作业（第四章课后习题）P256-257

3、4、5、10

例： 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3f(t)$$

激励信号$f(t)=e^{-t}u(t)$

系统的初始状态为$y(0_-)=1$，求系统的完全响应$y(t)$。

以及零输入响应和零状态响应

复习要点

- ➢深入理解系统的几个属性，**掌握通过属性对系统进行分类**
- ➢了解线性时不变连续/离散系统的数学模型表示（**线性常微分/差分方程**）
- ➢**重点掌握线性时不变系统的响应的时域分析法**
  - ✓全解（完全响应）=齐次解+特解　（经典法）
  - ✓**完全响应=零输入响应+零状态响应　（时域分析法）**
  - ✓深入理解零输入响应的定义，**掌握零输入响应的求解方法**
  - ✓深入理解零状态响应的定义，**掌握零状态响应的求解方法（输入信号与单位冲激响应的卷积）**
  - ✓**重点掌握LTI系统单位冲激响应的求解（冲激平衡法）**

系统及其性质

- 系统的性质
  - ✓ 记忆性
    - 输出只与当前时刻输入相关
  - ✓ 因果性
    - 激励不早于输出
  - ✓ 可逆性
    - 输入不同，输出不同，输入输出一一对应
  - ✓ 稳定性
    - 输入有界，输出有界
  - ✓ 时不变性
    - 输入信号有时域上的平移，输出也有相同的平移
  - ✓ 线性
    - 满足齐次性和叠加性

3. 考虑一离散时间系统，其输入为 $x(n)$，输出为 $y(n)$，系统的输入－输出关系为

$$y(n)=x(n)x(n-2)$$

(1) 系统是无记忆的吗?

(2) 当输入为 $A\delta(n)$，A 为任意实数或复数，求系统输出。

(3) 系统是可逆的吗?

3. (1) $y(n)=x(n)x(n-2)$

以 $n=0$ 为例 $y(0)=x(0)x(-2)$

不满足输出信号仅取决于该时刻的输入信号

∴信号不是无记忆的

(2) $x(n)=A\delta(n)$

$y(n)=x(n)x(n-2)=A^2\delta(n)\delta(n-2)=0$

(3) 根据(2)的结果，系统不是可逆的，∵不满足输入输出一一对应条件

4. 考虑一个连续时间系统，其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的关系为 $y(t)=x(\sin t)$，

(1) 该系统是因果的吗？ (t>0)

(2) 该系统是线性的吗？

4. $y(t)=x(\sin t)$

(1) 因果性：系统在任何时刻的输出仅取决于该时刻及之前的输入值，即 $y(t)=f\{x(t-\tau),\tau\geq 0\}$

$y(t)=x(\sin t)$ $\because t\geq \sin t$

$\therefore$ 满足因果性条件，为因果系统

(2) 线性：齐次性和叠加性

即 $ax_1(t)+bx_2(t)\to ay_1(t)+by_2(t)$

$x_1(t)\to y_1(t)=x_1(\sin t)$，$x_2(t)\to y_2(t)=x_2(\sin t)$

设 $A(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$

$$A(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow B(t)$$

$$\begin{aligned}A(t)\to B(t)&=A(\sin t)\\&=ax_1(\sin t)+bx_2(\sin t)\\&=ay_1(t)+by_2(t)\end{aligned}$$

$\therefore$ 满足线性条件，为线性系统

5. 判断下列输入–输出关系的系统是否是线性、时不变，或两者俱有。

(1) $y(t)=t^2x(t-1)$

(2) $y[n]=x^2[n-2]$

(3) $y[n]=x[n+1]-x[n-1]$

线性：$ax_1(t)+bx_2(t)\rightarrow ay_1(t)+by_2(t)$

时不变：$x(t-t_0)\rightarrow y(t-t_0)$

(1) $y(t)=t^2x(t-1)$ $\quad (x(t)\rightarrow t^2x(t-1))$

$y(t-t_0)=(t-t_0)^2x(t-t_0-1)$

$x(t-t_0)\rightarrow t^2x(t-t_0-1)\neq y(t-t_0)$

∴ 时变系统

$x_1(t)\rightarrow y_1(t)=t^2x_1(t-1)$，$x_2(t)\rightarrow y_2(t)=t^2x_2(t-1)$

$$A(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\rightarrow t^2A(t-1)=t^2[ax_1(t-1)+bx_2(t-1)]$$
$$=at^2x_1(t-1)+bt^2x_2(t-1)$$
$$=ay_1(t)+by_2(t)$$

∴ 线性系统

5. 判断下列输入－输出关系的系统是否是线性、时不变，或两者俱有。

(1) $y(t)=t^2x(t-1)$

(2) $y[n]=x^2[n-2]$

(3) $y[n]=x[n+1]-x[n-1]$

线性 : $ax_1(t)+bx_2(t) \to ay_1(t)+by_2(t)$

时不变 : $x(t-t_0) \to y(t-t_0)$

(2) $y[n]=x^2[n-2]$

$x(n-N) \to x^2(n-N-2) = y(n-N)$

$y(n-N) = x^2[n-N-2]$

∴ 时不变系统

$A[n]=ax_1[n]+bx_2[n] \to A^2[n-2] = (ax_1[n-2]+bx_2[n-2])^2$

$= a^2x_1^2[n-2]+b^2x_2^2[n-2]+2ab\,x_1[n-2]x_2[n-2]$

$x_1[n] \to y_1[n]=x_1^2[n-2]$ $\quad \neq a_1y_1[n]+by_2[n]$

$x_2[n] \to y_2[n]=x_2^2[n-2]$

∴ 非线性系统

5. 判断下列输入－输出关系的系统是否是线性、时不变，或两者俱有。

(1) $y(t)=t^2x(t-1)$

(2) $y[n]=x^2[n-2]$

(3) $y[n]=x[n+1]-x[n-1]$

线性：$ax_1(t)+bx_2(t)\rightarrow ay_1(t)+by_2(t)$

时不变：$x(t-t_0)\rightarrow y(t-t_0)$

(3) $y[n]=x[n+1]-x[n-1]$

$x[n-N]\rightarrow x(n-N+1)-x[n-N-1]=y[n-N]$

$y[n-N]=x[n-N+1]-x[n-N-1]$

∴时不变系统

$A[n]=ax_1[n]+bx_2[n]\rightarrow A[n+1]-A[n-1]$

$x_1[n]\rightarrow x_1[n+1]-x_2[n-1]$

$x_2[n]\rightarrow x_2[n+1]-x_2[n-1]$

$=ax_1[n+1]+bx_2[n+1]-[ax_1[n-1]+bx_2[n-1]]$

$=a[x_1(n+1]-x_1[n-1]]+b[x_2[n+1]-x_2[n-1]]$

$=ay_1[n]+by_2[n]$

∴线性系统

经典时域分析法

微分/差分方程的全解即系统的完全响应, 由齐次解$y_h(t)$和特解$y_p(t)$组成

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- 齐次解$y_h(t)$的形式由齐次方程的特征根确定
- 特解$y_p(t)$的形式由方程右边激励信号的形式确定

齐次解$y_h(t)$的形式

（1）特征根是不等实根$s_1, s_2, \ldots, s_n$

$$y_h(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t}$$

（2）特征根是相等实根$s_1 = s_2 = \ldots = s_n$

$$y_h(t) = K_1 e^{st} + K_2 t e^{st} + \cdots + K_n t^{n-1} e^{st}$$

（3）特征根是成对共轭复根 $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i, \quad i = n/2$

$$y_h(t) = e^{\sigma_1 t}(K_1 \cos\omega_1 t + K_1 \sin\omega_1 t) + \cdots + e^{\sigma_i t}(K_i \cos\omega_i t + K_i \sin\omega_i t)$$

常用激励信号对应的特解形式

输入信号	特解
K	A
Kt	$A+Bt$
$K\mathrm{e}^{-at}$(特征根 $s\neq -a$)	$A\mathrm{e}^{-at}$
$K\mathrm{e}^{-at}$(特征根 $s=-a$)	$At\mathrm{e}^{-at}$
$K\sin\omega_0 t$ 或 $K\cos\omega_0 t$	$A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t$
$K\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 t$ 或 $K\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t$	$A\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 t+B\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t$

例： 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3f(t)$$

激励信号$f(t)=e^{-t}u(t)$

系统的初始状态为$y(0^-)=1$，求系统的完全响应$y(t)$。

① 求齐次解 $y_h(t)$

特征方程 $\lambda+2=0$

$\lambda=-2$

$\therefore y_h(t)=k_1e^{-2t}$

② 求特解 $y_p(t)$

$f(t)=e^{-t}u(t)$ $-1\neq$ 特征根 -2

$\therefore y_p(t)=Ae^{-t}$ ，$t>0$

将特解代入原方程

$(Ae^{-t})'+2Ae^{-t}=3e^{-t}$

$-Ae^{-t}+2Ae^{-t}=3e^{-t}$

$A=3$

$\therefore y_p(t)=3e^{-t}$

③求全解

$\therefore y(t)=y_h(t)+y_p(t)=k_1e^{-2t}+3e^{-t}$

$y(0^-)=k_1+3=1\Rightarrow k_1=-2$

$\therefore y(t)=-2e^{-2t}+3e^{-t}$ ，$t>0$

系统的时域分析

《信号分析与处理》课程采用的思想，是将系统的响应，也就是微分/差分方程的解，分成零输入响应和零状态响应两部分。

没有外界输入激励，仅由原始储能引起的响应

没有原始储能，仅有外加激励引起的响应

LTI系统输出（全响应）$y(t)$ =零状态响应$y_{zs}(t)$ + 零输入响应$y_{zi}(t)$

零输入响应$y_{zi}(t)$：求线性微分/差分方程求齐次解

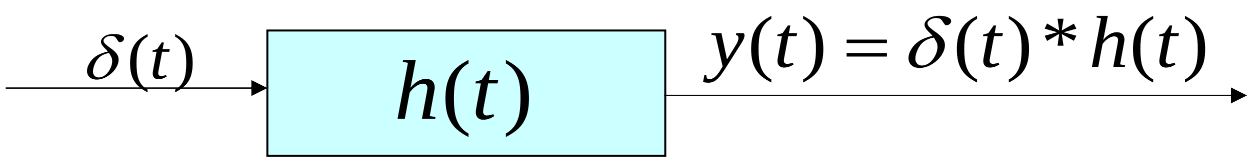
零状态响应 $y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$ (连续系统)

$y_{zs}(n) = x(n) * h(n)$ (离散系统)

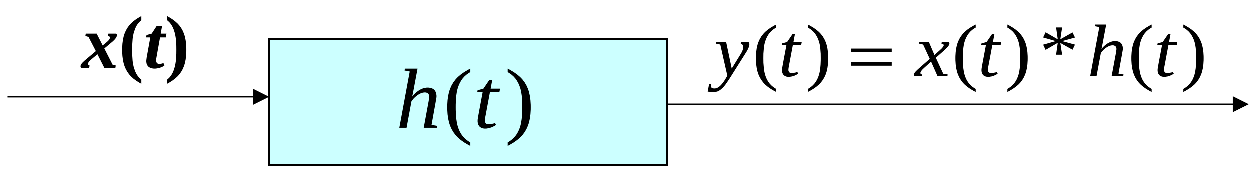
一、时域分析法

连续系统的时域特征

- 在零初始条件下，**LTI**连续系统对激励为单位冲激函数$\boldsymbol{\delta(t)}$所产生的零状态响应，记为$\boldsymbol{h(t)}$



- 任意时域信号$\boldsymbol{x(t)}$激励时系统的零状态响应



$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta^{(k)}(t)$$

连续LTI系统的单位冲激响应$h(t)$

➢根据方程两边函数项匹配的原则，$h(t)$为:

$n > m$ 时，$h(t)$具有形式:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

冲激平衡法

$n = m$ 时，$h(t)$具有形式:

$$h(t) = c\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

$n < m$ 时，$h(t)$具有形式:

$$\mathrm{h(t)} = \sum_{j=0}^{m-n} c_j \delta^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

将$h(t)$代入微分方程，使方程两边平衡,确定系数C_i，A_i

离散LTI系统的单位冲激响应 $h(n)$

$$h(n)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i^{\,n} u(n) & n>m \\ \sum_{j=0}^{m-n} C_j \delta(n-j)+\sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^{\,n} u(n) & n\le m\end{cases}$$

将$h(n)$代入差分方程，使方程两边平衡,确定系数C_i，A_i

例： 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3f(t)$$

激励信号$f(t)=e^{-t}u(t)$

系统的初始状态为$y(0^-)=1$，求系统的完全响应$y(t)$。

以及零输入响应和零状态响应

零输入响应即$f(t)=0$

$y'(t)+2y(t)=3f(t)$

$\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-2$

$\therefore y_{zi}(t)=A_1e^{-2t}u(t)$

$\therefore y(0)=A_1=1$

$\therefore y_{zi}(t)=e^{-2t}, t>0$

零状态响应

$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$

求单位冲激响应$h(t)$

$y'(t)+2y(t)=3f(t)$

$h'(t)+2h(t)=3\delta(t)$

$\lambda+2 \Rightarrow \lambda=-2$

$\therefore h(t)=A_1e^{-2t}u(t)$

$(A_1e^{-2t}u(t))'+2(A_1e^{-2t}u(t))=3\delta(t)$

$A_1e^{-2t}\delta(t)-2A_1e^{-2t}u(t)+2A_1e^{-2t}u(t)$

$=3\delta(t)$

$\Rightarrow A_1=3$

$\therefore h(t)=3e^{-2t}u(t)$

例： 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3f(t)$$

激励信号$f(t)=e^{-t}u(t)$

系统的初始状态为$y(0^-)=1$，求系统的完全响应$y(t)$。

以及零输入响应和零状态响应

零输入响应 即$f(t)=0$

$y'(t)+2y(t)=3f(t)$

$\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-2$

$\therefore y_{zi}(t)=A_1e^{-2t}u(t)$

$\therefore y(0)=A_1=1$

$\therefore y_{zi}(t)=e^{-2t},\ t>0$

零状态响应

$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=e^{-t}u(t)*3e^{-2t}u(t)$

$=\int_0^t e^{-\tau}\cdot 3e^{-2(t-\tau)}d\tau$

$=3e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau$

$=3e^{-2t}(e^{\tau})\Big|_0^t$

$=3e^{-2t}(e^{t}-1)=3e^{-t}-3e^{-2t},\ t>0$

全响应

$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=e^{-2t}+3e^{-t}-3e^{-2t}$

$=-2e^{-2t}+3e^{-t},\ t>0$

10. 考虑一个线性时不变系统的输入信号 $x(t)=2e^{-3t}u(t-1)$ 与其输出信号 $y(t)$ 之间有下列关系：

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow -3y(t)+e^{-2t}u(t)$$

试求该系统的单位冲激响应 $h(t)$。

零状态响应

即 $y(t)=x(t)*h(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$x'(t)=\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow -3y(t)+e^{-2t}u(t)$$

$$\therefore -3y(t)+e^{-2t}u(t)=x'(t)*h(t)$$

$$x(t)=2e^{-3t}u(t-1)$$

$$x'(t)=-6e^{-3t}u(t-1)+2e^{-3t}\delta(t-1)=-6e^{-3t}u(t-1)+2e^{-3}\delta(t-1)$$

$$=-3x(t)+2e^{-3}\delta(t-1)$$

$$x'(t)*h(t)=\left(-3x(t)+2e^{-3}\delta(t-1)\right)*h(t)$$

$$=-3x(t)*h(t)+2e^{-3}\delta(t-1)*h(t)$$

$$=-3y(t)+2e^{-3}h(t-1)$$

$$=-3y(t)+e^{-2t}u(t)$$

10. 考虑一个线性时不变系统的输入信号 $x(t)=2e^{-3t}u(t-1)$ 与其输出信号 $y(t)$ 之间有下列关系：

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow -3y(t)+e^{-2t}u(t)$$

试求该系统的单位冲激响应 $h(t)$。

$$= -3y(t) + 2e^{-3}h(t-1)$$

$$= -3y(t) + e^{-2t}u(t)$$

$$\Rightarrow 2e^{-3}h(t-1) = e^{-2t}u(t)$$

$$\Rightarrow h(t-1) = \frac{1}{2}e^{-2t+3}u(t) \quad 令T=t-1$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-2t+1}u(t+1)$$

即单位冲激响应.