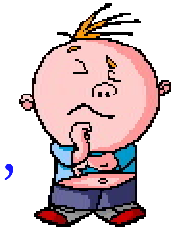
线性代数（第六版）

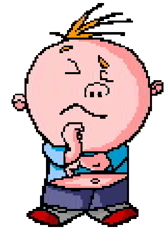
引言：线性代数是研究什么的？



线性代数是数学的一个分支，它的研究对象是向量，向量空间（或称线性空间），线性变换和有限维的线性方程组. 向量空间是现代数学的一个重要课题；因而，线性代数被广泛地应用于抽象代数和泛函分析中；通过解析几何，线性代数得以被具体表示. 线性代数的理论已被泛化为算子理论. 由于科学研究中的非线性模型通常可以被近似为线性模型，使得线性代数被广泛地应用于自然科学和社会科学中.

在研究线性方程组，因式化简，方程求根，高维几何，多元积分方面都有广泛的应用.

引言：线性代数是研究什么的？



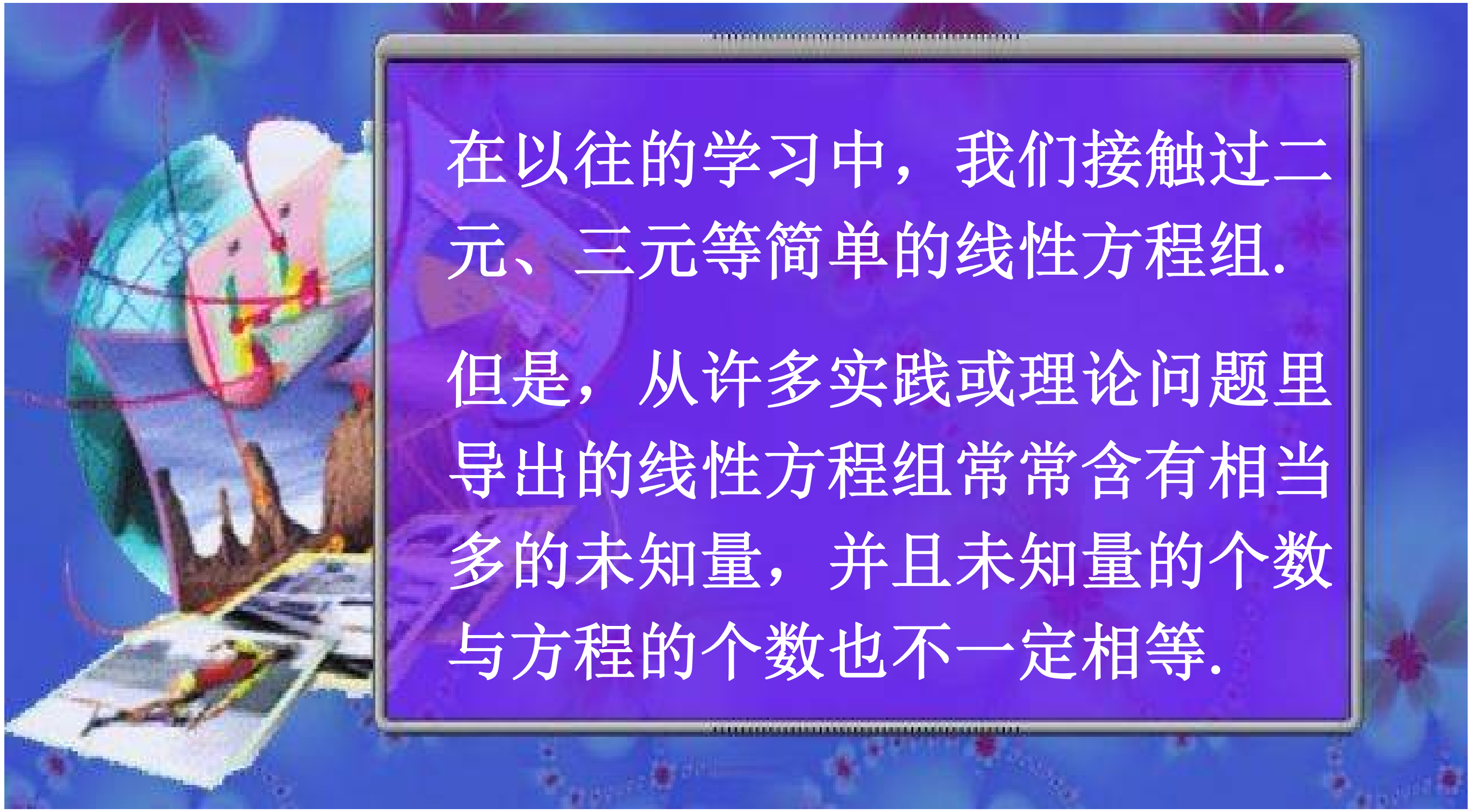
线性代数是讨论矩阵理论、与矩阵结合的有限维向量空间及其线性变换理论的一门学科.

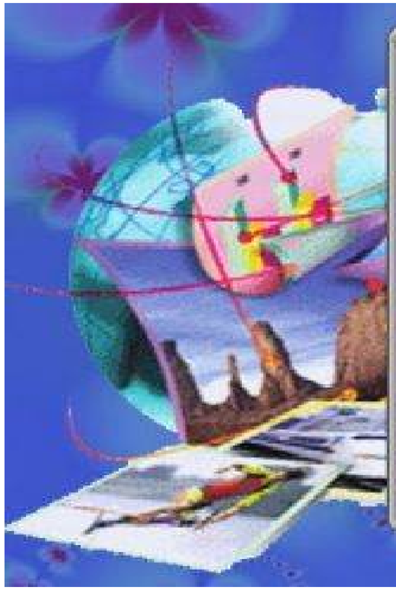
①线性代数在数学、力学、物理学和技术学科中有各种重要应用，因而它在各种代数分支中占居首要地位；

②在计算机广泛应用的今天，计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术、机器学习无不以线性代数为其理论和算法基础的一部分；

③该学科所体现的几何观念与代数方法之间的联系，从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等，对于强化人们的数学训练，增益科学智能是非常有用的；

④ 随着科学的发展，我们不仅要研究单个变量之间的关系，还要进一步研究多个变量之间的关系，各种实际问题在大多数情况下可以线性化，而由于计算机的发展，线性化了的问题又可以计算出来，线性代数正是解决这些问题的有力工具.


在以往的学习中，我们接触过二元、三元等简单的线性方程组.
但是，从许多实践或理论问题里导出的线性方程组常常含有相当多的未知量，并且未知量的个数与方程的个数也不一定相等.



我们先讨论未知量的个数与方程的个数相等的特殊情形.

在讨论这一类线性方程组时，我们引入行列式这个计算工具.

第一章　行列式

- 内容提要

§1　二阶与三阶行列式

§2　全排列和对换

§3　n 阶行列式的定义

行列式的概念

§4　行列式的性质

§5　行列式按行（列）展开

行列式的性质及计算

•行列式是线性代数的一种工具！

•学习行列式主要就是要能计算行列式的值.

§1 二阶与三阶行列式

我们从最简单的二元线性方程组出发，探求其求解公式，并设法化简此公式.

一、二元线性方程组与二阶行列式

二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$

用消元法求其解：

$$a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22} \quad \Leftarrow \quad (1)\times a_{22}$$

$$-)\quad a_{21}a_{12}x_1 + \boxed{a_{22}a_{12}}x_2 = b_2a_{12} \quad \Leftarrow \quad (2)\times a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \text{(1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \text{(2)} \end{cases}$

$$\boxed{a_{21}a_{11}}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 = b_2a_{11} \longleftarrow (2)\times a_{11}$$

$$-)\quad \boxed{a_{11}a_{21}}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21} \longleftarrow (1)\times a_{21}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

二元线性方程组

$$\begin{cases} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}} \begin{matrix} x_1 + \\ x_1 + \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}} \begin{matrix} x_2 = b_1 \\ x_2 = b_2 \end{matrix} \end{cases}$$

求解公式为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{\boxed{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{\boxed{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}} \end{cases}$$

请观察，此公式有何特点？

- 分母相同，由方程组的四个系数确定.
- 分子、分母都是四个数分成两对相乘再相减而得.

二元线性方程组

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$$

我们引进新的符号来表示“四个数分成两对相乘再相减”.

数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

其求解公式为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \end{cases}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为由该数表所确定的二阶行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中，$a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$ 称为元素.

i 为行标，表明元素位于第i 行；

j 为列标，表明元素位于第j 列.

原则：横行竖列

二阶行列式的计算 ——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

即：主对角线上两元素之积－副对角线上两元素之积

- $a_{ij}\,(i = 1,2; j = 1,2)$称为行列式的元素或元.
- i为行标，j为列标

二元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$

若令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ （方程组的系数行列式）

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

例1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

解 因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12-(-2) = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-24 = -21$$

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{14}{7} = 2,\qquad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-21}{7} = -3$

二、三阶行列式

定义1 设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

原则：横行竖列

引进记号

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式.

二阶行列式的对角线法则并不适用！

三阶行列式的计算 ——对角线法则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

实线上的三个元素的乘积冠正号，
虚线上的三个元素的乘积冠负号.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

注意：对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

例2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解　按对角线法则，有

$$D=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$$

$$-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)$$

$$=-4-6+32-4-8-24$$

$$=-14.$$

例3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 方程左端

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}$$

$= 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6,$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 得

$x = 2$ 或 $x = 3.$