



信号分析与处理

# 第四章 信号处理基础

范姗慧

杭州电子科技大学自动化学院

二教南316

# 第二节 信号的线性系统处理

## ➤ 时域法分析

- ✓ 线性时不变因果系统的时域响应
- ✓ 线性时不变系统的单位冲激响应
- ✓ 线性时不变系统的时域分析

## ➤ 频域法分析

- ✓ 频域响应和频率响应特性
- ✓ 无失真传输系统
- ✓ 理想低通滤波器

## ➤ 复频域分析

- ✓ 复频域分析的研究意义
- ✓ 微分/差分方程的复频域求解
- ✓ 传递函数

表 1-4 常用信号的拉普拉斯变换

信号 $x(t)$	拉普拉斯变换 $X_b(s)$	收敛域
$\delta(t)$	1	整个 $s$ 平面
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sigma > 0$
$e^{-at}$	$\frac{-2a}{s^2 - a^2}$	$-a < \sigma < a$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma > -a$
$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\sigma > -a$
$\delta(t-T)$	$e^{-sT}$	整个 $s$ 平面
$\sin \omega_0 t \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$\cos \omega_0 t \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$e^{-at} \cos \omega_0 t \cdot u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$e^{-at} \sin \omega_0 t \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$

表 2-10 常用序列的 Z 变换

$x(n)$	$X(z)$	收敛域
$\delta(n)$	1	$0 \leq  z  \leq \infty$
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$1 <  z  \leq \infty$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ a  <  z  \leq \infty$
$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!} a^n u(n)$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$ a  <  z  \leq \infty$
$na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ a  <  z  \leq \infty$
$\sin(n\Omega_0) u(n)$	$\frac{z \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$1 <  z  \leq \infty$
$\cos(n\Omega_0) u(n)$	$\frac{z(z - \cos \Omega_0)}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$1 <  z  \leq \infty$
$a^n \sin(n\Omega_0) u(n)$	$\frac{az \sin \Omega_0}{z^2 - 2az \cos \Omega_0 + a^2}$	$ a  <  z  \leq \infty$
$a^n \cos(n\Omega_0) u(n)$	$\frac{z(z - a \cos \Omega_0)}{z^2 - 2az \cos \Omega_0 + a^2}$	$ a  <  z  \leq \infty$

表 1-3 拉普拉斯变换的基本性质

性质	时域 $x(t)$	复频域 $X_b(s)$	收敛域
定义	$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X_b(s) e^{st} ds$	$X_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$	$R$
线性	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_{b1}(s) + a_2 X_{b2}(s)$	$R_1 \cap R_2$ , 有可能扩大
尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X_b\left(\frac{s}{a}\right)$	$aR$
时移	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X_b(s)$	$R$
频移	$x(t) e^{j\omega_0 t}$	$X_b(s - s_0)$	$R + \sigma_0$ (表示 $R$ 有一个 $\sigma_0$ 的平移)
时域微分 ★	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX_b(s) - x(0)$	$R$ , 有可能扩大
时域积分	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$s^{-1} X_b(s)$	$R \cap \sigma > 0$ , 有可能为 $R$
复频域微分	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X_b(s)$	$R$
复频域积分	$t^{-1} x(t)$	$\int_s^{\infty} X_b(\tau) d\tau$	$R$
时域卷积	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_{b1}(s) X_{b2}(s)$	$R_1 \cap R_2$ , 有可能扩大

注：收敛域有可能扩大的情况发生在复频域运算时有零、极点相消现象发生。

表 2-9 Z 变换的主要性质

性质	时域	Z 变换域	收敛域
	$x(n)$	$X(z)$	$\text{ROC} = R_x: R_{x-} <  z  < R_{x+}$
	$y(n)$	$Y(z)$	$\text{ROC} = R_y: R_{y-} <  z  < R_{y+}$
线性	$ax(n) + by(n)$	$aX(z) + bY(z)$	$\max\{R_{x-}, R_{y-}\} <  z  < \min\{R_{x+}, R_{y+}\}$
时移	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$
z 域尺度变换	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$ a  R_{x-} <  z  <  a  R_{x+}$
z 域微分	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$
时间翻转	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$R_{x-}^{-1} <  z  < R_{x+}^{-1}$
卷积	$x(n) * y(n)$	$X(z)Y(z)$	$\max\{R_{x-}, R_{y-}\} <  z  < \min\{R_{x+}, R_{y+}\}$
乘积	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(\nu)Y(z\nu^{-1})\nu^{-1}d\nu$	$R_{x-}R_{y-} <  z  < R_{x+}R_{y+}$
共轭	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x-} <  z  < R_{x+}$
累加	$\sum_{k=-\infty}^n x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	至少包含 $R_x \cap  z  > 1$
初值定理	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$		$x(n)$ 为因果序列, $ z  > R_{x-}$
终值定理	$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$		$x(n)$ 为因果序列, 且当 $ z  \geq 1$ 时, $(z-1)X(z)$ 收敛

单边z变换时移性质

$$\mathcal{Z}[x(n-m)u(n)] = z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$$





**例 3-14** 求差分方程为下式的离散时间系统对输入信号  $x(n] = (-3)^n u(n)$  的零状态响应、零输入响应和完全响应，系统的初始状态为  $y(-1) = 0$ ,  $y(-2) = 2$ 。

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = 4x(n)$$

平移性质

$$y(n-k]u(n) \leftrightarrow z^{-k} \left[ Y(z) + \sum_{m=-k}^{-1} y(m)z^{-m} \right]$$

**解** 对系统方程取单边  $Z$  变换，有

$$Y(z) - 4[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 4[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = 4X(z)$$

整理得

$$(1 - 4z^{-1} + 4z^{-2})Y(z) - (4 - 4z^{-1})y(-1) + 4y(-2) = 4X(z)$$

即有

$$Y(z) = \frac{4}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}}X(z) + \frac{(4 - 4z^{-1})y(-1) - 4y(-2)}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} \quad (3-45)$$

式(3-45)右边第一项为系统零状态响应的  $Z$  变换  $Y_{zs}(z)$ ，且有

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{Z}[(-3)^n u(n)] = \frac{z}{z+3}$$

$$\begin{aligned} Y_{zs}(z) &= \frac{4}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}}X(z) = \frac{4}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} \cdot \frac{z}{z+3} = \frac{4}{(1 - 2z^{-1})^2(1 + 3z^{-1})} \\ &= \frac{1.44}{1 + 3z^{-1}} + \frac{0.96}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1.6}{(1 - 2z^{-1})^2} \end{aligned}$$

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (|a| < |z| < +\infty)$$

**例 3-14** 求差分方程为下式的离散时间系统对输入信号  $x(n] = (-3)^n u(n)$  的零状态响应、零输入响应和完全响应，系统的初始状态为  $y(-1) = 0$ ， $y(-2) = 2$ 。

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = 4x(n)$$

$$\begin{aligned} Y_{zs}(z) &= \frac{4}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} X(z) = \frac{4}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} \cdot \frac{z}{z + 3} = \frac{4}{(1 - 2z^{-1})^2 (1 + 3z^{-1})} \\ &= \frac{1.44}{1 + 3z^{-1}} + \frac{0.96}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1.6}{(1 - 2z^{-1})^2} \end{aligned}$$

对  $Y_{zs}(z)$  进行  $Z$  反变换，得系统的零状态响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= 1.44(-3)^n u(n) + 0.96 \cdot 2^n u(n) + 1.6(n+1) \cdot 2^n u(n) \\ &= [1.44(-3)^n + 2.56 \cdot 2^n + 1.6n \cdot 2^n] u(n) \end{aligned}$$

式(3-45)右边第二项为系统零输入响应的  $Z$  变换  $Y_{zi}(z)$ ，代入系统的初始状态得

$$Y_{zi}(z) = \frac{(4 - 4z^{-1})y(-1) - 4y(-2)}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} = \frac{-8}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} = \frac{-8}{(1 - 2z^{-1})^2}$$

对  $Y_{zi}(z)$  进行  $Z$  反变换，得系统的零输入响应为

$$y_{zi}(n) = -8(n+1) \cdot 2^n u(n) = [-8n \cdot 2^n - 8 \cdot 2^n] u(n)$$

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (|a| < |z| < +\infty)$$

$$(n+1)a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \left( \frac{1}{1 - az^{-1}} \right)^2 \quad (|a| < |z| < +\infty)$$



**例 3-14** 求差分方程为下式的离散时间系统对输入信号  $x(n] = (-3)^n u(n)$  的零状态响应、零输入响应和完全响应，系统的初始状态为  $y(-1) = 0$ ， $y(-2) = 2$ 。

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = 4x(n)$$

对  $Y_{zs}(z)$  进行  $Z$  反变换，得系统的零状态响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= 1.44(-3)^n u(n) + 0.96 \cdot 2^n u(n) + 1.6(n+1) \cdot 2^n u(n) \\ &= [1.44(-3)^n + 2.56 \cdot 2^n + 1.6n \cdot 2^n] u(n) \end{aligned}$$

对  $Y_{zi}(z)$  进行  $Z$  反变换，得系统的零输入响应为

$$y_{zi}(n) = -8(n+1) \cdot 2^n u(n) = [-8n \cdot 2^n - 8 \cdot 2^n] u(n)$$

系统的完全响应为

$$\begin{aligned} y(n) &= y_{zs}(n) + y_{zi}(n) \\ &= [1.44(-3)^n + 2.56 \cdot 2^n + 1.6n \cdot 2^n] u(n) + [-8 \cdot 2^n - 8n \cdot 2^n] u(n) \\ &= [1.44(-3)^n - 5.44 \cdot 2^n - 6.4n \cdot 2^n] u(n) \end{aligned}$$

$$\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+m)}{m!} a^n u(n) \stackrel{Z}{\leftrightarrow} \left( \frac{1}{1-az^{-1}} \right)^{m+1} \quad (|a| < |z| < +\infty)$$

# 三、复频域分析

## 2. 复频域/z域分析的研究意义

复频域分析法作为一种分析方法，比频域法更方便、更有效：

✓ 更方便地求取系统对输入信号的响应（求解微分/差分方程）

(1) 经拉氏/Z变换将域微分方程变换为复频域代数方程

(2) 求解复频域代数方程，求出 $Y_{zi}(s)$ ,  $Y_{zs}(s)$  /  $Y_{zi}(z)$ ,  $Y_{zs}(z)$

(3) 拉氏/Z反变换，求出响应的时域表示式

✓ 更有效地研究既定系统的特性

✓ 方便地实现系统的综合和设计

但是，信号在频域中有非常明确的物理意义，在复频域中其物理意义不清晰

# 系统传递函数 $H(s)/H(z)$ 与系统特性

---

## ➤ 系统函数 $H(s)/H(z)$

- ✓ 系统函数的定义
- ✓  $H(s)/H(z)$ 与 $h(t)/h(n)$ 的关系
- ✓ 复频域求零状态响应
- ✓ 求 $H(s)/H(z)$ 的方法

# 连续时间系统的系统函数 $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t)$

## 3. 传递函数

如果仅考虑**零状态响应**，即系统在零初始条件下对输入激励的响应，则

定义在零初始条件下，系统输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比为系统的**传递函数**，记为 **$H(s)$** ，即

复频域

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} X(s) = H(s) X(s)$$

时域

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = L^{-1}(h(t)) X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

$s$  的有理分式，它只与描述系统的微分方程的结构及系数  $a_i$ 、 $b_j$  有关

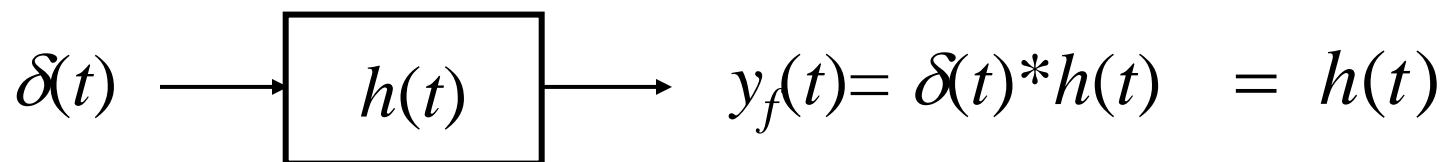
**$H(s)$ : 系统函数**

# 连续时间系统的系统传递函数 $H(s)$

(1)定义：系统在零初始条件下，输出的拉氏变换式与输入的拉氏变换式之比，记为 $H(s)$ ，即为系统函数。

$$H(s) = \frac{L[y_f(t)]}{L[f(t)]} = \frac{Y_f(s)}{F(s)}$$

(2)  $H(s)$ 与 $h(t)$ 的关系：



$$H(s) = \frac{L[y_f(t)]}{L[f(t)]} = \frac{L[h(t)]}{1} = L[h(t)]$$

$$H(s) = L[h(t)]$$

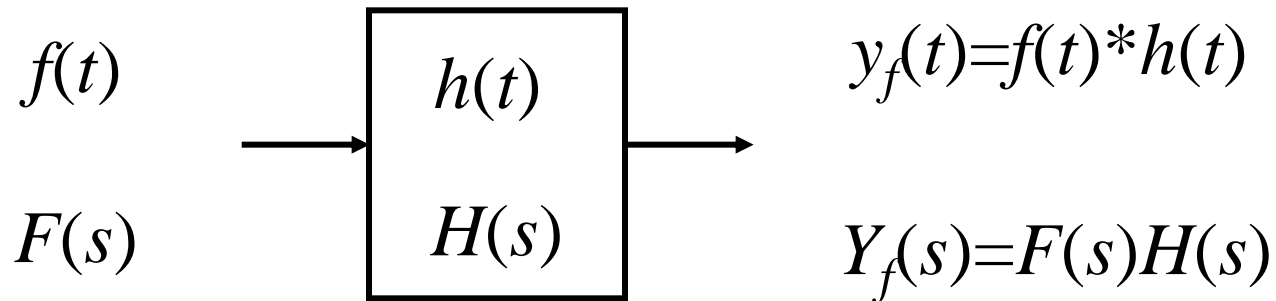
$$h(t) = L^{-1}[H(s)]$$



# 连续时间系统传递函数 $H(s)$

---

(3)求零状态响应:



(4)求 $H(s)$ 的方法:

①由系统的冲激响应求解:  $H(s) = L[h(t)]$

②由定义式  $H(s) = \frac{L[y_f(t)]}{L[f(t)]}$

③由系统的微分方程写出 $H(s)$

**例** 求下述线性时不变系统的单位冲激响应

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 3x(t)$$

---

**解：** 设系统的初始条件为零，对微分方程取拉普拉斯变换，得

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 3X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+1}$$

利用频移性质

$$L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}\right] = e^{-t} \cos tu(t) \quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right] = e^{-t} \sin tu(t)$$

系统的单位冲激响应

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = e^{-t} [\cos t + 2 \sin t] u(t)$$

例 已知线性时不变系统对  $x(t) = e^{-t}u(t)$  的零状态响应为

$$y(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

试求该系统的单位冲激响应并写出描述该系统的微分方程。

解:

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{4}{s+2} + \frac{1}{s+3} = \frac{2s+8}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot (s+1) = \frac{4}{s+2} - \frac{2}{s+3}$$

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = (4e^{-2t} - 2e^{-3t})u(t)$$

**例** 已知线性时不变系统对  $x(t) = e^{-t}u(t)$  的零状态响应为

$$y(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

---

试求该系统的单位冲激响应并写出描述该系统的微分方程。

**解:**

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)} = \frac{2s+8}{s^2+5s+6}$$

求反变换，并注意到系统的初始条件为零，得

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = 2sX(s) + 8X(s)$$

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2x'(t) + 8x(t)$$

# 连续LTI系统的复频域分析

- 由于系统的传递函数较易获得，通过对 $H(s)$ 进行拉式反变换求系统的单位冲激响应 $h(t)$
- 也可以由  $H(\omega) = H(s) |_{s=j\omega}$  求系统的频率特性函数  
前提条件：系统是稳定的  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$
- 系统传递函数的零、极点的分布与系统的稳定性、瞬态响应都有明确的对应关系，在反馈控制系统的分析和综合中更是重要的工具。



## 二、 $H(s)$ 零极点与时域特性

### • 零极点分布图

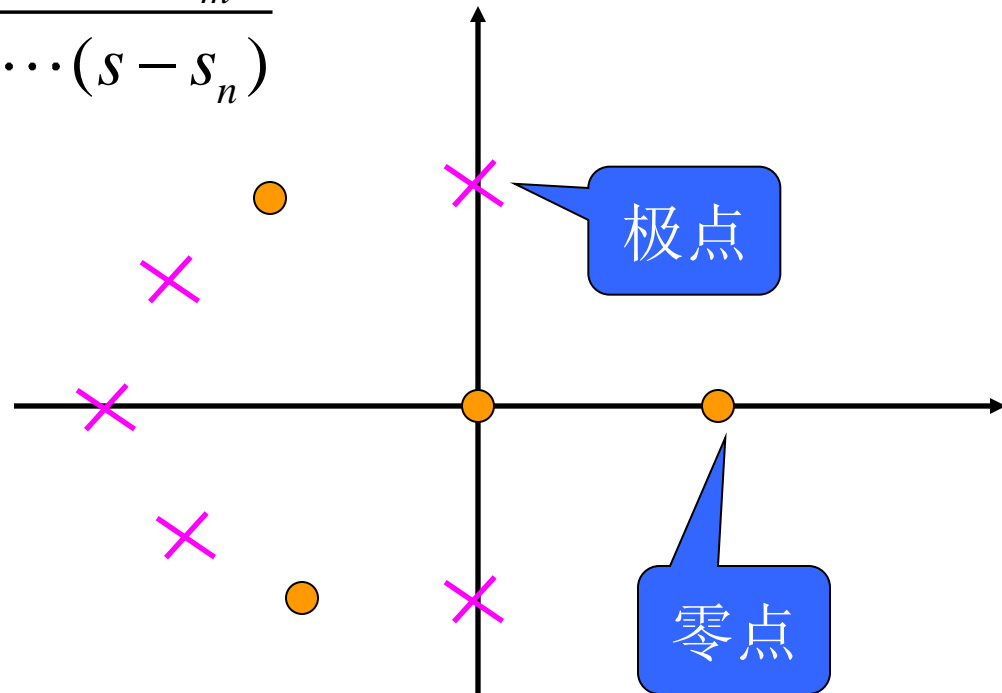
$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$
$$= H_0 \frac{(s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_m)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$

$H_0$ 是系统增益

$s = r_i$ :  $H(s) = 0$ , 称为零点

$s = s_i$ :  $H(s) = \infty$ , 称为极点

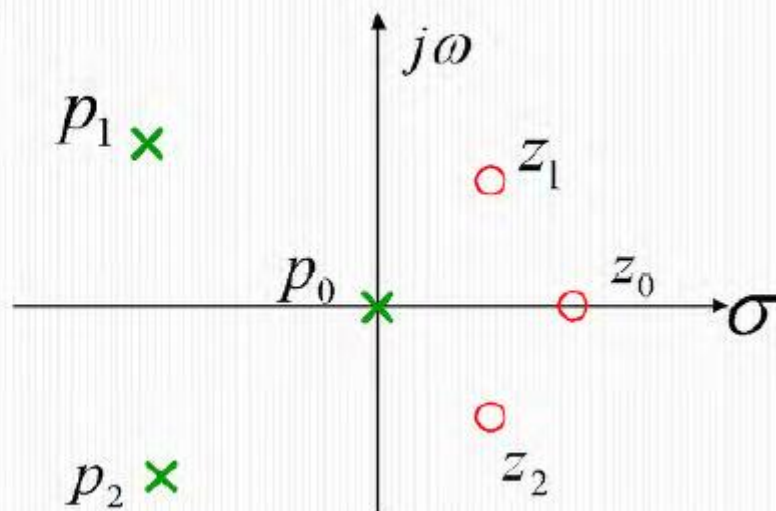
即系统的特征根（固有频率、自然频率）



## • 零极点分布图

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$H(s) = \frac{H_0 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

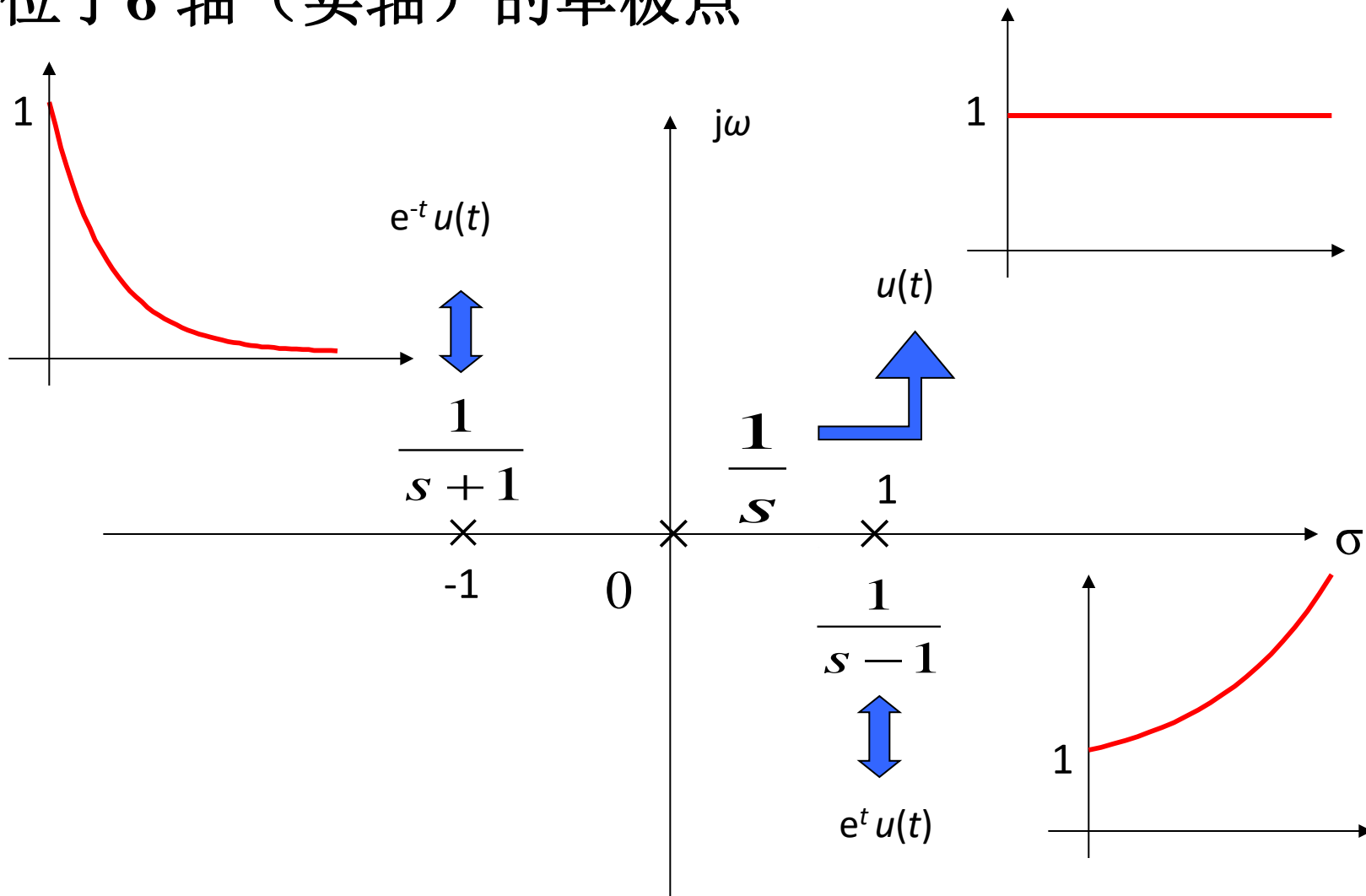


**特点：** 极点/零点分布一定关于实轴对称。

# • $H(s)$ 的零极点与 $h(t)$ 的关系

即由系统函数的零极点分布  
决定系统时域特性

## 1) 位于 $\sigma$ 轴（实轴）的单极点



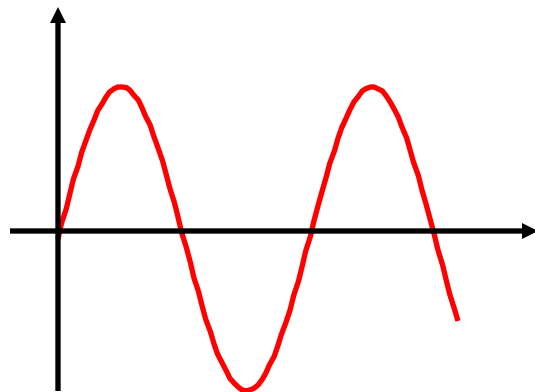
## 2) 共轭复极点

一阶极点

$$\frac{1}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

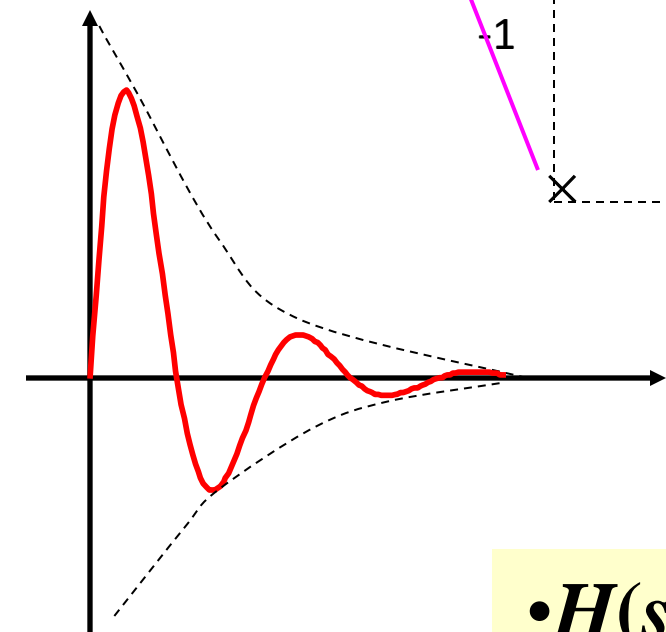
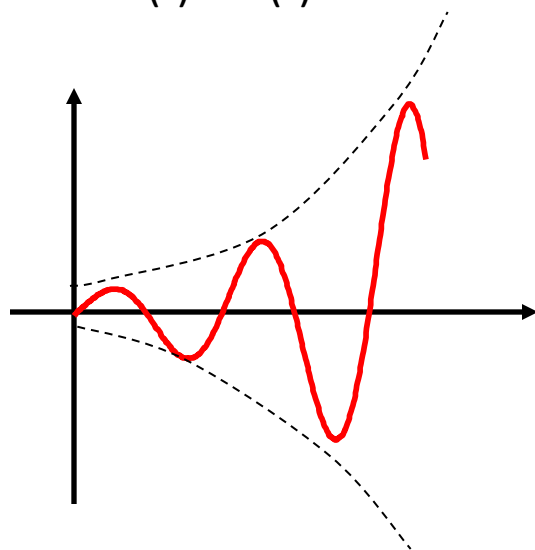
$$\sin(t) e^{-t} u(t)$$

$$\sin(t) u(t)$$
$$\frac{1}{(s+j)(s-j)}$$



$$\frac{1}{(s-1-j)(s-1+j)}$$

$$\sin(t) e^t u(t)$$



•  $H(s)$  与  $h(t)$  的关系

## • $H(s)$ 与 $h(t)$ 的关系

$$H(s) = H_0 \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdots (s - z_m) \cdot (s - \lambda_0)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdots (s - p_n) \cdot (s - \lambda_0)}$$

进行特性分析时，  
不可消去



# $H(s)$ 的零极点与系统频响特性 $H(\omega)$

---

**频响特性**是指系统在输入信号激励之下稳态响应随信号频率的变化情况。

由系统函数的**零极点分布**分析系统的频率特性：

**前提：稳定的因果系统** ★

$H(s)$ 的全部极点落在 **$s$ 左半平面**，**收敛域包括虚轴**。

则 **$\sigma=0$** 时，**拉普拉斯变换**可转为**傅里叶变换**

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

### 三、零极点与系统频响特性

**频响特性**是指系统在输入信号激励之下稳态响应随信号频率的变化情况。

**系统稳定**时，令 $H(s)$ 中  $s = j\omega$ ，则得系统频响特性

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性

相频特性

# $H(s)$ 与系统的因果性

---

连续时间LTI系统为因果系统的充分必要条件是

$$h(t)=0, t<0$$

即单位冲激响应是因果信号

因为单位冲激响应是右边信号，所以其拉式变换ROC应该是收敛轴在左边的某个右半平面

$h(t)$ 的拉式变换即为系统函数 $H(s)$ ，所以因果系统的ROC应该是收敛轴在左边的某个右半平面，反之未必成立

如果系统函数是有理的，系统的因果性等价于系统函数的ROC位于最右边极点的右半平面

# $H(s)$ 与系统的稳定性

---

连续时间LTI系统BIBO（有界输入有界输出）稳定的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = S < \infty$$

满足绝对可积条件

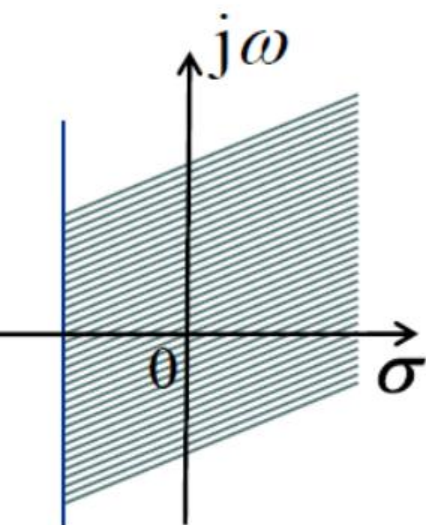
※ 连续LTI系统：

系统BIBO稳定的充要条件是系统函数 $H(s)$ 的收敛域(ROC)包含 $s$ 平面 $j\omega$ 轴。

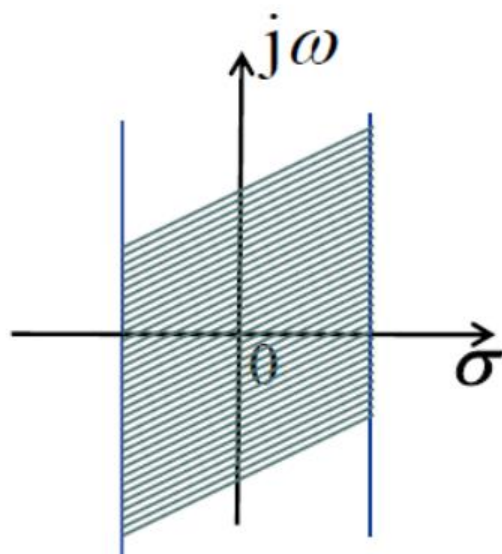
# 系统函数与系统的稳定性

连续时间LTI系统稳定的充要条件：

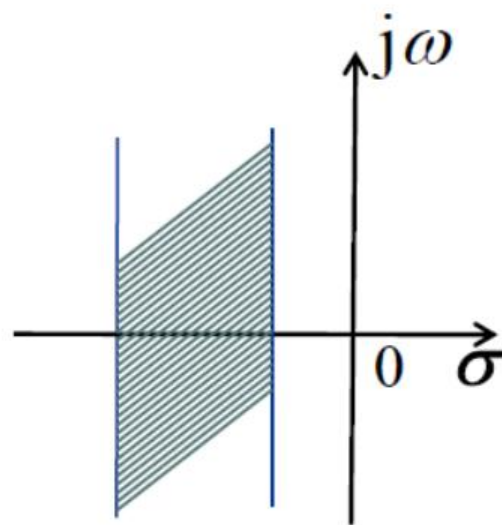
系统函数 $H(s)$ 的收敛域(ROC)包含 $s$ 平面 $j\omega$ 轴。



稳定系统



稳定系统



不稳定系统



# $H(s)$ 与系统的稳定性

连续时间LTI系统BIBO（有界输入有界输出）稳定的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = S < \infty$$

满足绝对可积条件

※ 连续LTI系统：

系统BIBO稳定的充要条件是系统函数 $H(s)$ 的收敛域(ROC)包含 $s$ 平面 $j\omega$ 轴。

※ 因果连续LTI系统：

系统BIBO稳定的充要条件是系统函数 $H(s)$ 的全部极点位于左半 $s$ 平面。

[例] 判断下述因果连续LTI系统是否稳定。

$$H_1(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$H_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

解：

(1) 极点为 $s = -1$ 和 $s = -2$ ，都在 $s$ 左半平面

若激励为有界输入 $u(t)$ ，则其输出为

$$Y_1(s) = F(s)_1 H(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}$$

$$y_1(t) = L^{-1}[Y_1(s)] = \left(\frac{1}{2} - 2e^t + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

显然输出也有界，所以系统稳定。

(2) 极点为 $\pm j\omega_0$ ，是虚轴上的一对共轭极点。

若激励为有界输入 $\sin(\omega_0 t)u(t)$ ，则其输出为

$$Y_2(s) = F(s)H_2(s) = \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)} \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

$$y_2(t) = L^{-1}[Y_2(s)] = \frac{1}{2} t \sin(\omega_0 t) u(t)$$

显然，输出不是有界信号，所以系统不稳定。





**综合题：**已知某连续时间LTI系统的零状态响应  $y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$ ，激励信号  $x(t) = u(t)$ ，试求该系统的系统函数  $H(s)$  并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应  $h(t)$ ，并判断系统是否因果、稳定。

解：零状态响应和激励信号的拉氏变换分别为

$$Y_{zs}(s) = \frac{0.5}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1.5}{s+2} = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}(s) > 0$$
$$X(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

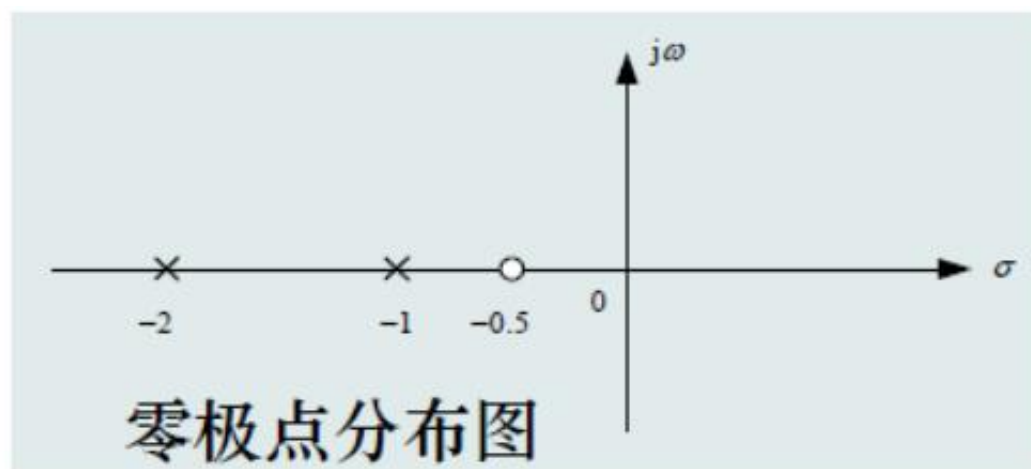
根据系统函数的定义，可得

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}, \quad \text{Re}(s) > -1 \quad \textcircled{1}$$

**综合题：**已知某连续时间LTI系统的零状态响应  $y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$ ，激励信号  $x(t) = u(t)$ ，试求该系统的系统函数  $H(s)$  并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应  $h(t)$ ，并判断系统是否因果、稳定。

解： 
$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}, \quad \textcircled{1}$$

系统函数的零点  $z = -0.5$ ；极点为  $p_1 = -1, p_2 = -2$ ，





**综合题：**已知某连续时间LTI系统的零状态响应  $y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$ ，激励信号  $x(t) = u(t)$ ，试求该系统的系统函数  $H(s)$  并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应  $h(t)$ ，并判断系统是否因果、稳定。

解：  $H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}, \quad \textcircled{1}$

由①式可得系统微分方程的复频域表达式

$$(s^2 + 3s + 2)Y_{zs}(s) = (2s + 1)X(s)$$

两边进行拉氏反变换，可得描述系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + x(t)$$

**综合题：**已知某连续时间LTI系统的零状态响应  $y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$ ，激励信号  $x(t) = u(t)$ ，试求该系统的系统函数  $H(s)$  并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应  $h(t)$ 、并判断系统是否因果、稳定。

**解：**将系统函数  $H(s)$  进行部分分式展开，可得

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \quad \text{Re}(s) > -1$$

进行拉氏反变换，可得系统冲激响应为

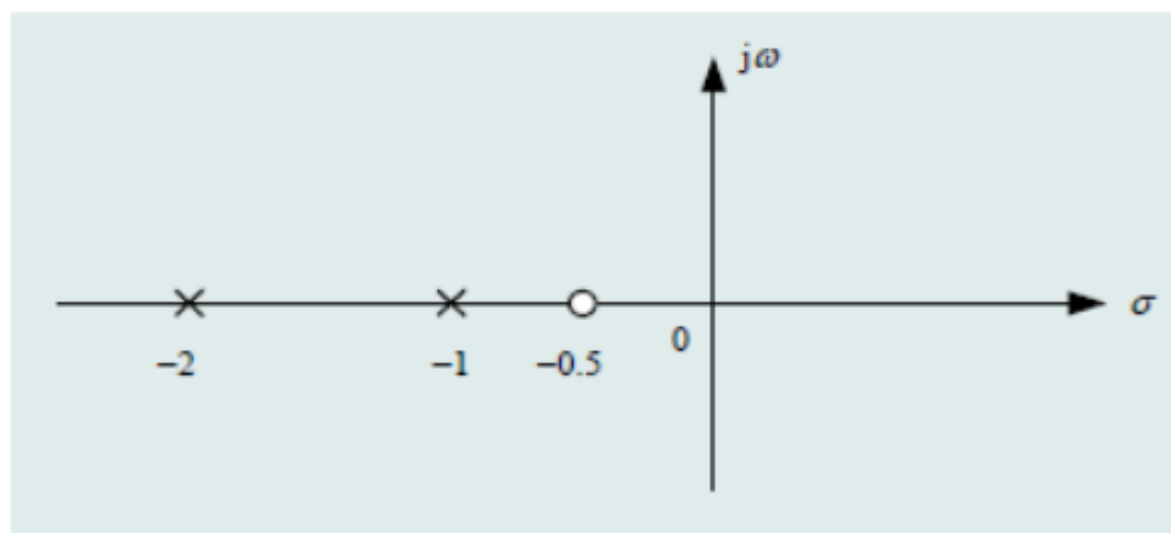
$$h(t) = (-e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

由于该连续LTI系统的冲激响应满足  $h(t) = 0, t < 0$

**故该连续LTI系统为因果系统**

**综合题：**已知某连续时间LTI系统的零状态响应  $y_{zs}(t) = (0.5 + e^{-t} - 1.5e^{-2t})u(t)$ ，激励信号  $x(t) = u(t)$ ，试求该系统的系统函数  $H(s)$  并画出零极点分布图，写出描述系统的微分方程、系统的冲激响应  $h(t)$ ，并判断系统是否因果、稳定。

解：



对于因果LTI系统，由零极点分布图可以看出，系统的极点全部位于s左半平面，故系统稳定。



4.5 已知某 LTI 因果系统, 当:

(1)  $f(t) = e^{-t}U(t)$  时全响应为  $y(t) = (e^{-t} + te^{-t})U(t)$ ;

(2)  $f(t) = e^{-2t}U(t)$  时全响应为  $y(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})U(t)$ ;

求系统的零输入响应及当  $f(t) = U(t)$  时系统的全响应。

∵ 系统一样, ∴ 零输入响应是一样的

$$f_1(t) = e^{-t} \cdot u(t) \rightarrow y_1(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = (e^{-t} + te^{-t})u(t)$$

$$f_2(t) = e^{-2t}u(t) \rightarrow y_2(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$g(t) = f_2(t) - f_1(t) = (e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

$$z(t) = y_2(t) - y_1(t) = y_{zs}(t) - y_{zs}(t) = f_2(t) * h(t) - f_1(t) * h(t) = [f_2(t) - f_1(t)] * h(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} = \frac{-1}{(s+1)(s+2)}$$

$$Z(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{-1}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{Z(s)}{G(s)} = \frac{1}{s+1}$$

4.5 已知某 LTI 因果系统, 当:

(1)  $f(t) = e^{-t}U(t)$  时全响应为  $y(t) = (e^{-t} + te^{-t})U(t)$ ;

(2)  $f(t) = e^{-2t}U(t)$  时全响应为  $y(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})U(t)$ ;

求系统的零输入响应及当  $f(t) = U(t)$  时系统的全响应。

$$\text{当 } f(t) = e^{-2t} \cdot u(t), \quad y(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s+2} \quad Y_{zs}(s) = F(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$
$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$y_{zs}(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$\therefore y_{zi}(t) = y(t) - y_{zs}(t) = e^{-t}u(t)$$

$$f(t) = u(t) \xleftrightarrow{\quad} F(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_{zs}(s) = F(s)H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$y_{zs}(t) = u(t) - e^{-t}u(t)$$

$$\text{全响应 } y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = u(t) - e^{-t}u(t) + e^{-t}u(t)$$
$$= u(t)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

# 离散时间系统的系统函数 $H(z)$

## 3. 脉冲传递函数

如果仅考虑**零状态响应**，即系统在零初始条件下对输入激励的响应，则

定义在零初始条件下，系统输出的 $z$ 变换与输入的 $z$ 变换之比为离散系统的**传递函数**，记为 $H(z)$ ，即

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$z$ 域

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) = H(z) X(z)$$

时域

$$y(n) = x(n) * h(n) \Rightarrow Y(z) = Z^{-1}(h(n)) X(z)$$

$H(z)$ : 离散系统系统函数

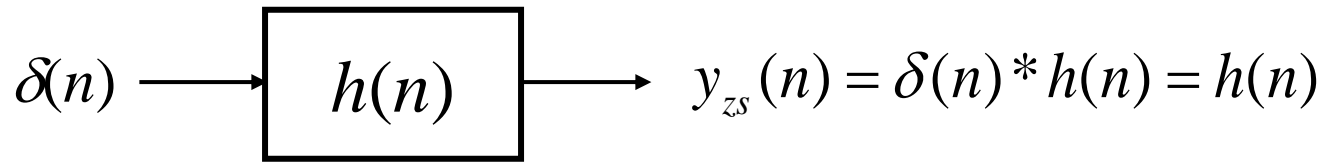
$z$ 的有理分式，只与描述系统的差分方程的结构及系数 $a_i$ 、 $b_j$ 有关

# 离散时间系统传递函数 $H(z)$

(1) 定义：系统在零状态条件下，输出的 $z$ 变换与输入的 $z$ 变换之比，记为 $H(z)$ ，即为系统函数。

$$H(z) = \frac{Z[y_{zs}(n)]}{Z[x(n)]} = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}$$

(2)  $H(z)$ 与 $h(n)$ 的关系：



$$H(z) = \frac{Z[y_{zs}(n)]}{Z[x(n)]} = \frac{Z[h(n)]}{Z[\delta(n)]} = \frac{Z[h(n)]}{1} = Z[h(n)]$$

$$\therefore h(n) \xleftrightarrow{Z} H(z)$$

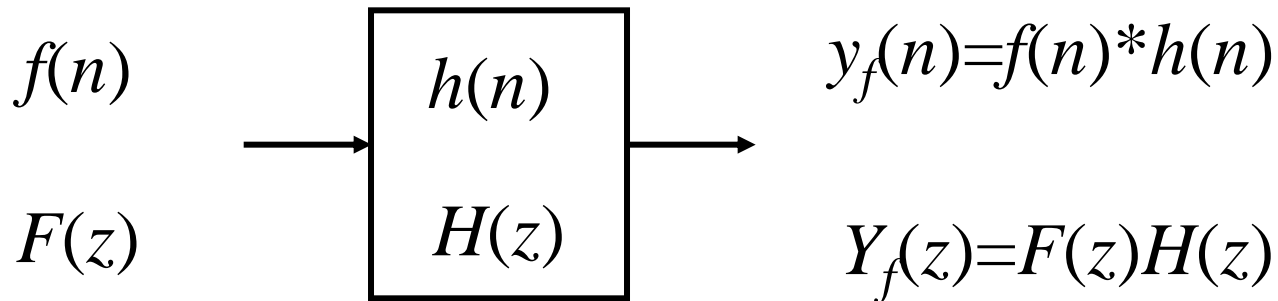
注：这里的 $z$ 变换均为单边 $z$ 变换

即离散系统的系统函数就是离散系统的单位脉冲响应的  $Z$  变换，表示了系统特性在时域和  $z$  域之间的联系，实际上由  $Z$  变换的时域卷积定理也很容易得出式(3-55)的关系。

# 连续时间系统传递函数 $H(s)$

---

(3)求零状态响应:



(4)求 $H(z)$ 的方法:

①由系统的冲激响应求解:  $H(z) = Z[h(n)]$

②由定义式  $H(z) = \frac{Z[y_{zs}(n)]}{Z[f(n)]}$

③由系统的差分方程写出 $H(z)$

# 离散时间系统的系统函数

利用 $H(z)$ 的零极点分布，离散系统可分为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3-51)$$

1) 当 $a_k = 0, 1 \leq k \leq N$ ，并设 $a_0 \equiv 1$ ，式(3-51)为

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (3-52)$$

这时离散系统系统函数 $H(z)$ 只有 $M$ 个零点，无有限极点，称为全零点型系统或滑动平均(MA)模型。

2) 当 $b_k = 0, 1 \leq k \leq M$ ，并设 $a_0 \equiv 1$ ，则式(3-51)为

$$H(z) = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3-53)$$

这时离散系统系统函数 $H(z)$ 只有 $N$ 个极点，无有限零点，称为全极点型系统或自回归(AR)模型。

3) 当离散系统系统函数 $H(z)$ 以式(3-51)的通式表示时，它既含有极点又含有零点，称为极点、零点型系统或自回归滑动平均(ARMA)模型。

# 离散系统的z域分析

- 由于系统的传递函数较易获得，通过对 $H(z)$ 进行 $z$ 反变换求得离散系统的单位冲激响应 $h(n)$
- 当系统函数 $H(z)$ 的极点全部位于 $z$ 平面单位圆内（即系统稳定），离散系统的频率特性函数 $H(\Omega)$

$$H(\Omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

- 同样的，离散系统传递函数的零、极点的分布与系统的稳定性、响应特性都有明确的对应关系，在离散控制系统的分析和综合中更是重要的工具。

# 一、Z变换

## 2. Z变换与DTFT的关系

离散信号  $x(n)$  的Z变换是  $x(n)$  乘以实指数信号  $r^{-n}$  后的DTFT

$$F(x(n)r^{-n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{j\Omega})^{-n}$$

令复变量  $z = re^{j\Omega}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

**DTFT**就是在 $z$ 平面单位圆上的 $Z$ 变换。前提是单位圆应包含 $Z$ 变换的收敛域内

如果  $|z|=1$ , 即 $r=1$  (单位圆上也)

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Omega} = F\{x(n)\} = X(\Omega)$$

离散时间傅里叶变换就是在 $z$ 平面单位圆上的 $Z$ 变换 (单位圆在 $Z$ 变换的收敛域内)



# 第四章 信号处理基础

---

## ➤ 系统及其性质

- ✓ 系统的描述

- ✓ 系统的性质 ★

## ➤ 信号的线性系统处理 ★

- ✓ 时域法分析

- ✓ 频域法分析

- ✓ 复频域法分析

## ➤ 解卷积（逆滤波和系统辨识）

## ➤ 数字信号处理技术（自学）

- ✓ 数字信号处理的特点

- ✓ 数字信号处理的实现

- ✓ 有限字长对实现数字信号处理的影响



# 信号分析与处理

## 第五章 滤波器

范姗慧

杭州电子科技大学 自动化学院

二教南316

# 本章主要内容

---

## ➤ 滤波器概述

- ✓ 滤波概念及基本原理
- ✓ 滤波器的分类
- ✓ 滤波器的技术指标

## ➤ 模拟滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 巴特沃思（**Butterwoth**）低通滤波器
- ✓ 切比雪夫（**Chebyshev**）低通滤波器
- ✓ 模拟滤波器频率变换

## ➤ 数字滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 无限冲激响应（**IIR**）数字滤波器
- ✓ 有限冲激响应（**FIR**）数字滤波器

# 滤波的概念及其基本原理

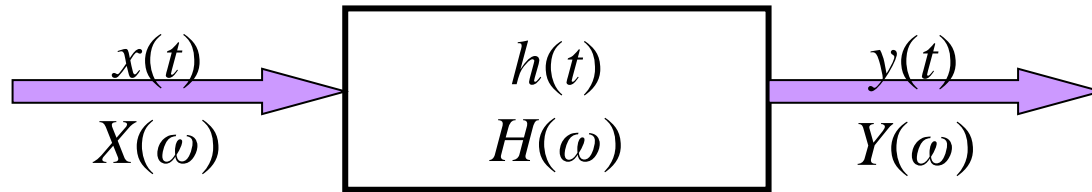
## 1、滤波器概念

- 滤波是根据有用信号与噪声或干扰的不同特性，从含有噪声或干扰的信号中消除或减弱噪声，提取有用信号的过程。
- 滤波问题存在于信号传输与处理的整个过程中，如：音响系统的音调控制，通信中的干扰消除，频分复用系统中的解复用与解调。
- 实现滤波功能的系统就称为**滤波器**。
- 滤波器是一种**选频器件**，根据需要对不同频率分量给予不同程度的衰减
- 从系统的角度看，滤波器是时域上具有单位冲激响应 $h(t)$ 或单位脉冲响应 $h(n)$ 的可实现的**线性时不变系统**

# 滤波的概念及其基本原理

## 2、模拟滤波器特性

- 模拟滤波器的结构（针对模拟信号，连续LTI系统）



- 时域输入、输出关系为

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- 频域输入、输出关系为

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

- 模拟滤波器通常用硬件实现，其元件是R、L、C及运算放大器或开关电容等。

# 数字信号处理的实现

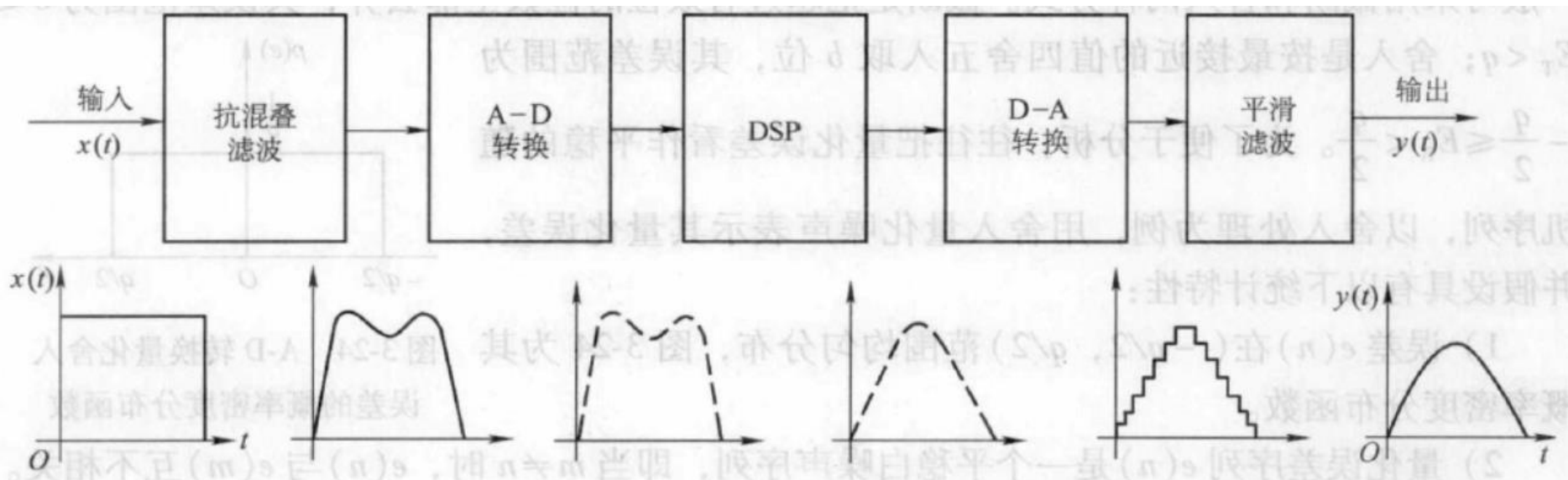


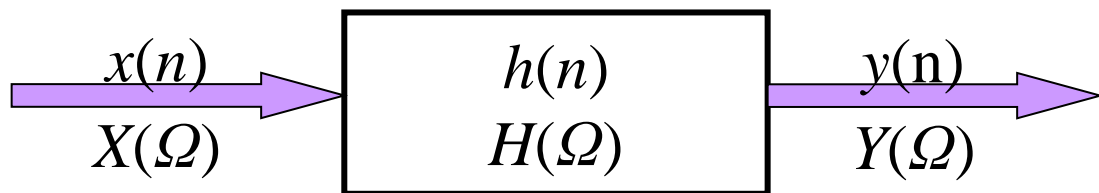
图 3-23 典型的数字信号处理系统

在计算机得到大量应用以来，往往借助于数字滤波的方法处理模拟信号，即将模拟信号经带限滤波后再通过A/D变换完成采样与量化，此数字信号经数字滤波器实现信号处理的要求，将处理后的数字信号经D/A变换和平滑滤波得到输出的模拟信号

# 滤波的概念及其基本原理

## 3、数字滤波器特性

- 数字滤波器的结构（针对离散信号，离散LTI系统）



- 时域输入、输出关系为

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

- 频域输入、输出关系为

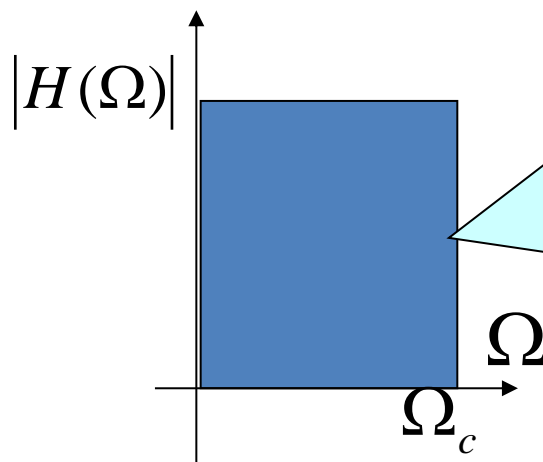
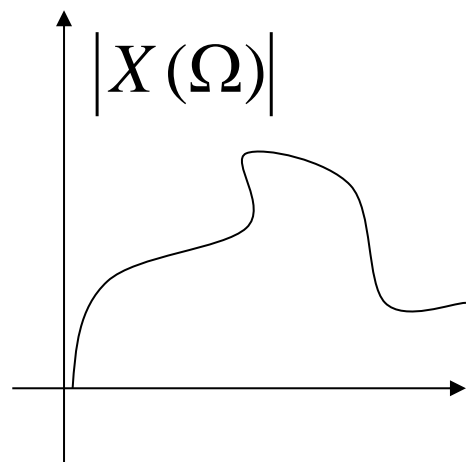
$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

数字滤波器的实现要比模拟滤波器更方便，且容易获得更为理想的滤波性能

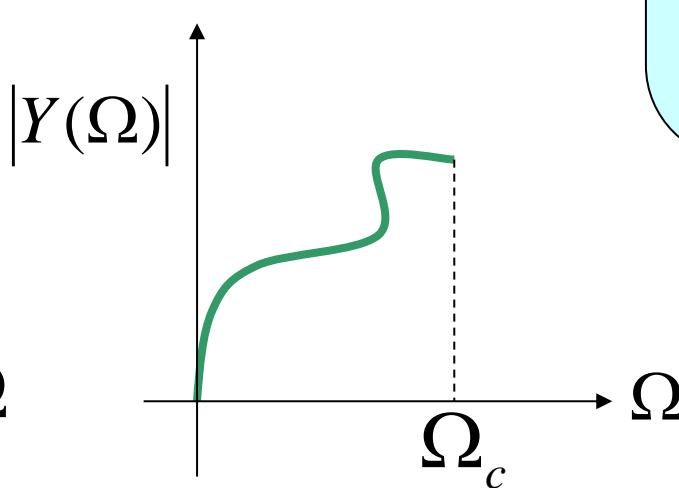
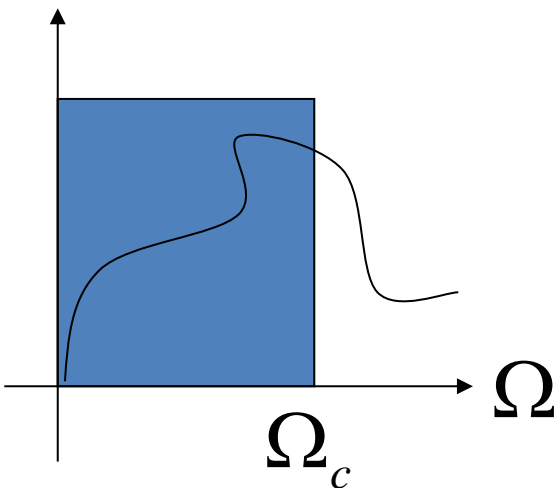
- 数字滤波器既可由硬件（延迟器、乘法器和加法器）实现，也可由相应的软件实现，还可以用软硬件结合来实现

# 滤波的概念及其基本原理

## 4、滤波原理



输入信号 $x(n)$ 通过滤波器 $h(n)$ 的结果是使输出 $y(n)$ 中不再含有 $|\Omega| > \Omega_c$ 的频率成分，而使 $|\Omega| < \Omega_c$ 的频率成分“不失真”地通过





# 滤波器的分类

## 1、经典滤波器和现代滤波器

➤ **经典滤波器：**假定输入信号中的有用信号和希望去掉的信号具有不同的频带，当输入信号通过滤波器后可去掉无用的信号。

**功能：**对频率进行选择, 过滤掉噪声和干扰信号，保留下有用信号。工程上常用来进行信号处理、数据传递和抑制干扰。**但对有用信号和噪声信号频谱重叠情况无效**

➤ **现代滤波器：**从含有噪声的数据（时间序列）中估计出信号的某些特征或信号本身。当信号被估计出后，被估计出的信号将比原信号有更高的信噪比。通常把信号和噪声都看做随机信号，通过一定的准则得出它们的统计特征（如自相关函数，功率谱等等）的最佳估值算法，然后利用硬件和软件实现这些算法

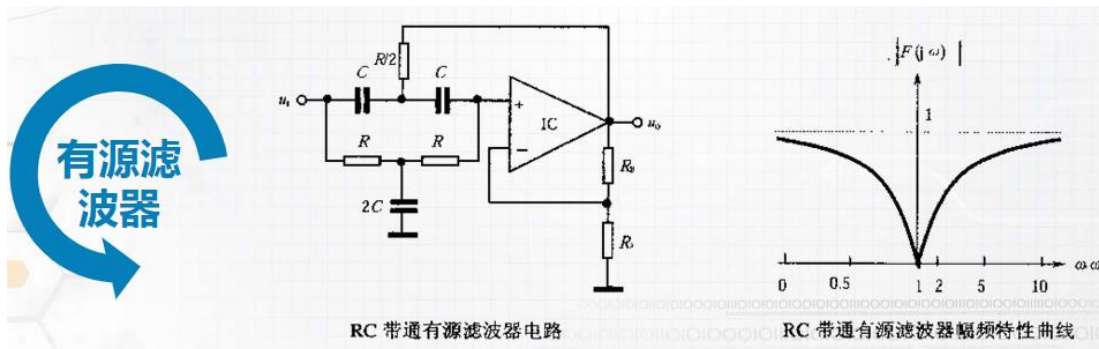
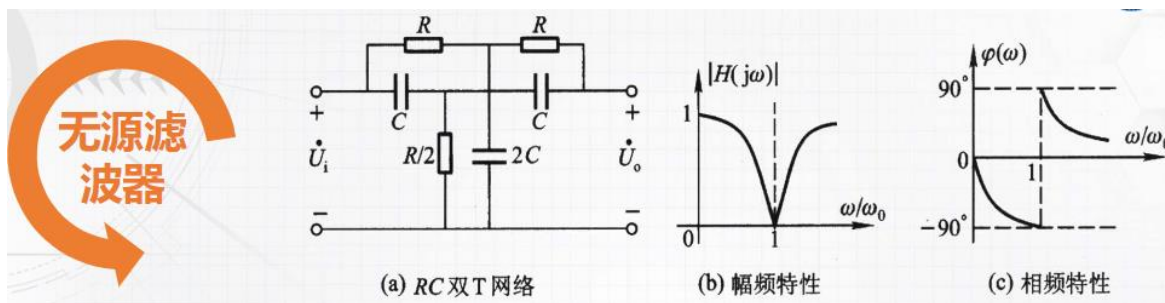
# 滤波器的分类

## 2、滤波器的类型

### 经典滤波器

构成滤波器  
元件的性质

- 无源滤波器：由无源元件组成，如电阻、电容、电感等
- 有源滤波器：由有源元件组成，如运算放大器



# 滤波器的分类

## 2、滤波器的类型

### 经典滤波器

构成滤波器  
元件的性质

- 无源滤波器：由无源元件组成，如电阻、电容、电感等
- 有源滤波器：由有源元件组成，如运算放大器

滤波器幅频  
特性的通带  
与阻带范围

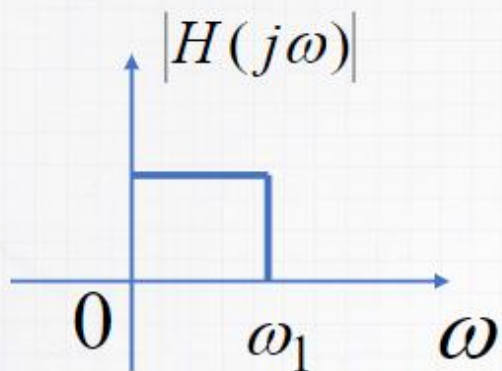
- 低通滤波器
- 高通滤波器
- 带通滤波器
- 带阻滤波器

滤波器所处理  
的信号性质

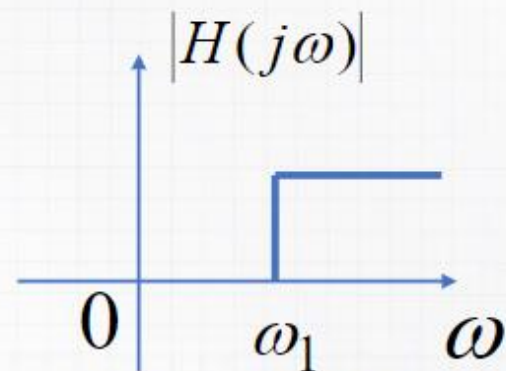
- 模拟滤波器：处理连续时间信号
- 数字滤波器：处理离散时间信号

# 滤波器的分类

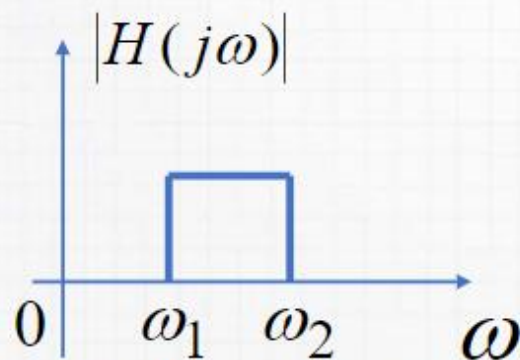
## 3、滤波器的选频特性（幅频特性）



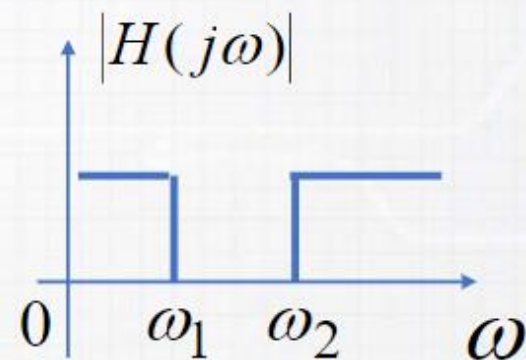
理想低通滤波器



理想高通滤波器



理想带通滤波器



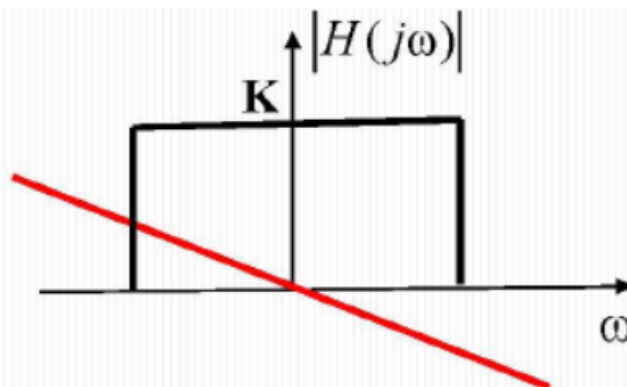
理想带阻滤波器

理想滤波器

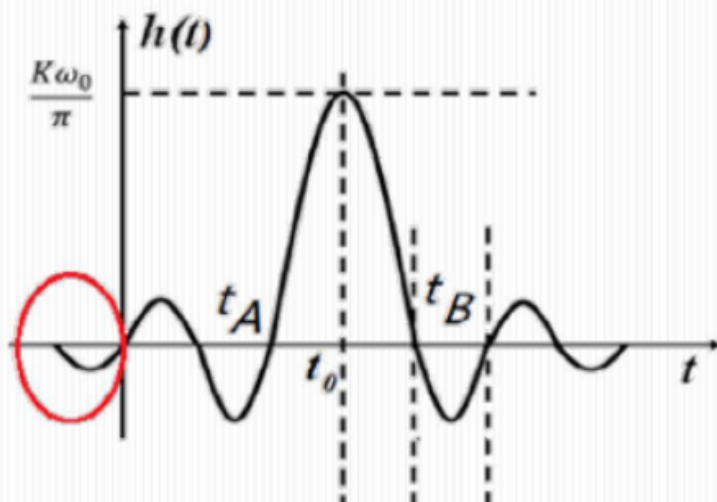
# 物理可实现滤波器

## 1.1 问题引出

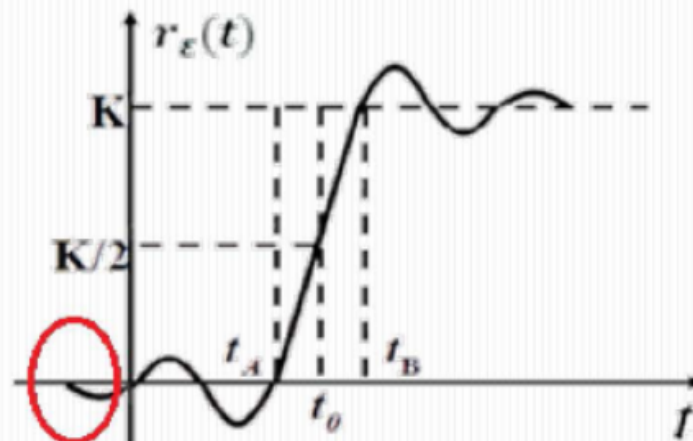
理想低通滤波器



冲激响应



阶跃响应



**存在一个问题:** 响应超前于激励, 违反因果率, 物理不可实现

# 物理可实现滤波器

## 物理可实现系统的条件

时域特性:

$$h(t) = 0, t < 0 \quad , \quad \text{即 } h(t) = h(t)u(t)$$

因果条件

$$r(t) = e(t)u(t) * h(t)u(t) \quad \text{一定满足因果性}$$

即响应不出现在激励之前

频域特性:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$$

平方可积条件

能量信号

佩利-维纳准则

(必要条件)

并且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

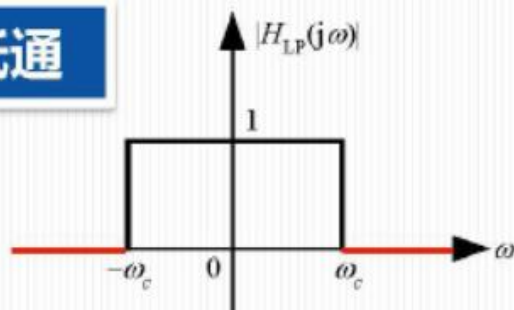
利用系统的幅频特性

## 物理可实现系统的条件

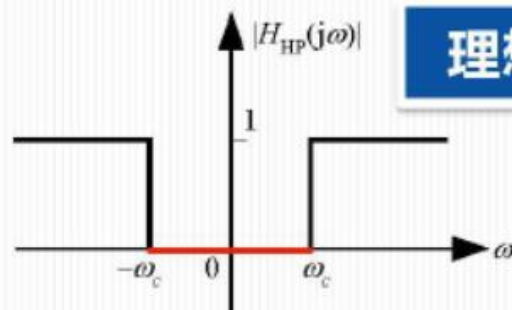
频域特性:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty \rightarrow |H(j\omega)|$  不可能频率段上为0

说明:

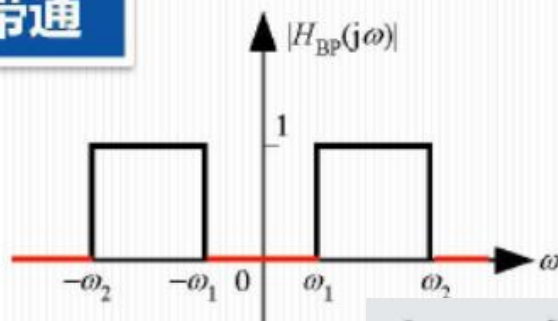
理想低通



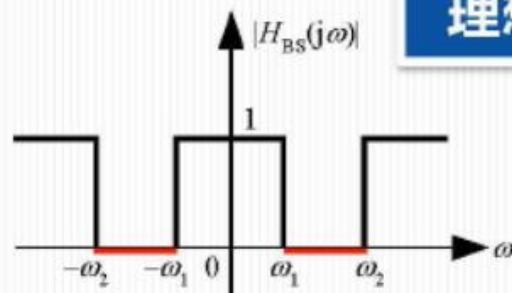
理想高通



理想带通



理想带阻



都不能物理实现



# 物理可实现系统的条件

频域特性:

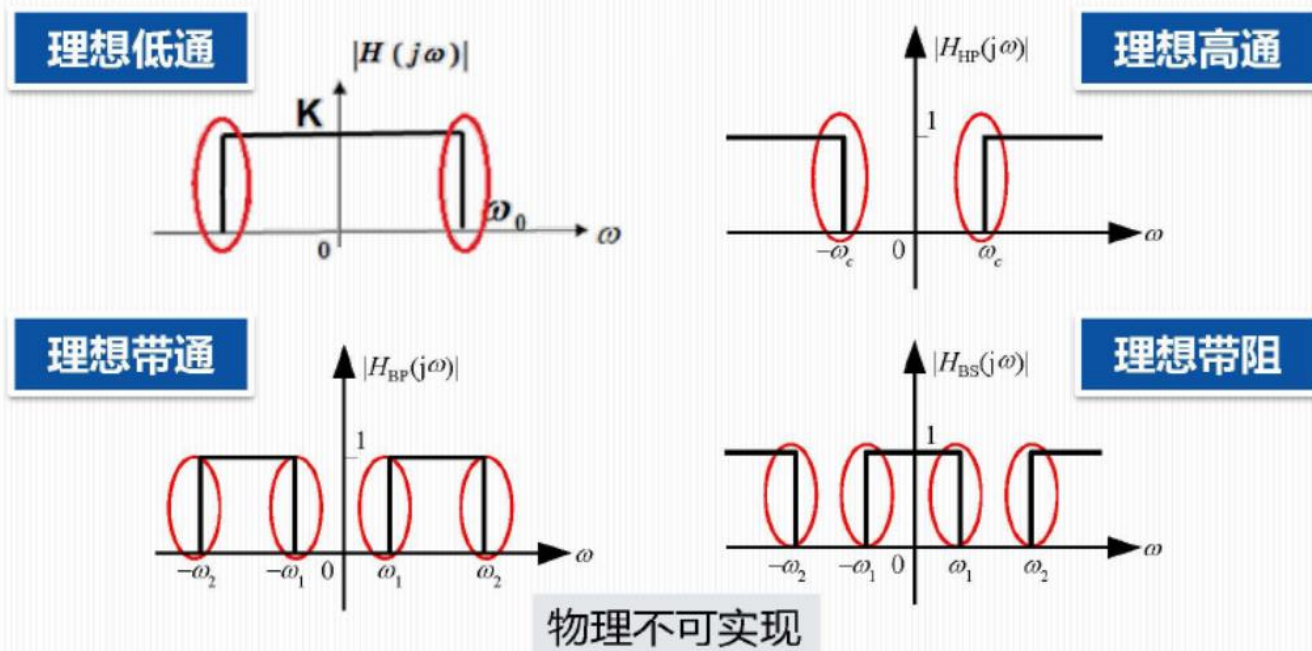
$$\text{令 } |H(j\omega)| = e^{-|\omega|} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln e^{-|\omega|}|}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\omega|}{1+\omega^2} d\omega = \ln(1+\omega^2) \Big|_0^{\infty}$$

不存在

所以: **衰减速度不能快过指数**

说明:

(3) 佩利-维纳准则要求可实现的幅度特性其总的衰减不能过于迅速;



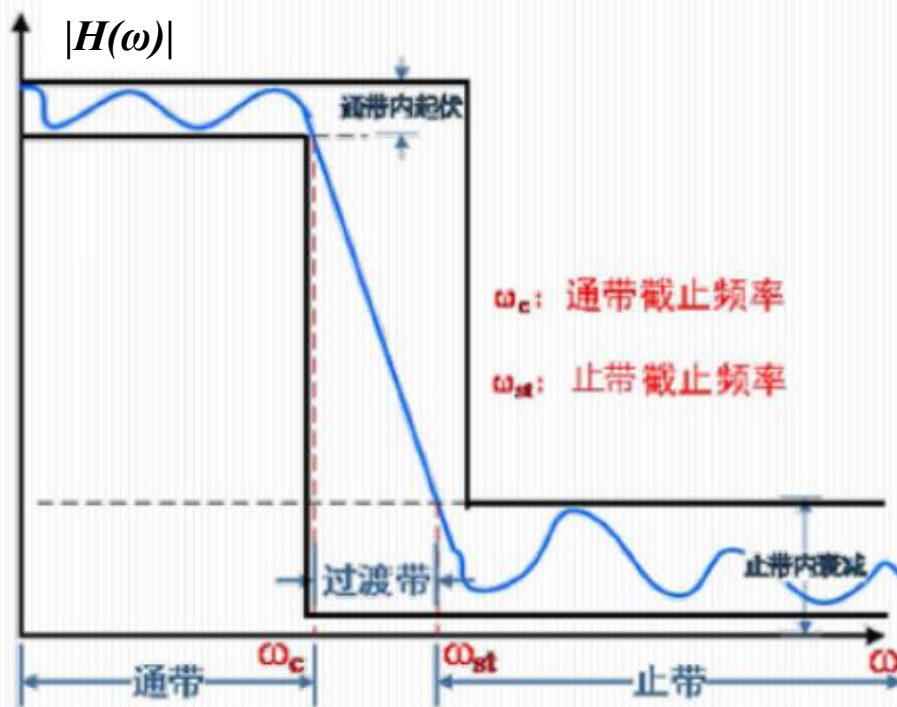


# 滤波器的技术指标

## 1、实际滤波特性与理想特性的差异

### 物理可实现的滤波器的特点

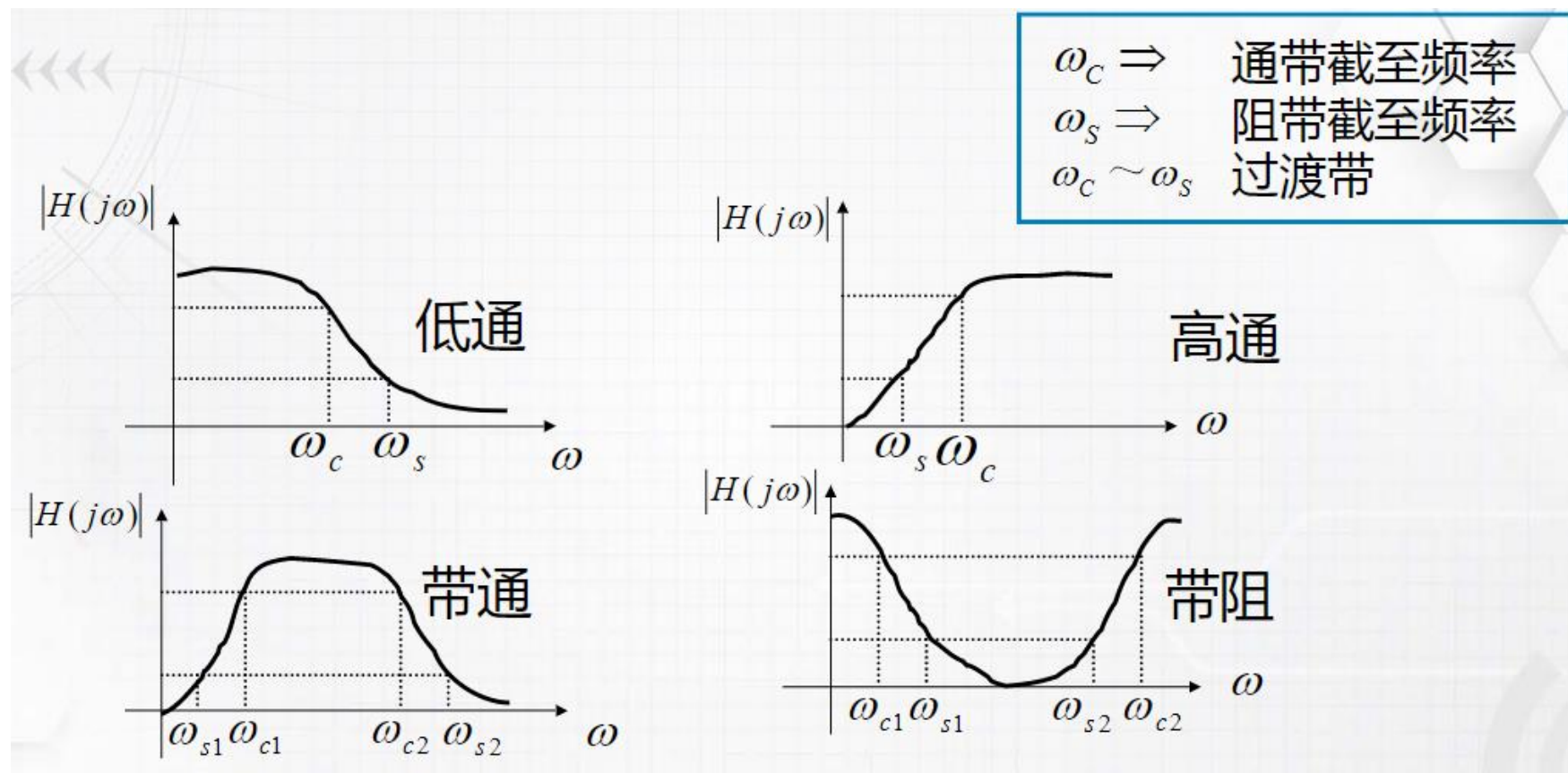
- 允许在通带和止带之间有缓冲; 有一定的过渡带
- 允许在止带内幅频特性不等于零, 只要幅频足够小即可;
- 通带内的各个频率上的增益允许有一定的差异;
- 过渡带下降速度不能快过指数函数



低通滤波器的容限图

# 滤波器的技术指标

## 实际滤波器的频率特性（幅频特性）

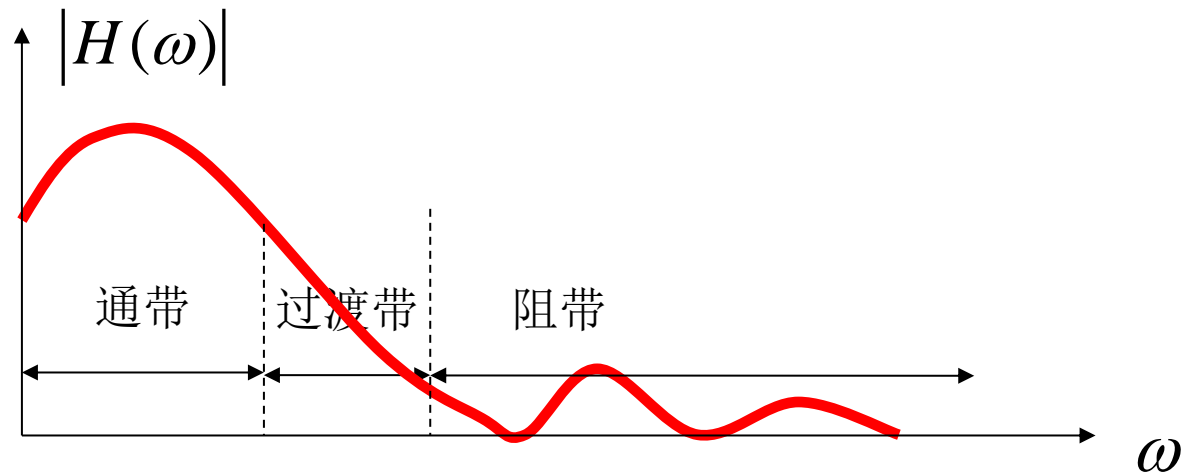


实际滤波器

# 滤波器的技术指标

## 1、实际滤波器特性与理想特性的差异

- 信号以很小的衰减通过滤波器的频率范围称为滤波器的“通频带”，简称“通带”
- 阻止信号通过滤波器的频率范围称为滤波器的“阻频带”，简称“阻带”
- 过渡带即为通带与阻带之间的频率范围



# 滤波器的技术指标

## 1、实际滤波特性

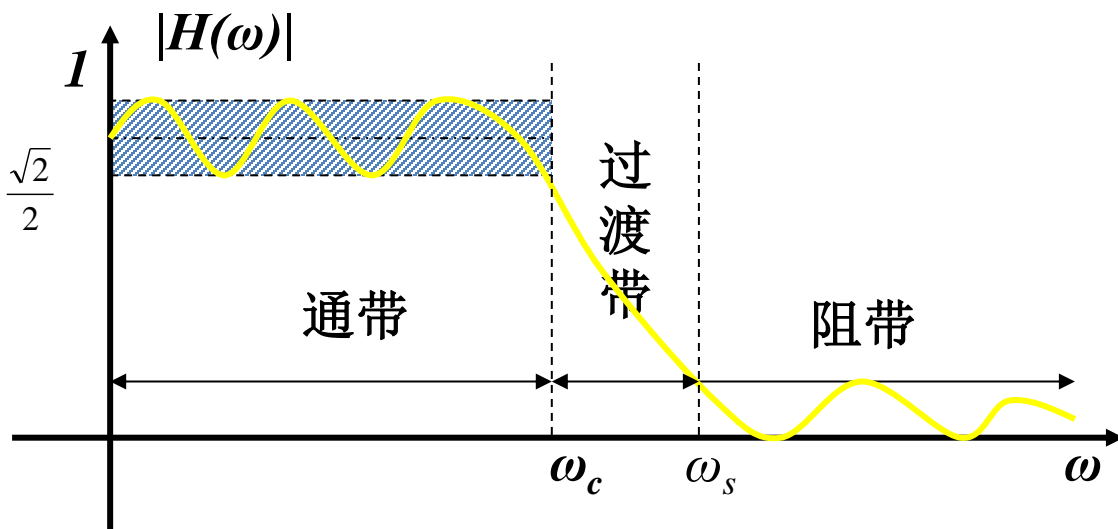
工程上，对于频率响应函数为 $H(\omega)$ 的因果滤波器，设 $|H(\omega)|$ 的峰值为1，

**通带**定义为：满足

$$|H(\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

的所有频率的集合，即从0dB的峰值点下降到-3dB的频率的集合。

$$3\text{dB} = 20\lg |H(\omega)| = 20\lg 0.707$$



一般设 $|H(\omega)|$ 的峰值等于1

# 滤波器的技术指标

---

## 2、滤波器技术指标 ★

- 截止频率  $\omega_c$
- 带宽  $B$
- 中心频率  $\omega_0$
- 通带波动  $\Delta_\alpha$
- 衰减函数  $\alpha$
- 相移  $\varphi$
- 群延时  $\tau_g$

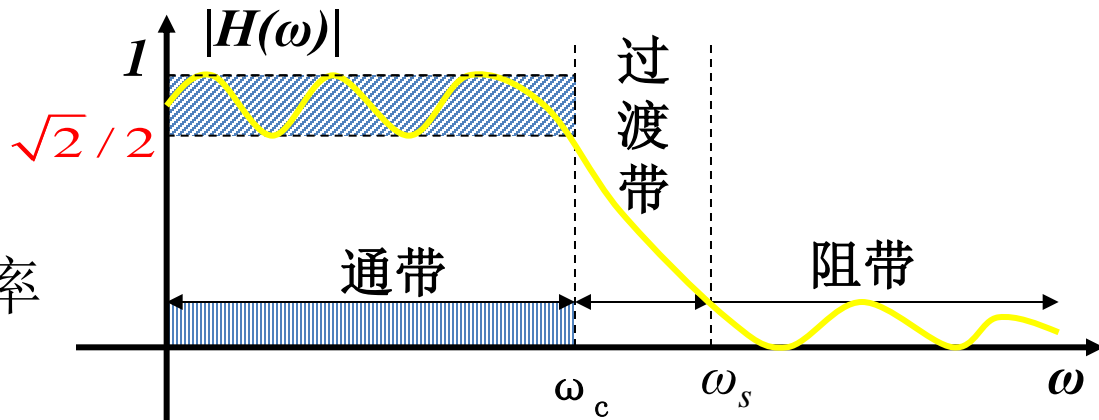
# 滤波器的技术指标

## 2、滤波技术指标

### ➤ 截止频率 $\omega_c$

- $|H(\omega)|$  下降  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的频率
- -3dB 频率
- 一个或多个截止频率

$$20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\text{dB}$$



一般设  $|H(\omega)|$  的峰值等于1或  $|H(0)|=1$

### ➤ 带宽(通带)B

- $|H(\omega)|$  从1(0dB)下降到  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (-3dB) 的通频带宽度
- 带通滤波器上、下截止频率之间的区域:

$$B = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

# 滤波器的技术指标

## 2、滤波技术指标

- 中心频率 $\omega_0$ ：滤波器上下两个截止频率 $\omega_{c1}$ 和 $\omega_{c2}$ 的几何平均值

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$$

- 通带波动  $\Delta_\alpha$ ：在滤波器的通带内，频率特性曲线的最大峰值与谷值之差。

# 滤波器的技术指标

## 2、滤波技术指标

### ➤ 相移 $\phi(\omega)$

- ✓ 信号通过滤波器后的相位滞后，即某一特定频率的信号通过滤波器时，它在输入端和输出端的相位之差
- ✓ 相位滞后是频率的函数

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

### ➤ 群延迟 $\tau_g$

- 又称为“包络延迟”
- 相移对频率的导数(变化率):
- 实际滤波器相移为负，群延迟为正
- 不失真测试系统的群延迟为常数！

$$\tau_g = -\frac{d}{d\omega} \phi(\omega)$$



# 滤波器的技术指标

## 2、滤波技术指标

### ➤ 衰减函数（衰耗特性/工作损耗） $\alpha$

- ✓ 用于描述幅频特性 $|H(\omega)|$ 的衰减程度，单位是dB，主要取决于系统幅频特性二次方的函数

$$\alpha = 20\lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20\lg |H(\omega)| = -10\lg |H(\omega)|^2$$

- ✓ 对于理想滤波器，通带衰减为0，阻带衰减为 $\infty$
- ✓ 实际滤波器衰减在 $0 \sim \infty$ 之间

# 滤波器的技术指标

## 2、滤波技术指标

### ➤ 衰减函数（损耗特性/工作损耗） $\alpha$

$$\alpha = 20\lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20\lg |H(\omega)| = -10\lg |H(\omega)|^2$$

✓ 通带衰减 $\alpha_p$ ，为实际滤波器的通带最大衰减，定义为

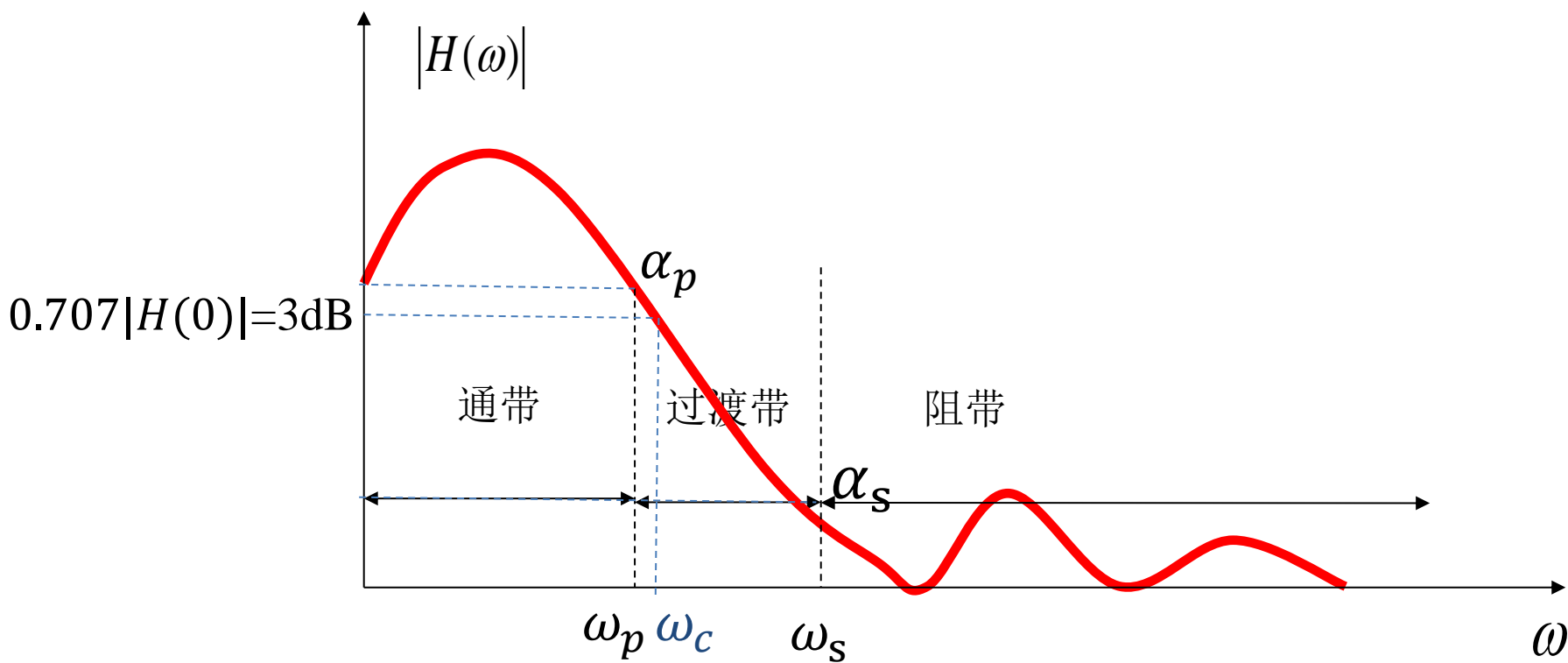
$$\alpha_p = 20\lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega_p)|} = -20\lg |H(\omega_p)|$$

✓ 阻带衰减 $\alpha_s$ ，为实际滤波器阻带最小衰减，定义为

$$\alpha_s = 20\lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega_s)|} = -20\lg |H(\omega_s)|$$

以上式中， $\omega_p$ 为通带截止频率， $\omega_s$ 阻带截止频率，且 $|H(0)|$ 均假定被归一化为1

# 滤波器的技术指标



滤波器容差图

# 1111课后作业（7题）

- 第四章习题P259
- 23（这本书系统框图中的那个⊗表示求和，详见195页）

2. 已知系统频率特性  $H(\omega) = \frac{j\omega}{-\omega^2 + j5\omega + 6}$ ，系统的初始状态  $y(0) = 2, y'(0) = 1$ ，激励

$x(t) = e^{-t}U(t)$ 。求全响应  $y(t)$ 。

4.18 已知某连续时间 LTI 因果系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ 。

- (1) 确定该系统的系统函数  $H(s)$ ；
- (2) 判断系统的稳定性，若系统是稳定的，求出系统的频率响应，讨论其幅频和相频特性；
- (3) 求系统的单位冲激响应  $h(t)$  及单位阶跃响应  $g(t)$ ；
- (4) 若系统输入  $f(t) = e^{-t}U(t)$ ，求输出响应  $y_f(t)$ ；
- (5) 当系统输出的拉氏变换为  $Y(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2}$  时，求系统的输入  $f(t)$ 。

# 1111课后作业（7题）

6.6 求下列系统的全响应并指出零输入和零状态响应。

$$(1) y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = U(n+1) - 2U(n), \quad y_x(0) = y_x(1) = 1$$

【例 6-23】 已知因果离散系统的系统函数为  $H(z) = \frac{2z}{z^2 - 4z + 3}$ ,  $f(n) = 2^n U(n)$ ,  $y(-1) =$

$2, y(-2) = 4/3$ 。求全响应  $y(n)$ 。

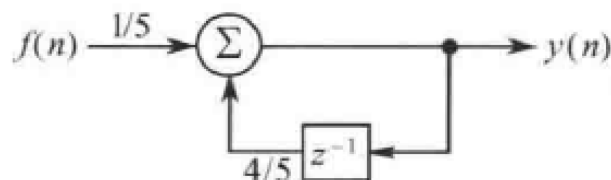
【例 6-15】 某 LTI 离散系统的差分方程为  $y(n] - 0.5y(n-1) = f(n)$ 。

(1) 求系统函数  $H(z)$  并确定可能的单位样值响应, 说明系统的因果性与稳定性。

(2) 求由该差分方程描述的因果系统在  $f(n) = u(n)$  作用下的零状态响应。

6.26 已知一阶因果离散系统的系统框图如习图 6-9 所示, 求:

(1) 系统的差分方程; (2) 若系统激励为  $f(n) = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \cos(n\pi)$ , 求稳态响应。



# 复习要点

- 重点掌握线性时不变系统的响应的复频域/ $z$ 域分析法
  - ✓ 熟悉掌握利用 $z$ 变换求解离散LTI系统的全响应、零输入响应和零状态响应（主要利用了单边 $z$ 变换的时移性质）
  - ✓ 掌握系统函数 $H(s)/H(z)$ 的求解，深入理解系统函数与单位冲激响应 $h(t)/h(n)$ 、系统频率特性的关系，系统函数的零极点分布
  - ✓ 了解因果系统、稳定系统的判定条件（几个充要条件）
- 重点掌握可实现滤波器的特点和技术指标
  - ✓ 理解滤波器的定义、基本原理、分类（特别是低通、高通、带通、带阻）
  - ✓ 深入理解可实现滤波器的特点，通带、止带、过渡带的定义， $-3\text{dB}$ 点
  - ✓ 重点掌握可实现滤波器的技术指标，特别是截止频率、衰减函数、通带衰减、通带截止频率、止带衰减、止带截止频率、带宽等
- 自习3.4数字信号处理技术部分，了解数字信号处理的概念、特点实现方式和相关误差来源