§2　全排列和对换

问题　把 n 个不同的元素排成一列，共有多少种不同的排法？

定义　把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列．n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

显然　$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1 = n!$

即 n 个不同的元素一共有 $n!$ 种不同的排法.

引例　用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解

3个不同的元素一共有3! =6种不同的排法

123，132，213，231，312，321

所有6种不同的排法中，只有一种排法（123）中的数字是按从小到大的自然顺序排列的，而其他排列中都有大的数排在小的数之前.

因此大部分的排列都不是“顺序”，而是“逆序”.

对于n 个不同的元素，可规定各元素之间的标准次序.

n 个不同的自然数，规定从小到大为标准次序.

定义　当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称这两个元素组成一个逆序.

例如　在排列32514中，

逆序

3　2　5　1　4

逆序　　逆序

思考题：还能找到其它逆序吗？

答：2和1，3和1也构成逆序.

定义 排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数通常记为 $t(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

奇排列：逆序数为奇数的排列.

偶排列：逆序数为偶数的排列.

思考题：符合标准次序的排列是奇排列还是偶排列？

答：符合标准次序的排列（例如：123）的逆序数等于零，因而是偶排列.

[redacted]

设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 1, 2, …, n 这 n 个自然数的任一排列，

并规定由小到大为标准次序.

先看有多少个比 p_1 大的数排在 p_1 前面，记为 t_1；

再看有多少个比 p_2 大的数排在 p_2 前面，记为 t_2；

……

最后看有多少个比 p_n 大的数排在 p_n 前面，记为 t_n；

则此排列的逆序数为 $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$

例4：　求排列 32514 的逆序数.

解：　$t(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$

练习：　求排列 453162 的逆序数.

解：　$t = 9$

二、对换

定义 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换.

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b_1 \cdots b_m\ b\ c_1 \cdots c_n$$

$$a_1 \cdots a_l\ b\ b_1 \cdots b_m\ a\ c_1 \cdots c_n$$

例如 对排列21354施以对换(1,4)后得到排列24351.

- 将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m$$

$$\downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l\ b\ a\ b_1 \cdots b_m$$

说明

1. 相邻对换是对换的特殊情形.

2. 一般的对换可以通过一系列的相邻对换来实现.

3. 如果连续施行两次相同的对换，那么排列就还原了.

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b_1 \cdots b_m b \; c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \; b \; b_1 \cdots b_m a \; c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \; a \; b_1 \cdots b_m b \; c_1 \cdots c_n$$

对换与排列奇偶性的关系

定理1　对换改变排列的奇偶性.

证明　先考虑相邻对换的情形.

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$t = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + t_a + t_b + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}}$$

$$a_1 \cdots a_l \quad a \quad b \quad b_1 \cdots b_m$$

$$a_1 \cdots a_l \quad b \quad a \quad b_1 \cdots b_m$$

$$r = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + r_b + r_a + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}}$$

注意到除 a,b 外，其它元素的逆序数不改变.

$$t = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + t_a + t_b + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$r = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + r_b + r_a + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

当 $a<b$ 时，$r_a = t_a + 1$ ，$r_b = t_b$ ，$r = t+1$.

当 $a>b$ 时，$r_a = t_a$ ，$r_b = t_b - 1$ ，$r = t-1$.

因此相邻对换改变排列的奇偶性.

既然相邻对换改变排列的奇偶性，那么

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b_1 \cdots b_m\ b\ c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{2m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\ b\ b_1 \cdots b_m\ a\ c_1 \cdots c_n$$

因此，一个排列中的任意两个元素对换，排列的奇偶性改变.

推论　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，

偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证明　由定理1知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为零)，因此可知推论成立.