1111作业详解

复习要点

- 重点掌握线性时不变系统的响应的频域分析法
  - ✓**深入理解无失真传输基本概念和系统的时频特性（单位冲激响应、频率响应特性、幅频特性和相频特性）**
  - ✓**重点掌握理想低通滤波器频域特性**（系统频率特性、**幅频特性和相频特性**）**和单位冲激响应**
- 重点掌握线性时不变系统的响应的复频域分析法
  - ✓**熟悉掌握利用拉普拉斯变换求解连续系统的全响应、零输入响应和零状态响应（主要利用了单边拉普拉斯变换的微分性质）**
  - ✓**熟悉掌握利用变换求解离散系统的全响应、零输入响应和零状态响应（主要利用了单边z变换的时移性质）**

PS：牢记 并熟练使用 **常用信号的拉普拉斯变换对、傅里叶变换对（FT，DTFT）、z变换对，几种变换的基本性质** 分析系统响应和系统特性

1111课后作业

- 第四章习题P258
- 14、15、16、18

例 如图 3-48a 所示为一原理性通信系统，$x(t)$为被传送信号，设其频谱 $X(\omega)$如图 3-48b 所示；$a_1(t)=a_2(t)=\cos\omega_0 t$，$\omega_0 >> \omega_b$，其中 $a_1(t)$为发送端的载波信号，$a_2(t)$为接收端的本地振荡信号。

（1）求解并画出信号 $y_1(t)$的频谱 $Y_1(\omega)$。

（2）求解并画出信号 $y_2(t)$的频谱 $Y_2(\omega)$。

（3）今欲使输出信号 $y(t)=x(t)$，求理想低通滤波器的传输函数 $H_I(\omega)$，并画出其频率特性。

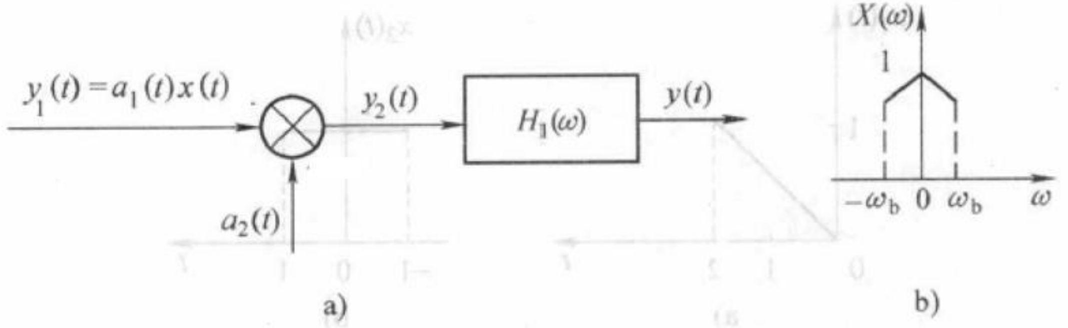


图 3-48

14. 已知滤波器的单位冲激响应 $h(t)=\dfrac{1}{\pi t}$，外加激励 $x(t)=\cos\omega_0 t$，$-\infty<t<\infty$。求滤波器的零状态响应 $y(t)$。

解：$\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{2}{j\omega}$

$F(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi f(-\omega)$ (对称性)

$\dfrac{2}{jt} \xleftrightarrow{F} 2\pi\,\mathrm{sgn}(-\omega)$

$\therefore \dfrac{1}{\pi t} \xleftrightarrow{F} j\,\mathrm{sgn}(-\omega)$

$x(t)=\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))$

$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))\cdot j\,\mathrm{sgn}(-\omega)$

$=\pi j(\delta(\omega+\omega_0)\mathrm{sgn}(-\omega)+\delta(\omega-\omega_0)\mathrm{sgn}(-\omega))$

$=\pi j(\delta(\omega+\omega_0)\mathrm{sgn}(\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\mathrm{sgn}(-\omega_0))$

$\omega_0>0$

$\therefore \mathrm{sgn}(\omega_0)=1$，$\mathrm{sgn}(-\omega_0)=-1$

$=\pi j(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))$

$Y(\omega) \xleftrightarrow{F^{-1}} y(t)=\sin\omega_0 t$

零状态响应 $y(t)=x(t)*h(t)=\sin\omega_0 t$，$-\infty<t<+\infty$

15. 理想低通滤波器的传输函数 $H(\omega)=G_{2\pi}(\omega)$，求输入为下列各信号时的响应 $y(t)$：

(1) $x(t)=\mathrm{Sa}(\pi t)$　　(2) $x(t)=\dfrac{\sin 4\pi t}{\pi t}$

解 ① $x(t)=Sa(\pi t)$

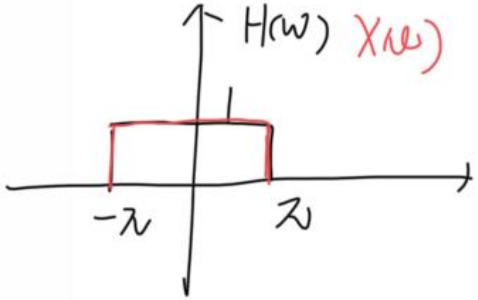
$g_\tau(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

$F(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi f(-\omega)$

$2\pi Sa(\pi t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi g_{2\pi}(-\omega)$

即 $Sa(\pi t) \longleftrightarrow g_{2\pi}(\omega)$

$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=g_{2\pi}(\omega)$



$\therefore y(t)=F^{-1}[Y(\omega)]=Sa(\pi t)$

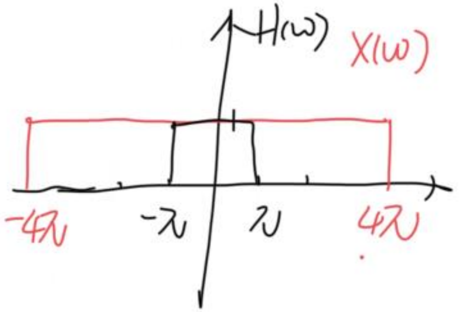
(2) $x(t)=\dfrac{\sin 4\pi t}{\pi t}$

② $x(t)=\dfrac{\sin 4\pi t}{\pi t}=4Sa(4\pi t)$

$4Sa(4\pi t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 4g_{8\pi}(\omega)$

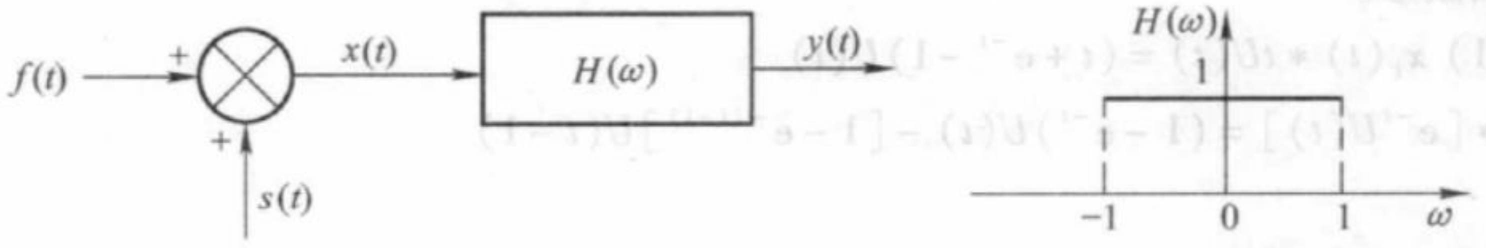
$H(\omega)=g_{2\pi}(\omega)$

$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=g_{2\pi}(\omega)$



$\therefore y(t)=F^{-1}(Y(\omega))=Sa(\pi t)$

16. 在图 3-45a 所示系统中，$H(\omega)$ 为理想低通滤波器，其频率特性如图 3-45b 所示，其中相频特性为 $\varphi(\omega)=0$。输入信号 $f(t)=f_0(t)\cos1000t$，$-\infty<t<\infty$，其中 $f_0(t)=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Sa}(t)$，另一输入信号 $s(t)=\cos1000t$，$-\infty<t<\infty$，求系统的零状态响应 $y(t)$。



b)

解：$x(t)=f(t)+s(t)=f_0(t)\cos1000t+\cos1000t$

$x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(\omega)$，$y(t)\overset{F}{\leftrightarrow}Y(\omega)$，$h(t)\overset{F}{\leftrightarrow}H(\omega)$

$y(t)=x(t)*h(t)\overset{F}{\leftrightarrow}Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$

$f(t)\overset{F}{\leftrightarrow}F(\omega)$，$s(t)\overset{F}{\leftrightarrow}S(\omega)$

$f_0(t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Sa}(t)\overset{F}{\leftrightarrow}g_2(\omega)$ $\quad f(t)=f_0(t)\cos1000t$

$g_2(t)\leftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\frac{\omega 2}{2})$

$2\mathrm{Sa}(t)\leftrightarrow 2\pi g_2(\omega)$

即 $\frac{1}{\pi}\mathrm{Sa}(t)\leftrightarrow g_2(\omega)$

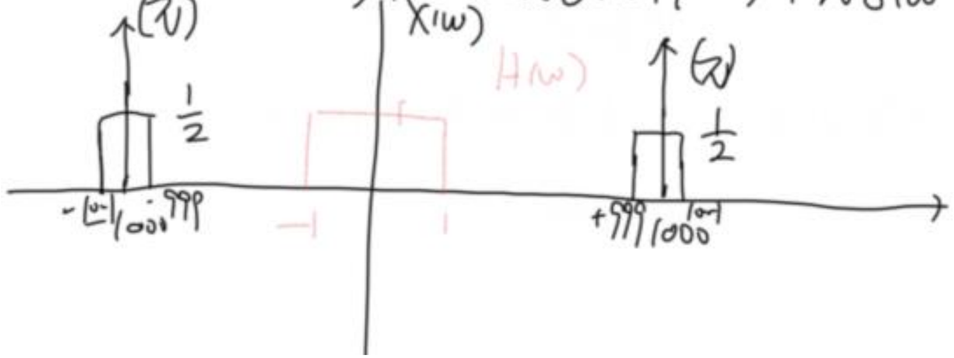
$\cos1000t\leftrightarrow\pi[\delta(\omega+1000)+\delta(\omega-1000)]$

$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}g_2(\omega)*\pi[\delta(\omega+1000)+\delta(\omega-1000)]$

$=\frac{1}{2}g_2(\omega+1000)+\frac{1}{2}g_2(\omega-1000)$

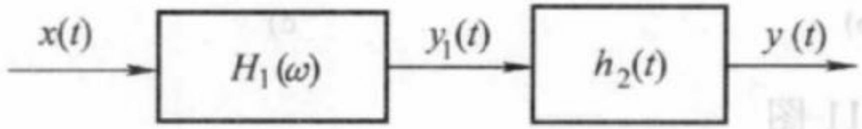
$X(\omega)=F(\omega)+S(\omega)=\frac{1}{2}g_2(\omega+1000)+\frac{1}{2}g_2(\omega-1000)$

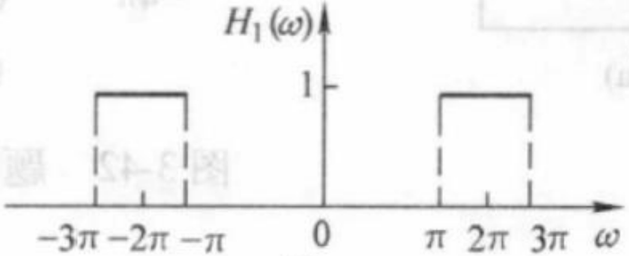
$+\pi\delta(\omega+1000)+\pi\delta(\omega-1000)$



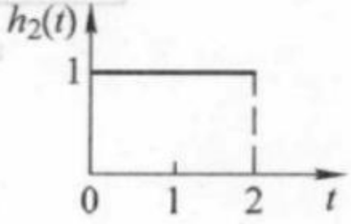
$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=0\overset{F^{-1}}{\leftrightarrow}y(t)=0$

18. 在图 3-47a 所示系统中，已知 $H_1(\omega)$ 如图 3-47b 所示；$h_2(t)$ 的波形如图 3-47c 所示；输入信号为 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$，$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$。求系统的零状态响应 $y(t)$。





b)



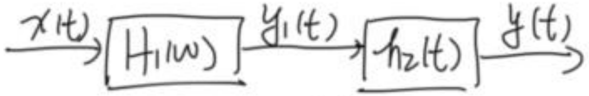
c)

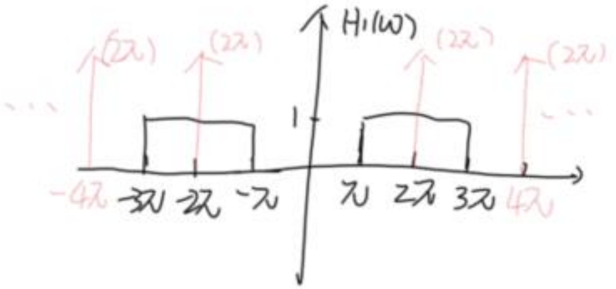
18. $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n)$

$\updownarrow F$

$X(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi n)$

$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)\xleftrightarrow{F}\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0),\ \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

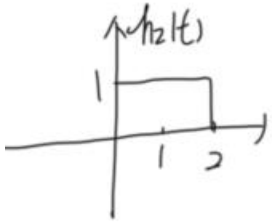




$2\cos 2\pi t$

$\updownarrow F^{-1}$

$\therefore Y_1(\omega)=X(\omega)H_1(\omega)=2\pi\delta(\omega-2\pi)+2\pi\delta(\omega+2\pi)$



$h_2(t)=g_2(t-1)\xleftrightarrow{F}H_2(\omega)=2Sa(\omega)e^{-j\omega}$

$g_2(t)\xleftrightarrow{F}2Sa(\omega)$

$\therefore Y(\omega)=Y_1(\omega)H(\omega)=[2\pi\delta(\omega-2\pi)+2\pi\delta(\omega+2\pi)]\cdot 2Sa(\omega)e^{-j\omega}$

$=4\pi Sa(\omega)e^{-j\omega}\delta(\omega-2\pi)+4\pi Sa(\omega)e^{-j\omega}\delta(\omega+2\pi)$

$=4\pi Sa(2\pi)e^{-j2\pi}\delta(\omega-2\pi)+4\pi Sa(-2\pi)e^{j2\pi}\delta(\omega+2\pi)$

$=0\xleftrightarrow{F^{-1}}y(t)=0$

$y(t)=g_2(t-1)*2\cos 2\pi t=\int_1^2 2\cos 2\pi t\,dt$

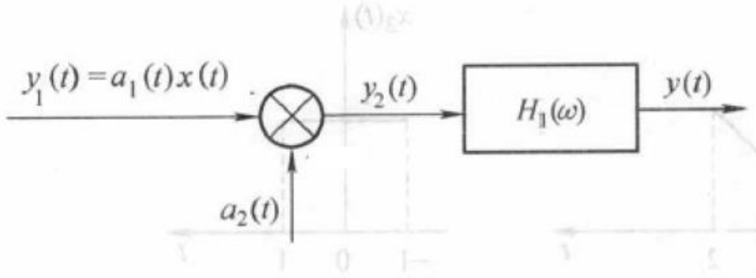
$=0$

例 如图 3-48a 所示为一原理性通信系统，$x(t)$ 为被传送信号，设其频谱 $X(\omega)$ 如图 3-48b 所示；$a_1(t) = a_2(t) = \cos\omega_0 t$，$\omega_0 >> \omega_b$，其中 $a_1(t)$ 为发送端的载波信号，$a_2(t)$ 为接收端的本地振荡信号。

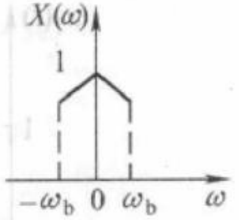
（1）求解并画出信号 $y_1(t)$ 的频谱 $Y_1(\omega)$。

（2）求解并画出信号 $y_2(t)$ 的频谱 $Y_2(\omega)$。

（3）今欲使输出信号 $y(t) = x(t)$，求理想低通滤波器的传输函数 $H_I(\omega)$，并画出其频率特性。



a)



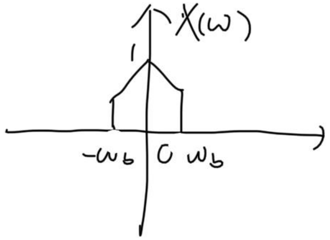
b)

(1) 设 $y_1(t) \xleftrightarrow{F} Y_1(\omega)$, $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

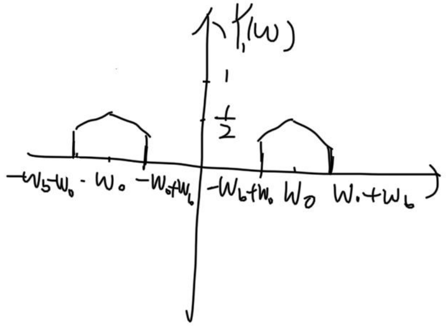
$y_1(t) = a_1(t)x(t) = x(t)\cos\omega_0 t \quad (\omega_0 >> \omega_b)$

$a_1(t) \xleftrightarrow{F} A_1(\omega) = \pi(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0))$

$Y_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * A_1(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0) + X(\omega-\omega_0)]$



∴



$Y_1(\omega)$ 为 $X(\omega)$ 向左向右平移 ω_0 个单位，幅度变为原来的一半

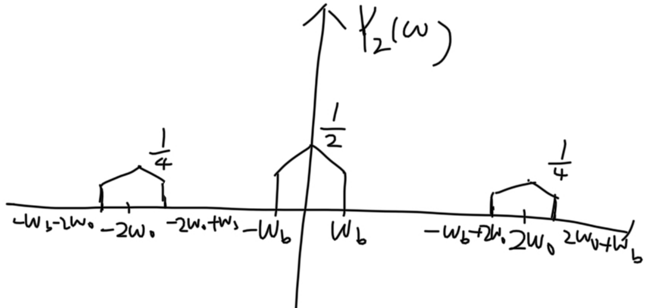
(2) 设 $y_2(t) \xleftrightarrow{F} Y_2(\omega)$, $a_2(t) \xleftrightarrow{F} A_2(\omega)$

$y_2(t) = a_2(t)y_1(t) = y_1(t)\cos\omega_0 t$

$Y_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * [\pi(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$

$= \frac{1}{2}[Y_1(\omega+\omega_0) + Y_1(\omega-\omega_0)]$

$= \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{4}X(\omega+2\omega_0) + \frac{1}{4}X(\omega-2\omega_0)$

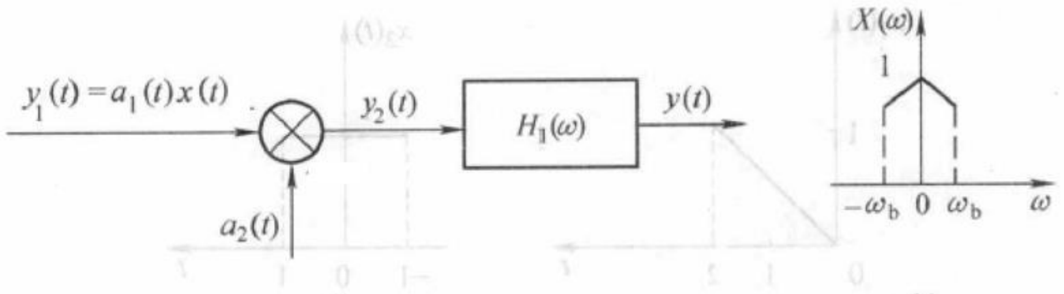


例 如图 3-48a 所示为一原理性通信系统，$x(t)$ 为被传送信号，设其频谱 $X(\omega)$ 如图 3-48b 所示；$a_1(t) = a_2(t) = \cos\omega_0 t$，$\omega_0 >> \omega_b$，其中 $a_1(t)$ 为发送端的载波信号，$a_2(t)$ 为接收端的本地振荡信号。

（1）求解并画出信号 $y_1(t)$ 的频谱 $Y_1(\omega)$。

（2）求解并画出信号 $y_2(t)$ 的频谱 $Y_2(\omega)$。

（3）今欲使输出信号 $y(t) = x(t)$，求理想低通滤波器的传输函数 $H_l(\omega)$，并画出其频率特性。



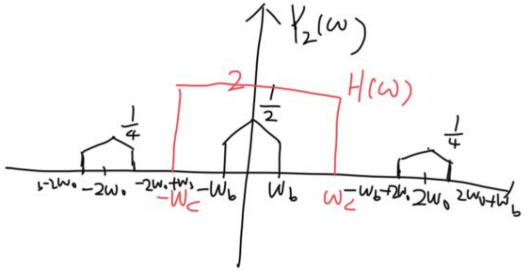
a)　　b)

(3) 如果要求 $y(t) = x(t)$，即 $Y(\omega) = X(\omega)$

由图得

$Y(\omega) = Y_2(\omega) H_1(\omega)$

∴



$$\begin{cases} |H(\omega)| = 2, & |\omega| < \omega_c \\ \varphi(\omega) = 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$\omega_b \leq \omega_c \leq -\omega_b + 2\omega_0$

∴ $H_1(\omega) = 2$，$|\omega| < \omega_c$，其中 $\omega_b \leq \omega_c \leq -\omega_b + 2\omega_0$

4.4 已知 LTI 因果系统微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+3f(t)$。求在下列两种情况下系统的全响应。

(1) $f(t)=U(t)$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=2$； (2) $f(t)=e^{-3t}U(t)$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=2$

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，$y(t) \leftrightarrow Y(s)$

方程两边作拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+3[sY(s)-y(0)]+2Y(s)=sF(s)+3F(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}F(s)+\frac{sy(0)+y'(0)+3y(0)}{s^2+3s+2}$$

$$=Y_{zs}(s)+Y_{zi}(s)$$

(2) $f(t)=e^{-3t}u(t) \leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s+3}$

$$\therefore Y_{zs}(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s+3}=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

$$\therefore y_{zs}(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{sy(0)+y'(0)+3y(0)}{s^2+3s+2}=\frac{s+5}{s^2+3s+2}=\frac{4}{s+1}+\frac{-3}{s+2}$$

$$\therefore y_{zi}(t)=4e^{-t}u(t)-3e^{-2t}u(t)$$

$$\therefore 全响应\ y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=3e^{-t}u(t)-4e^{-2t}u(t)$$

(1) $f(t)=u(t) \leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}$

$$Y_{zs}(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{\frac{3}{2}}{s}+\frac{-2}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$\therefore y_{zs}(t)=\frac{1}{2}u(t)-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{sy(0)+y'(0)+3y(0)}{s^2+3s+2}=\frac{s+5}{s^2+3s+2}=\frac{4}{s+1}+\frac{-3}{s+2}$$

$$\therefore y_{zi}(t)=4e^{-t}u(t)-3e^{-2t}u(t)$$

$$\therefore 全响应\ y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=\frac{1}{2}u(t)+\frac{7}{2}e^{-t}u(t)-\frac{5}{2}e^{-2t}u(t)$$