(8). $x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t>0 \\ e^{3t} & t<0 \end{cases}$

$$X_L(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{3t} e^{-st} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{3-s} e^{(3-s)t} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2+s} e^{-(2+s)t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{3-s} + \frac{1}{2+s}$$

$$= \frac{5}{(2+s)(3-s)} \qquad (-2<\sigma<3)$$

36、(7). $x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$X_b(s)=\int_0^1 e^{-st}\cdot dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1=\frac{1-e^{-s}}{s}$$

零点： $1-e^{-s}=0$，即 $e^{-s}=1 \Rightarrow e^{-s}=e^{j\cdot 2k\pi}$

∴ $s=j\cdot 2k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2\cdots$

极点： $s=0$，

其中 $s=0$ 点既为零点，又为极点，相抵消。

收敛域为整个 s 平面。

(5) $[t e^{-at} \cos(w_c t)] u(t)$.

利用微分特性.

$$[t e^{-at} \cos(w_c t)] u(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+w_c^2}\right] = \frac{(s+a)^2-w_c^2}{[(s+a)^2+w_c^2]^2}. \quad \sigma > -a$$

(5). $\frac{s+1}{s^2+5s+6}$ $\quad -3 < Re(s) < -2$

$$\frac{s+1}{s^2+5s+6} = \underbrace{\frac{2}{s+3}}_{右边信号} - \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{左边信号}$$

$$\leftrightarrow 2e^{-3t}u(t) - (-e^{-2t}u(-t))$$

$$= 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(-t)$$

(b) $\dfrac{s+2}{s^2+7s+12}$. $\quad -4<\mathrm{Re}(s)<-3$

$$\frac{s+2}{s^2+7s+12} = \underbrace{\frac{2}{s+4}}_{\text{右边}} - \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{\text{左边}}.$$

$$\longleftrightarrow \ 2e^{-4t}u(t) - \left(-e^{-3t}u(-t)\right)$$

$$= 2e^{-4t}u(t) + e^{-3t}\cdot u(-t).$$

40、(1). $x(t)$ 的傅里叶变换存在，则收敛域需包含 $j\omega$ 轴. 由零极点图可知：

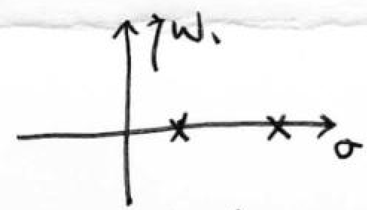
$$-1<\sigma<1$$

(2). $x(t)\cdot e^{2t}$ 的傅里叶变换存在.

$x(t)$ 的拉氏变换为 $X(s)=\frac{k}{(s+1)(s-1)}$ (由零极点图得到)

$x(t)\cdot e^{2t}$ 的拉氏变换为 $\frac{k}{(s+1-2)(s-1-2)} = \frac{k}{(s-1)(s-3)}$

该拉氏变换的极点为 $s=1$ 与 $s=3$.



若该函数的傅里叶变换存在，则收敛域需包含 $j\omega$ 轴.

∴ 收敛域为 $\sigma<1$

第三章 离散信号的分析

方璐 2教322
杭州电子科技大学 自动化学院

第二节 离散信号的频域分析

一、周期信号的频域分析（DFS）

1）离散傅里叶级数 DFS

2）DFS的主要性质

3）离散周期信号的频谱

4）混叠与泄露

二、非周期信号的频域分析（DTFT）

三、离散傅里叶变换（DFT）

一、周期信号的频域分析

1. 离散傅里叶级数（DFS，**Discrete Fourier Series**）

连续周期信号的傅里叶级数：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad k=0,1,2\cdots$$

对x(t)的一个周期内进行 N点采样。

$T_0=NT,\quad T-$采样周期 $\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{NT}$

一、周期信号的频域分析

$$X(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad k=0,1,2\ldots$$

得到离散序列x(n)，是以N为周期的周期序列

即： $x(n)=x(n+mN)$

$\Omega_0=\omega_0 T=\dfrac{2\pi}{N}$， 为离散域的基本频率。

$k\Omega_0$是k次谐波的数字频率。

$t=nT, dt=T,\ T_0=NT,\quad T$－采样周期 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}=\dfrac{2\pi}{NT}$

在一个周期内的积分变为在一个周期内的累加，即：

$$X(k\frac{\Omega_0}{T})=\frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-jk\frac{\Omega_0}{T}nT}T=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-jk\Omega_0 n}$$

一、周期信号的频域分析

$$X(k\frac{\Omega_0}{T})=\frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-jk\frac{\Omega_0}{T}nT}T$$

在序列表示中，可用 n 表示nT，$k\Omega_0$表示$k\dfrac{\Omega_0}{T}$ ，所以：

$$\boxed{X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}\qquad k=0,1,2,\cdots N-1}$$

一、周期信号的频域分析

$X(k\Omega_0)$ 是变量 **k** 的周期函数，周期为 **N**

$$X((k+qN)\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j(k+qN)\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n-jqN\Omega_0 n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n-jq2\pi n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=X(k\Omega_0)$$

离散周期信号只含有有限个谐波分量，其谐波数为*N*

$$\boxed{x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\frac{\Omega_0}{T}nT}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}}$$

$$k=\frac{2\pi}{\Omega_0}=N$$

N — $x(n)$ 的周期

一、周期信号的频域分析

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\frac{\Omega_0}{T}nT}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} \qquad n=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x(n)e^{-jk\Omega_0 n} \qquad k=0,1,2,3,\cdots,N-1$$

$x(n)$ 的频谱以 $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}$ 为基本频率的间距离散化了。

$$\Omega_0=\omega_0 T=\frac{2\pi}{N}$$

$T_0=NT$

P126

※ 时域信号：离散、周期

※ 频谱形式：周期、离散

离散傅里叶级数变换对：

$$x(n)\overset{DFS}{\leftrightarrow}X(k\Omega_0)$$

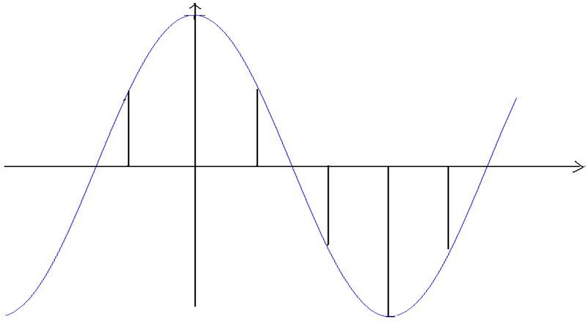
$$DFS[x(n)]=X(k\Omega_0)$$

$$IDFS[X(k\Omega_0)]=x(n)$$

一、周期信号的频域分析

例1　已知离散正弦信号 $x(n)=\cos\alpha n$，分别求（1）$\alpha=\sqrt{2}\pi$

（2）$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时，傅里叶级数表示式并画出相应的频谱图。



解：（1）一个连续正弦时间信号离散化后的正弦序列满足

$\dfrac{2\pi}{\alpha}$=有理数时，才是周期序列。

$\dfrac{2\pi}{\alpha}=\sqrt{2}$ 为无理数，所以该正弦序列为非周期序列，因而不能展开为傅里叶级数，其频谱内容仅有 $k\Omega_0=\sqrt{2}\pi$，不存在其它谐波分量。

（2）$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{2\pi}{\alpha}=6$ 为有理数，所以是周期正弦序列，周期为：

$N=\dfrac{2\pi}{\alpha}=6$

$$\boxed{X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}\qquad k=0,1,2,3,\cdots,N-1}$$

基本频率为： $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{3}$

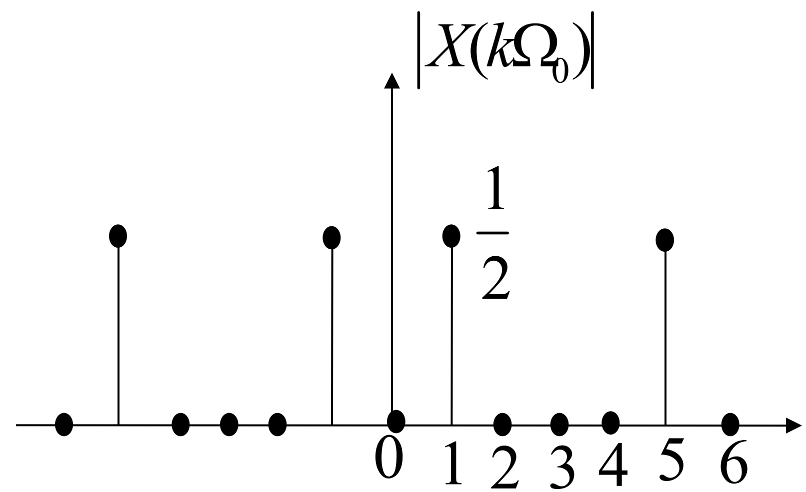
$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}\cos(\frac{\pi}{3}n)e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$=\frac{1}{6}[1+\frac{1}{2}e^{-jk\frac{\pi}{3}}+(-\frac{1}{2})e^{-jk\frac{2\pi}{3}}-e^{-jk\pi}+(-\frac{1}{2})e^{-jk\frac{4\pi}{3}}+\frac{1}{2}e^{-jk\frac{5\pi}{3}}]$$

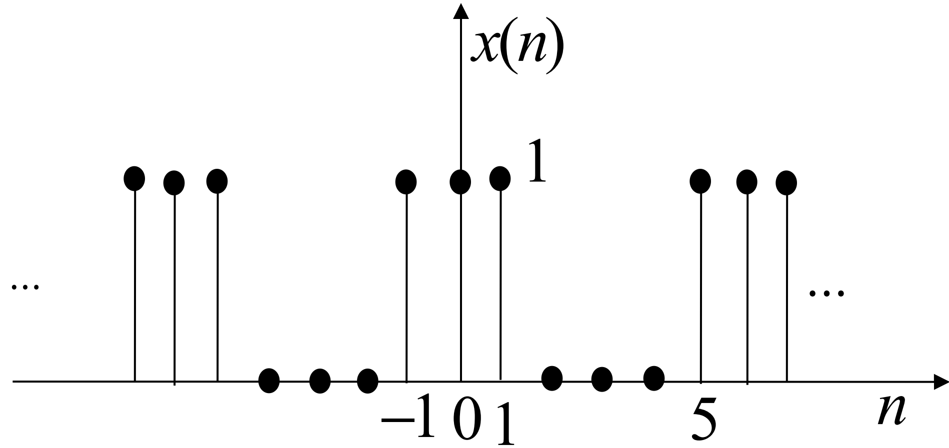
$$=\frac{1}{6}[1+\cos\frac{k\pi}{3}-\cos\frac{2k\pi}{3}-\cos k\pi]\qquad \text{k=0,1,2,3,4,5}$$

因此：

$$X(k\Omega_0)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{k=1,5}\\ 0 & \text{k=0,2,3,4}\end{cases}$$



例 2、已知一周期序列 $x(n)$，周期 $N=6$，如图所示，求该序列的频谱 $X(k\Omega_0)$ 及时域表达式 $x(n)$。



解：基本频率： $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}=\dfrac{\pi}{3}$

周期信号的频谱为：

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$=\frac{1}{6}[x(0)+x(1)e^{-jk\frac{\pi}{3}}+x(5)e^{-jk\frac{5\pi}{3}}]$$

$$=\frac{1}{6}[1+e^{-jk\frac{\pi}{3}}+e^{jk\frac{\pi}{3}}]=\frac{1}{6}[1+2\cos\frac{\pi k}{3}]\qquad k=0,1,2,3,4,5$$

故得 $X(k\Omega_0)$ **的取值如下：** $X(0)=\dfrac{1}{2}$ $\quad X(\Omega_0)=\dfrac{1}{3}$ $\quad X(2\Omega_0)=0$

$$X(3\Omega_0)=-\frac{1}{6}\quad X(4\Omega_0)=0\quad X(5\Omega_0)=\frac{1}{3}$$

一、周期信号的频域分析

$x(n)$ 的表达式：

$$x(n)=\sum_{k=0}^{5}X(k\Omega_0)e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{3}n}-\frac{1}{6}e^{j\pi n}+\frac{1}{3}e^{j\frac{5\pi}{3}n}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos\pi n+\frac{2}{3}\cos\frac{\pi n}{3}$$

写成集合的形式： $x(n)=[\cdots 1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,\cdots]$

$\uparrow$

n=0

2. DFS的主要性质

（1）线性性质

若： $x(n)\overset{DFS}{\leftrightarrow}X(k\Omega_0),\ y(n)\overset{DFS}{\leftrightarrow}Y(k\Omega_0)$

则 $ax(n)+by(n)\overset{DFS}{\leftrightarrow}aX(k\Omega_0)+bY(k\Omega_0)$

（2）周期卷积定理

若： $x(n)\overset{DFS}{\leftrightarrow}X(k\Omega_0),\ h(n)\overset{DFS}{\leftrightarrow}H(k\Omega_0)$

则： $x(n)\otimes h(n)\overset{DFS}{\leftrightarrow}X(k\Omega_0)H(k\Omega_0)$

$$x(n)h(n)\overset{DFS}{\leftrightarrow}\frac{1}{N}X(k\Omega_0)\otimes H(k\Omega_0)$$

$\otimes$为周期卷积的符号，两周期序列$x(n)$和$h(n)$的周期卷积定义为：

$$x(n)\otimes h(n)=h(n)\otimes x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)h(n-k)$$

周期卷积和线性卷积的惟一区别在于周期卷积时仅仅在单个周期内求和，而线性卷积则是对所有k值求和。

2. DFS的主要性质

（3）复共轭

若：$x(n) \overset{DFS}{\leftrightarrow} X(k\Omega_0)$

则 $x^*(-n) \overset{DFS}{\leftrightarrow} X^*(k\Omega_0)$

（4）位移性质（时移）

若：$x(n) \overset{DFS}{\leftrightarrow} X(k\Omega_0)$

则 $x(n-m) \overset{DFS}{\leftrightarrow} e^{-jk\Omega_0 m} X(k\Omega_0)$

（5）帕斯瓦尔定理

若：$x(n) \overset{DFS}{\leftrightarrow} X(k\Omega_0), h(n) \overset{DFS}{\leftrightarrow} H(k\Omega_0)$

则：$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)h^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k\Omega_0)H^*(k\Omega_0)$

当：$x(n)=h(n)$时，有：

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(k\Omega_0)|^2$$

3. 离散周期信号的频谱

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\frac{\Omega_0}{T}nT}=\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} \qquad n=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x(n)e^{-jk\Omega_0 n} \qquad k=0,1,2,3,\cdots,N-1$$

称为周期序列在频域的分析，离散周期序列的频谱。

$$x(n) \Longleftrightarrow X(k\Omega_0)$$

$$\Uparrow$$

$$x(t) \Longleftrightarrow X(kw_0)$$

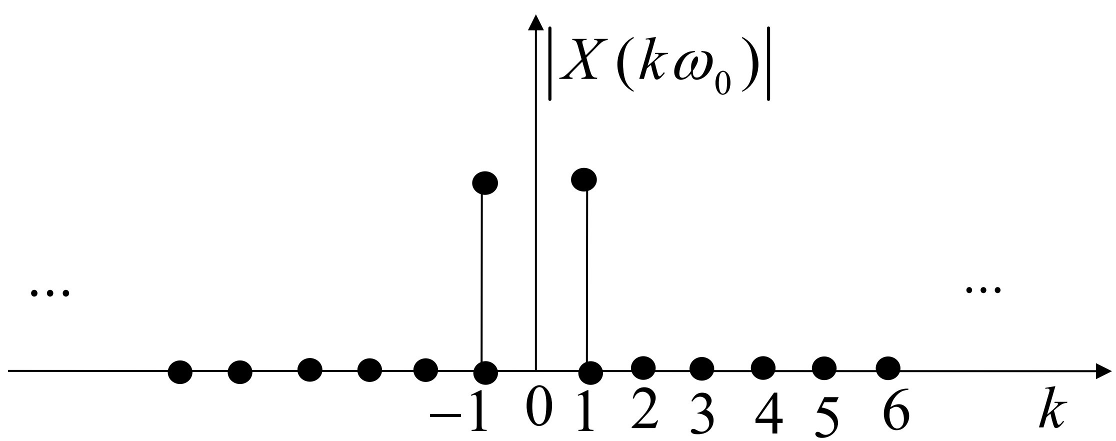
3. 离散周期信号的频谱

例3、已知连续时间周期信号$x(t)=6\cos\pi t$，现以采样间隔$T=0.25s$对它进行采样。试分别求出采样后周期序列的频谱，并与原始信号的频谱做比较。

解：

由于 $x(t)=6\cos\pi t=3(e^{j\pi t}+e^{-j\pi t})$，**故其频谱为：**

$$|X(k\omega_0)|=\begin{cases}3 & \text{k=1,-1}\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

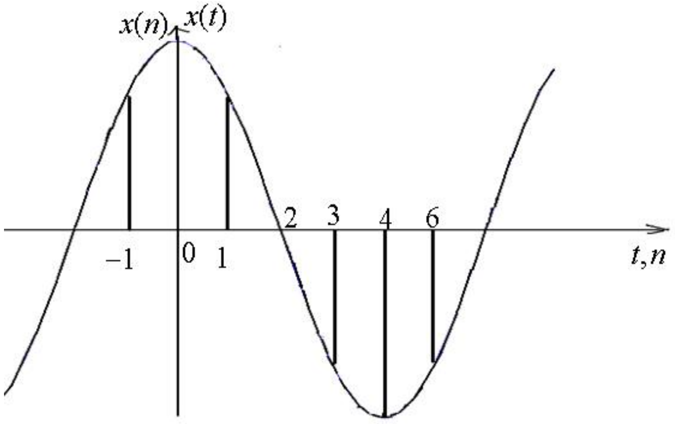


3. 离散周期信号的频谱

例3、已知连续时间周期信号$x(t)=6\cos\pi t$，现以采样间隔$T=0.25s$对它进行采样。试分别求出采样后周期序列的频谱，并与原始信号的频谱做比较。

解：已知 $\omega_0=\pi$,则 $f_0=\dfrac{1}{2},T_0=2$,在一周期内样点数$N=\dfrac{T_0}{T}=8$, $\Omega_0=\dfrac{\pi}{4}$

$$x(n)=x(t)\big|_{t=0.25\text{n}}=6\cos(\frac{\pi n}{4})$$



所以：

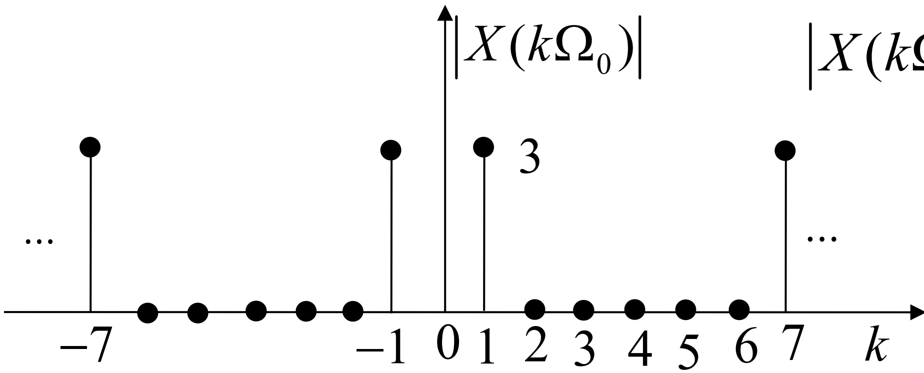
$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{4}n}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$\Omega_0=\omega_0 T=\frac{2\pi}{N},\quad T_0=NT$$

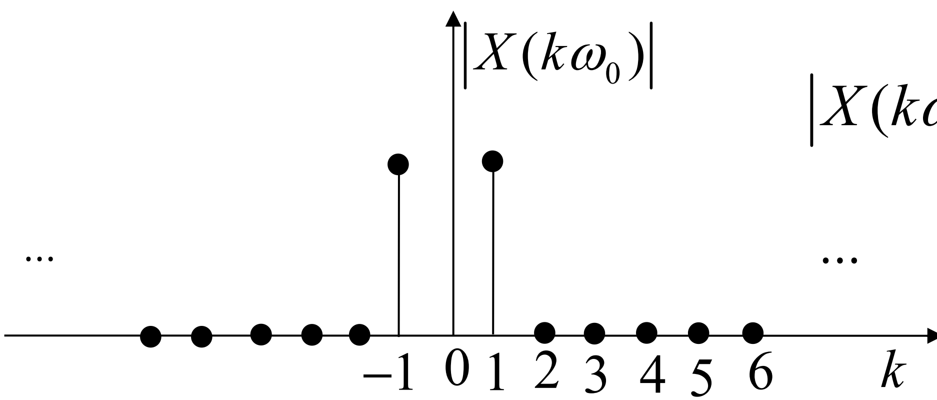
$$\left|X(k\Omega_0)\right|=\begin{cases}3 & \text{k}=\pm1,\pm7\\ 0 & \text{k}=0,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\end{cases}$$

是在一个周期内求得谐波分量的幅度，其余则是它的周期重复。

3. 离散周期信号的频谱



$$|X(k\Omega_0)| = \begin{cases} 3 & k=\pm 1, \pm 7 \\ 0 & k=0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6 \end{cases}$$



$$|X(k\omega_0)| = \begin{cases} 3 & k=1,-1 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

比较可得在一个周期内$|X(k\omega_0)| = |X(k\Omega_0)|$,这说明在$-\pi < \Omega < \pi$范围内，离散周期信号的离散频率准确地等于连续时间周期信号的频谱。

例4、已知连续时间周期信号$x(t)=2\cos 6\pi t+4\sin 10\pi t$，现以采样频率$(1) f_{s1}=16$样点/周期，$(2) f_{s2}=8$样点/周期，对它进行采样。试分别求出采样后周期序列的频谱，并与原始信号的频谱做比较。

解：(1) 按 $f_{s1}=16, T_{s1}=\frac{1}{16}$，所以：

$$x_1(n)=x(t)|_{t=nT_{s1}}=2\cos(6\pi\times\frac{1}{16}n)+4\sin(10\pi\times\frac{1}{16}n)$$

$$=2\cos(\frac{3\pi}{8}n)+4\sin(\frac{5\pi}{8}n)$$

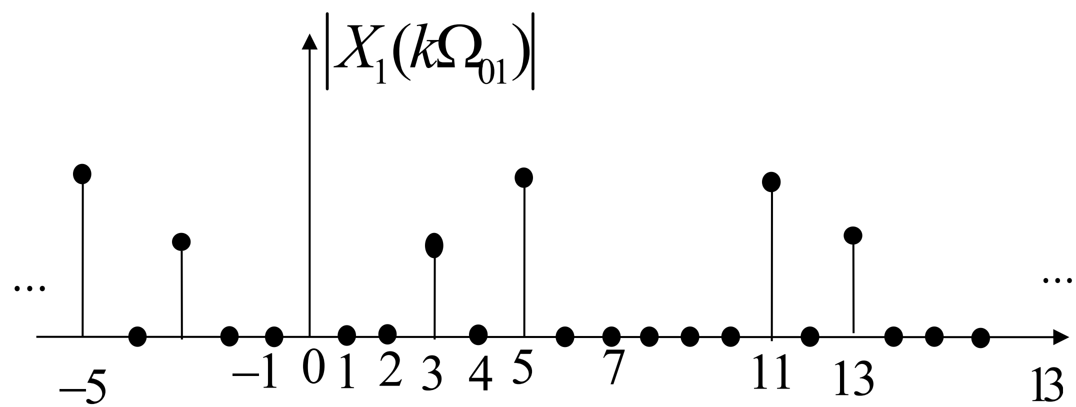
$x_1(n)$的周期$N_1=16$，基本频率$\Omega_{01}=\frac{\pi}{8}$，则

$$|X(-3\Omega_{01})|=1,\ |X(3\Omega_{01})|=1$$

$$|X(-5\Omega_{01})|=2,\ |X(5\Omega_{01})|=2$$

$$X_1(k\Omega_{01})=\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{15}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{8}n}$$

其频谱图为：



（2）按 $f_{s2}=16, T_{s2}=\frac{1}{16}$，所以：

$$x_1(n)=x(t)|_{t=nT_{s1}}=2\cos(6\pi\times\frac{1}{8}n)+4\sin(10\pi\times\frac{1}{8}n)$$

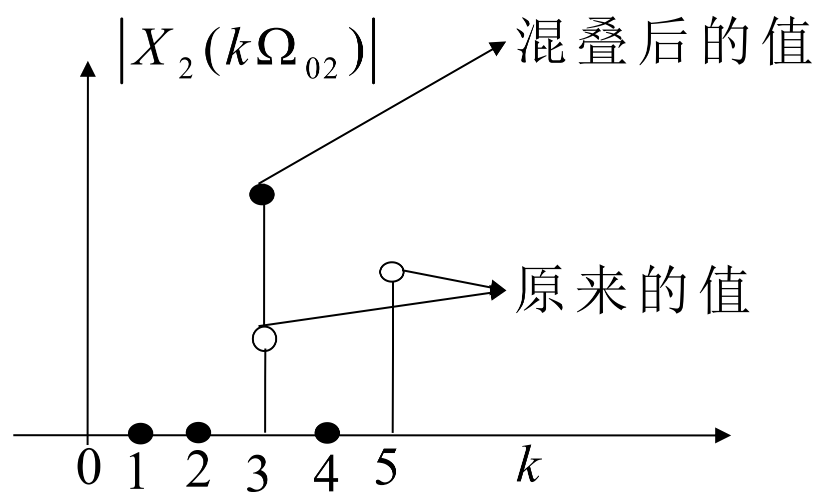
$$=2\cos(\frac{3\pi}{4}n)+4\sin(\frac{5\pi}{4}n)=2\cos(\frac{3\pi}{4}n)-4\sin(\frac{3\pi}{4}n)$$

$x_1(n)$的周期$N_1=8$，基本频率$\Omega_{02}=\frac{\pi}{4}$，则

$$X_2(k\Omega_{02})=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$|X(-3\Omega_{02})|=\sqrt{5},\ |X(3\Omega_{02})|=\sqrt{5}$$

频谱如图：



$$\left|X(k\omega_0)\right| = \begin{cases} 1 & \text{k}=\pm 3 \\ 2 & \text{k}=\pm 5 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

(1) 比较可得，在$f_{s1}=16$时，

$$\left|X(k\omega_0)\right| = \left|X(k\Omega_{01})\right| \qquad -8<k<8$$

根据周期信号采样定理 ，$x(t)$的最高频率分量$k=5, f_{s1}=N_1=16$

$$N_1>2k=10$$

满足采样定理，故$X_1(k\Omega_{01})$周期频谱不出现混叠现 象。

(2) $f_{s2}=8$时，

$$\left|X(k\omega_0)\right| \neq \left|X(k\Omega_{02})\right| \qquad -4<k<4$$

$f_{s2}=N_2=8$，$N_2<2k$

不满足采样定理，故$X_2(k\Omega_{02})$出现混叠。

3. 离散周期信号的频谱

(1) 离散时间周期信号的频 谱$X(k\Omega_0)$是具有谐波性的周期序 列，而连续时间信号的频谱 $X(k\omega_0)$是具有谐波性的非周期 序列。$X(k\Omega_0)$可以看做是$X(k\omega_0)$的近似，近似程度和采 样周期的选取有关。

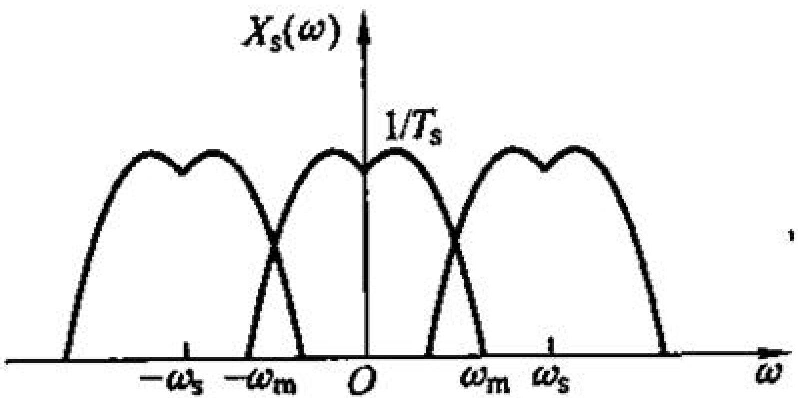
(2) 在满足采样定理的条件 下，从一个连续时间、 频带有限的周期信号得到的周期序 列，其频谱在$|\Omega| < \pi$或$|f| < \frac{f_s}{2}$范围内等于原始信号的离散频谱 。

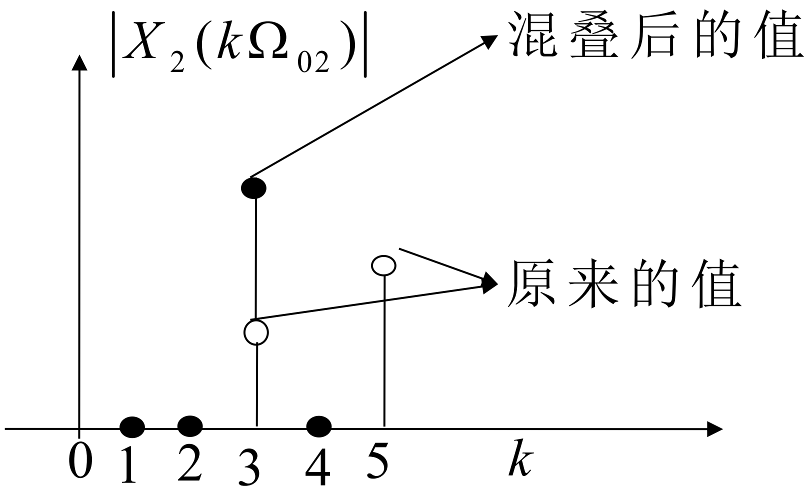
(3) 在不满足采样定理的条 件下，由于$X(k\omega_0)$出现频谱混叠，就不能用$X(k\Omega_0)$准确地表示$X(k\omega_0)$。但在误差允许的前提 下，可以用一个周期内的 $X(k\Omega_0)$近似地表示$X(k\omega_0)$，为了减小近似误差，应尽可能提高 采样频率。

4. 混叠与泄漏

（1）混叠

$$\omega_s < 2\omega_m$$



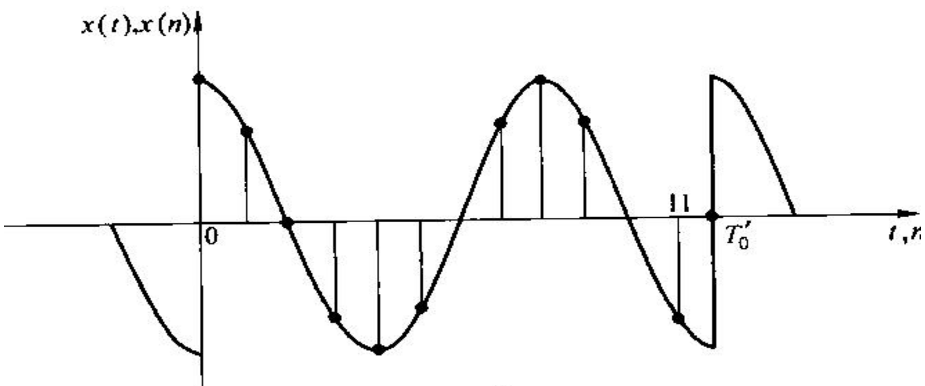


措施：提高采样率，增加样点数

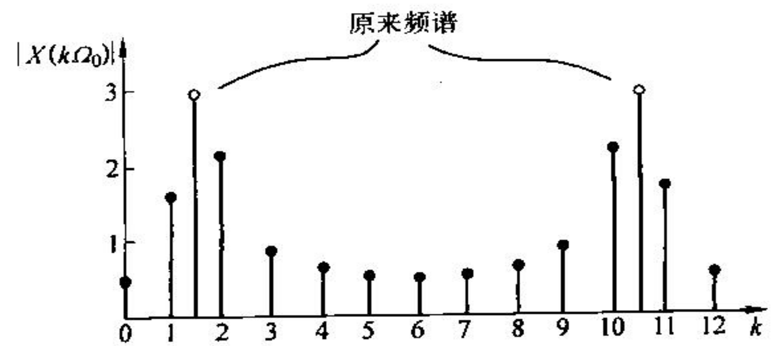
4. 混叠与泄漏

（2）泄漏：截取波形的时间长度不恰当造成的。

从原来比较集中的谱线由于截取信号长度不当，出现了分散的扩展谱线的现象，称之为频谱泄露或功率泄露。



a)



b)

措施：若不知道确切周期，在采样频率满足采样定理的条件下，可以截取较长时间长度的样点进行分析。

第二节 离散信号的频域分析

一、周期信号的频域分析（DFS）

二、非周期信号的频域分析（DTFT）

1）从DFS到DTFT

2）DTFT的性质

3）DTFT、DFS、CFT之间的关系

三、离散傅里叶变换（DFT）

二、非周期信号的频域分析
（DTFT :Discrete Time Fourier Transformation）

1. 从DFS到DTFT （DFS：Discrete Fourier Series）

离散周期信号的傅里叶级数

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}\qquad k=0,1,2,3,\cdots,N-1$$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\frac{\Omega_0}{T}nT}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}\qquad n=0,1,2,\ldots,N-1$$

$x(n)$ 的频谱以 $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}$ 为基本频率的间距离散化了。

P126

※ 时域信号：离散、周期

※ 频谱形式：周期、离散

二、非周期信号的频域分析
（DTFT :Discrete Time Fourier Transformation）

1. 从DFS到DTFT （DFS：Discrete Fourier Series)

序列**x(n)**的离散时间傅里叶变换定义为：

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$ ——离散时间傅里叶变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$ ——离散时间傅里叶反变换

X(Ω)是变量**Ω**的周期函数，周期为**2π**。

离散时间傅里叶变换对

$$x(n)\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\Omega)$$

$$DTFT[x(n)]=X(\Omega)$$

$$IDTFT[X(\Omega)]=x(n)$$

※ 时域信号：离散、非周期
※ 频谱形式：周期、连续

二、非周期信号的频域分析
（DTFT :Discrete Time Fourier Transformation）

例1 已知序列x(n)=a^nu(n), |a|<1,求此序列的频谱。

$$X(\Omega)=DTFT(x(n))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\Omega})^{n}$$

利用几何级数求和公式：

$$X(\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\Omega})^{n}=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

二、非周期信号的频域分析
（DTFT :Discrete Time Fourier Transformation）

例2 矩形序列x(n)=R_5(n)=u(n)-u(n-5),求此序列的频谱。

$$X(\Omega)=DTFT[R_5(n)]=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\Omega n}=1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}+e^{-j3\Omega}+e^{-j4\Omega}$$

$$=\frac{1-e^{-j5\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}=\frac{e^{-j\frac{5}{2}\Omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\Omega}}\frac{e^{j\frac{5}{2}\Omega}-e^{-j\frac{5}{2}\Omega}}{e^{j\frac{1}{2}\Omega}-e^{-j\frac{1}{2}\Omega}}=e^{-j2\Omega}\frac{\sin\frac{5}{2}\Omega}{\sin\frac{1}{2}\Omega}$$

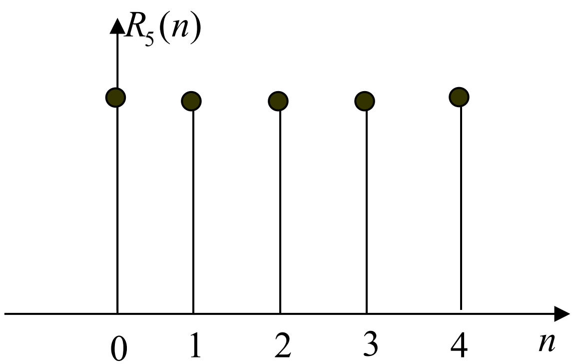
幅频特性：

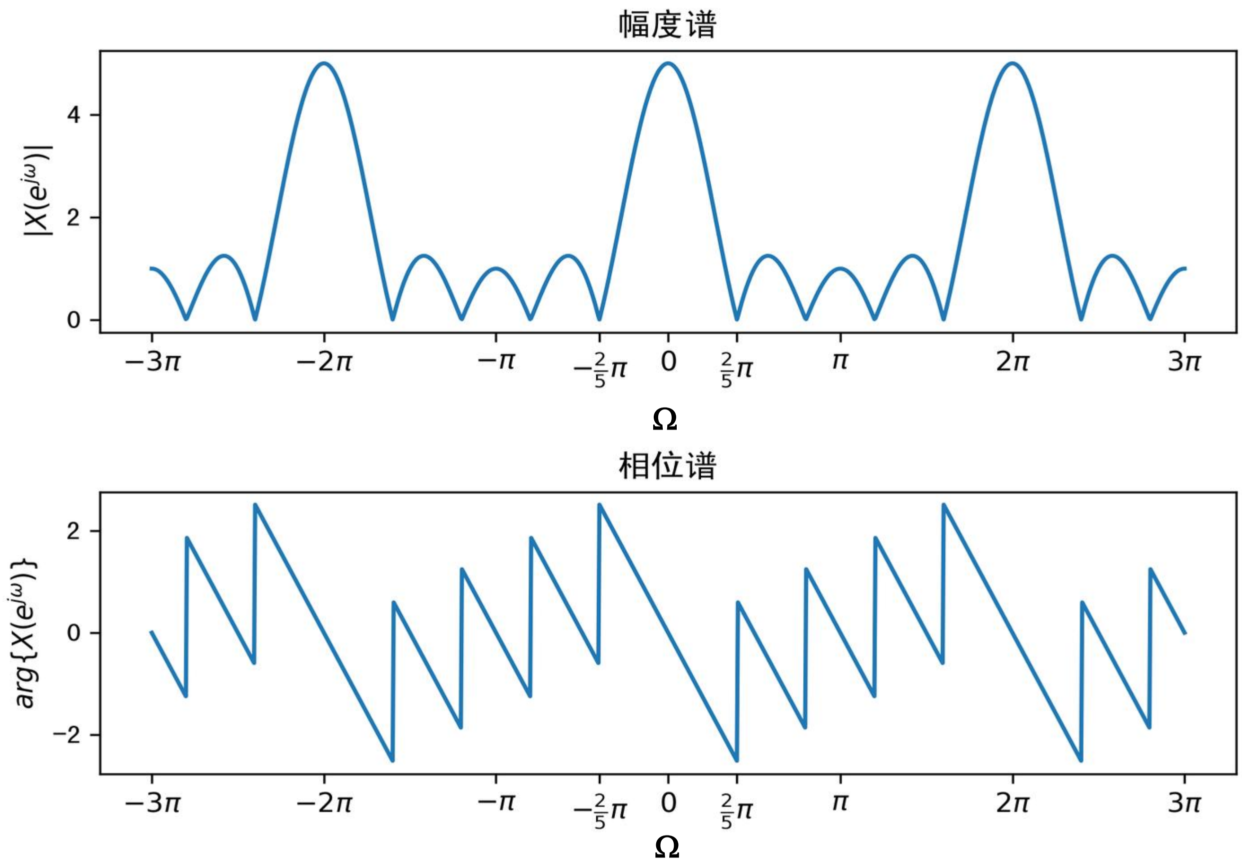
$$\left|X(\Omega)\right|=\left|\frac{\sin\frac{5}{2}\Omega}{\sin\frac{1}{2}\Omega}\right|$$

相频特性：

$$\varphi(\Omega)=-2\Omega+\arg\left|\frac{\sin\frac{5}{2}\Omega}{\sin\frac{1}{2}\Omega}\right|$$

二、非周期信号的频域分析
（DTFT :Discrete Time Fourier Transformation）

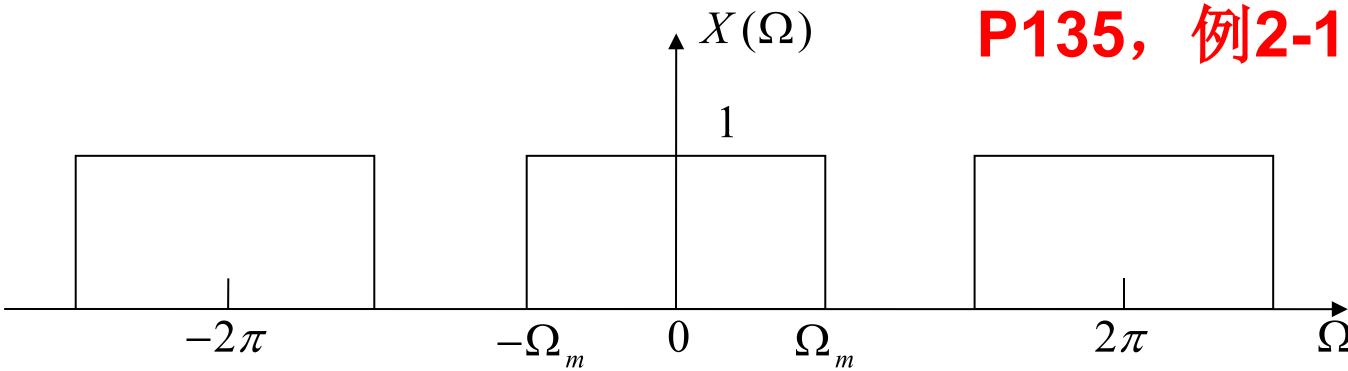




二、非周期信号的频域分析
（DTFT :Discrete Time Fourier Transformation）

例3 已知一周期连续频谱如图，求其相应的序列x(n)。

P135，例2-12,13,14,15



解：根据定义式：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m}e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{\Omega_m}{\pi}\frac{\sin\Omega_m n}{\Omega_m n}\qquad n\neq 0$$

$$n=0\qquad x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m}d\Omega=\frac{\Omega_m}{\pi}$$

二、非周期信号的频域分析

2. DTFT的性质

线性、时域和频域平移、时间翻转、共轭对称、时域和频域卷积、调制、频域微分等性质

P137，表2-1；
P138，表2-2；
P138，表2-3。常见离散序列的DTFT

3. DTFT与DFS及连续信号傅里叶变换（CTFT）之间的关系

P140 表2-4

※ 时域信号：连续、周期
※ 频谱形式：非周期、离散

CFS
$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \\ X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{cases}$$

※ 时域信号：连续、非周期
※ 频谱形式：非周期、连续

CFT
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{cases}$$

※ 时域信号：离散、周期
※ 频谱形式：周期、离散

DFS
$$\begin{cases} x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \mathrm{L} \\ X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} \end{cases}$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1$$

※ 时域信号：离散、非周期
※ 频谱形式：周期、连续

DTFT
$$\begin{cases} x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \end{cases}$$

四种傅里叶分析小结

1、级数变换适用于周期信号，一般傅里叶变换适用于非周期信号。

2、时域的周期性对应了频域的离散性，时域的离散性对应了频域的周期性。

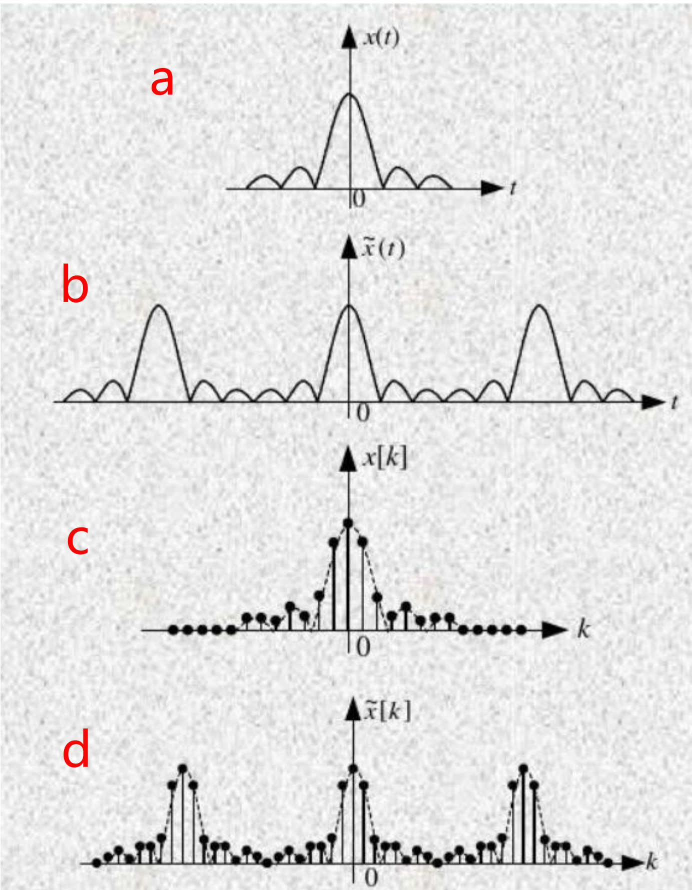
3、时域的非周期性对应了频域的连续性，时域的连续性对应了频域的非周期性。

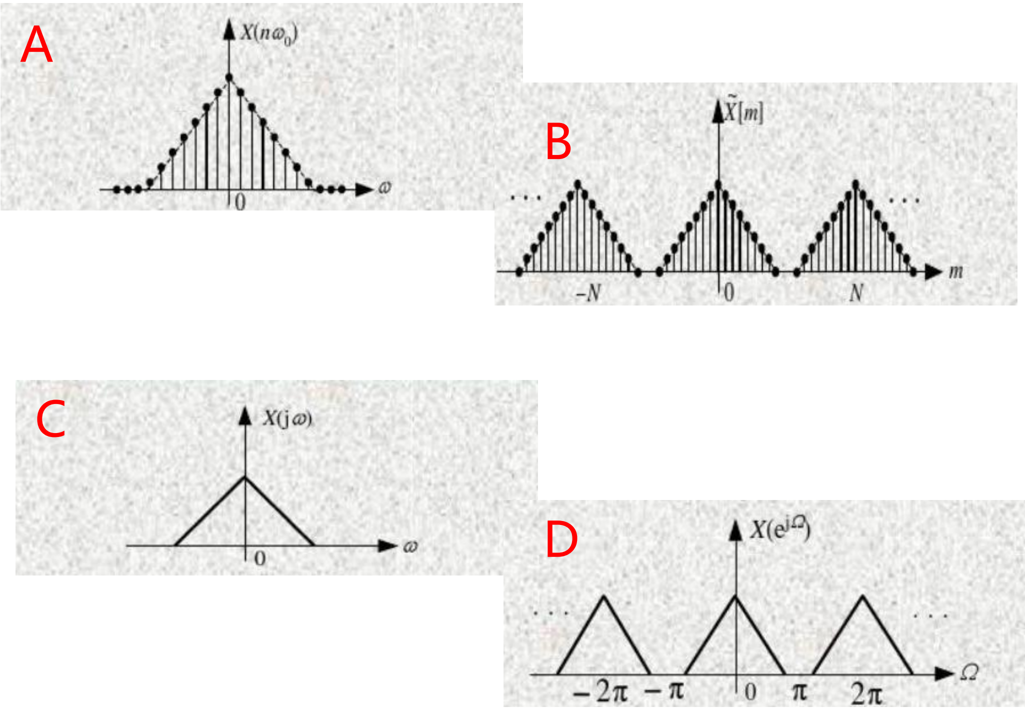
4、周期信号对应的是频谱函数，非周期信号对应的是频谱密度函数。

填空题 20分

设置

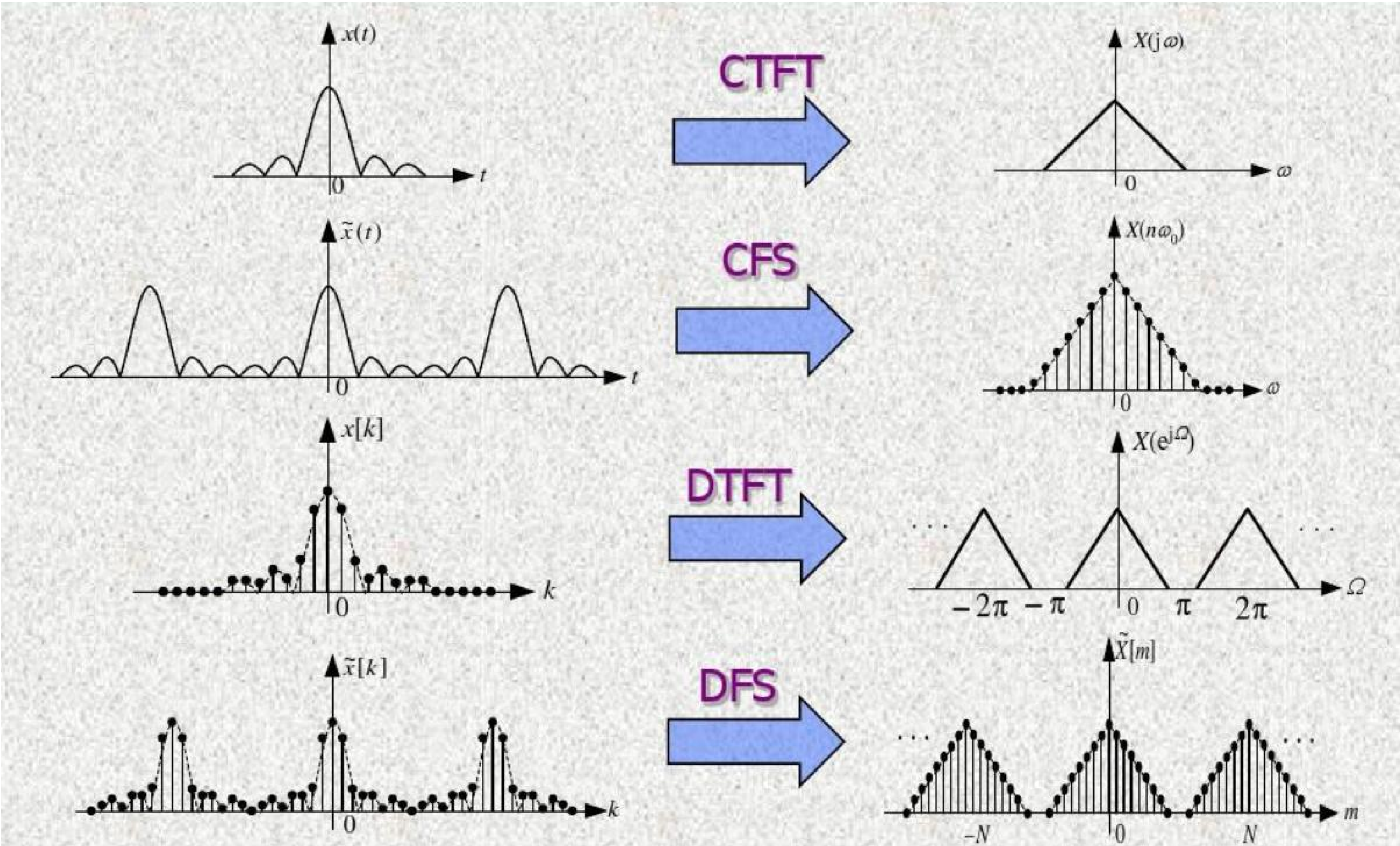
与信号a,b,c,d相对应的频谱分别是 [填空1] [填空2] [填空3] [填空4]





作答

四种傅里叶分析小结



第二节 离散信号的频域分析

一、周期信号的频域分析（DFS）

二、非周期信号的频域分析（DTFT）

三、离散傅里叶变换（DFT）

1）从DFS到DFT

2）DFT的性质

三、离散傅里叶变换
（DFT: Discrete Fourier Transformation）

0 预备知识

（1）余数运算和模值

如果 $n = n_1 + mN, 0 \le n_1 \le N-1$，$m$ 为整数，则有 $((n))_N = (n_1)$，此运算符表示 n 被 N 除，商为 m，余数为 n_1

$((n))_N$ 称为 n 对 N 取模值，或称为取余数或简称为取模值，n 模 N

三、离散傅里叶变换
（DFT: Discrete Fourier Transformation）

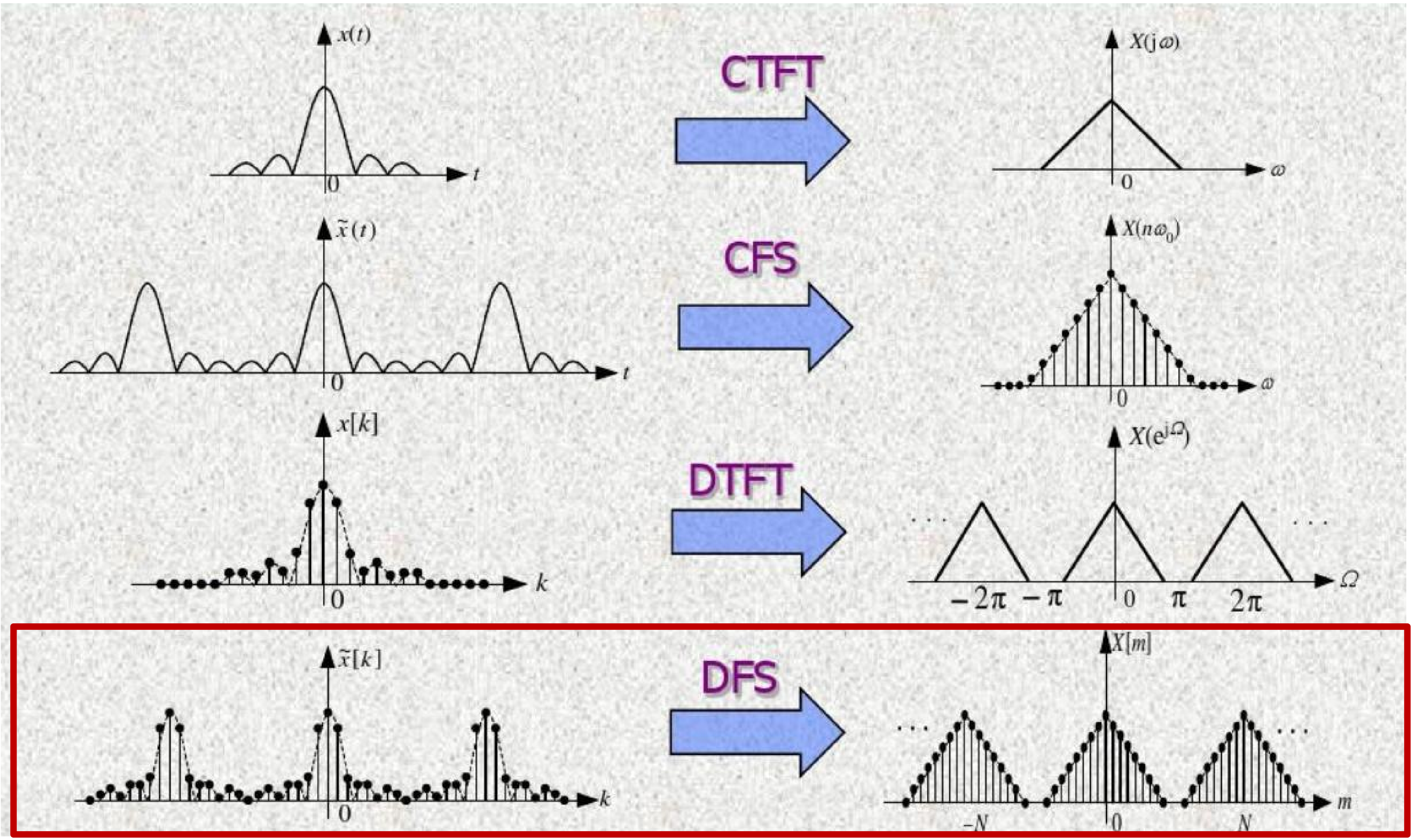
0 预备知识

（2）有限长序列 $x(n)$ 和周期序列 $x_p(n)$ 的关系

周期序列是有限长序列的周期延拓，有限长序列是周期序列的主值序列。

$$x_p(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN) = x((n))_N$$

$$x(n) = x_p(n) R_N(n)$$


x(t)
CTFT
X(jω)
x̃(t)
CFS
X(nω0)
x[k]
DTFT
X(e^jΩ)
−2π −π 0 π 2π
x̃[k]
DFS
X[m]
−N 0 N

三、离散傅里叶变换
（DFT: Discrete Fourier Transformation）

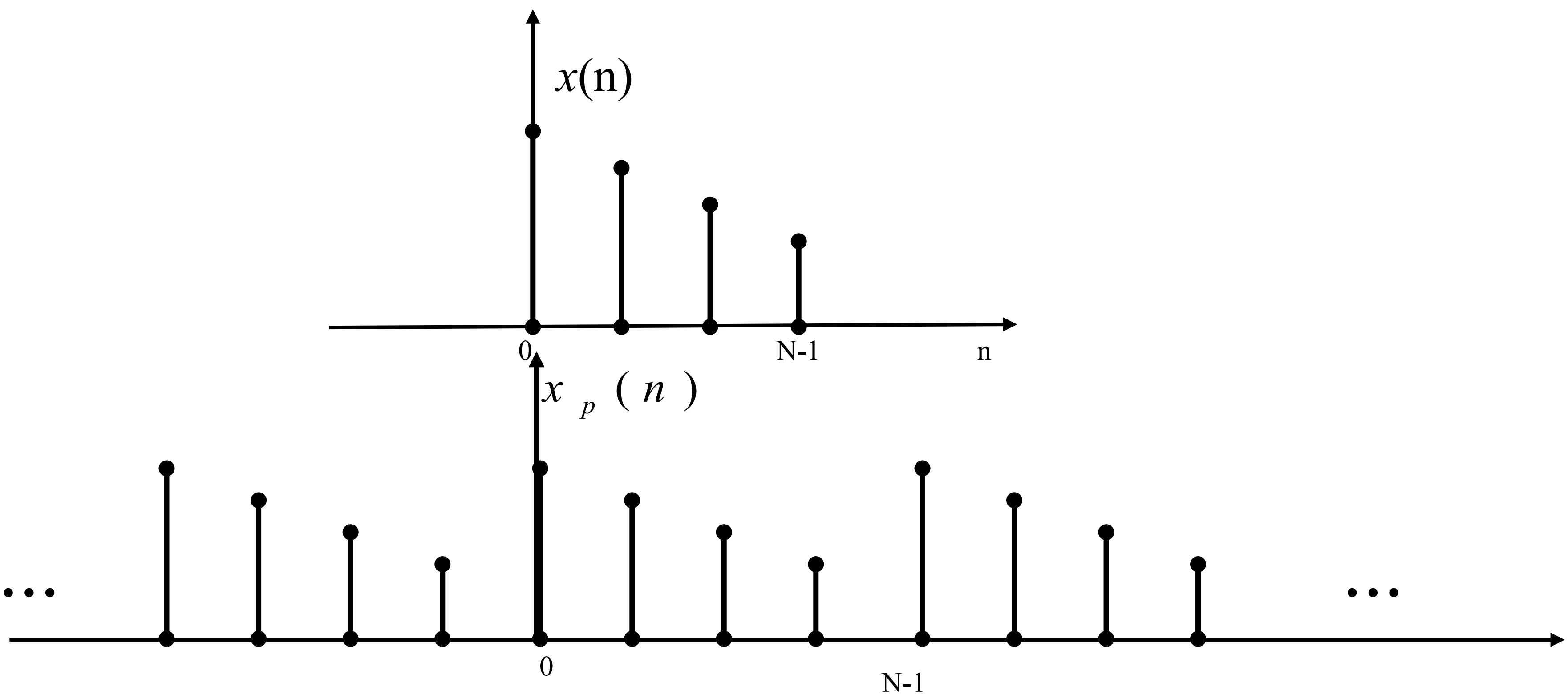
1. 从DFS到DFT

基本思想：把长度为N的有限长序列看成周期为N的周期序列的一个周期，利用离散傅里叶级数计算周期序列的一个周期，即计算了有限长序列的离散傅里叶变换DFT。

三、离散傅里叶变换
（DFT: Discrete Fourier Transformation）

1. 从DFS到DFT

有限长序列x(n)，（0≤n≤N-1），将其按周期N进行延拓，得到周期序列：$x_p(n)$，周期为N。



1. 从DFS到DFT

$$x_p(n)=\sum_r x(n+rN) \qquad (r\text{为任意整数})$$

x(n)—主值序列，也是周期序列$x_p(n)$的主值区间序列。

将$x_p(n)$展开成离散傅里叶系数DFS：

$$X_p(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-jk\Omega_0 n} \qquad k=0,1,2,3,\cdots,N-1$$

——是周期为N，离散的。

反变换：$$x_p(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_p(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} \qquad n=0,1,2,\ldots,N-1$$

——也是周期为N，离散的。

由于$X_p(k\Omega_0)$的周期性，可以取它的一个周期为主值区间（0≤k≤N-1）的$X_p(k\Omega_0)$记为$X(k\Omega_0)$。

1. 从DFS到DFT

$x_p(n)$ 和 $X_p(k\Omega_0)$ 都**取主值区间**，则有：

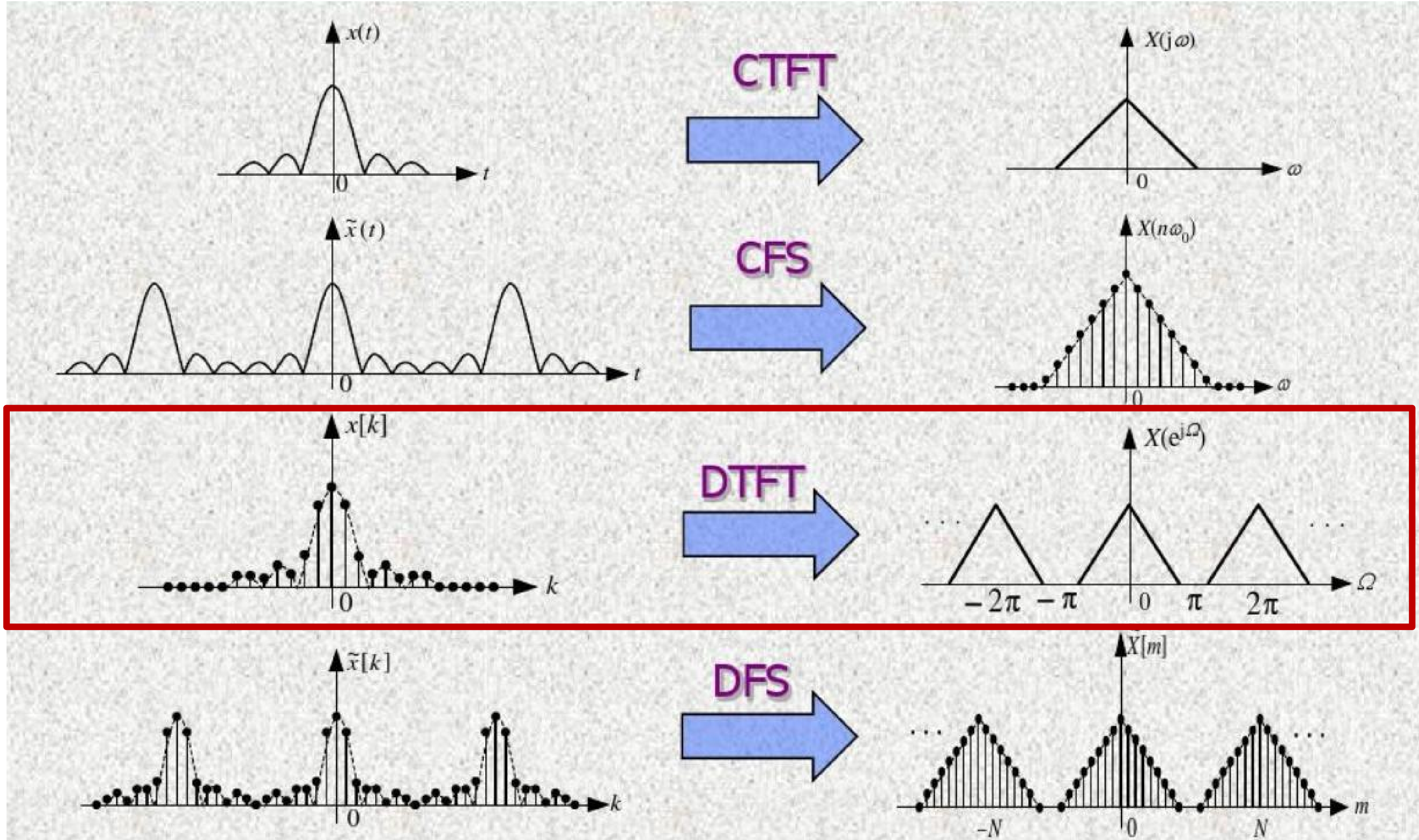
$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n} \qquad k = 0,1,2,3,\cdots,N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

与DTFT一样，非周期序列的傅立叶变换也是信号的频谱密度。定义长度为**N**的**有限长序列x(n)的离散傅里叶变换**（**DFT**）***X*(*k*)**:

$$\boxed{\begin{aligned} X(k) &= NX(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n} \qquad k = 0,1,2,3,\cdots,N-1 \\ x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} NX(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\Omega_0 n} \qquad \text{n=0,1,2}\cdots\text{,N}-1 \end{aligned}}$$

离散傅里叶变换对：$x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(k)$



$x(t)$
CTFT
$X(j\omega)$
$\tilde{x}(t)$
CFS
$X(n\omega_0)$
$x[k]$
DTFT
$X(e^{j\Omega})$
-2π $-\pi$ 0 π 2π
$\tilde{x}[k]$
DFS
$X[m]$
$-N$ 0 N

1. 从DFS到DFT

例1　$x(n)=R_4(n)$，求$x(n)$的8点和16点DFT。

解：设变换区间N=8，则

$$\Omega_{01}=\frac{2\pi}{8}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)e^{-jk\Omega_{01}n}=\sum_{n=0}^{3}e^{-jk\frac{2\pi}{8}n}$$

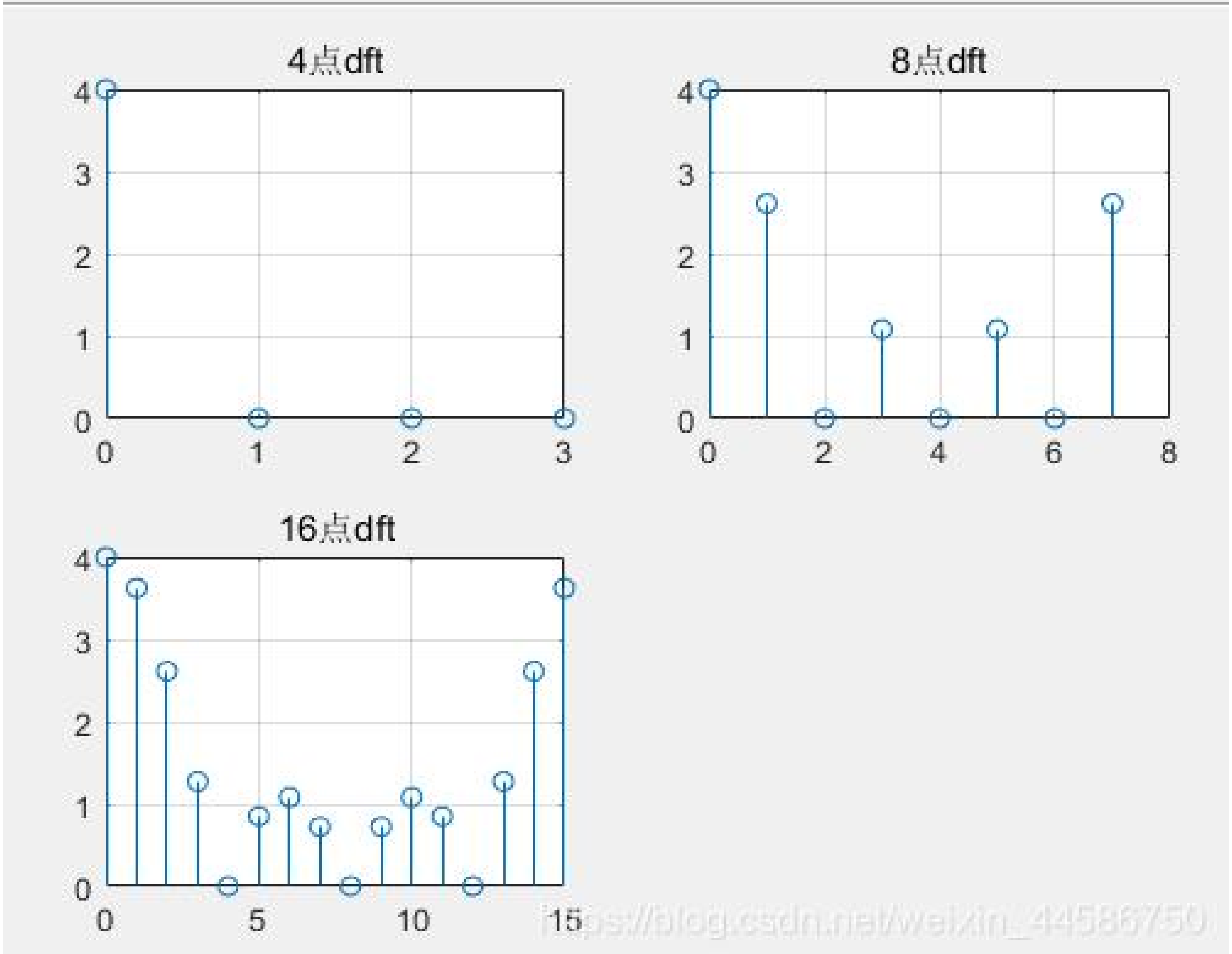
$$=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)},k=0,1,\cdots 7$$

设N=16，则

$$\Omega_{02}=\frac{2\pi}{16}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)e^{-jk\Omega_{02}n}=\sum_{n=0}^{3}e^{-jk\frac{2\pi}{16}n}$$

$$=e^{-j\frac{3}{16}\pi k}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}k)}{\sin(\frac{\pi}{16}k)},k=0,1,\cdots 15$$


4点dft
8点dft
16点dft

求下列序列的4点DFT：$x(0)=1, x(1)=0, x(2)=1, x(3)=0$

2. DFT 的性质 P147 表2-5/表2-6

（1） 线性性质

$$ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{DFT} aX[k] + bY[k],$$

此处 x[n] 和y[n] **长度相同 (若不同则加零)**

（2） 圆周移位性质

◆ 定义：一个长度为 N的有限长序列 $x(n)$的圆周移位

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

$$x_p(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN) = x((n))_N$$

2. DFT 的性质

（2） 圆周移位性质 $y(n)=x((n+m))_N R_N(n)$

实现步骤：

① 将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓得到周期序列

$$x_p(n)=x((n))_N$$

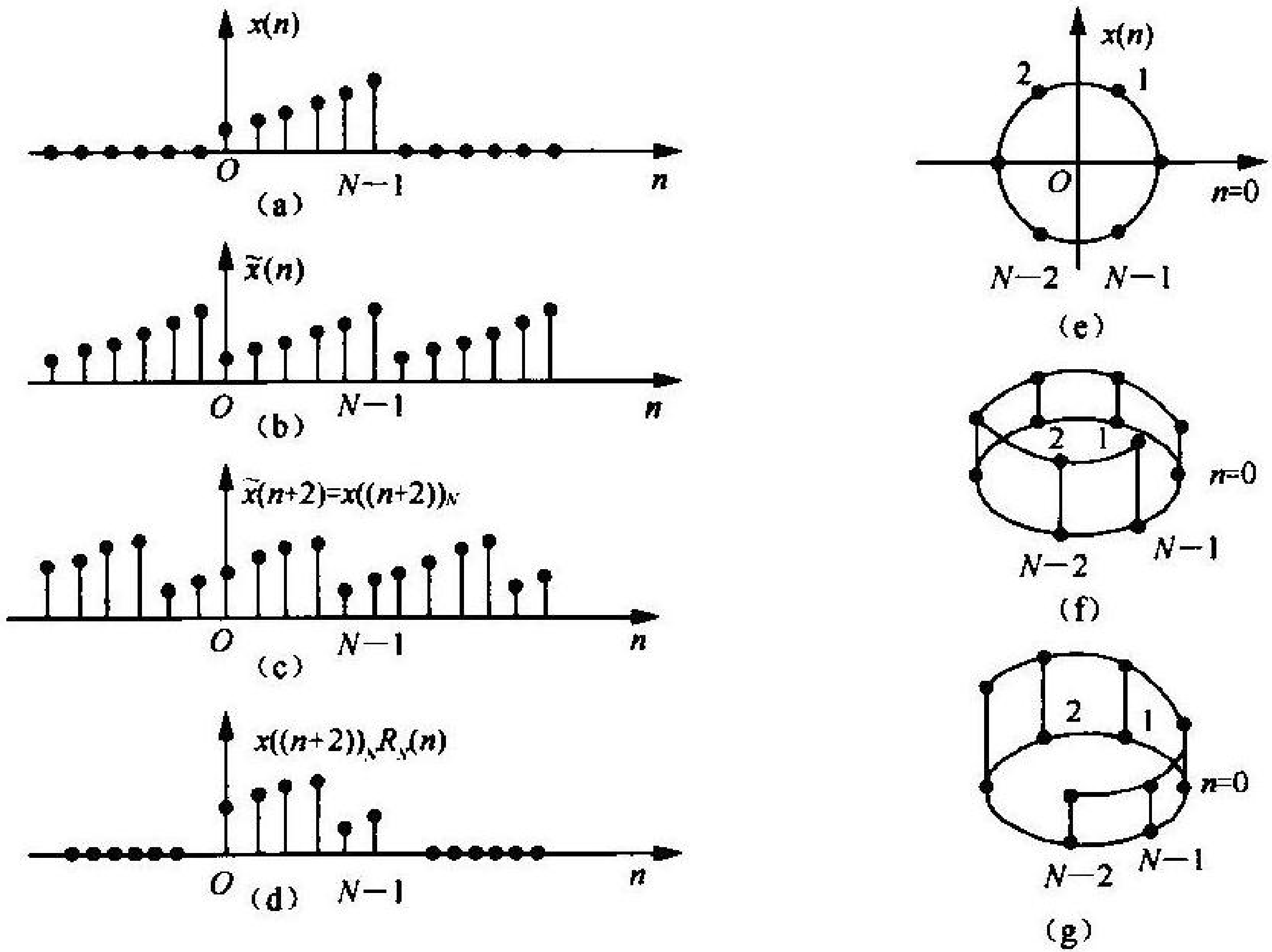
② 将 $x_p(n)$ 加以移位：$x((n+m))_N=x_p(n+m)$

③ 对移位的周期序列 $x((n+m))_N=x_p(n+m)$ 取主值区间 $(n=0\sim N-1)$ 上的序列值，即 $x((n+m))_N R_N(n)$

一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位序列 $y(n)$ 仍是一个长度为 N 的有限长序列。

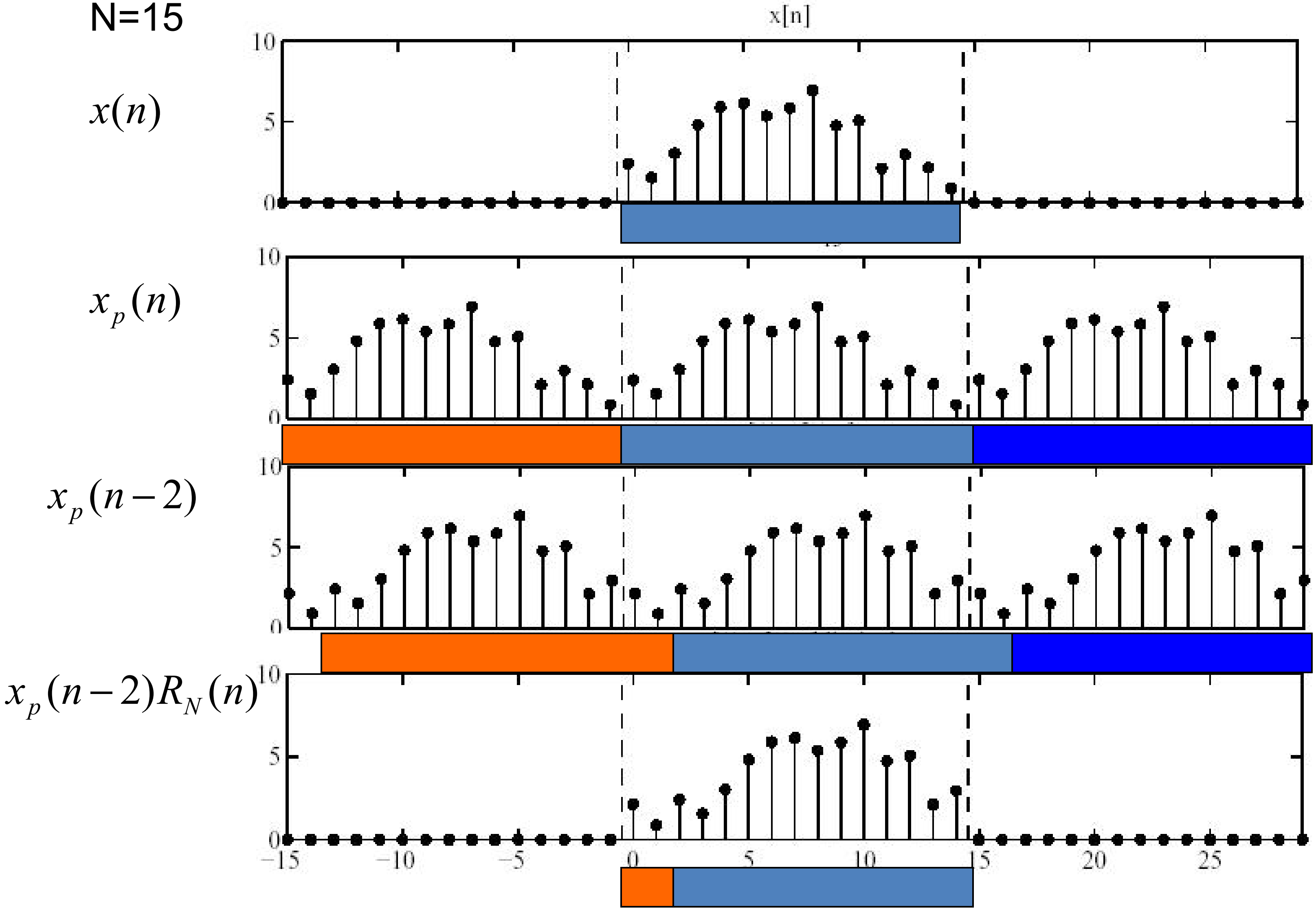
（2） 圆周移位性质 $y(n)=x((n+m))_N R_N(n)$

实现步骤



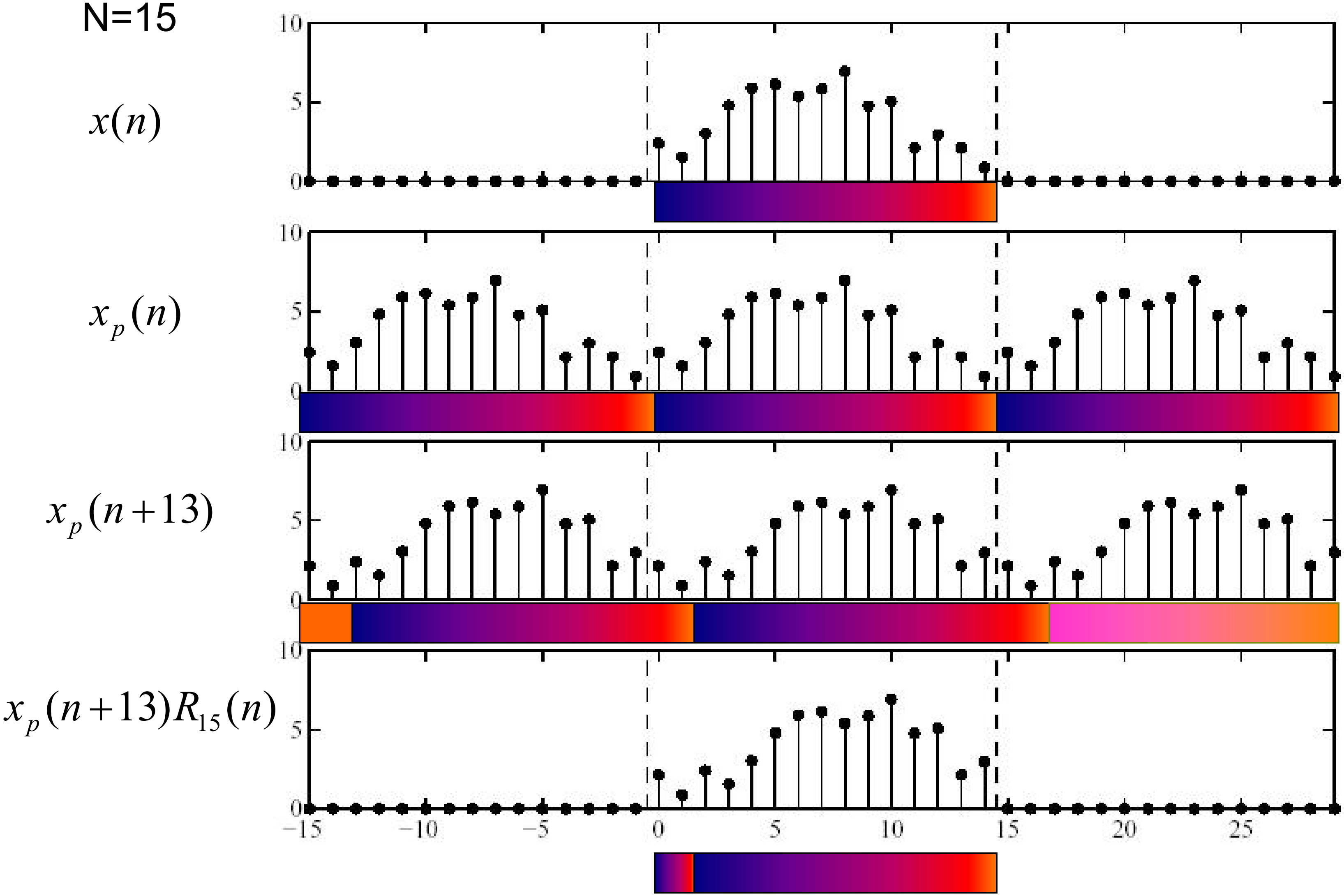
DFT 的性质：圆周移位

N=15



DFT 的性质：圆周移位

N=15



2. DFT 的性质

（2） 圆周移位性质

◆ 时域圆周移位：

$$y(n)=x((n\pm m))_N R_N(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} e^{\pm j\Omega_0 mk}X(k)$$

◆ 频域圆周移位：

$$e^{\mp j\Omega_0 k_0 n}x(n) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X((k\pm k_0))_N R_N(k)$$

（3） 圆周卷积性质

◆ 时域圆周卷积

设 $x(n)$、$h(n)$ 都是长度为 N 的有限长序列，且

$$x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(k),\quad h(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} H(k)$$

则

$$x(n) \otimes h(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(k)H(k)$$

$$x(n) \otimes h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N R_N(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x((n-m))_N R_N(n)$$

2. DFT 的性质

例 3-16 已知 $x(n)=[\underset{\uparrow}{2},1,2,1]$，$h(n)=[\underset{\uparrow}{1},2,3,4]$，计算两个序列的圆周卷积 $y(n)=x(n)\circledast h(n)$。

解 可以用圆周卷积定义和圆周卷积性质两种方法求解。

第一种方法：

$$y(n)=\sum_{m=0}^{3}x(m)h((n-m))_4R_4(n)$$

$$\begin{aligned}y(0)&=\sum_{m=0}^{3}x(m)h((-m))_4R_4(n)\\&=x(0)h(0)+x(1)h(3)+x(2)h(2)+x(3)h(1)\\&=2\times1+1\times4+2\times3+1\times2=14\end{aligned}$$

同理可求得 $y(1)=16$，$y(2)=14$，$y(3)=16$。

第二种方法：

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=0}^{3}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}\\&=x(0)+x(1)e^{-jk\frac{\pi}{2}}+x(2)e^{-jk\pi}+x(3)e^{-jk\frac{3\pi}{2}}\\&=2+e^{-jk\frac{\pi}{2}}+2e^{-jk\pi}+e^{-jk\frac{3\pi}{2}}\quad k=0,1,2,3\end{aligned}$$

得 $X(0)=6$，$X(1)=0$，$X(2)=2$，$X(3)=0$

同理可得 $H(0)=10$，$H(1)=-2+2j$，$H(2)=-2$，$H(3)=-2-2j$

2. DFT 的性质

例 3-16 已知 $x(n)=[\underset{\uparrow}{2},1,2,1]$，$h(n)=[\underset{\uparrow}{1},2,3,4]$，计算两个序列的圆周卷积 $y(n)=x(n)\circledast h(n)$。

解 可以用圆周卷积定义和圆周卷积性质两种方法求解。

根据圆周卷积性质式(3-52)，有

$$Y(k)=X(k)H(k)=[\underset{\uparrow}{60},0,-4,0]$$

由 DFT 反变换式(3-47)，可求得

$$y(n)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}Y(k)e^{jk\frac{2\pi}{4}n}=\frac{1}{4}(60-4e^{j\pi n})$$

代入 $n=0,1,2,3$，得

$$y(n)=x(n)\circledast h(n)=[\underset{\uparrow}{14},16,14,16]$$

显然，两种方法的计算结果完全相同。

2. DFT 的性质

（3） 圆周卷积性质

◆ 有限长序列的线性卷积和圆周卷积

线性卷积： **结果长度为L+M-1**

$x(n)$、$h(n)$ 分别是长度为 N、M 的有限长序列

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$$0 \le m \le N-1$$

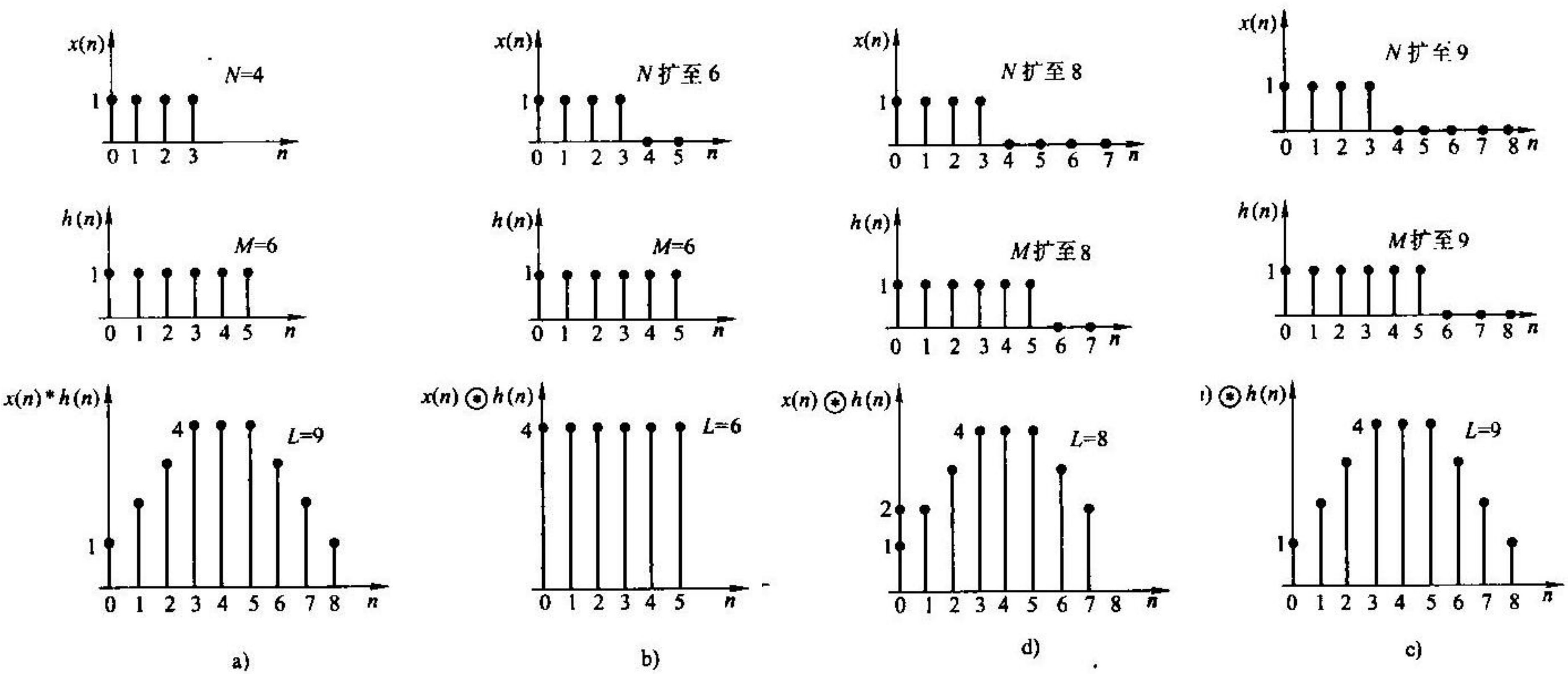
$$0 \le n-m \le M-1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le n \le N+M-2$$

2. DFT 的性质

◆ 有限长序列的线性卷积和圆周卷积

线性卷积可以通过扩增后序列的圆周卷积来进行计算



（3） 圆周卷积性质

◆ 频域圆周卷积

设 $x(n)$、$h(n)$ 都是长度为 N 的有限长序列，且

$$x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(k),\quad h(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} H(k)$$

则

$$x(n)h(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{N} X(k) \otimes H(k)$$

$$X(k) \otimes H(k) = \sum_{l=0}^{N-1} X(l) H((k-l))_N R_N(k)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} H(l) X((k-l))_N R_N(k)$$