Prof. Martin Hofmann, PhD
Dr. Steffen Jost

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
13. November 2017

4. Übung zur Vorlesung

Einführung in die Programmierung

A4-1 ***Schleifen*** Nach der Münzreform von Karl dem Großen galt folgendes:

1 karolingisches Silberfund = 20 Schilling   1 Schilling = 12 Pfennige

Entwerfe einen Geldautomaten, der einen Betrag in Pfennigen einliest und die kleinst-mögliche Anzahl an Münzen auswirft, wobei wir jede Münze mit einem Stern `*` ausgeben:

```
Bitte Zahl eingeben: 244
244 Pfennig in größter Stückelung:
Pfund:     *
Schilling:
Pfennig:   ****
```

```
Bitte Zahl eingeben: 2672
2672 Pfennig in größter Stückelung:
Pfund:     ***********
Schilling: **
Pfennig:   ********
```

Für den Betrag 244 werden 1 Pfund und 4 Pfennige ausgegeben; für 2672 erhalten wir 11 Pfund, 2 Schilling und 8 Pfennige. Die Darstellung durch eine Anzahl `*` ist uns hier wichtig!

Wem die Aufgabe zu langweilig erscheint, kann folgendes Ausgabeformat implementieren:

```
Bitte Zahl eingeben: 244
005:
004:     *
003:     *
002:     *
001: *   *
     P S P
     f c f
     u h e
     n i n
     d l n
```

```
Bitte Zahl eingeben: 555
007:
006:   *
005:   *
004:   *
003:   * *
002: * * *
001: * * *
     P S P
     f c f
     u h e
```

```
Bitte Zahl eingeben: 54
007:
006:     *
005:     *
004:   * *
003:   * *
002:   * *
001:   * *
     P S P
     f c f
     u h e
```

A4-2 ***Hoare-Tripel*** Entscheiden Sie, ob folgende Hoare-Tripel gültig sind:

a) $\{a + b > 0\}$ `n = a + b` $\{n > 0\}$

b) $\{i < j\}$ `i = i + 3` $\{i + 3 < j\}$

c) $\{n = a + b\}$ `c = a + 1; a = b - 1; b = c;` $\{n = a + b\}$

d) $\{z = x + y\}$ `if(z%2 == 0) x = x + 1; else y = y + 1;` $\{x + y > z\}$

Alle benutzten Variablen sind initalisiert (mit unbekanntem Wert) und haben den Typ `int`.

A4-3 ***Hoare-Logik: While-Schleife***
Hier ist noch einmal zur Erinnerung die Hoare-Regel für die While-Schleifen von Folie 4.15:

$$\frac{\{I \wedge b\}c\{I\} \qquad P \rightarrow I \qquad I \wedge \neg b \rightarrow Q}{\{P\}\texttt{while}(b)c\{Q\}}$$

Beweisen Sie durch Anwendung dieser Regel, dass für das Programmfragment

```
int x = 1;
while (x+y > n) {
  x = x + 2;
  y = y - x;
}
```

aus der Vorbedingung $\{z \geq 69\}$ die Nachbedingung $\{y < n \wedge z > 42\}$ hergeleitet werden kann!

Hinweise: Das Problem mit der Anwendung der Hoare-Regel für While-Schleifen ist, dass die Formel I nur in den Prämissen der Regel (also über dem Strich) auftaucht. Während P, Q und der Code durch die Aufgabenstellung schon vorgegeben sind, müssen wir I irgendwie passend wählen. Oft gibt es dazu auch mehrere Möglichkeiten – es reicht aber natürlich aus, lediglich *eine* richtige Möglichkeit zu finden.

Es ist daher oft zweckmäßig, die Regel Rückwärts zu rechnen. Die Nachbedingung muss aus der Negation der Schleifenbedingung und der Invariante herleitbar sein, d.h. wir müssen die Invariante stark genug wählen, damit die Nachbedingung zusammen mit der negierten Schleifenbedingung ausreicht. Danach schaut man, ob die Prämisse stark genug ist, die gewählte Invariante zu implizieren. Ist dies nicht der Fall, muss man die Invariante entsprechend abschwächen. Danach prüft man, ob diese schwächere Invariante trotzdem noch stark genug ist, mit der negierten Schleifenbedingung die Nachbedingung herzuleiten, usw.

Zur Erinnerung: Die logische Negation einer Formel A notiert man mit $\neg A$, die logische UND-Verknüpfung zweier aussagenlogischer Formeln mit $A \wedge B$, die logische ODER-Verknüpfung $A \vee B$ und die Implikation mit $A \rightarrow B$ (oder auch mit $(\neg A) \vee B$).

H4-1 ***Hoare-Tripel II*** (3 Punkte; Abgabe: `H4-1.txt` oder `H4-1.pdf`)
Fortsetzung von Aufgabe A4-2. Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Hoare-Tripel, falls möglich, oder geben Sie eine Gegenbeispiel an! Alle benutzten Variablen sind initalisiert (mit unbekanntem Wert) und haben den Typ `int`.

e) $\{a > 7 \wedge b \geq 0\}$ $\texttt{n} = \texttt{a} - \texttt{b}$ $\{n < a \wedge a + b \geq 0\}$

f) $\{x \geq y + 1 \ \wedge \ y \text{ ist gerade}\}$ $\texttt{z} = \texttt{x} + 2; \texttt{x} = \texttt{x} + \texttt{y} + \texttt{z};$ $\{x \text{ gerade}\}$

g) $\{x \geq y{+}1 \wedge y \text{ gerade}\}$ $\texttt{if}(0! = \texttt{y}\%2)\{\texttt{x} = \texttt{x} + \texttt{y};\}\texttt{else}\{\texttt{z} = \texttt{x} + 2; \texttt{x} = \texttt{x} + \texttt{y} + \texttt{z};\}$ $\{x \text{ gerade}\}$

Logik-Hinweis: Mit Hilfe der Konsequenz-Regel dürfen Sie jederzeit eine Zusicherung um wahre Aussagen erweitern, denn die Aussage A impliziert ja auch „$A \wedge$ Wahr“.

H4-2 ***Hoare-Logik: While-Schleife II*** (6 Punkte; Abgabe: `H4-2.txt` oder `H4-2.pdf`)

Sei P das folgende Programmstück, wobei `x` und `y` Variablen des Typs `int` mit unbekanntem positiven Wert sind.

```
int a = x;
int b = y;
while (b != 0) {
  int c = a;
  a = b;
  b = c % a;
}
```

Schleifendurchlauf	a	b	c
0	121	88	n/a
1			121

a) In dieser Teilaufgaben sei `x`=121 und `y`=88. Ergänzen Sie in der Tabelle rechts die Werte der Variablen `a`, `b` und `c`, und zwar jeweils *am Ende* eines Schleifendurchlaufs. Die erste Zeile darin enthält die Werte von `a`, `b` *vor* Eintritt in die Schleife. Da die Variable `c` nur innerhalb der Schleife existiert, können wir diese erst ab der zweiten Zeile angeben.

b) Es seien nun x und y beliebige natürliche Zahlen größer 0. Zeigen Sie nun die Gültigkeit des Hoare-Tripels

$$\{\mathtt{x} > \mathtt{y} \land \mathtt{y} > 0\}\ P\ \{\mathtt{a} = \mathrm{ggT}(x, y)\}$$

Geben Sie explizit die verwendete Invariante an, sowie jeweils den Namen der angewendeten Hoare-Regel.

Hinweise:

- `c % a`, gesprochen „c modulo a“, bezeichnet in Java den Rest der ganzzahligen Division von `c` geteilt durch `a`, z.B. gilt `14 % 3 == 2`, denn $14 = 4 \cdot 3 + 2$.
- Für natürliche Zahlen $\mathtt{a}, \mathtt{b}$ bezeichnet $\mathrm{ggT}(\mathtt{a}, \mathtt{b})$ den größten gemeinsamen Teiler von `a` und `b`. Zum Lösen der Aufgabe ist dies jedoch nicht weiter wichtig, denn Sie benötigen lediglich folgende Rechenregeln: Für $\mathtt{b} > 0$ gilt $\mathrm{ggT}(\mathtt{a}, \mathtt{b}) = \mathrm{ggT}(\mathtt{a\%b}, \mathtt{b})$, allgemein gilt $\mathrm{ggT}(\mathtt{a}, \mathtt{b}) = \mathrm{ggT}(\mathtt{b}, \mathtt{a})$ und $\mathrm{ggT}(\mathtt{a}, 0) = \mathtt{a}$.
- Die gesuchte Invariante enthält: $\big(\mathrm{ggT}(a, b) = ??\big) \land ??? \land ???$
  Für ??, ??? und ???? müssen Sie jeweils etwas Geeignetes einsetzen.

Abgabe: Lösungen zu den Hausaufgaben können bis Sonntag, den 19.11.17, mit UniWorX nur als `.zip` abgegeben werden. Aufgrund des Klausurbonus müssen die Hausaufgaben von Ihnen alleine gelöst werden. Abschreiben bei den Hausaufgaben gilt als Betrug und kann zum Ausschluss von der Klausur zur Vorlesung führen. Bitte beachten Sie auch die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der Vorlesungshomepage (`www.tcs.ifi.lmu.de/lehre/ws-2017-18/eip/`).