

# 第二章 连续信号的分析

方璐 2教322

杭州电子科技大学 自动化学院

## 第二章 连续信号的分析

2.1 连续信号的时域描述和分析

2.2 连续信号的频域分析

2.3 连续信号的复频域分析

2.4 信号的相关分析

## 2.2 连续信号的频域分析

---

### 一、周期信号的频谱分析

- 周期信号的傅里叶级数展开式
- 周期信号的频谱
- 周期信号的功率分配
- 周期信号的傅里叶级数近似

### 二、非周期信号的频谱分析

- 从傅里叶级数到傅里叶变换
- 常见非奇异信号的频谱
- 奇异信号的频谱
- 周期信号的傅里叶变换

### 三、傅里叶变换的性质

- |        |          |          |
|--------|----------|----------|
| ■ 线性性质 | ■ 尺度变换特性 | ■ 微分特性   |
| ■ 奇偶性  | ■ 时移特性   | ■ 积分特性   |
| ■ 对偶性  | ■ 频移特性   | ■ 帕斯瓦尔定理 |
|        |          | ■ 卷积定理   |

# 傅立叶生平

- 1768年生于法国
- 1807年，论文《热的传播》，解热传导方程，提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”
- 拉格朗日、拉普拉斯反对发表
- 1822年首次发表在“热的分析理论”书中



**1768-1830**

# 傅立叶的最主要的贡献

- 研究《热的传播》和《热的分析理论》
- 周期信号都可表示为谐波关系的正弦信号的加权和
- 非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示

## 2.2 连续信号的频域分析

---

### 一、周期信号的频谱分析

1. 周期信号的傅里叶级数展开式
2. 周期信号的频谱
3. 周期信号的功率分配
4. 周期信号的傅里叶级数近似

# 一、周期信号的频谱分析

## 1. 周期信号的傅里叶级数展开式

**定理** ([Dirichlet 定理](#)) 设  $x_T(t)$  是以  $T$  为周期的实值函数, 且在区间  $[-T/2, T/2]$  上满足如下条件 (称为 [Dirichlet 条件](#)):

- (1) 绝对可积;
- (2) 连续或只有有限个第一类间断点;
- (3) 只有有限个极值点;

如果  $x_0$  是函数  $f(x)$  的间断点, 且左极限及右极限都存在, 则称  $x_0$  为函数  $f(x)$  的第一类间断点

则  $x(t)$  在连续点处有:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

在  $x_T(t)$  的间断处, 上式左端为  $\frac{1}{2}[x_T(t+0) + x_T(t-0)]$ .

# 一、周期信号的频谱分析

## 1. 周期信号的傅里叶级数展开式

三角函数的傅立叶级数：

周期为 $T_0$ 的周期信号 $x(t)$ ，如果满足狄里赫利条件，都可以分解成三角函数不等式：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

直流系数

余弦分量系数

正弦分量系数

傅里叶系数

基频  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



# 一、周期信号的频谱分析

## 1. 周期信号的傅里叶级数展开式 三角函数的傅立叶级数

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

对其两端在一个周期内  $-\frac{T_0}{2} \sim \frac{T_0}{2}$  对时间进行积分

直流系数 
$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

对其两端同乘  $\cos n\omega_0 t$  在一个周期内  $-\frac{T_0}{2} \sim \frac{T_0}{2}$  对时间进行积分

余弦分量系数 
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$\sin n\omega_0 t$

正弦分量系数 
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

# 一、周期信号的频谱分析

## 1. 周期信号的傅里叶级数展开式

傅里叶级数的三角正交集表示

物理意义明确，  
但运算不方便

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$A_0 = a_0$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

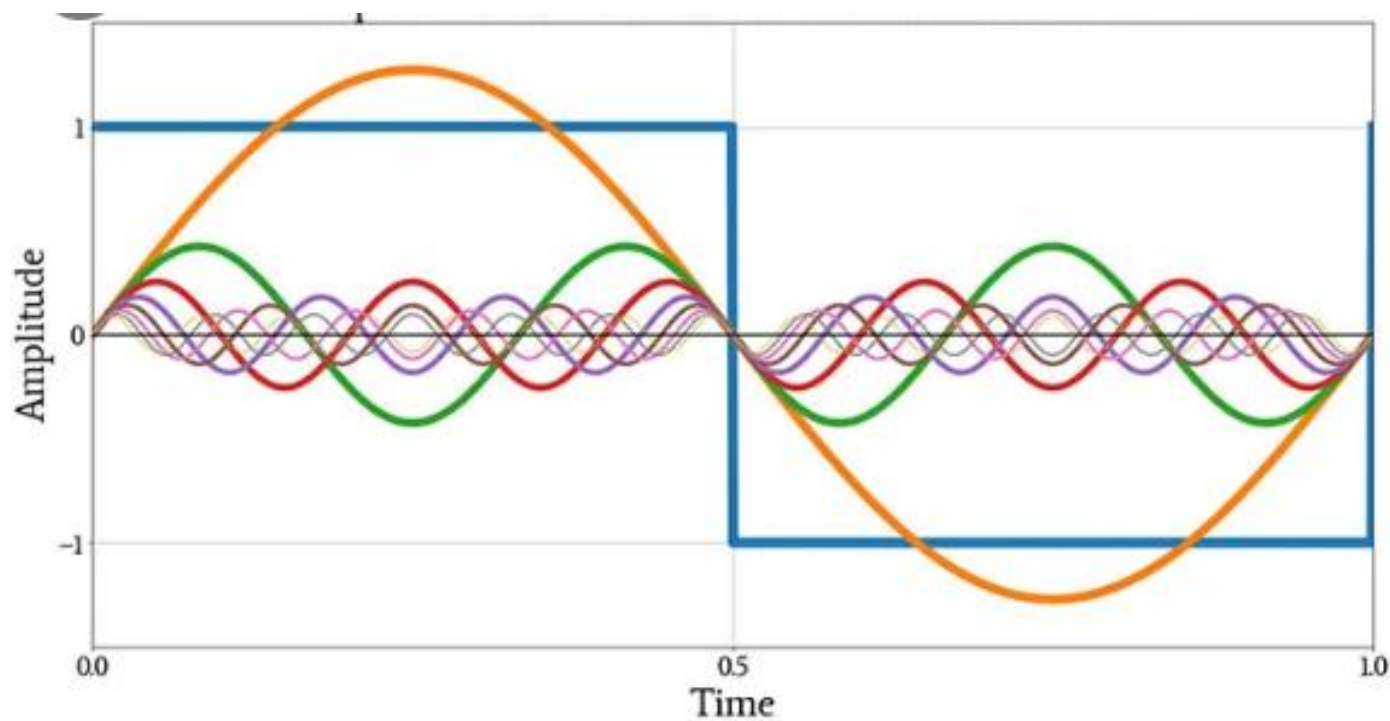
$$\phi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

表明一个周期  
信号可以分解  
为直流分量和  
一系列余弦或  
正弦形式的交  
流分量

# 一、周期信号的频谱分析

---

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$



# 一、周期信号的频谱分析

---

傅里叶级数的三角正交集表示—物理意义

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

**表明** 周期信号可以分解为一系列**固定频率**的简谐波之和，  
这些简谐波的(角)频率分别为一个基频  $\omega_0$  的倍数。

**意义** 认为 “一个周期为  $T$  的周期信号  $x_T(t)$  并不包含所有的  
频率成份，其频率是以基频  $\omega_0$  为间隔**离散**取值的。”

➤ 这是周期信号的一个非常重要的特点。

# 一、周期信号的频谱分析

---

傅里叶级数的三角正交集表示—物理意义

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

**振幅**  $A_n$  反映了频率为  $n\omega_0$  的简谐波在信号  $x_T(t)$  中所占有的份额（幅度）；

**相位**  $\theta_n$  反映了在信号  $x_T(t)$  中频率为  $n\omega_0$  的简谐波沿时间轴移动的大小。

● 这两个指标完全**定量**地刻画了信号的**频率特性**。

# 一、周期信号的频谱分析

## 1. 周期信号的傅里叶级数展开式

傅里叶级数的指数形式

运算比较方便

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

频谱函数

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

# 一、周期信号的频谱分析

## 2. 周期信号的频谱

### (1) 相关定义

#### ➤ 基波信号、谐波信号：

周期信号可以分解为一系列余弦信号之和：

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

表明一个周期为  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  的信号，除直流分量外，还包含有频率为原信号频率以及原信号频率的整数倍的一系列正弦型信号，分别将它们称为**基波信号**（ $n=1$ , 也称为**一次谐波信号**），**二次谐波信号**（ $n=2$ ），以及三次、四次……**谐波信号**，它们的**振幅**分别为对应的  $A_n$ ，**相位**为  $\varphi_n$

# 一、周期信号的频谱分析

## 2. 周期信号的频谱

### ➤ 频谱函数:

指数形式的傅立叶级数表达式中复数量  $X(n\omega_0) = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$  随频率  $n\omega_0$  的分布称为信号的**频谱**，也称为周期信号的**频谱函数**。

### ➤ 幅度频谱、相位频谱:

通常把幅度  $|X(n\omega_0)|$  随频率的分布称为幅度频谱，简称**幅频**，相位  $\varphi_n$  随频率的分布称为相位频谱，简称**相频**。

### ➤ 频谱图:

以频率为横座标，各谐波分量的幅度或相位为纵坐标，画出幅频和相频的变化规律，称为信号的**频谱图**。

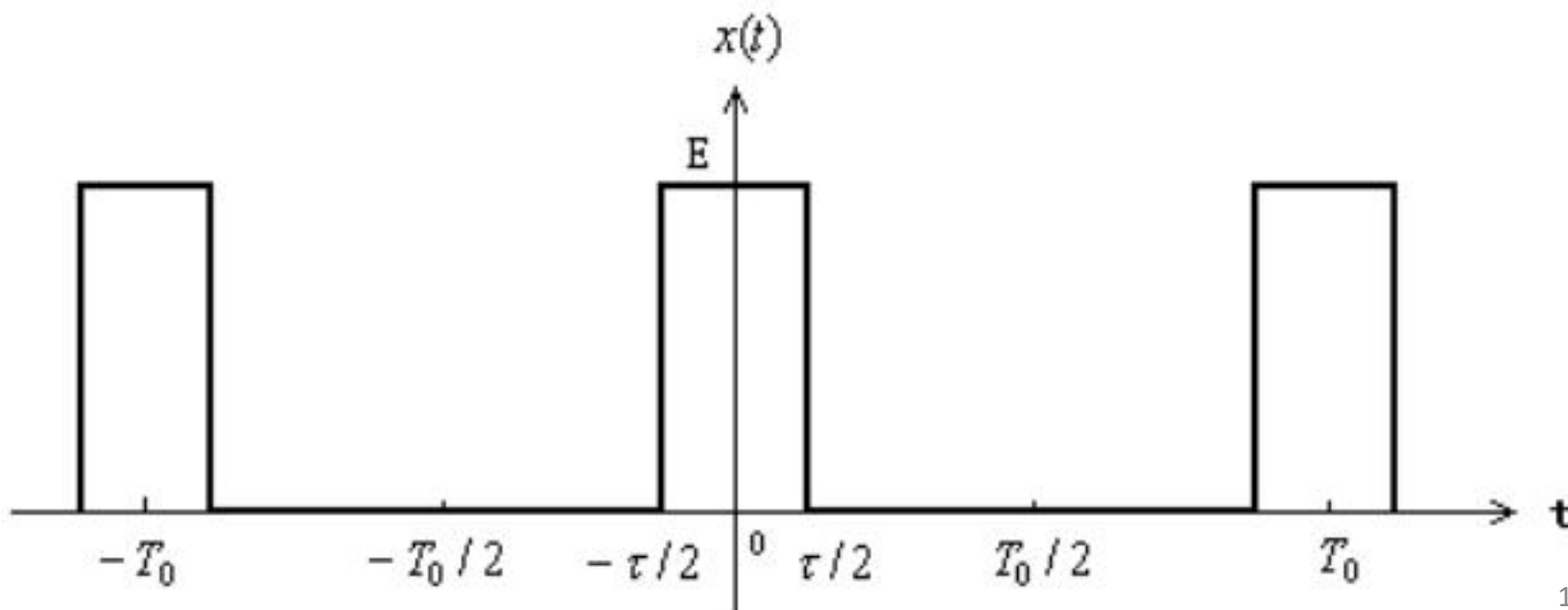


# 一、周期信号的频谱分析

## 2. 周期信号的频谱

例：求下图所示的周期矩形脉冲信号的复指数形式傅立叶级数表示式。

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$



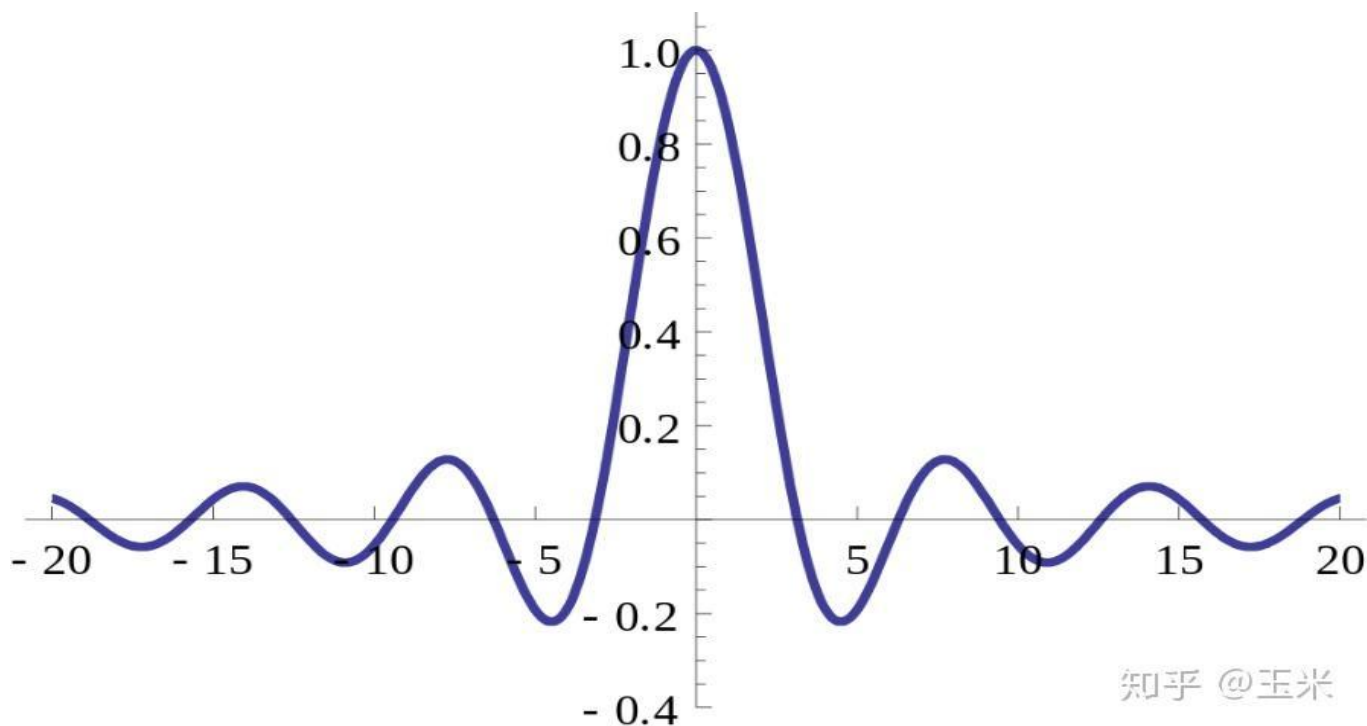
解：如图所示的矩形脉冲信号在一个周期内可表示为

$$x(t) = \begin{cases} E & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求复傅立叶系数

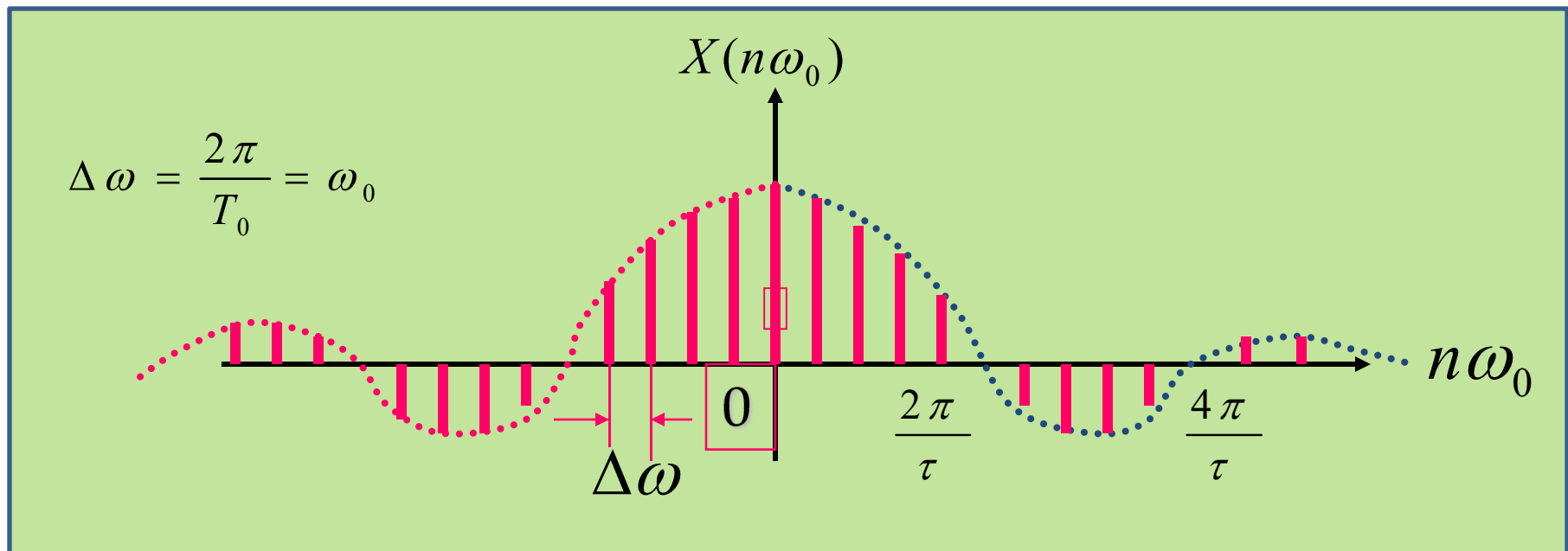
$$\begin{aligned} X(n\omega_0) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{E}{T_0} \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{E\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{1}{2} n\omega_0 \tau}{\frac{1}{2} n\omega_0 \tau} \end{aligned}$$

出现  $\frac{\sin x}{x}$  形式的函数，在信号理论中经常遇到，称为  
取样函数，记作  $\text{Sa}(x)$ ，它是偶函数，当  $x \rightarrow 0$  时， $\text{Sa}(x)=1$  为最  
大值，随着  $|x|$  的增大而总趋势衰减， $x = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$   
为过零点，每  $2\pi$  起伏一次。



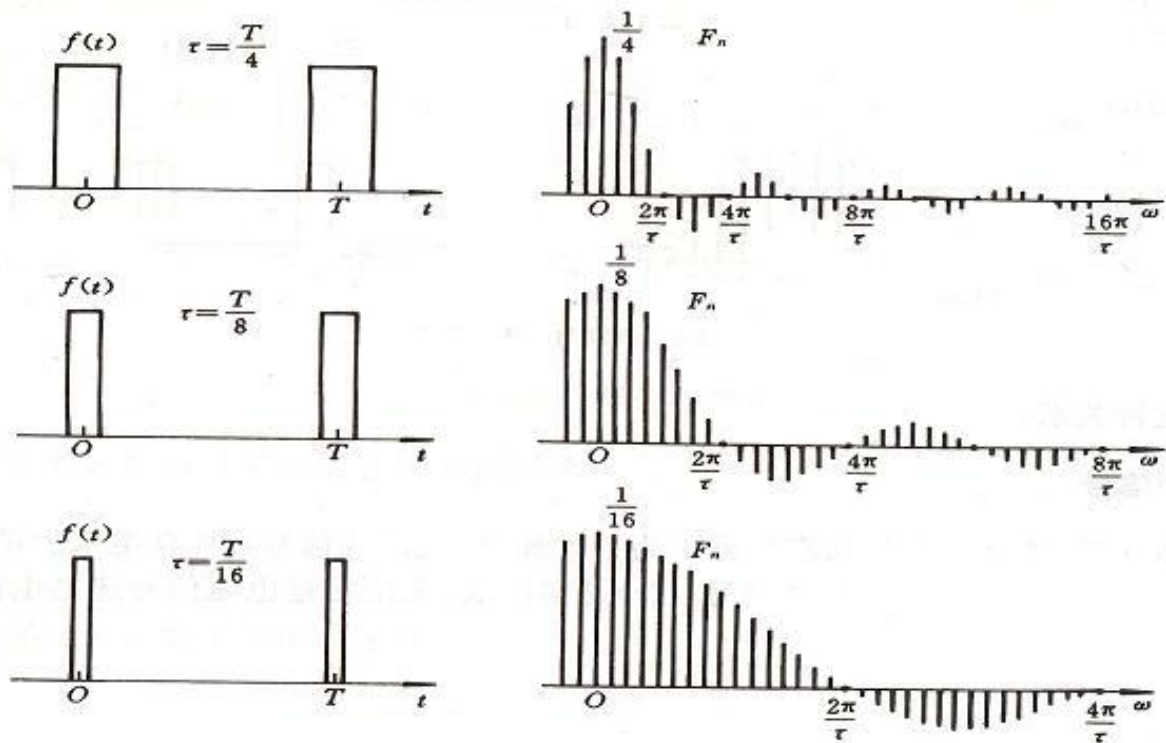
- 因此, 有  $X(n\omega_0) = \frac{E\tau}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$
- 周期矩形脉冲信号复指数形式傅立叶级数展开式为

$$x(t) = \frac{E\tau}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$



## ➤ 谱线的结构与波形参数的关系:

(a)  $T_0$ 一定,  $\tau$ 变小, 此时 $\omega_0$  (谱线间隔) 不变。两零点之间的谱线数目增多。

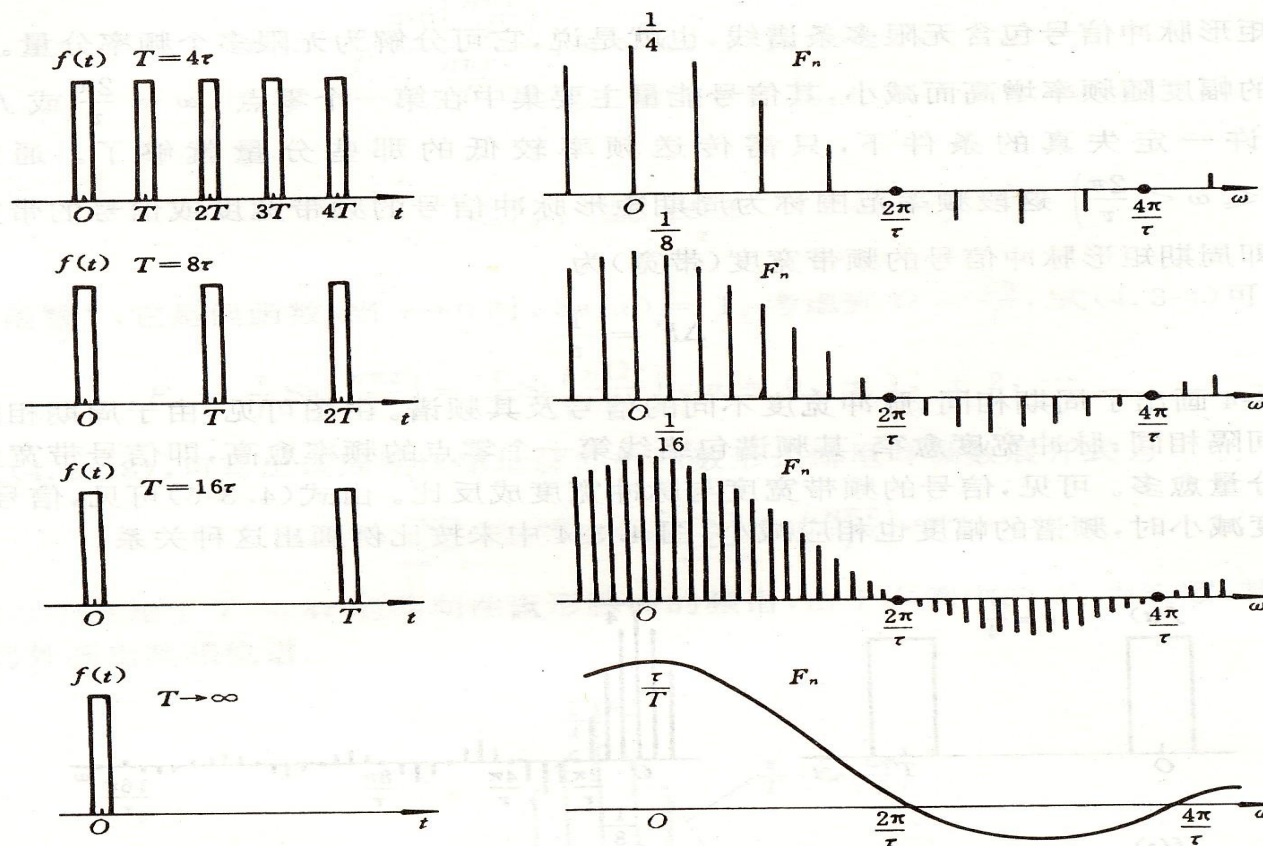


$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

$$\frac{2\pi}{\tau}$$

周期不变时, 脉冲宽度越窄, 其频谱包络线第一个零值点的频率越高, 即信号的带宽越大, 频带内所含的分量越多。

(b)  $\tau$ 一定,  $T_0$ 增大, 间隔 $\omega_0$ 减小, 频谱变密。幅度减小。



如果周期无限增长（这时就成为非周期信号），那么，谱线间隔将趋近于零，周期信号的离散频谱就过渡到非周期信号的连续频谱。各频率分量的幅度也趋近于无穷小。

# 一、周期信号的频谱分析

## 周期矩形脉冲信号的频谱的特点

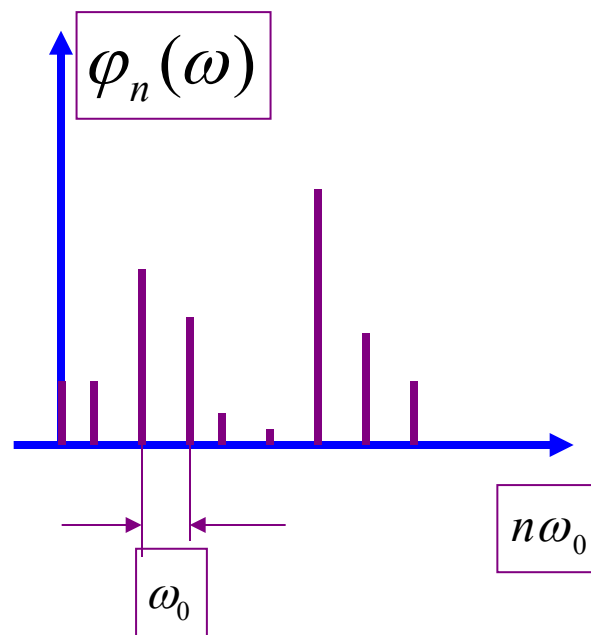
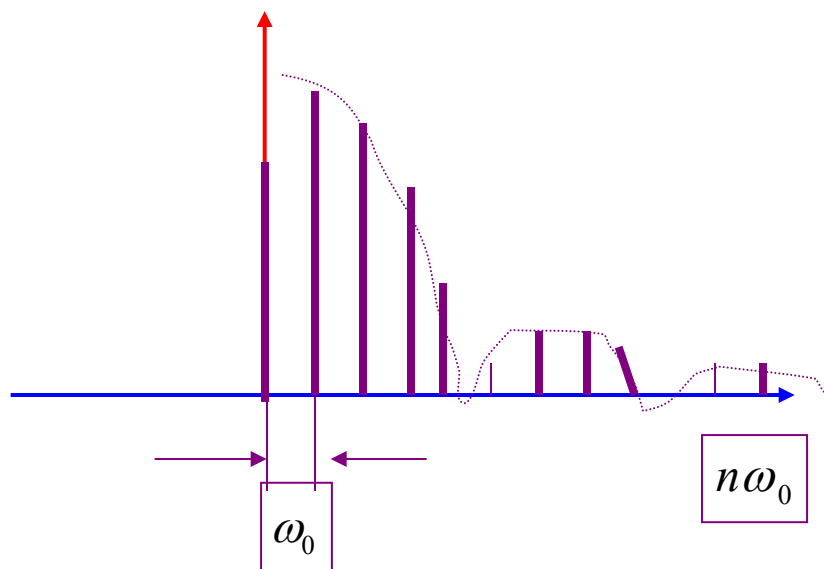
- **离散性**：频谱是非周期性的离散的线状频谱，连接各谱线顶点的曲线  $Sa(\frac{n\pi\tau}{T_0})$  为频谱的包络线，过零点为  $\omega_b = n\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$
  - **谐波性**：谱线以基波频率为间隔等距离分布，表明周期矩形脉冲信号只包含直流分量、基波分量和各次谐波分量。
  - **收敛性**：谱线幅度整体上具有减小的趋势。
- 以上三点是任何满足狄利赫里条件的周期信号的频谱所共同具有的
- **主要能量在第一过零点内**。主带宽度为： $\omega_b = \frac{2\pi}{\tau}$

# 一、周期信号的频谱分析

## 2. 周期信号的频谱

### (2) 周期信号的频谱特征

周期信号的谱线只出现在基波频率 $\omega_0$ 的整数倍的频率处。





# 一、周期信号的频谱分析

例 求出复指数信号  $e^{j\omega_0 t}$  的频谱

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

解：复傅立叶系数为

$$= \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$$

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j(1-n)\omega_0 t} dt$$

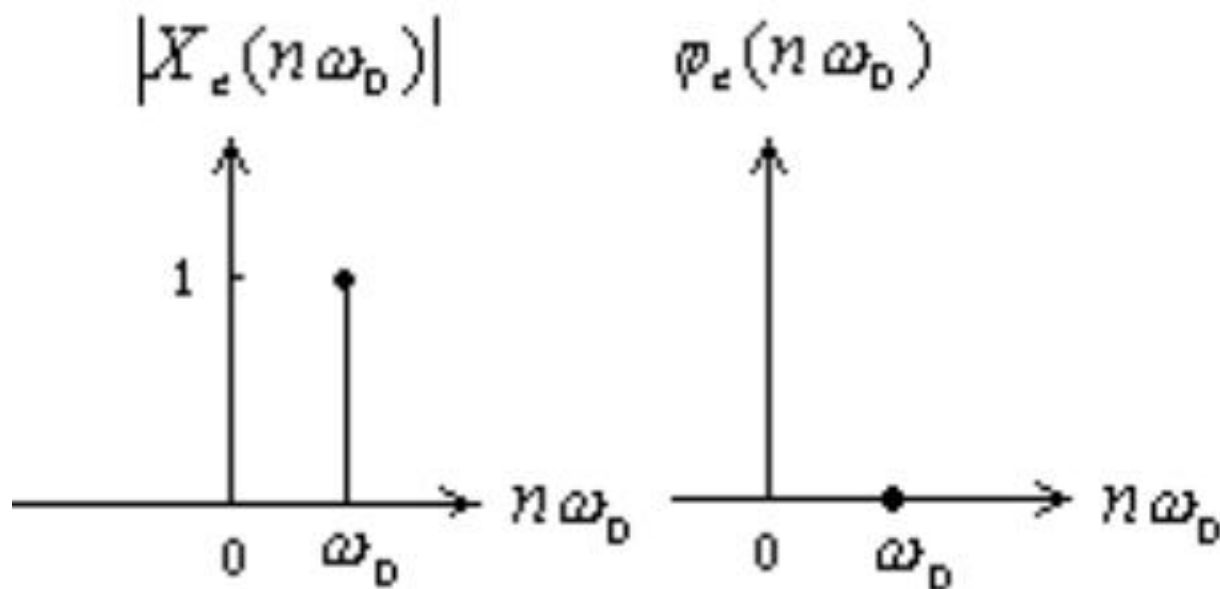
$$= \frac{1}{T_0 j(1-n)\omega_0} e^{j(1-n)\omega_0 t} \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \frac{1}{2j(1-n)\pi} [e^{j(1-n)\pi} - e^{-j(1-n)\pi}]$$

$$= \frac{\sin(1-n)\pi}{(1-n)\pi} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

# 一、周期信号的频谱分析

仅在  $\omega_0$  处有幅度为1的分量，说明复指数信号是正弦信号的一种表现形式

$$\begin{aligned} X(n\omega_0) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} \end{aligned}$$



# 一、周期信号的频谱分析

## 3. 周期信号的功率分配

**P**为周期信号的平均功率 
$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt$$

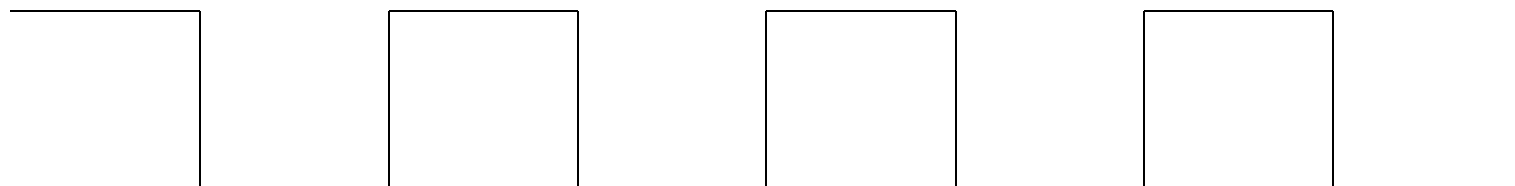
将  $x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$  代入, 有

$$p = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \right]^2 dt = \left( \frac{A_0}{2} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2$$

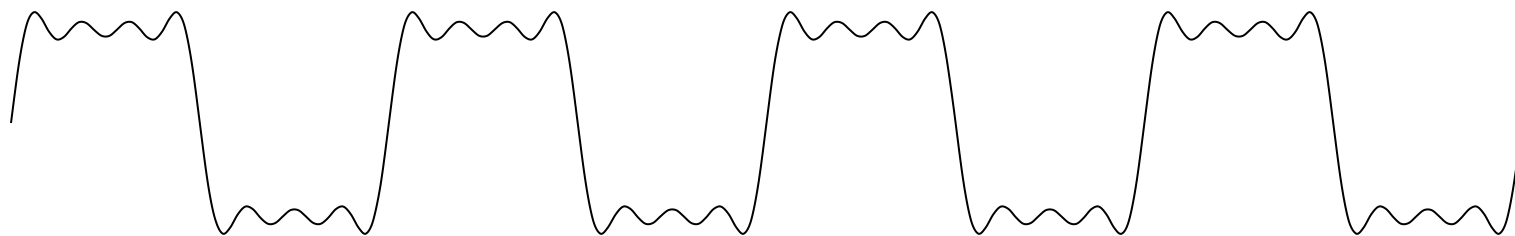
表明周期信号在时域的平均功率等于信号所包含的直流、基波及各次谐波的平均功率之和, **反映了周期信号的平均功率对离散频率的分配关系**, 称为功率信号的**帕斯瓦尔公式**。

# 一、周期信号的频谱分析

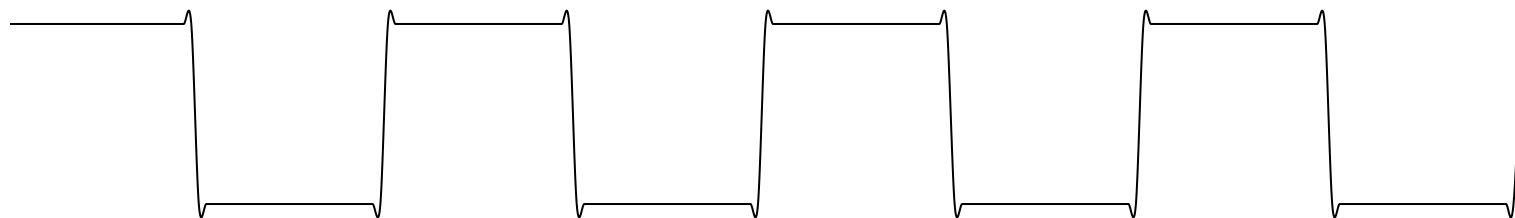
## 4. 周期信号的傅里叶级数近似



方波

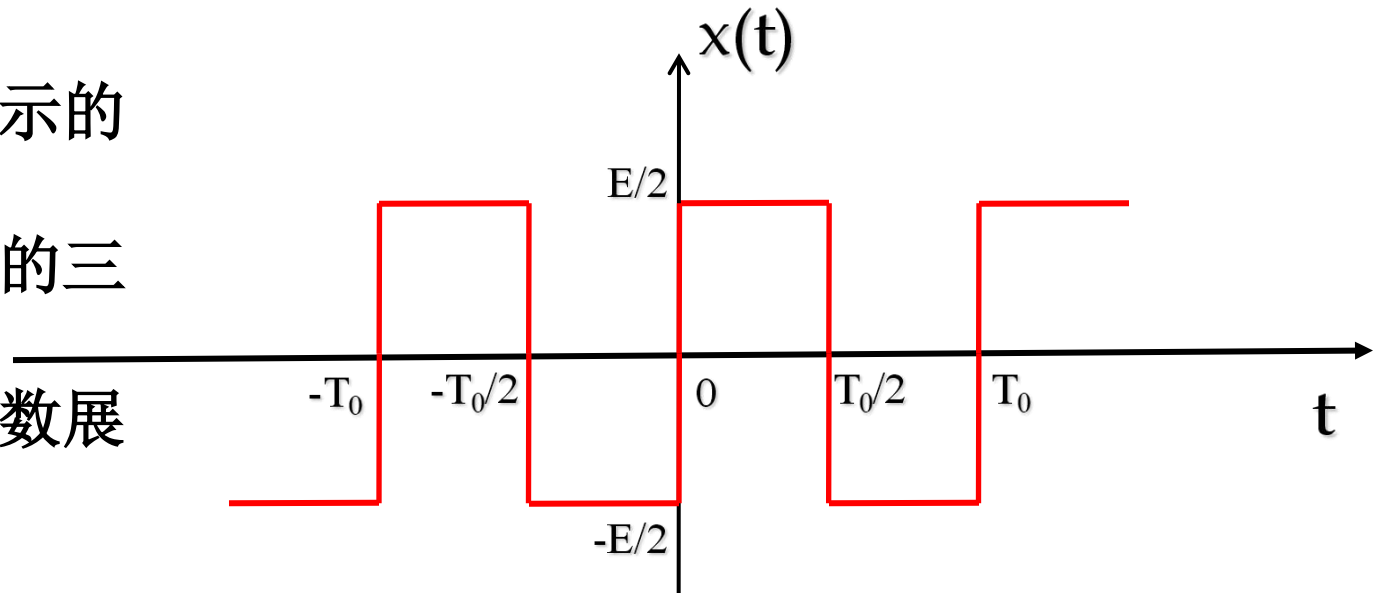


4个正弦波的逼近



100个正弦波的逼近

例：求如图所示的  
周期方波信号的三  
角形傅里叶级数展  
开式。



解：上图所示的周期方波信号在一个周期内的解析式可表示为

$$x(t) = \begin{cases} -E/2 & -T_0/2 \leq t < 0 \\ E/2 & 0 \leq t < T_0/2 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} -E/2 & -T_0/2 \leq t < 0 \\ E/2 & 0 \leq t < T_0/2 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

直流系数

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

余弦分量系数

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_1 t dt$$

傅里叶系数为:

正弦分量系数

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_1 t dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 \left(-\frac{E}{2}\right) \cos n\omega_0 t dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \left(\frac{E}{2}\right) \cos n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{T_0} \left(-\frac{E}{2}\right) \frac{1}{n\omega_0} [\sin n\omega_0 t] \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^0 + \frac{2}{T_0} \frac{E}{2} \frac{1}{n\omega_0} [\sin n\omega_0 t] \Big|_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n \omega_0 t dt \\
&= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 \left( -\frac{E}{2} \right) \sin n \omega_0 t dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \left( \frac{E}{2} \right) \sin n \omega_0 t dt \\
&= \frac{2}{T_0} \left( -\frac{E}{2} \right) \frac{1}{n \omega_0} [-\cos n \omega_0 t] \bigg|_{-\frac{T_0}{2}}^0 + \frac{2}{T_0} \frac{E}{2} \frac{1}{n \omega_0} [-\cos n \omega_0 t] \bigg|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{E}{n \pi} [1 - \cos(n \pi)] = \begin{cases} \frac{2E}{n \pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t),$$

$x(t)$  的三角形傅里叶级数展开式为

$$x(t) = \frac{2E}{\pi} (\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots)$$



与原信号频率相同



原信号频率的3倍

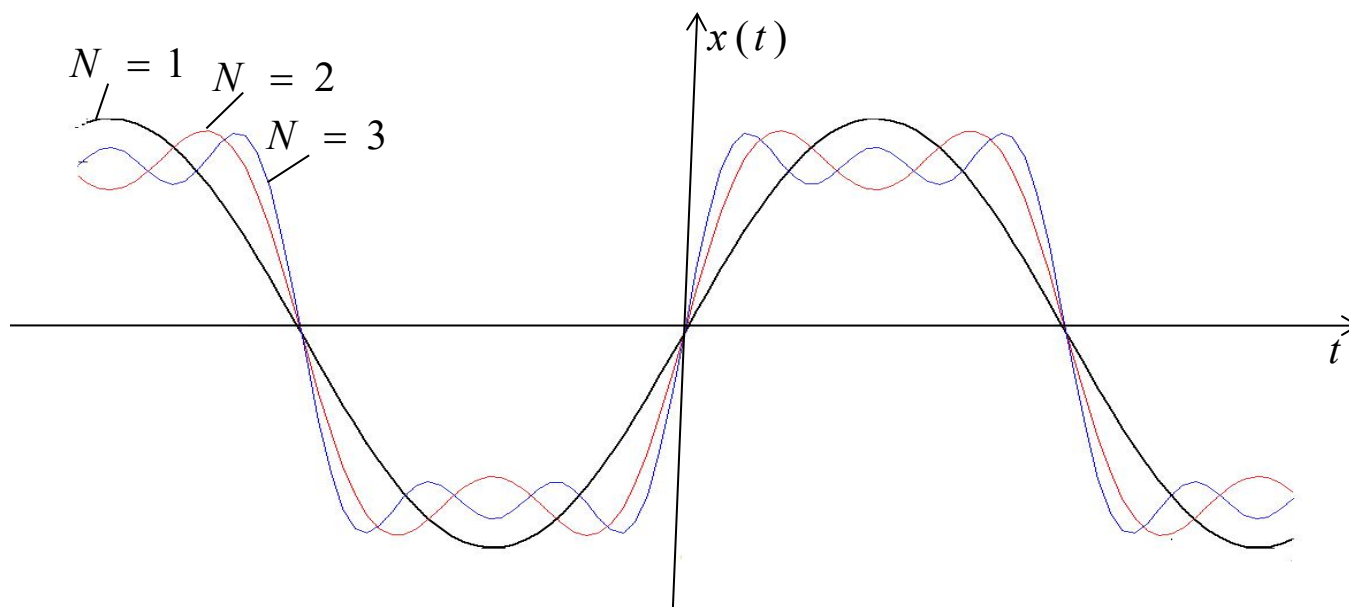


原信号频率的5倍

同时，幅值成比例地减小



$$x(t) = \frac{2E}{\pi} \left( \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_0 t + \cdots \right)$$



分析:

- (1) 傅里叶级数所取项数越多，叠加后波形越逼近原信号；
- (2) 当信号为方波等脉冲信号时，其高频分量主要影响脉冲的跳变沿，低频分量主要影响脉冲的顶部，所以  $x(t)$  波形变化愈激烈，所包含的高频分量愈丰富；变化愈缓慢，所包含的低频分量愈丰富；
- (3) 组成原信号的任一频谱分量（包括幅值、相位）发生变化时，信号的波形也会发生变化。

连续周期信号的频谱的特点有 [填空1] , [填空2] 和 [填空3]

作答

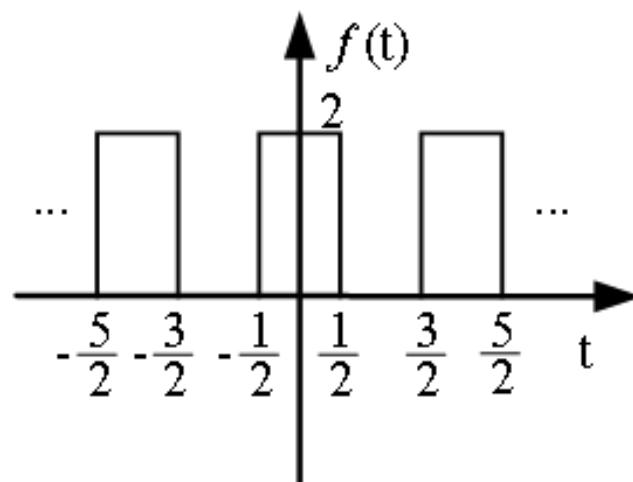
如图所示的周期信号，其傅里叶系数中 $X_0$ 为

A 0.5

B 1

C 0

D 2



提交