第八讲 麦克斯韦电磁场理论

01 位移电流与全电流

02 真空中麦克斯韦方程组

01 位移电流与全电流

稳恒电流磁场中安培环路定理 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$

应用于**非稳恒电流激发的磁场**中时产生了矛盾

1861年麦克斯韦在研究电磁场的规律时

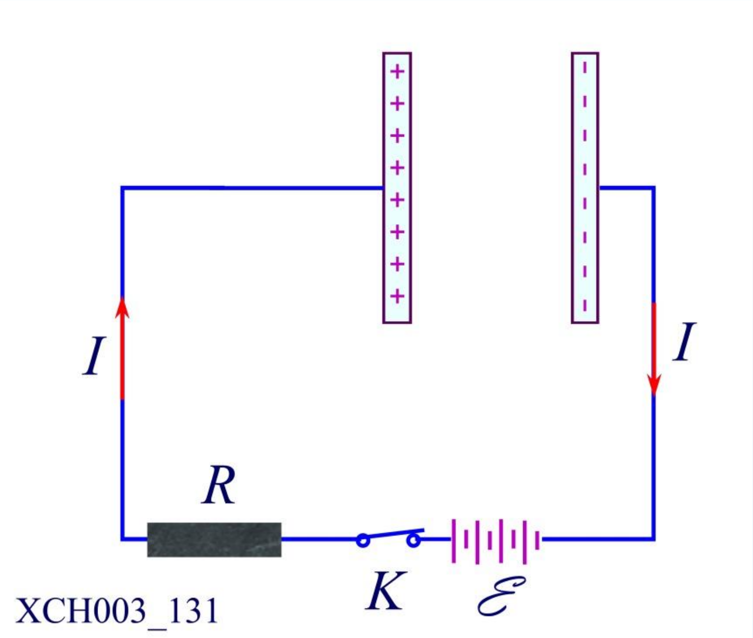
提出**位移电流**思想

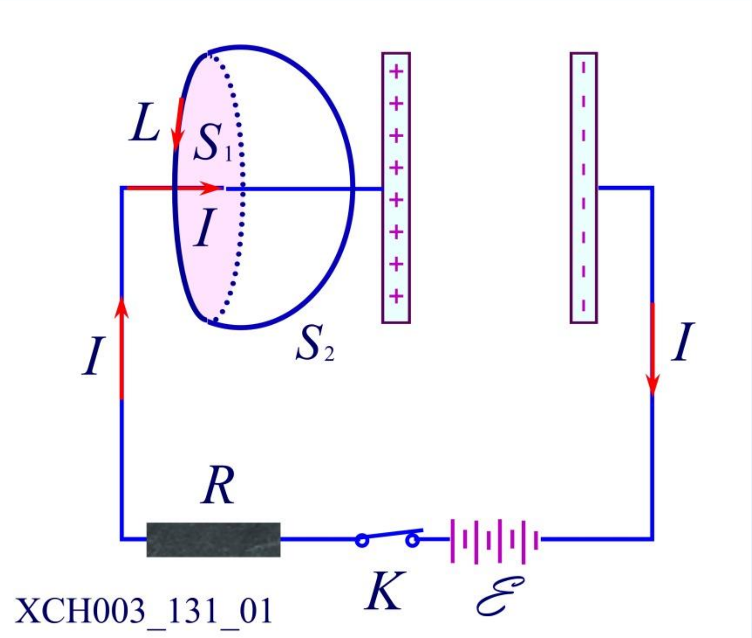
建立了非稳恒磁场的安培环路定理

矛盾的产生 —— 电容器充电过程

—— 电源合上，极板电荷开始积累

—— 回路中有变化的电流，极板之间无电流





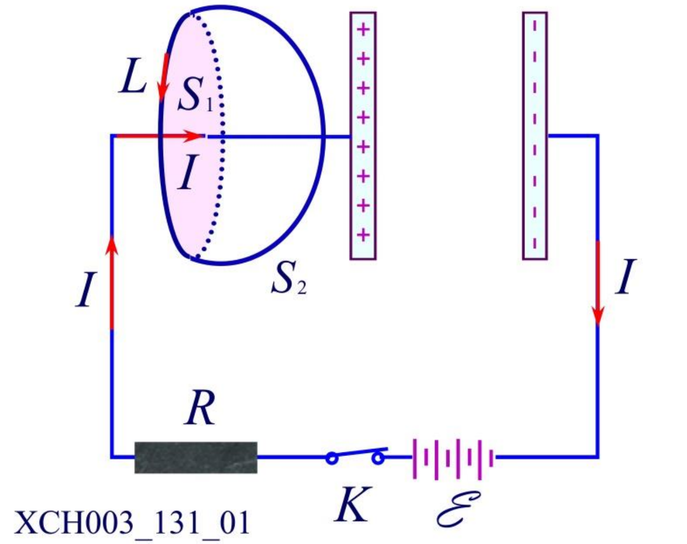
—— 以L为边界作两个曲面S_1和S_2

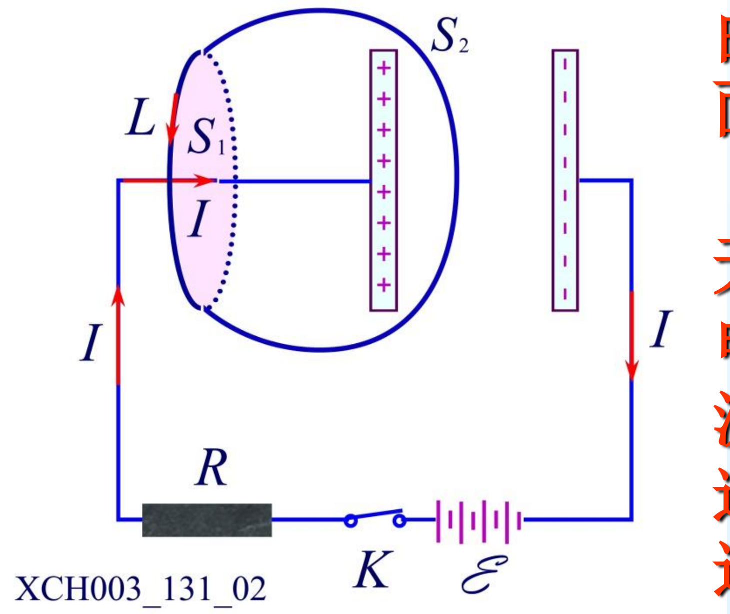
应用安培环路定理

S_1曲面 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$

S_2曲面 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$

——积分结果相等





曲面2无电流通过

S_1曲面 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$

S_2曲面 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0$

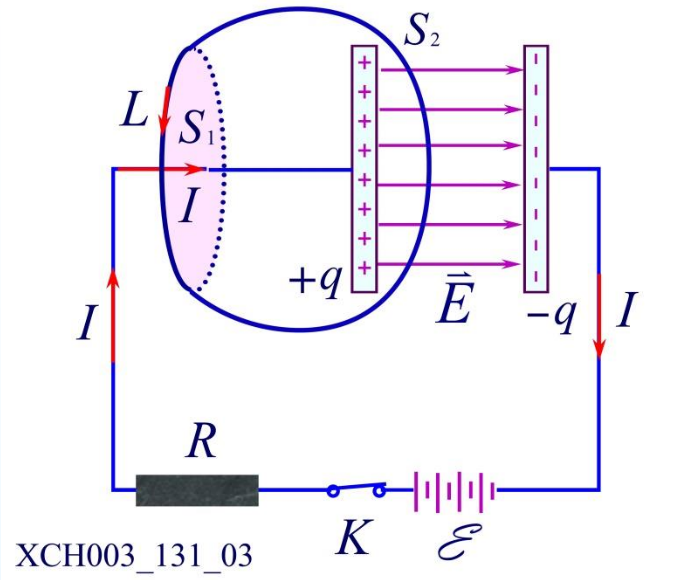
——积分结果不相等

矛盾的解决 —— 充电过程中极板间的电场变化！

极板之间的**电位移通量**

$$\Phi_D = DS \xrightarrow{D=\sigma} \Phi_D = \sigma S$$

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d(\sigma S)}{dt} = \frac{dq}{dt} = I$$



位移电流 $\boxed{I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$

—— 电位移通量的变化率等于导线中电流

闭合回路选取S_2曲面时 $\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I_D = \mu_0 I}$

$$I_D = \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \xrightarrow[\text{不变}]{\text{回路}} I_D = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

非恒定电流时

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 (I_c + I_D)$$

$$\begin{cases} I_c = \int_S \vec{j}_c \cdot d\vec{S} & \text{—— 传导电流} \\ I_D = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} & \text{—— 位移电流} \end{cases}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S (\vec{j}_c + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot d\vec{S}}$$

传导电流 —— 电荷的定向运动，有热效应，激发磁场

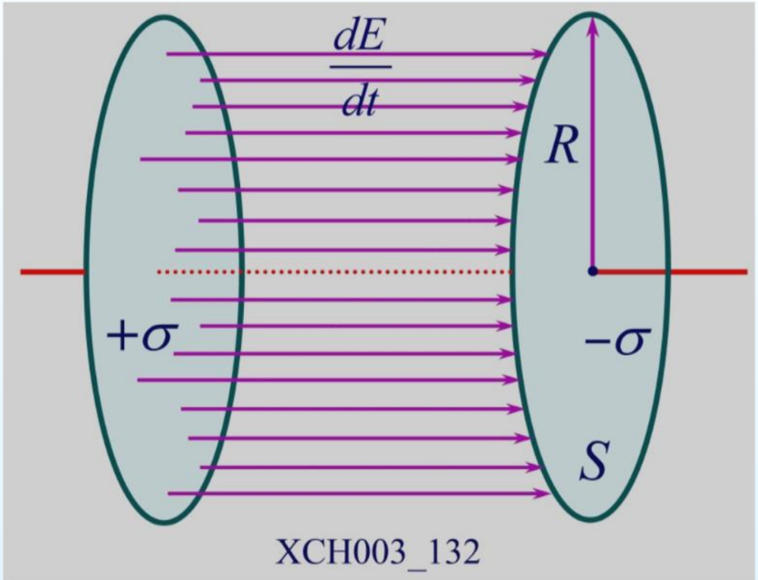
位移电流 —— 变化的电场产生，无热效应，激发磁场

半径为*R*的两块金属圆板构成平行板电容器，

对电容器均匀充电，两极板之间电场的变化率为 $\dfrac{dE}{dt}$

求: 1) 电容器两极板间的位移电流;

2) 距极板轴线为*r*点的磁感应强度*B*(忽略边缘效应)



1) 两极板之间总的位移电流

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}(D\cdot\pi R^2)$$

$$D = \varepsilon_0 E$$

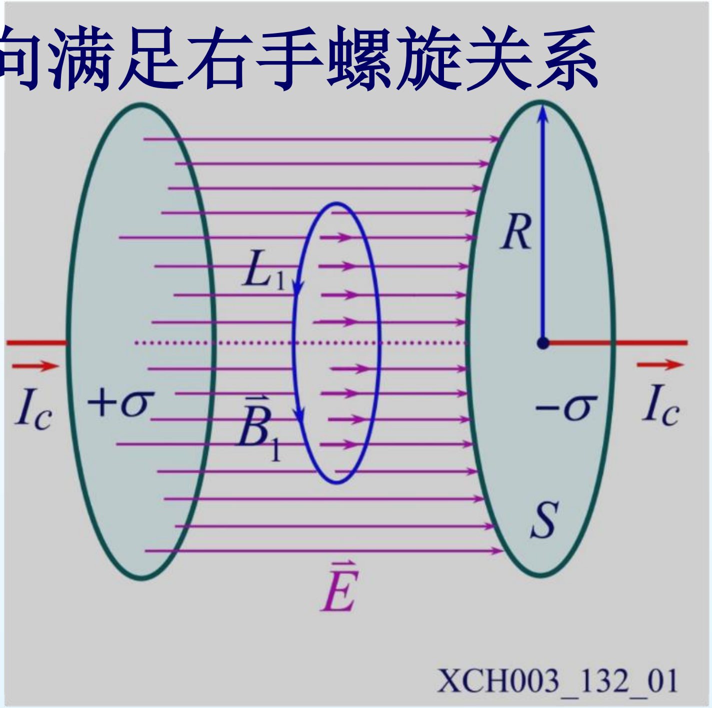
$$I_D = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}(\pi R^2)$$

2) 距离轴线r处的磁感应强度

位移电流具有轴对称 —— 磁场具有轴对称性

$r<R$ —— 选取半径为r的圆形回路L_1

回路绕行方向与电场方向满足右手螺旋关系



穿过回路L_1的位移电流

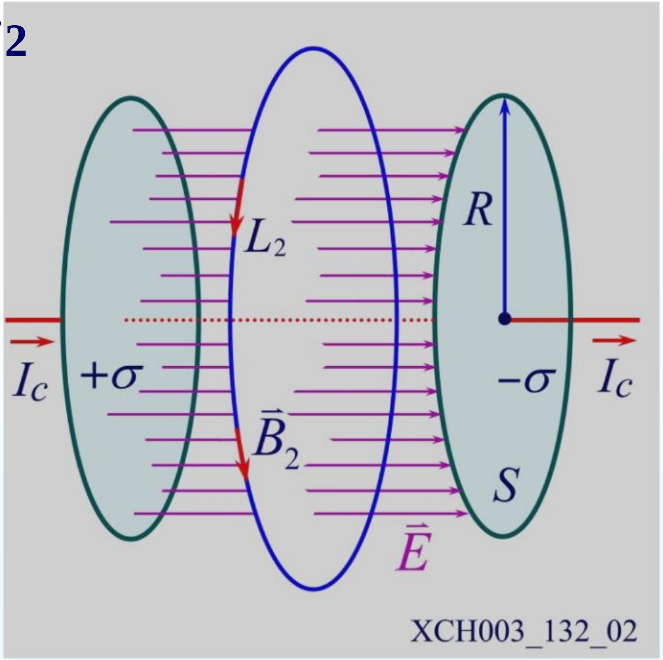
$$I_D = \frac{d(DS)}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}(\pi r^2)$$

$$\oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_D$$

$$B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}(\pi r^2) \qquad B_1 = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0(\frac{dE}{dt})r$$

2) 距离轴线r处的磁感应强度

r>R —— 选取半径为*r*的圆形回路L_2



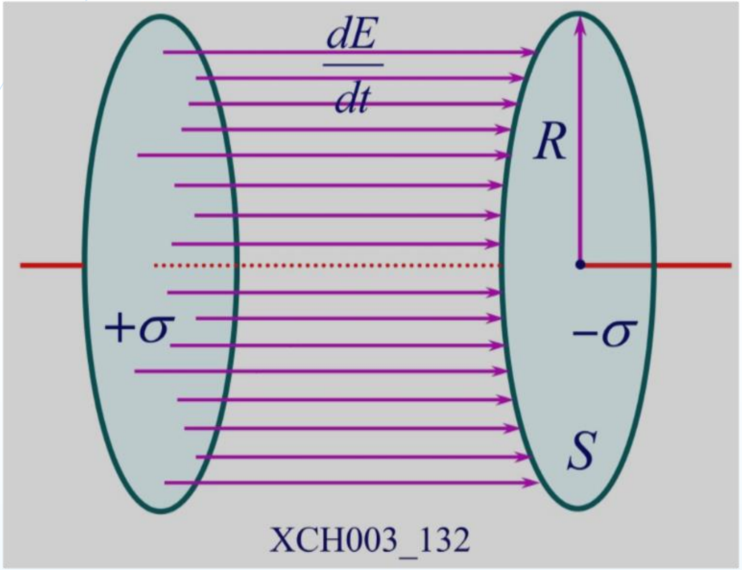
穿过回路L_2的位移电流

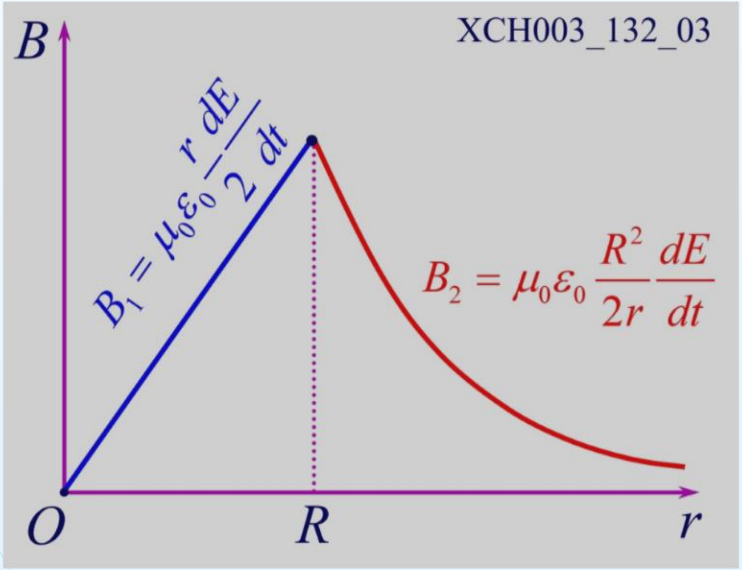
$$I_D=\frac{d\Phi_D}{dt}=\frac{d}{dt}(D\cdot\pi R^2)$$

$$I_D=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}(\pi R^2)$$

$$\oint_L\vec{B}_2\cdot d\vec{r}=\mu_0 I_D \qquad B_2\cdot 2\pi r=\mu_0\varepsilon_0\frac{dE}{dt}(\pi R^2)$$

$$B_2=\frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0\left(\frac{dE}{dt}\right)\frac{R^2}{r}$$





空间电场分布

$$\begin{cases} E = \alpha t & r < R \\ E = 0 & r > R \end{cases}$$

空间磁场分布

$$\begin{cases} B = \dfrac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0(\dfrac{dE}{dt})r & r < R \\ B = \dfrac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0(\dfrac{dE}{dt})\dfrac{R^2}{r} & r > R \end{cases}$$

02 真空中麦克斯韦方程组

—— 麦克斯韦电磁场理论

是关于电场和磁场统一运动规律的描述

—— 电场和磁场的性质

—— 理论基于电场和磁场的高斯定理和环路定理

1 真空中麦克斯韦方程组的积分形式

1) 电场高斯定理

电荷激发的电场 $\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V \rho dV$ —— 有源场

(静电场)

—— 电场线有头有尾

变化磁场激发的电场 $\oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = 0$ —— 无源场

(感生电场)

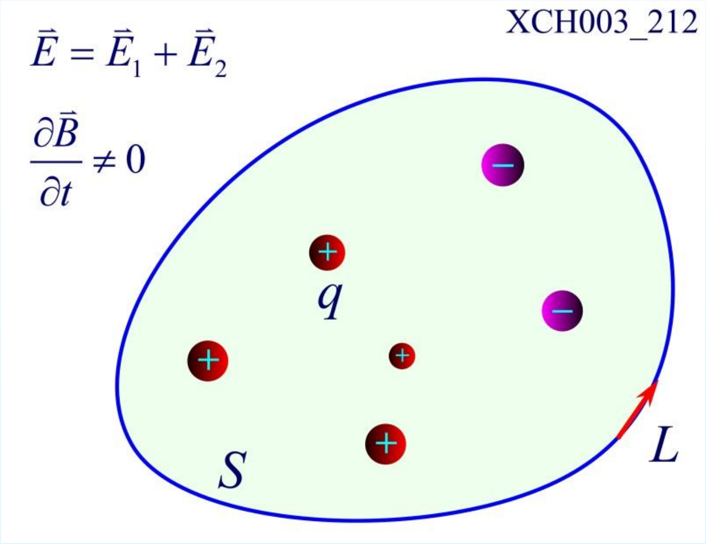
—— 电场线无头无尾

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \longrightarrow \boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V \rho dV}$$

2) 电场环路定理

静电场 $\oint_L \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = 0$ —— 无旋场

感生电场 $\oint_L \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ —— 有旋场



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

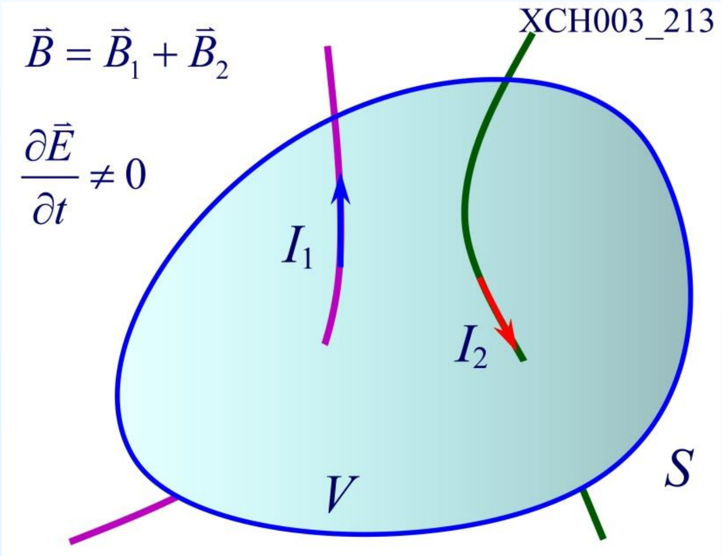
3) 磁场高斯定理

稳恒电流的磁场 $\oint_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = 0$ —— 有旋场

位移电流的磁场 $\oint_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = 0$ —— 有旋场

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

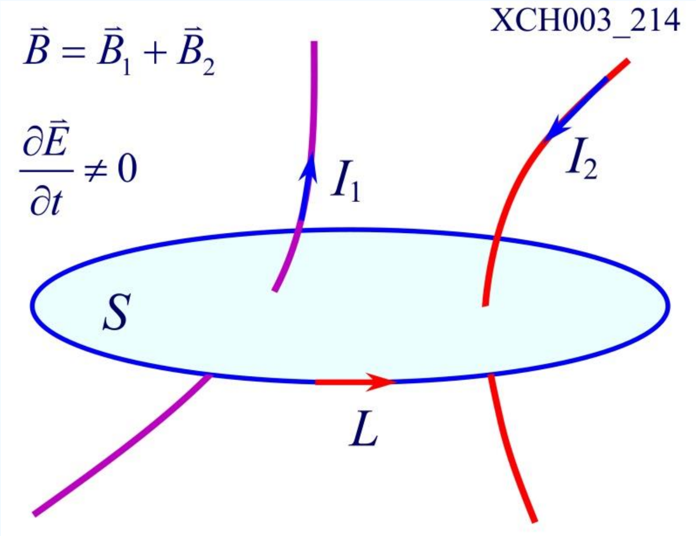
$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \equiv 0}$$



4) 磁场环路定理

稳恒电流的磁场 $\oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ —— 有旋场

位移电流的磁场 $\oint_L \vec{B}_2 \cdot d\vec{r} = \mu_0 (\int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S})$ —— 有旋场



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

真空中麦克斯韦方程组的积分形式

真空中的电场

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V \rho dV$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

真空中的磁场

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \equiv 0$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\int_S (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot d\vec{S}$$

高斯定理

环路定理

2 真空中麦克斯韦方程组的微分形式 —— 电场方程

Gauss定理
$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_V (\nabla\cdot\vec{A})dV$$

Stocks定理
$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \text{ — 散度}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ — 旋度}$$

电场

高斯定理
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V \rho dV$$

环路定理
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

2 真空中麦克斯韦方程组的微分形式 —— 磁场方程

Gauss定理 $\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_V (\nabla\cdot\vec{A})dV$

Stocks定理 $\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$

磁场高斯定理

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \equiv 0$$

环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\int_S (\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} \equiv 0$$ —— 散度

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$ —— 旋度

—— 真空中麦克斯韦方程组的微分形式 ——

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} \equiv 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{cases}$$

＋ 介质方程和欧姆定律

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

3 真空中电磁波的波动方程

均匀无限大自由空间 $\begin{cases} \rho = 0 \\ j = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \xrightarrow{\rho = 0} \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{cases} \xrightarrow{j = 0} \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla\times\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\nabla\times\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\ \nabla^2\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\end{cases}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

—— 传播速度

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

—— 真空中电磁波的波动方程 ——

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\[2ex] \nabla^2\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\[2ex] \dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial z^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\end{cases}$$

—— **真空中电磁波的波动方程**

—— **1865年麦克斯韦预言自由空间存在电磁波**

—— **1888年赫兹实验证实电磁波**