1 填空题

1. 已知 A 为三阶矩阵且 $|A|$=2, 则 $|-2A^{-1}|$=**-4**

Solution: 因为 A^{-1} 是三阶矩阵，所以 $|-2A^{-1}| = (-2)^3|A^{-1}| = -4$

2. 设 A 是 4×4 矩阵, 且 $R(A) = 3$, 而 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$, 则 $R(AB)$=**3**

Solution: 显然 B 是 Vandermonde 行列式, 容易得到 $|B| \neq 0$, 从而 B 可逆。
所以 $R(AB) = R(A)$=3

3. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 k 应该满足的条件为 $k = -3$

Solution: 依据定理 4. 有非零解等价于系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩小于 n
我们不妨计算它的行列式。

$$det(A) = \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 2 & -1 & k-2 \end{vmatrix} = (k+3)(k^2-3k+3)$$

得到 $det(A) = 0 \Leftrightarrow k = -3$

4. 已知行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 是关于 x 的一次多项式, 则 x 的系数为**2**

Solution: 把行列式按第二行展开, 并提取含有 x 的项, 即 $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}x = 2x$

5. 方阵 A 满足 $A^2 - 2A + E = 0$,$(A-2E)^{-1}$ =**-A**

Solution: 不难得到 $(-A)(A-2E) = E$, 立即得到 $(A-2E)^{-1} = -A$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 A^{-1} = $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Solution: 对 A 进行分块, 得到 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$。
显然 A_1 与 A_2 皆可逆, 立即得到 A 可逆, 逆矩阵为到 $A=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}$

2 选择题

1. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵, 以下等式成立的是?

   A. $|A+B|=|A|+|B|$

   B. $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

   C. $|AB|=|BA|$

   D. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

Solution: 显然是 C

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$, 且 $R(A)=2$, 则 x 等于

   A. 1

   B. -1

   C. 2

   D. -2

Solution: 行变换到行阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & 1-x \\ 0 & 0 & 2-x-x^2 \end{pmatrix}$
当 $x=1$ 时, 得 $R(A)=1$, 不满足。
当 $x=-2$ 时, 得 $R(A)=2$, 满足。
当 $x\neq 1,2$ 时, 得 $R(A)=3$, 不满足。故答案选 D

3. 若 n 阶方阵 A 可逆, 则下列说法不正确的是

   A. $|A|\neq 0$

   B. A 为满秩矩阵

   C. A 与 n 阶单位矩阵 E 等价

   D. 方程组 $AX=b$ 有无穷多解

Solution: 显然是 D. 方程有唯一解 $X = A^{-1}b$

4. 若非齐次线性方程组 $A_{5\times 4}X = b$ 无解, 且增广矩阵 $B = (A, b)$ 的秩等于 4, 则系数矩阵 A 的秩为

    A. 3

    B. 4

    C. 2

    D. 5

Solution: 方程组无解说明 $R(A) < R(A, b)$, 同时 $R(A) \leq R(A, b) \leq R(A)+1$, 故 $R(A, b) = R(A) + 1$, 即得 $R(A) = R(A, b) - 1 = 3$.

5. 若矩阵 A 经过若干次初等列变换得到矩阵 B, 那么有

    A. 存在矩阵 P, 使得 $PA = B$

    B. 存在矩阵 P, 使得 $BP = A$

    C. 存在矩阵 P, 使得 $PB = A$

    D. 方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解

Solution: 若干次列变换等价于右乘一个可逆矩阵, 因此 B 是显然的。

6. 设矩阵 A 的秩为 r, 则 A 中

    A. 所有的 r 阶子式都不为 0

    B. 所有的 $r-1$ 阶子式全为 0

    C. 所有的 $r+1$ 阶子式全为 0

    D. 所有的 $r-1$ 阶子式都不为 0

Solution: 由于秩是矩阵非零子式的最高阶数, 所以 C 是显然的。

3 解答题

1. 求四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Solution:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 11 \times 3^3 = 297$$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\end{pmatrix}$, 且 $R(A)=3$, 求 λ 的值。

Solution:
$\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&-1&-5&10-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&0&\lambda-3&9-3\lambda\end{pmatrix}$
由于 $R(A)\neq 3$, 所以有 $\lambda\neq 3$

3. 化矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}$ 为行最简形矩阵:

Solution:
$\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

4. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}$, 试求 AB^T。

Solution:
$B^T=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}$,$AB^T=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}$

5. 设四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&3&4\\1&0&2&3\\1&5&2&1\\-1&1&5&2\end{vmatrix}$, 求 $A_{13}+A_{23}+A_{43}$

Solution:
由 *Laplace* 展开定理,$A_{13}+A_{23}+A_{43}=\begin{vmatrix}2&1&1&4\\1&0&1&3\\1&5&0&1\\-1&1&1&2\end{vmatrix}=-4$

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AX+E=A^2+X$, 试求 $|X|$。

Solution:

将含有 X 的项分离得 $(A-E)X = A^2 - E^2 = (A+E)(A-E)$. 然而 $det(A-E) = -1 \neq 0$, 故 $(A-E)$ 可逆。两边同时左乘 $(A-E)^{-1}$ 得到 $X = A+E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，立即得到 $det(X) = 9$.

7. 设矩阵 X 满足矩阵方程 $X = AX + B$, 且 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, 试求矩阵 X。

Solution:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 得到 $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

8. 已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经过初等变换为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 试求 a。

Solution:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 3 & -3a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 立即得到 $R(B) = R(A) = 2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$ 立即得到 $a = 2$

9. 在 λ 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} -x + \lambda y + 2z = 1 \\ x - y + \lambda z = 2 \\ -5x + 5y + 4z = -1 \end{cases}$ 无解, 有唯一解, 或有无穷多解? 并在有无穷多解时求出其通解。

Solution:

判断系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ 1 & -1 & \lambda \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 是否可逆是简单的。

我们有 $det(A) = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ 1 & -1 & \lambda \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$

当 $\lambda \neq 1, 4$ 时,A 可逆, 方程有唯一解。

当 $\lambda = 1$ 时

$$(A,b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, 得解为 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

当 $\lambda = \frac{4}{5}$ 时

$$(A,b) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{5} & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{4}{5} & 2 \\ -5 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{5} & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{4}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, 得原方程组无解。

10. 已知 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$, 即 $R(A) = n-1$, 试证明 $R(A^*) = 1$, 其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵。

Solution:

显然 $AA^* = |A|E = 0$, 由定理 *8* 即得 $R(A) + R(A^*) \leq n$, 给出 $R(A^*) \leq 1$

然而 $R(A) = n-1$ 意味着 A 中存在非零的 $n-1$ 阶子式, 所以 $A^* \neq 0$,$R(A^*) > 0$

又 $R(A^*) \in Z$, 所以 $R(A^*) = 1$