杭州电子科技大学学生期终考试（A）卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2023 年 06 月 日		成绩	
课程号	A0714202	任课教师姓名				
考生姓名		学号（8 位）		专业		

题号	一（24 分）1-4	二（12 分）5-12	三（24 分）13-16	四（28 分）17-20	五（8 分）21	六（4 分）22
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，考试时间 120 分钟

得分	

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1.过x轴与点$(1,1,1)$的平面方程为（ A ）.

A. $y-z=0$　　B. $x-y=0$　　C. $2x-y-z=0$　　D. $x-z=0$

2.曲线$\begin{cases} x=y^2 \\ z=y \end{cases}$上点$(4,2,2)$处的切线方程为（ A ）.

A. $\frac{x-4}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$　　B. $\frac{x-4}{-4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{1}$

C. $\frac{x-4}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$　　D. $\frac{x-4}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{1}$

3. 设二元函数$u=\arcsin\sqrt{1-xy}$，则$\frac{\partial u}{\partial y}=$（ B ）.

A. $\frac{y}{\sqrt{1-xy}}$　　B. $\frac{-x}{2\sqrt{xy(1-xy)}}$　　C. $\frac{y\sin\sqrt{1-xy}}{\sqrt{1-(1-xy)^2}}$　　D. $\frac{y}{\sqrt{1-(1-xy)^2}}$

4. 设Ω是由$z=x^2+y^2$与$z=1$所围成的立体区域，则$\iiint_\Omega z\,dv=$（ B ）.

A. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_\rho^1 zdz$　　B. $\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}} z\rho d\rho$

C. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dz\int_\rho^1 zd\rho$　　D. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_0^1 zdz$

5. 设L是区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le -2y\}$的正向边界，则$\oint_L (x^2-y)dx+(x-y^2)dy=$（ D ）.

A. -2π　　B. 0　　C. $\frac{3}{2}\pi$　　D. 2π

6. 已知Σ是平面$x+y+\frac{z}{2}=1$的第一卦限部分，则$\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS=$（ C ）.

A. $3\int_0^{1-x}dy\int_0^1(x^2+y^2)dx$　　B. $\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dy$

C. $3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dy$　　D. $\sqrt{3}\int_0^{1-x}dy\int_0^1(x^2+y^2)dx$

7.级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$（ C ）.

A. 发散　　B. 条件收敛

C. 绝对收敛　　D. 无法判断

8.如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$满足$u_n\le v_n$，则（ D ）.

A. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也发散　　B. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛

C. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散　　D. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$未必收敛

得分	

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9.已知函数$f(x,y)=x+(y-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$，则$f_x(x,1)=$___1___.

10.设$D=\{(x,y)|x^2\le y\le 1\}$，则$\iint_D xy\ln(1+x^2)\,dxdy=$___0___.

11.设椭圆$L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$的周长为$a$，则$\oint_L (9x^2+4y^2+x)\,ds=$___$36a$___.

12.若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R=$___2___.

得分	

三、简单计算题（本题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

13.已知函数 $z=e^{\sin(x^2+y)}$，求 dz.

解：$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2xe^{\sin(x^2+y)}\cos(x^2+y)\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=e^{\sin(x^2+y)}\cos(x^2+y)\end{aligned}\right\}5'$

$dz=e^{\sin(x^2+y)}\cos(x^2+y)\,(2x\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

导数错一个,扣2分

14. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n2^n}$的收敛域.

解：$\left.\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x^2|}{2}\begin{cases}<1 \text{ 时收敛}\\ >1 \text{ 时发散}\end{cases}\right\}3'$（极限值 3分）

$\Leftrightarrow |x|<\sqrt{2}$时收敛，$|x|>\sqrt{2}$时发散　$1'$

且当$x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数收敛　$1'$

所以收敛域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.　$1'$

某个端点的收敛性判断错,扣1分

15.求曲线积分$\int_L (y-x^3)\mathrm{d}x+(x+y^3)\mathrm{d}y$，其中$L$是从点$A(-1,0)$沿曲线$y=\sqrt{1-x^2}$到点$B(1,0)$的曲线弧.

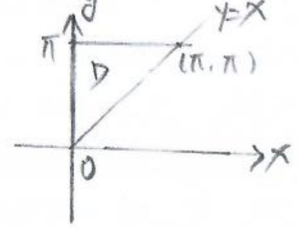
解：令$P=x+y,Q=x-y\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1\Rightarrow$曲线积分与路径无关。—— $3'$

取A到B的直线段$\overline{AB}$: $\begin{cases}x:-1\to1\\ y=0\end{cases}$，则

$$\int_L (y-x^3)\mathrm{d}x+(x+y^3)\mathrm{d}y=\int_{\overline{AB}}(y-x^3)\mathrm{d}x+(x+y^3)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^3)\mathrm{d}x=0\,.$$

16.计算二次积分$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$.



解：$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$

$=\iint_{D_{xy}}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$ ---- $4'$

$=\int_0^{\pi}\sin y\,\mathrm{d}y=2.$

如果交换积分次序结论错,则画图正确2分

画图错误,有交换积分次序思想2分

得分	

四、计算题（本题共 4 小题，每题 7 分，共 28 分）

17.设函数$z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中f二阶可导，g具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1'+yg_2'$ 　　4′

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg_{12}''+g_2'+xyg_{22}''$. 　　} 7′

个别项求错酌情扣分

18. 计算积分$\iint_\Sigma (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是锥面$z^2=x^2+y^2$介于$-1\le z\le 0$的部分，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为锥面$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的法向量的方向余弦，其中$\cos\gamma\ge 0$.

解：取曲面$\Sigma_1: z=-1, x^2+y^2\le 1$,下侧，则 　　1′

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{-1}^{-\rho}(\rho^2+z^2)\mathrm{d}z=\frac{9}{10}\pi.$$

高斯公式4分

$$\iint_{\Sigma_1}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}S$$

$$=\pi.$$

} 1′

所以原积分$=\frac{9}{10}\pi-\pi=-\frac{\pi}{10}$. 　　— — - 1′

19.求区域$x^2+y^2\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$的体积.

解：$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 　　或 $\iint_D[\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 　　4′

$$=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}\mathrm{d}z$$ 　　或 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$ 　　2′

$$=2\pi\int_0^1\rho(\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

$$=\left(\frac{4\sqrt2}{3}-\frac{7}{6}\right)\pi.$$ 　　- - - - 1′

或 $V=\iiint_V \mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt2}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8\sqrt2-7}{6}\pi$

20. 设$f(x)$是以 2π为周期的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}$，求$f(x)$的傅里叶系数$a_n$.

解：$n=0$ 时 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$. 　　— — - - 3′

$n\ne 0$ 时 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}\sin nx\right)$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}0, & n\text{为偶数}\\ \frac{2}{n^2\pi}, & n\text{为奇数}\end{cases}.$$

4′

1. a_n与a_0的积分公式写对，各得2分.
2. 求a_n用分部积分思想，1分.
3. 最后结果不化简，不扣分.

得分	

五、综合题（本题8分）

21. 已知一根绳子长2米，把它截成三段，分别折成圆、正三角形、正方形. 问这三段分别为多长时所得的面积总和最小.

解：假设圆的半径为x，正三角形边长为y，正方形边长为z，则

$2\pi x+3y+4z=2$，三个图形的面积之和为 $\pi x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2+z^2$. - - - 4′

设拉格朗日函数$L(x,y,z,\lambda)=\pi x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2+z^2+\lambda(2\pi x+3y+4z-2)$

$$\text{令}\begin{cases}L_x=2\pi x+2\pi\lambda=0\\ L_y=\frac{\sqrt{3}}{2}y+3\lambda=0\\ L_z=2z+4\lambda=0\\ L_\lambda=2\pi x+3y+4z-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ y=\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ z=\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}.\quad 4'$$

根据实际问题面积总和的最小值肯定存在，而且拉格朗日函数只有一个驻点，所以这个点就是要求的点. 故当三段绳长分别为 $\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，$\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，$\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}$ 时，所得面积最小.

1. 总长和 $=2$ 表达式 2分
   面积和表达式 2分.
2. 选择其它变量同理
3. x, y, z 的结论 1分

或不妨设圆、正三角形、正方形的长度分别为：x, y, z，则

$x+y+z=2$（约束条件） 且 $S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2$（目标函数）

用Lagrange乘数法. 令 $L=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2+\lambda(x+y+z-2)$

$$\text{列方程组}\begin{cases}L_x=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ L_y=\frac{\sqrt{3}}{18}y+\lambda=0\\ L_z=\frac{z}{8}+\lambda=0\\ L_\lambda=x+y+z-2=0\end{cases}\Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)$$

得分	

六（本题4分）

22. 已知$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，求$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dx\,dydz$.

解：记$\Omega=\{(x,y,z)|-a\le x\le a,-a\le y\le a,-a\le y\le a\}$ -- 2′

则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dx\,dydz$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\iiint_\Omega e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$ —— - 1′

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-a}^{a}e^{-y^2}dy\cdot\int_{-a}^{a}e^{-y^2}dy$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(2\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^3=\pi\sqrt{\pi}$. -- 1′

如果Ω选球面，后面求不出，得2分.