第六讲 波的衍射与干涉

01 惠更斯原理

02 波的衍射

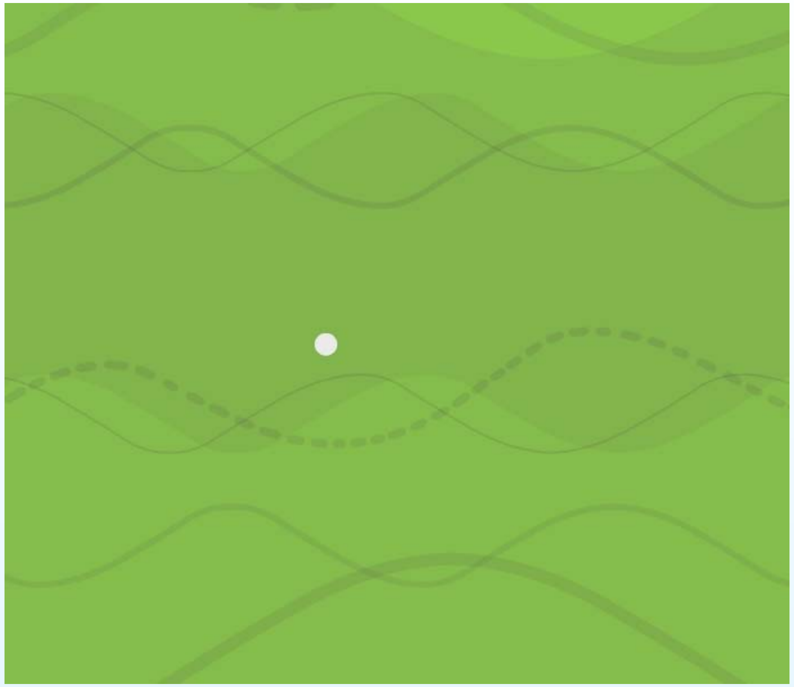
03 波的干涉

04 驻波

01 惠更斯原理

1678 年惠更斯提出

任一波面上各点都可以看作是发射子波的波源，子波源发出子波形成的包络面是下一时刻新的波面。



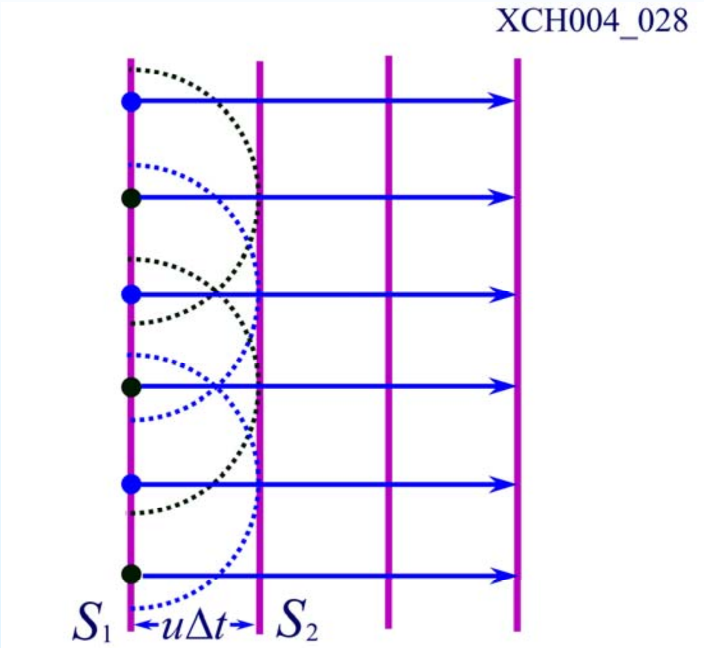
根据惠更斯原理可以确定波在任一时刻的波面和波的传播方向、反射波、折射波和波的衍射。

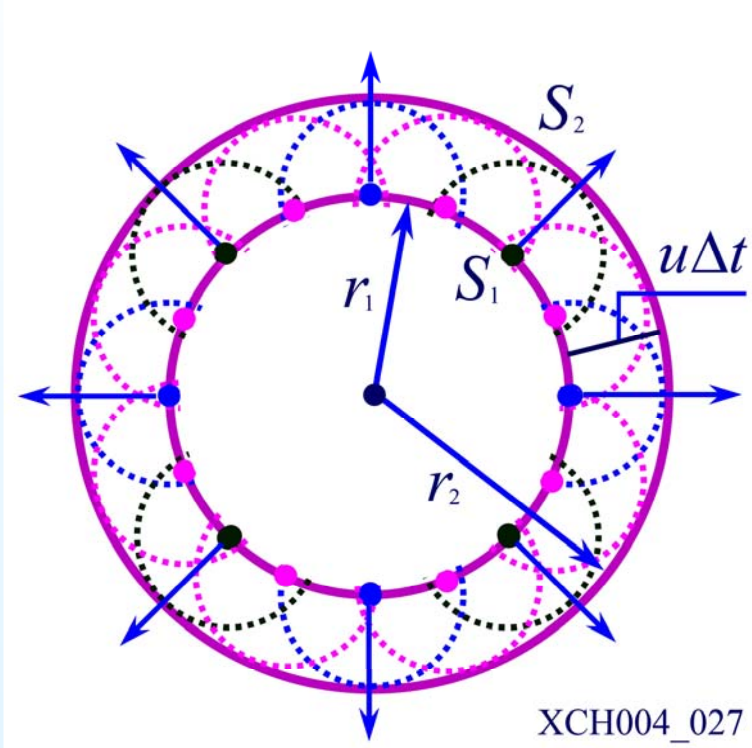
—— t时刻的波面S_1

波面上各子波源在时间Δt内发出半径为$u\Delta t$的子波

—— $t+\Delta t$时刻的波面S_2为所有这些子波的包络面

平面波



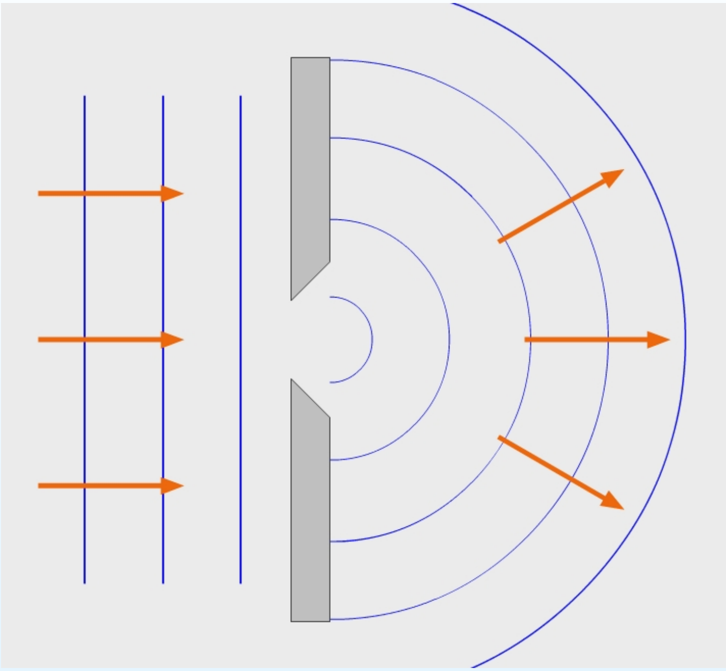


球面波

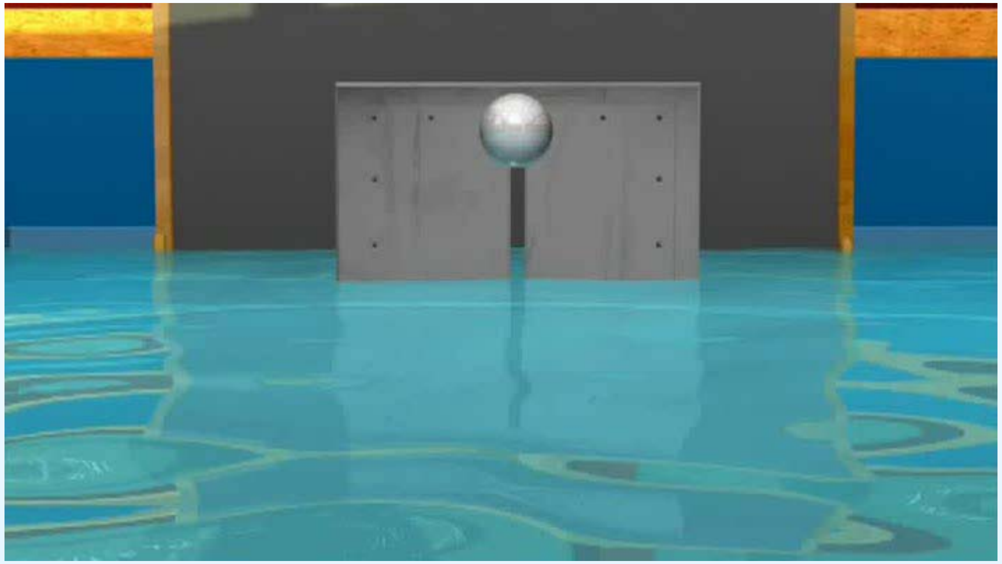
S_1和S_2面之间的距离 $\Delta r = u\Delta t$

02 波的衍射

衍射 —— 波在传播过程中通过障碍物偏离原来传播方向



平面波经过狭缝

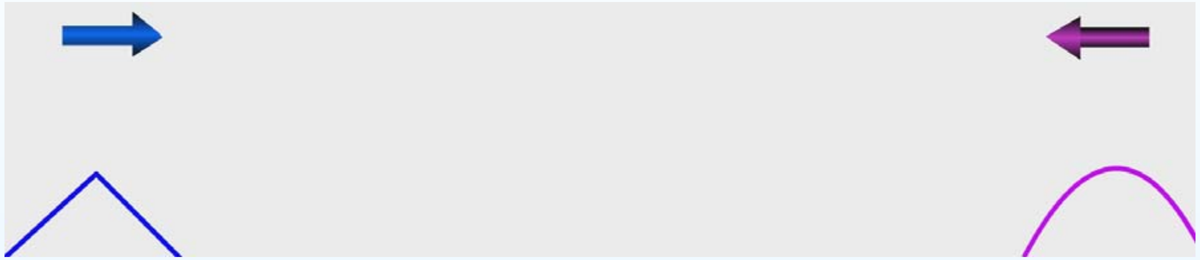


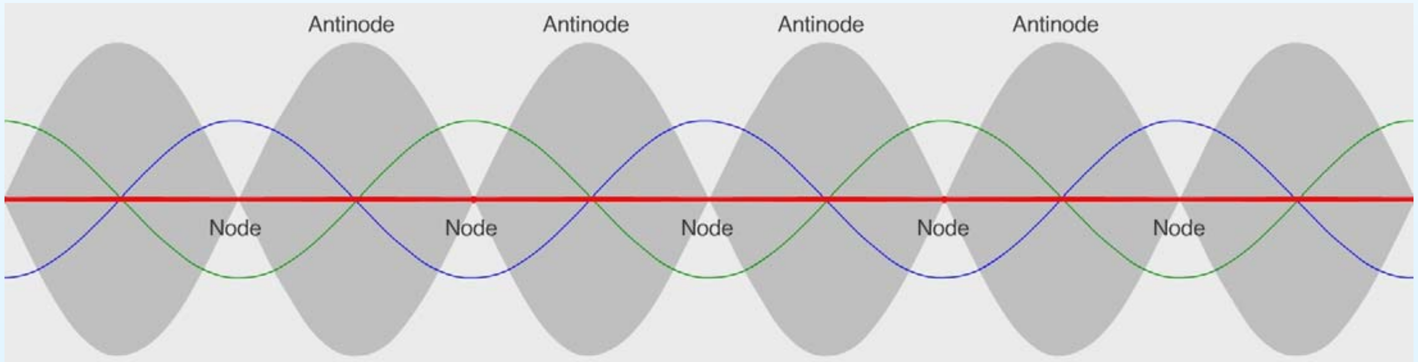
水面波经过狭缝

03 波的干涉

1 波的叠加原理 —— 几列波在相遇的区域合成

是各波单独存在时引起的位移矢量和

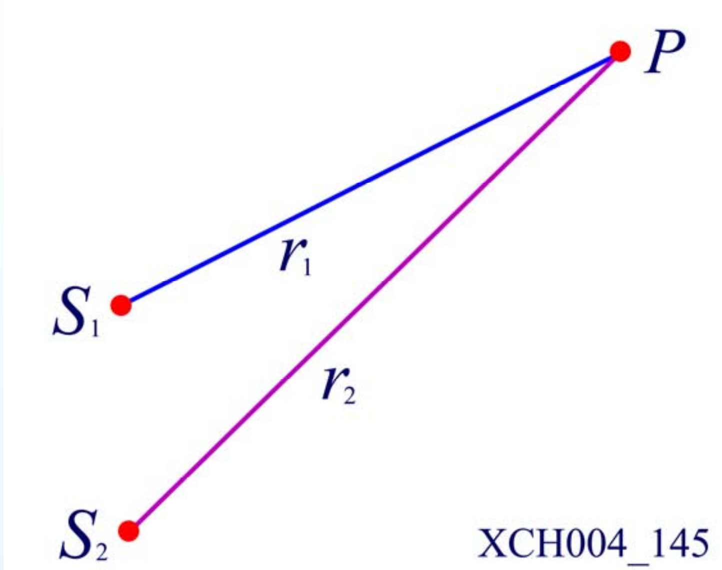




2 波的干涉

相干波 —— 两列波频率相同、振动方向一致、相差恒定

相干波源 —— 产生相干波的波源



波源 $\begin{cases} y_{10}(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y_{20}(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$

两波在*P*点引起的振动

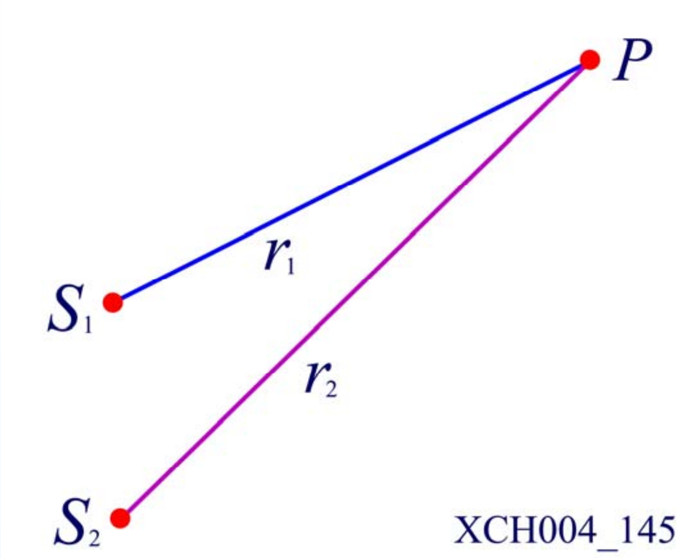
$$\begin{cases} y_1(r_1,t) = A_1\cos(\omega t - \boxed{2\pi\frac{r_1}{\lambda} + \varphi_1}) \\ y_2(r_2,t) = A_2\cos(\omega t - \boxed{2\pi\frac{r_2}{\lambda} + \varphi_2}) \end{cases}$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

P点合振动方程 $y = A\cos(\omega t + \varphi)$

合振动的振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$



$$\Delta\varphi = (\omega t - 2\pi\frac{r_2}{\lambda} + \varphi_2) - (\omega t - 2\pi\frac{r_1}{\lambda} + \varphi_1)$$

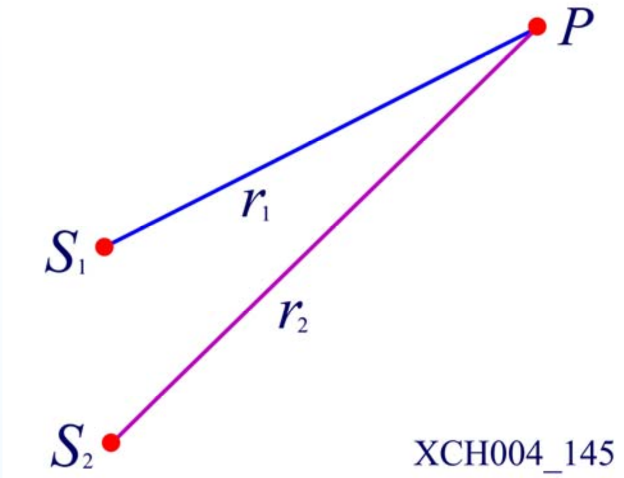
相差 $\boxed{\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}}$

强度 $I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

$$\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 u(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi)$$

$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$ —— 相差决定P点波的强度

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi \\ \Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} \end{cases}$$



☒ 给定的空间一点***P***

满足 $(\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi$

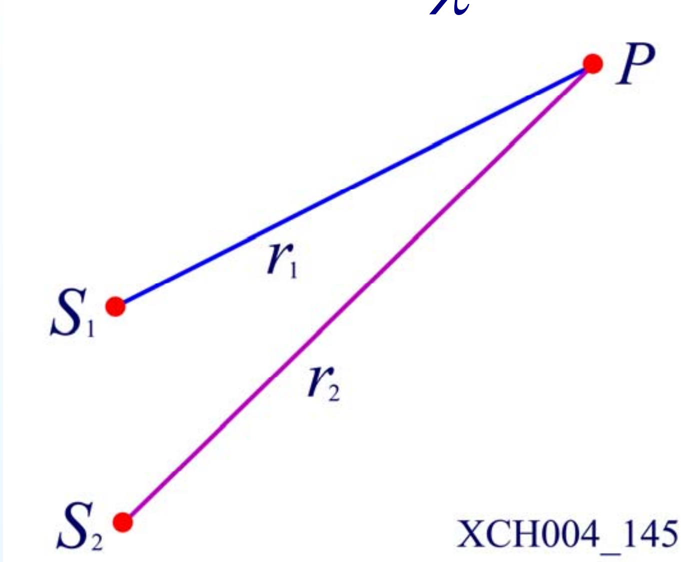
$$\begin{cases} A_{max} = A_1 + A_2 \\ I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \end{cases}$$

满足 $(\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm(2k+1)\pi$

$$\begin{cases} A_{min} = \left|A_1 - A_2\right| \\ I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \end{cases}$$

波程差

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} \xrightarrow{\varphi_2-\varphi_1=0} \Delta\varphi = 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$



波程差 $\delta = r_2 - r_1$

相差 $\Delta\varphi = 2\pi\dfrac{\delta}{\lambda}\begin{cases} = \pm 2k\pi \\ = \pm(2k+1)\pi \end{cases}$

如果

$\underline{\delta = \pm k\lambda}$ $\qquad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$

$\underline{\delta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}}$ $\qquad I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

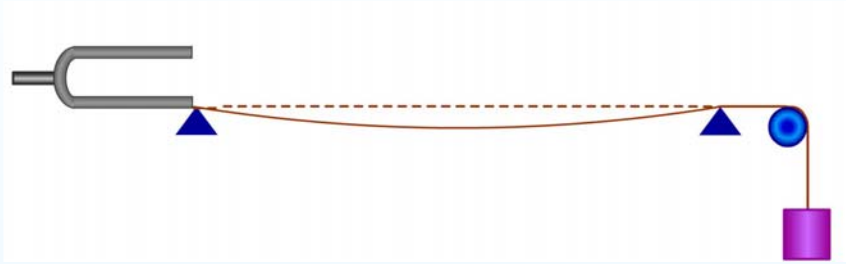
05 驻波

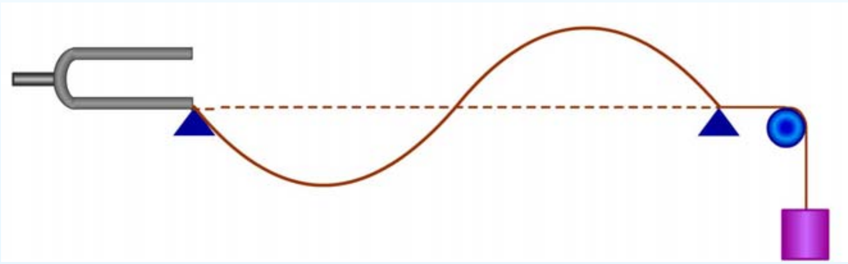
1 驻波实验 —— 一定长度的弦线，两端固定，

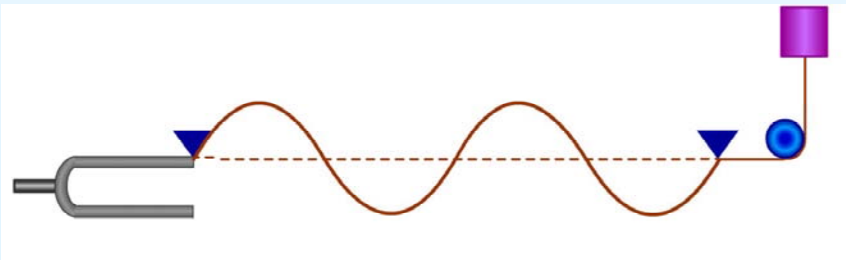
弦线上可以形成不同波长的波。

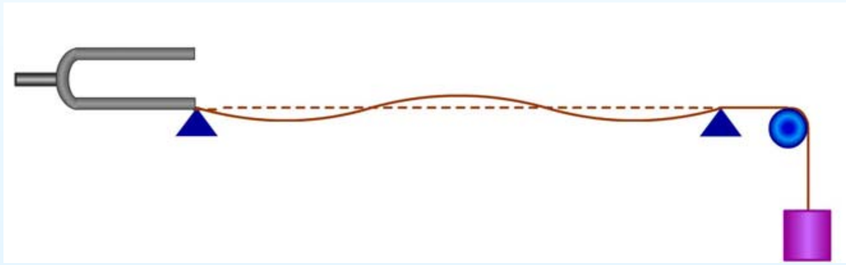
没有能量的传播！

没有振动状态的传播！







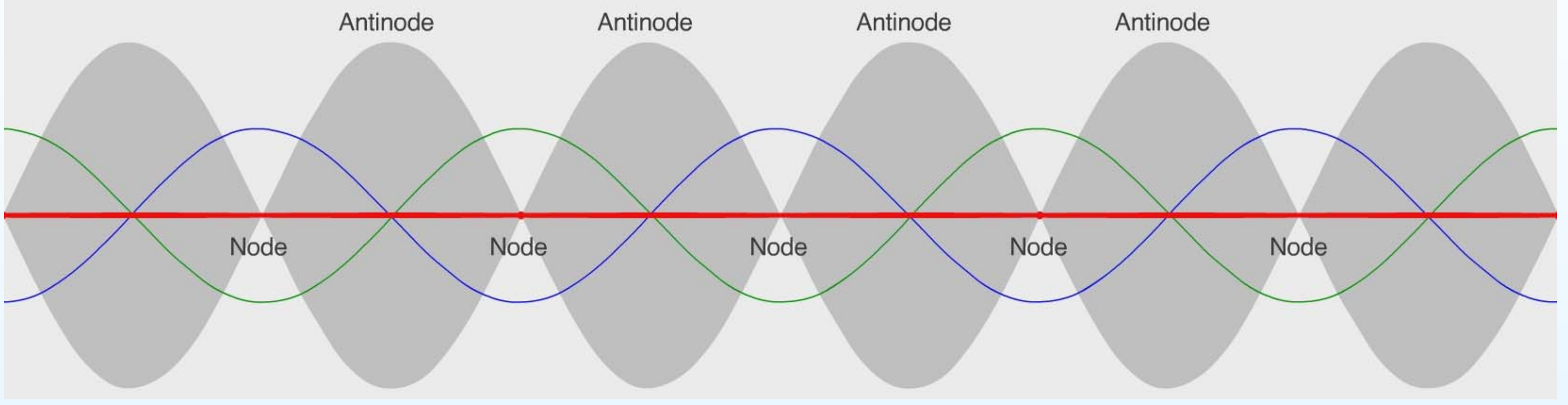


一些点始终静止不动！

一些点振动幅度最大！

驻波 —— 两列同类相干波：同频率、同振幅、振动一致

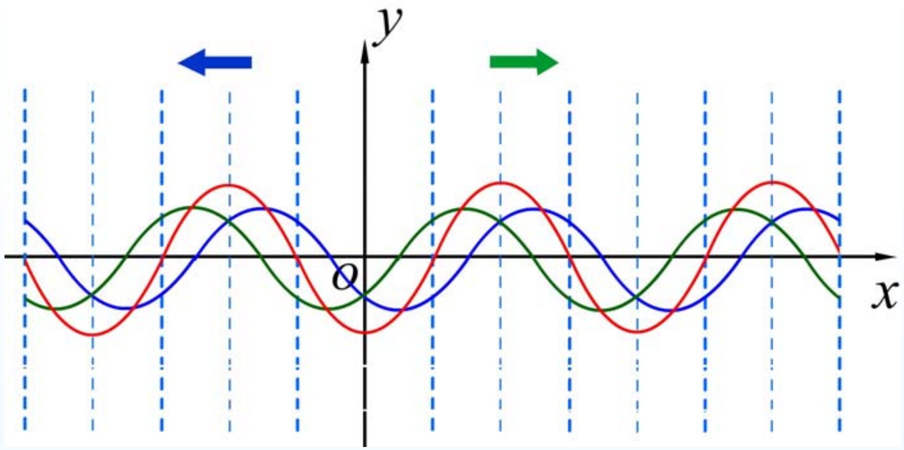
沿相反方向传播时叠加而成



波节 —— 静止不动的点　　波腹 —— 振动最强的点

2 驻波波函数

$$\begin{cases} y_1 = A\cos[2\pi(\nu t - \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_1] \\ y_2 = A\cos[2\pi(\nu t + \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_2] \end{cases}$$



$$y = y_1 + y_2$$

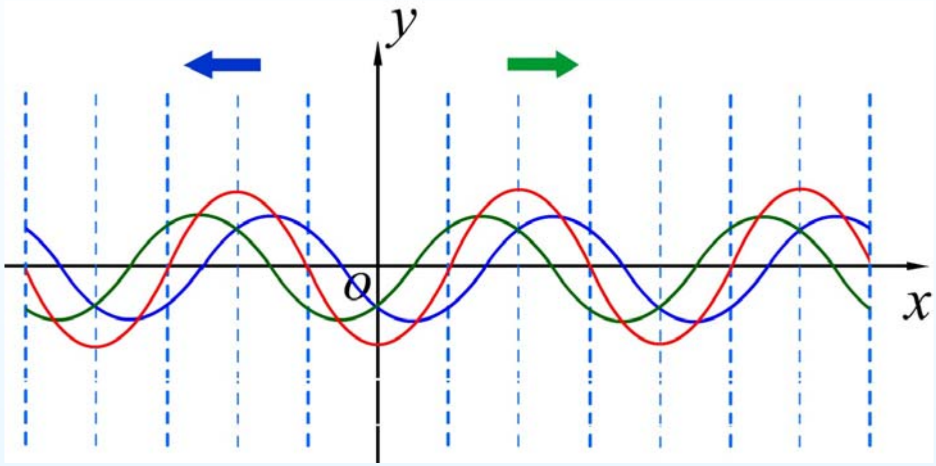
$$y = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_1] + A\cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) + \varphi_2]$$

应用三角公式 $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$$y = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})\cos(2\pi\nu t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})$$

3 驻波的特征

驻波波函数 $y = \underline{2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})}\cos(2\pi\nu t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2})$



对于给定一点 x_0

$$A_{合} = \left|2A\cos(2\pi\frac{x_0}{\lambda}+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})\right|$$

$$y = A_{合}\boxed{\cos(2\pi\nu t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2})}$$ —— 简谐振动

与质点的位置无关

振幅和质点的位置有关

1) 波腹和波节的位置

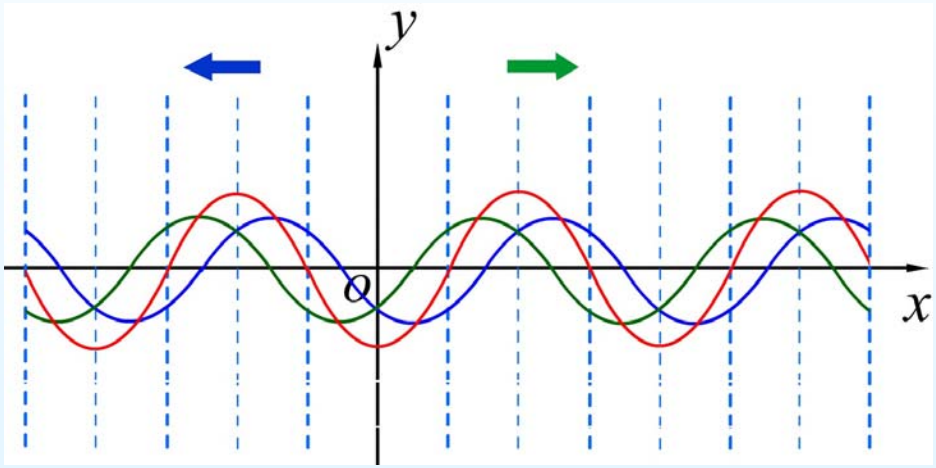
驻波振幅 $A_{合} = 2A\left|\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})\right|$ 如果 $\varphi_2-\varphi_1=0$

$$A_{合} = 2A\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$$

波节 $2\pi\frac{x}{\lambda}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$x=(2k+1)\frac{1}{4}\lambda$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$



波腹 $2\pi\frac{x}{\lambda}=k\pi$ $x=k\frac{\lambda}{2}$

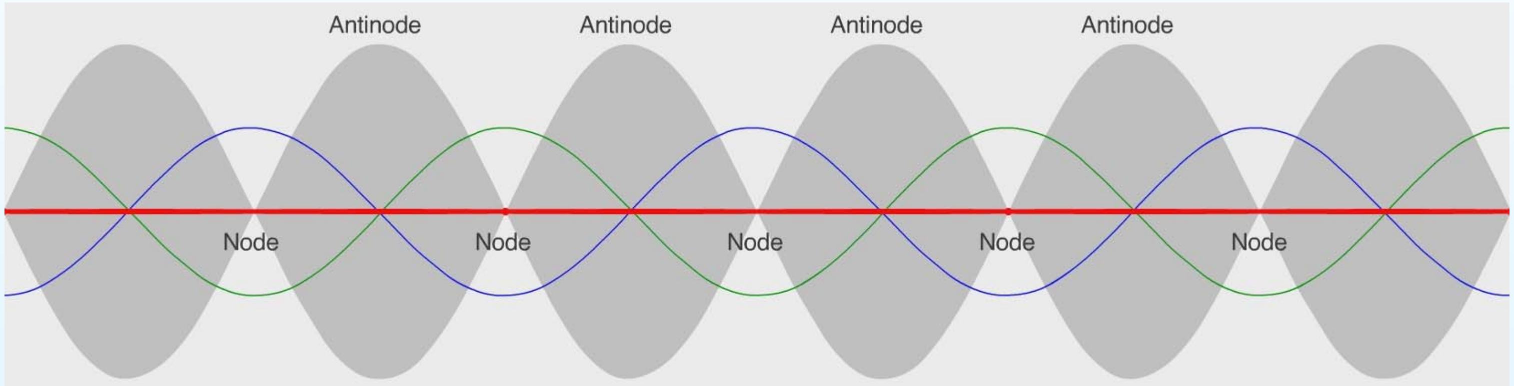
相邻两波腹(或波节)的距离 $x_{k+1}-x_k=\frac{\lambda}{2}$

2) 振动的相的关系

波函数 $y = \boxed{2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})}\cos(2\pi\nu t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})$

大小：
振动的振幅

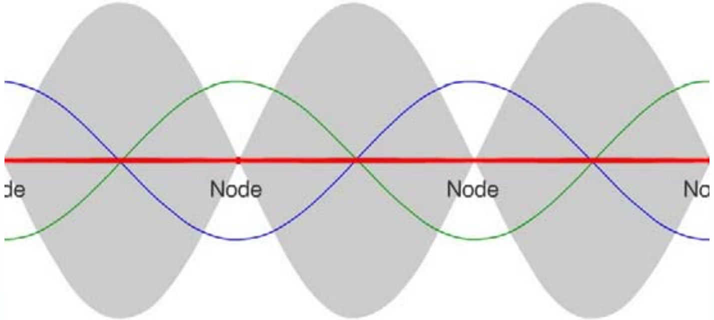
正负：
同相或反相振动

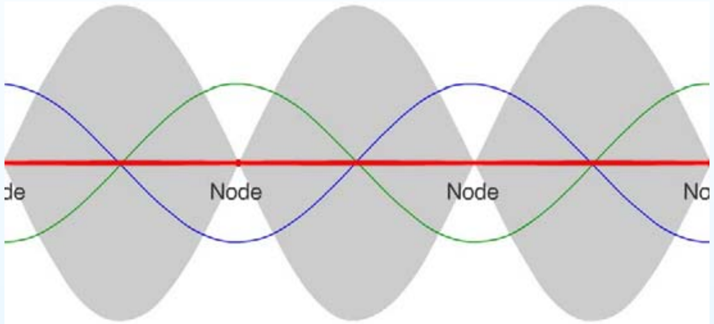


相邻两节点之间各点振动的相一致

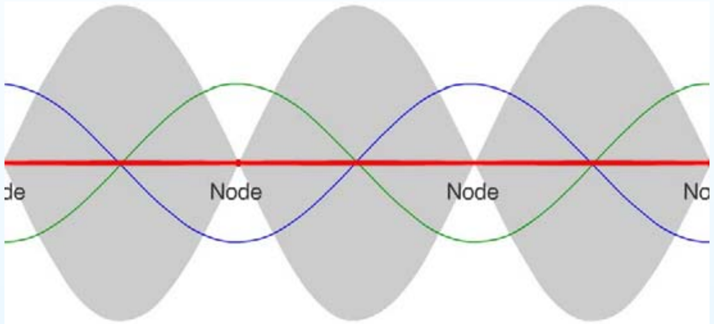
一个节点两侧各点振动的相相反

驻波相位图

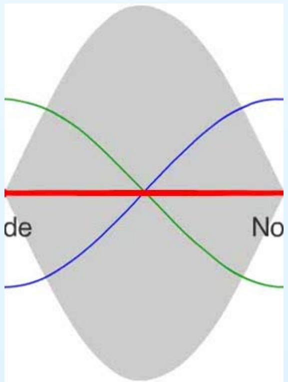




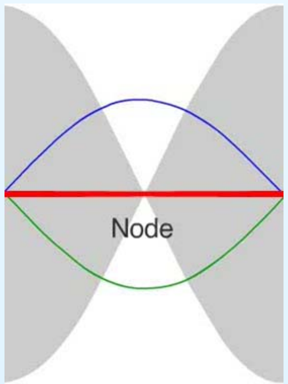
波腹



波节



波节之间

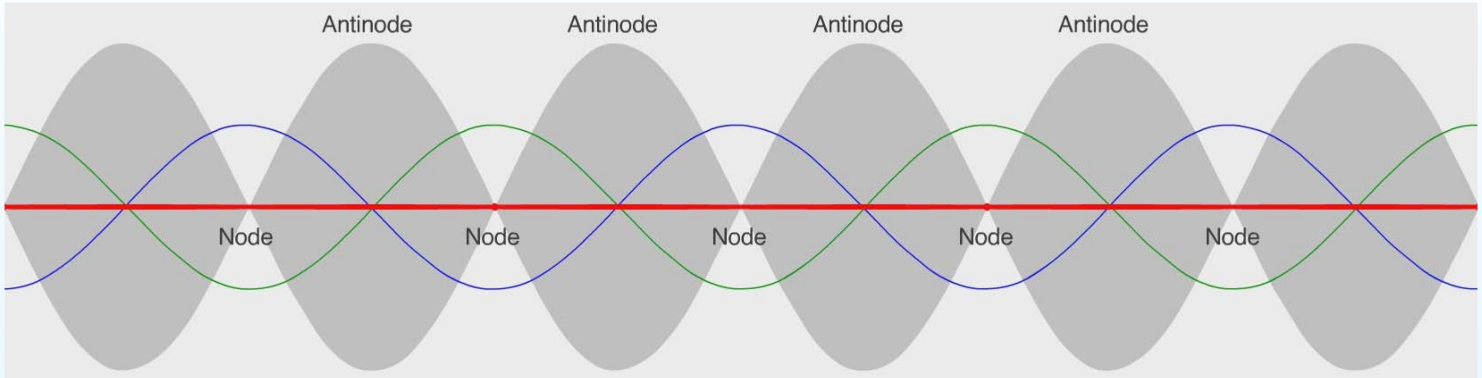


波节两侧

3) 驻波的能量

形成驻波时 —— 没有振动状态和能量的定向传播

正向波的能流密度 $I_1 = \varpi u = \dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

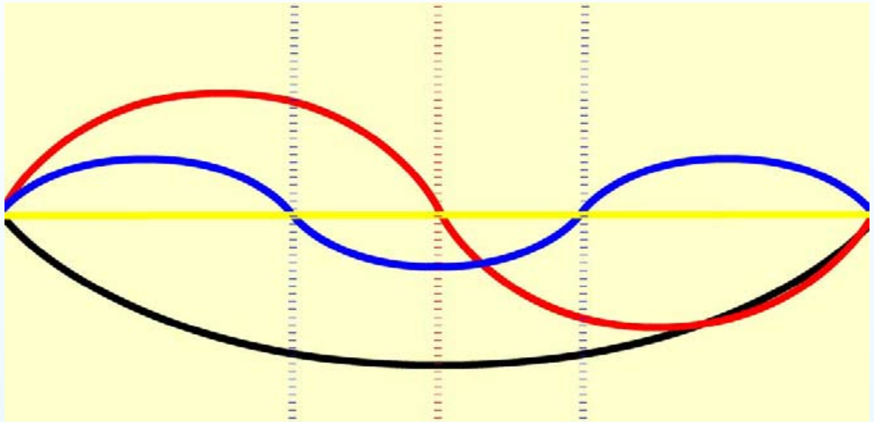


负向波的能流密度 $I_2 = \varpi(-u) = -\dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

驻波的能流密度 $I = I_1 + I_2 = 0$

4 半波损失

固定端点静止不动，入射波与反射波在该点的相差为 π



入射波

$$y_1 = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_1]$$

反射波

$$y_2 = A\cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) + \varphi_1 + \pi]$$

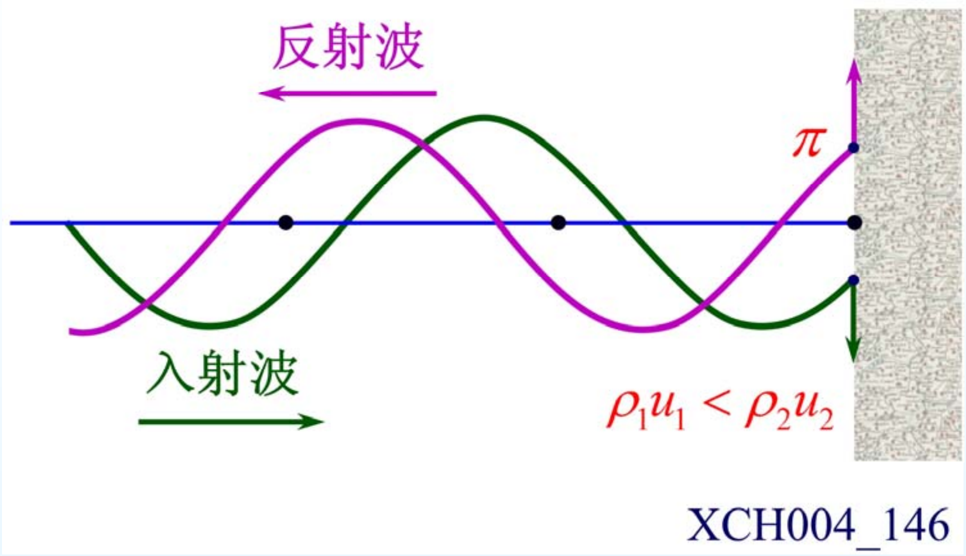
固定端点
- π 相变
- 半波损失

产生半波损失的条件

波从波疏介质(ρu小)

到波密介质(ρu大) 的界面

$$\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2$$



反射波和入射波之间发生π相变 —— 半波损失

将长度为L的弦线两端固定后拉紧

拨动弦线使其振动，形成的波将沿弦线传播

在固定端发生反射而在弦线上形成驻波

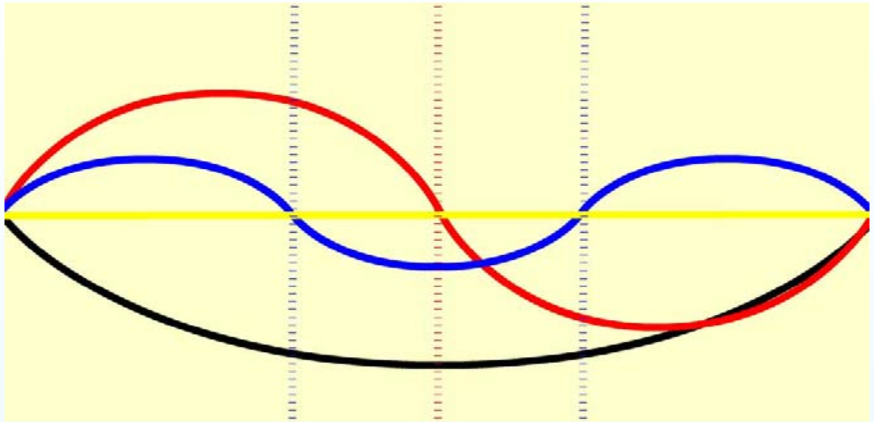
已知波在弦线中的传播速度 $u=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

ρ——质量线密度 T—— 弦线的张力

证明弦线只能作下列固有频率的振动 $\nu_n=\dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

☒ 相邻两波节的距离 $x_{k+1}-x_k=\dfrac{\lambda}{2}$

长度满足 $L=n\dfrac{\lambda}{2}$



驻波波长 $\lambda_n=\dfrac{2L}{n}$

振动频率 $\nu_n=\dfrac{u}{\lambda_n}$ $u=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

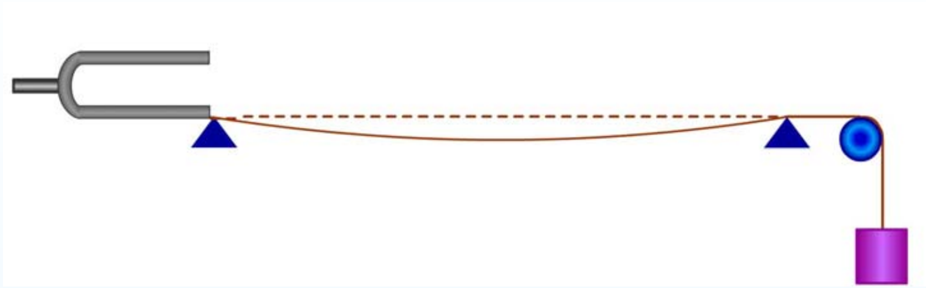
$$\nu_n=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$ ——振动本征频率

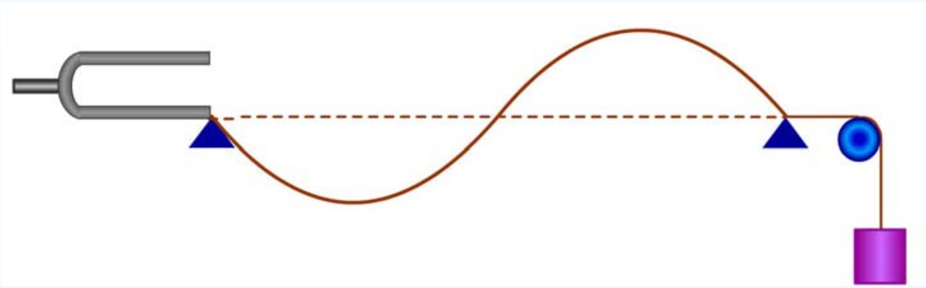
$$\nu_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$ —— 基频

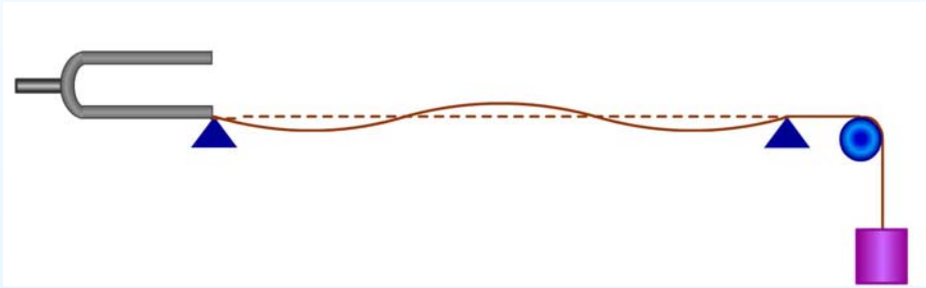
$$\nu_n = n\left(\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\right) \qquad n > 1$$

—— 谐频

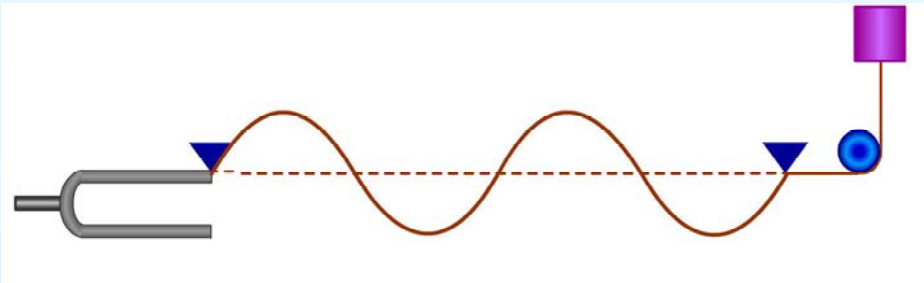




2 次谐频

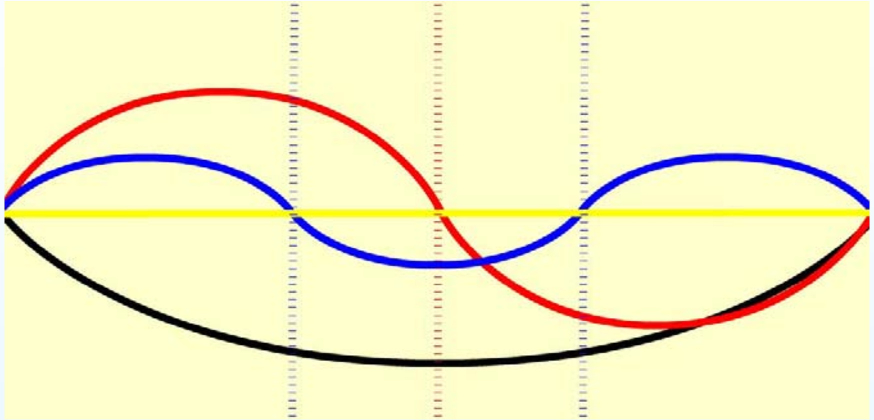


3 次谐频



4 次谐频

$$\nu_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$



驻波系统的振动 —— 各种频率的驻波叠加

基频决定音调, 谐频决定音色。

谐频成分越丰富, 声音悦耳动听 !

入射波的波函数$y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

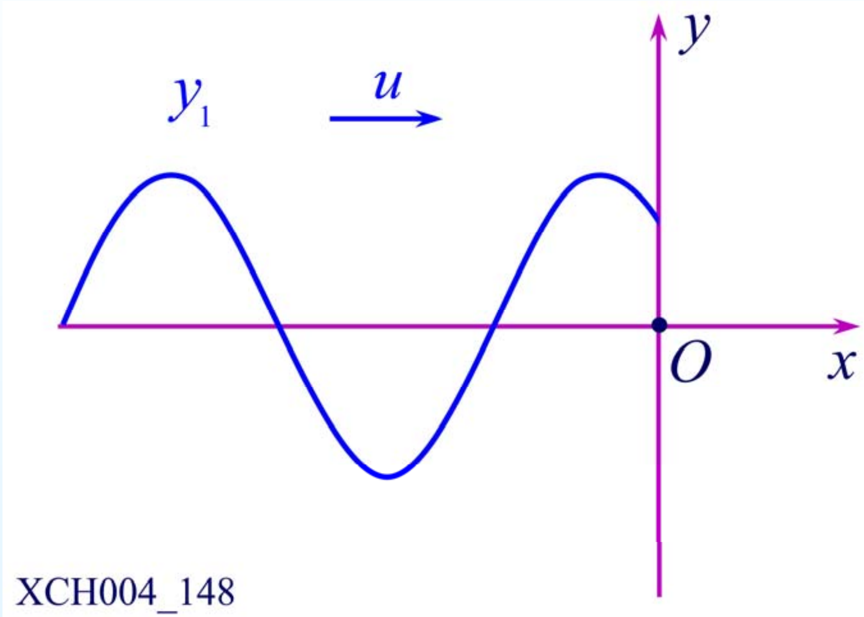
在x=0处发生反射，反射点为节点，求：

1) 反射波的波函数

2) 合成驻波的波函数

3) 各波腹和波节的位置

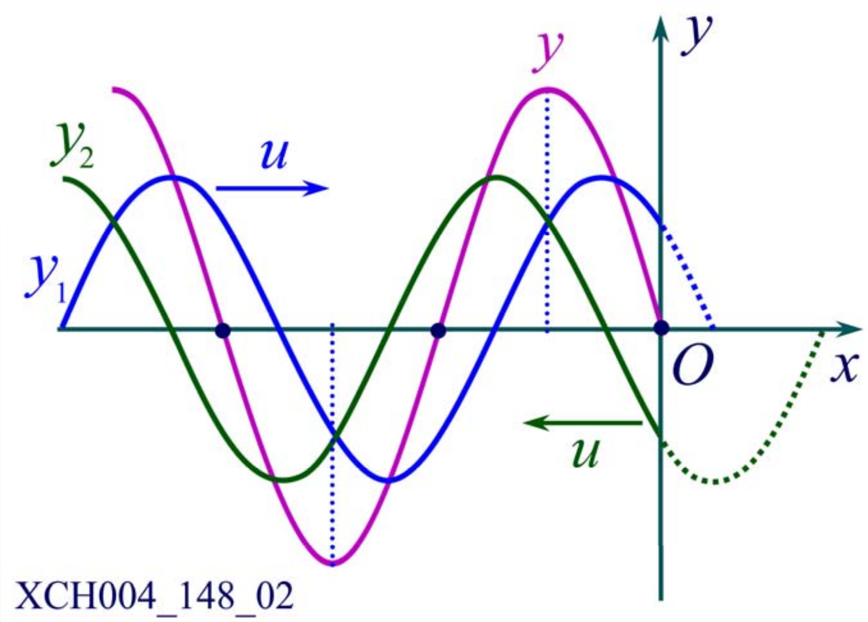
t时刻入射波的波形图



O点入射波的振动方程

$$y_{1O} = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{0}{\lambda}) = A\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

$$y_{1O} = A\cos 2\pi \frac{t}{T}$$



O点反射波的振动方程

$$y_{2O} = A\cos(2\pi \frac{t}{T} + \pi)$$

反射波的波函数

$$y_2 = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \pi]$$

——沿x轴负方向传播

驻波波函数 $y = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \pi]$

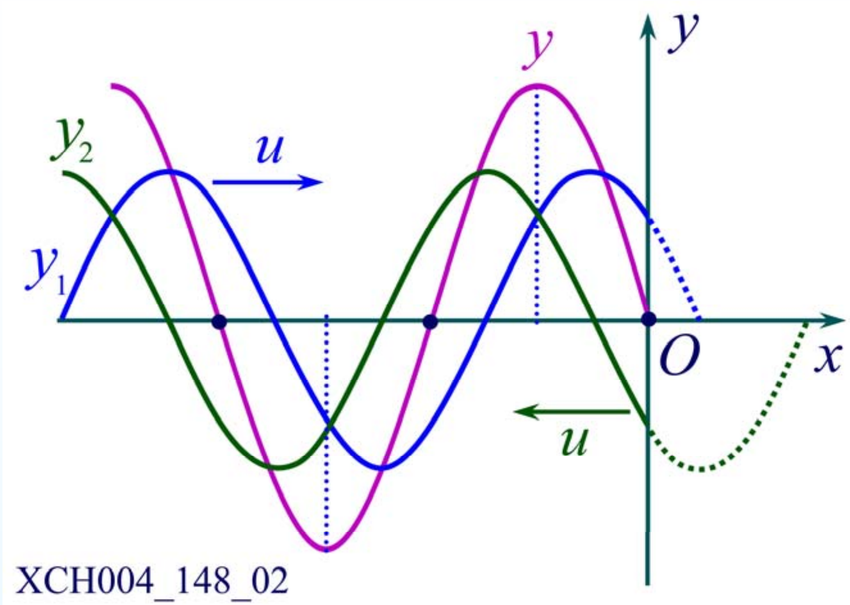
$$y = 2A\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$y = 2A\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

波节位置 $\quad 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm k\pi$

$$x = -k\frac{\lambda}{2}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots$$



—— 驻波只在原点左方空间形成

波腹位置 $\quad 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\qquad x = -(2k+1)\frac{\lambda}{4}$