



信号分析与处理

第五章 滤波器

范姍慧

杭州电子科技大学 自动化学院

二教南316

本章主要内容

➤ 滤波器概述

- ✓ 滤波概念及基本原理
- ✓ 滤波器的分类
- ✓ 滤波器的技术指标

➤ 模拟滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 巴特沃思（**Butterwoth**）低通滤波器
- ✓ 切比雪夫（**Chebyshev**）低通滤波器
- ✓ **模拟滤波器频率变换**

➤ 数字滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 无限冲激响应（**IIR**）数字滤波器
- ✓ 有限冲激响应（**FIR**）数字滤波器

模拟滤波器的频率变换

- 模拟高通、带通、带阻滤波器的设计
 - ✓ 低通滤波器转换成高通滤波器 ★
 - ✓ 低通滤波器转换成带通滤波器
 - ✓ 低通滤波器转换成带阻滤波器
- **设计思想：**对低通滤波器系统函数 $H(s)$ 进行频率变换，转换成其它类型的滤波器。该设计方法只对频率进行变换，而对滤波器衰减无影响，所以当低通滤波器变化为其它特性时，其衰减幅度与波动值均保持不变，仅是对应的频率位置发生了变化。

模拟滤波器的频率变换

1、低通滤波器转换成高通滤波器

归一化低通滤波器到归一化高通滤波器的频率变换关系式为

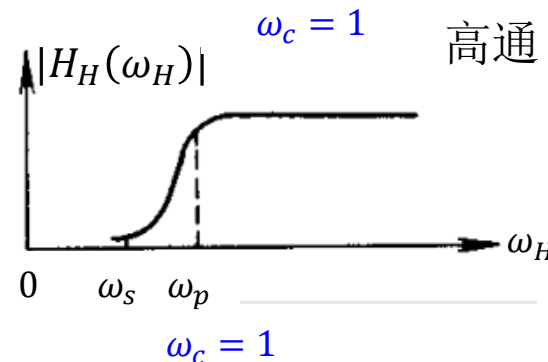
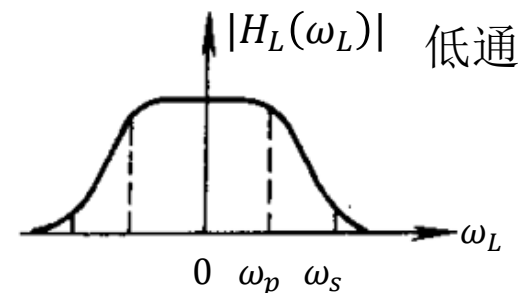
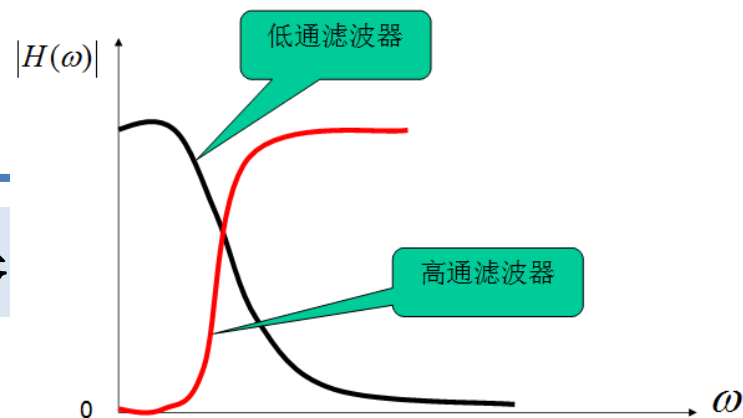
$$s_L = \frac{1}{s_H}$$

从而将 s_L 平面上的低通特性转换为 s_H 平面的高通特性

其归一化频率之间的关系为

$$\omega_L = \frac{1}{\omega_H}$$

其中 ω_L 、 ω_H 是低通和高通滤波器的频率分量



ω_L 取值 $0 \rightarrow 1$, 则 ω_H 取值 $1 \rightarrow \infty$,
即低通通带变高通通带

ω_L 取值 $1 \rightarrow \infty$, 则 ω_H 取值 $0 \rightarrow 1$
即低通阻带变高通阻带

模拟滤波器的频率变换

1、低通滤波器转换成高通滤波器

其归一化频率之间的关系为

$$s_L = \frac{1}{s_H}$$

或

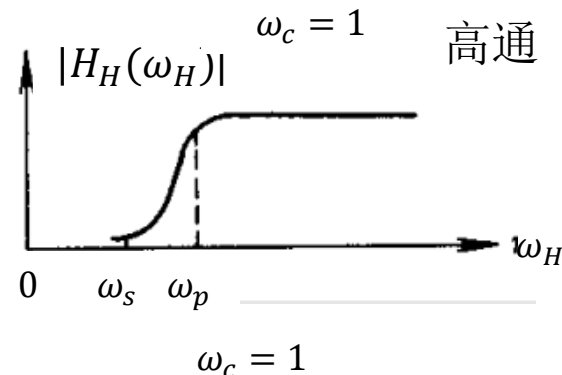
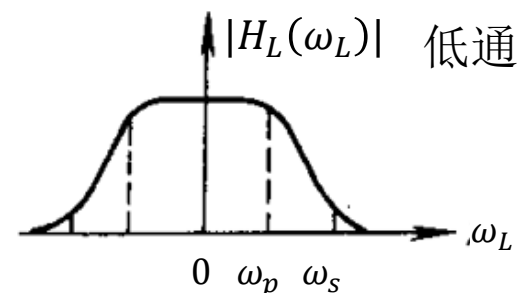
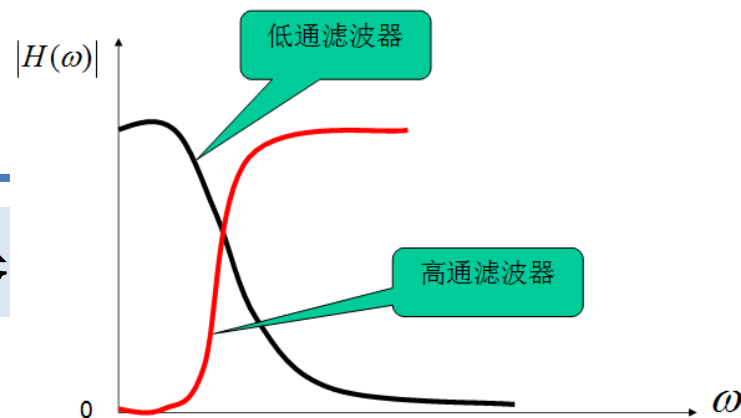
$$\omega_L = \frac{1}{\omega_H}$$

如果已知低通滤波器系统函数 $H_L(s)/H_L(\omega)$,
高通滤波器的系统函数 $H_H(s)/H_H(\omega)$, 则用
下式转换:

$$H_L(s_L) = H_H(s_H) \Big|_{s_L = \frac{1}{s_H}}$$

或

$$H_L(\omega_L) = H_H(\omega_H) \Big|_{\omega_L = \frac{1}{\omega_H}}$$



ω_L 取值 $0 \rightarrow 1$, 则 ω_H 取值 $1 \rightarrow \infty$,
即低通通带变高通通带

ω_L 取值 $1 \rightarrow \infty$, 则 ω_H 取值 $0 \rightarrow 1$
即低通阻带变高通阻带

模拟滤波器的频率变换

1、低通滤波器转换成高通滤波器



◆ 模拟高通滤波器的设计步骤:

(1)确定高通滤波器的技术指标：通带截止频率 ω_{Hp} ，阻带截止频率 ω_{Hs} ，通带最大衰减 α_p ，阻带最小衰减 α_s 。

(2)对高通滤波器技术指标进行频率归一化处理（ $\overline{\omega}_H = \frac{\omega_H}{\omega_c}$ ）

通常对巴特沃思滤波器以其衰减3dB的频率作为频率归一化因子，对切比雪夫滤波器以其等波动通带截止频率为归一化因子。

模拟滤波器的频率变换

1、低通滤波器转换成高通滤波器

◆ 模拟高通滤波器的设计步骤：

(3)确定相应归一化低通滤波器的设计指标：将归一化高通滤波器的边界频率转换成低通滤波器的边界频率

①低通滤波器通带截止频率 $\omega_{LP} = \frac{1}{\omega_{HP}}$ ；

②低通滤波器阻带截止频率 $\omega_{LS} = \frac{1}{\omega_{HS}}$ ；

③通带最大衰减仍为 α_p ，阻带最小衰减仍为 α_s

得到归一化低通滤波器系统函数 $H_L(\bar{s})$

模拟滤波器的频率变换

1、低通滤波器转换成高通滤波器

◆ 模拟高通滤波器的设计步骤:

(4)对设计出的归一化低通滤波器的系统函数 $H_L(\bar{s})$ 进行按 $\bar{s}_L = \frac{1}{s_H}$ 变换, 得到归一化高通滤波器系统函数 $H_H(\bar{s})$

(5)将设计的归一化高通滤波器进行反归一化处理 ($\bar{s} = \frac{s}{\omega_c}$), 得到实际的高通滤波器 $H_H(s)$

反归一化处理步骤

$$\text{因为 } \bar{s} = \frac{s}{\omega_c}, \text{ 得到 } H_H(s) = H_H(\bar{s})|_{\bar{s}=\frac{s}{\omega_c}}$$

模拟滤波器的频率变换

★例 设计一个巴特沃思高通滤波器，要求：

$$f_p = 4kHz \text{ 时, } \alpha_p \leq 3dB ; f_s = 2kHz \text{ 时, } \alpha_s \geq 15dB$$

解： $\omega_c = \omega_p = 2\pi f_p = 8\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$, $\omega_s = 2\pi f_s = 4\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$ (1)频率归一化

对高通滤波器进行频率归一化，以3dB衰减点 ω_c 为归一化因子，

$$\bar{\omega}_{Hp} = 1 \quad \bar{\omega}_{Hs} = 0.5$$

相应低通滤波器的归一化截止频率为

$$\bar{\omega}_{Lp} = \frac{1}{\bar{\omega}_{Hp}} = 1 \quad \bar{\omega}_{Ls} = \frac{1}{\bar{\omega}_{Hs}} = 2$$

低通滤波器的技术指标为

$$\bar{\omega}_{Lp} = 1, \alpha_p \leq 3dB; \bar{\omega}_{Ls} = 2, \alpha_s \geq 15dB$$

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg \bar{\omega}_{Ls}} = \frac{\lg \sqrt{10^{0.1 \times 15} - 1}}{\lg 2} = 2.4683$$

(2)相应LP设计

1)确定 n , ω_c

2)确定 $H(s)$

模拟滤波器的频率变换

例 设计一个巴特沃思高通滤波器，要求：

$$f_p = 4kHz \text{ 时, } \alpha_p \leq 3dB; \quad f_s = 2kHz \text{ 时, } \alpha_s \geq 15dB$$

解： 查表4-1，设计出的归一化低通滤波器为 $n=3$ 阶的巴特沃思滤波器，其系统函数为

$$H_L(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

(2)相应LP设计

由 $s_L = \frac{1}{s_H}$ ，归一化高通滤波器的系统函数为

**(3)反变换回
归一化HPF**

$$H_H(\bar{s}) = \frac{\bar{s}^3}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

进行反归一化处理，得到实际的巴特沃思高通滤波器为

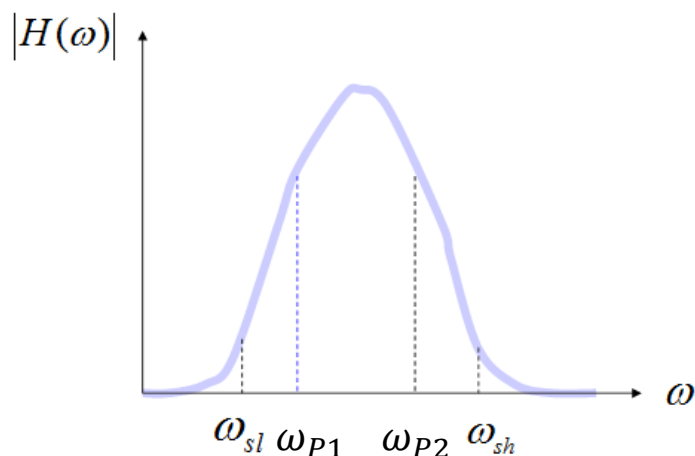
$$\bar{s} = \frac{s}{\omega_c} \quad H_H(\bar{s}) = \frac{\bar{s}^3}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

其中 $\omega_c = 8\pi \times 10^3 \text{ rad} / s$

(4)去归一化，得到HPF

模拟滤波器的频率变换

2、低通滤波器转换成带通滤波器



ω_{P1} 通带下限截止频率

ω_{P2} 通带上限截止频率

ω_{sl} 阻带下限截止频率

ω_{sh} 阻带上限截止频率

通带中心频率

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{P1}\omega_{P2}}$$

通带带宽

$$B = \omega_{P2} - \omega_{P1}$$

从归一化低通滤波器到原型带通滤波器的频率变换最常用的公式为

$$\overline{s_L} = \frac{s_B^2 + \omega_0^2}{Bs_B}$$

将 $j\omega$ 代入上式，有

$$\overline{\omega_L} = \frac{\omega_B^2 - \omega_0^2}{B\omega_B}$$

- 式中 $\overline{\omega_L}$ 、 ω_B 表示归一化低通和原型带通滤波器的频率变量
- ω_0 、 B 分别表示带通滤波器通带中心频率和通带宽度。

模拟滤波器的频率变换

2、低通滤波器转换成带通滤波器

从归一化低通滤波器到原型带通滤波器的频率变换最常用的公式为

$$\bar{\omega}_L = \frac{\omega_B^2 - \omega_0^2}{B\omega_B}$$

由上式得到 $\omega_B^2 - \bar{\omega}_L B\omega_B - \omega_0^2 = 0$ ，从而得到

$$\omega_B = \frac{\bar{\omega}_L B}{2} \pm \frac{\sqrt{\bar{\omega}_L^2 B^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

可见低通滤波器中的一个频率 $\bar{\omega}_L$ 对应着带通滤波器中的两个频率 ω_{p1} 和 ω_{p2}

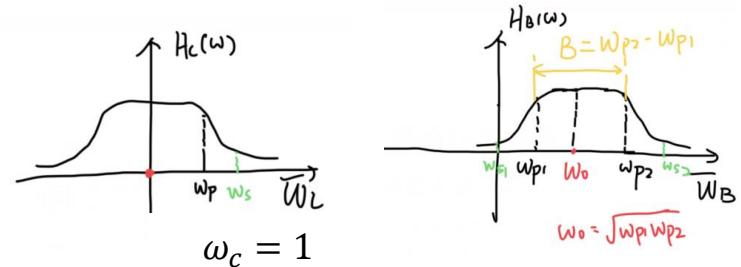
当 $\bar{\omega}_L$ 从 $0 \rightarrow 1$ 时，则 ω_B 从

通带

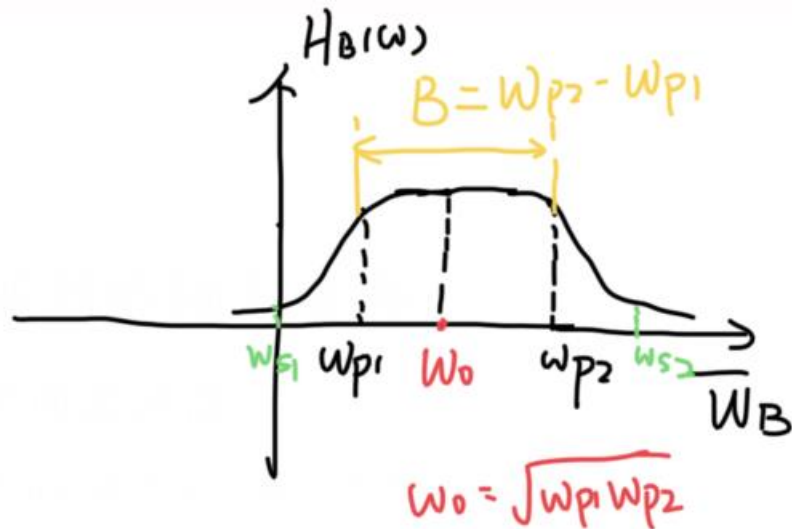
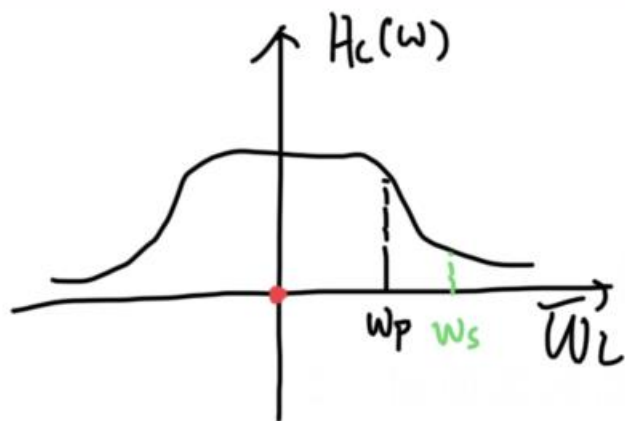
$$\omega_0 \rightarrow \begin{cases} \frac{B}{2} + \frac{\sqrt{B^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \omega_{p2} \\ \frac{B}{2} - \frac{\sqrt{B^2 + 4\omega_0^2}}{2} = -\omega_{p1} \end{cases}$$

当 $\bar{\omega}_L$ 为 $1 \rightarrow \infty$ 时，则 $\omega_B = \begin{cases} \omega_{sh} \rightarrow \infty \\ -\omega_{sl} \rightarrow 0 \end{cases}$

阻带



以上分析说明低通滤波器的原点通过频率变换变成了带通滤波器的中心频率 ω_0 ，它们之间的通带阻带有着对应的关系



$$\omega_B = \frac{\bar{\omega}_B}{2} \pm \frac{\sqrt{\omega_L^2 B^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$\bar{\omega}_L = 0$ 时, $\omega_B = \omega_0$ (\therefore LP 原点 \rightarrow BP ω_0 点)

$\bar{\omega}_L: 0 \rightarrow 1$ (通带), 1 为通带截止频率 \leftarrow BP 通带

$$\omega_B = \begin{cases} \frac{B}{2} + \frac{\sqrt{B^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \omega_{p2} \\ \frac{B}{2} - \frac{\sqrt{B^2 + 4\omega_0^2}}{2} = -\omega_{p1} \end{cases}$$

$\bar{\omega}_L: 1 \rightarrow +\infty$ (阻带) 取极限情况 $\bar{\omega}_L = \infty \leftarrow$ BP 阻带

$$\omega_{B1} \rightarrow 0, \omega_{B2} \rightarrow \infty$$

模拟滤波器的频率变换

例: 设计一个切比雪夫带通滤波器满足下列指标:

- (1) 通带中心频率 $\omega_0 = 10^6 \text{ rad} / \text{s}$
- (2) 3dB带宽 $B = 10^5 \text{ rad} / \text{s}$
- (3) 在通带 $0.95 \times 10^6 \text{ rad} / \text{s} \leq \omega \leq 1.05 \times 10^6 \text{ rad} / \text{s}$ 的
最大衰减 $\alpha_p \leq 1 \text{ dB}$
- (4) 在阻带 $\omega \geq 1.25 \times 10^6 \text{ rad} / \text{s}$ 的最小衰减 $\alpha_s \geq 40 \text{ dB}$

模拟滤波器的频率变换

解：已知 $\omega_0 = 10^6$, $B = \omega_{p2} - \omega_{p1} = 1.05 \times 10^6 - 0.95 \times 10^6 = 10^5$

(1) 将给定的指标转换为归一化低通滤波器指标。

① 求归一化LBP通带边界频率：

$$\frac{\omega_L}{\omega_B} = \frac{\omega_B^2 - \omega_0^2}{B\omega_B} = \frac{(1.05 \times 10^6)^2 - (10^6)^2}{10^5 \times 1.05 \times 10^6} = 0.976 \approx 1 = \omega_p = \omega_c$$

此处 ω_B 取通带上限频率 ω_{p2} ，原因是带通滤波器从中心频率 ω_0 到通带上边界截止频率 ω_{p2} 变换到低通归一化频率 $0 \rightarrow 1$ ，因此带通滤波器的通带上边界截止频率 ω_{p2} 应转换到LBP的通带截止频率 ω_p

② 求归一化低通阻带边界频率

$$\omega_s = \frac{\omega_B^2 - \omega_0^2}{B\omega_B} = \frac{(1.25 \times 10^6)^2 - (10^6)^2}{10^5 \times 1.25 \times 10^6} = 4.5$$

此处 ω_B 即是上阻带上限频率 $\omega_{sh} = 1.25 \times 10^6 \text{ rad} / \text{s}$

③ 切比雪夫低通滤波器的参数为 $\alpha_p = \alpha_{max}$ ，求得波动系数

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.5088$$

模拟滤波器的频率变换

④ 求滤波器阶数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

修订

$$n = \frac{\cosh^{-1} \left[\sqrt{(10^{0.1\alpha_s} - 1) / (10^{0.1\alpha_p} - 1)} \right]}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_c} \right)} = \frac{6}{2.2} = 2.72$$

取 $n=3$ 。查表得，归一化三阶切比雪夫低通滤波器的传递函数为

$$H(\bar{s}) = \frac{0.494}{\bar{s}^3 + 0.9889\bar{s}^2 + 1.2384\bar{s} + 0.4913}$$

(2) 将带通变换式 $\bar{s}_L = \frac{s_B^2 + \omega_0^2}{Bs_B}$ ($\omega_0 = 10^6, B = 10^5$) 代入上式，求得六阶

切比雪夫带通滤波器系统函数为

$$H_B(\bar{s}) = H\left(\frac{s^2 + 10^{12}}{10^5 s}\right)$$
$$= \frac{4.94 \times 10^{14} s^3}{s^6 + 9.889 \times 10^{14} s^5 + 3.012 \times 10^{12} s^4 + 1.982 \times 10^{17} s^3 + 3.012 \times 10^{24} s^2 + 9.889 \times 10^{28} s + 10^{36}}$$

模拟滤波器的频率变换

3、低通滤波器转换成带阻滤波器

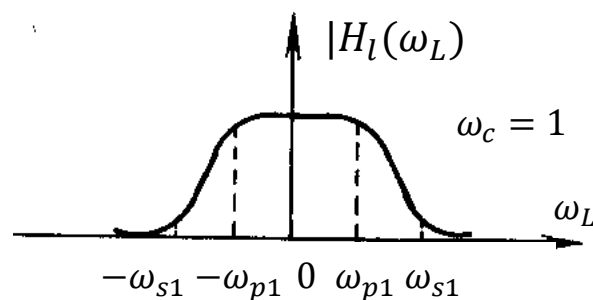
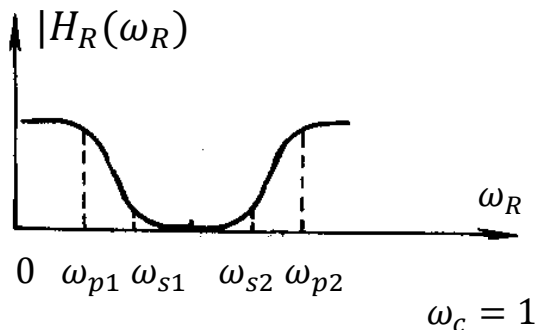
➤ 归一化低通滤波器变换到原型带阻滤波器的变换关系式为低通滤波器变换到带通滤波器的变换关系式颠倒一下

$$\overline{S}_L = \frac{Bs_R}{s_R^2 + \omega_0^2}$$

或

$$\overline{\omega}_L = \frac{B\omega_R}{-\omega_R^2 + \omega_0^2}$$

- \overline{S}_L 和 s_R 分别表示归一化低通和带阻滤波器系统函数的复频率变量；
- ω_0 和 B 分别是带阻的阻带中心频率和阻带宽度



本章主要内容

➤ 滤波器概述

- ✓ 滤波概念及基本原理
- ✓ 滤波器的分类
- ✓ 滤波器的技术指标

➤ 模拟滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 巴特沃思（**Butterworth**）低通滤波器
- ✓ 切比雪夫（**Chebyshev**）低通滤波器
- ✓ 模拟滤波器频率变换

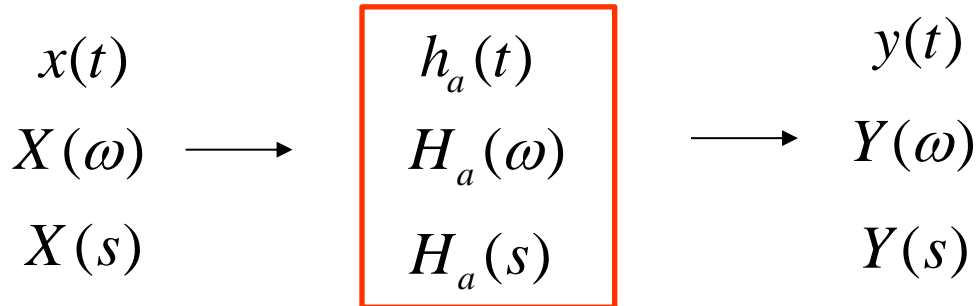
➤ 数字滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 无限冲激响应（**IIR**）数字滤波器
- ✓ 有限冲激响应（**FIR**）数字滤波器

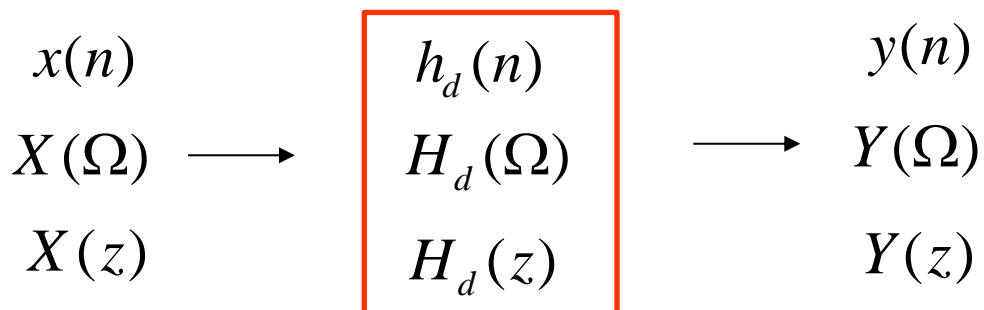
相关概念

1、数字滤波器的概念

模拟滤波器（Analog Filter）： 输入输出均为模拟信号



数字滤波器（Digital Filter）： 输入和输出均为数字信号，是具有一定传输特性的数字信号处理装置，借助于数字器件和一定的数值计算方法，对输入信号的波形或频谱进行加工和处理



相关概念

2、数字滤波器的优点

- **精度高：**模拟器件（如R、L、C等）的精度一般很难做高，而数字滤波器的精度则由字长决定。如果要增加精度，只需增加字长即可。
- **可靠性高：**模拟滤波器中各种参数都有一定的温度系数，会随着环境条件的变化而变化，容易出现感应、杂散效应甚至振荡等。数字滤波器一般不受外界环境（如温度、湿度等）的影响，没有模拟电路的元器件老化问题。
- **灵活性高：**通过编程可以随时修改滤波器特性的设计，灵活性较高。
- **便于大规模集成：**设计数字滤波器具有一定的规范性，便于大规模集成、生产。
- **可工作于极低频率，也可比较容易地实现模拟滤波器难以实现的线性相位系统。**

相关概念

3、数字滤波器的种类

- 按照其**频率响应的通带特性**，可分为低通、高通、带通和带阻数字滤波器；
- 若根据其**冲激响应 $h(n)$ 的时间特性**，可分为无限冲激响应(Infinite Impulse Response, IIR)数字滤波器和有限冲激响应(Finite Impulse Response, FIR)数字滤波器；
- 若根据**数字滤波器的构成方式**，可分为递归型数字滤波器、非递归型数字滤波器以及用快速傅立叶变换实现的数字滤波器。

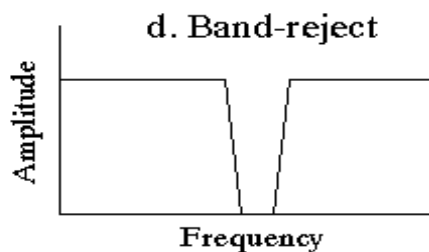
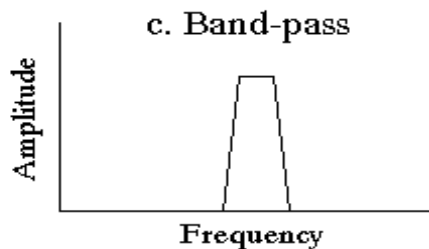
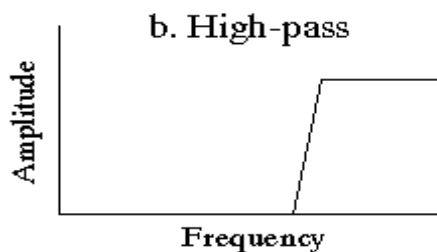
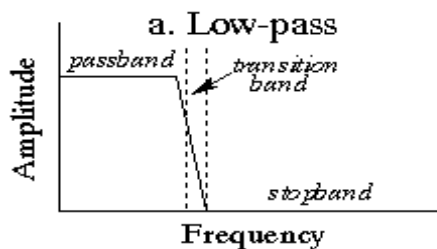
相关概念

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

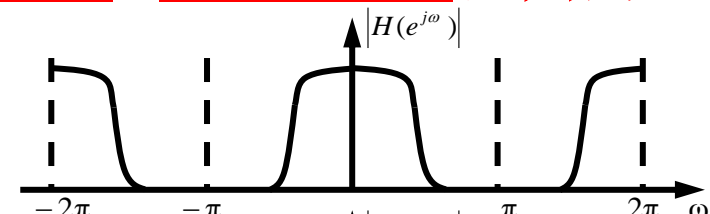
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

4、模拟滤波器与数字滤波器频谱特性

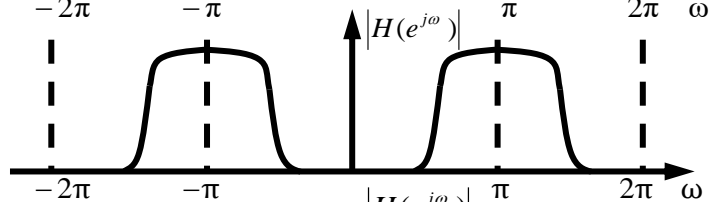
- 四种基本滤波器为：低通（LP）、高通（HP）、带通（BP）和带阻滤波器（BR）
- 频谱范围：模拟频谱 ω （ $0 \sim \infty$ ）与数字频谱 Ω （ $0 \sim 2\pi$ ）范围的差异 $\because e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n}$



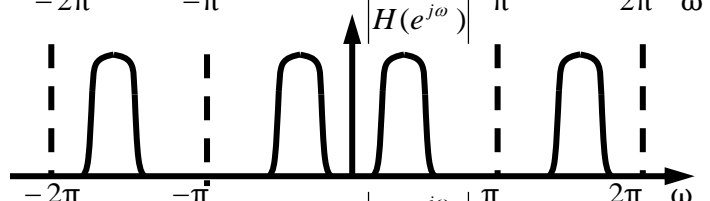
低通



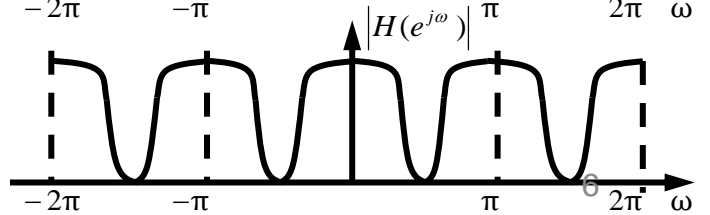
高通



带通



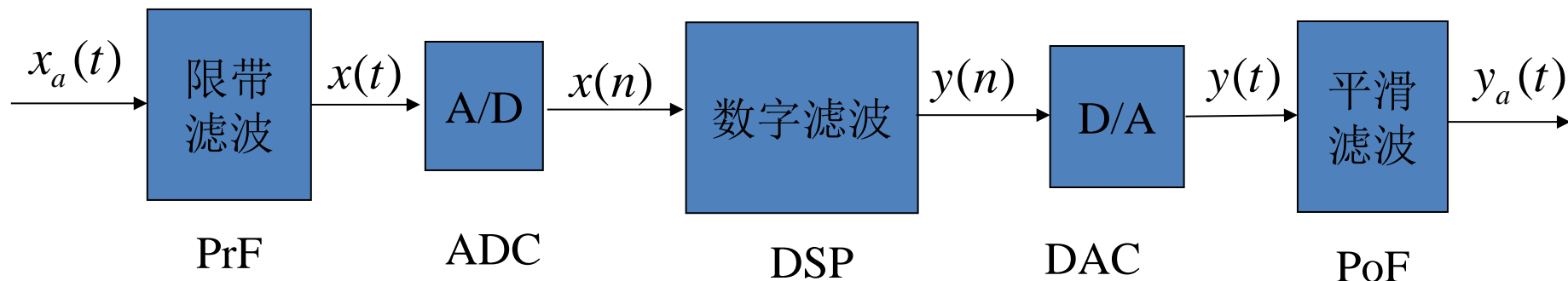
带阻



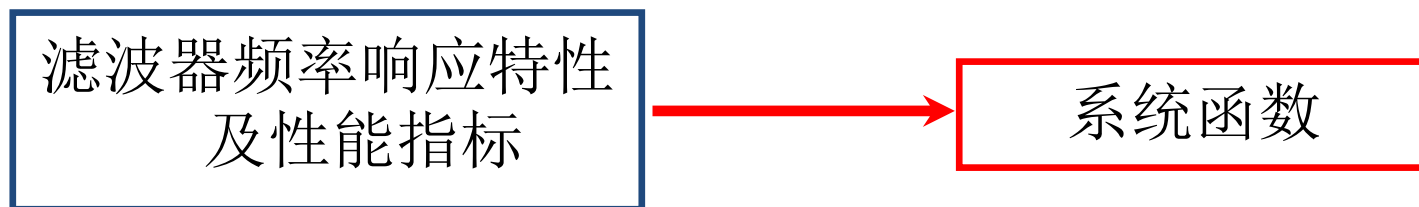
相关概念

5、数字滤波器的实现

实现过程：



实现思想：



s 平面 \longrightarrow z 平面

模拟滤波器 $H_a(s)$ \longrightarrow 数字滤波器 $H(z)$

相关概念

6、数字滤波器的原理

- 设输入序列为 $x(n)$ ，输出序列为 $y(n)$ ，则数字滤波器可用LTI离散系统表示为

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

■ 滤波器的传递函数 $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

决定系统的零点

决定系统的极点

相关概念

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

7、数字滤波器的构成

➤ 若 $a_i=0$ ，则有 $H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$

$$h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \cdots + b_M \delta(n-M)$$

系统函数是 z^{-1} 的 $M+1$ 次多项式，单位脉冲响应的时间长度有限的，称为**有限冲激响应FIR（Finite Impulse Response）滤波器**

➤ **FIR滤波器的系统函数只有单极点 $z=0$ ，在单位圆内，故FIR数字滤波器总是稳定的**

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

7、数字滤波器的构成

- 若至少有一个 a_i 的值不为零，并且分母至少存在一个根不为分子所抵消，例如

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - z^{-1}} = b_0(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) \quad |z| > 1$$

$$h(n) = b_0[\delta(n) + \delta(n-1) + \cdots] = b_0 u(n)$$

说明该数字滤波器的单位脉冲响应有无限多项，时间长度持续到无限长，称为**无限冲激响应IIR（Infinite Impulse Response）滤波器**。

本章主要内容

➤ 滤波器概述

- ✓ 滤波概念及基本原理
- ✓ 滤波器的分类
- ✓ 滤波器的技术指标

➤ 模拟滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 巴特沃思（**Butterwoth**）低通滤波器
- ✓ 切比雪夫（**Chebyshev**）低通滤波器
- ✓ 模拟滤波器频率变换

➤ 数字滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 无限冲激响应（**IIR**）数字滤波器
- ✓ 有限冲激响应（**FIR**）数字滤波器

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

1、一般要求

- **设计任务：** 用具有无限多项的单位冲激响应所对应的有理函数 $H(z)$ 逼近给定的滤波器幅频特性 $|H(\Omega)|$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - z^{-1}} = b_0(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) \quad |z| > 1$$
$$h(n) = b_0 [\delta(n) + \delta(n-1) + \cdots] = b_0 u(n)$$

- **设计方法：**

- ✓ **直接法：** 是一种计算机辅助设计方法。
- ✓ **间接设计法：** 是借助模拟滤波器的传递函数 $H(s)$ 求出相应的数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。先确定一个满足该指标的模拟滤波器 $H(s)$ ，再寻找一种变换关系把 s 平面映射到 z 平面，使 $H(s)$ 变换成所需的数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

1、一般要求

➤ 设计方法：

- ✓ 间接设计法：是借助模拟滤波器的传递函数 $H(s)$ 求出相应的数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。
- 为了使数字滤波器保持模拟滤波器的特性，由复变量 s 到复变量 z 之间的映射关系必须满足：
 - s 平面的 $j\omega$ 轴必须映射到 z 平面的单位圆上；
 - 为了保证滤波器的稳定性，必须要求 s 左半平面映射到 z 平面的单位圆内部。
- 最常用的是冲激响应不变法和双线性变换法

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

✓冲激响应不变法

– 双线性变换法

– IIR数字滤波器的网络结构

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

1、一般要求

■ 设计思想：

- 1、根据数字滤波器的性能指标确定模拟滤波器的性能指标
- 2、设计模拟滤波器 $H_a(s)$
- 3、 $H_a(s) \Rightarrow$ 数字滤波器的 $H(z)$
- 4、通过算法实现 $H(z)$

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

2、冲激响应不变法遵循的准则：

数字滤波器的单位冲激响应 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ ，令 $h(n)$ 等于所参照的模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 的采样值，即

$$h(n) = h_a(nT) \quad T\text{—采样周期}$$

➤ 冲激响应不变法的设计思路：

- 根据数字滤波器技术指标确定模拟滤波器技术指标
- 根据模拟滤波器技术指标确定 $H(s)$
- 对 $H(s)$ 取拉普拉斯反变换求冲激响应 $h(t)$
- 由冲激响应不变的原则，对 $h(t)$ 采样得到 $h(n)$
- 求 $h(n)$ 的z变换，求出数字滤波器 $H(z)$

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h_a(nT) \rightarrow h(n) \rightarrow H(z)$$

拉氏逆变换 单位冲激响应不变的原则进行采样 z变换

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

设模拟滤波器的系统传递函数 $H(s)$ 具有 N 个单极点

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s - p_i}$$

对 $H(s)$ 取逆变换

$$h(t) = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i t} u(t)$$

对 $h(t)$ 进行采样， $t=nT$ （ T 为采样周期）

$$h(n) = h(t)|_{t=nT} = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i nT} u(n)$$

对 $h(n)$ 取 z 变换

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^N K_i e^{p_i nT} \right) z^{-n} = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$$

$$K_i = (s - p_i) H(s) \Big|_{s=p_i}$$

$$e^{p_i t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - p_i}$$

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$$

冲激响应不变法的原理即
把 $H(s)$ 部分分式展开式中的

$$\frac{1}{s - p_i} \text{ 代之以 } \frac{1}{1 - e^{p_i T} z^{-1}} \text{ 即可}$$

直接得出数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。



数字滤波器的传递函数

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

3、 $H(z)$ 和 $H(s)$ 的关系 (参阅课本P173)

- 取 $h(t)$ 的理想冲激采样信号 $h_s(t) = h(t)s(t)$ 的拉氏变换并借助s域时移定理:

$$\begin{aligned}
 L[h_s(t)] &= L\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t)\delta(t-nT)\right] = L\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT)\right] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [h(nT) \cdot L[\delta(t-nT)]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)e^{-nsT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{sT}} = H(z) \Big|_{z=e^{sT}} \\
 \Rightarrow L[h_s(t)] \Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} &= Z[h(n)]
 \end{aligned}$$

序列的Z变换可以看作是产生该序列的理想冲激采样信号的拉氏变换进行 $z = e^{sT}$ 映射的结果，该映射是从复变量s平面映射到复变量z平面

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jn\Omega}$$

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

从 s 平面到 z 平面的映射

$$z = e^{sT}$$

$$\Omega: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$\Omega = \omega T$$

(T 为采样周期)

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j\Omega} = |z| e^{j\Omega}$$

(1) $\sigma = 0$ $s = j\omega$ 虚轴

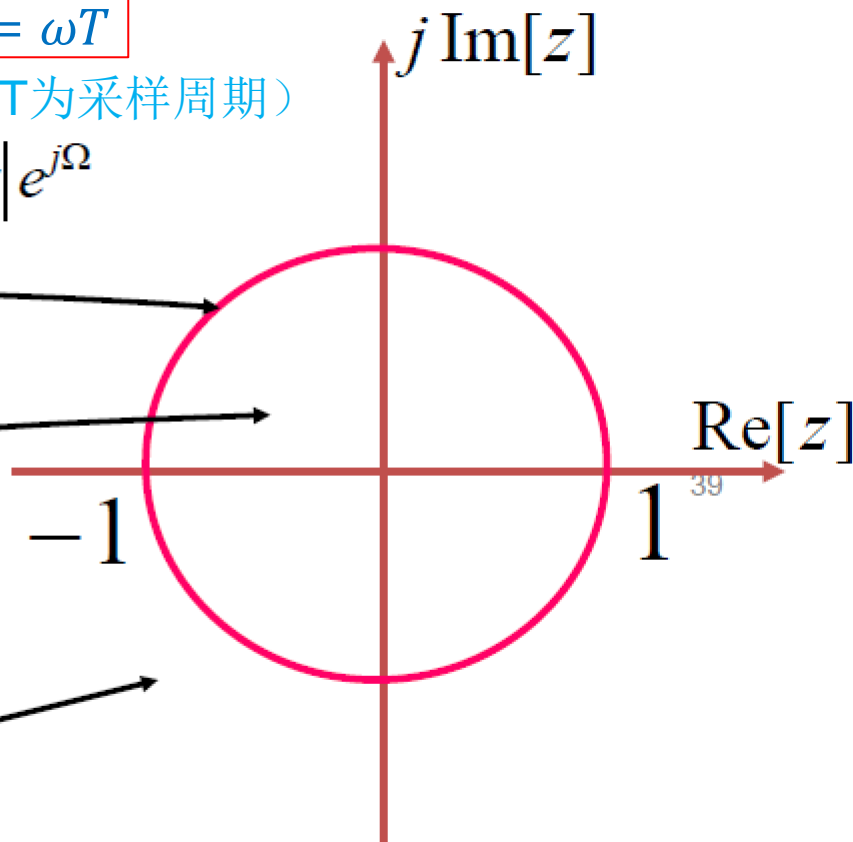
$$|z| = e^{\sigma T} = 1$$

(2) $\sigma < 0$ $s = \sigma + j\omega$ 左半平面

$$|z| < 1$$

(3) $\sigma > 0$ $s = \sigma + j\omega$ 右半平面

$$|z| > 1$$



$$z = e^{sT}$$

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

3、 $H(z)$ 和 $H(s)$ 的关系(参阅课本P173)

- ◆ 1) 表明 s 左半平面映射到 z 平面单位圆内部, s 右半平面映射到 z 平面的单位圆外部, s 平面的虚轴 $s=j\omega$ 对应 z 平面的单位圆
- ◆ 2) 但此种映射**不是单值的**, 所有 s 平面上满足下述条件的点

$$s = \sigma + j(\omega + k\omega_s) \left(\text{其中, } \omega_s = \frac{2\pi}{T}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right)$$

都映射到 z 平面上 $z = e^{(\sigma+j\omega)T}$ 的一个点, 因为

$$e^{sT} = e^{(\sigma+j(\omega+k\omega_s))T} = e^{\sigma T + j\omega T + j2\pi k} = e^{(\sigma+j\omega)T}$$

所以, 当 σ 不变, ω 以 $\frac{2\pi}{T}$ 的整数倍改变时, 映射值不变, **也就是将 s 平面沿着 $j\omega$ 轴分割成一条条宽度为 $\frac{2\pi}{T}$ 的水平带, 每条水平带都按照前面分析的关系重叠映射成整个 z 平面。**

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

3、 $H(z)$ 和 $H(s)$ 的关系(参阅课本P173)

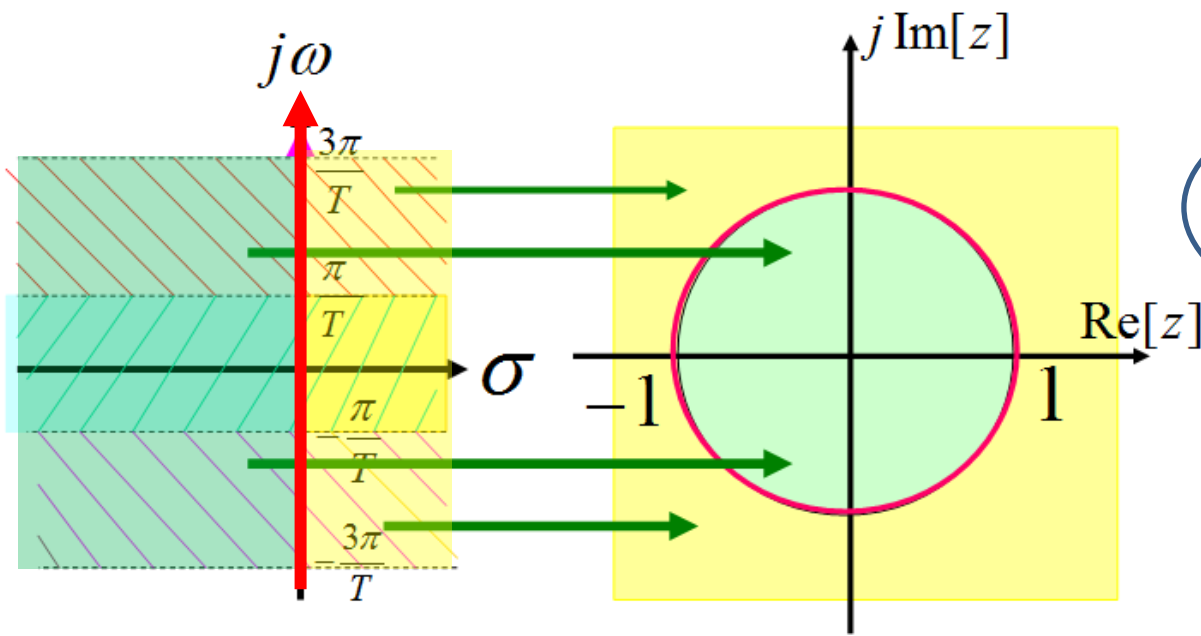
- 3) 因此, s 平面沿着 $j\omega$ 轴分割成一条条宽度为 $2\pi/T$ 的水平带, 然后再映射到 z 平面上, 如下图所示

可以发现 (1) $\sigma = 0, s = j\omega, |z| = e^{\sigma T} = 1$

(2) $\sigma < 0, s = \sigma + j\omega, |z| < 1$

(3) $\sigma > 0, s = \sigma + j\omega, |z| > 1$

(4) 当 σ 不变, ω 以 $\frac{2\pi}{T}$ 的
整数倍改变, 映射到 z 平
面的点不变



s 平面到 z 平面的
映射具有多对一
的特性

缺点: 频谱混叠

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

6、IIR数字滤波器的特点

■ 优点：

- 具有较好的时域逼近特性，有重要的实际意义。 $h(n)$ 是通过采样去模仿模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$
- AF和DF的频率变换保持线性关系： $\omega=\Omega/T$
线性相位模拟滤波器转变为线性相位数字滤波器

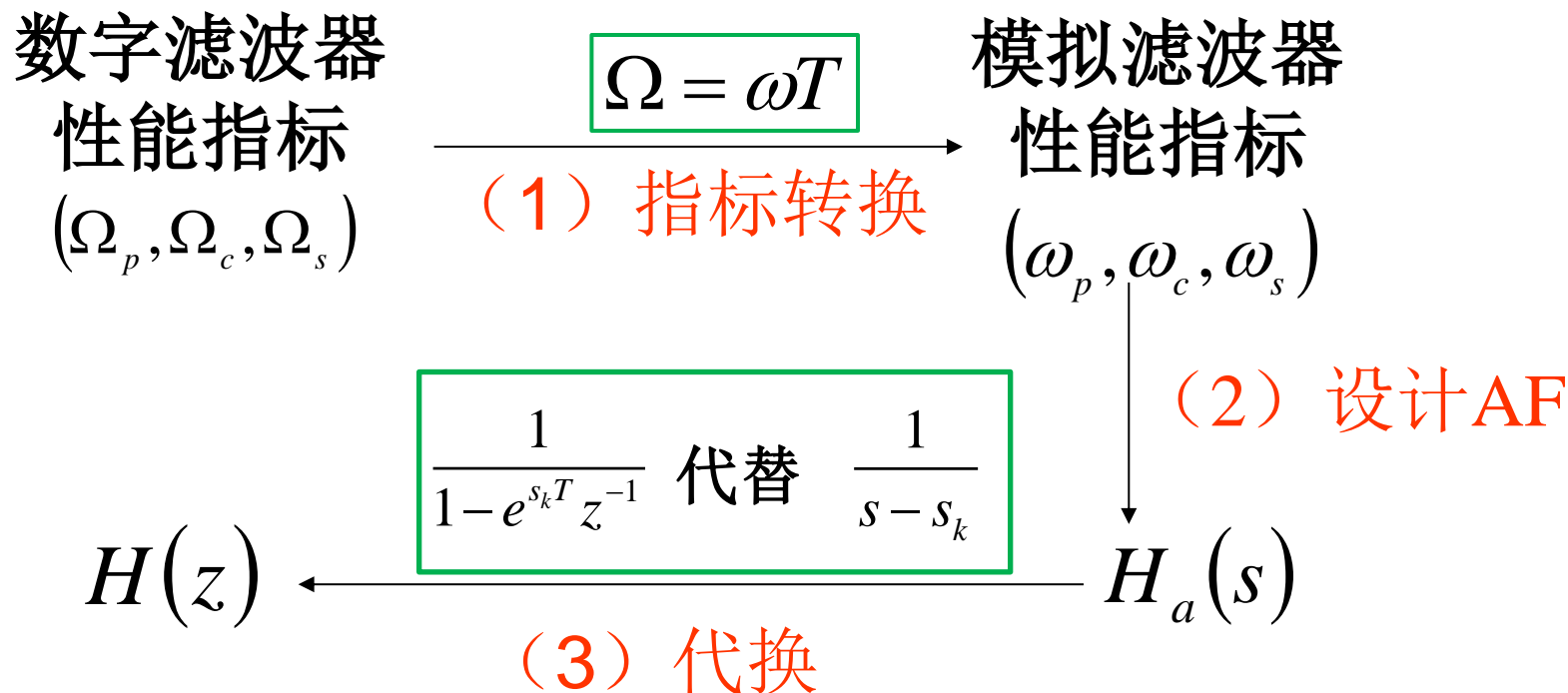
■ 缺点：

- 频率响应混叠（采样导致的多值性引起，参阅课本P132）
- 只适用于限带的低通、带通滤波器，不适于设计高通和带阻滤波器

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h_a(nT) \rightarrow h(n) \rightarrow H(z)$$

设计步骤示意图 ★



IIR数字滤波器 (冲激响应不变法)

例 设模拟滤波器的传递函数为 $H(s) = \frac{2s}{s^2 + 3s + 2}$

用冲激响应不变法求相应的数字滤波器的传递函数 $H(z)$

解 对模拟滤波器的传递函数进行因式分解

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2s}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = \frac{2s}{s+2} \Big|_{s=-1} = -2 \quad K_2 = \frac{2s}{s+1} \Big|_{s=-2} = 4 \quad H(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

利用 $\frac{1}{1-e^{s_k T} z^{-1}}$ 代替 $\frac{1}{s-s_k}$ ，即可得到数字滤波器传递函数

$$H(z) = \frac{-2}{1-e^{-T} z^{-1}} + \frac{4}{1-e^{-2T} z^{-1}} = \frac{2 + (2e^{-2T} - 4e^{-T})z^{-1}}{1 - (e^{-T} + e^{-2T})z^{-1} + e^{-3T} z^{-2}}$$

给定的 $H(s)$ 变换到数字滤波器时 $H(z)$ 与采样周期 T 有关。因此， T 不同对数字滤波器的特性有不同的影响

IIR数字滤波器 (冲激响应不变法)

例 4-9 给定通带内具有 3dB 起伏 ($\varepsilon = 0.9976$) 的二阶切比雪夫低通模拟滤波器的系统函数为

$$H(s) = \frac{0.5012}{s^2 + 0.6449s + 0.7079}$$

用冲激响应不变法求对应的数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。

解 将 $H(s)$ 展开成部分分式形式

$$H(s) = \frac{0.3224j}{s + 0.3224 + 0.7772j} + \frac{-0.3224j}{s + 0.3224 - 0.7772j}$$

由式(4-69)和式(4-73)可得

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.3224j}{1 - e^{-(0.3224 + 0.7772j)T} z^{-1}} + \frac{-0.3224j}{1 - e^{-(0.3224 - 0.7772j)T} z^{-1}} \\ &= \frac{2e^{-0.3224T} \cdot 0.3224 \sin(0.7772T) \cdot z^{-1}}{1 - 2e^{-0.3224T} \cos(0.7772T) z^{-1} + e^{-0.6449T} z^{-2}} \end{aligned}$$

IIR数字滤波器 (冲激响应不变法)

例 4-9 给定通带内具有 3dB 起伏 ($\varepsilon = 0.9976$) 的二阶切比雪夫低通模拟滤波器的系统函数为

$$H(s) = \frac{0.5012}{s^2 + 0.6449s + 0.7079}$$

用冲激响应不变法求对应的数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。

$$H(z) = \frac{2e^{-0.3224T} \cdot 0.3224 \sin(0.7772T) \cdot z^{-1}}{1 - 2e^{-0.3224T} \cos(0.7772T) z^{-1} + e^{-0.6449T} z^{-2}}$$

由给定的 $H(s)$ 变换到数字滤波器时与采样周期 T 有关, 因此, T 取值不同时, 对数字滤波器的特性会产生不同的影响。

当 $T = 1\text{s}$ 时, 有

$$H(z) = \frac{0.3276z^{-1}}{1 - 1.0328z^{-1} + 0.5247z^{-2}}$$

当 $T = 0.1\text{s}$ 时, 有

$$H(z) = \frac{0.0485z^{-1}}{1 - 1.9307z^{-1} + 0.9375z^{-2}}$$

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

- 利用冲激响应不变法设计数字滤波器时，需要将模拟滤波器的系统函数通过部分分式分解展开成多项有理分式之和的形式，并将 $\frac{1}{s - p_i}$ 代之以 $\frac{1}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$
- 为了减少从拉普拉斯变换到z变换的复杂计算，可以直接利用以下变换的对应关系：

$$\begin{aligned}\frac{1}{s + p_i} &\rightarrow \frac{1}{1 - e^{-p_i T} z^{-1}}; \quad \star \\ \frac{1}{(s + p_i)^m} &\rightarrow \frac{(-1)^{m-1} d^{m-1}}{(m-1)! dp_i^{m-1}} \frac{1}{1 - e^{-p_i T} z^{-1}}; \\ \frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2} &\rightarrow \frac{1 - e^{-aT} \cos(bT) z^{-1}}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}; \\ \frac{b}{(s + a)^2 + b^2} &\rightarrow \frac{e^{-aT} \sin(bT) z^{-1}}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}\end{aligned}$$

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

例 利用冲激响应不变法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，满足下列技术指标：

- (1) 3dB带宽的数字截止频率 $\Omega_c = 0.2\pi rad$
- (2) 阻带大于30dB的数字边界频率 $\Omega_s = 0.5\pi rad$
- (3) 采样周期 $T = 10\pi\mu s$

解： ① 将给定的指标转换为相应的模拟低通滤波器的技术指标

按照 $\begin{matrix} \Omega = \omega T \\ \omega = \frac{\Omega}{T} \end{matrix}$ ，可得

$$\omega_c = 0.2\pi / (10\pi \times 10^{-6}) = 20 \times 10^3 \text{ rad} / s$$

$$\omega_s = 0.5\pi / (10\pi \times 10^{-6}) = 50 \times 10^3 \text{ rad} / s$$

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

② 设计归一化模拟低通滤波器。

根据巴特沃思模拟低通滤波器的设计方法，求出该滤波器的阶数

$$n = \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg \left(\frac{\omega_s}{\omega_c} \right)} = \lg 31.61 / \lg(50/20) = 3.769$$

取 $n=4$ ，查表得4阶归一化巴特沃思模拟低通滤波器的传递函数

$$\begin{aligned} H(\bar{s}) &= \frac{1}{(\bar{s} - s_1)(\bar{s} - s_2)(\bar{s} - s_3)(\bar{s} - s_4)} = \frac{1}{\bar{s}^4 + 2.613\bar{s}^3 + 3.414\bar{s}^2 + 2.613\bar{s} + 2} \\ &= -\frac{0.92388\bar{s} + 0.70711}{\bar{s}^2 + 0.76537\bar{s} + 1} + \frac{0.92388\bar{s} + 1.70711}{\bar{s}^2 + 1.84776\bar{s} + 1} \end{aligned}$$

IIR数字滤波器（冲激响应不变法）

③ 利用频率变换求出满足给定指标的实际模拟低通滤波器

对巴特沃思模拟低通滤波器进行反归一化处理，有

$$H(s) = H(\bar{s}\omega_c) = -\frac{\omega_c^2(0.92388s + 0.70711)}{s^2 + 0.76537\omega_c s + \omega_c^2} + \frac{\omega_c^2(0.92388s + 1.70711)}{s^2 + 1.84776\omega_c s + \omega_c^2}$$

$$\text{其中 } \omega_c = 20 \times 10^3$$

④ 按照冲激响应不变法求满足给定技术指标的数字滤波器。

将 $\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \rightarrow \frac{1-e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}}{1-2e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$ ； 带入 $H(s)$ ，

得到数字滤波器的传递函数

$$H(z) = \frac{10^4(-1.84776 + 0.88482z^{-1})}{1 - 1.31495z^{-1} + 0.61823z^{-2}} + \frac{10^4(1.84776 - 0.40981z^{-1})}{1 - 1.08704z^{-1} + 0.31317z^{-2}}$$

1202复习要点

➤ 重点掌握利用低通滤波器设计得到高通滤波器

✓ 深入理解并牢记低通滤波器到高通滤波器的频率变换关系式

✓ 熟悉掌握高通滤波器的设计步骤

(归一化高通、得到相应的归一化低通，
反变换得到归一化高通，反归一化)

$$s_L = \frac{1}{s_H}$$

$$\omega_L = \frac{1}{\omega_H}$$

✓ 了解带通、带阻滤波器与归一化低通滤波器变换关系式，了解相关设计步骤

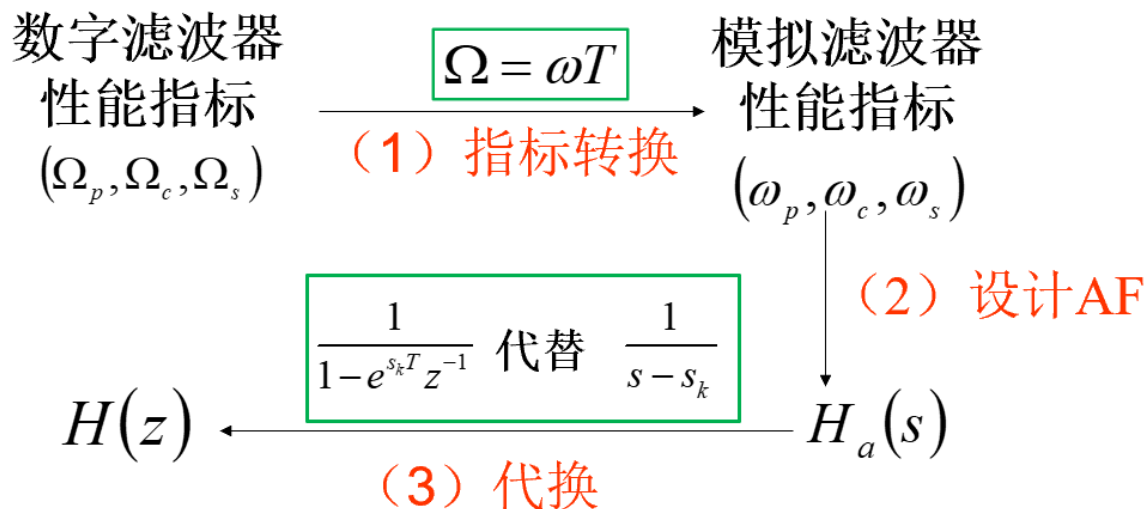
➤ 理解数字滤波器的概念、优点和分类

✓ 了解有限冲激响应滤波器（IIR滤波器）和无限冲激响应滤波器（FIR滤波器）的概念，深入理解两者单位冲激响应和系统传递函数及其特点

1202复习要点

➤ 重点掌握IIR数字滤波器的原理和设计方法

✓ 冲激响应不变法（优点：频率变换具有线性性；缺点：频谱重叠）



注意: 如果是用查表法, 得到的是模拟滤波器的归一化系统函数, 需要先做反归一化, 才能得到系统的实际传递函数 $H_a(s)$

1202课后作业

第四章习题 P319

7、10、11（只做用冲激响应不变法求 $H(z)$ ）、

13（滤波器结构图先不画）

例1 设计巴特沃思高通滤波器， $f_p=200\text{Hz}$ ， $f_s=100\text{Hz}$ ，幅度特性单调下降， f_p 处最大衰减 α_p 为3dB，阻带最小衰减 $\alpha_s=15\text{dB}$ 。

例2 设计巴特沃思高通滤波器，满足通带截止频率为400Hz，阻带截止频率为100Hz，幅度特性单调下降，通带衰减 α_p 小于3dB，阻带衰减 α_s 大于30dB。