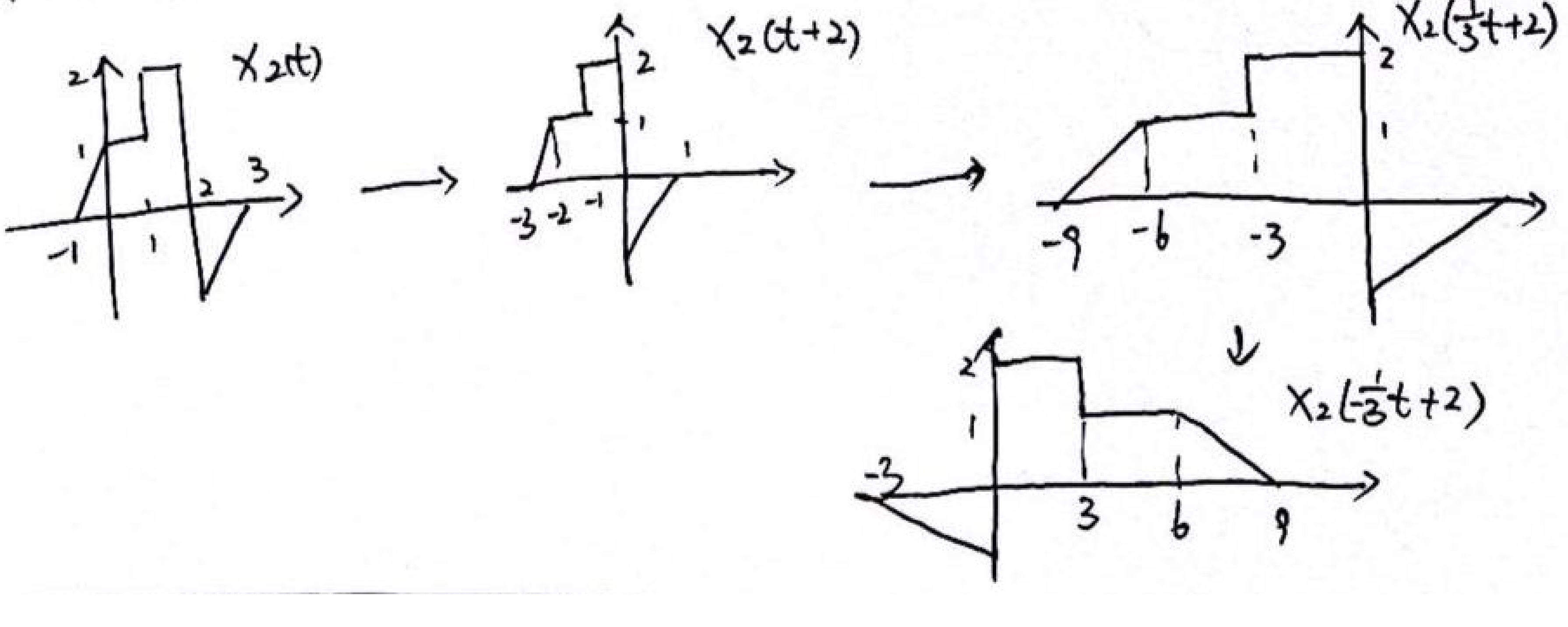
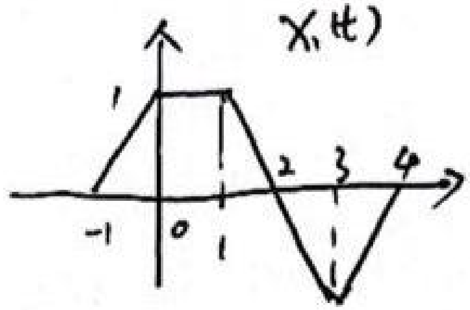
(2). $\int_{0^-}^{10} (e^t + t) \cdot \delta(t+2)\, dt = 0$

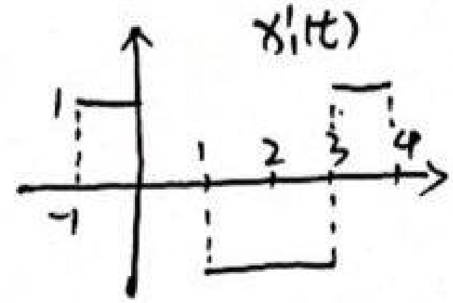
7). $x_2(2-\frac{t}{3})$



P99.

3.(10)

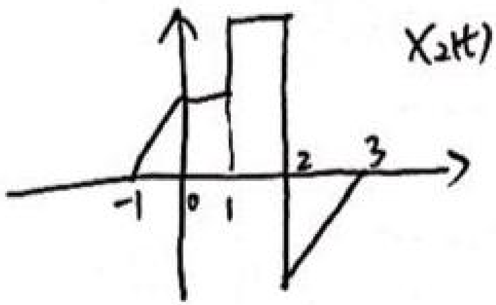


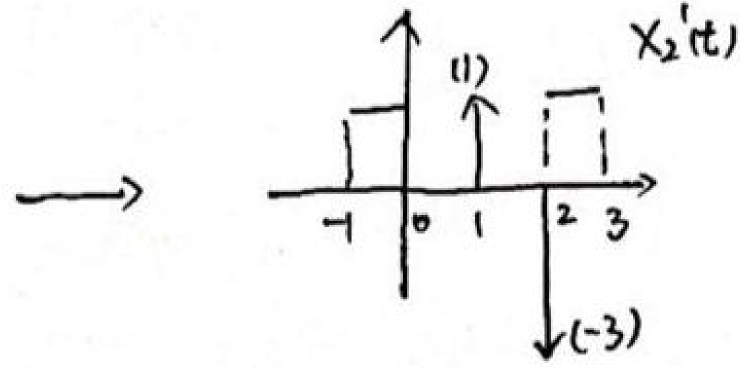


表达式：(1). 分段函数.

$$x_1'(t) = \begin{cases} 0 & t > 4 \\ 1 & 3 \le t \le 4 \\ -1 & 1 \le t < 3 \\ 0 & 0 \le t < 1 \\ 1 & -1 \le t < 0 \\ 0 & t < -1 \end{cases}$$

(2). $X_2'(t) = [u(t+1) - u(t)] - [u(t-1) - u(t-3)] + [u(t-3) - u(t-4)]$





表达式. (1). 分段函数

$$x_2'(t) = \begin{cases} 0 & t>3 \\ 1 & 2<t\le 3 \\ -3\delta(t) & t=2 \\ \delta(t) & t=1 \\ 1 & -1\le t\le 0 \\ 0 & t<-1 \end{cases}$$

(2). $x_2'(t) = [u(t-2)-u(t-3)] - 3\delta(t-2) + \delta(t-1) + [u(t+1)-u(t)]$

P101. 傅里叶级数表达式.

17.(1). $x(t) = \cos 4t + \sin 6t$.

$w_0 = 2$. $\cos 4t = \cos 2 \cdot w_0 t$. $a_2 = 1$

$\sin 6t = \sin 3 \cdot w_0 t$. $b_3 = 1$.

三角形式: $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n w_0 t + b_n \sin n w_0 t)$

$= 0 + a_2 \cdot \cos 2 w_0 t + b_3 \cdot \sin 3 w_0 t$.

$= \cos 2 w_0 t + \sin 3 w_0 t$.

P101. 傅里叶级数表达式.

17. (1). $x(t) = \cos 4t + \sin 6t$.

$w_0 = 2$.　　$\cos 4t = \cos 2 \cdot w_0 t$.　　$a_2 = 1$

$\sin 6t = \sin 3 \cdot w_0 t$.　　$b_3 = 1$.

三角形式: $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n w_0 t + b_n \sin n w_0 t)$

$= 0 + a_2 \cdot \cos 2 w_0 t + b_3 \cdot \sin 3 w_0 t$.

$= \cos 2 w_0 t + \sin 3 w_0 t$.

直接用欧拉公式展开

$\cos 2w_0 t + \sin 3 w_0 t$

$= \frac{1}{2} e^{j \cdot 2 w_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j 2 w_0 t} - \frac{1}{2} j e^{j 3 w_0 t}$

$+ \frac{1}{2} j e^{-j \cdot 3 w_0 t}$.

指数形式: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$

$X(n\omega_0) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$

$x(t) = \cos 4t + \sin 6t$

$= \cos 2\omega_0 t + \sin 3\omega_0 t = \frac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j\cdot 2\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{j\cdot 3\omega_0 t} - e^{-j\cdot 3\omega_0 t}}{2j}$

$a_2 = 1 \qquad b_3 = 1$

$a_{-2}: \cos(-2\cdot\omega_0 t) = \cos 2\omega_0 t \qquad \therefore a_{-2} = a_2 = 1$

$b_{-3}: \sin(-3\cdot\omega_0 t) = -\sin 3\omega_0 t \qquad \therefore b_{-3} = -b_3 = -1$

$\therefore n=2. \quad X(n\omega_0) = \frac{1}{2}(a_2 - j\cdot b_2) = \frac{1}{2}$

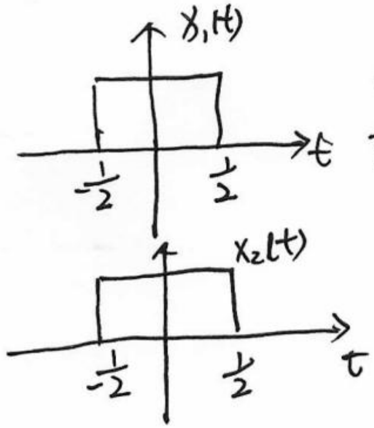
$n=-2. \quad X(n\omega_0) = \frac{1}{2}(a_{-2} - jb_{-2}) = \frac{1}{2}$

$n=3 \quad X(n\omega_0) = \frac{1}{2}(a_3 - jb_3) = -\frac{1}{2}j$

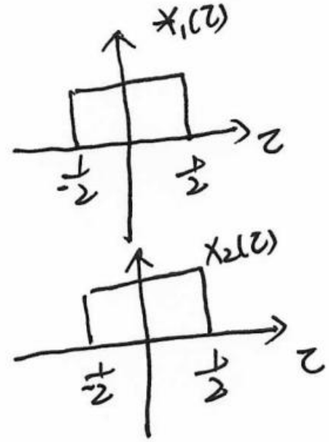
$n=-3 \quad X(n\omega_0) = \frac{1}{2}(a_{-3} - jb_{-3}) = \frac{1}{2}j$

$\therefore x(t) = \frac{1}{2}e^{j\cdot 2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega_0 t} - \frac{1}{2}j\cdot e^{j\cdot 3\omega_0 t} + \frac{1}{2}j\cdot e^{-j\cdot 3\omega_0 t}$

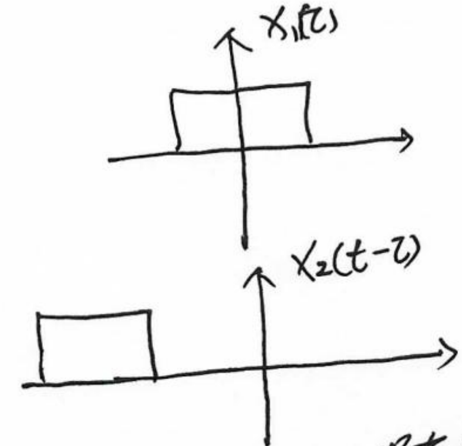
补充. 求卷积.



① 变量替换.

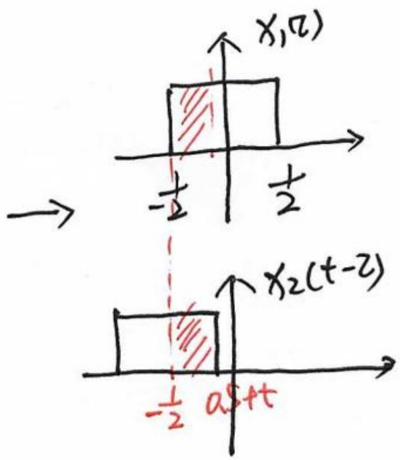


②. 平移



① 当 $-\infty<t<-1$ 没有重合部分

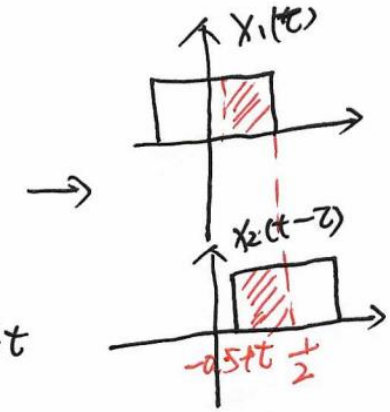
$x_1(t)*x_2(t)=0$



② 当 $-1<t<0$

$x_1(t)*x_2(t)$

$=\int_{-0.5}^{0.5+t} 1\cdot 1\, d\tau = 1+t$



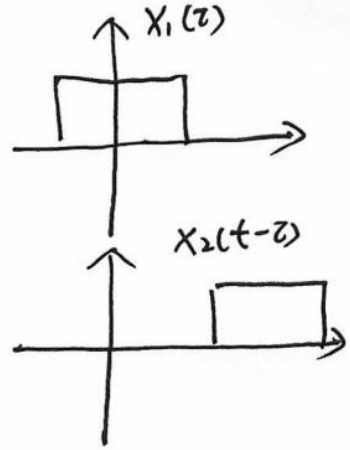
③ 当 $0<t<1$

$x_1(t)*x_2(t)$

$=\int_{-0.5+t}^{0.5} 1\cdot 1\, d\tau$

$=1-t.$

一)



⑥ 当 $t>1$ 无重合.

$x_1(t) * x_2(t) = 0.$

2、 $$x_1(t) * x_2(t) = \begin{cases} 0 & -\infty<t<-1 \\ 1+t & -1<t<0 \\ 1-t & 0<t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

第二章 连续信号的分析

方璐 2教322
杭州电子科技大学 自动化学院

2.3 连续信号的复频域分析

一、信号的拉普拉斯变换

- 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的收敛域
- 拉普拉斯变换的性质
- 常用信号的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯反变换
- 单边拉普拉斯变换

二、信号的复频域分析

- 拉普拉斯变换的几何表示
- 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系
- 由零极点图对傅里叶变换进行几何求值

2.3 连续信号的复频域分析

一、信号的拉普拉斯变换

1. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
2. 拉普拉斯变换的收敛域
3. 拉普拉斯变换的性质
4. 常用信号的拉普拉斯变换
5. 拉普拉斯反变换
6. 单边拉普拉斯变换

一、信号的拉普拉斯变换

Fourier 变换的“局限性”？

- 当信号 $f(t)$ 满足 Dirichlet 条件，且在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积时，便可以进行古典意义下的 Fourier 变换。

- 由于绝对可积是一个相当强的条件，使得一些简单信号(如常数函数、线性函数、正弦函数与余弦函数等等)的 Fourier 变换也受到限制。

一、信号的拉普拉斯变换

1. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

若乘以衰减因子$e^{-\sigma t}$，σ为任意实数，则 $x(t).e^{-\sigma t}$收敛，满足狄里赫利条件

一、信号的拉普拉斯变换

1.从傅里叶变换到拉普拉斯变换

$$x_1(t) = x(t)e^{-\sigma t}$$

$$X_b(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$X_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

双边拉普拉斯变换：积分变换式的上下限包括了时域的正、负区间

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_b(s)e^{st}ds$$

一、信号的拉普拉斯变换

2. 拉普拉斯变换的收敛域

- $e^{-\sigma t}$ 为指数型衰减因子，它至多能使指数增长型函数满足绝对可积条件，或满足

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)|e^{-\sigma t}=0$$

- 有些函数，如 e^{t^2}、t^t 等，它们随t的增长速率比 $e^{-\sigma t}$ 的衰减速度快，这些函数乘上衰减因子后仍不满足绝对可积条件，它们的拉普拉斯变换便不存在.

- 即使是乘上衰减因子后能满足绝对可积条件，也存在一个σ的取值问题。 e^{7t} $\sigma\geq 7$

一、信号的拉普拉斯变换

2. 拉普拉斯变换的收敛域

➢乘上衰减因子后，$x(t)e^{-\sigma t}$ 能否满足绝对可积条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

取决于信号**x(t)**的性质，也取决于**σ**的取值。

能使信号的拉普拉斯变换$X_b(s)$存在的s值的范围称为信号x(t)的拉普拉斯变换的收敛域，记为ROC。

$$\lim_{t\to\infty}\left[|x(t)|e^{-\sigma t}\right]=0 \quad \text{or} \quad \lim_{t\to-\infty}\left[|x(t)|e^{-\sigma t}\right]=0$$

例1：求右边信号 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 的拉普拉斯变换及其收敛域

解： 由拉普拉斯变换定义式可知

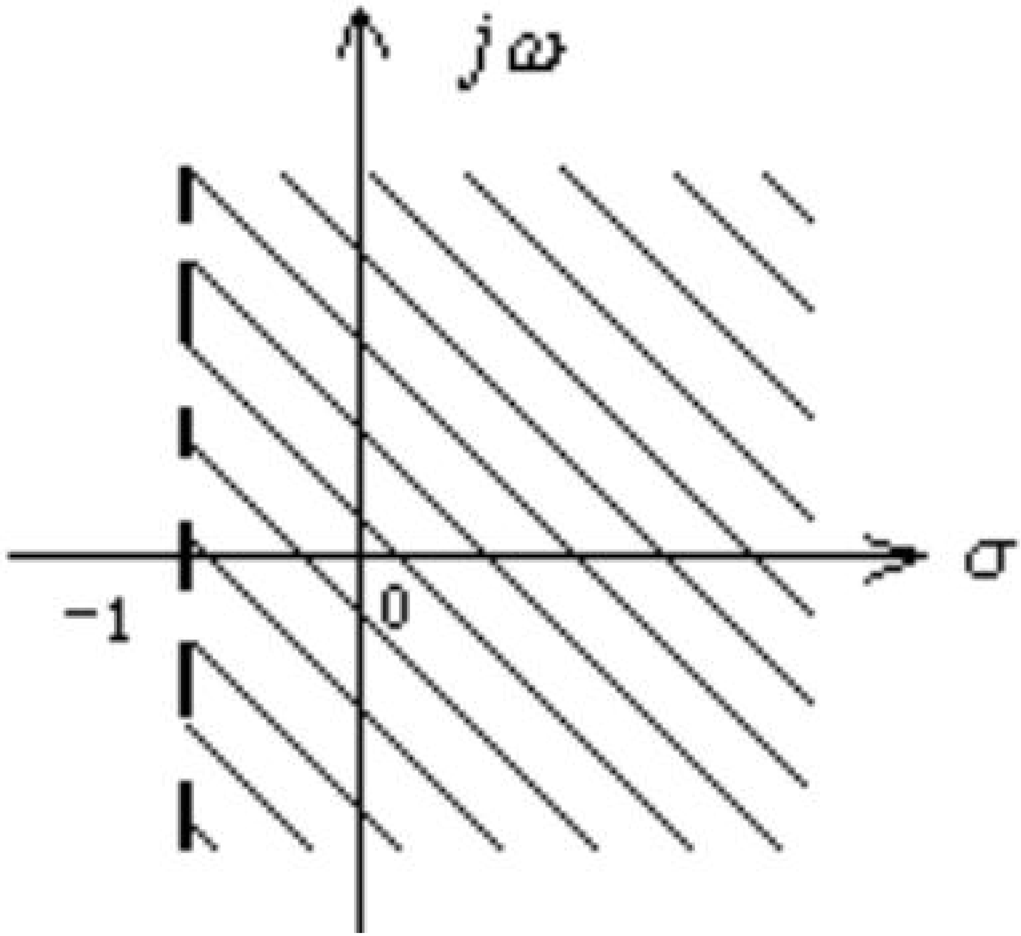
$$X_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-(s+1)t}dt \quad =-\frac{1}{s+1}e^{-(s+1)t}\Big|_0^{\infty}$$

上式积分只有在**σ>－1**时收敛，这时

$$X_b(s)=\frac{1}{s+1}$$

收敛域表示在以**σ**轴为横轴、**jω**轴为纵轴的平面上



jω
σ
−1
0

例2：求左边信号 $x(t)=-e^{-t}u(-t)$ **的拉普拉斯变换及其收敛域**

解： 由拉普拉斯变换定义式可知

$$X_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty}[-e^{-t}u(-t)]e^{-st}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}-e^{-(s+1)t}dt=\frac{1}{s+1}e^{-(s+1)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

上式积分只有在σ<－1时收敛，这时

$$X_b(s)=\frac{1}{s+1}$$

拉氏变换只有和其收敛域一起才能与信号建立意义对应的关系

收敛域表示在以σ轴为横轴、jω轴为纵轴的平面上

例3：求双边信号 $x(t)=e^{-|t|}$ 的拉普拉斯变换及其收敛域

解： 由拉普拉斯变换定义式可知

$$X_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{s-1}e^{-(s-1)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{s+1}e^{-(s+1)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

上式积分只有在**-1<σ<1**时收敛，这时

$$x(t)=e^{|t|}$$

$$X_b(s)=-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}=\frac{-2}{s^2-1}$$

收敛域表示在以**σ**轴为横轴、**jω**轴为纵轴的平面上

一、信号的拉普拉斯变换

2. 拉普拉斯变换的收敛域(P62~63)

➢ 连续信号$x(t)$的拉普拉斯变换的收敛域的边界是s平面上平行于$j\omega$轴的直线。

➢ 右边信号$x(t)u(t-t_0)$的拉普拉斯变换如果存在，则其收敛域具有$\sigma>\sigma_0$形式，即收敛域具有左边界σ_0

➢ 左边信号$x(t)u(-t+t_0)$的拉普拉斯变换如果存在，则其收敛域具有右边界σ_0 。

➢ 双边信号的拉普拉斯变换如果存在，则其收敛域必为平面上具有左边界和右边界的带状区域

➢如果时限信号的拉普拉斯变换存在，则其收敛域必为整个s平面。

一、信号的拉普拉斯变换

3. 拉普拉斯变换的性质(1)

线性	$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} k_i .L[x(t)]$
微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$
积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$
时移	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
频移	$x(t)e^{-at}$	$X(s+a)$

一、信号的拉普拉斯变换

3. 拉普拉斯变换的性质(2)

尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$
初值定理	$\lim_{t\to 0^+} x(t) = x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$	
终值定理	$\lim_{t\to\infty} x(t) = x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$	
卷积定理	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) \bullet X_2(s)$
	$x_1(t) \bullet x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$

一、信号的拉普拉斯变换

初始状态的信号的拉普拉斯变换微分性质

$$\boxed{\mathscr{L}[f'(t)] = sX(s) - f(0);}$$

一般地，有　　P92

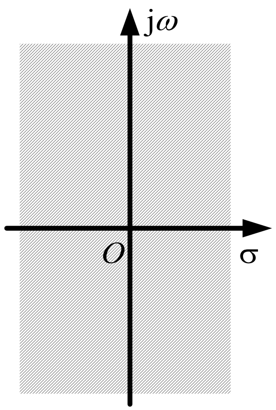
$$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n X(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).}$$

一、信号的拉普拉斯变换

4. 常用信号的拉普拉斯变换

(1) $\delta(t) \longleftrightarrow 1$， $\sigma > -\infty$

$$X(s)=\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

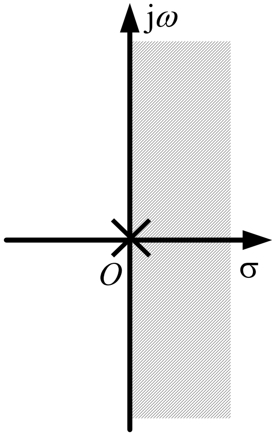


☆利用0_系统，可以计及信号在 t=0 时发生的冲激。

☆全 s 域内均存在拉氏变换。

(2) $u(t) \longleftrightarrow 1/s$ ， $\sigma > 0$

$$X(s)=\int_{0_-}^{\infty}u(t)e^{-st}dt=\int_{0_-}^{\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty}$$



当s 的实部 $\sigma>0$ 时， $\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=\infty}=0$ ，故 $X(s)=\dfrac{1}{s}$

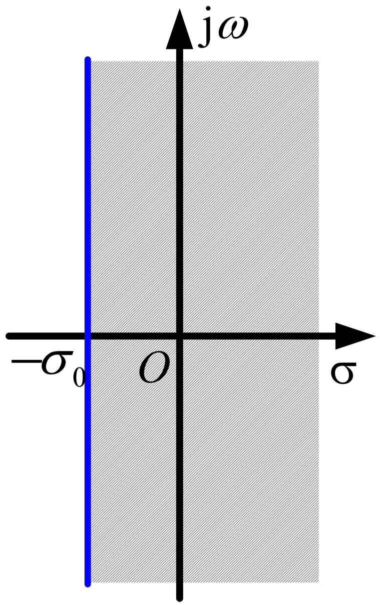
注意：阶跃信号只在 $\sigma>0$ 的区域内存在拉 氏变换， $\sigma=0$ 是区域边界。
$\sigma=0$ 是 $X(s)$ 的极点实部。

4. 常用信号的拉普拉斯变换

(3) 指数函数$e^{-s_0 t}$ u(t) ←→ $\dfrac{1}{s+s_0}$　　**σ> -Re[s₀]= -σ₀**

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} e^{-s_0 t} e^{-st} dt = \left.\frac{e^{-(s+s_0)t}}{-(s+s_0)}\right|_{0_-}^{\infty}$$

$\mathrm{Re}(s+s_0)>0$ 时，有 $e^{-s_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{s+s_0}$



注意：指数信号只在$\sigma > -\sigma_0$的区域内存在拉氏变换，$\sigma = -\sigma_0$ 是区域边界。

$\cos\omega_0 t$ u(t) = ($e^{j\omega_0 t}$+ $e^{-j\omega_0 t}$)/2 ←→ $\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$\sin\omega_0 t$ u(t) = ($e^{j\omega_0 t}$− $e^{-j\omega_0 t}$)/2j ←→ $\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

U(t)不要忽略了

一、信号的拉普拉斯变换

4. 常用信号的拉普拉斯变换

$u(t)$	$\frac{1}{S}$
$u(t)e^{-at}$	$\frac{1}{S+a}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-St_0}

一、信号的拉普拉斯变换

5.拉普拉斯反变换

- 部分分式法：将$X_b(s)$展开为部分分式，再求解$x(t)$

- 留数法

例：求 $X_b(s)=\dfrac{8(s-2)}{(s+5)(s+3)(s+1)},\sigma>-1$ 所对应的信号

解：对$X_b(s)$进行部分分式展开，得

$$X_b(s)=-\frac{3}{s+1}+\frac{10}{s+3}-\frac{7}{s+5}\qquad \sigma>-1$$

$$\boxed{X_{b1}(s)=-\frac{3}{s+1},\sigma>-1}$$

$$\boxed{X_{b2}(s)=\frac{10}{s+3},\sigma>-3}$$

$$\boxed{X_{bs}(s)=-\frac{7}{s+5},\sigma>-5}$$

$$x_1(t)=-3e^{-t}u(t)$$

$$x_2(t)=10e^{-3t}u(t)$$

$$x_3(t)=-7e^{-5t}u(t)$$

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)=(-3e^{-t}+10e^{-3t}-7e^{-5t})u(t)$$

主观题 10分

设置

已知 $X_b(s)=\dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$，分别求出当收敛域为以下三种情况时所对应的信号：

$(1)\ \sigma>-1;\quad (2)\ \sigma<-2;\quad (3)\ -2<\sigma<-1$

作答

一、信号的拉普拉斯变换

6. 单边拉普拉斯变换

- 单边拉普拉斯变换只考虑信号 $t \geq 0$ 区间，与t<0区间的信号是否存在或取什么值无关 $\boxed{x(t)u(t)}$

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$x(t) = 0, t < 0$$

积分下限取0⁻是为了处理在t=0包含冲激函数及其导数的x(t)时较方便

$\boxed{e^{-t}u(t)}$

$\boxed{e^{-t}}$ $\longleftrightarrow \dfrac{1}{s+1}, \sigma > -1$

$\boxed{e^{-|t|}}$

一、信号的拉普拉斯变换

6. 单边拉普拉斯变换

- 单边拉普拉斯变换具有 $\sigma > \sigma_0$ 的收敛域。
- 信号的单边拉普拉斯变换可看成信号x(t)u(t)的双边拉普拉斯变换，可以用下式求出x(t)u(t)

$$x(t)u(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)e^{st}dt$$

式中的X(s)为单边拉普拉斯变换，称上式为单边拉普拉斯反变换.

- 单边拉普拉斯变换除时域微分和时域积分外，绝大部分性质与双边拉普拉斯变换相同，无需双边拉普拉斯变换那样去强调收敛域

一、信号的拉普拉斯变换

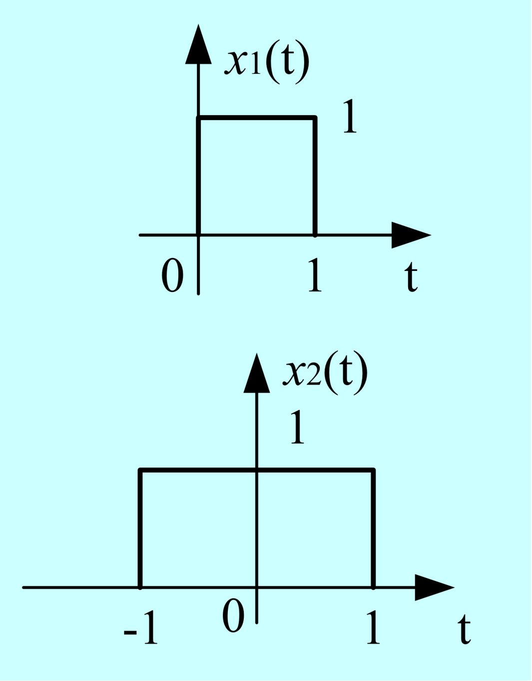
例1:求如图信号的单边拉氏变换。

解：$x_1(t) = u(t) - u(t-1)$，

$x_2(t) = u(t+1) - u(t-1)$

$X_1(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-s})$ $\quad X_2(s) = X_1(s)$

注意: $X_2(s) \neq \frac{1}{s}(e^{s} - e^{-s})$



一、信号的拉普拉斯变换

例2: 求$x(t)= e^{-2(t-1)}u(t-1) \longleftrightarrow X(s)=?$

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2} \qquad e^{-2(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}e^{-s}$$

例3: 求$x(t)= e^{-2(t-1)}u(t) \longleftrightarrow X(s)=?$

$x(t)= e^{-2t}e^{2}u(t)$ $$e^{-2(t-1)}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}e^{2}$$

一、信号的拉普拉斯变换

6. 单边拉普拉斯变换——初值定理和终值定理

➢ 初值定理：对于在t=0处不包含冲激及各阶导数的因果信号x(t)，若其单边拉普拉斯变换为X(s)，则x(t)的初值$x(0^+)$可由下式得到

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

➢ 终值定理：对于满足以上条件因果信号x(t)，若其终值x(∞)存在，则它可由下式得到

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

终值定理证明：

$$\int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0)$$

$$\lim_{s\to 0}\left[sX(s) - x(0)\right]$$

$$= \lim_{s\to 0} sX(s) - x(0)$$

$$\lim_{s\to 0} \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} \lim_{s\to 0} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} dt$$

$$= x(t)\Big|_0^\infty$$

$$= \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0)$$

$$\lim_{s\to 0} sX(s) - x(0) = \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

2.3 连续信号的复频域分析

二、信号的复频域分析

1. 拉普拉斯变换的几何表示

2. 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

3. 由零极点图对傅里叶变换进行几何求值

二、信号的复频域分析

1. 拉普拉斯变换的几何表示

➢如果信号x(t)是实指数或复指数信号的线性组合，则其拉普拉斯变换可表示

$$X_b(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

➢如果N(s)为$X_b(s)$的m次分子多项式，有m个根z_j，D(s)为n次分母多项式，有n个根p_i

$$X_b(s)=\frac{X_0\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)}$$

$X_b(s)$的极点

$X_b(s)$的零点

二、信号的复频域分析

1. 拉普拉斯变换的几何表示

- 零极点图：如果在s平面上分别以“。”和“×”标出$X_b(s)$的零点和极点的位置，就可以得到$X_b(s)$的零极点图。
- 在零极点图中，标出了$X_b(s)$的收敛域后，就构成了拉普拉斯变换的几何表示，它除去可能相差一个常数因子外，和有理拉普拉斯变换一一对应，可以完全表征一个信号的拉普拉斯变换，进而表征这个信号的基本属性。

二、信号的复频域分析

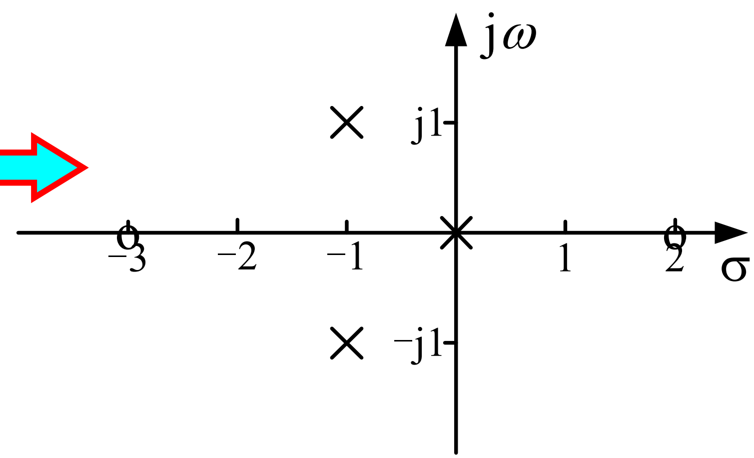
$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0s^M+b_1s^{M-1}+L\ +b_M}{a_0s^N+a_1s^{N-1}+L\ +a_N}\qquad N>M$$

$D(s)=0$的根称为**X(s)**的极点，用 $P_1,P_2,\cdots P_N$ 表示

$N(s)=0$的根称为**X(s)**的零点，用 $Z_1,Z_2,\cdots Z_N$ 表示

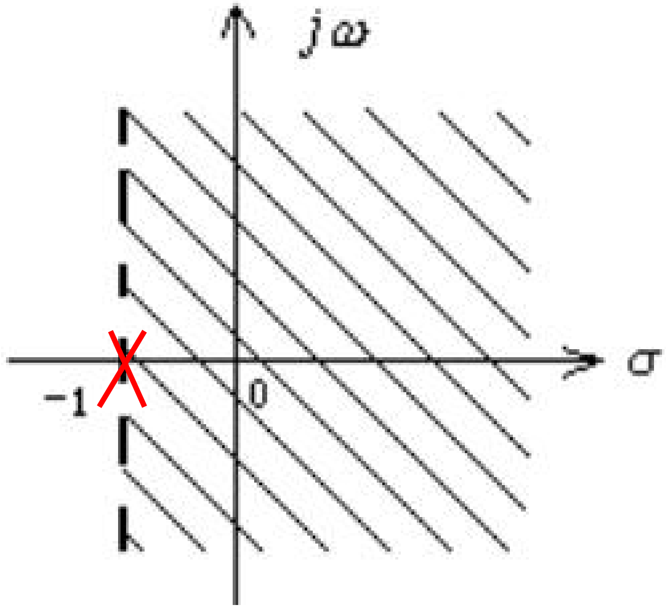
例如：

$$X(s)=\frac{(s+3)(s-2)}{s(s+1+\mathrm{j})(s+1-\mathrm{j})}$$



二、信号的复频域分析

例题回顾：求右边信号 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 的拉普拉斯变换及其收敛域



$$X_b(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\sigma>-1$$

二、信号的复频域分析

有理函数的拉普拉斯变换特点：

1、有理拉普拉斯变换的收敛域内不包含任何极点

2、有理拉普拉斯变换的收敛域被极点所界定或延伸至无穷远

二、信号的复频域分析

求信号$x(t) = u(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$的拉普拉斯变换及收敛域，并画出零极点图

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} = \frac{2(s-1)}{s(s+1)(s-2)}$$

二、信号的复频域分析

2. 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

拉氏变换和傅氏变换的根本区别在于变换的讨论区域不同：

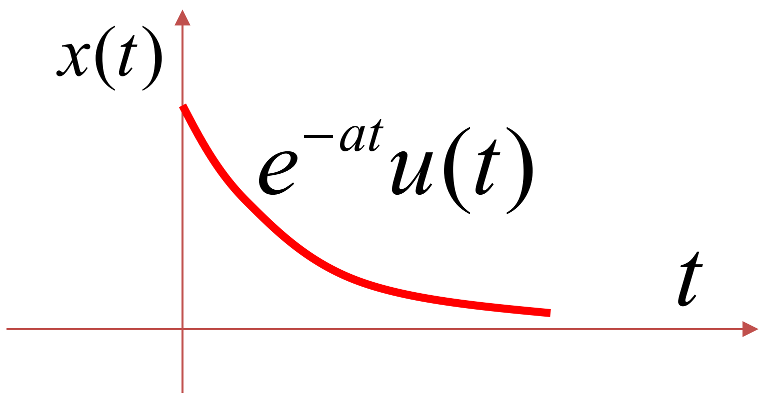
拉氏变换为S平面中的整个收敛区域

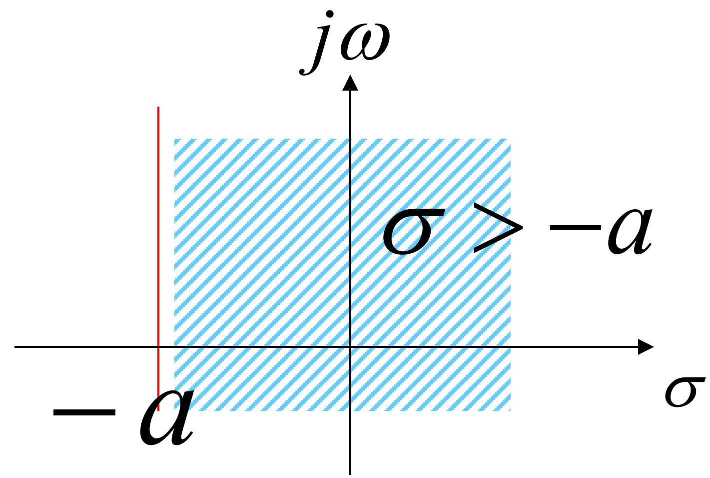
傅氏变换则仅是jw轴

因此，讨论二者关系时，根据拉氏变换收敛区域的不同特点，存在下述三种情况：

- 收敛域包含jω轴 。只要将$X_b(s)$中的s代以jω ，即为信号的傅立叶变换

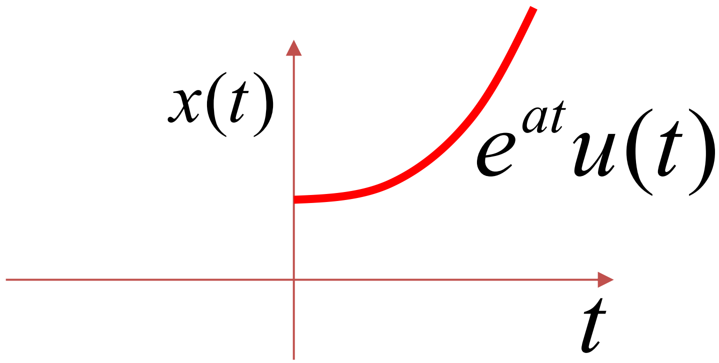
$$X(\omega)=X_b(s)\big|_{s=j\omega}$$

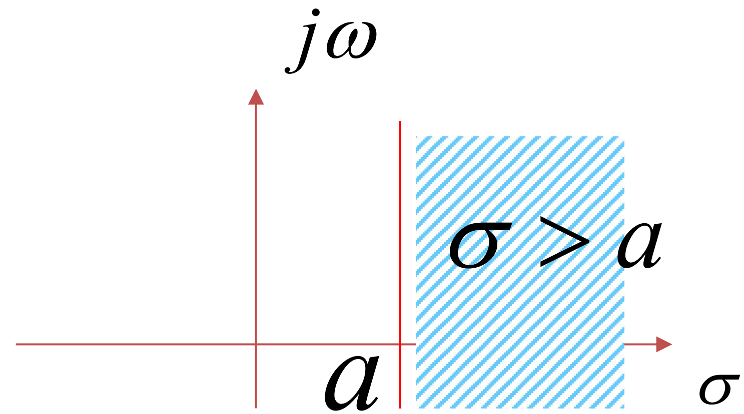




$$X(s)=\frac{1}{s+a} \xrightarrow{s=j\omega} X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+a}$$

- 收敛域不包含jω轴。信号的傅立叶变换不存在，不能用将$X_b(s)$中s代以jω求傅立叶变换。





傅氏变换不存在，拉氏变换存在

$$X(s) = \frac{1}{s-a}$$

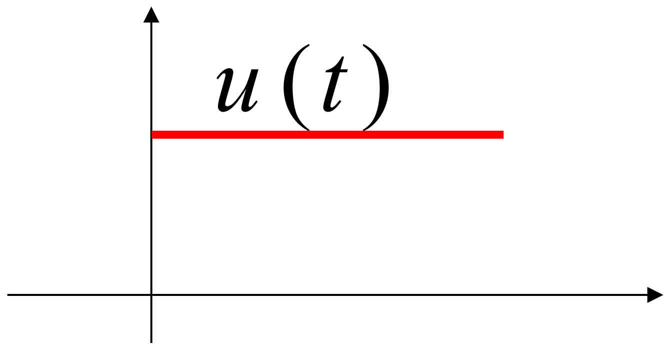
- 收敛域的收敛边界位于jω轴上。信号的拉普拉斯变换为$X_b(s)$，则其傅立叶变换为

$$X(\omega) = X_b(s)\big|_{s=j\omega} + \pi\sum_{i=1}^{p} k_i \delta(\omega - \omega_i)$$

拉普拉斯变换和傅立叶变换的根本区别在于变换的讨论区域不同，前者为s平面中的整个收敛区域，后者只是jω轴

详细推导和例子请见课本 P70

收敛域的收敛边界位于jω轴上



存在傅氏变换，但收敛于虚轴，不能简单用 $s=j\omega$ ，要包含奇异函数项。

$$X(s)=\frac{1}{s}$$

$$X(w)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$X(j\omega)=X(s)\Big|_{s=j\omega}+\pi\sum_{n}k_n\delta(\omega-\omega_n)$$

K1=1
n=1
Wn=0

二、信号的复频域分析

3.由零极点图对傅里叶变换进行几何求值

如何由信号拉普拉斯变换的零极点图求解信号的傅立叶变换？

注：对应前面的拉氏变换收敛域包含jw轴，如此存在傅氏变换

目的： 揭示信号和系统的复频域表示与其频域特性间的关系。

- 如果有理系统函数H(s)表示为

$$H(s) = M\frac{\prod_{i=1}^{R}(s-\beta_i)}{\prod_{j=1}^{P}(s-\alpha_j)}$$

β_i, α_j 分别为零点和极点

二、信号的复频域分析

3.由零极点图对傅里叶变换进行几何求值

零点向量：零点指向点$j\omega$的向量，记作

$$\vec{P}_i = P_i e^{j\theta_i} = j\omega - \alpha_i$$

极点向量：极点指向点$j\omega$的向量，记作

$$\vec{Z}_i = Z_i e^{j\psi_i} = j\omega - \beta_i$$

幅频响应*H(j ω)*：

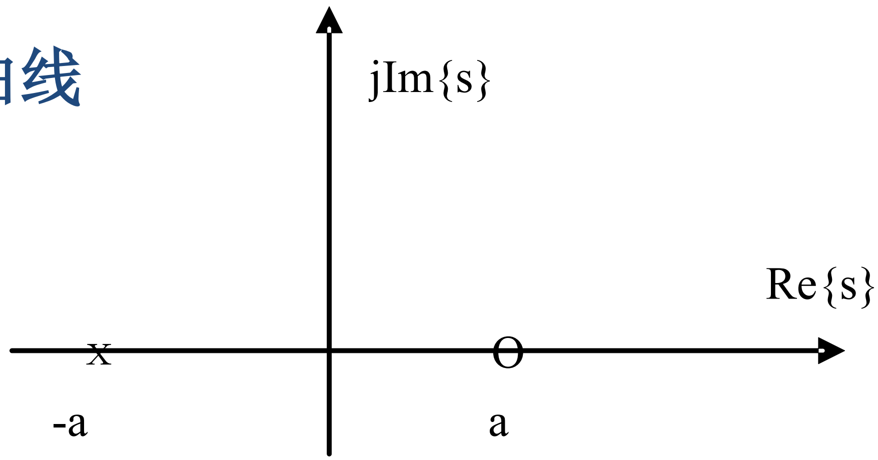
$$|H(j\omega)| = |M| \frac{\prod_{i=1}^{M} |P_i|}{\prod_{i=1}^{N} |Z_i|} \qquad \angle H(j\omega) = \sum_{i=1}^{M} \theta_i - \sum_{i=1}^{N} \psi_i$$

二、信号的复频域分析

3.由零极点图对傅里叶变换进行几何求值

例： $\mathrm{H}(s)=\dfrac{s-a}{s+a} \qquad a>0, \mathrm{Re}\{s\}>-a$

求其幅频特性与相频特性曲线



$$|H(j\omega)|=\left|\frac{j\omega-a}{j\omega+a}\right|=1$$

$$\angle \mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)=\arctan\frac{-\omega}{\mathrm{a}}-\arctan\frac{\omega}{\mathrm{a}}=-2\arctan\frac{\omega}{\mathrm{a}}$$

亦可参考课本 P71 例1-26