2023 年「高等数学 1」杭电期中模拟试题二

MathHub 七星考研 未央学社

出题：高数讲师 ch & xxy & zwx　　审题：未央学社

HDU 数学营　未央学社公众号

本资料仅作为模拟练习之用，目的是为了帮助大家更有效地复习，并减轻对考试的担忧。请正确的对待此资料，其旨在辅助复习，而非预示具体的考试内容。我们鼓励同学们认真复习，大学学习主打理解，而非刷题，期望大家在期中考试中取得优异成绩。

1. 选择题

题目 1 【 D 】

$f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$ 在 x_0 取得极值的

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

分析与解 导数不存在的点也有可能是极值点，驻点不一定是极值点.

题目 2 【 D 】

极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$ 的值是

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

分析与解 因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}=-1$，所以极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$ 的值不存在.

题目 3 【 C 】

曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$

A. 4e　　B. 3e　　C. 2e　　D. e

分析与解 因为曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，所以 $(x^2)'=(a\ln x)'$，即 $2x=a\dfrac{1}{x}$，得 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时，$y=a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}=a\cdot\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}$，于是 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\cdot\ln\dfrac{a}{2}$ 得 $a=2\mathrm{e}$. 故本题选择 **C** 项.

题目 4 【 C 】

下列各式中正确的是

A. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$　B. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\mathrm{e}$　D. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+n\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

分析与解 根据重要极限 2，即 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，逐步计算选项 A，B，C，D，分别得 e^2，e^{-1}，e，e^n.

题目 5 【 D 】

曲线 $y=\dfrac{x^2}{(x+1)}$

A. 没有渐近线　B. 既有铅直渐近线，又有水平渐近线

C. 仅有铅直渐近线　D. 既有铅直渐近线，又有斜渐近线

分析与解 由于 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2}{x+1}=\infty$，因此 $x=-1$ 是铅直渐近线. 又 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(1+x)}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}-x\right)=-1$ 故 $y=x-1$ 是斜渐近线. 故本题选择 **D** 项.

题目 6 【 A 】

使函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2(1-x)^2}$ 满足罗尔定理条件的区间是

A. $[0,1]$　B. $[-1,1]$　C. $[-2,2]$　D. $[-3/5,4/5]$

分析与解 对于选项 B，C，D 中的区间，因函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数不存在，故排除. 故本题选择 **A** 项.

题目 7 【 B 】

已知实数 a，b 满足 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$

A. $b\sin a$　B. $b\cos a$　C. $b\sin f(a)$　D. $b\cos f(a)$

分析与解

因为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\varepsilon[f(x)-a]}{x-a}$（$\varepsilon$ 介于 $f(x)$ 与 a 之间）. 且 $\lim\limits_{x\to a}\cos\varepsilon=\cos a$，所以原式 $=b\cos a$.

题目 8 【 C 】

曲线 $\begin{cases}x=t^2+7\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应的 $t=1$ 的点处的曲率半径是

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{50}$ B. $\dfrac{\sqrt{10}}{100}$ C. $10\sqrt{10}$ D. $5\sqrt{5}$

分析与解 由于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{2t-4}{2t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{2\cdot 2t-2(2t+4)}{(2t)^2}}{2t}=-\dfrac{8}{(2t)^3}$，因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=3$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-1$，$K=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}}$，得最终结果 $R=\dfrac{1}{K}=10\sqrt{10}$.

2. 填空题

题目 9

设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-99)$，求 $f'(0)=\underline{-99!}$.

分析与解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$.

题目 10

求解函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}=\underline{\dfrac{2}{\pi}}$.

分析与解

令 $t=x-1$，此时 $t\to 0$，得到 $x=t+1$，原式可表示为 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t+2)t}{\sin\pi t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t+2)t}{\pi t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t+2}{\pi}=\dfrac{2}{\pi}$.

题目 11

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\underline{2f'(a)}$.

分析与解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}+\dfrac{f(a-x)-f(a)}{-x}\right]=2f'(a)$.

题目 12

曲线 $y=x^2+\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 $\underline{y=4x-3}$.

分析与解 定义域 $(0,+\infty)$，$y'=2x+\dfrac{2}{x}$，$y''=2+\dfrac{-2}{x^2}$，$y''(1)=0$，且在 $x=1$ 左右 $y''(x)$ 符号改变，为拐点斜率 $k=4$ 经过点 $(1,1)$ 的方程 $y=4x-3$.

3. 计算题

题目 13

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$.

分析与解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}\cdot\frac{3(2x-1)}{3x-1}}=\mathrm{e}^2$.

题目 14

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

分析与解

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]$. 当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$，所以有

$$\ln x_n<\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\xlongequal{n\to\infty}\frac{1}{2}$$
$$\ln x_n>\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{n^4}+\cdots+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{n^4}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^4}\xlongequal{n\to\infty}\frac{1}{2}$$

所以由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\dfrac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

题目 15

$y=\tan x+\sec x+2$，求 y'.

分析与解 $y'=\sec^2 x+\sec x\tan x$.

题目 16

设 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

分析与解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{[a(t-\sin t)]'}{[a(1-\cos t)]'}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\frac{\pi}{2}}=1$.

题目 17

已知隐函数 $y=y(x)$ 由 $y=-y\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^y\sin x-7x$ 所确定，求 $y'(0)$.

分析与解 将 $x=0$ 代入方程，有 $y(0)=-y(0)$，即 $y(0)=0$，两边对 x 求导，得 $y'=-y'\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^y y'\sin x+2\mathrm{e}^y\cos x-7$，将 $x=0$，$y(0)=0$ 代入，有 $y'(0)=-y'(0)+2-7$，$y'(0)=-\dfrac{5}{2}$.

4. 综合题

题目 18

$f(x)=\dfrac{x+9}{x^2-2x-3}$，求 $f^{(n)}(x)$.

分析与解 注意到 $f(x)=\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{x+1}$，于是我们得到 $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left[\dfrac{3}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{2}{(x+1)^{n+1}}\right]$

题目 19

设 $f(x)$ 在 $x=2$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，求 $f(2)$ 以及 $f'(2)$.

分析与解 显然 $f(x)=3(x-2)+o(x-2)$，那么 $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$，$f'(2)=3$.

题目 20

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-a-b\sin x}{x^2}$ 存在，求出常数 a，b.

分析与解

解法 1.

将上式改写为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-1-\frac{1}{2}\sin x+(1-a)+(\frac{1}{2}-b)\sin x}{x^2}$，然而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-1-\frac{1}{2}\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{4\left(\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+1+\frac{1}{2}\sin x\right)}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(1-a)+\left(\dfrac{1}{2}-b\right)\sin x$ 存在. 由于分子极限为 0，即可得到 $a=1$. 带入后得到 $\dfrac{1}{2}-b=0$ 即 $b=\dfrac{1}{2}$.

解法 2.

首先因为原式极限存在，而显然分母极限为 0，所以若想要满足原式极限存在的条件，分子的极限也应该为 0. 首先我们来单独求解分子极限：

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-a-b\sin x=0$$

得到 $a=1$, 代回原式中去得到：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-1-b\sin x}{x^2}$$

根据 $\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))^a-1=af(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\sin f(x)=f(x)$ 可得原式为：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x+\left(\frac{1}{2}-b\right)\sin x}{x^2}$$

因为原极限存在，所以分子必须为分母的高阶或者同阶无穷小，所以 $\dfrac{1}{2}-b=0$, 所以 $b=\dfrac{1}{2}$

题目 21

在半径为 r 的球内内接一圆锥，求圆锥体积的最大值.

分析与解 设底面距离球心的距离为 d，那么底面面积为 $S=\pi(r^2-d^2)$，圆锥的高为 $d+r$，体积 $V=\frac{1}{3}S(d+r)=\frac{1}{3}\pi(r^2-d^2)(d+r)=\frac{1}{3}\pi(r^3+r^2d-d^2r-d^3)$，求导得到 $V'=\frac{1}{3}\pi(-3d^2-2rd+r^2)$，得到 $d^*=\frac{r}{3}$，代入即得.

题目 22

多项式 $P(x)=a_1x+a_2x^2+..+a_nx^n$ 的系数满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$. 证明在 $(0,2)$ 上多项式 $a_1t+2a_2t^2+\cdots+na_nt^n=0$ 有实数解.

分析与解 显然 $P(0)=P(1)=0$，将第二个多项式除以 t 得到 $a_1+2a_2t+..+na_nt^{n-1}=0$，后者刚好为 $P'(t)$. 根据罗尔定理即得.