Prof. Martin Hofmann, PhD
Dr. Ulrich Schöpp
Sabine Bauer

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
8. Dezember 2017

Lösungsvorschlag zur 5. Übung zur Vorlesung

Grundlagen der Analysis

Aufgabe 5-1 (Differentiation; 4 Punkte) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(x+1) = xf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Zeigen Sie, dass dann auch $f'(x+1) = xf'(x) + f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösungsskizze

$$\begin{aligned}
f'(x+1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+1+h) - f(x+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)f(x+h) - xf(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x \cdot f(x+h) + h \cdot f(x+h) - xf(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x \cdot (f(x+h) - f(x))}{h} + \frac{h \cdot f(x+h)}{h} \\
&= x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x+h) \\
&= x \cdot f'(x) + f(x)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wird die Stetigkeit von f benutzt, aus der $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ folgt.

Aufgabe 5-2 (Differentiationsregeln; 4 Punkte) Bilden Sie jeweils die Ableitung unter Verwendung der in der Vorlesung behandelten Differentiationsregeln:

a) $f(x) = 4x^3 \ln x$

b) $f(x) = \frac{1+4x^2}{1+x^2}$

c) $f(x) = (2x-12)^6$

d) $f(x) = 3^{(x^2)}$

e) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Lösungsskizze

a) $f'(x) = (4x^3)' \ln x + 4x^3 (\ln x)' = 12x^2 \ln x + 4x^2 = 4x^2(3\ln x + 1)$

b) $f'(x) = \frac{(1+4x^2)' \cdot (1+x^2) - (1+4x^2) \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{8x \cdot (1+x^2) - (1+4x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{6x}{1+2x^2+x^4}$

c) $f'(x) = ((2x-12)^6)' = 6 \cdot (2x-12)^5 \cdot 2 = 12 \cdot (2x-12)^5 = 384 \cdot (x-6)^5$

d) $f'(x) = (3^{(x^2)})' = (e^{\ln 3 \cdot x^2})' = e^{\ln 3 \cdot x^2} \cdot 2 \cdot \ln 3 \cdot x = \ln 9 \cdot x \cdot 3^{(x^2)}$

e) $f'(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

f) $f'(x) = \frac{\sin(x)' \cdot x - x' \cdot \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2}$

Aufgabe 5-3 (Gliedweise Differentiation) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion der Form $f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} z^k$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = f''(0)$, $\ldots$, $a_n = f^{(n)}(0)$, wobei $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f bezeichnet.

Lösungsskizze

Man zeigt durch Induktion über m:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{k+m}}{k!} z^k$$

Insbesondere gilt dann $f^{(m)}(0) = a_m$, da alle Summanden außer dem ersten für $z = 0$ verschwinden.

Induktionsanfang ($m = 0$): Die zu zeigende Aussage entspricht genau der Angabe.

Induktionsschritt: Sei $m \leq 0$ beliebig. Wir dürfen

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{k+m}}{k!} z^k$$

annehmen und müssen zeigen, dass dann auch

$$f^{(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{a_{k+m+1}}{k!} z^k$$

gilt. Für $k = 0$ ist die Ableitung von $\frac{a_{k+m}}{k!} z^k$ gleich 0. Für $k > 0$ ist die Ableitung von $\frac{a_{k+m}}{k!} z^k$ gleich $\frac{k \cdot a_{k+m}}{k!} z^{k-1} = \frac{a_{k+m}}{(k-1)!} z^{k-1}$. Also gilt

$$f^{(m+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n-m} \frac{a_{k+m}}{(k-1)!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{a_{k+m+1}}{k!} z^k \ ,$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 5-4 (Extremwerte; 4 Punkte) Sei f die reellwertige Funktion $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

a) Was ist der Definitionsbereich von f?

Lösungsskizze

Die allgemeine Potenz wurde in der Vorlesung durch $x^y = e^{y \cdot \ln(x)}$ definiert. Da $\ln(x)$ nur für $x > 0$ definiert ist, ist der Definitionsbereich dementsprechend $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

b) Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima von f.

Lösungsskizze

Diese Funktion ist differenzierbar.

$$f'(x) = (e^{\ln(x)/x})' = (e^{\ln(x)/x})(\ln x/x)' = f(x)(1/x^2 + \ln x \cdot (-1)/x^2) = \frac{f(x)}{x^2}(1 - \ln x)$$

Nach dem Satz aus der Vorlesung können lokale Extrema nur an den Nullstellen der Ableitung von f vor. Die einzige Nullstelle von $f'(x)$ ist e.

Betrachte die zweite Ableitung f'' im Punkt e.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= f'(x)\frac{1 - \ln x}{x^2} + f(x) \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' \\
&= f'(x)\frac{1 - \ln x}{x^2} + f(x) \cdot \frac{(1 - \ln x)'x^2 - (1 - \ln x)(x^2)'}{x^4} \\
&= f'(x)\frac{1 - \ln x}{x^2} + f(x) \cdot \frac{-x - (1 - \ln x)2x}{x^4} \\
&= f'(x)\frac{1 - \ln x}{x^2} - f(x) \cdot \frac{1 + (1 - \ln x)2}{x^3}
\end{aligned}$$

Es gilt $f''(e) = -\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^3} < 0$. Somit hat f ein (strenges) lokales Maximum im Punkt e.

Abgabe: Sie können Ihre Lösung bis zum Freitag, den 20.12. um 10 Uhr über UniWorX abgeben. Es werden Dateien im `txt`-Format (reiner Text) oder im `pdf`-Format akzeptiert.