正考答案参考

杭州电子科技大学学生考试卷（ B ）卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2019 年 6 月 24 日	成绩	
课程号	A0714202	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8位）		专业	

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题 （本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 对于任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，下列等式正确的是（ D ）.

(A) $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$；　　(B) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2$；

(C) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；　　(D) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$

2. 函数 $u=xy+yz+zx$ 在点 $(1,1,0)$ 处梯度的模为（ C ）.

(A) 8；　(B) $\sqrt{22}$；　(C) $\sqrt{6}$；　(D) 3

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 满足 $u_n \ge v_n > 0(n=1,2,\cdots)$，则必有（ C ）.

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；　(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散；

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛；　(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

4. $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(x^4+y^4)d\sigma, I_2=\iint\limits_{|x|\le1,|y|\le1}(x^4+y^4)d\sigma, I_3=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}2x^2y^2d\sigma$，则（ B ）.

(A) $I_1\le I_2\le I_3$；(B) $I_3\le I_1\le I_2$；　(C) $I_2\le I_3\le I_1$；　(D) $I_1\le I_3\le I_2$

5. 设 Ω 由 $z=x^2+y^2, x^2+y^2=1$ 及 $z=0$ 围成的闭区域，则 $\iiint_\Omega xzdv$ 可以化为三次积分（ C ）.

(A) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho}\rho\cos\theta zdz$；　(B) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho^2}\rho\cos\theta zdz$；

(C) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho^2}\rho^2\cos\theta zdz$；　(D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho}\rho^2\cos\theta zdz$

6. 设 Σ 是平面 $x+y+z=4$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，则对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}S=$（ A ）.

(A) 0；　(B) π；　(C) $4\sqrt{3}$；　(D) $\sqrt{3}$

7. 已知 $(x+ay^2)dx+(4xy-e^y)dy$ 是某函数的全微分，则 $a=$（ B ）.

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) 4

8. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n$ 在点 $x=-3$ 处条件收敛，则该级数的收敛半径（ A ）.

(A) 等于 3；　(B) 大于 3；　(C) 小于 3；　(D) 不能确定

得分	

二、填空题 （本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9. 设两平面为 $x-2y+2z+1=0$ 与 $-x+y+5=0$，则两平面的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

10. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{4+xy}}{xy}=$ $-\frac{1}{4}$.

11. 设平面内曲线 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的周长为 a，则 $\int_L(3x^2+4y^2)ds=$ $12a$.

12. $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 是它一个周期上的表达式，设它的傅里叶级数和函数为 $s(x)$，则 $s(\frac{5\pi}{2})=$ 1.

得分	

三、简单计算题（共 5 小题，每题 6 分，共 30 分）

13．设 $z = xy^3 + \ln(2x+y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$．

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 + \frac{2}{2x+y}$， ……3'

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3xy^2 + \frac{1}{2x+y}$ ……3'

14．求曲面 $\ln\frac{x}{z} + y - z = 0$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切平面和法线方程．

解 $F(x,y,z) = \ln\frac{x}{z} + y - z = 0$， $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)\big|_{(1,1,1)}$

$\therefore \vec{n} = (1, 1, -2)$ ……2'

切平面方程：$(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0$ ……2'

法线方程：$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ ……2'

15．已知函数 $f(x,y) = 3x^3 - xy^3 + ax$ 在点 $(1,0)$ 处取得极值，求参数 a 的值．

解 $\begin{cases} f_x = 9x^2 - y^3 + a = 0 \\ f_y = -3xy^2 = 0 \end{cases}$ ……4' 将点 $(1,0)$ 代入得

$\Rightarrow a = -9$ ……2'

16．交换积分顺序并计算 $\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 \sin y^2 dy$．

解 $I = \int_0^2 dy \int_1^{y+1} \sin y^2 dx$ ……2'

$= \int_0^2 y \sin y^2 dy$

$= \frac{1}{2}\int_0^2 \sin y^2 d y^2$ ……4'

$= -\frac{1}{2}(\cos 4 - 1)$

17．将函数 $f(x) = \frac{1}{2-x}$ 展开成 x 的幂级数，并求收敛域．

解 $f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^n$ ……4'

$(或) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n$，

收敛域：$\left|\frac{1}{2}x\right| < 1$ ……2'

即 $-2 < x < 2$．

得分	

四、计算题（共 3 小题，每题 7 分，共 21 分）

18．求曲面 $z=x^2+2y^2$ 和 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积．

解 $V=\iint(6-2x^2-y^2-x^2-2y^2)\,dxdy$ ······2'

D: $x^2+y^2\le 2$

$=\iint_{x^2+y^2\le 2}(6-3(x^2+y^2))\,dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\cancel{d\rho\int}(6-3\rho^2)\rho\,d\rho$ ······3'

$=6\pi$ ------2'

19．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域及和函数．

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}=1$，$R=1$

当 $x=-1$ 时，$\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛，

当 $x=1$ 时，$\sum\frac{1}{n+1}$ 发散，

∴ 收敛域为 $[-1,1)$ ------3'

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，令 $xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

则 $(xS(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum x^n=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$

∴ $xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$，$(-1\le x<1)$ } 3'

$S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$

$S(0)=a_0=1$

∴ $S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$ } 1'

20．已知有向曲线 L 是从起点 $A(0,0)$ 沿着 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 到达终点 $B(1,1)$，求解积分 $I=\int_L(\sin x-y^2)dx-(2xy+\sin y)dy$ 时，

(1) 验证该积分是否跟路径无关，(2) 求出该积分 I 的值．

解 $P(x,y)=\sin x-y^2$，$Q(x,y)=-(2xy+\sin y)$

(1) ∵ $\frac{\partial P}{\partial y}=-2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ······3'

∴ 该积分与路径无关（在 R^2 内）

(2) 路径L如图，

取 L'：A→C→B

$I=\int_L\cdots=\int_{L'}=\int_{A\to C}+\int_{C\to B}$

$=\int_0^1\sin x\,dx+\int_0^1(-2y-\sin y)dy$ ······3'

$=1-\cos 1-1-(1-\cos 1)$

$=-1$． ------1'

得分	

五、综合题（本题 8 分）

21．求对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma}(2x+\sin y)dydz - zdxdy$，其中，有向曲面 Σ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的外侧．

解. 作辅助积分曲面

Σ_1 : $z=1$ $(x^2+y^2\le 1)$ 向上 ……2'

由高斯公式，有

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+\sin y)dydz - zdxdy$$

$$= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial(2x+\sin y)}{\partial x}+\frac{\partial(-z)}{\partial z}\right)dv \quad \cdots 4'$$

$$= \iiint_{\Omega} 1\, dv$$

$$= \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2\le z} dxdy$$

$$= \int_0^1 \pi z\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\pi$$

$$\therefore \iint_{\Sigma}(2x+\sin y)dydz - zdxdy = \frac{\pi}{2} - \left(\iint_{\Sigma_1}(2x+\sin y)dydz - zdxdy\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \iint_{\Sigma_1} -1\, dxdy$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\pi) \quad \cdots 2'$$

$$= \frac{3}{2}\pi.$$

得分	

六、证明题（本题 5 分）

22．设 $z=xf(x+y)+yg(x+y)$，其中 $f(u),g(u)$ 均有二阶连续的导函数，试证明：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$．

证明: $\because \dfrac{\partial z}{\partial x} = f + xf' + yg'$

$\therefore \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f' + f' + xf'' + yg''$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f' + xf'' + g' + yg''$

又 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xf' + g + yg'$

$\therefore \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xf'' + g' + g' + yg''$ ……3'

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + xf'' + yg'' - 2(f' + xf'' + g' + yg'') + xf'' + 2g' + yg''$$

$$= 0. \quad \cdots 2'$$

$\therefore$ 命题得证.

补考：A2（A）卷〈1〉

杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2019 年　月　日	成绩	
课程号	A0714202	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题 （本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 设两平面 $x-2y+2z+1=0$ 与 $-x+y+5=0$，则两平面的夹角为（ B ）.

（A）$\pi/6$；　（B）$\pi/4$；　（C）$\pi/3$；　（D）$\pi/2$

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\tan(xy)}{x}=$（ ~~A~~B ）.

（A）1；　（B）2；　（C）0；　（D）不存在

3. $z=x^2y-3y^2$，则 $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$（ B ）.

（A）$4dx+4dy$；　（B）$2dx-5dy$；　（C）$dx+dy$；　（D）0

4. 二次积分 $I=\int_0^4dx\int_x^{2\sqrt{x}}f(x,y)dy$ 交换次序后为（ C ）.

(A) $\int_0^4dy\int_y^{2\sqrt{y}}f(x,y)dx$；　(B) $\int_0^4dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{4}f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^4dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)dx$；　(D) $\int_0^4dy\int_0^{y}f(x,y)dx$

5. 过点 $P(1,0,2)$ 且垂直于平面 $x-2y+z=1$ 的直线方程为（ C ）.

（A）$(x-1)-2y+(z-2)=0$；　（B）$(x-1)-2y+(z-2)=1$；

（C）$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{1}$；　（D）$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{2}$

6. 设 Ω 由 $z=x^2+y^2, x^2+y^2=1$ 及 $z=0$ 围成的闭区域，则 $\iiint_\Omega xzdv$ 可以化为三次积分（ C ）.

（A）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1d\rho\int_0^{\rho}\rho\cos\theta zdz$；　(B) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1d\rho\int_0^{\rho^2}\rho\cos\theta zdz$；

（C）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1d\rho\int_0^{\rho^2}\rho^2\cos\theta zdz$；　（D）$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1d\rho\int_0^{\rho}\rho^2\cos\theta zdz$

7. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_nx^n$ 在点 $x=-2$ 处条件收敛，则该级数的收敛半径（ A ）.

（A）一定为 2；　（B）一定大于 2；（C）一定小于 2；（D）不能确定

8. 下列级数收敛的是（ C ）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$；　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}$；　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$；　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

得分	

二、填空题 （本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9. 已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=-\vec{b}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $\underline{\ -9\ }$.

10. 设方程 $x+y+z=e^z$ 确定 z 是 x、y 的函数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{\ \frac{1}{e^z-1}\ }$.

11. 有向曲线为 L：圆域 $x^2+y^2\le1$ 的正向周界，则对坐标的曲线积分 $\oint_L(x-y)dx+(x-y)dy=$ $\underline{\ 2\pi\ }$.

12. 函数 $f(x)$ 以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上有 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le0,\\ -1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛于 $\underline{\ \frac{\pi^2}{2}\ }$.

补考：A2(A)卷 ⟨2⟩

得分	

三、简单计算题（共 5 小题，每题 6 分，共 30 分）

13. 设 $z=\arctan x^y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解.
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^{2y}}\cdot y\cdot x^{y-1} = \frac{y\cdot x^{y-1}}{1+x^{2y}}.$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+x^{2y}}\cdot x^{y}\cdot \ln x = \frac{x^{y}\cdot \ln x}{1+x^{2y}}.$$

14. 设直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $x=y=z$ 相交于一点，求 λ.

解. 取参数t.

$x=t+1$, ~~代入~~ $x=y=z$ 得

$y=2t-1$

$z=\lambda t+1$ $t=2$, $\lambda=1$.

15. 求 $I=\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

解. $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 e^{\rho^2}\cdot\rho\, d\rho$$
$$=(e^4-e)\pi.$$

16. 将函数 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求收敛域.

解
$$f(x)=\frac{1}{1-(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n.$$

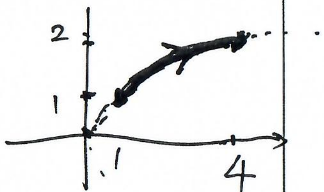
收敛域 $|x-1|<1$

即 $0<x<2$.

17. 求积分 $I=\int_L \frac{1}{y}dx+\frac{1}{x}dy$，$L$ 为 $y=\sqrt{x}$ 上从 $(1,1)$ 到 $(4,2)$ 一段曲线弧.

解

L: $\begin{cases} x=x \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$, $x:1\to 4$.



$$I=\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx+\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$$
$$=\int_1^4\left(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$$
$$=\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\Big|_1^4=\frac{5}{2}$$

补考：A_2(A)卷(3)

得分	

四、计算题（共3小题，每题7分，共21分）

18．求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值．

解：$\begin{cases} f_x = 4-2x = 0 \\ f_y = -4-2y = 0 \end{cases}$ 得驻点：$(2,-2)$

$A = f_{xx} = -2$ $\therefore \Delta = AC - B^2 = 4 > 0$

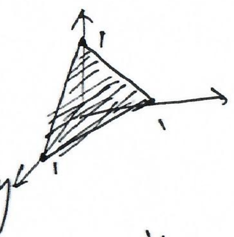
$B = f_{xy} = 0$

$C = f_{yx} = -2$ 又 $\because A = -2 < 0$．

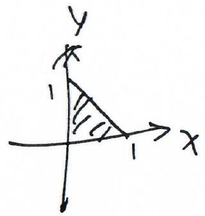
$\therefore$ ~~极~~ $f(x,y)$ 有极大值 $f(2,-2) = 8$．

19．计算 $\iint_\Sigma x\,dS$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分．

解．Σ： $z = 1-x-y$，



$$\iint_\Sigma x\,dS = \iint_{D_{xy}} x\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$



$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{3}\,x\,dxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \sqrt{3}\,x\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

20．已知有向曲线弧 L 是从起点 $A(0,0)$ 沿着 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 到达终点 $B(1,1)$，求解积分 $I=\int_L(\sin x - y^2)dx-(2xy+\sin y)dy$ 时，

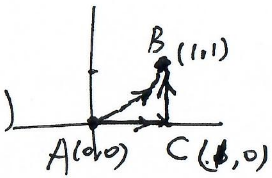
(1) 验证该积分是否跟路径无关，(2) 求出该积分 I 的值．

解．(1) $P = \sin x - y^2$， $Q = -(2xy + \sin y)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$\therefore$ 积分与路径无关．

(2)



L： $A(0,0) \xrightarrow{\text{沿}x=\sqrt{2y-y^2}} B(1,1)$

更改为 $L_1 + L_2$，沿x轴

L_1： $A(0,0) \to C(1,0)$， $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$，$t: 0\to 1$．

L_2： $C(1,0) \xrightarrow{\text{垂直}} B(1,1)$， $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$，$t: 0\to 1$．

$$\therefore I = \int_{L_1} + \int_{L_2} = \int_0^1 (\sin t - 0)dt + \int_0^1 -(\cancel{\sin t}\,2\times1\times t + \sin t)dt$$

$$= (1-\cos 1) + (\cos 1 - 1 - 1) = -1.$$

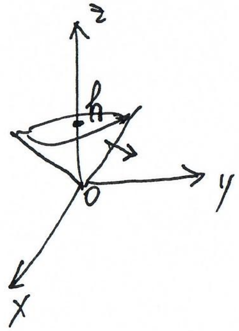
补考: A2 (A) 卷〈4〉

得分	

五、综合题（本题8分）

21. 求 $\iint_\Sigma (y-z)dydz+z^2dxdy$，其中 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}, (0\le z\le h)$ 取外侧.

解 补一面 $\Sigma_1: z=h$ 向上. $(x^2+y^2\le h^2)$



于是，由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (y-z)dydz+z^2dxdy$$

$P=y-z$, $Q=0$, $R=z^2$

$$=\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

$$=\iiint_\Omega 2z\,dv$$

柱面坐标 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{h}\rho\,d\rho\int_\rho^{h}2z\,dz=\frac{1}{2}\pi h^4$,

$\iint_{\Sigma_1} = \cancel{\frac{2\pi}{3}h^3}\iint_{D_{xy}} h^2dxdy=\pi h^4$,

$\therefore I=\frac{1}{2}\pi h^4-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4$.

得分	

六、应用计算题（本题5分）

22. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛.

证: $\cancel{u_nv_n\le\frac{(u_n+v_n)^2}{4}}$.

∵ $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 收敛,

∴ $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n=0$

对 $\varepsilon=1$, 存在 N, 当 $n>N$ 时

$u_n\le1$, $v_n\le1$

故有

$(u_n+v_n)^2=u_n^2+v_n^2+2u_nv_n$

$\le 3u_n+v_n$

由比较判别法得

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.