MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
F. Hänle, M. Oelker

WS 17/18

9. Tutorium zur Linearen Algebra für Informatiker und Statistiker

T33) Seien K ein Körper, V und W K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear, $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig in V. Zeigen Sie:

(a) $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ Erzeugendensystem von $W \implies f$ surjektiv

(b) f injektiv $\implies f(b_1), \ldots, f(b_n)$ linear unabhängig in W

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m \times n}$. Folgern Sie aus (a) und (b):

(c) $\operatorname{rang} A = m \implies (\forall\, b \in K^m\, \exists\, x \in K^n :\ Ax = b)$

(d) $\forall\, x \in K^n : (Ax = 0 \Rightarrow x = 0) \implies \operatorname{rang} A = n$

T34) Gegeben sei der Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{span}((-1,2,3,2),(1,-1,1,-3),(1,1,2,-7)) \ .$$

(a) Liegt $(-1,3,0,-1)$ in U?

(b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass es ein $b \in \mathbb{R}^4$ mit $b \notin U$ gibt.

T35) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{P}_n := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ (reelle Polynome vom Grad $\leq n$). Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{P}_n$ ist ein Untervektorraum des reellen Vektorraums $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Für $n \geq 1$ ist die Abbildung $\psi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$, $\psi(p) = p'$ linear und surjektiv.

T36) Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $M \in K^{m \times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $n > m$ und $M \in K^{m \times n}$, dann besitzt das homogene Gleichungssystem $Mx = 0$ eine nichttriviale Lösung.

(b) $\operatorname{rang} M = 1 \iff \exists\, a \in K^m \backslash \{0\}, b \in K^n \backslash \{0\} :\ M = ab^\top$