1、最优化问题中的几个重要数学概念

[1] 凸集的定义及性质：如何判断凸集，不同凸集之间的运算（交、+、-和并）得到的集合是否仍然是凸集。

[2] 梯度、Hesse 矩阵和 Jacobi 矩阵的定义和计算：梯度是指向目标函数增长最快的方向，负梯度是减小最快的方向。

[3] 凸函数的定义及性质：如何判断凸函数，可以用 Hesse 矩阵的正定性去判断（凸函数的判别定理）。

[4] 凸规划问题的定义及描述：凸规划的局部极小点就是全局极小点，且极小点的集合就是凸集；如果凸规划的目标函数是严格凸函数，又存在极小点，那么它的极小点是唯一的。

2、线性规划的基本性质

[1] 线性规划的标准形式及转换（引入松弛变量，将不等式约束转换为等式约束）。

[2] 线性规划的基本性质：图解法、线性规划最优解存在定理，**基本可行解的定义与描述**、**基本可行解与极点集之间的对应关系**、最优基本可行解（为单纯形法做铺垫）。

3、单纯形方法

[1]判别数/检验数的定义及性质：对于极小化问题，所有的判别数均小于等于 0；对于极大化问题，要求所有的判别数均大于等于 0，则找到最优解。（注：我们此处的判别数定义为$\left(z_j-c_j\right)=C_BB^{-1}p_j-c_j$）

[2]进基变量/离基变量的确定规则：极小/极大化化问题。

[3]单纯形方法的计算步骤以及最优解的判别条件（收敛性分析）：分成 3 种情形。

[4]应用单纯形表求解单纯形问题。（☑）

			-1	3	1	0	0	0	
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	7	3	-1	2	1	0	0	-
0	x_5	12	-2	4	0	0	1	0	12/4
0	x_6	10	-4	3	8	0	0	1	10/3
$\sigma_j=c_j-z_j$			-1	3	1	0	0	0	
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	10	5/2	0	2	1	1/4	0	10/2
3	x_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	-
0	x_6	1	-5/2	0	8	0	-3/4	1	1/8
$\sigma_j=c_j-z_j$			1/2	0	1	0	-3/4	0	

（上述类型的单纯形表和书上的差不多类似，只是把右端$\bar{b}$放到了左边，也需要认识。注意此处的判别数和我们书上的判别数差个负号，这个问题是在求极大值问题，需要确保此处形式下的判别数均小于等于 0，也就是我们书上定义的判别数大于等于 0。）

[5]两阶段法的基本思想：第一阶段找出基本可行解，第二阶段应用单纯形方法进行寻优。**人工变量的引入（人工变量与松弛变量的区别）**，第一阶段最优基本可行解的 3 种情形代表的含义。**两阶段法的步骤。**

[6]大 M 法的基本思想及步骤：在约束中增加人工变量，同时修改目标函数，加上关于 M 的罚项，其中 M 是很大的正数，这样，在极小化目标函数的过程中，由于大 M 的存在，将迫使人工变量离基。

4、对偶原理及灵敏度分析

[1]对偶理论：

1) **对偶问题的转换/对偶形式书写（对偶规划的一般规则）**
2) **对偶定理：**定理 4.1.1 和 4.1.2
3) 互补松弛定理：根据该定理，由对偶最优解求解原问题的最优解。

[2]对偶单纯形法：

1) 对偶可行基本解的定义；
2) 对偶单纯形法的基本思想：若对偶可行基本解是原问题的基本解，由于其满足判别数的要求（判别数$\left(z_j-c_j\right)=C_BB^{-1}p_j-c_j$均小于等于或者大于等于 0），则该对偶可行基本解为原问题的最优解。
3) **对偶单纯形法的基本步骤：**与单纯形表的区别在于确定离基/进基变量的规则发生改变，单纯形表的确定规则是保持右端列（目标函数值除外）非负，确保原问题解的可行性；对偶单纯形法的确定规则是保持对偶可行性，即要保持所有判别数$\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{c}_j\le 0$(对于极小化问题)。

[3]灵敏度分析：

4 种参数变化的情况分析：改变系数向量 c、改变右端向量 b、改变约束矩阵 A 和新增加约束。会分析这 4 种情况下最优解的变化情况，是否仍然是最优解？

7、最优性条件

1) **K-T 点的求解：P220-P221 中的 K-T 条件，根据 K-T 条件去求满足问题的 K-T 点**（注意书中的 **K-T** 条件针对的是式（**7.2.1**）的最优化问题，它是具有大于等于约束和等于约束的，若碰到小于等于约束，则先将其化为大于等于约束）。（☑）

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{l} v_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0,$$
$$w_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1,\cdots,m,$$
$$w_i \geqslant 0, \quad i = 1,\cdots,m,$$

2) 无约束优化问题的局部极小点的一阶和二阶必要条件、二阶充分条件。凸函数情况下全局极小点的充要条件。

3) 约束极值的最优性条件：下降方向的定义：$\nabla f^T(x)d < 0$，可行方向的定义，基于可行方向与下降方向下的局部最优解判断；起作用约束；**K-T** 条件。

9、一维搜索算法

一维搜索算法的概念：沿某方向 d 在直线或者射线上求目标函数的最优值，即求目标函数在直线上的极小点。

[1]试探法：黄金分割法（0.618 法）、Fibonacci 方法的基本原理及步骤；前提是针对的单峰函数。

[2]函数逼近法：牛顿法、割线法、抛物线法的基本原理、函数逼近公式及几何意义的了解。

10、使用导数的最优化方法（无约束非线性最优化问题）

Remark：记住本章算法的核心步骤为：确定搜索方向、和优化搜索步长这两部分。其中不同的搜索方向产生了不同的优化方法，需要理解各优化方法的搜索方向确立的基本思想、估计点的迭代形式及过程等。

[1]最速下降法：基本思想、搜索方向的计算公式、算法步骤、算法的性能及优缺点；（☑）

[2]牛顿法：基本思想、搜索方向的计算公式、算法步骤、算法的性能及优缺点、

二次终止性；（☑）

[3]共轭梯度法：基本思想、搜索方向的计算公式、算法步骤、算法的性能及优缺点、二次终止性，学会用该方法计算无约束非线性优化问题的最优解；（☑）

[4]拟牛顿法：基本思想、搜索方向的计算公式、拟牛顿条件、算法步骤（DFP 和 BFGS）、算法的性能及优缺点、二次终止性，学会用该方法计算无约束非线性优化问题的最优解；（☑）

[5]信赖域法：基本概念和思想。

11、无约束最优化问题的直接方法

Remark：直接法的优势，不需要计算导数。

[1]模式搜索法：基本思想（探测移动+模式移动），算法步骤；

[2]Rosenbrock 法（转轴法）：基本思想（探测阶段+构造搜索方向），算法步骤；

[3]单纯形法：基本思想（单纯形下的反射、扩展、压缩），**反射点的计算公式及几何意义**，算法基本步骤。

[4]Powell 方法：基本思想（本质上是共轭方向，坐标方向加前后迭代点的连线方向，该连线方向与上一个方向共轭），算法步骤，二次终止性。

12、可行方向法（有约束非线性规划问题）

[1]Zoutendijk 可行方向法：算法的基本思想及步骤，学会应用该方法求解非线性规划问题的最优解。（☑）

[2] Rosen 梯度投影法:算法的基本思想及步骤，学会应用该方法求解非线性规划问题的最优解。（☑）

13、罚函数法（有约束非线性规划问题）

[1]外点罚函数法：算法基本思想（惩罚函数）及步骤，学会应用该方法求解非线性规划问题的最优解。（☑）

[2]内点罚函数法：算法基本思想（障碍函数）及步骤，学会应用该方法求解非线性规划问题的最优解。（☑）

通过本章的作业练习：P413 第 1 题和第 3 题，掌握相应的解题技巧。