

## 2021.11杭电线代期中试卷

### 填空题

1. 已知A为三阶方阵且 $|A|=2$ ,则 $|-2A^{-1}|$  =\_\_\_\_\_;

2. 设A是 $4 \times 4$ 矩阵, 且 $R(A)=3$ ,而 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$ ,则 $R(AB)$ =\_\_\_\_\_;

3. 若齐次线性方程组 
$$\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解, 则k应满足的条件为\_\_\_\_\_;

4. 已知行列式 
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
 是关于x的一次多项式, 则x的系数为\_\_\_\_\_;

5. 方阵A满足 $A^2 - 2A + E = 0$ ,则 $(A - 2E)^{-1}$ =\_\_\_\_\_;

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,则 $A^{-1}$ =\_\_\_\_\_;

## 选择题

1. 设A和B均为n阶方阵，以下等式成立的是（ ）

(A)  $|A+B|=|A|+|B|$

(B)  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

(C)  $|AB|=|BA|$

(D)  $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

2. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$  ,且 $R(A)=2$ ,则x等于( )

(A) 1

(B) -2

(C) -1

(D) 2

3. 若n阶方阵A可逆，则下列说法不正确的是( )

(A)  $|A| \neq 0$

(B) A为满秩矩阵

(C) A与n阶单位矩阵E等价

(D) 方程组 $AX=b$ 有无穷多解

4. 若非齐次线性方程组 $A_{5 \times 4}X = b$ 无解，且增广矩阵 $B=(A,b)$ 的秩等于4，则系数矩阵A的秩为( )

(A) 3

(B) 4

(C) 2

(D)5

5. 若矩阵A经过若干次初等列变换得到矩阵B，那么有( )

(A) 存在矩阵P，使得 $PA=B$

(B) 存在矩阵P，使得 $PB=A$

(C) 存在矩阵P，使得 $PB=A$

(D) 方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解

6. 设矩阵A的秩为r，则A中( )

(A) 所有r阶子式都不为0

(B) 所有r-1阶子式全为零

(C) 所有r+1阶子式全为零

(D) 所有r-1阶子式都不为零

### 计算题

1. 求四阶行列式 $D=$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

2. 设矩阵 $A=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 2 & 5 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 10 \end{pmatrix}, \text{且} R(A)=3, \text{求} \lambda \text{ 的值}$$

3. 化矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$  为行最简形矩阵

4. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  试求  $AB^T$

**解答题**

5. 设四阶行列式  $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ , 求  $A_{13} + A_{23} + A_{43}$ .

6. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 矩阵  $X$  满足  $AX + E = A^2 + X$ , 试求  $|X|$ .

7. 设矩阵  $X$  满足矩阵方程  $X = AX + B$ , 且  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ , 试求矩阵  $X$ .

8. 已知 $a$ 是常数，且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等变化化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，试求 $a$ 。

9. 
$$\begin{cases} -x + \lambda + 2z = 1 \\ x - y + \lambda z = 2 \\ -5x + 5y + 4z = -1 \end{cases}$$
 无解，有唯一解，或有无穷多解？并在有无穷多解时求出其通解。

10. 已知 $n$ 阶方阵 $A$ 的秩为 $n-1$ ，即 $R(A)=n-1$ ，试证明 $R(A^*) = 1$ ，其中 $A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵

2021.11杭电线代期中试卷参考答案

一，填空题

1, 4 2, 3      3,  $k=-3$       4, 2      5, -A      6, 
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

二，选择题

C      B      D      A      B      C

三，计算题

1,      297      2,  $\lambda \neq 3$   
3, 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
      4, 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

四，解答题

5,      -4

6,      9

7,      
$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8,       $a=2$

9,

(1)当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -4/5$ 时，方程组有唯一解

(2)当 $\lambda = -4/5$ 时，方程组无解

(3)当 $\lambda = 1$ 时，方程有无穷多解

10, 证明:  $AA^* = |A|E$

因为  $R(A) = n-1$ , 易得出  $|A| = 0$

由  $AA^* = |A|E$  得出  $AA^* = 0$

所以  $R(A) + R(A^*) \leq n$ , 而  $R(A) = n-1$ , 则  $R(A^*) \leq 1$

因为  $R(A) = n-1$ , 所以至少存在一个  $n-1$  矩阵不为零

$A^*$  中至少存在一个数不为零

所以  $R(A^*) \geq 1$

综上  $R(A^*) = 1$