杭州电子科技大学学生考试（A）卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2022 年 06 月 20 日	成绩	
课程号	A0714202	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一 1-8 （24 分）	二 9-12 （12 分）	三 13-16 （20 分）	四 17-20 （28 分）	五 21 （11 分）	六 22 （5 分）
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，考试时间 120 分钟

得分	

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 方程$z^2=x^2+y^2$表示(D).

A. 球面　　B. 抛物面　　C. 马鞍面　　D. 锥面

2. 已知 $2y^2\cos(2xy)\mathrm{d}x+[\sin(2xy)+axy\cos(2xy)]\mathrm{d}y$是某二元函数的全微分，则$a=$(B).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设$f(x,y)$是连续函数，则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\rho=$(B).

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

4. 设$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2,z\ge0\}$,$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{matrix}x^2+y^2+z^2\le R^2,\\x\ge0,y\ge0,z\ge0\end{matrix}\right\}$，则下列成立的是(C).

A. $\iiint_\Omega x\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_1}x\mathrm{d}v$　　B. $\iiint_\Omega y\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_1}y\mathrm{d}v$

C. $\iiint_\Omega z\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_1}z\mathrm{d}v$　　D. $\iiint_\Omega xyz\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v$

5. 设L为圆周$(x-1)^2+y^2=1$，则$\oint_L(1-y^2)\mathrm{d}s=$(B).

A. 0　　B. π　　C. 2π　　D. $\frac{\pi}{2}$

6. 设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=4$上的$z\ge1$部分，则$\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=$(D).

A. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\sqrt{4-\rho^2}\mathrm{d}\rho$　　B. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-\rho^2}\mathrm{d}\rho$

C. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}2\rho\mathrm{d}\rho$　　D. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}2\rho\mathrm{d}\rho$

7. 下列级数收敛的是(A).

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$

8. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x=2$处条件收敛，则此级数的收敛半径$R=$(B).

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 不确定

得分	

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9. 点(1,2,0)到平面 $4x+3y+5z-5=0$ 的距离$d=$ $\sqrt{2}/2$.

10. 函数$z=x^2+2xy$在点(1,2)处沿向量(1,1)的方向导数等于 $4\sqrt{2}$.

11. 已知$\Omega=\{(x,y,z)|0<x<1,0<y<1,0<z<1\}$，则$\iiint_\Omega(x+y+z)\mathrm{d}v=$ $3/2$.

12. 函数$f(x)=\frac{1}{2+x}$在$x=1$处的幂级数展开式为________.

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n,x\in(-2,4)$

得分	

三、简单计算题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知曲线$\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3, \\ z=\sqrt[3]{t^2} \end{cases}$在点(1,1,1)处的一个切向量与$z$轴正向的夹角为钝角，求此切向量的三个方向余弦.

解：切向量$\vec{T}=\pm(2,3,\frac{2}{3})=\pm\frac{1}{3}(6,9,2)$ ——2′

根据已知，取$\vec{T}=(-6,-9,-2), |\vec{T}|=11$ --2′

所以三个方向余弦为$\cos\alpha=-\frac{6}{11}, \cos\beta=-\frac{9}{11}, \cos\gamma=-\frac{2}{11}$. --1′

14. 求函数$f(x,y)=x^2+6x+y^2+xy$的极值，并判断是极大值还是极小值.

解：令$\begin{cases} f_x=2x+6+y=0 \\ f_x=2y+x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x=-4,\ y=2$ ---2′

$A=f_{xx}=2>0, B=f_{xy}=1, C=f_{yy}=2, AC-B^2>0$ --2′

$\Rightarrow f(-4,2)=-12$ 为极小值 ---1′

15. 设常数$\lambda>0$，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\lambda}{n})$是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛，并说明理由.

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}(n^2\cdot|u_n|)=\frac{\lambda^2}{2}\neq 0,$ ---3′

所以级数收敛，且是绝对收敛. --2′

16. 求由曲面$z=2x^2+y^2$及$z=6-x^2-2y^2$所围成的立体体积.

解：交线$\begin{cases} z=2x^2+y^2 \\ z=6-x^2-2y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2$

$\Rightarrow$ 立体在xOy坐标面的投影$D_{xy}: x^2+y^2\le 2$ ---1′

体积$V=\iint_{D_{xy}}[(6-x^2-2y^2)-(2x^2+y^2)]\,\mathrm{d}\sigma$ --2′

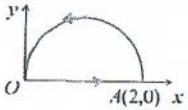
$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(6-3\rho^2)\,\rho\mathrm{d}\rho$

$=6\pi$ ---2′

得分	

四、计算题（本题共 4 小题，每题 7 分，共 28 分）

17. 计算曲线积分$I=\int_L (e^x\sin y+3y+2)dx+(e^x\cos y+5)dy$，其中$L$为点$A(2,0)$沿着上半圆周$(x-1)^2+y^2=1$到点$O(0,0)$的一段曲线.



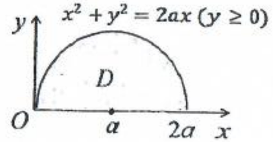
解：如右图添加辅助线OA: $\begin{cases}x=x\\y=0\end{cases}$，$x: 0\to 2$ —— 1′

则$\int_{L\cup OA}(e^x\sin y+3y+2)dx+(e^x\cos y+5)dy=\iint_D -3d\sigma=-\frac{3}{2}\pi$ - - 3′

$\int_{OA}(e^x\sin y+3y+2)dx+(e^x\cos y+5)dy=\int_{OA}2dx=4$ - - 2′

$\int_L (e^x\sin y+3y+2)dx+(e^x\cos y+5)dy=-\frac{3}{2}\pi-4$ —— 1′

19. 计算二次积分$\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}dy\ (a>0)$.



解：积分$=\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}d\sigma$ - - 3′

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\rho d\rho$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8a^3}{3}(1-\sin^3\theta)d\theta$

$=\frac{8a^3}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$ —— 4′

18. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+\frac{1}{n})x^{2n}$ 的收敛域及和函数的表达式.

解：$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+\frac{1}{n})x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^nx^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$ —— 2′

$\sum_{n=1}^{\infty}2^nx^{2n}$： $\sum_{n=1}^{\infty}2^nx^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2x^2)^n=\frac{2x^2}{1-2x^2}$, $|2x^2|<1$ —— 2′

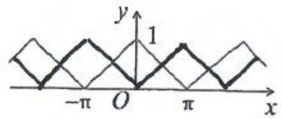
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$： 收敛域$|x|<1$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{x^2}t^{n-1}dt\\&=\int_0^{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt=\int_0^{x^2}\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x^2)\end{aligned}\right\}2'$$

和函数 $s(x)=\frac{2x^2}{1-2x^2}-\ln(1-x^2)$, $x\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ —— 1′

20. 将函数$f(x)=|x|\ (-\pi\leq x\leq\pi)$展开成傅里叶级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

解：将$f(x)$周期延拓成 2π为周期的周期函数$F(x)$，如图，得$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$f(x)=F(x)$, $(-\pi\leq x\leq\pi)$.



$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi\\a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, n=2,4,6,\cdots\\-\frac{4}{n^2\pi}, n=1,3,5,\cdots\end{cases}\\b_n&=0, n=1,2,3,\cdots\end{aligned}\right\}4'$$

$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots)$, $(-\pi\leq x\leq\pi)$ —— 1′

令$x=0$ 得

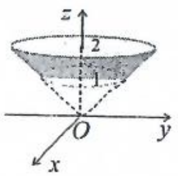
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$ —— 2′

得分	

五、应用题（本题 11 分）

21. 计算积分$I=\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$和$z=2$所截的部分，其法向量与$z$轴的正向成钝角.

解：添加辅助面



Σ_1：$z=1$，$x^2+y^2\le 1$，下侧

Σ_2：$z=2$，$x^2+y^2\le 4$，上侧 $2'$

则$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}(y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\iiint_{\Omega}(x+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\iiint_{\Omega} 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{15}{2}\pi$$ $4'$

$\iint_{\Sigma_1} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$, —— $2'$

$\iint_{\Sigma_2} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=16\pi$, —— $2'$

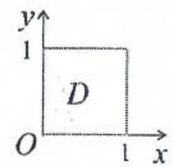
$\Rightarrow\iint_{\Sigma}=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}=-\frac{15}{2}\pi$, —— $1'$

得分	

六、证明题（本题 5 分）

22. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续且单调递减，$f(1)>0$，证明：$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$.

证明：由已知$\forall x\in[0,1]$有$f(x)>f(1)=0$. —— $2'$



因为$\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y}{\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y}$，所以

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\Leftrightarrow\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\le\frac{\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y}{\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y}$$

$\Leftrightarrow\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y-\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y\le 0$, —— $1'$

而左边$=\iint_D[xf^2(x)f(y)-xf(x)f^2(y)]d\sigma$

$$=\iint_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]d\sigma$$

$$=\iint_D yf(x)f(y)[f(y)-f(x)]d\sigma$$ （轮换对称性）

$$=\frac{1}{2}\iint_D f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]d\sigma$$ $1'$

因为$f(x)$在$[0,1]$上单调递减，且$\forall x\in[0,1]$有$f(x)>0$，所以

$$f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]<0$$

从而 $\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y-\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\iint_D f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]d\sigma<0$$ $1'$

所以不等式成立.