§4　行列式的性质

一、行列式的性质

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

若记 $D=\det(a_{ij})$, $D^T=\det(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ji}$.

性质1　行列式与它的转置行列式相等, 即 $D=D^T$.

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 若记 $D=\det(a_{ij}),\ D^T=\det(b_{ij})$，则

$$b_{ij}=a_{ji}\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$$

根据行列式的定义，有

$$D^T=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

$$=D$$

行列式中行与列具有同等的地位, 行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2 互换行列式的两行（列），行列式变号.

备注：交换第i行（列）和第j行（列），记作$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$.

验证
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -196 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 196$$

于是
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明 互换相同的两行，有$D=-D$，所以$D=0$.

性质2. 交换两行位置，值变号.

证：

$$设D^* = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式$D = det(a_{ij})$交换i, j两行得到

当$k \neq i, j$时，$b_{kp_k} = a_{kp_k}$

当$k = i, j$时，$b_{ip_i} = a_{jp_i}$　$b_{jp_j} = a_{ip_j}$

备注：第i行和第j行交换，记作$r_i \leftrightarrow r_j$.

证：　当$k \neq i, j$时，$b_{kp_k} = a_{kp_k}$

当$k = i, j$时，$b_{ip_i} = a_{jp_i}$　　$b_{jp_j} = a_{ip_j}$

$$D^* = \sum_{n!} (-1)^{t*} b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n}$$

$$= \sum_{n!} (-1)^{t*} a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n}$$

Vs

$$D = \sum_{n!} (-1)^{t} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$$

$$D^* = -D$$

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个倍数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

备注： 第 i 行（列）乘以 k，记作 $r_i \times k(c_i \times k)$.

验证 我们以三阶行列式为例. 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

根据三阶行列式的对角线法则，有

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(ka_{22})a_{33} + a_{12}(ka_{23})a_{31} + a_{13}(ka_{21})a_{32}$$
$$- a_{13}(ka_{22})a_{31} - a_{12}(ka_{21})a_{33} - a_{11}(ka_{23})a_{32}$$

$$= k\begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{pmatrix} = kD$$

推论　行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

备注：第i行（列）提出公因子k，记作 $r_i \div k (c_i \div k)$.

性质3. 某行的公因子可外提.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boxed{k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots ka_{ip_i} \cdots a_{np_n} = \boxed{k} \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

性质4 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

验证 我们以4阶行列式为例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

性质5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，

例如：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

验证 我们以三阶行列式为例.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}(a_{2p_2}+b_{2p_2})a_{3p_3}$$

$$=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}+\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}b_{2p_2}a_{3p_3}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质5. 若某行元素为两数和，则可拆成两行列式的和.（拆分性质）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots(a_{ip_i}+b_{ip_i})\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$\boxed{=}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\boxed{+}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

思考

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ x_1+x_2 & y_1+y_2 & z_1+z_2 \\ u_1+u_2 & v_1+v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

成立吗？

No！

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ x_1+x_2 & y_1+y_2 & z_1+z_2 \\ u_1+u_2 & v_1+v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ x_1 & y_1+y_2 & z_1+z_2 \\ u_1 & v_1+v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ x_2 & y_1+y_2 & z_1+z_2 \\ u_2 & v_1+v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix}$$

思考

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ x_1 & y_1+y_2 & z_1+z_2 \\ u_1 & v_1+v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ x_2 & y_1+y_2 & z_1+z_2 \\ u_2 & v_1+v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+c_2 \\ x_1 & y_1 & z_1+z_2 \\ u_1 & v_1 & w_1+w_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_1+c_2 \\ x_1 & y_2 & z_1+z_2 \\ u_1 & v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_2 & b_1 & c_1+c_2 \\ x_2 & y_1 & z_1+z_2 \\ u_2 & v_1 & w_1+w_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_1+c_2 \\ x_2 & y_2 & z_1+z_2 \\ u_2 & v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix}$$

思考

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+c_2 \\ x_1 & y_1 & z_1+z_2 \\ u_1 & v_1 & w_1+w_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_1+c_2 \\ x_1 & y_2 & z_1+z_2 \\ u_1 & v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_1 & c_1+c_2 \\ x_2 & y_1 & z_1+z_2 \\ u_2 & v_1 & w_1+w_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_1+c_2 \\ x_2 & y_2 & z_1+z_2 \\ u_2 & v_2 & w_1+w_2 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_2 \\ x_1 & y_1 & z_2 \\ u_1 & v_1 & w_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_1 \\ x_1 & y_2 & z_1 \\ u_1 & v_2 & w_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_2 \\ x_1 & y_2 & z_2 \\ u_1 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} a_2 & b_1 & c_1 \\ x_2 & y_1 & z_1 \\ u_2 & v_1 & w_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_1 & c_2 \\ x_2 & y_1 & z_2 \\ u_2 & v_1 & w_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_1 \\ x_2 & y_2 & z_1 \\ u_2 & v_2 & w_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_1 \\ x_2 & y_2 & z_1 \\ u_2 & v_2 & w_1 \end{vmatrix}
$$

性质6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一个倍数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

备注： 以数 k 乘第 j 行（列）加到第 i 行（列）上，记作 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$.

验证 我们以三阶行列式为例. 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则 $D = D_1$.

性质6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一个倍数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & ka_{1i}+a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & ka_{2i}+a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & ka_{ni}+a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & ka_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{原行列式}}$$

例6：计算n阶行列式

（1）

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（2）副对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

例6：

解：（1）

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \therefore & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将D通过行当对换化为上三角行列式

D的第n行依次与第n-1行……第一行对换

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

换了n−1次

例6：

（1）

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ 0 & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

D_1的第n行依次与第n-1行……第二行对换　换了n-2次

例6：

（1）
$$D=\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将D通过 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{1}{2}n(n-1)$

$$\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$ 上三角

$$D=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

例6：

（2）副对角行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} \lambda_n$$

$n\, n-1 \cdots 1$

的逆序数为$\frac{n(n-1)}{2}$

二、应用举例

计算行列式常用方法：利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上（下）三角形行列式，从而算得行列式的值.

例7 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解：

$$D \underset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_4+5r_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \underset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

例7 计算 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$

解:

$$D=\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_4-8r_2}}{=}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&-2&3\end{vmatrix}\overset{r_4+\frac{1}{2}r_3}{=}10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=10\times 4=40$$

例8 计算 $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

解： 这个行列式的特点为各列4个数之和为6. 把2，3，4行同时加到第1行，提出公因子6，然后各行减去第一行

$$D\overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\overset{r_1\div 6}{=}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\r_4-r_1}}{=}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$$

例9　计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

解：第4行开始，后行减前行

$$D \overset{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2\\ r_2-r_1}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \overset{r_4-r_3}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

例　计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解　将第$2,3,\cdots,n$列都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$
=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}
$$

$$
=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
$$

例10 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2.$

证明

对 D_1 作运算 $r_i + kr_j$，把 D_1 化为下三角形行列式

设为 $D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk};$

对 D_2 作运算 $c_i + kc_j$，把 D_2 化为下三角形行列式

设为 $D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & p_{nk} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$

对 D 的前 k 行作运算 $r_i + kr_j$，再对后 n 列作运算 $c_i + kc_j$，

把 D 化为下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{matrix}} & \mathbf{0} \\ \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} q_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{matrix}} \end{vmatrix},$$

故 $\quad D = p_{11} \cdots p_{kk} \cdot q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2.$

例11　计算2n阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix} \Rightarrow D'_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

解　D_{2n}中的第2n行依次与2n-1行…第2行对换

$2n-2$次相邻两行的对换

例11　计算2n阶行列式

$$D'_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$D''_{2n}=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}$$

解　D_{2n}中的第2n列依次与2n-1列⋯第2列对换

$2n-2$次相邻两列的对换

例11　计算2n阶行列式

解
$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix} = (-1)^{2(2n-2)}\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \\ 0 & 0 \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} a & & & & b \\ & \ddots & & ⋰ & \\ & & \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & & \\ & ⋰ & & \ddots & \\ c & & & & d \end{matrix}}_{2(n-1)\text{阶}} \end{vmatrix}$$

$$= D_2 D_{2n-2} = (ad-bc)D_{2n-2} \quad \text{递推式}$$

$$D_{2n} = (ad-bc)^2 D_{2n-4} = \cdots = (ad-bc)^{n-1} D_2$$

$$= (ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^n$$

三、小结

行列式的6个性质(行列式中行与列具有同等的地位，凡是对行成立的性质对列也同样成立).

计算行列式常用方法：(1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

思考题

计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \qquad (\text{已知 } abcd=1)$$

思考题解答

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}=0.$$