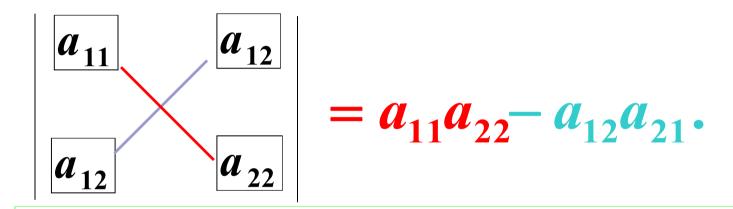
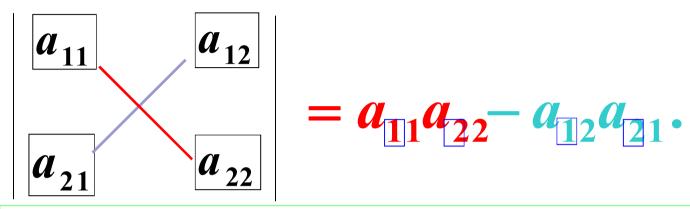
# § 3 n 阶行列式的定义

# 一、概念的引入

# 观察二阶行列式:



- ① 2! 项的代数和;
- ② 不同行不同列2个元素的乘积;
- ③ 1项为正,1项为负;



# ④当行标调成标准排列时

列标排列	1 2	2 1
逆序数t	0	1
$(-1)^t$	+	-

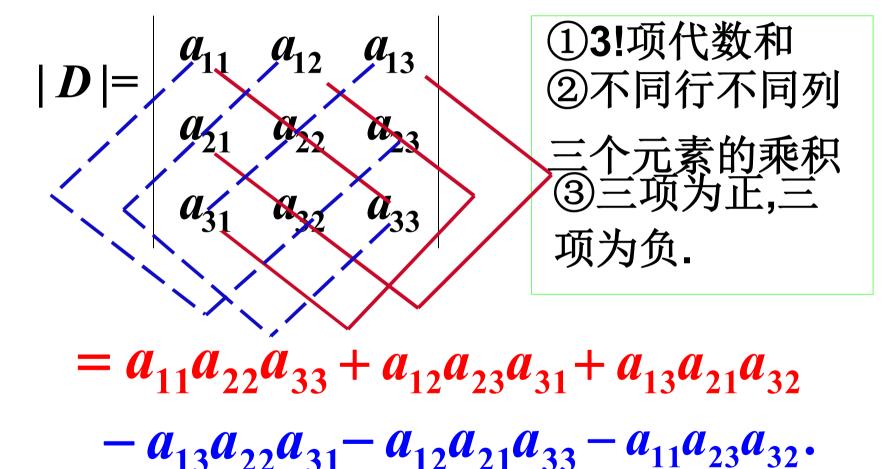
# 一、概念的引入

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

### 规律:

- 1. 三阶行列式共有6项,即3!项.
- 2. 每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.
- 3. 每一项可以写成  $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$  (正负号除外), 其中 $p_1p_2p_3$  是1、2、3的某个排列.
- 4. 当 $p_1p_2p_3$  是偶排列时,对应的项取正号; 当 $p_1p_2p_3$  是奇排列时,对应的项取负号.

# 观察三阶行列式



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

# ④当行标调成标准排列时

列标排列	123	231	312	321	213	132
逆序数t	0	2	2	3	1	1
$(-1)^t$	+	+	+	-	•	-

# 一、概念的引入

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

### 规律:

- 1. 三阶行列式共有6项,即3!项.
- 2. 每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.
- 3. 每一项可以写成  $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$  (正负号除外), 其中 $p_1p_2p_3$  是1、2、3的某个排列.
- 4. 当 $p_1p_2p_3$  是偶排列时,对应的项取正号; 当 $p_1p_2p_3$  是奇排列时,对应的项取负号.

所以,三阶行列式可以写成

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^{t(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中  $\sum_{p_1p_2p_3}$  表示对1、2、3的所有排列求和.

二阶行列式有类似规律. 下面将行列式推广到一般的情形.

# 二、n阶行列式的定义

定义2 
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$
 简记作  $\det(a_{ij})$  , 其中 $a_{ij}$ 为行列式 $D$ 的 $(i,j)$ 元

- 1. n 阶行列式共有 n! 项.
- 2. 每一项都是位于不同行不同列的 // 个元素的乘积.
- 3. 每一项可以写成  $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$  (正负号除外),其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是1,2,...,n的某个排列.
- 4. 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时,对应的项取正号; 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时,对应的项取负号.

思考题: |-1| = -1成立吗?

答:符号|-1|可以有两种理解:

- ✓若理解成绝对值,则|-1|=+1;
- ✓若理解成一阶行列式,则 |-1|=-1.

注意: 当n = 1时,一阶行列式|a| = a,注意不要与绝对值的记号相混淆. 例如: 一阶行列式|-1| = -1.

例:写出四阶行列式中含有因子  $a_{11}a_{23}$  的项.

解:  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 

$$a_{11}a_{23}a_{3x}a_{4y}$$
 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 
 $t(1324) = 1$ 
 $a_{11}a_{23}a_{3x}a_{4y}$ 
 $t(1342) = 2$ 

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$$
  $\neq 1$   $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ .

 $a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 不是D的一项.

例5: 证明

例5: 证明
$$(1) 下三角行列式 \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 主对角行列式  $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 

例5: 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

12… *n* 的逆序数为**C** 

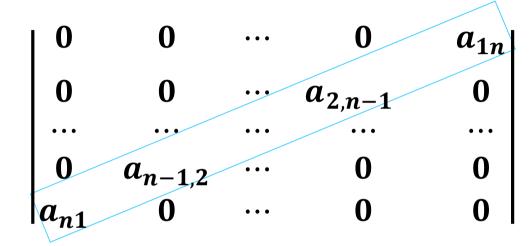
行列式中各项中不为零的项 只有 $a_{11}a_{22}$ ··· $a_{nn}$ ,其它项均 为零

## 上三角行列式

例5: 证明
$$(2) 主对角行列式 \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

### 副对角行列式



$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

### 计算行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解:

$$D_{1} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{t(4321)} a_{14} a_{23} a_{33} a_{41} = a_{14} a_{23} a_{33} a_{41}$$

其中 
$$t(4321) = 0 + 1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$
.

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$$

### 四个结论:

(1) 对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)  $D = \begin{bmatrix} a_{2,n-1} & a_{1n} \\ -1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \end{bmatrix}$ 

(3) 上三角形行列式 (主对角线下侧元素都为0)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) 下三角形行列式 (主对角线上侧元素都为0)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

### 思考题: 用定义计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

# 思考题

已知 
$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$
, 求 $x^3$ 的系数.

解 含 $x^3$ 的项有两项,即

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=x^3,$$

$$(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -2x^3$$
 故  $x^3$ 的系数为 - 1.