Prof. Martin Hofmann, PhD
Dr. Ulrich Schöpp
Sabine Bauer

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
15. November 2017

Lösungsvorschlag zur 3. Übung zur Vorlesung

Grundlagen der Analysis

Aufgabe 3-1 (Grenzwerte; 4 Punkte) Berechnen Sie die folgende Grenzwerte.

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-4x}{\sqrt{x}}$ $= 24$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x-14}{x^2-2x}$ $= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+7)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+7}{x} = \frac{9}{2}$

Hinweis: *Wenn ein Polynom p eine Nullstelle x_0 hat, dann kann man $(x-x_0)$ ausklammern, d.h. man kann p als $(x-x_0)\cdot q$ für ein Polynom q schreiben.*

c) $\lim_{x\to 5} \frac{x-\sqrt{4x+5}}{5-x}$

Lösungsskizze

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 5} \frac{x-\sqrt{4x+5}}{5-x} &= \lim_{x\to 5} \frac{x-\sqrt{4x+5}}{5-x} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{(x-\sqrt{4x+5})(x+\sqrt{4x+5})}{(5-x)(x+\sqrt{4x+5})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{x^2-4x-5}{(-1)(x-5)(x+\sqrt{4x+5})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+1)}{(-1)(x-5)(x+\sqrt{4x+5})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{x+1}{(-1)(x+\sqrt{4x+5})} \\
&= \frac{6}{-10} = -0.6
\end{aligned}
$$

Hinweis: *Die Gleichung $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$ kann hilfreich sein, um den Zähler zu vereinfachen.*

Aufgabe 3-2 (Logarithmengesetz) Beweisen Sie die Formel $\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}$ unter Zuhilfenahme der Rechenregeln für Logarithmen und Potenzen.

Lösungsskizze

Nach Definition von $\log_x y$ als Umkehrfunktion von x^y gilt

$$x^{\log_x y} = y.$$

Wir haben auch

$$x^{\frac{\ln y}{\ln x}} = e^{\ln(x) \cdot \frac{\ln y}{\ln x}} = e^{\ln y} = y.$$

nach den Rechenregeln für Logarithmen. Also gilt $x^{\log_x y} = x^{\frac{\ln y}{\ln x}}$. Durch Anwendung von $\log_x$ auf beiden Seiten folgt die gewünschte Gleichung.

Aufgabe 3-3 (Rechnen mit Logarithmen) Vereinfachen Sie mithilfe der in der Vorlesung behandelten Rechenregeln folgende Ausdrück soweit wie möglich:

a) $\ln x^2 - \ln x$ $= \ln x$

b) $\ln x^3 - 6 \ln x + \ln(6x^4 + 3x^3)$ $= \ln(6x + 3)$

c) $\log 1 - 2(\log 2 + \log 8)$ $= -\log 256$

d) $\frac{\log(\sqrt{a})^3}{0{,}5 \log a} \cdot \log a^{-1}$ $= -3 \cdot \log a$

Dabei ist $\log x := \log_{10} x$ und $\ln x := \log_e x$.

Aufgabe 3-4 (Exponentialfunktion; 4 Punkte) Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf:

a) $e^{-0.3x} = 27$ $x = -10 \ln 3$

b) $e^{2 \ln x} = 4$ $x = 2$

c) $e^{\sqrt{x}} = y^2$ $x = 4(\ln y)^2$

d) $e^x = e^{y^2} \cdot e^{2y+1}$ $x = (y + 1)^2$

Aufgabe 3-5 (Grenzwerte; 4 Punkte)

a) Angenommen $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty$. Zeigen Sie, dass eine Zahl $C > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert: Es gibt ein N, so dass $|f(n)| < C \cdot |g(n)|$ für alle $n > N$ gilt.

Lösungsskizze

Schreibe a für $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right|$. Wir haben $a \geq 0$ (siehe Aufgabe 2-1).

Die Grenzwertdefinition besagt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es N, so dass $\left|\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| - a\right| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Die Ungleichung ist äquivalent zu $a - \varepsilon < \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < a + \varepsilon$. Die rechte Ungleichung liefert $|f(n)| < (a + \varepsilon) \cdot |g(n)|$ durch Multiplikation mit $|g(n)|$. Insgesamt wissen wir also: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so dass $|f(n)| < (a + \varepsilon) \cdot |g(n)|$ für alle $n > N$.

Wir können für C also $a + \varepsilon$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ wählen.

b) Geben Sie für $f(n) = n^2$ und $g(n) = e^n$ ein konkretes $C > 0$ mit der Eigenschaft aus a) an. Begründen Sie.

Lösungsskizze

Es gilt $e^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{n^3}{3!}$. Nimmt man das Reziproke folgt daraus $\frac{1}{e^n} \leq \frac{3!}{n^3}$. Daraus folgt $\frac{n^2}{e^n} \leq \frac{n^2 \cdot 3!}{n^3} = \frac{3!}{n}$. Wenn wir also $C := 6$ wählen, dann gilt $\frac{3!}{n} < C$ für alle $n > 2$.

Wir haben also $n^2 \leq \frac{3!}{n} \cdot e^n \leq C \cdot e^n$ für alle $n > 2$ gezeigt, was der Eigenschaft aus a) entspricht.

Abgabe: Sie können Ihre Lösung bis zum Freitag, den 24.11. um 10 Uhr über UniWorX abgeben. Es werden Dateien im `txt`-Format (reiner Text) oder im `pdf`-Format akzeptiert.