设A是n阶实对称矩阵，则（　　）.

A　A的特征值有可能不是实数

B　对于A的n个特征向量，它们一定是两两正交的

C　A有n个不同的特征值

D　存在正交矩阵P使得P^TAP为对角矩阵

(A) ×　　实对称阵的所有特征值必为实数

(B) ×　　(实对称阵) 不同特征值下的特征向量必正交，但同个特征值下的特征向量不一定

(有时使用施密特正交化方法)

(C) ×　　A也有可能有重根

(D) ✓　　实对称阵可对角化

(D)

设A为n阶正定矩阵，若矩阵B与A相似，则B必为（ ）.

A 实对称矩阵

B 正定矩阵

C 可逆矩阵

D 正交矩阵

B与A相似， B与A有相同的特征值

A正定 ⟺ A的所有特征值大于0 ⟺ B的所有特征值大于0

$|A| \neq 0 \Rightarrow |B| \neq 0$ (C)

又: B没有说是不是对称阵，所以只能确定B可逆.

反例: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

(B不对称)

设矩阵$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，已知矩阵$A$相似于$B$，则$R(A-2E)+R(A-E)=$ ( ) .

A 2

B 3

C 4

D 5

A 相似于B $A=P^{-1}BP$

$A-2E=P^{-1}BP-2P^{-1}EP=P^{-1}(B-2E)P$ $A-2E$与$B-2E$相似

$\therefore R(A-2E)=R(B-2E)$

$A-E=P^{-1}BP-P^{-1}EP=P^{-1}(B-E)P$ $A-E$与$B-E$相似

$R(A-E)=R(B-E)$

$\therefore R(A-2E)+R(A-E)=R(B-2E)+R(B-E)$ (C)

$B-2E=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ $R(B-2E)=3$

$B-E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $R(B-E)=1$ $\therefore R(A-2E)+R(A-E)=4$

设$A=(\alpha_{ij})$为n阶实对称矩阵，二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right)^2$$为

正定二次型的充要条件是（ ）.

A $|A|=0$

B $|A|\neq 0$

C $|A|>0$

D A的任意主子式均大于零

令 $(x_1, x_2, \cdots x_n)^T = X$

$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = (AX)^T(AX)$

f 正定 $\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0$ 均有 $(AX)^T(AX) > 0$ ∵A实对称 (B)

$\Leftrightarrow$ 对于$\forall X\neq 0$ $AX \neq 0$ $\Leftrightarrow$ A为满秩矩阵 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$

设λ_1，λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1, α_2，则$\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是（ ）.

A $\lambda_1 \neq 0$

C $\lambda_1 = 0$

B $\lambda_2 \neq 0$

D $\lambda_2 = 0$

$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 线性无关

$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$

$A(\alpha_1+\alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$

$\alpha_1, \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$ 线性无关的充要条件

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow (x_1+x_2\lambda_1)\alpha_1 + \lambda_2 x_2\alpha_2 = 0$ 只有零解 $\because \alpha_1, \alpha_2$ 线性无关

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 x_2 = 0 \end{cases}$ 只有零解 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_2 \neq 0$

(B)

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似，则（ ）.

A $x=0,y=0$

B $x=1,y=1$

C $x=1,y=0$

D $x=0,y=1$

A与B相似：　$tr(A)=tr(B)$　$|A|=|B|$

$$\begin{cases}2+x=2+y-1\\-2=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$$

(D)

设A为n阶实对称矩阵，P是n阶可逆矩阵，已知n维列向量α是矩阵A属于特征值λ的特征向量，则（ ）是矩阵$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$属于特征值λ的特征向量.

A $P^{-1}\alpha$

C $P\alpha$

B $P^{\mathrm{T}}\alpha$

D $(P^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$

$A\alpha=\lambda\alpha$ $\quad (P^{-1}AP)^{T}\beta=\lambda\beta$ 找 β

$(P^{-1}AP)^{T}=P^{T}A^{T}(P^{-1})^{T}=P^{T}A(P^{T})^{-1}$

$P^{T}A(P^{T})^{-1}(P^{T}\alpha)=\quad P^{T}A\alpha=P^{T}\lambda\alpha=\lambda(P^{T}\alpha)$

(B)

设3阶方阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&-x\\1&0&0\end{pmatrix}$有3个线性无关的特征向量，则参数$x$=（ ）.

A -1

B 0

C 1

D 2

A一定能对角化

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\2&1-\lambda&-x\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(\lambda+1)$$

$\lambda_1=-1$，$\lambda_{2,3}=1$（二重根）

只要二重根下有两个特征向量，A就能对角化

$(A-E)X=0$ 基础解系(自由变量)个数 $=2$个 非自由变量：$3-2=1$个

$R(A-E)=1$ $(A-E)=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&0&-x\\1&0&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&-x\\0&0&0\end{pmatrix}$

要使 $R(A-E)=1$ 只要 $x=2$ 即可 (D)

n阶实对称矩阵A合同于n阶实对称矩阵B的充要条件为（ ）.

A $R(A)=R(B)$

B A和B的正惯性指数相等

C A，B为正定矩阵

D $R(A)=R(B)$且A和B的正惯性指数相等

A与B合同 $\Leftrightarrow$ A与B有相同的惯性指数

$\Leftrightarrow$ A与B正负惯性指数是一样

$\Leftrightarrow$ 实对称矩阵秩 = 正负惯性指数之和

R(A)=R(B)且 A、B 正惯性指数也是相同

(D)

设A为n阶可逆矩阵，ξ是A的属于特征值λ的特征向量，则在下列结论中不正确的是（　）

A　ξ必是A^2-E的特征向量

B　ξ必是$5A$的特征向量

C　ξ必是A^*的特征向量

D　ξ必是A^T的特征向量

矩阵	特征值	特征向量
A	λ	p
A^k	λ^k	p
$\varphi(A)$	$\varphi(\lambda)$	p
A^{-1}	λ^{-1}	p
$A^*=\lvert A\rvert A^{-1}$	$\lvert A\rvert\lambda^{-1}$	p
A^T	λ	不一定p

A^T的特征向量不一定是p

(D)