MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
F. Hänle, M. Oelker

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 17 (4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

$$\forall a, c \in K,\, b, d \in K \setminus \{0\}: \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

(b) Zeigen Sie, dass es *keinen* Körper K mit mindestens 3 Elementen gibt, in dem gilt:

$$\forall a, c \in K,\, b, d \in K \setminus \{0\}: \quad b + d \neq 0 \implies \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(Addition)} \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) && \text{(Multiplikation)} \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) $(1, 0)$ ist neutrales Element von $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$.

(b) $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ ist das bzgl. der Multiplikation inverse Element zu (x, y), sofern $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ gilt das Distributivgesetz:

$$(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)$$

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil von

(a) $\dfrac{2 - i}{4 - 3i}$ (b) $\dfrac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + i}}$ (c) $\left(\dfrac{2 + i}{1 + i} \right)^5$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8n-1} (1 + i)^k \quad (n \in \mathbb{N})$

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Sei i die imaginäre Einheit von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ mit der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{C}$ ein kommutativer nullteilerfreier Ring mit Einselement, aber *kein* Körper ist.

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}[i]^*, \cdot)$ des Rings $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ und zeigen Sie, dass sie isomorph zu $(\mathbb{Z}_4, +)$ ist.

Abgabe einzeln, zu zweit oder zu dritt: Dienstag, 5.12.2017 bis 10^{15} Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock