1). $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{1000}$

则: $x_s(n) = A\cdot\cos(200\pi\cdot n\cdot\frac{1}{1000}) + B\cdot\cos(500\pi\cdot n\cdot\frac{1}{1000})$

$= A\cdot\cos(\frac{2}{10}n\pi) + B\cos(\frac{5}{10}\pi n)$

则 $\Omega_0 = \frac{1}{10}\pi$ $\quad N = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 20.$

$X(k\Omega_0) = \frac{1}{20}\sum_{n=0}^{N-1}(A\cdot\cos\frac{1}{5}n\pi + B\cdot\cos\frac{1}{2}n\pi)\cdot e^{-j\cdot k\cdot\frac{\pi}{10}\cdot n}.$

$X(2) = X(18) = 10A$

$X(5) = X(15) = 10B$

其他为0

第三章 离散信号的分析

方璐 2教322
杭州电子科技大学 自动化学院

本章大纲

- 时域描述和分析
- 频域分析
- 快速傅里叶变换
- Z域分析

第四节　离散信号的Z变换

一、离散信号的Z变换

- 从DTFT到Z变换
- Z变换的收敛域
- Z变换的几何表示
- Z变换的性质
- Z反变换
- 单边Z变换

二、Z变换与其他变换之间的关系

- Z变换与拉普拉斯变换的关系
- Z变换与离散时间傅里叶变换(DTFT)的关系
- Z变换与离散傅里叶变换(DFT)的关系

一、Z变换

1. 从DTFT到Z变换

基本思想：

增长型的离散信号(序列)x(n)的傅里叶变换是不收敛的，为了满足傅里叶变换的收敛条件，类似拉普拉斯变换，将x(n)乘以一衰减的实指数信号r^{-n} **(r>1)**，使信号**x(n)** r^{-n}满足收敛条件。

一、Z变换

1. 从DTFT到Z变换

DTFT $X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$

将$x(n)$乘以一衰减的实指数信号$r^{-n}(r>1)$

$$\mathcal{F}\left(x(n)r^{-n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)r^{-n}]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(re^{j\Omega}\right)^{-n}$$

$$\xrightarrow{\text{令复变量 } z=re^{j\Omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}}$$

离散时间$x(n)$的Z变换，z的幂级数

一、Z变换

Z反DTFT

$$x(n)r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(z)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(z)(re^{j\Omega})^n d\Omega$$

$$z = re^{j\Omega} \qquad dz = jre^{j\Omega}d\Omega = jzd\Omega$$

$$d\Omega = \frac{1}{j}z^{-1}dz$$

Z反变换

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\cdot z^{n-1}dz$$

对Ω在0~2π内积分，对应了沿$|z|=r$的圆逆时针环绕一周的积分

一、Z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

2. Z变换的收敛域

例1：求序列 $x(n)=a^n u(n)$ 的Z变换及收敛域

解：$$X(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n$$

要使其收敛，必须满足

$$\left|\frac{a}{z}\right|<1,\text{即}|z|>|a|$$

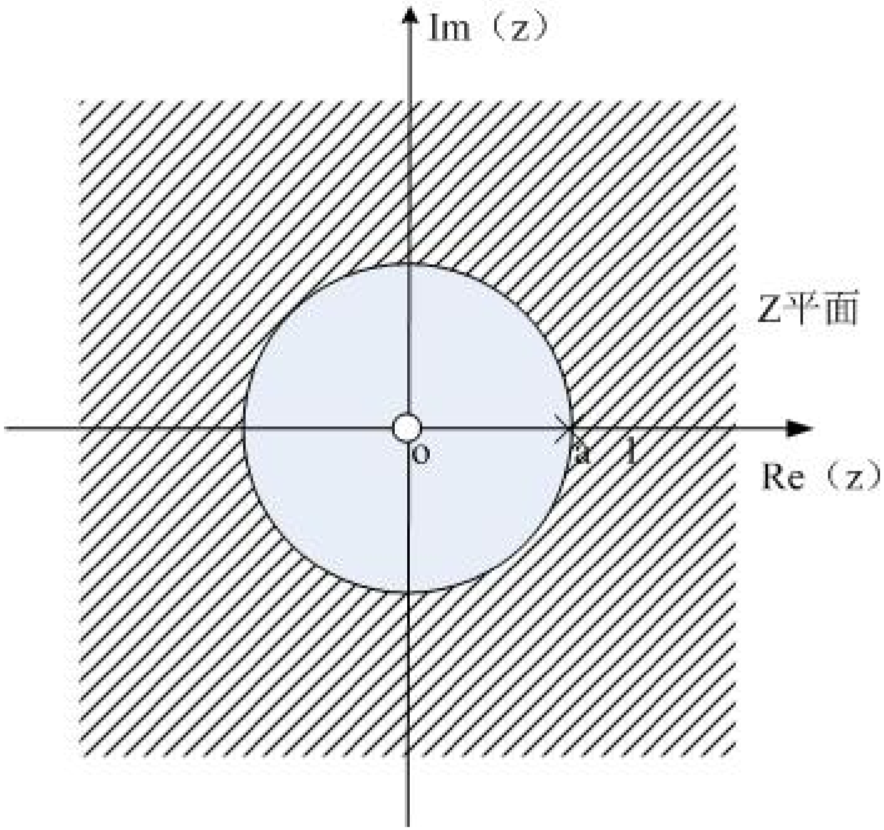
这时，

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\frac{1}{1-a/z}=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

一、Z变换

例1：求序列 $x(n)=a^n u(n)$ 的Z变换及收敛域

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\frac{1}{1-a/z}=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$



一、Z变换

例2：设序列 $x(n)=-a^{n}u(-n-1)$，求其Z变换和收敛域。

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-a^{n}z^{-n})$$

$$X(z)=\sum_{m=1}^{\infty}(-a^{-m}z^{m})=\sum_{m=0}^{\infty}-\left(a^{-1}z\right)^{m}+a^{0}z^{0}=1-\sum_{m=0}^{\infty}a^{-m}z^{m}$$

要使其收敛，必须满足 $\left|\frac{z}{a}\right|<1$,即$|z|<|a|$

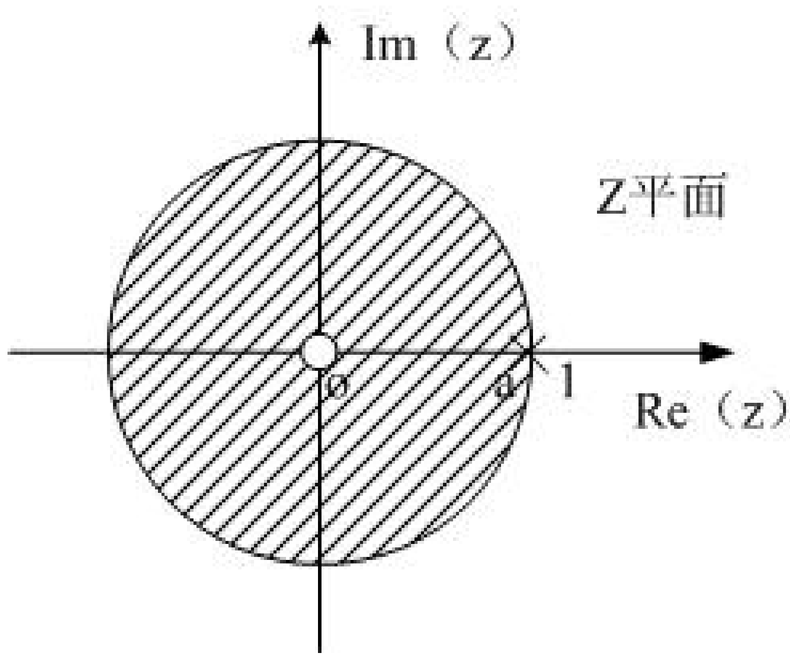
这时，

$$X(z)=1-\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=1-\frac{a}{a-z}=\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}}\quad |z|<|a|$$

一、Z变换

例2：设序列 $x(n)=-a^n u(-n-1)$，求其Z变换和收敛域。

$$X(z)=1-\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=1-\frac{a}{a-z}=\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|<|a|$$



几类序列的收敛域

（1）有限长序列：在有限区间内，有非零的有限值

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}\qquad n_1\le n\le n_2$$

只要级数的每一项有界，则级数就收敛

$$\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$$

X(n)有界

$$\left|z^{-n}\right|<\infty$$

若$n_1\ge 0$，收敛域为除$z=0$外的整个Z平面
若$n_2\le 0$，收敛域为除$z=\infty$外的整个Z平面

$$0<|z|<+\infty$$

收敛域为除了0和∞ 的整个z 平面

几类序列的收敛域

（2）右边序列：只在 $n \geq n_1$ 区间内，有非零有限值的序列

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=n_1}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad n_1 \leq n \leq \infty$$

收敛域为 $R_{x^-} < |z| < \infty$

$$\boxed{\text{因果序列：} x(n)u(n)}$$

几类序列的收敛域

（3）左边序列：只在 $n \le n_2$ 区间内，有非零的有限值的序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0} x(n)z^{-n}+\sum_{n=1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

收敛域为 $0<|z|<R_{x^+}$

几类序列的收敛域

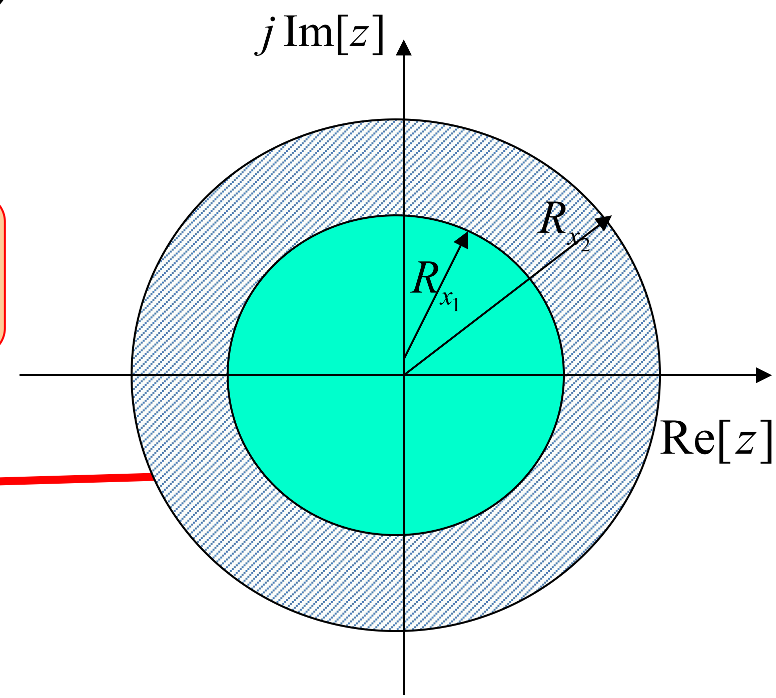
（4）双边序列：在 $-\infty \le n \le \infty$ 区间内，有非零的有限值的序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad -\infty \le n \le \infty$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

圆内收敛

圆外收敛



$R_{x_2} > R_{x_1}$ 有环状收敛域

$R_{x_2} < R_{x_1}$ 没有收敛域

一、Z变换

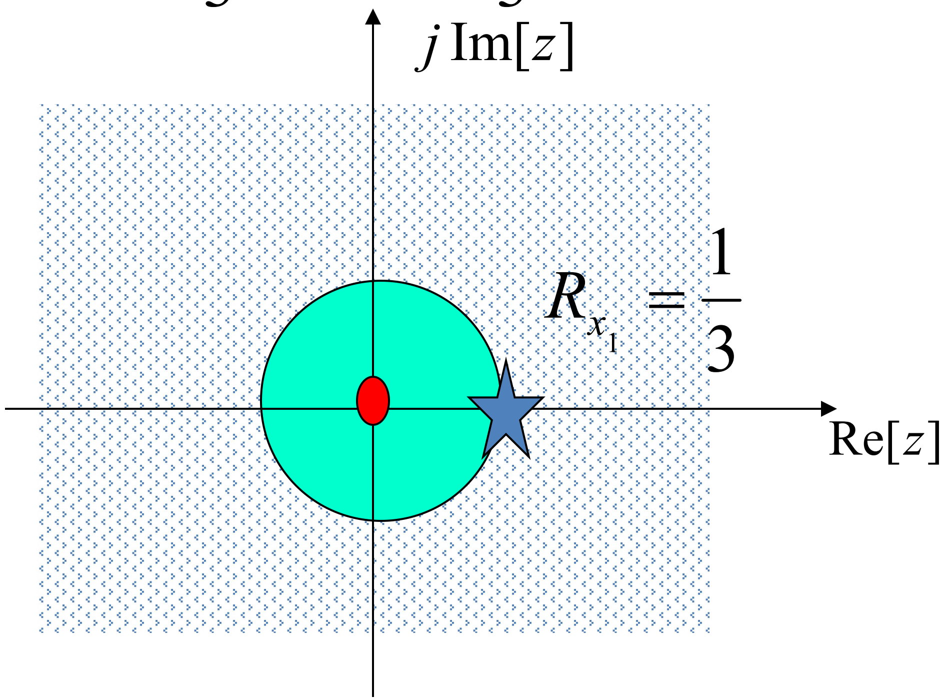
例3： (1) $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

解：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$R_{x_1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore |z|>\frac{1}{3}$$



一、Z变换

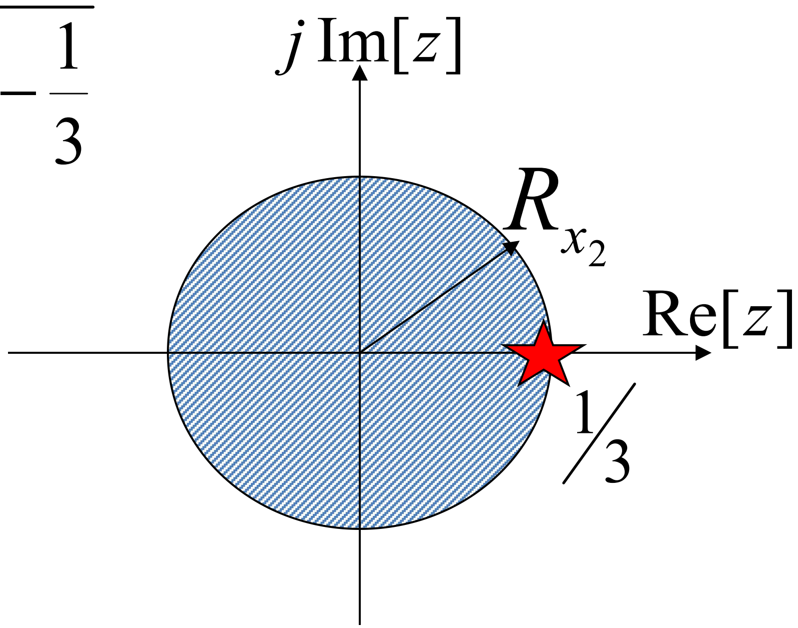
例3：(2)　$x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$

解：

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \overset{n=-m}{=} -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-m}$$

$$= 1 - \sum_{m=0}^{\infty}(3z)^m = 1 - \frac{1}{1-3z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$|z| < \frac{1}{3} = R_{x_2}$$



一、z变换

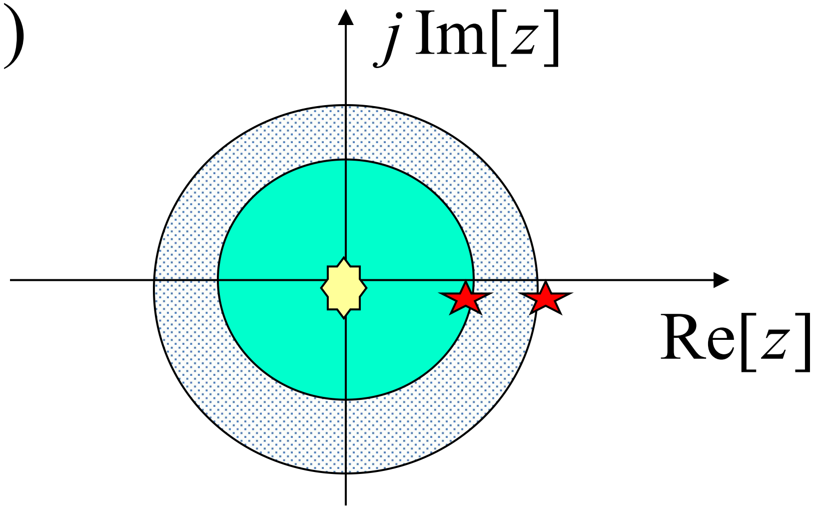
例3：（**3**）$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}$$

$$=\frac{-z}{z-3}+\frac{1}{z-\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{8}{3}z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})}$$

$$\frac{1}{3}<|z|<3$$



一、Z变换

3. Z变换的几何表示

在Z平面内分别用“O”和“×”标出X(z)的零点和极点的位置，并指出收敛域ROC，就构成了Z变换的几何表示。它除了可能相差一个常数因子外，和有理Z变换一一对应。

（1） 收敛域内不包含任何极点

（2）Z变换的收敛域被极点界定，右边序列，最外圆周；左边序列，最内圆周

一、Z变换

4. Z变换的性质

- 线性和时移特性
- Z 域尺度变换
- Z 域微分
- 时间翻转
- 卷积和乘积
- 共轭
- 初值定理和终值定理

注：参阅表2-9

一、Z变换

例4：设 $x(n)=a^n u(n), y(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)$

求x(n)*y(n)

解：$X(z)=\mathcal{Z}[x(n)]=\dfrac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$

线性

时移性

$$\mathcal{Z}[ab^{n-1}u(n-1)]=a\mathcal{Z}[b^{n-1}u(n-1)]=\frac{az^{-1}}{1-bz^{-1}} \qquad |z|>|b|$$

$$Y(z)=\mathcal{Z}[y(n)]=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{az^{-1}}{1-bz^{-1}}=\frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}[x(n)*y(n)]=X(z)Y(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}$$

$$x(n)*y(n)=\mathcal{Z}^{-1}[X(z)Y(z)]=b^n u(n)$$

一、Z变换

5. Z反变换

（1）幂级数展开法

（2）部分分式法

一、Z变换

（1）幂级数展开法

例5 已知 $X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$**，收敛域为** $|z|>1$**，应用幂级数展开方法，求其Z反变换。**

解：根据其收敛域是 $|z|>1$ **，必然是右边序列，此时X(z)应为z的降幂级数，因而可以将X(z)的分子分母多项式按z降幂排列进行长除**

一、Z变换

$$X(z)=\frac{z}{z^{2}-2z+1}$$

$$\begin{array}{r l}
 & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots \\
\cline{2-2}
z^{2}-2z+1 \,\big) & z \\
 & z-2+z^{-1} \\
\cline{2-2}
 & 2-z^{-1} \\
 & 2-4z^{-1}+2z^{-2} \\
\cline{2-2}
 & 3z^{-1}-2z^{-2} \\
 & 3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3} \\
\cline{2-2}
 & 4z^{-2}-3z^{-3}
\end{array}$$

$$X(z)=z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} \Rightarrow x(n)=nu(n)$$

一、z变换

（2）部分分式法

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots\ b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$$

只有一阶极点

$$k\le r\quad A_0=\frac{b_0}{a_0}\qquad X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{k}\frac{A_mz}{z-p_m}$$

$$k>r\quad A_0=0\qquad X(z)=\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m}{1-p_mz^{-1}}$$

一、z变换

（2）部分分式法

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$$

例8 $\quad X(z)=\dfrac{10z}{z^2\text{-}3z+2} \qquad (|z|>2) \quad x(n)=?$

右边序列

解：

$$\because \frac{X(z)}{z}=\frac{10}{z^2-3z+2}=\frac{10}{(z-1)(z-2)}=\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z-2}$$

$\therefore$ 令

$$A_1=\left[\frac{X(z)}{z}(z-1)\right]_{z=1}=-10$$

$$A_2=\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)\right]_{z=2}=10$$

$$\therefore X(z)=\frac{10z}{z-2}-\frac{10z}{z-1}$$

$$x(n)=10\times 2^n u(n)-10u(n)=10(2^n-1)u(n)$$

主观题 10分

设置

$$X(z) = \frac{5z}{7z - 3z^2 - 2} \qquad (\frac{1}{3} < |z| < 2) \quad x(n) = ?$$

作答

一、z变换

例9 $X(z)=\dfrac{5z}{7z-3z^2-2}\qquad (\dfrac{1}{3}<|z|<2)\qquad x(n)=?$

双边序列

解：

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-2}$$

右边序列

左边序列

$$x(n)=(\tfrac{1}{3})^n u(n)-2^n u(-n-1)$$

6. 单边Z变换

x(n)u(n)的双边Z变换
收敛域?

定义为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

单边Z变换和双边Z变换的差别在于，单边Z变换求和仅在n的非负值上进行，而不管n<0时x(n)是否为零。

与双边Z变换不同的性质：

（1）时移定理

（2）初值定理

（3）终值定理

6. 单边Z变换

求单边Z变换式$\boldsymbol{X(z)=\frac{10z^2}{(z-1)(Z-2)}}$所对应的序列**x(n)**

一、Z变换

（1）时移定理

◆ 若x(n)是双边序列，其单边Z变换为X(z)，则序列左移后，它的单边Z变换为

$$\mathcal{Z}\left[x(n+m)u(n)\right]=z^{m}\left[X\left(z\right)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

◆ 若**x(n)**是双边序列，其单边**Z**变换为**X(z)**，则序列右移后，它的单边**Z**变换为

$$\mathcal{Z}\left[x(n-m)u(n)\right]=z^{-m}\left[X\left(z\right)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

x(n)为因果序列，则右移后，单边Z变换为 $z^{-m}X(z)$

一、Z变换

（1）时移定理

例12：求序列 $x(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-2k)$ 的单边Z变换

解： $x(n)$为因果序列

$$Z[\delta(n-2k)]=z^{-2k}Z[\delta(n)]=z^{-2k}$$

由Z变换的线性性质，得 $x(n)$的单边Z变换为

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-2k}=\frac{1}{1-z^{-2}}\qquad |z|>1$$

一、Z变换

（2）初值定理

◆对于因果序列x(n)，若其单边Z变换为X(z)，而且 $\lim_{z\to\infty} X(z)$ 存在，则

已知Z变换，不用求出反变换，可求出x(0)和x(∞)，用于离散系统的分析

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$\because X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

（3）终值定理

◆对于因果序列x(n)，若其单边Z变换为X(z)，而且 $\lim_{x\to\infty} x(n) = x(\infty)$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$$

（3）终值定理

$$
\begin{aligned}
&\because \mathbb{Z}[x(n+1)-x(n)] \\
&= zX(z)-zx(0)-X(z) \\
&= (z-1)X(z)-zx(0)
\end{aligned}
$$

$$\therefore (z-1)X(z)=\mathbb{Z}[x(n+1)-x(n)]+zx(0)$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)] &= x(0)+\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n} \\
&= x(0)+[x(1)-x(0)]+[x(2)-x(1)]+\cdots \\
&= x(0)-x(0)+x(\infty) \\
&= x(\infty)
\end{aligned}
$$

第四节　离散信号的Z变换

一、离散信号的Z变换

- 从DTFT到Z变换
- Z变换的收敛域
- Z变换的几何表示
- Z变换的性质
- Z反变换
- 单边Z变换

二、Z变换与其他变换之间的关系

- Z变换与拉普拉斯变换的关系
- Z变换与离散时间傅里叶变换(DTFT)的关系
- Z变换与离散傅里叶变换(DFT)的关系

二、Z变换与其它变换之间的关系

1. Z变换与拉普拉斯变换的关系
2. Z变换与DTFT的关系
3. Z变换与DFT的关系

一、Z变换

1. Z变换与拉普拉斯变换的关系

抽样信号 $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$

取拉氏变换

$$X_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

令 $z = e^{sT}$,

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = |z|e^{j\Omega}$$

则 $s = \frac{1}{T}\ln z$

$$X_s(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X(z)$$

$$\boxed{L[x_s(t)]\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = Z[x(n)]}$$

序列的Z变换可以看作是产生序列的理想冲激抽样信号的拉氏变换进行**z=esT**映射的结果，该映射由复变量s平面映射到复变量z平面

一、Z变换

从 s 平面到 z 平面的映射

$$z = e^{sT}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j\omega T} = |z| e^{j\Omega}$$

(1) $\sigma = 0 \quad s = j\omega$虚轴

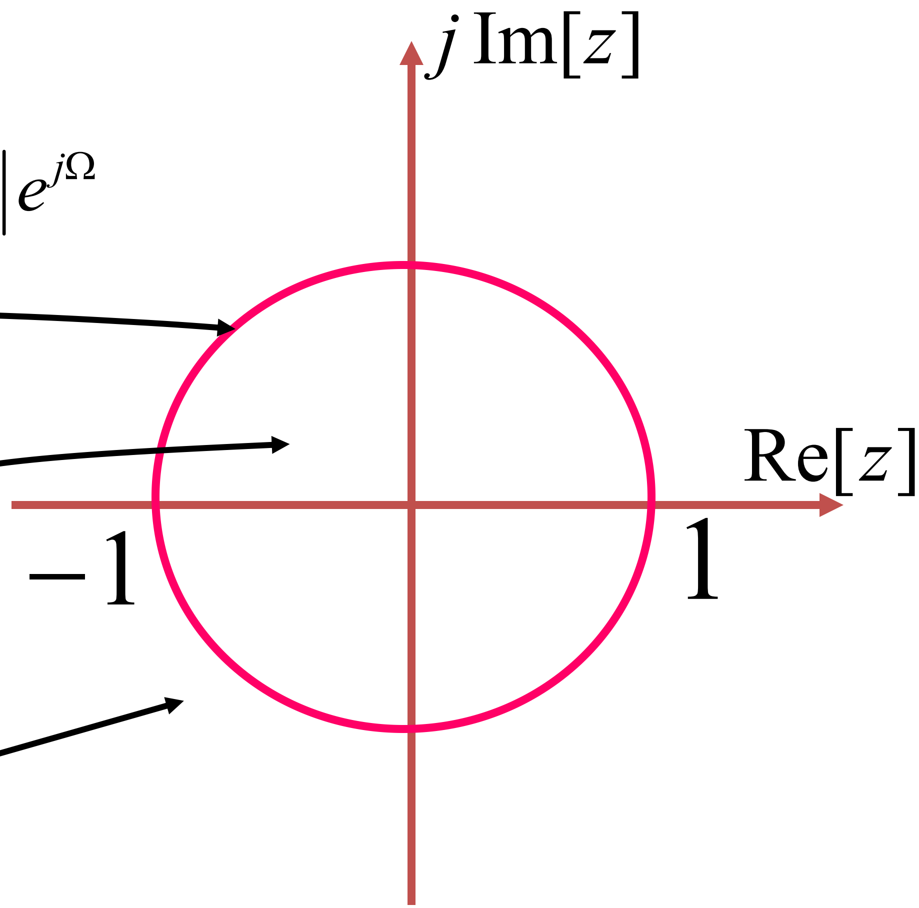
$|z| = e^{\sigma T} = 1$

(2) $\sigma < 0 \quad s = \sigma + j\omega$左半平面

$|z| < 1$

(3) $\sigma > 0 \quad s = \sigma + j\omega$右半平面

$|z| > 1$



一、Z变换

2. Z变换与DTFT的关系

离散信号$x(n)$的Z变换是$x(n)$乘以实指数信号r^{-n}后的DTFT

$$\mathcal{F}\left(x(n)r^{-n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)r^{-n}]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(re^{j\Omega}\right)^{-n}$$

令复变量 $z=re^{j\Omega}$

$$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}}$$

DTFT就是在z平面单位圆上的Z变换。前提是单位圆应包含Z变换的收敛域内

如果 $|z|=1$，即**r=1**（单位圆上也）

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\Omega}=\mathcal{F}\{x(n)\}=X(\Omega)$$

离散时间傅里叶变换就是在z平面单位圆上的Z变换（单位圆在Z变换的收敛域内）

一、Z变换

2. Z变换与DTFT的关系

例13：求序列 $x(n)=(\frac{1}{2})^{n}u(n)$ 的傅里叶变换

解：$X(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad |z|>\dfrac{1}{2}$

由于$X(z)$的收敛域包括了单位圆，所以

$$X(\Omega)=X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

一、Z变换

3. Z变换与DFT的关系

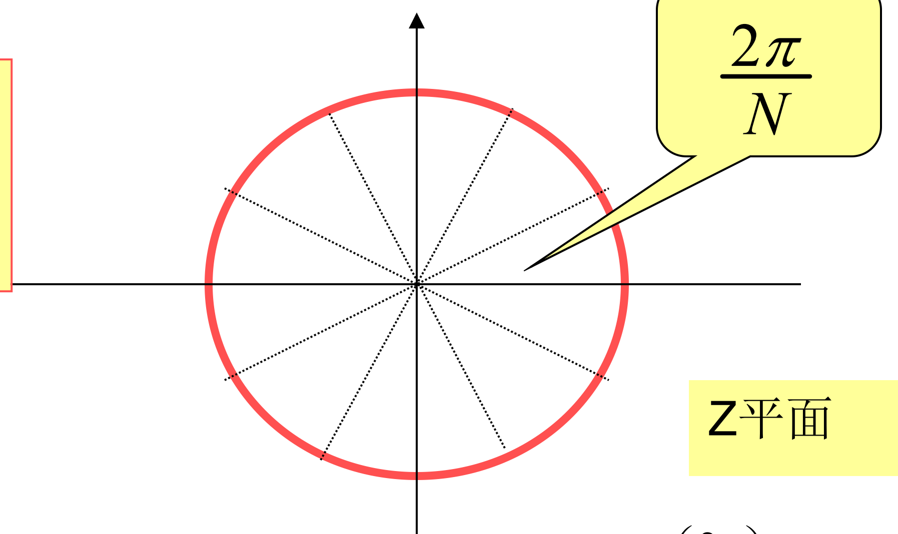
有限长序列的Z变换的抽样为

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\Big|_{W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk} = DFT[x(n)] = X(k)$$

$$\boxed{X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(k)}$$

x(n)的Z变换在单位圆上均匀抽样即为它的DFT



有限长序列的离散傅里叶变换**DFT**就是该序列的**z**变换在单位圆上每隔$\left(\frac{2\pi}{N}\right)=\Omega_0$ 弧度的均匀抽样。

一、Z变换

$$Z\,\&\,\mathrm{DTFT}\qquad X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}=X(\Omega)$$

$$Z\,\&\,\mathrm{DFT}\qquad X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=X(k)$$

1）利用序列的Z变换可以方便地求得序列的离散时间傅里叶变换DTFT和离散傅里叶变换DFT；

2）序列的离散傅里叶变换DFT是序列的离散时间傅里叶变换DTFT在频域按$\left(\frac{2\pi}{N}\right)=\Omega_0$取样间隔均匀取样的结果