Prof. Martin Hofmann, PhD
Dr. Ulrich Schöpp
Sabine Bauer

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
25. Oktober 2017

Lösungsvorschlag zur 2. Übung zur Vorlesung

Grundlagen der Analysis

Hinweise zum Bonussystem: Ausgewählte Aufgaben sind mit einer Punktzahl gekennzeichnet. Durch Lösung solcher Aufgaben kann ein Bonus auf die Klausurnote erworben werden. Die erreichten Übungspunkte werden auf *bestandene* Klausuren als Bonuspunkte angerechnet. Die Anzahl der Bonuspunkte wird so bemessen sein, dass durch Bearbeitung der Übungen eine Verbesserung von etwa zwei Notenstufen erreicht werden kann.

Da die Übungspunkte in die Prüfungsleistung einfließen, müssen die Übungsaufgaben alleine bearbeitet werden. Gruppenarbeit ist nicht möglich. Plagiate werden geahndet.

Aufgabe 2-1 (Grenzwertdefinition; 4 Punkte) Angenommen, eine Folge (a_n) konvergiert gegen a und eine Folge (b_n) konvergiert gegen b. Es gelte weiterhin $a_n < b_n$ für alle n. Zeigen Sie, dass dann auch $a \leq b$ gilt.

Lösungsskizze

Wir nehmen $a > b$ an und leiten daraus einen Widerspruch her. Wähle $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Mit dieser Wahl gilt $\varepsilon > 0$ und $a - \varepsilon \geq b + \varepsilon$.

Nach Annahme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es N, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Nach Annahme $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gibt es N', so dass $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n > N'$ gilt.

Aus $|a_n - a| < \varepsilon$ folgt $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ und daraus $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Analog folgt $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ aus $|b_n - b| < \varepsilon$.

Damit haben wir $a_n > a - \varepsilon \geq b + \varepsilon > b_n$ für alle $n > \max(N, N')$. Das widerspricht aber der Annahme $a_n < b_n$, also muss unsere Annahme $a > b$ falsch gewesen sein.

Aufgabe 2-2 (Monotonie; 4 Punkte) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei monoton steigende Funktionen. Was kann man über die Monotonie der folgenden Funktionen $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aussagen?

a) $h_1(x) = f(x) + g(x)$

b) $h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$

Lösungsskizze

a) Die Addition zweier monoton steigender Funktionen ist immer selbst monoton steigend: Wegen der Monotonie von f und g folgt aus $x < y$ stets auch $f(x) \leq f(y)$ und $g(x) \leq g(y)$. Diese Ungleichungen addieren sich zu $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$.

b) Es ist keine Aussage über die Monotonie möglich. Betrachte zum Beispiel $f(x) = g(x) = x$. Diese Funktionen sind monoton steigend. Die Funktion $f(x) \cdot g(x) = x^2$ ist aber weder monoton steigend noch monoton falled. Damit $f(x) \cdot g(x)$ monoton steigend ist, muss $f(x) \cdot g(x) \leq f(y) \cdot g(y)$ aus $x < y$ folgen. Betrachte aber zum Beispiel $x = -2$ und $y = -1$. Es gilt $f(x) \cdot g(x) = (-2)^2 = 4$ und $f(y) \cdot g(y) = 1$, also gilt die zu zeigende Aussage nicht.

Damit $f(x) \cdot g(x)$ monoton falled ist, muss $f(x) \cdot g(x) \geq f(y) \cdot g(y)$ aus $x < y$ folgen. Das gilt aber ebenfalls nicht. Betrachte dafür zum Beispiel $x = 1$ und $y = 2$.

Aufgabe 2-3 (Umkehrfunktion) Geben Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{falls } x < -1, \\ 2x + 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

an.

Lösungsskizze

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{3}, & \text{falls } y < -2, \\ \frac{y-1}{2}, & \text{falls } y \geq -1. \end{cases}$$

Der Definitionsbereich von f^{-1} ist $\mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y < -1\}$.

Aufgabe 2-4 (Grenzwerte und Stetigkeit; 4 Punkte) Untersuchen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen an den jeweils angebenen Stellen.

a) $\lim_{x \to 7} \frac{3}{x-6}$ $= 3$

b) $\lim_{x \to 6} \frac{3}{x-6}$ (existiert nicht: $\lim_{x \to 6-} \frac{3}{x-6} = -\infty$ und $\lim_{x \to 6+} \frac{3}{x-6} = \infty$)

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{1+|7x|}$ $= -\frac{4}{7}$

d) $\lim_{x \to -1} h(x)$ mit $h(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{falls } x < -1, \\ 3x + 1, & \text{sonst.} \end{cases}$

Welche der hier untersuchten Funktionen $f(x) = \frac{3}{x-6}$ und $g(x) = \frac{4x}{1+|7x|}$ und $h(x)$ sind stetig?

Lösungsskizze

Die Grenzwerte sind oben bereits angegeben. Für d) bemerken wir, dass $h(-1) = -2$ gilt aber $\lim_{x\to -1^-} h(x) = -1$, d.h. hier existiert der Grenzwert nicht.

Die Funktionen aus a), b) und c) sind stetig.

Wir betrachten c), der Fall für a) und b) geht analog. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $f(x) = |x|$, $g(x) = x$, $h_1(x) = 4$ und $h_2(x) = 7$ alle stetige Funktionen sind. Weiterhin wissen wir aus der Vorlesung, dass Summe, Produkt und Quotient zweier stetiger Funktion wieder eine stetige Funktion ergibt (mit der Ausnahme beim Quotient, bei dem der Nenner natürlich nicht 0 werden darf). Damit ist $f(x) = \frac{4x}{1+|7x|}$ also stetig, denn für den Nenner gilt $1+|7x| \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Funktion aus d) ist nicht stetig.

Abgabe: Sie können Ihre Lösung bis zum Mittwoch, den 15.11. um 10 Uhr über UniWorX abgeben. Es werden Dateien im `txt`-Format (reiner Text) oder im `pdf`-Format akzeptiert.