§3　n阶行列式的定义

一、概念的引入

观察二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

① 2！项的代数和；

② 不同行不同列2个元素的乘积；

③ 1项为正,1项为负；

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

④当行标调成标准排列时

列标排列	1 2	2 1
逆序数t	0	1
$(-1)^t$	+	-

一、概念的引入

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

规律：

1. 三阶行列式共有6项，即3!项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ （正负号除外），其中$p_1p_2p_3$ 是1、2、3的某个排列.
4. 当 $p_1p_2p_3$ 是偶排列时，对应的项取正号；
   当 $p_1p_2p_3$ 是奇排列时，对应的项取负号.

观察三阶行列式

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

①3!项代数和
②不同行不同列三个元素的乘积
③三项为正,三项为负.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

④当行标调成标准排列时

列标排列	123	231	312	321	213	132
逆序数t	0	2	2	3	1	1
$(-1)^t$	+	+	+	-	-	-

一、概念的引入

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

规律：

1. 三阶行列式共有6项，即3!项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ （正负号除外），其中 $p_1p_2p_3$ 是1、2、3的某个排列.
4. 当 $p_1p_2p_3$ 是偶排列时，对应的项取正号；
   当 $p_1p_2p_3$ 是奇排列时，对应的项取负号.

所以，三阶行列式可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对1、2、3的所有排列求和.

二阶行列式有类似规律. 下面将行列式推广到一般的情形.

二、n 阶行列式的定义

定义2 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

简记作 $\det(a_{ij})$，

其中 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元

1. n 阶行列式共有 $n!$ 项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$（正负号除外），其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的某个排列.
4. 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，对应的项取正号；
   当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，对应的项取负号.

思考题： $|-1|=-1$成立吗？

答： 符号$|-1|$可以有两种理解：

✓若理解成绝对值，则$|-1|=+1$；

✓若理解成一阶行列式，则 $|-1|=-1$.

注意： 当$n=1$时，一阶行列式$|a|=a$，注意不要与绝对值的记号相混淆. 例如：一阶行列式 $|-1|=-1$.

例：写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{23}a_{3x}a_{4y} \quad \begin{cases} a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} & t(1324)=1 \\ a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} & t(1342)=2 \end{cases}$$

$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$不是D的一项.

例5：证明

（1）下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

（2）主对角行列式 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

例5：证明

（1）下三角行列式 $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证： $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$\boxed{\begin{array}{c} 1\ 2 \cdots n \\ \text{的逆序数为0} \end{array}}$

行列式中各项中不为零的项只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，其它项均为零

上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例5：证明

（2）主对角行列式 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

$$|D| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

副对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$n\, n-1 \cdots 1$

的逆序数为$\frac{n(n-1)}{2}$

计算行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{t(4321)}a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}=a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$$

其中 $t(4321)=0+1+2+3=\dfrac{3\times 4}{2}=6.$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$$

[redacted]

(1) 对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\boxed{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3)　上三角形行列式　（主对角线下侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4)　下三角形行列式　（主对角线上侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

思考题：用定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解：用树图分析

-1 — 1 — 3 — -1 $\qquad \tau(2134)=1$

-1 — 1 — 1 — -2 $\qquad \tau(2143)=2$

-1 — 3 — 2 — -2 $\qquad \tau(2413)=3$

-1 — 3 — 3 — -1 $\qquad \tau(2431)=4$

故 $D=-3+2-12+9=-4$

思考题

已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求$x^3$的系数.

解　含 x^3 的项有两项，即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = x^3,$$

$$(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -2x^3$$

故 x^3 的系数为 -1.