第五章 滤波器

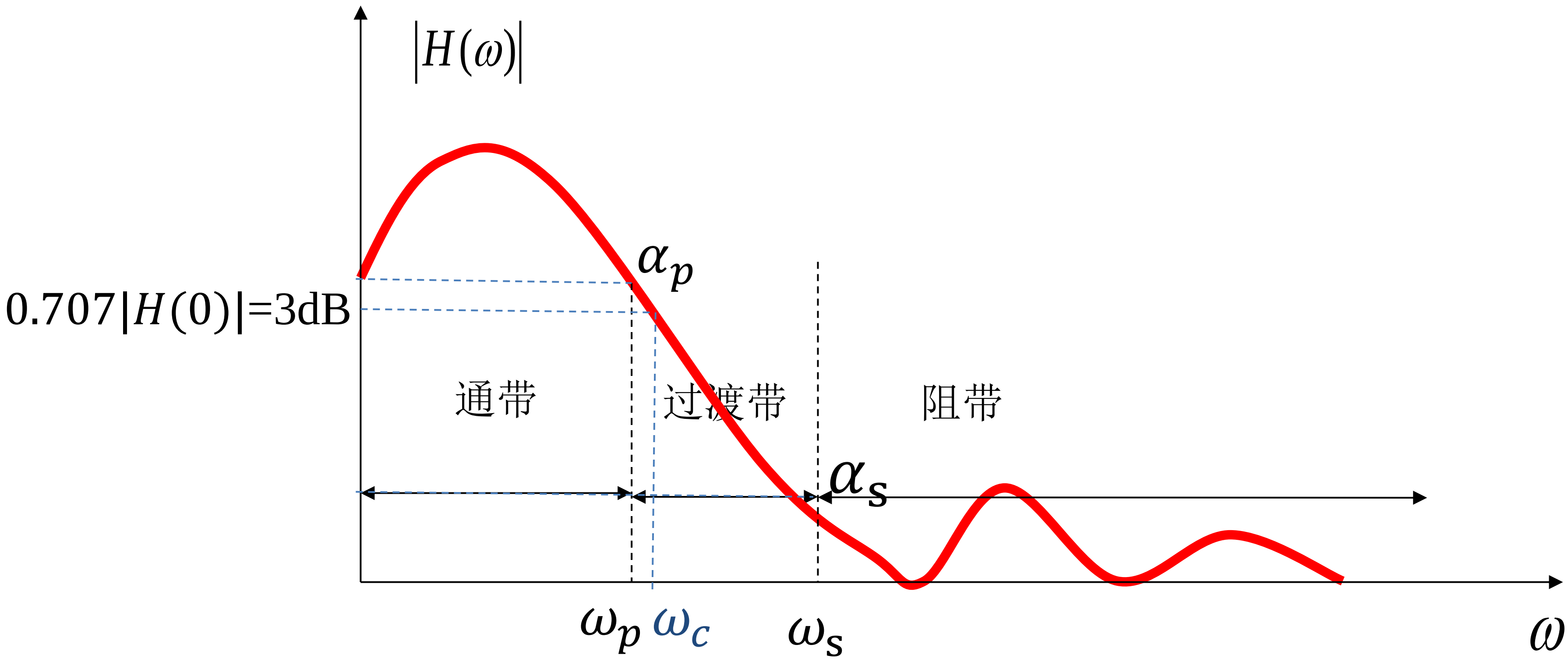
范姗慧

杭州电子科技大学 自动化学院

二教南316

滤波器的技术指标

$$\alpha = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20\lg|H(\omega)| = -10\lg|H(\omega)|^2$$



滤波器容差图

本章主要内容

- 滤波器概述
  - 滤波概念及基本原理
  - 滤波器的分类
  - 滤波器的技术指标
- 模拟滤波器设计
  - 概述
  - 巴特沃思（**Butterwoth**）低通滤波器
  - 切比雪夫（**Chebyshev**）低通滤波器
  - 模拟滤波器频率变换
- 数字滤波器设计
  - 概述
  - 无限冲激响应（**IIR**）数字滤波器
  - 有限冲激响应（**FIR**）数字滤波器

相关概念及方法

1、滤波器设计的基本要求

- ➢模拟滤波器是用模拟系统处理模拟信号或连续时间信号
- ➢ 设计模拟滤波器的中心问题
  - ✓求出一个物理上可实现的系统的传递函数$H(s)$
  - ✓使它的频率响应$H(\omega)$尽可能逼近理想滤波器的频率特性
- ➢ 在工程实际中，设计模拟滤波器的方法
  - ✓滤波器的频率选择性取决于幅频特性$|H(\omega)|$
  - ✓给定的技术指标，如通带衰减α_p、阻带衰减α_s，⇨ $|H(\omega)|^2$

∵系统的衰减函数α与 $|H(\omega)|^2$有关：$\alpha = 20\lg\dfrac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20\lg|H(\omega)| = -10\lg|H(\omega)|^2$

  - ✓利用滤波器的幅频特性的二次方函数$|H(\omega)|^2$，求解$H(s)$

相关概念及方法

1、滤波器设计的基本要求

- 设计模拟滤波器的方法
  - ✓ 给定的工作损耗α_p、α_s，系统的衰减函数与 $|H(\omega)|^2$有关
  - ✓ 滤波器的频率选择性取决于幅频特性的二次方函数$|H(\omega)|^2$
  - ✓ 利用滤波器的幅频特性$|H(\omega)|^2$求解H(s) ★
  - ✓ 若滤波器不含有源器件，它应该是稳定的时不变系统，H(s)需满足：
    - 是关于s的有理分式函数
    - 分子阶数$n \le$分母阶数m

$$H(s)=\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}=\frac{\prod_i (s+z_i)}{\prod_k (s+p_k)}$$

    - 极点分布在s的左半平面（因果稳定系统）
    - $h(t)$是关于t的实函数，$H(\omega)$有共轭对称性，即$H(-\omega) = H^*(\omega)$

相关概念及方法

2、$|H(\omega)|^2 \rightarrow H(s)$

- 由频率特性幅度平方函数$|H(\omega)|^2$求系统传递函数H(s)的方法：

$$h(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} H(\omega) \qquad h(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} H(s)$$

$$h(t)\text{为实函数} \xrightarrow[\text{共轭对称性}]{H(\omega)\text{具有}} H^*(\omega) = H(-\omega)$$

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega)$$

$h(t)$的傅里叶变换存在，说明$H(s)$的收敛域包含$j\omega$轴

$$|H(\omega)|^2 = H(s)H(-s)\big|_{s=j\omega}$$

零极点分布

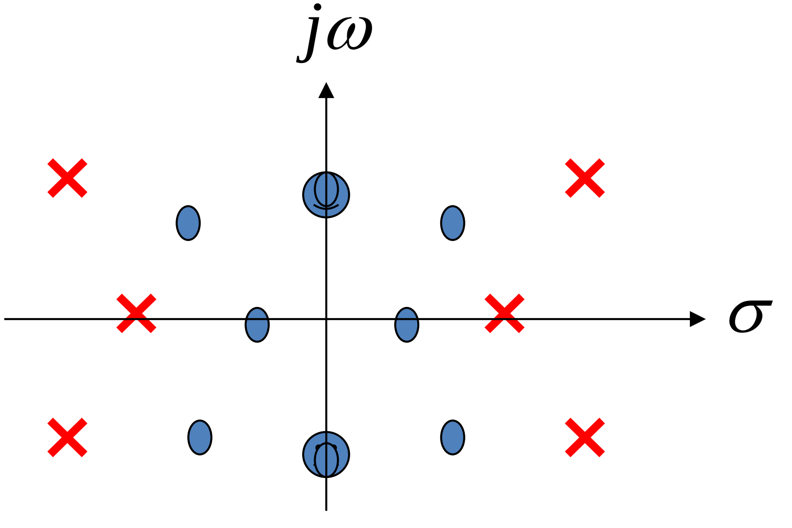
$H(s)\ H(-s)$的零极点分布对$j\omega$轴呈镜像分布

相关概念及方法

2、$|H(\omega)|^2 \rightarrow H(s)$

$$\boxed{\left|H(\omega)\right|^2 = H(s)H(-s)\Big|_{s=j\omega}}$$

- **H(s) H(-s)**的零极点分布对$j\omega$轴呈镜像分布，如下图。
- 这些零、极点中，有一半属于**H(s)**，另一半则属于**H(-s)**



如何区分?

$$|H(\omega)|^2 = H(s)H(-s)\big|_{s=j\omega}$$

相关概念及方法

2、$|H(\omega)|^2 \rightarrow H(s)$

- ➢ 根据$H(s)$的可实现条件和$H(s)H(-s)$的零、极点分布
- ✓ 系统的幅度平方函数$|\mathbf{H}(\omega)|^2$一定是ω^2的正实函数，可以**将给定的幅度平方函数以$-s^2$代替ω^2**，从而确定$H(s)$与$H(-s)$的零、极点
- ✓ ***H*(s)的极点必须位于s的左半平面**，$H(-s)$的极点必须位于s的右半平面（**保证系统能够稳定**）
- ✓ **零点选取取决于所设计滤波器是否为最小相位系统**
  - 若是最小相位系统，则$H(s)$的所有零点也应分布在s左半平面或$j\omega$轴上
  - 若非最小相位系统，则零点位置与稳定性无关，可任意选取
  - 若有零点在$j\omega$轴上，则按正实性要求，在$j\omega$轴上的零点必须是偶阶重零点，此时，要把该轴上的零点平分给$H(s)$与$H(-s)$

相关概念及方法

例 给定滤波特性的幅度平方函数

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(1-\omega^2)^2}{(4+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

求具有最小相位特性的滤波器系统函数

解: 用$-s^2$代替ω^2，有

$$H(s)H(-s) = \frac{(1+s^2)^2}{(4-s^2)(9-s^2)} = \frac{(1+s^2)^2}{(s+2)(-s+2)(s+3)(-s+3)}$$

H(s) H(-s)的极点为： s=±2，s=±3

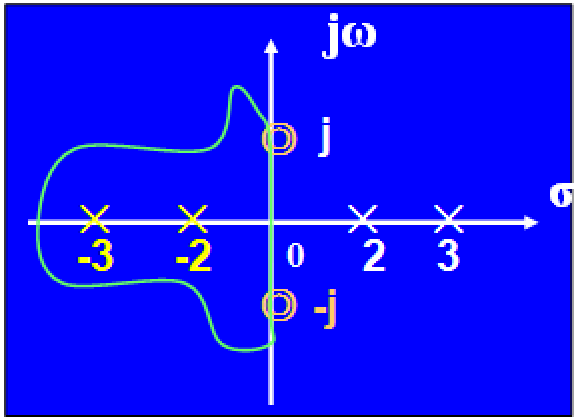
H(s) H(-s)的零点为： s=±j，s=±j 偶阶重零点，平分

相关概念及方法

例 给定滤波特性的幅度平方函数

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(1-\omega^2)^2}{(4+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

求具有最小相位特性的滤波器系统函数



解：**H(s) H(-s)的极点为：** s=±2，s=±3

H(s)H(-s)的零点为： s=±j，s=±j

上式有二阶重零点，位于虚轴，H(s)作为可实现滤波器的传递函数，取左半平面的极点及jω轴上一对共轭零点，得到

$$H(s) = \frac{1+s^2}{(s+2)(s+3)} = \frac{1+s^2}{s^2+5s+6}$$

本章主要内容

- 滤波器概述
  - ✓ 滤波概念及基本原理
  - ✓ 滤波器的分类
  - ✓ 滤波器的技术指标
- 模拟滤波器设计
  - ✓ 概述
  - ✓ 巴特沃思（**Butterwoth**）低通滤波器
  - ✓ 切比雪夫（**Chebyshev**）低通滤波器
  - ✓ 模拟滤波器频率变换
- 数字滤波器设计
  - ✓ 概述
  - ✓ 无限冲激响应（**IIR**）数字滤波器
  - ✓ 有限冲激响应（**FIR**）数字滤波器

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

- 设计滤波器的一般工程方法：
  - ✓ 利用逼近理论寻找可实现的逼近函数
  - ✓ 逼近函数作为滤波器的幅度平方函数 $|H(\omega)|^2$

- 巴特沃思低通滤波器是以巴特沃思函数作为滤波器的系统函数，该函数以<u>最高阶泰勒级数的形式来逼近理想低通滤波器的矩形幅频特性</u>。

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

1、巴特沃思低通滤波器的幅度二次方函数（幅频特性）

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

★

$$\begin{aligned}\alpha &= -20\lg|H(\omega_p)| \\ &= -20\lg|H(\omega_c)| \\ &= -20\lg\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

- n为滤波器的阶数；
- ω_c为滤波器的截止频率，当$\omega = \omega_c$时，$|H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{2}$

所以，ω_c对应的是滤波器的-3dB点。

$$\alpha = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20\lg|H(\omega)|$$

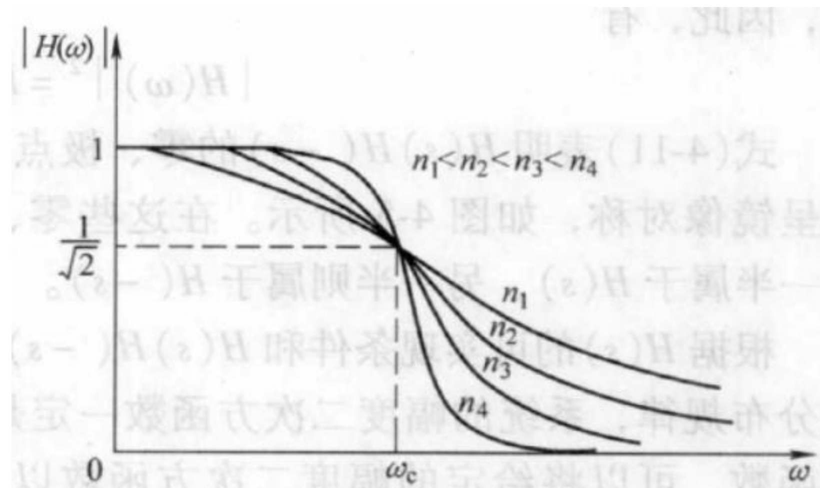
巴特沃思（Butterworth）低通滤波器

1、巴特沃思低通滤波器的幅频特性

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

特点：

- 幅值函数是**单调递减**的，在**ω=0**时具有最大值**|H(0)| =1**
- **$\omega=\omega_c$时，$|H(\omega_c)|=0.707\ |H(0)|$**，即截止频率处的幅度**衰减了-3dB**
- ω →∞时|H(ω)|→0
- 阶数***n*增大**时
  - ✓ **通带和阻带幅频特性变平**
  - ✓ **过渡段变窄、衰减加快**
  - ✓ **趋于理想低通滤波器**
  - ✓ **$|H(\omega_c)|=0.707\ |H(0)|$不会随*n*的改变而改变**



不同阶次的巴特沃思滤波器幅频特性

- 它以ω=0的最大平坦性来逼近LBP，也叫**最大平坦幅值滤波器**

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

2、巴特沃思低通滤波器的设计

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\boxed{\omega_c}}\right)^{\boxed{2n}}}$$

只要确定阶数n和截止频率ω_c

- 在工程设计中常用**衰减函数**来描述滤波器的幅频特性，

巴特沃思低通滤波器的衰减函数为：

$$\alpha=20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega)|}=-20\lg|H(\omega)| =-20\lg\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

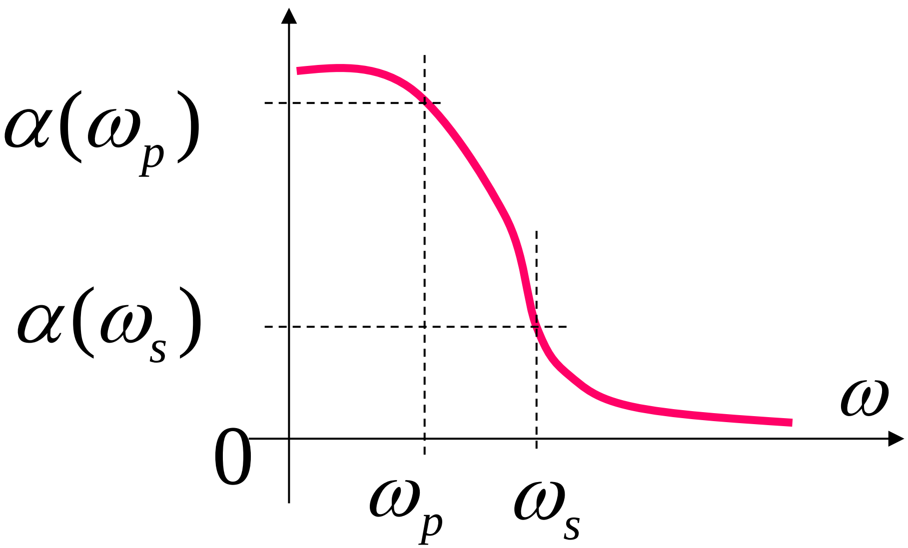
$$=10\lg\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$ ★

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

2、巴特沃思低通滤波器的设计

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\boxed{\omega_c}}\right)^{2\boxed{n}}}$$

只要确定阶数n和截止频率ω_c



给到的低通滤波器指标

$\alpha(\omega_p)/\alpha_p$ 通带最大衰减

$\alpha(\omega_s)/\alpha_s$ 阻带最小衰减

ω_p 通带截止频率

ω_s 阻带截止频率

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

2、巴特沃思低通滤波器阶次的确定

$$\alpha = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

通带最大衰减

$$\alpha_p = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

阻带最小衰减

$$\alpha_s = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}\right] \quad (*)$$

联立方程即可求得阶数**n**和截止频率$\boldsymbol{\omega_c}$

$$n \geq \frac{1}{2}\frac{lg\left[\dfrac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}\right]}{lg\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_p}\right)}$$

然后，将**n**带入上述式子（一般选（*）式）即可求得截止频率$\boldsymbol{\omega_c}$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

2、巴特沃思低通滤波器阶次的确定

$$\alpha_p = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n}\right] \qquad \alpha_s = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

设计低通滤波器时，通常取幅值下降3dB时所对应的频率值 ω_{3dB} 为通带截止频率，即 $\boxed{\omega_p = \omega_c = \omega_{3dB}}$ 此时，$\alpha_p = 3dB$

$$\boxed{\omega_c = \omega_p = \omega_{3dB}}$$

$$n = \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

n向上取整得到滤波器阶数

滤波器阶数（整数）

$$\boxed{n \ge \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}}$$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

2、巴特沃思低通滤波器阶次的确定

$$\alpha = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

$$\alpha_p = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n}\right] \qquad \alpha_s = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

若ω_c=1

$$n = \frac{lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{lg\omega_s}$$

***n*向上取整**得到滤波器阶数

滤波器阶数（整数）

$$n \geq \frac{lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{lg\omega_s}$$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

确定了ω_c和阶数$n \Rightarrow \left|H(\omega)\right|^2 \Rightarrow H(s)$

3、巴特沃思低通滤波器的零极点分布

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

$s=j\omega$

由滤波器的幅度二次方函数可得

$$H(s)H(-s) = \left|H(\omega)\right|^2\Big|_{s=j\omega} = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}\right]_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}}$$

令:$1+\left(s/(j\omega_c)\right)^{2n} = 0$

得：$s_k = j\omega_c(-1)^{\frac{1}{2n}} = \omega_c e^{j\left[\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right]}$

其中，$k=1,2,\ldots,2n$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$-1 = e^{j(2k-1)\pi}$$

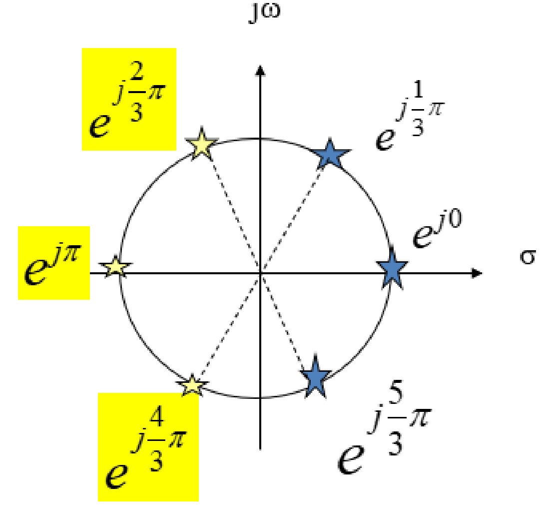
巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

3、巴特沃思低通滤波器的零极点分布

$$s_k = \omega_c e^{j\left[\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right]}$$

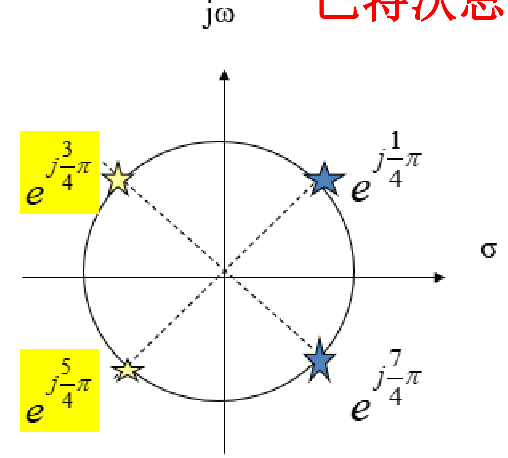
其中，$k = 1, 2, ..., 2n$

- $H(s)H(-s)$的$2n$个极点以 $\boxed{\frac{\pi}{n}}$ 为间隔均匀分布在半径为ω_c的圆上，这个圆称为**巴特沃思圆**；
- 所有极点以$j\omega$轴为对称轴成对称分布，$j\omega$轴上没有极点；
- 当n为奇数时，有两个极点分布在$s=\pm\ \omega_c$的实轴上；
- n为偶数时，实轴上没有极点。所有复数极点呈两两共轭对称分布。



n=3

巴特沃思圆



n=2

巴特沃思低通滤波器的极点分布

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

4、巴特沃思低通滤波器的传递函数

- 滤波器必须稳定，即须得到稳定的$H(s)$，
- 取全部**s左半平面的极点**为$H(s)$的极点
- 对称分布的右半s平面的极点对应$H(-s)$的极点

从而求得稳定的巴特沃思低通滤波器的系统传递函数为

$$\boxed{H(s)=\frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)}}$$

★

其中，s_k是左半平面的极点， $s_k=\omega_c e^{j\left[\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right]}$ $k=1,2,\ldots,n$

分子取 ω_c^n是为了保证$s=0$时，$|H(0)|=1$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

4、巴特沃思低通滤波器的传递函数

- 对于同阶数的巴特沃思低通滤波器的截止频率ω_c不同，所得传递函数$H(s)$不同，不便于滤波器的设计
- 故：采用归一化复频率予以简化

令 $\bar{s} = \dfrac{s}{\omega_c}$ (归一化复频率) ★

$$H\left(\bar{s}\right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{s}{\omega_c} - \frac{s_k}{\omega_c}\right)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(\bar{s} - \bar{s}_k\right)}$$

其中，$\bar{s}_k = e^{j\left(\frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$， $k=1,2,\ldots,n$

$$H(s) = \frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s - s_k)}$$

$$s_k = \omega_c e^{j\left[\frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{\pi}{2}\right]}$$

其中，$k = 1, 2, \ldots, 2n$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

5、归一化频率的各阶巴特沃思多项式

巴特沃思多项式

$$H(\bar{s})=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}a_k\bar{s}^{k}},\quad a_0=a_n=1$$

$$\bar{s}=\frac{s}{W_c}$$

标准化查表
表4—1

表 4-1　归一化频率的各阶巴特沃思多项式

n	巴特沃思多项式
1	$\bar{s}+1$
2	$\bar{s}^2+\sqrt{2}\,\bar{s}+1$
3	$\bar{s}^3+2\bar{s}^2+2\bar{s}+1$
4	$\bar{s}^4+2.613\bar{s}^3+3.414\bar{s}^2+2.613\bar{s}+1$
5	$\bar{s}^5+3.236\bar{s}^4+5.236\bar{s}^3+5.236\bar{s}^2+3.236\bar{s}+1$
6	$\bar{s}^6+3.864\bar{s}^5+7.464\bar{s}^4+9.142\bar{s}^3+7.464\bar{s}^2+3.864\bar{s}+1$
7	$\bar{s}^7+4.494\bar{s}^6+10.098\bar{s}^5+14.592\bar{s}^4+14.592\bar{s}^3+10.098\bar{s}^2+4.494\bar{s}+1$
8	$\bar{s}^8+5.153\bar{s}^7+13.137\bar{s}^6+21.846\bar{s}^5+25.688\bar{s}^4+21.846\bar{s}^3+13.137\bar{s}^2+5.153\bar{s}+1$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

例 求三阶巴特沃思低通滤波器的传递函数，设 $\omega_c = 1rad/s$

解: 巴特沃思滤波器幅度平方函数为

$$\boxed{|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

***n*=3，为奇数**

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^6}$$

$$\omega^2 = -s^2$$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1-s^6}$$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

例 求三阶巴特沃思低通滤波器的传递函数，设 $\omega_c = 1 rad/s$

解

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1-s^6}$$

六个极点分别为

$$S_{p1} = 1 \qquad S_{p2} = e^{j\frac{\pi}{3}} \qquad S_{p3} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$S_{p4} = -1 \qquad S_{p5} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \qquad S_{p6} = e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

取位于s平面左半平面的极点，可得系统传递函数

$$H(s) = \frac{1}{(s-e^{j\frac{2\pi}{3}})(s+1)(s-e^{-j\frac{2\pi}{3}})} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

例 若巴特沃思低通滤波器的频域指标为：当 $\omega_1 = 2\,rad/s$ 时，其衰减不大于3dB；当 $\omega_2 = 6\,rad/s$ 时，其衰减不小于30dB。求此滤波器的传递函数

解 令 $\omega_c = \omega_1 = \omega_p = \omega_{3dB} = 2\,rad/s \qquad \omega_s = \omega_2 = 6rad/s$

归一化后的频域指标为

$$\varpi_c = \frac{\omega_p}{\omega_c} = 1, \quad \alpha_p = 3dB \qquad \varpi_s = \frac{\omega_s}{\omega_c} = 3, \quad \alpha_s = 30dB$$

可求得该滤波器的阶数为

$$n = \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg\dfrac{\omega_s}{\omega_c}} = \frac{\lg\sqrt{10^3 - 1}}{\lg 3} \approx 3.143$$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

解： 取n=4，查表4-1可得此滤波器归一化传递函数为

$$H(\bar{s})=\frac{1}{\bar{s}^4+2.613\bar{s}^3+3.414\bar{s}^2+2.613\bar{s}+1}$$

通过反归一化处理，令 $s=\bar{s}\omega_c$ ，可求出实际滤波器的传递函数为

$$H(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^4+2.613\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^3+3.414\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2+2.613\left(\frac{s}{\omega_c}\right)+1}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^4+2.613\left(\frac{s}{2}\right)^3+3.414\left(\frac{s}{2}\right)^2+2.613\left(\frac{s}{2}\right)+1}$$

$$=\frac{16}{s^4+5.226s^3+13.656s^2+20.904s+16}$$

巴特沃思（Butterworth）低通滤波器

巴特沃思滤波器设计步骤（一般情况）

一般已知通带截止频率ω_p、阻带截止频率 ω_s

通带衰减 α_p 和阻带衰减 α_s

步骤1：截止频率ω_c

步骤2：根据 $n \geq \dfrac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$ **计算滤波器阶数 *n*** （向上取整）

步骤3：得到幅频二次方函数 $\boxed{|H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$

步骤4：令 $s^2 = -\omega^2$ **得到H(s) H(-s)，得到零极点分布**

步骤5：取s左半平面所有极点，得到传递函数 $H(s) = \dfrac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)}$

巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

巴特沃思滤波器设计步骤(查表法) ★

一般已知通带截止频率ω_p、阻带截止频率 ω_s

通带最大衰减 α_p 和阻带最小衰减 α_s

步骤1：截止频率ω_c

步骤2：根据 $n \ge \dfrac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$ 计算阶数 n （向上取整)

步骤3：根据 表4-1查取巴特沃思多项式

步骤4：写出归一化巴特沃思滤波器传递函数 $H(\bar{s})$

步骤5：令 $\bar{s}=\dfrac{s}{\omega_c}$ **反归一化得到滤波器传递函数H(s)**

本章主要内容

- 滤波器概述
  - ✓ 滤波概念及基本原理
  - ✓ 滤波器的分类
  - ✓ 滤波器的技术指标
- 模拟滤波器设计
  - ✓ 概述
  - ✓ 巴特沃思（**Butterwoth**）低通滤波器
  - ✓ 切比雪夫（**Chebyshev**）低通滤波器
  - ✓ 模拟滤波器频率变换
- 数字滤波器设计
  - ✓ 概述
  - ✓ 无限冲激响应（**IIR**）数字滤波器
  - ✓ 有限冲激响应（**FIR**）数字滤波器

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

1、巴特沃思低通滤波器与切比雪夫低通滤波器的比较

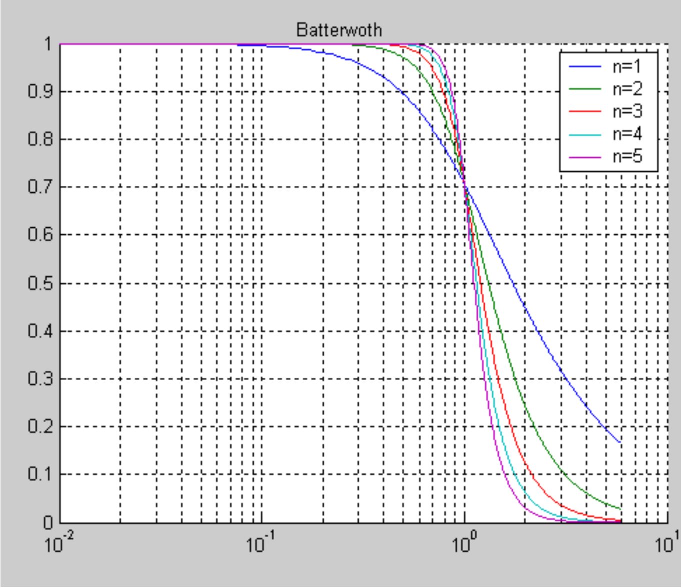
➢ 巴特沃思滤波器的特点

✓幅频特性随单调减小，特性简单、容易掌握；

✓通带内误差分布不均匀，靠近频带边缘误差最大；

✓阶数n小时，过渡带频率特性下降慢;

✓要求阻带衰减快时，阶数n很大，不利于硬件实现



解决办法： 将误差均匀分布在通带内，从而设计出阶数较低的滤波器

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

1、巴特沃思低通滤波器与切比雪夫低通滤波器的比较

- 改进方法：**切比雪夫滤波器**

- 切比雪夫低通滤波器

  ✓基于切比雪夫多项式的正交函数

  保证通带内误差分布均匀

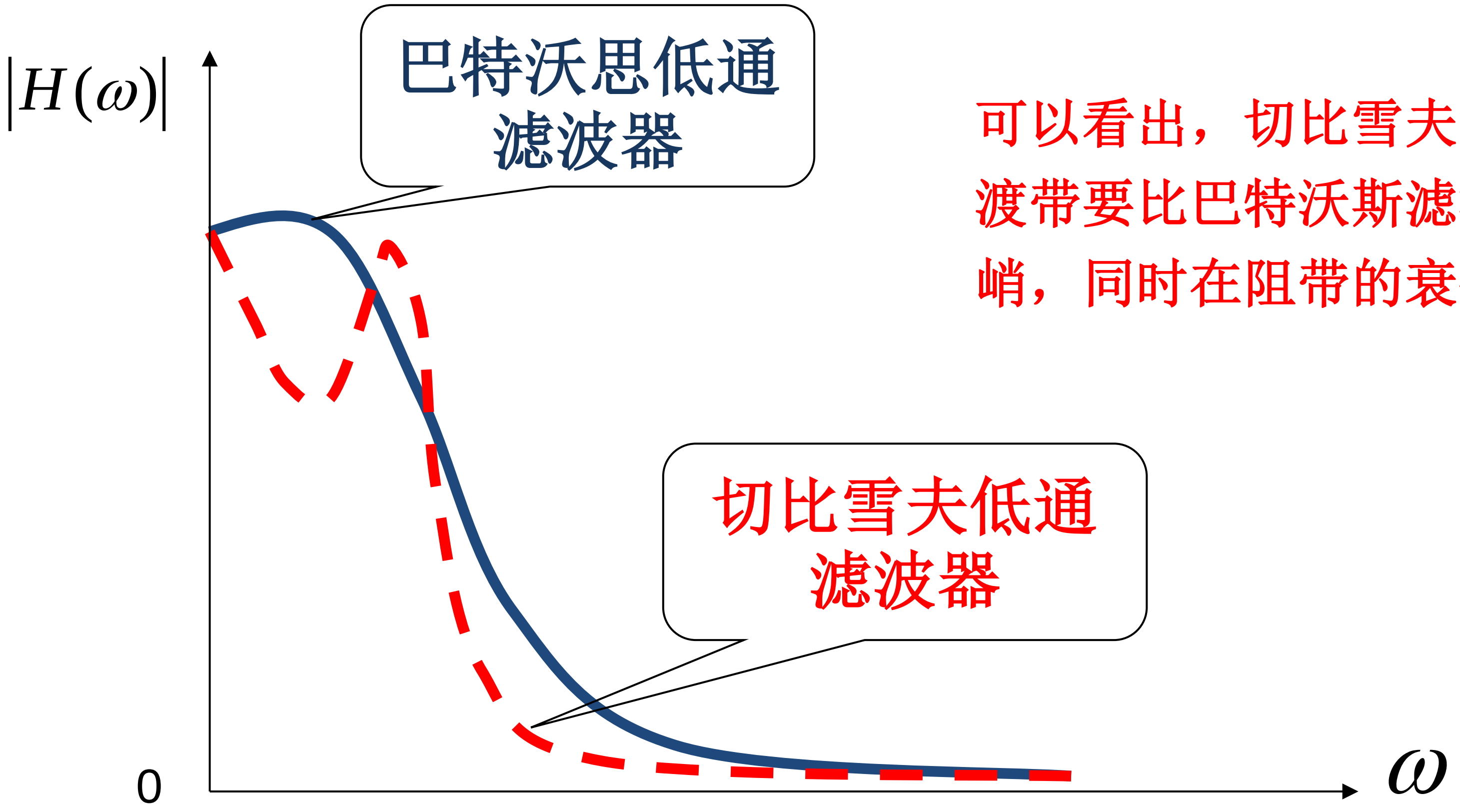
  ✓采用通带内等波动、在通带外衰减函数递增的准则去逼近理想滤波器特性

  改善高频抑制性能

  ✓是全极点型滤波器中过渡带最窄的滤波器

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

1、巴特沃思低通滤波器与切比雪夫低通滤波器的比较



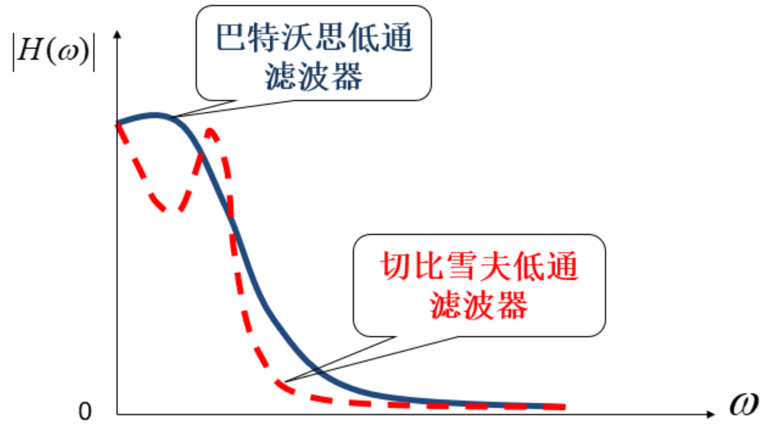
可以看出，切比雪夫滤波器的过渡带要比巴特沃斯滤波器更为陡峭，同时在阻带的衰减特性更好

三阶巴特沃思低通滤波器和三阶切比雪夫低通滤波器幅频特性

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

1、巴特沃思低通滤波器与切比雪夫低通滤波器的比较

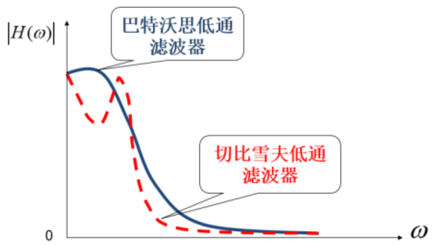
- 上图所示的**幅频特性在通带内是等波动，在阻带内单调下降的**，称为**切比雪夫I型滤波器**。
- 如果**幅频特性通带内是单调变化，在阻带内是等波动**，则称为**切比雪夫II型滤波器**。



切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

2、 I 型切比雪夫低通滤波器的幅频特性

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^{\ 2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$$



- ε：决定通带内起伏大小的波动系数，$0<\varepsilon<1$
- ω_c: 通带截止频率
- $T_n(\omega)$：n 阶切比雪夫多项式，其定义是

$$T_n(\omega) = \begin{cases} \cos\left(n\cdot\cos^{-1}(\omega)\right) & |\omega|\le 1 \\ \cosh\left(n\cdot\cosh^{-1}(\omega)\right) & |\omega|>1 \end{cases}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

2、 切比雪夫低通滤波器的幅频特性

切比雪夫多项式

$$T_n(x)=\begin{cases}\cos(n\cos^{-1}(x)) & |x|\le 1\\ \cosh(n\cosh^{-1}(x)) & |x|>1\end{cases}$$

$n=1,2,\cdots\cdots$

递推公式

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{jx}+e^{-jx})$$

$$\sin x=\frac{1}{j2}(e^{jx}-e^{-jx})$$

$$\cosh(x)=\cos(jx)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

$$\sinh(x)=\sin(jx)=j\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$$

表4-2 切比雪夫多项式

n	$T_n(x)$	n	$T_n(x)$
0	1	4	$8x^4-8x^2+1$
1	x	5	$16x^5-20x^3+5x$
2	$2x^2-1$	6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$
3	$4x^3-3x$	7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$

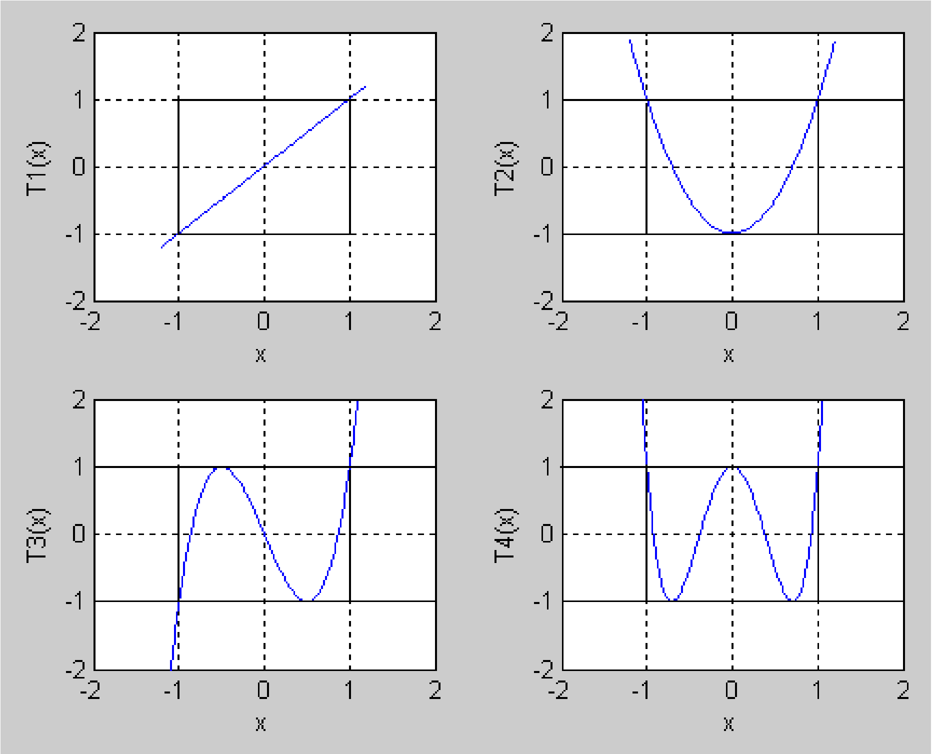
切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

2、 切比雪夫低通滤波器的幅频特性

$$T_n(\omega)=\begin{cases}\cos\left(n\cdot\cos^{-1}(\omega)\right) & |\omega|\le 1\\ \cosh\left(n\cdot\cosh^{-1}(\omega)\right) & |\omega|>1\end{cases}$$

切比雪夫多项式的特性曲线特点

- ✓ $|x|<1$时，$T_n(x)$在±1之间等幅波动
  - □ 当$x=0$时，
    - n为奇数，$T_n(x)=0$
    - n为偶数，$|T_n(x)|=1$
- ✓ $|x|>1$时，$|T_n(x)|$单调上升，
- ✓ $|x|=1$时，$|T_n(1)|\equiv 1$；
  - – 当$x=1$时，总有$T_n(x)=1$
  - – 当$x=-1$时，
    - 若n为奇数，$T_n(x)=-1$
    - 若n为偶数，$T_n(x)=1$



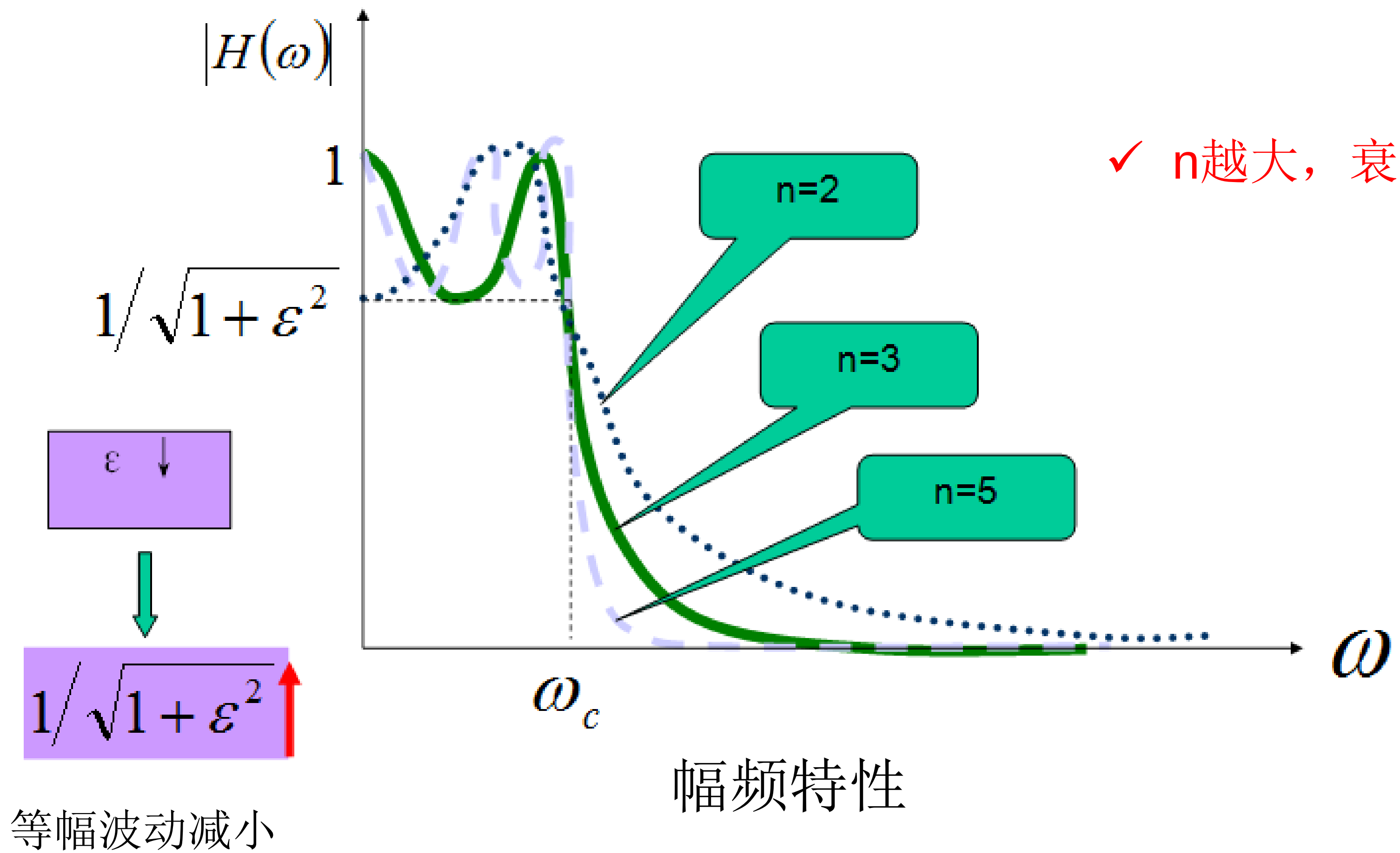
切比雪夫多项式的特性曲线(1-4阶)

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

2、 切比雪夫低通滤波器的幅频特性

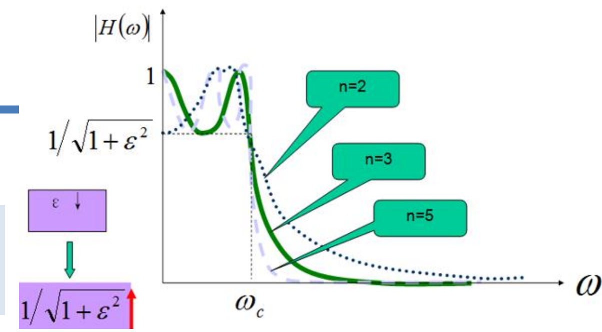
$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^{\ 2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

切比雪夫滤波器的幅频特性曲线(2阶、3阶和5阶)



幅频特性

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器



2、 切比雪夫低通滤波器的幅频特性

- 当 $0 \le \omega \le \omega_c$ 时, $|H(\omega)|$ 在 **1** 与 $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ 之间等幅波动，**ε**愈小，波动幅度愈小。
- 所有曲线在 $\omega = \omega_c$ 时通过 $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ 点。
- 当**ω=0**时，若***n***为奇数，则 $|H(\omega)|$ **=1;**

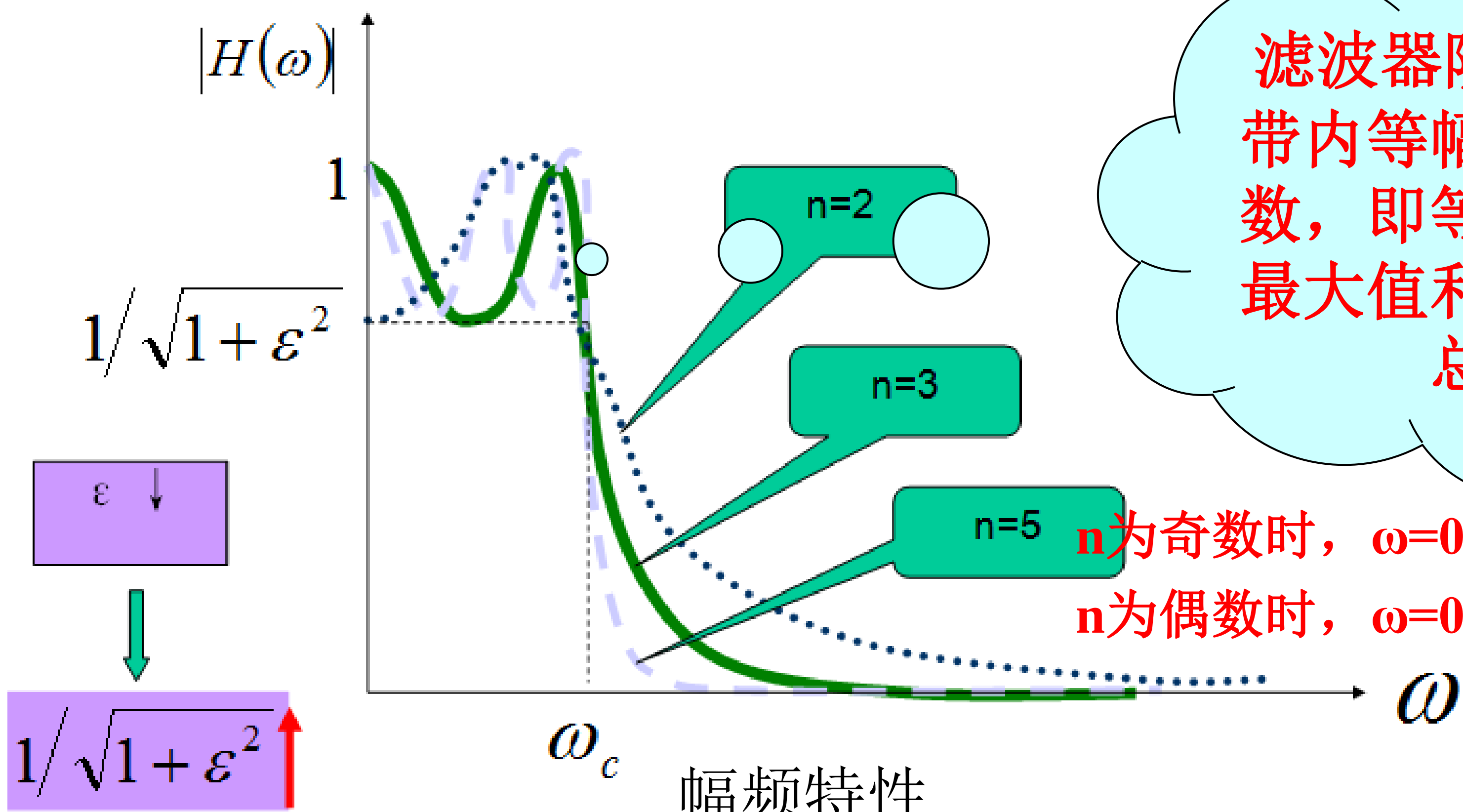
  若***n***为偶数，则 $|H(\omega)| = 1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ ；
- 通带内误差分布是均匀的，这种逼近称为<u>最佳一致逼近</u>。
- 当 $\omega > \omega_c$ 时，曲线单调下降，***n***值愈大，曲线下降愈快。

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

2、 切比雪夫低通滤波器的幅频特性

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^{\ 2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

切比雪夫滤波器的特性曲线(2阶、3阶和5阶)



幅频特性

滤波器阶数*n*为通带内等幅波动的次数，即等于通带内最大值和最小值的总数

n为奇数时，ω=0处为通带最大值；

n为偶数时，ω=0处为通带最小值；

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

2、 切比雪夫低通滤波器的幅频特性

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^{\ 2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

切比雪夫滤波器的相频特性(2阶、3阶和5阶)

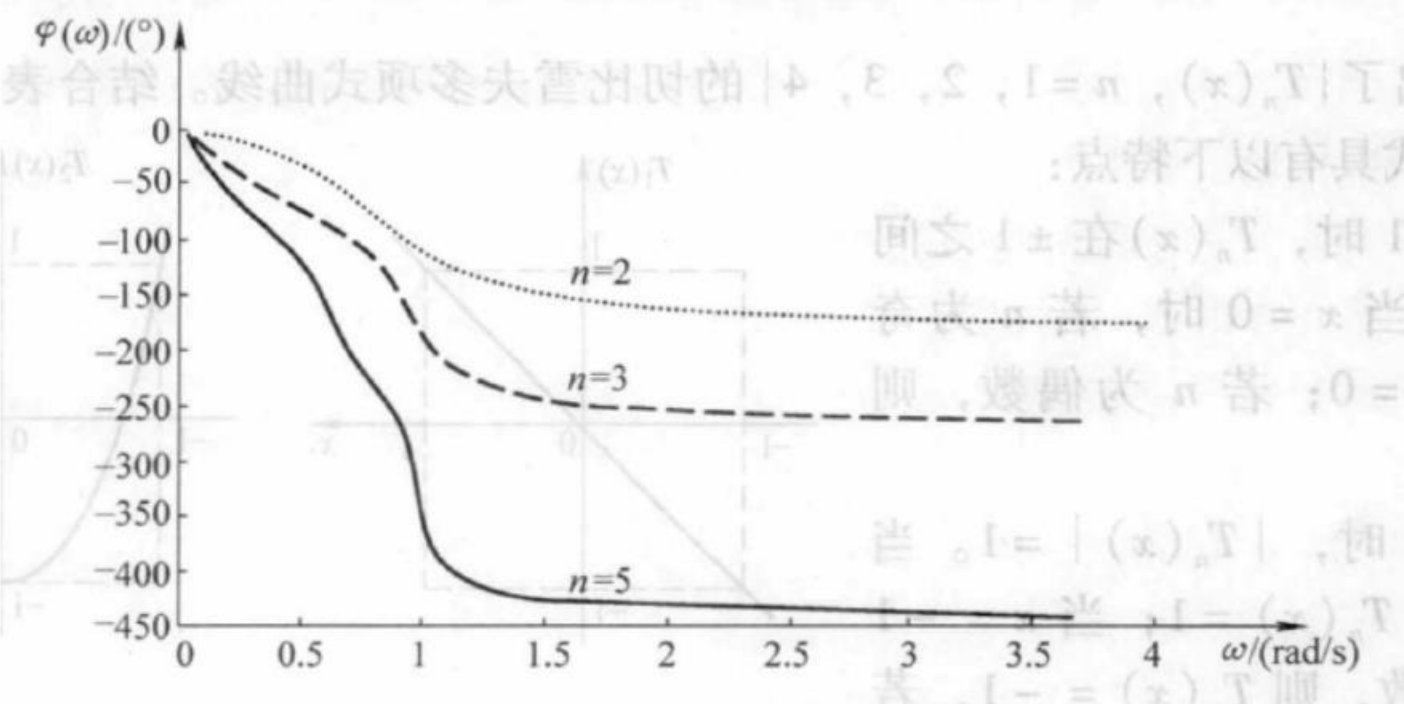


图 4-11　切比雪夫低通滤波器相频特性

相频特性是非线性的，所以会有一定的失真

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

3、切比雪夫低通滤波器的设计

- I型切比雪夫滤波器有三个参数需要确定：波动系数ε，通带截止频率 ω_c 和阶数 n。（核心）

✓ 通带截止频率ω_c 一般按照实际要求给定；

✓ ε表示通带内最大损耗，由容许的通带最大衰减 $\alpha_{\max}$ 确定

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

3、切比雪夫低通滤波器的设计

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

➢ 切比雪夫滤波器的**衰减函数**定义为

$$\alpha = -20\lg|H(\omega)| = 10\lg\left(1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right)$$

- **通带最大衰减** α_{max} / α_p，又称**通带波纹**，定义为

$$\alpha_{max} = \alpha_p = \alpha\big|_{\omega=\omega_c} = 10\lg(1+\varepsilon^2)$$

因为$\boldsymbol{T_n^2(1) = 1}$（表**4 − 2**）

- **波动系数ε为**

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1}}$$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

3、切比雪夫低通滤波器的设计

$$\alpha = 10\lg\left(1+\varepsilon^2 T_n^{\ 2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right)$$

$$T_n(\omega) = \begin{cases} \cos\left(n\cdot\cos^{-1}(\omega)\right) & |\omega|\le 1 \\ \cosh\left(n\cdot\cosh^{-1}(\omega)\right) & |\omega|>1 \end{cases}$$

- **滤波器所需的阶数*n*的确定：**

给定滤波器的通带截止频率 ω_c，通带内允许的最大衰减 α_{max}，阻带截止频率 ω_s ，阻带内允许的最小衰减 α_{min}

✓ **阻带($\omega \ge \omega_s > \omega_c$)内允许的最小衰减** α_{min} **为**

$$\alpha_{min} = \alpha_s = 10\lg\left(1+\varepsilon^2\cosh^2\left(n\cdot\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)\right)\right) \qquad \frac{\omega_s}{\omega_c}>1$$

得到**滤波器的阶次n**为

$$\boxed{n = \frac{\cos h^{-1}\left[\sqrt{\left(10^{0.1\alpha_{min}}-1\right)/\left(10^{0.1\alpha_{max}}-1\right)}\right]}{\cos h^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}}$$

求出的*n*不一定是整数，应当对其向上取整

$$\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

4、切比雪夫滤波器的极点分布——获得系统函数

- 得到波动系数ε，通带截止频率 ω_c 和阶数 n后，即可获得滤波器的幅度二次方函数$|H(\omega)|^2$

- **根据滤波器的幅度二次方函数→传递函数$H(s)$**

令：$s = j\omega$　即　$\omega = s/j$　代入

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \Rightarrow \boxed{H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)}}$$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

4、切比雪夫滤波器的极点分布

$$H(s)H(-s)=\frac{1}{1+\varepsilon^2T_n^{\ 2}\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)}$$

令分母多项式=0，得到极点

$$1+\varepsilon^2T_n^{\ 2}\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)=0 \Rightarrow T_n\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)=\pm j\frac{1}{\varepsilon}$$

记极点 $s_k=\sigma_k+j\omega_k$，基于上式可得

$$\sigma_k=-\omega_c\sin\left(\frac{2k-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\sinh\left[\frac{1}{n}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

$$\omega_k=\omega_c\cos\left(\frac{2k-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left[\frac{1}{n}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

其中 $k=1,2,\ldots,2n$

等间隔

π/n

令 $\begin{cases} a=\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \\ b=\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_k^2}{(a\omega_c)^2}+\frac{\omega_k^2}{(b\omega_c)^2}=1}$

易知b>a

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

4、I型切比雪夫滤波器的极点分布

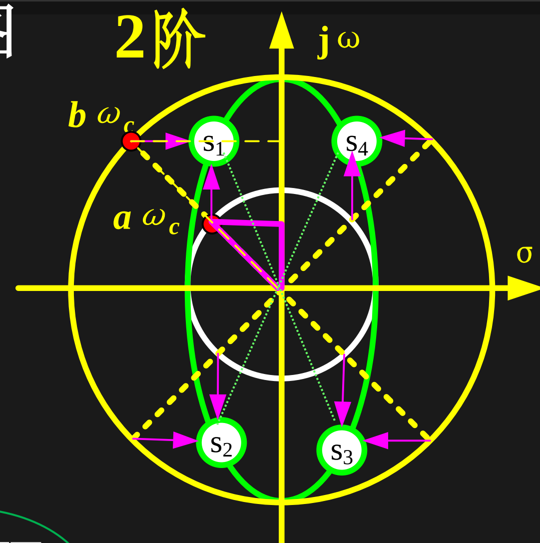
- 幅度二次方函数极点分布图

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\sigma_k^2}{(a\omega_c)^2}+\frac{\omega_k^2}{(b\omega_c)^2}=1\\ k=1,2,\cdots,2n\end{gathered}}$$

$$\begin{cases}\sigma_k=-a\omega_c\sin(\dfrac{2k-1}{n}\dfrac{\pi}{2})\\ \omega_k=b\omega_c\cos(\dfrac{2k-1}{n}\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$$

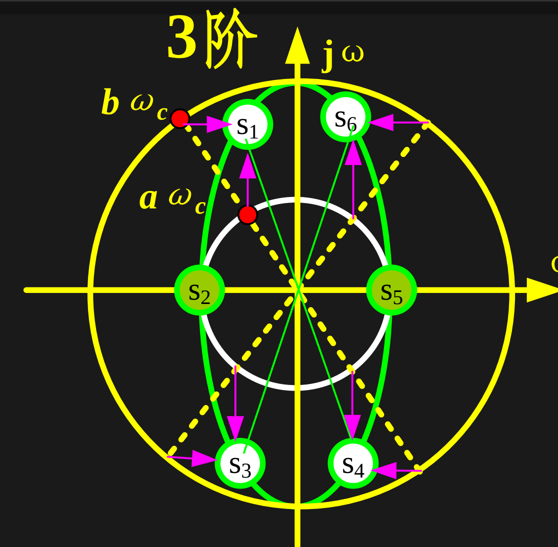
等间隔

π/n



极点4个，间距$\pi/2$

第一点（k=1）：$\pi/4$处（$\pi/2n$）



极点6个，间距$\pi/3$

第一点：$\pi/6$处($\pi/2n$)

- 共有$2n$个极点分布在s平面的一个椭圆上，间隔π/n，**第一个点出现在$\pi/2n$**
- 椭圆实轴半径为$a\omega_c$，虚轴半径为$b\omega_c$
- 极点关于$j\omega$轴对称
- 虚轴$j\omega$上无极点，因为小圆半径不可能为0
- n为奇数时，必有一对极点在实轴σ上

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

5、切比雪夫低通滤波器的传递函数

➢ 求出幅度平方函数的极点后，<u>**取s左半平面的极点（稳定系统），即可求得滤波器系统传递函数**</u>

$$H(s)=\frac{K}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})\cdots(s-s_{pn})}$$

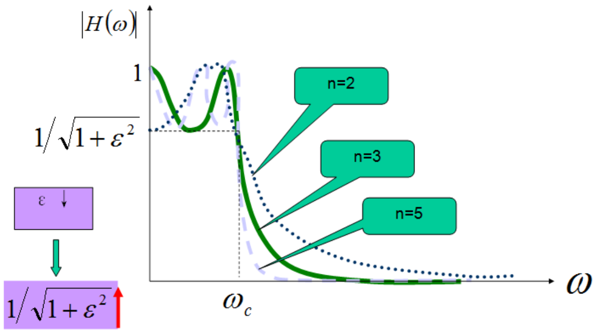
- 若n为奇数，$|H(\omega)|_{\omega=0}=1$，则

$$K=(-1)^n s_{p1}s_{p2}\cdots s_{pn}=-s_{p1}s_{p2}\cdots s_{pn}$$

- 若n为偶数，由于 $T_n(0)=1$ ，则 $|H(\omega)|_{\omega=0}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

  为通带最小值，有

$$K=\frac{(-1)^n s_{p1}s_{p2}\cdots s_{pn}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=\frac{s_{p1}s_{p2}\cdots s_{pn}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$



切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

5、切比雪夫滤波器的传递函数

- 令 $\bar{s} = s/\omega_c$，得归一化传递函数：

$$H(\bar{s}) = \frac{\bar{K}}{\prod_{k=1}^{n}(\bar{s} - s_{pk})} = \frac{\bar{K}}{\bar{s}^n + b_{n-1}\bar{s}^{n-1} + \cdots + b_1\bar{s} + b_0}$$

低通滤波器归一化系统函数 $H(\bar{s})$ 的分母多项式 $D(\bar{s})$ 的系数可以查表4-3）

$$D(\bar{s}) = \bar{s}^n + b_{n-1}\bar{s}^{n-1} + \cdots + b_1\bar{s} + b_0$$

(1) 通带波纹 0.5dB(ε=0.34931，ε^2=0.12202)

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	2.86278							
2	1.51620	1.42562						
3	0.71569	1.53490	1.25291					
4	0.37905	1.02546	1.71687	1.19739				
5	0.17892	0.75252	1.30957	1.93737	1.17249			
6	0.09476	0.43237	1.17186	1.58976	2.17184	1.15918		
7	0.04473	0.28207	0.75565	1.64790	1.86941	2.41265	1.15122	
8	0.02369	0.15254	0.57356	1.14859	2.18402	2.14922	2.65675	1.14608

系数 $b_0 = \prod_{k=1}^{n}(-s_{p_k}) = (-1)^n s_{p_1} s_{p_2} \ldots s_{p_n}$

- 已知n和ε，切比雪夫多项式系数查表4-3得 $H(\bar{s})$
- 反归一化后得传递函数$H(s)$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

5、切比雪夫滤波器的传递函数

- 令 $\bar{s} = s/\omega_c$ 得归一化传递函数：

$$H(\bar{s}) = \frac{\bar{K}}{\prod_{k=1}^{n}(\bar{s} - s_{pk})} = \frac{\bar{K}}{\bar{s}^n + b_{n-1}\bar{s}^{n-1} + \cdots + b_1\bar{s} + b_0}$$

系数 $b_0 = \prod_{k=1}^{n}(-s_{p_k}) = (-1)^n s_{p_1} s_{p_2} \dots s_{p_n}$

(2)通带波纹 1dB(ε =0.50885，ε^2 =0.25893)

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	1.96523							
2	1.10251	1.09773						
3	0.49131	1.23841	0.98834					
4	0.27563	0.74262	1.45392	0.95281				
5	0.12283	0.58053	0.97440	1.68882	0.93682			
6	0.06891	0.30708	0.93935	1.20214	1.93082	0.92825		
7	0.03071	0.21367	0.54862	1.35754	1.42879	2.17608	0.92312	
8	0.01723	0.10734	0.44783	0.84682	1.83690	1.65516	2.42303	0.91981

- 已知n和ε，切比雪夫多项式系数查表4-3得 $H(\bar{s})$
- 反归一化后得传递函数$H(s)$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

例： 试求二阶切比雪夫低通滤波器系统函数，已知通带波纹为1dB，归一化截止频率 $\omega_c = 1rad/s$

（1）确定n，ε，ω_c

解： 由 $\alpha_{\max} = 1dB$ 有 $\varepsilon^2 = 10^{\frac{\alpha_{\max}}{10}} - 1 = 0.25892541$

***n*=2**，查切比雪夫多项式表，有 $T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$

（2）确定幅度二次方函数 $|H(\omega)|^2$

切比雪夫滤波器的幅度二次方函数

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^{\ 2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

带入 $T_2^2(\omega) = 4\omega^4 - 4\omega^2 + 1 \quad \varepsilon^2 = 0.25892541 \quad \omega_c = 1rad/s$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1.0357016\omega^4 - 1.0357016\omega^2 + 1.25892541}$$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

例： 试求二阶切比雪夫低通滤波器系统函数，已知通带波纹为1dB，归一化截止频率 $\omega_c = 1rad/s$

解：

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1.0357016\omega^4 - 1.0357016\omega^2 + 1.25892541}$$

令 $s^2 = -\omega^2$

（3）确定s域幅度二次方函数的极点

幅度二次方函数

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1.0357016s^4 + 1.0357016s^2 + 1.25892541}$$

幅度平方函数的极点

$$s_1 = 1.0500049e^{j58.48^\circ}$$

$$\boxed{\begin{aligned} s_2 &= 1.0500049e^{j121.52^\circ} \\ s_3 &= 1.0500049e^{-j121.52^\circ} \end{aligned}}$$

$$s_4 = 1.0500049e^{-j58.48^\circ}$$

取左半平面的极点 s_2, s_3

（4）确定传递函数H(s)

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 1.0977343s + 1.1025103}$$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

例： 试求二阶切比雪夫低通滤波器系统函数，已知通带波纹为1dB，归一化截止频率 $\omega_c = 1rad/s$

（1）确定n，ε，ω_0

解： 由 $\alpha_{max} = 1dB$ 有 $\varepsilon^2 = 10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1 = 0.25892541$

***n*=2**，查切比雪夫多项式表，有 $T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$

（2）利用查表4-3确定H(s)

$n=2$ 查表4-3 得 $b_0 = 1.10251$，$b_1 = 1.09773$

$$\therefore H(\bar{s}) = \frac{\bar{K}}{\bar{s}^2 + 1.09773\bar{s} + 1.10251}$$

$$\bar{s} = \frac{s}{\omega_c} = s$$

$$\therefore H(s) = \frac{\bar{K}}{s^2 + 1.09773s + 1.10251}$$

，进而可以求得极点，用于计算K或通过表中对应的 b_0 得到

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

例： 试求二阶切比雪夫低通滤波器系统函数，已知通带波纹为1dB，归一化截止频率 $\omega_c = 1rad/s$

解： （4）确定传递函数H(s)

$$H(s) = \frac{K}{(s-s_2)(s-s_3)}$$

$$= \frac{K}{s^2+1.0977343s+1.1025103}$$

因为n=2，是偶数

$$K = \frac{(-1)^n s_{p1}s_{p2}\cdots s_{pn}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{b_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \approx \frac{1.1025103}{\sqrt{1+0.25892541}} \approx 0.9826133$$

$$\Downarrow$$

$$H(s) = \frac{0.9826133}{s^2+1.0977343s+1.1025103}$$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

$\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

例 4-5 设计一个满足下列技术指标的归一化切比雪夫低通滤波器：通带最大衰减 $\alpha_{max}=1\text{dB}$，当 $\omega_s\geq4\text{rad/s}$ 时，阻带衰减 $\alpha_s\geq40\text{dB}$。 $\omega_c=1rad/s$

解 根据式(4-31)可求得该滤波器的波动系数为

$$\varepsilon=\sqrt{10^{\frac{\alpha_{max}}{10}}-1}=\sqrt{10^{\frac{1}{10}}-1}=0.5088$$

因此，由式(4-34)，切比雪夫低通滤波器的阶次为

$$n=\frac{\cosh^{-1}\left[\sqrt{(10^{0.1\alpha_{min}}-1)/(10^{0.1\alpha_{max}}-1)}\right]}{\cosh^{-1}(\omega_s)}=\frac{\cosh^{-1}(10^2/0.5088)}{\cosh^{-1}(4)}=2.86$$

n=3，可查切比雪夫多项式表格，得到 $T_3(\omega)$

$$\left|H(\omega)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2T_n^{\ 2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}\xrightarrow{s^2=-\omega^2}$$

幅度二次方函数 $H(s)H(-s)$

求得三阶切比雪夫低通滤波器的极点为

$$s_{p1}=-0.2471+j0.9660$$
$$s_{p2}=-0.4942$$
$$s_{p3}=s_{p1}^*=-0.2471-j0.9660$$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

例 4-5 设计一个满足下列技术指标的归一化切比雪夫低通滤波器：通带最大衰减 $\alpha_{max}=1\mathrm{dB}$，当 $\omega_s\geq 4\mathrm{rad/s}$ 时，阻带衰减 $\alpha_s\geq 40\mathrm{dB}$。

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^{\,2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \xrightarrow{s^2=-\omega^2} \text{幅度二次方函数 } H(s)H(-s)$$

求得极点后，取<u>s左半平面极点</u>，即

$$s_{p1}=-0.2471+\mathrm{j}0.9660$$

$$s_{p2}=-0.4942$$

$$s_{p3}=s_{p1}^{*}=-0.2471-\mathrm{j}0.9660$$

故得三阶归一化切比雪夫 I 型低通滤波器的系统函数为

$$H(s)=\frac{-s_1s_2s_3}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}=\frac{0.4913}{(s+0.4942)((s+0.2471)^2+0.9660^2)}$$

$$=\frac{0.4913}{s^3+0.9883s^2+1.2384s+0.4913}$$

切比雪夫(Chebyshev)低通滤波器

例 4-5 设计一个满足下列技术指标的归一化切比雪夫低通滤波器：通带最大衰减 $\alpha_{max}=1\text{dB}$，当 $\omega_s \geq 4\text{rad/s}$ 时，阻带衰减 $\alpha_s \geq 40\text{dB}$。 $\omega_c = 1rad/s$

解 根据式(4-31)可求得该滤波器的波动系数为

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1} = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0.5088$$

因此，由式(4-34)，切比雪夫低通滤波器的阶次为

$$n = \frac{\cosh^{-1}\left[\sqrt{(10^{0.1\alpha_{min}} - 1)/(10^{0.1\alpha_{max}} - 1)}\right]}{\cosh^{-1}(\omega_s)} = \frac{\cosh^{-1}(10^2/0.5088)}{\cosh^{-1}(4)} = 2.86$$

n=3，可查表4-3得

$b_0 = 0.49131,\quad b_1 = 1.23841,\quad b_2 = 0.98834$

$$\therefore H(\bar{s}) = \frac{k}{\bar{s}^3 + 0.98834\bar{s}^2 + 1.23841\bar{s} + 0.49131}$$

$$\bar{s} = \frac{s}{\omega_c} \Rightarrow \bar{s} = s$$

$$\therefore H(s) = \frac{k}{s^3 + 0.98834s^2 + 1.23841s + 0.49131}$$

$k = -s_1 s_2 s_3 = b0$，s_1, s_2, s_3 是 $H(s)$ 的极点。

切比雪夫低通滤波器

切比雪夫滤波器设计步骤（查表法）★

一般已知通带截止频率ω_c、阻带截止频率 ω_s

通带衰减 α_{max}和阻带衰减 α_{min}

步骤1：截止频率ω_c， 波动系数 $\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_{\max}}{10}} - 1}}$

步骤2：根据 $\boxed{n = \dfrac{\cos h^{-1}\left[\sqrt{\left(10^{0.1\alpha_{\min}} - 1\right) / \left(10^{0.1\alpha_{\max}} - 1\right)}\right]}{\cos h^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}}$ **计算阶数 n （向上取整）**

步骤3：做归一化处理，并根据 表4-3查取归一化滤波器系统函数系数

步骤4：写出归一化切比雪夫低通滤波器传递函数$H(\bar{s})$

步骤5：令 $\bar{S} = s/\omega_c$ 反归一化得到滤波器传递函数H(s)

切比雪夫低通滤波器

切比雪夫滤波器设计步骤（一般情况）

一般已知通带截止频率ω_c、阻带截止频率 ω_s

通带衰减 α_{max} 和阻带衰减 α_{min}

步骤1：截止频率ω_c， 波动系数 $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_{\max}}{10}} - 1}$

步骤2：根据 $n = \dfrac{\cosh^{-1}\left[\sqrt{\left(10^{0.1\alpha_{\min}} - 1\right) / \left(10^{0.1\alpha_{\max}} - 1\right)}\right]}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$ **计算阶数 n** （向上取整）

步骤3：得到幅频二次方函数 $|H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$

步骤4：令 $s^2 = -\omega^2$ **得到H(s) H(-s)，得到零极点分布**

步骤5：取s左半平面所有极点，得到 $H(s) = \dfrac{K}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})\cdots(s - s_{pn})}$

1125复习要点

- 重点掌握如何利用幅频二次方函数 $|H(\omega)|^2$ 得到系统函数H(s)
  - ✓ 掌握H(s)H(-s)的零极点计算
  - ✓ 掌握最小相位型滤波器H(s)所需的极点（左半平面）和零点（左半平面和jω轴）

- 重点掌握巴特沃思低通滤波器的设计
  - ✓ 牢记巴特沃思低通滤波器的幅度二次方函数

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

  - ✓ 利用四个技术指标求得阶数n和截止频率ω_c
  - ✓ 掌握用一般方法和求表4-1法(需要再做反归一化)求系统函数H(s)

$$H(s) = \frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s - s_k)}$$

$$n \geq \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

  - ✓ 理解H(s)H(-s)的极点分布和巴特沃斯圆

1125复习要点

- **掌握I型切比雪夫低通滤波器的设计**
  - ✓ 牢记切比雪夫低通滤波器的幅度二次方函数
  - ✓ 利用四个技术指标求得阶数n、波动系数ε、截止频率ω_c
  - ✓ 掌握用查表法（表4-3）或一般方法求系统函数H(s)
  - ✓ 理解切比雪夫滤波器极点分布图和特点（椭圆）
  - ✓ 深入理解切比雪夫低通滤波器和巴特沃斯低通滤波器的幅频特点

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^{\ 2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1}$$

$$n = \frac{\cos h^{-1}\left[\sqrt{\left(10^{0.1\alpha_{min}}-1\right)/\left(10^{0.1\alpha_{max}}-1\right)}\right]}{\cos h^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

1125课后作业

- 第四章习题 P318-320
- 1、 4、6(1)

21、 用查表4-1设计一个归一化频率的巴特沃思低通滤波器，其频域指标满足：通带截止频率为600Hz，衰减不大于3dB；阻带截止频率为1800Hz，衰减不小于30dB

例 **给定滤波特性的幅度平方函数**

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1+\omega^4}{\omega^4+10\omega^2+9}$$

求具有最小相位特性的滤波器系统函数

8. (2) 若给定 $f_p = 1.5MHz, \alpha_p \le 3dB, f_s = 1.7MHz, \alpha_s \ge 60dB$，分别求巴特沃斯低通滤波器和切比雪夫低通滤波器的最低阶数n