1125作业详解

1125复习要点

- ➢ 重点掌握如何利用幅频二次方函数 $|H(\omega)|^2$ 到系统函数H(s)
  - ✓掌握H(s)H(-s)的零极点计算
  - ✓掌握最小相位型滤波器H(s)所需的极点（左半平面）和零点（左半平面和jω轴）
- ➢ 重点掌握巴特沃思低通滤波器的设计
  - ✓牢记巴特沃思低通滤波器的幅度二次方函数
  - ✓利用四个技术指标求得阶数n和截止频率ω_c
  - ✓掌握用一般方法和求表4-1法(需要再做反归一化)求系统函数H(s)
  - ✓理解H(s)H(-s)的极点分布和巴特沃斯圆

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

$$H(s)=\frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)}$$

$$n\geq\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

1125复习要点

- ➢**掌握I型切比雪夫低通滤波器的设计**
  - ✓牢记切比雪夫低通滤波器的幅度二次方函数
  - ✓利用四个技术指标求得阶数n、波动系数ε、截止频率ω_c
  - ✓掌握用查表法（表4-3）或一般方法求系统函数**H(s)**
  - ✓理解切比雪夫滤波器极点分布图和特点（椭圆）
  - ✓深入理解切比雪夫低通滤波器和巴特沃斯低通滤波器的幅频特点

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^{\ 2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1}$$

$$n = \frac{\cos h^{-1}\left[\sqrt{\left(10^{0.1\alpha_{min}} - 1\right) / \left(10^{0.1\alpha_{max}} - 1\right)}\right]}{\cos h^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

1125课后作业

- 第四章习题 P318-320
- 1、 4、6(1)

21、 用查表**4-1**设计一个归一化频率的巴特沃思低通滤波器，其频域指标满足：通带截止频率为**600Hz**，衰减不大于**3dB**；阻带截止频率为**1800Hz**，衰减不小于**30dB**

例 给定滤波特性的幅度平方函数

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1+\omega^4}{\omega^4+10\omega^2+9}$$

求具有最小相位特性的滤波器系统函数

8. (2) 若给定 $f_p = 1.5MHz, \alpha_p \le 3dB, f_s = 1.7MHz, \alpha_s \ge 60dB$， 分别求巴特沃斯低通滤波器和切比雪夫低通滤波器的最低阶数n

1. 已知幅度二次方函数

$$|H(s)|^2=\frac{9\ (s^2+1)^2}{s^4-5s^2+4}$$

试求物理可实现的系统的系统函数 $H(s)$。

1. 幅度二次方函数 $|H(s)|^2=\dfrac{9(S^2+1)^2}{S^4-5S^2+4}$

求 $H(S)$. ① 找极点 $S^4-5S^2+4=0$

$(S^2-4)(S^2-1)=0 \Rightarrow S=\pm 2, \pm 1$

找零点 $9(S^2+1)^2=0$

$\Rightarrow S=\pm j$ (二阶重零点)

② 取左半平面极点和一对共轭零点，得到 $H(S)$

$$H(S)=\frac{3(S^2+1)}{(S+2)(S+1)}$$

例 给定滤波特性的幅度平方函数

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1+\omega^4}{\omega^4+10\omega^2+9}$$

求具有最小相位特性的滤波器系统函数

解 $s=j\omega$ 即 $s^2=-\omega^2$ 代入 $|H(\omega)|^2$，得

$$H(s)H(-s) = \frac{1+s^4}{s^4-10s^2+9}$$

计算得到上式 极点：$S_{p1}=1$，$S_{p2}=-1$，$S_{p3}=3$，$S_{p4}=-3$

零点：$S_{z1}=e^{\frac{\pi}{4}i}$，$S_{z2}=e^{\frac{3}{4}\pi i}$，$S_{z3}=e^{\frac{5}{4}\pi i}$

$S_{z4}=e^{\frac{7}{4}\pi i}$

$s^4=-1$

$$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \pi+2k\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow s = 1e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}$

$k=0,1,2,3$

最小相位滤波器要求极点在S左半平面且零点在S左半平面或jω轴

$$\therefore H(s) = \frac{(s-e^{\frac{3}{4}\pi i})(s-e^{\frac{5}{4}\pi i})}{(s+1)(s+3)} = \frac{s^2+\sqrt{2}s+1}{s^2+4s+1}$$

巴特沃思（Butterworth）低通滤波器

巴特沃思滤波器设计步骤（一般情况）

一般已知通带截止频率ω_p、阻带截止频率ω_s

通带衰减 α_p 和阻带衰减 α_s

步骤1：截止频率ω_c

步骤2：根据 $n \geq \dfrac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$ **计算滤波器阶数 n** （向上取整）

步骤3：得到幅频二次方函数 $\boxed{|H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$

步骤4：令 $s^2 = -\omega^2$ **得到H(s) H(-s)，得到零极点分布**

步骤5：取s左半平面所有极点，得到 $H(s) = \dfrac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s - s_k)}$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

巴特沃思滤波器设计步骤(查表法)

一般已知通带截止频率ω_p、阻带截止频率 ω_s
通带衰减α_p 和阻带衰减 α_s

步骤1：截止频率ω_c

步骤2：做归一化处理，根据 $n \geq \frac{lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{lg\omega_s}$ 计算阶数 n （向上取整）

步骤3：根据 表4-1查取巴特沃思多项式

步骤4：写出归一化巴特沃思滤波器传递函数 $H(\bar{s})$

步骤5：令 $\bar{s} = \frac{s}{W_c}$ 反归一化得到滤波器传递函数H(s)

8. (2) 若给定 $f_p = 1.5MHz, \alpha_p \le 3dB, f_s = 1.7MHz, \alpha_s \ge 60dB$， 分别求巴特沃斯低通滤波器和切比雪夫低通滤波器的最低阶数n

解 根据条件可知 $\omega_c = \omega_p = 2\pi f_p = 3\pi \times 10^6\ rad/s$

$$n \geq \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)} = \frac{\lg\sqrt{10^6-1}}{\lg\left(\frac{3.4\pi\times10^6}{3\pi\times10^6}\right)} = 55.182$$

$\omega_s = 2\pi f_s = 3.4\pi \times 10^6\ rad/s$

$\therefore n$ 取 56

4. 巴特沃思低通滤波器的频域指标为：当 $\omega_1 = 1000\text{rad/s}$ 时，衰减不大于 3dB，当 $\omega_2 = 5000\text{rad/s}$ 时，衰减至少为 20dB，求此滤波器的系统传递函数 $H(s)$。

4. 巴特沃思LBP：$\omega_1 = 1000\ \text{rad/s}$，衰减不大于3dB

$\omega_2 = 5000\ \text{rad/s}$，衰减至少为20dB

① 确认 ω_c，n

∴由题意，得 通带截止频率与系统截止频率相等

即 $\omega_p = \omega_c = \omega_1 = 1000$，$\alpha_p = 3$

阻带截止频率为 $\omega_s = \omega_2 = 5000$，$\alpha_s = 20$

计算滤波器阶数 $n \geq \dfrac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)} = \dfrac{\lg\sqrt{10^{0.1\times 20}-1}}{\lg\left(\frac{5000}{1000}\right)} \approx 1.43$

∴ n 取2 即二阶 Butterworth LBF

② 确认 $|H(\omega)|^2$

该LBP的幅度二次方函数

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{1000}\right)^4} = \frac{1000^4}{\omega^4+1000^4}$$

③ 确认 $H(s)$

令 $s = j\omega$ 即 $s^2 = -\omega^2$，可得

$$H(s)H(-s) = \frac{1000^4}{s^4+1000^4}$$

令 $s = \rho e^{i\theta}$

$s^4 + 1000^4 = 0$

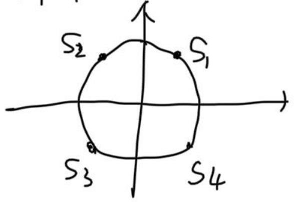
$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^4 = 1000^4 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow s = 1000\, e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{4}}$$

$k = 0, 1, 2, 3$

根点 $s_1 = 1000e^{\frac{\pi}{4}i}$，$s_2 = 1000e^{\frac{3\pi}{4}i}$，$s_3 = 1000e^{\frac{5\pi}{4}i}$

$s_4 = 1000e^{\frac{7\pi}{4}i}$



巴特沃思圆

取左半平面根点 s_2，s_3

代入 $H(s) = \dfrac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)}$

其中 s_k 是 s 左半平面根点

由此得 LBF系统函数

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{(s-s_2)(s-s_3)} = \frac{1000^2}{\left(s-1000e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)\left(s-1000e^{\frac{5\pi}{4}i}\right)} = \frac{1000^2}{s^2+1000\sqrt{2}s+1000^2}$$

或可用查表4-1法

$n=2$ 归一化频率的巴特沃思LBP

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2+\sqrt{2}\bar{s}+1}$$

$\bar{s} = \dfrac{s}{\omega_c} = \dfrac{s}{1000}$ ∴实际LBP系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{1000}\right)^2+\sqrt{2}\frac{s}{1000}+1} = \frac{1000^2}{s^2+1000\sqrt{2}s+1000^2}$$

21、 用查表**4-1**设计一个归一化频率的巴特沃思低通滤波器，其频域指标满足：通带截止频率为**600Hz**，衰减不大于**3dB**；阻带截止频率为**1800Hz**，衰减不小于**30dB**

解：已知 通带截止频率 $f_p = 600\ \text{Hz}$ ，$\alpha_p \le 3\text{dB}$

阻带截止频率 $f_s = 1800\ \text{Hz}$ ，$\alpha_s \ge 30\text{dB}$

所以 系统截止频率 $\omega_c = \omega_p = 2\pi f_p = 1200\pi$

$\omega_s = 2\pi f_s = 3600\pi$

$$n \ge \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)} = \frac{\lg\sqrt{10^3-1}}{\lg\left(\frac{3600}{1200}\right)} = 3.14$$

$\therefore n = 4$ 用查表法得到

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^4 + 2.613\bar{s}^3 + 3.414\bar{s}^2 + 2.613\bar{s} + 1}$$

$\bar{s} = \frac{s}{\omega_c}$ 代入上式 可得实际的LBP系统函数

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{1200\pi}\right)^4 + 2.613\left(\frac{s}{1200\pi}\right)^3 + 3.414\left(\frac{s}{1200\pi}\right)^2 + 2.613\frac{s}{1200\pi} + 1}$$

切比雪夫低通滤波器

切比雪夫滤波器设计步骤（查表法）★

一般已知通带截止频率ω_c、阻带截止频率ω_s

通带衰减α_{max}和阻带衰减α_{min}

步骤1：截止频率ω_c，波动系数 $\varepsilon=\sqrt{10^{\frac{\alpha_{max}}{10}}-1}$

步骤2：根据 $n=\dfrac{\cos h^{-1}\left[\sqrt{\left(10^{0.1\alpha_{min}}-1\right)/\left(10^{0.1\alpha_{max}}-1\right)}\right]}{\cos h^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$ 计算阶数 n （向上取整）

步骤3：做归一化处理，并根据 表4-3查取归一化滤波器系统函数系数

步骤4：写出归一化切比雪夫低通滤波器传递函数$H(\bar{s})$

步骤5：令 $\bar{S}=s/\omega_c$ 反归一化得到滤波器传递函数H(s)

切比雪夫低通滤波器

切比雪夫滤波器设计步骤（一般情况）

一般已知通带截止频率ω_c、阻带截止频率ω_s

通带衰减 α_{max} 和阻带衰减 α_{min}

步骤1：截止频率ω_c，波动系数 $\varepsilon=\sqrt{10^{\frac{\alpha_{\max}}{10}}-1}$

步骤2：根据 $n=\dfrac{\cosh^{-1}\left[\sqrt{\left(10^{0.1\alpha_{\min}}-1\right)/\left(10^{0.1\alpha_{\max}}-1\right)}\right]}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$ **计算阶数 n** （向上取整）

步骤3：得到幅频二次方函数 $|H(\omega)|^2=\dfrac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$

步骤4：令 $s^2=-\omega^2$ 得到H(s) H(-s)，得到零极点分布

步骤5：取s左半平面所有极点，得到 $H(s)=\dfrac{K}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})\cdots(s-s_{pn})}$

8. (2) 若给定 $f_p = 1.5MHz, \alpha_p \le 3dB, f_s = 1.7MHz, \alpha_s \ge 60dB$，分别求巴特沃斯低通滤波器和切比雪夫低通滤波器的最低阶数n

解

$$n = \frac{\cosh^{-1}\left[\sqrt{(10^{0.1\alpha_s}-1)/(10^{0.1\alpha_p}-1)}\right]}{\cosh^{-1}\left(\frac{w_s}{w_c}\right)} \quad (*)$$

$w_c = w_p = 2\pi f_p = 3\pi MHz$

$w_s = 2\pi f_s = 3.4\pi MHz$

$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

代入(*)式 可得 $n = 14.8843$

向上取整，n 取 15

6. 设计两个切比雪夫低通滤波器，它们的技术指标分别为

（1）$f_c = 10\text{kHz}$，$\alpha_p = 1\text{dB}$，$f_s = 100\text{kHz}$，$\alpha_s \geq 140\text{dB}$

解：①找到 w_c, ε, n

$w_c = 2\pi f_c = 10\times10^3\cdot2\pi = 2\pi\times10^4\,\text{rad/s}$，$w_s = 2\pi f_s = 2\pi\times10^5\,\text{rad}$

$\alpha_{max} = \alpha_p = \alpha|_{w=w_c} = 1\text{dB}$；$\alpha_{min} = \alpha_s = 140\text{dB}$

得到波动系数 $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1} = 0.5088$

$\varepsilon^2 = 0.2589$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}\left[\sqrt{(10^{0.1\alpha_{min}}-1)/(10^{0.1\alpha_{max}}-1)}\right]}{\cosh^{-1}\left(\frac{w_s}{w_c}\right)}$$

$= 5.8421$

∴ n 取 6

②查表 4-3，得到归一化切比雪夫 LBP 的 $H(\bar{s})$

$$H(\bar{s}) = \frac{\bar{K}}{\bar{s}^6 + 0.92825\bar{s}^5 + 1.93082\bar{s}^4 + 1.20214\bar{s}^3 + 0.93935\bar{s}^2 + 0.30708\bar{s} + 0.06891}$$

$n=6$ 为偶数

$$\bar{K} = \frac{(-1)^n S_{p1}S_{p2}\cdots S_{p6}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{-S_{p1}S_{p2}S_{p3}S_{p4}S_{p5}S_{p6}}{1.122}$$

其中 $S_{p1},\cdots,S_{p6}$ 是 $H(\bar{s})$ 的极点，即

$\bar{s}^6 + 0.92825\bar{s}^5 + 1.93082\bar{s}^4 + 1.20214\bar{s}^3 + 0.93935\bar{s}^2 + 0.307085\bar{s} + 0.06891 = 0$ 这个方程的解

$$\bar{K} = \frac{b_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{0.06891}{\sqrt{1+0.5088^2}} = 0.06142$$

③做反归一化处理，得到实际切比雪夫 LBP 的系统函数

$\bar{s} = \frac{s}{w_c}$ 代入 $H(\bar{s})$，得到

$$H(s) = \frac{w_c^6\bar{K}}{\bar{s}^6 + 0.92825\bar{s}^5 w_c + 1.93082\bar{s}^4 w_c^2 + 1.20214\bar{s}^3 w_c^3 + 0.93935\bar{s}^2 w_c^4 + 0.307085\bar{s}\,w_c^5 + 0.06891 w_c^6}$$

其中 $w_c = 2\pi\times10^4\,\text{rad/s}$