + \frac{9}{x} \leq C$ für alle $x > \max(N, 0)$. Das ist für $x = C$ aber nicht wahr, also muss die Annahme falsch gewesen sein.

c) Es gilt: $x+\sin x \leq x+1$. Mit Aufgabe 3-5 folgt $x+1 = O(x)$, also gibt es $C > 0$ und N, so dass $|x+1| \leq C|x|$ für alle $x > N$ gilt. Daraus folgt $|x+\sin x| = x+\sin x \leq x+1 = |x+1| \leq C|x|$ für alle $x > \max(1, N)$.

d) Angenommen die Aussage ist wahr. Dann gibt es C und N, so dass $e^x < C \cdot 2^x$ für alle $x > N$ gilt. Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{e^x}{2^x} < C$, was sich als $(\frac{e}{2})^x < C$ schreiben lässt. Da $\frac{e}{2} > 1$, geht $(\frac{e}{2})^x$ für $x \to \infty$ gegen ∞. Also kann nicht $(\frac{e}{2})^x < C$ für alle $x > N$ gelten und unsere Annahme muss falsch gewesen sein.

Aufgabe 4-2 (Trigonometrische Funktionen)

a) Vereinfachen Sie $\arccos\big(\sin(x + \frac{\pi}{2})\big)$. $\arccos(\cos(x))$

b) Welchen Wert erhalten Sie für $x = 5$? $2\pi - 5$

Aufgabe 4-3 (Trigonometrische Funktionen) Für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ gilt folgende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$?

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = c\sin(x) + d\cos(x)$$

Lösungsskizze

Anwenden der Formel $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$ aus der Vorlesung auf die linke Seite der Gleichung ergibt $\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$, also ist $c = \frac{1}{2}$ und $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eine Lösung.

Eine andere Lösung gibt es nicht. Wenn man in die gegebene Gleichung für x den Wert 0 einsetzt, dann erhält man $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = c\sin(0) + d\cos(0)$. Ausrechnen liefert $\frac{\sqrt{3}}{2} = d$. Wenn man den Wert $\frac{\pi}{2}$ einsetzt, dann erhält man $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = c\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + d\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ausrechnen liefert $\frac{1}{2} = c$. Also sind c und d eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4-4 (Komplexe Zahlen; 4 Punkte) Für welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ gelten jeweils folgende Gleichungen?

a) $y \cdot e^{ix} = 3i$ $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ y = 3$

b) $y \cdot e^{ix} = 1 + \sqrt{3}i$ $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ y = 2$

c) $y \cdot e^{ix} = 2\sqrt{3} - 2i$ $x = \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi,\ y = 4$

Aufgabe 4-5 (Komplexe Zahlen; 4 Punkte) Lösen Sie folgende Gleichungen über den komplexen Zahlen. Geben Sie alle Lösungen konkret in der Form $z = x + iy$ für reelle x und y an.

a) $z^2(1+i) = 2z$ Zwei Lösungen: $z = 0$ und $z = 1 - i$

Lösungsskizze

Wenn $z \neq 0$, dann können wir durch z teilen und die Gleichung wird zu $z(1+i) = 2$. Division durch $(i+1)$ liefert dann $z = \frac{2}{i+1}$. Ausrechnen der rechten Seite ergibt $\frac{2}{i+1} = \frac{2(i-1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{2(i-1)}{-2} = 1 - i$. Im Fall $z \neq 0$ gibt es also nur die Lösung $z = 1 - i$.
Bleibt noch der Fall $z = 0$ zu betrachten. Hier sieht man sofort, dass eine Lösung vorliegt.

b) $z^2 - 2iz + 8 = 0$ Zwei Lösungen: $z = 4i$ und $z = -2i$

Lösungsskizze

Einsetzen von $z = x + iy$ liefert $(x+iy)^2 - 2i(x+iy) + 8 = 0$.

Ausmultiplizieren: $x^2 + 2ixy - y^2 - 2ix + 2y + 8 = 0$

Vereinfachen: $x^2 - y^2 + 2y + 8 + (2xy - 2x)i = 0$

Eine komplexe Zahl ist 0, wenn Realteil und Imaginärteil 0 sind. Also müssen folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2y + 8 &= 0 \\ 2xy - 2x &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist wahr gdw. $x = 0$ oder $y = 1$.

Wenn $x = 0$, dann wird die erste Gleichung zu $-y^2 + 2y + 8 = -(y-4)(y+2) = 0$. Also gibt es dann die Lösungen $y = 4$ und $y = -2$.

Wenn $y = 1$, dann wird die erste Gleichung zu $x^2 + 9 = 0$. Für $x \in \mathbb{R}$ hat diese Gleichung keine Lösung.

Es gibt also genau zwei Lösungsmöglichkeiten, um die beiden Gleichungen zu erfüllen ($x = 0, y = 4$ und $x = 0, y = -2$).

Also hat die ursprüngliche Gleichung zwei Lösungen: $z = 4i$ und $z = -2i$.

Zur Probe können wir auch $(z-4i)(z+2i)$ ausrechnen. Wir erhalten: $z^2 + 2iz - 4iz + 8 = z^2 - 2iz + 8$.

c) $z^6 = 1$

Lösungsskizze

Sechs Lösungen:

$z = e^{2\pi/6} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z = e^{2\cdot 2\pi/6} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z = e^{3\cdot 2\pi/6} = -1$

$z = e^{4\cdot 2\pi/6} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = e^{5\cdot 2\pi/6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = e^{6\cdot 2\pi/6} = 1$

Hinweis: *Es kann hilfreich sein, für z den Ausdruck $x + iy$ einzusetzen und dann nach reellen Lösungen für x und y zu suchen.*

Aufgabe 4-6 (Komplexe Zahlen) Für welche komplexen Zahlen z gelten die folgenden Aussagen jeweils?

a) $|z + i| \leq |z - 1|$

Lösungsskizze

Schreibe z als $x + iy$. Dann wird $|z + i| \leq |z - 1|$ zu $|x + i(y + 1)| \leq |(x - 1) + iy|$. Das entspricht $x^2 + (y+1)^2 \leq (x-1)^2 + y^2$. Ausrechnen: $x^2 + y^2 + 2y + 1 \leq x^2 - 2x - 1 + y^2$. Vereinfachen: $y \leq -x - 1$.

Die Aussage wird also von allen Zahlen erfüllt, die in der Ebene unterhalb der Funktion $f(x) = -x - 1$ liegen.

b) $\frac{\overline{z}}{z} = 1$

Lösungsskizze

Für $z = 0$ ist die linke Seite der Gleichung nicht definiert, also kann dies keine Lösung sein. Für alle andreren z ist die Gleichung $\frac{\overline{z}}{z} = 1$ äquivalent zu $\overline{z} = z$. Schreibe z als $x + iy$. Die Gleichung wird also zu $x - iy = x + iy$. Das vereinfacht sich zu $0 = 2iy$. Also gilt die Gleichung genau dann, wenn der Imaginärteil y gleich 0 ist.

Die Gleichung gilt also genau für alle reellen Zahlen außer 0.

Zeichnen Sie die Menge der Punkte, für die die Aussagen jeweils gelten, in der komplexen Zahlenebene.

Abgabe: Sie können Ihre Lösung bis zum Freitag, den 08.12. um 10 Uhr über UniWorX abgeben. Es werden Dateien im `txt`-Format (reiner Text) oder im `pdf`-Format akzeptiert.