



信号分析与处理

第五章 滤波器

范姍慧

杭州电子科技大学 自动化学院

二教南316

本章主要内容

➤ 滤波器概述

- ✓ 滤波概念及基本原理
- ✓ 滤波器的分类
- ✓ 滤波器的技术指标

➤ 模拟滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 巴特沃思（**Butterworth**）低通滤波器
- ✓ 切比雪夫（**Chebyshev**）低通滤波器
- ✓ 模拟滤波器频率变换

➤ 数字滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 无限冲激响应（**IIR**）数字滤波器
- ✓ 有限冲激响应（**FIR**）数字滤波器

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

1、一般要求

- **设计任务：** 用具有无限多项的单位冲激响应所对应的有理函数 $H(z)$ 逼近给定的滤波器幅频特性 $|H(\Omega)|$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - z^{-1}} = b_0(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) \quad |z| > 1$$
$$h(n) = b_0 [\delta(n) + \delta(n-1) + \cdots] = b_0 u(n)$$

➤ **设计方法：**

- ✓ **直接法：** 是一种计算机辅助设计方法。
- ✓ **间接设计法：** 是借助模拟滤波器的传递函数 $H(s)$ 求出相应的数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。先确定一个满足该指标的模拟滤波器 $H(s)$ ，再寻找一种变换关系把 s 平面映射到 z 平面，使 $H(s)$ 变换成所需的数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

✓冲激响应不变法

✓双线性变换法

– IIR数字滤波器的网络结构

IIR数字滤波器（双线性变换法）

1、概念与基本思想

- 冲激响应不变法：从 s 平面到 z 平面的映射关系不是一一对应的（多值性引起），会产生频率响应的混叠，导致失真
- 为了克服这一缺点，采用双线性变换法，使数字滤波器的频率响应与模拟滤波器的频率响应一一对应

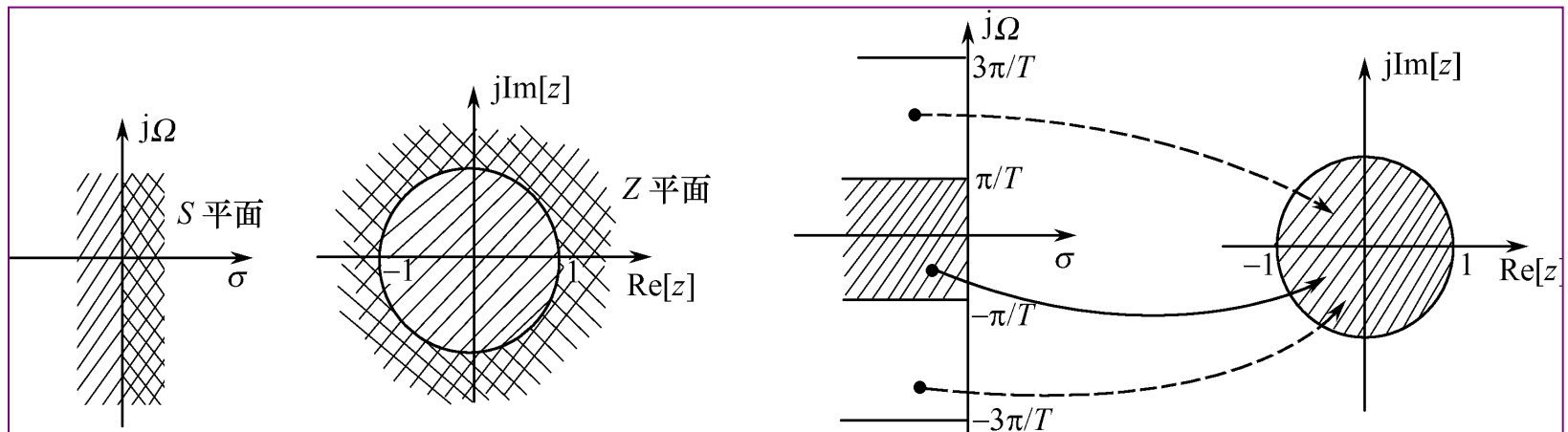
IIR数字滤波器（双线性变换法）

1、概念与基本思想

- **脉冲响应不变法的主要缺点：**对时域的采样会造成频域的“混叠效应”，故有可能使所设计数字滤波器的频率响应与原来模拟滤波器的频率响应相差很大，而且不能用来设计高通和带阻滤波器。

✓ **原因：**从 s 平面到 z 平面的映射 $z = e^{sT}$ 是多值映射关系

脉冲响应不变法映射过程图示



IIR数字滤波器（双线性变换法）

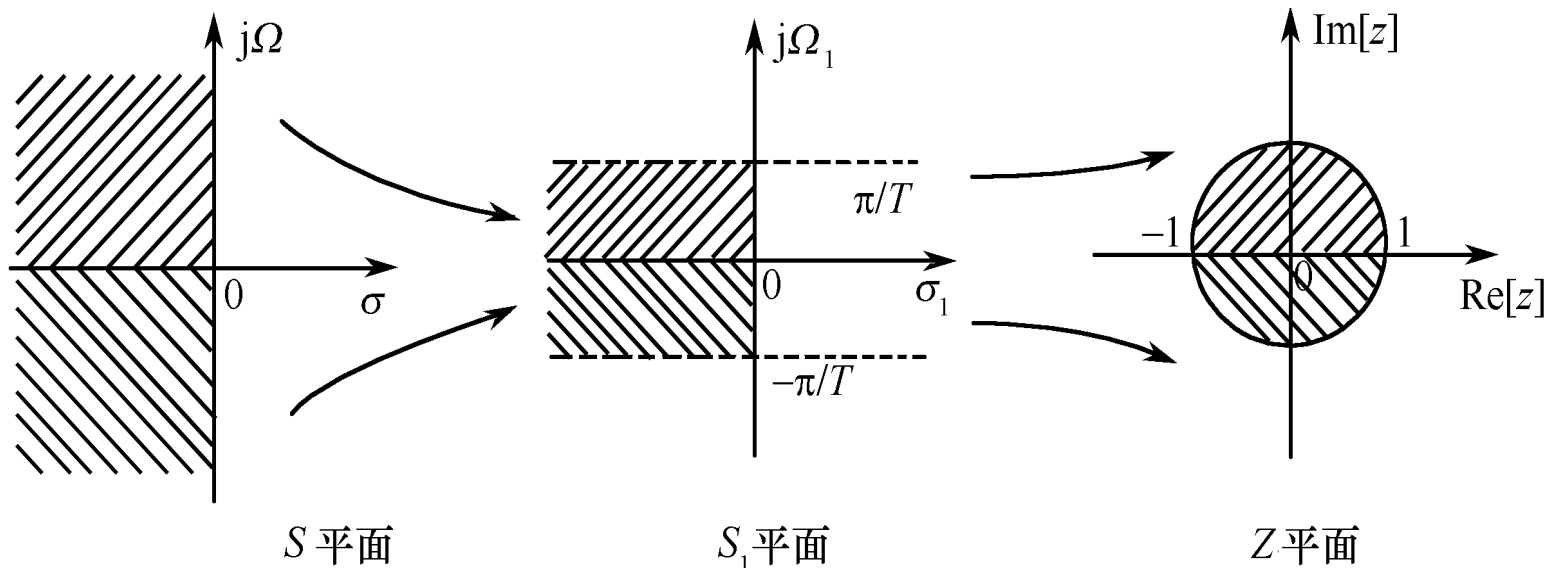
1、概念与基本思想

➤ 双线性变换法的改进：

为避免频率的“混叠效应”，分两步完成S平面到Z平面的映射

- ① 将S平面压缩到某一中间的 S_1 平面的一条横带域 $\left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$
- ② 通过标准的变换将此横带域映射到整个Z平面上去

双线性变换的映射过程图示



IIR数字滤波器（双线性变换法）

1、概念与基本思想

➤ 双线性变换法的基本思路：★

先按给定的技术指标设计出一个模拟滤波器，再将模拟滤波器的系统函数 $H(s)$ 通过适当的变换，把无限宽的频带变换成频带受限的系统函数 $H(\hat{s})$ 。最后再将 $H(\hat{s})$ 进行Z变换，求得数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

IIR数字滤波器（双线性变换法）

2、双线性变换法 $s \rightarrow \hat{s}$ 的映射

□ 将 s 平面映射到 \hat{s} 平面存在下列关系式

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - e^{-\hat{s}T}}{1 + e^{-\hat{s}T}} \right) \quad T \text{是采样周期}$$

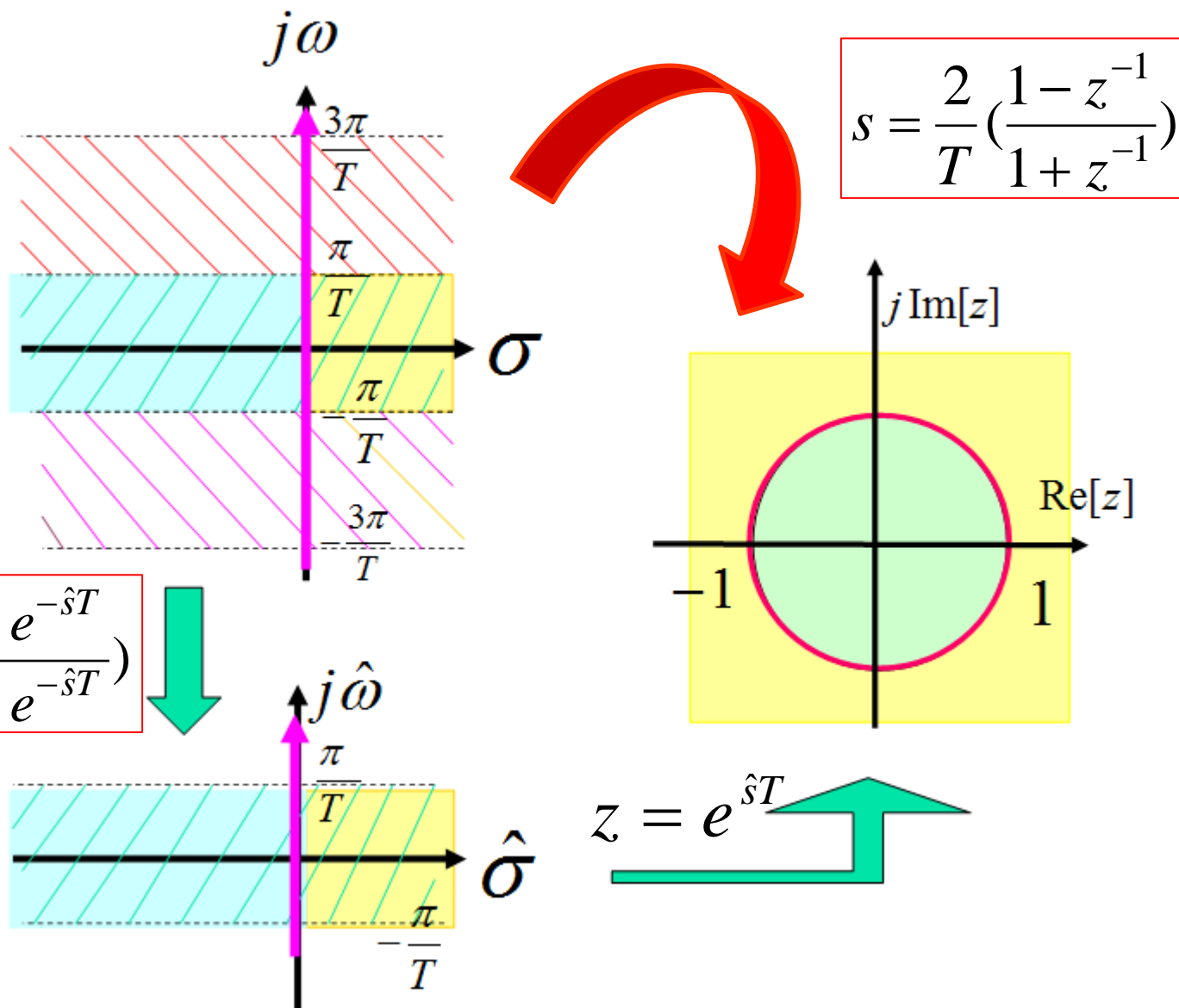
$$\hat{s} = 0 \quad \longrightarrow \quad s = 0$$

$$\hat{s} = \pm j \frac{\pi}{T} \quad \longrightarrow \quad s = \pm \infty$$

□ 把 s 平面压缩到了 \hat{s} 平面的一条横带上了，横带范围为

$$-j \frac{\pi}{T} \sim j \frac{\pi}{T}$$

IIR数字滤波器（双线性变换法）★



IIR数字滤波器（双线性变换法）

3、双线性变换法 $\hat{s} \rightarrow z$ 的映射

利用公式 $z = e^{\hat{s}T}$ 实现 \hat{s} 平面到 z 平面的映射

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - e^{-\hat{s}T}}{1 + e^{-\hat{s}T}} \right) \quad \xrightarrow{\text{令 } z = e^{\hat{s}T}} \quad \text{blue arrow}$$

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad \star$$

s 平面 $\rightarrow \hat{s}$ 平面



s 平面 $\rightarrow z$ 平面

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$$

IIR数字滤波器（双线性变换法）

4、双线性变换法的特性

- 双线性变换是 s 平面到 z 平面一一对应的映射关系
- 双线性变换将 s 平面虚轴唯一地映射到 z 平面的单位圆，保证了 $H(z)$ 的频率响应能模仿模拟滤波器 $H(s)$ 的频率响应，避免了频率响应混叠现象。
- 双线性变换将 s 左平面全部映射到 z 平面单位圆内，将 s 右半平面全部映射到 z 平面的单位圆外，保证了数字滤波器的稳定性不发生变化。

IIR数字滤波器（双线性变换法）

5、双线性变换法的频率预畸变 （数字频率和模拟频率的变换）

- 在冲激响应不变法中，数字频率 Ω 与模拟频率 ω 之间的关系是线性关系： $\Omega = \omega T$
- 在双线性变换法中，模拟频率与数字频率之间的关系为非线性关系，即

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2}$$



- ◆ 模拟频率与数字频率间的非线性关系是双线性变换的缺点，它会使数字滤波器与模拟滤波器在频率响应与频率的对应关系上发生畸变。

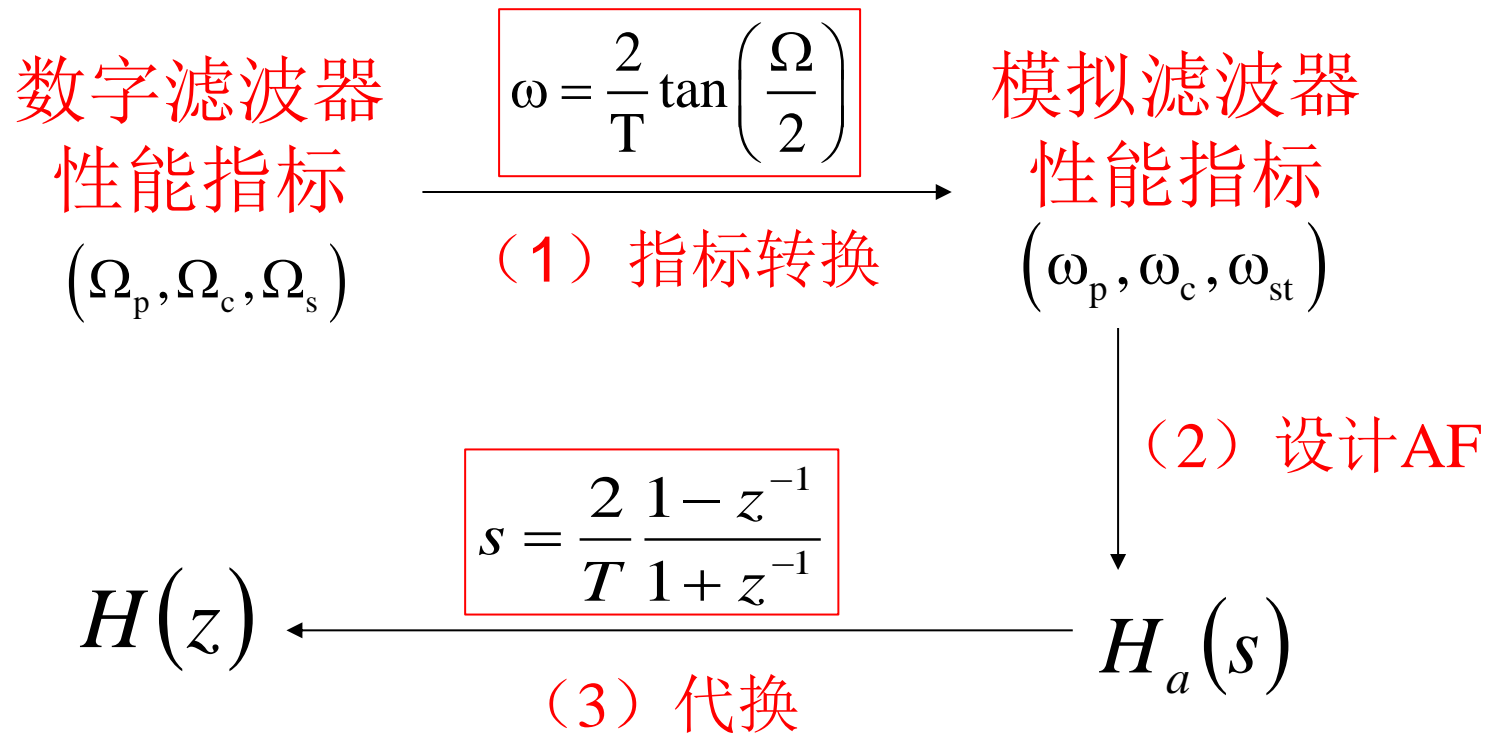
IIR数字滤波器（双线性变换法）

5、双线性变换法的频率预畸变 (数字频率和模拟频率的变换)

- 双线性变换法的频率预畸变校正：先对模拟滤波器的临界频率加以畸变，使其通过双线性变换后正好映射为需要的频率
- 设所求的数字滤波器的通带和阻带的截止频率分别为 Ω_p 和 Ω_s
- 按照式 $\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2}$ 求出对应的模拟滤波器的临界频率 ω_p 和 ω_s ，然后模拟滤波器就按照这两个预畸变的频率 ω_p 和 ω_s 来设计

IIR数字滤波器（双线性变换法）

6、双线性变换法设计步骤



IIR数字滤波器（双线性变换法）

7、优缺点

- **优点：** 避免了频率响应的混叠现象
- **缺点：** 除了零频率附近， Ω 与 ω 之间严重非线性
 - ▣ 线性相位模拟滤波器 → 非线性相位数字滤波器
 - ▣ 双线性变换后，频率响应产生了畸变，但通带阻带仍为常数特性，不受影响，只是**临界频率点产生畸变**。

IIR数字滤波器（双线性变换法）



例：用双线性变换法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，采样周期 $T=1s$ ，巴特沃思数字低通滤波器的技术指标为：

- (1) 在通带截止频率 $\Omega_p = 0.5\pi$ 时，衰减不大于 **3dB**
- (2) 在阻带截止频率 $\Omega_s = 0.75\pi$ 时，衰减不小于 **15dB**

解：(1) 将频率进行预畸变处理，则有

$$\omega_c = \omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_p}{2} = 2 \tan \frac{0.5\pi}{2} = 2 \text{ rad/s}, \alpha_p = 3\text{dB}$$

$$\omega_s = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_s}{2} = 2 \tan \frac{0.75\pi}{2} = 4.828 \text{ rad/s}, \alpha_s = 15\text{dB}$$

(2) 设计满足技术指标的巴特沃思模拟低通滤波器。

该滤波器阶数为

$$n = \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg \left(\frac{\omega_s}{\omega_c} \right)} \approx 1.941$$

取 $n=2$ ，归一化巴特沃思模拟低通滤波器的传递函数为

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + 1.414\bar{s} + 1}$$

(3) 对上式进行反归一化处理。

令 $\bar{s} = s / \omega_c$ ，巴特沃思模拟低通滤波器的实际传递函数为

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 1.414\omega_c s + \omega_c^2} = \frac{4}{s^2 + 2.828s + 4}$$

(4) 利用双线性变换法求出数字滤波器的传递函数H(z)

$$H(z) = H(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1 + 2z + z^2}{0.586 + 3.414z^2}$$

IIR数字滤波器（双线性变换法）

高通、带通、带阻等其他IIR数字滤波器的设计流程如下所示



图 4-18 其他类型 IIR 数字滤波器的设计方法

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

✓冲激响应不变法

✓双线性变换法

– IIR数字滤波器的网络结构

IIR数字滤波器（网络结构）

➤ 直接型

- ✓ 直接对系统的传递函数进行运算处理

➤ 级联型

- ✓ 把系统传递函数分解成若干个子系统的传递函数的乘积

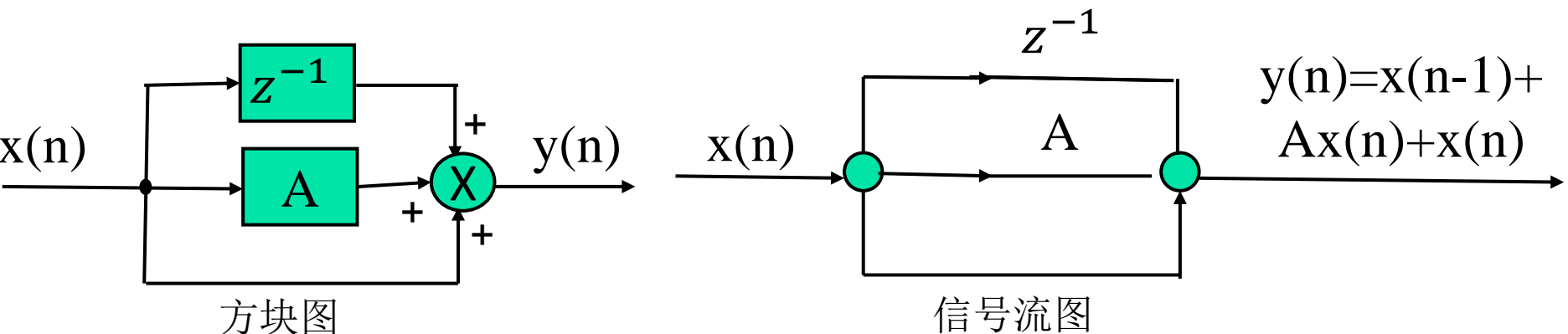
➤ 并联型

- ✓ 把系统传递函数分解成若干个子系统的传递函数的和

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

信号流图

- **节点**：代表系统中的变量，等于所有进入该节点的信号之和，自节点流出的信号不影响该节点变量的值。
- **支路**：信号在支路上按箭头指向，由一个节点流向另一个节点。
- **通路**：沿着支路的箭头方向而穿过各相连支路的途径
- **前向通路增益**：在前向通路中，各支路增益的乘积。



无限冲激响应（IIR）数字滤波器

- IIR滤波器的 N 阶差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

- IIR滤波器的传递函数一般可表示为

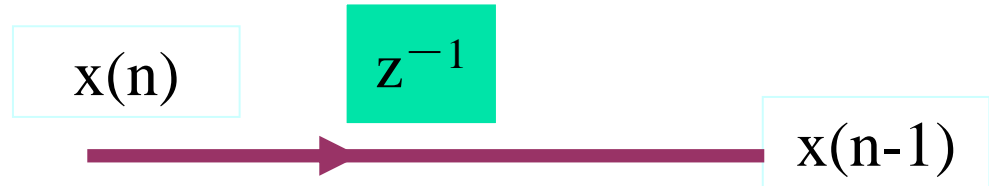
$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}, N > M$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

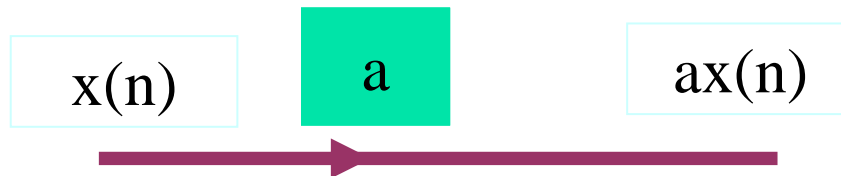
信号流图

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}, N > M$$

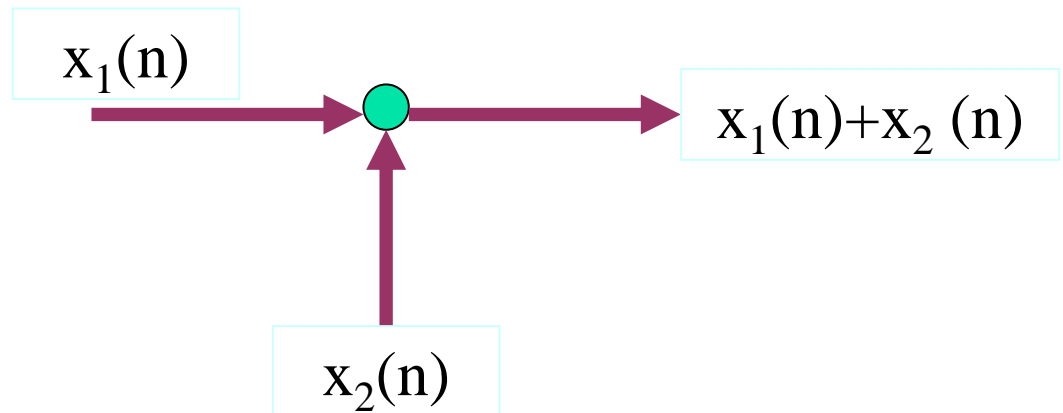
- 时延符号
(延时器)



- 常数乘符号
(标量乘法器)

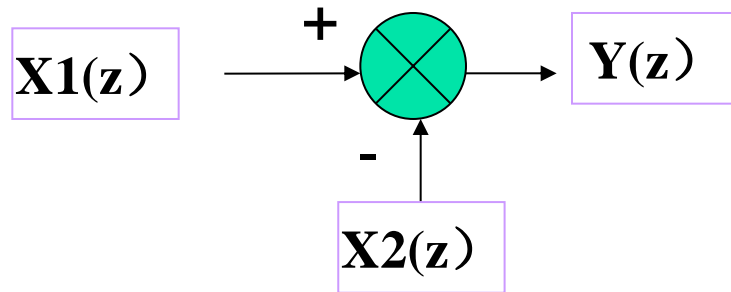


- 加法符号
(加法器)

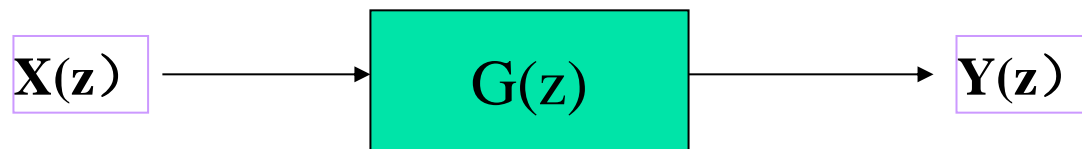


无限冲激响应（IIR）数字滤波器

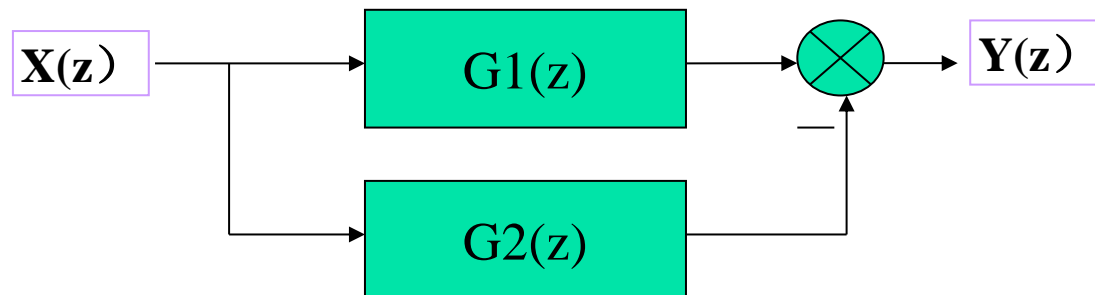
方块图



$$Y(z) = X1(z) - X2(z)$$



$$Y(z) = G(z)X(z)$$



$$Y(z) = G1(z)X(z) - G2(z)X(z)$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

（1）直接型

➤ 直接基于IIR的系统传递函数实现的

■ IIR滤波器的传递函数一般可表示为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}, N > M$$

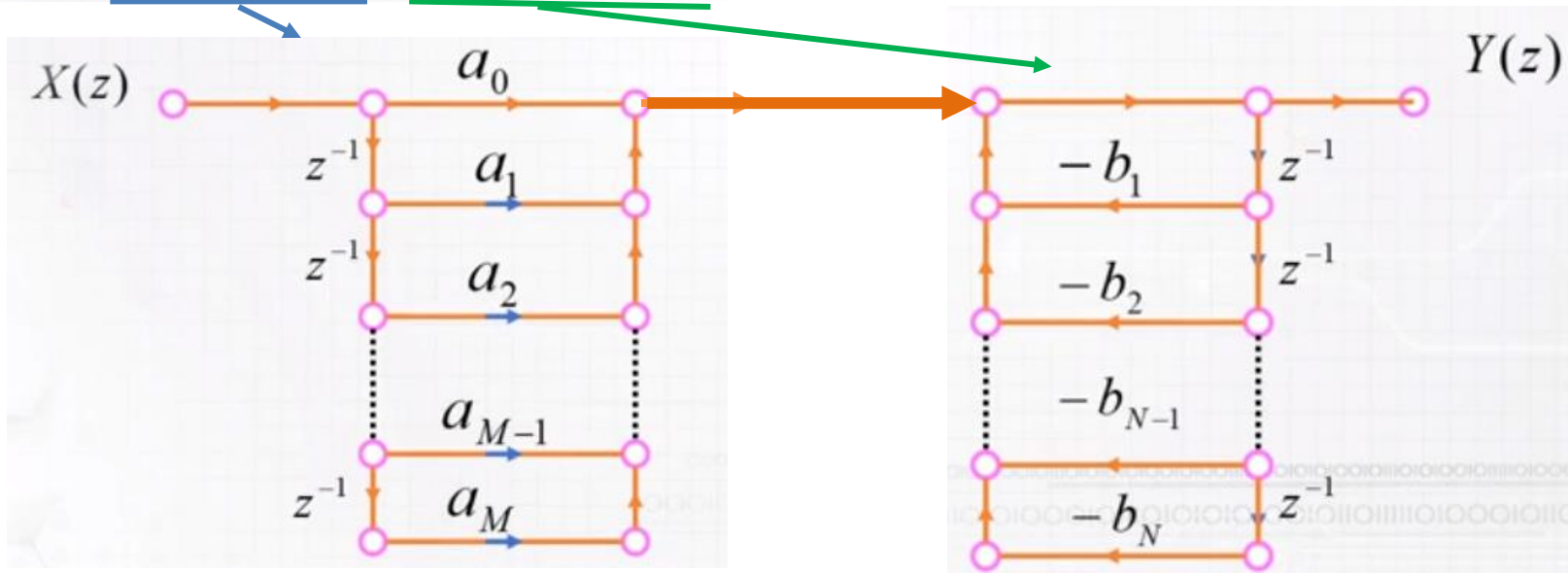
□特点：性能不易控制，系数 a_i 和 b_i 与 $H(z)$ 的零、极点的关系是隐含的，不便于调整；性能对系数的变化太敏感，容易造成系统不稳定

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

直接I型：总的网络由两部分网络联接组成，第一个网络实现零点，第二个网络实现极点

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$
$$Y(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} x(z) - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} Y(z)$$

(M+N) 个延时器
(M+N) 个加法器
(M+N+1) 个乘法器



无限冲激响应（IIR）数字滤波器

直接II型：先实现极点部分，后实现零点部分，其中的延时单元可以合并共用

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = \frac{W(z) \left[\sum_{i=0}^M a_i z^{-i} \right]}{W(z) \left[1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} \right]} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X(z) = W(z) \left[1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} \right] = W(z) + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} W(z)$$

$$Y(z) = W(z) \left[\sum_{i=0}^M a_i z^{-i} \right] = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} W(z)$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

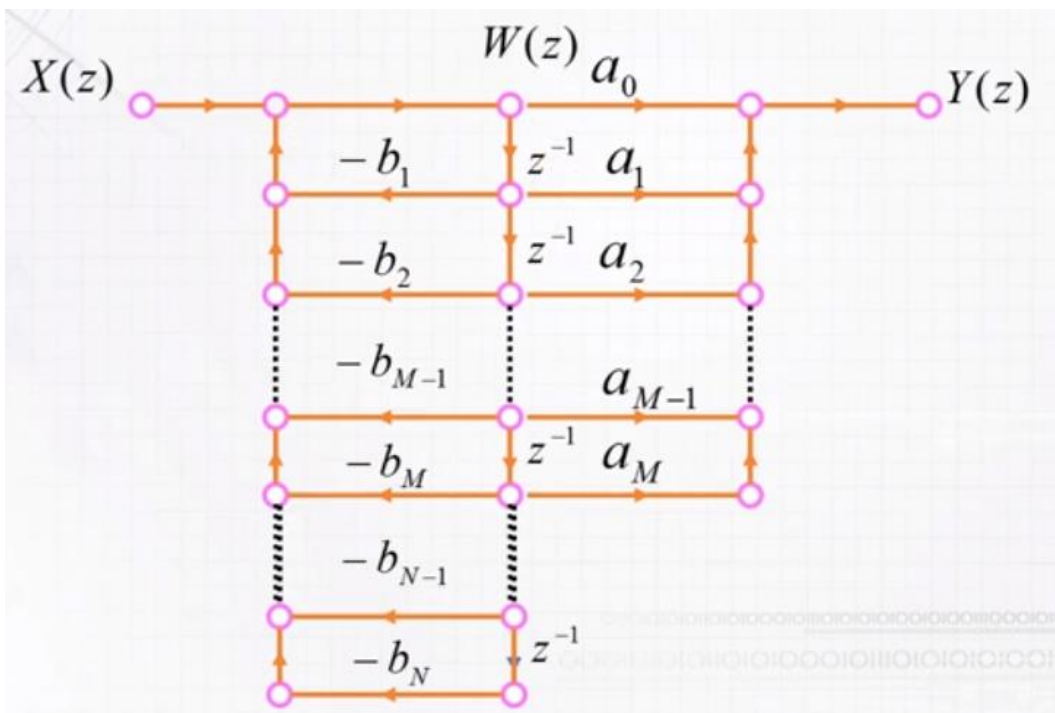
直接II型：先实现极点部分，后实现零点部分，其中的延时单元可以合并共用

$$X(z) = W(z) \left[1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} \right] = W(z) + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} W(z)$$
$$Y(z) = W(z) \left[\sum_{i=0}^M a_i z^{-i} \right] = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} W(z)$$

N个延时器

(M+N)个加法器

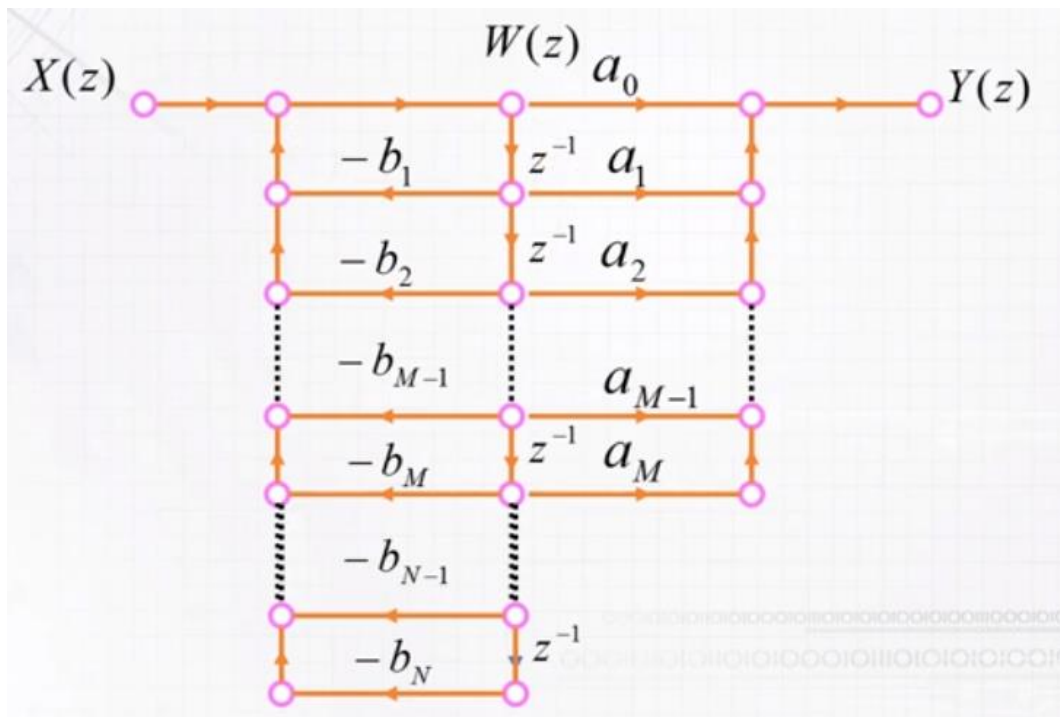
(M+N+1)个乘法器



比直接I型结构少了M个延时单元

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

（1）直接型

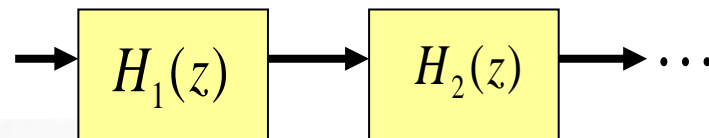


$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}, N > M$$

□特点：性能不易控制，系数 a_i 和 b_i 与 $H(z)$ 的零、极点的关系是隐含的，不便于调整；性能对系数的变化太敏感，容易造成系统不稳定

无限冲激响应 (IIR) 数字滤波器

(2)级联型 (串联型)



$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^{M_1} (1 + q_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{M_2} (1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2})}{\prod_{i=1}^{N_1} (1 + p_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 + \alpha_{1i} z^{-1} + \alpha_{2i} z^{-2})} = \underbrace{\prod_{i=1}^{N_1} H_{1i}(z)}_{\text{一阶IIR滤波器}} \times \underbrace{\prod_{i=1}^{N_2} H_{2i}(z)}_{\text{二阶IIR滤波器}}$$

拆解成一阶和二阶滤波器子系统进行串联

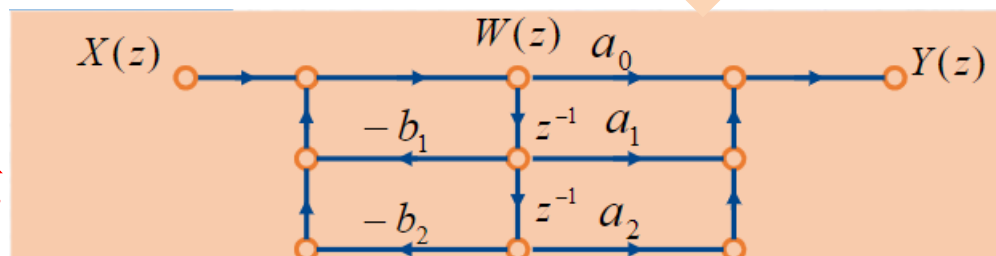
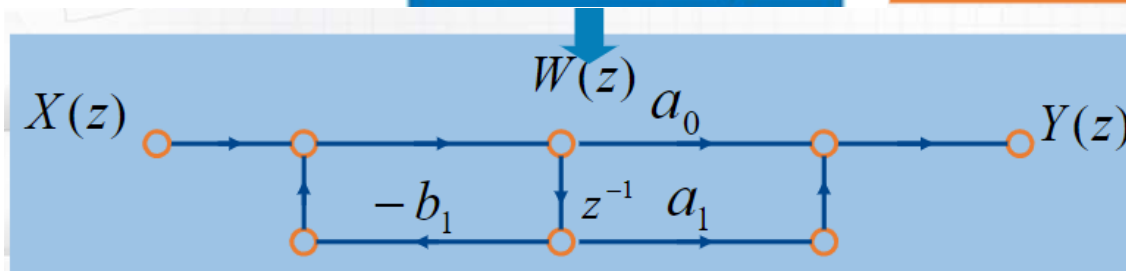
式中, $M = M_1 + 2M_2$; $N = N_1 + N_2$; A 是一个常数

一阶IIR滤波器

$$H_1(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

二阶IIR滤波器

$$H_2(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$



特点:

- 有利于调节需要控制的零、极点
- 零极点不同搭配可以配对成不同的一阶或二阶网络

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

例：求下列传递函数



$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{(1 - 0.2z^{-1} - 0.4z^{-2})(1 - 0.3z^{-1})(1 + 0.5z^{-1} + 0.6z^{-2})}$$

的信号流图(级联型)

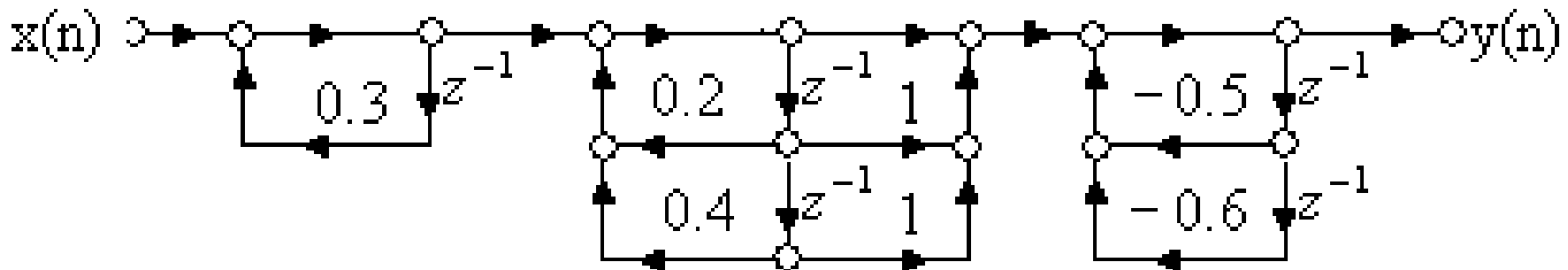
$$\begin{aligned} \text{解： } H(z) &= \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{(1 - 0.2z^{-1} - 0.4z^{-2})(1 - 0.3z^{-1})(1 + 0.5z^{-1} + 0.6z^{-2})} \\ &= \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} \cdot \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.4z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 + 0.5z^{-1} + 0.6z^{-2}} \\ &= H_1(z) H_{21}(z) H_{22}(z) \end{aligned}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

解: $H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}}$

$$H_{21}(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.4z^{-2}}$$

$$H_{22}(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1} + 0.6z^{-2}}$$



无限冲激响应（IIR）数字滤波器

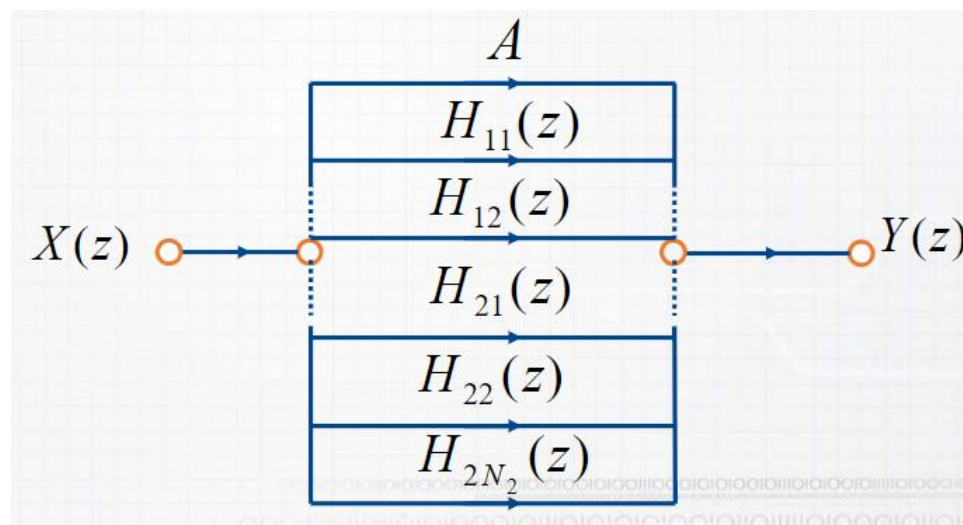
(3) 并联型

$$H(z) = A + \sum_{i=1}^{N_1} \frac{a_{1i}}{1 + b_{1i}z^{-1}} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{a_{2i} + c_{2i}z^{-1}}{1 + b_{2i}z^{-1} + d_{2i}z^{-2}}$$
$$= A + \sum_{i=1}^{N_1} H_{1i}(z) + \sum_{i=1}^{N_2} H_{2i}(z)$$

拆解成一阶和二阶滤波器子系统后进行并联

式中， $N = N_1 + N_2$ ； A 是一个常数； $H_{1i}(z)$ 对应一阶子系统； $H_{2i}(z)$ 对应二阶子系统

□ 特点：有利于调节需要控制的极点，但不能调节零点；每个子系统的误差互不影响



无限冲激响应 (IIR) 数字滤波器

例 4-13 求系统函数为

$$H(z) = \frac{8z^3 - 4z^2 + 11z - 2}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right)}$$

的并联型系统结构图。

解 为了实现并联型结构, 首先把 $H(z)$ 写成 z^{-1} 的展开式, 并应用部分分式展开的方法得

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})} = A + \frac{B}{1 - 0.25z^{-1}} + \frac{C + Dz^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

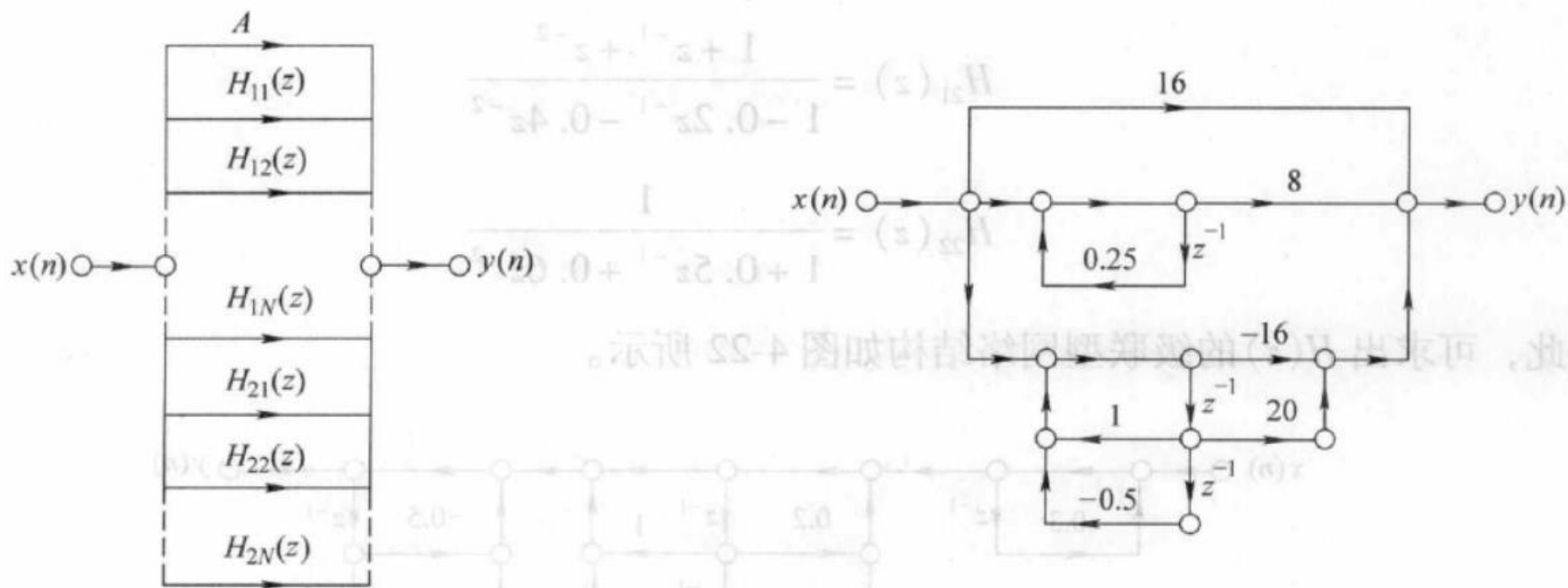
可求出 $A = 16$, $B = 8$, $C = -16$, $D = 20$ 。因此, $H(z)$ 可重写为

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - 0.25z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - 0.25z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

并联型 $H(z)$ 的结构如图 4-24 所示。



本章主要内容

➤ 滤波器概述

- ✓ 滤波概念及基本原理
- ✓ 滤波器的分类
- ✓ 滤波器的技术指标

➤ 模拟滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 巴特沃思（**Butterworth**）低通滤波器
- ✓ 切比雪夫（**Chebyshev**）低通滤波器
- ✓ 模拟滤波器频率变换

➤ 数字滤波器设计

- ✓ 概述
- ✓ 无限冲激响应（**IIR**）数字滤波器
- ✓ 有限冲激响应（**FIR**）数字滤波器

FIR数字滤波器（概述）

IIR数字滤波器的优点和缺点

- **优点：** 利用模拟滤波器设计的结果，设计简单方便，具有较好的幅频特性，特别是使用了双线性变换法避免了频谱混叠现象
- **缺点：** 系统函数包含零、极点，存在稳定性问题；同时相频特性一般情况下是非线性的

导致失真

有限冲激响应（FIR）数字滤波器

➤ 概述

- **FIR滤波器的线性相位**
- **窗函数设计法**
- **FIR滤波器的网络结构**

FIR数字滤波器（概述）

有限冲激响应FIR（Finite Impulse Response）滤波器

FIR滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 的时间序列长度有限的

$$h(n) = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + \cdots + b_N\delta(n-N)$$

因此，FIR滤波器的系统函数是 z^{-1} 的 $N+1$ 多项式

$$H(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}$$

➤ FIR滤波器优点：

- ✓ 系统函数只有单极点 $z=0$ ，在单位圆内，故该滤波器总是稳定的
- ✓ FIR数字滤波器可以具有严格的线性相频特性（但不全是）
- ✓ 能使用FFT实现，大大提高运算效率

➤ FIR滤波器缺点：

- ✓ 当充分逼近锐截止滤波器时，则要求有较长的脉冲响应序列 $h(n)$ ，也就是要求 N 值要大，导致运算量大大增加

FIR数字滤波器（概述）

1、FIR数字滤波器频率响应函数

- 设FIR滤波器的单位冲激响应为：

$$h(n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- 作Z变换，得到系统传递函数：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$H(z)$ 的 $(N-1)$ 个极点都在 $z=0$ 处

系统稳定

- 该滤波器的频率响应特性为：

$$H(\Omega) = H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\Omega n}$$

有限冲激响应（FIR）数字滤波器

- 概述
- **FIR滤波器的线性相位 ★**
- 窗函数设计法
- **FIR滤波器的网络结构**

FIR数字滤波器（线性相位）

2、线性相位概念

长度为 N 的FIR滤波器的单位脉冲响应信号 $h(n)$ 的频率响应函数 $H(\Omega)$ 表示为:

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)} = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\Omega n}$$

线性相位表示一个系统的相位特性与频率成正比，即

$$\varphi(\Omega) = -\tau\Omega$$

或

$$\varphi(\Omega) = \beta - \tau\Omega$$

其中， β ， τ 均为实常数， τ 为时间延迟

FIR数字滤波器（线性相位）

3、线性相位条件



➤ **FIR滤波器具有线性相位特性的条件**

如果FIR滤波器的单位冲激响应 $h(n)$ 为实数，而且满足以下任一条件：

偶对称： $h(n) = h(N-1-n), 0 \leq n \leq N-1$

奇对称： $h(n) = -h(N-1-n), 0 \leq n \leq N-1$

且对称中心在 $n = \frac{N-1}{2}$ ，说明该FIR滤波器具有线性相位特性

证明过程

长度为 N 的单位脉冲响应信号 $h(n)$ 的频率响应函数重新表示为

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\Omega} \quad (4-91)$$

线性相位表示一个系统的相频特性与频率成正比，即

$$\varphi(\Omega) = -\tau\Omega \quad \text{或} \quad \varphi(\Omega) = \beta - \tau\Omega \quad (4-92)$$

式中， β 和 τ 均为实常数。令式(4-92)的实部、虚部分别相等，则有

$$|H(\Omega)| \cos(\beta - \tau\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(n\Omega) \quad (4-93)$$

$$|H(\Omega)| \sin(\beta - \tau\Omega) = - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(n\Omega) \quad (4-94)$$

将式(4-93)和式(4-94)交叉相乘，并消去相同因子 $|H(\Omega)|$ ，得

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(n\Omega) \sin(\beta - \tau\Omega) = - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(n\Omega) \cos(\beta - \tau\Omega) \quad (4-95)$$

即

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\beta - (\tau - n)\Omega] = 0 \quad (4-96)$$

保证关于中心点为奇函数

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\beta - (\tau - n)\Omega] = 0 \quad (4-96)$$

有两种情况可使有限长序列 $h(n)$ 与 $\sin[\beta - (\tau - n)\Omega]$ 相乘后的 N 项和为 0，并由此得到 FIR 滤波器具有线性相位特性的条件：

$$1) \quad h(n) = h(N-1-n), \quad \tau = \frac{N-1}{2}, \quad \beta = 0 \quad (4-97)$$

$$2) \quad h(n) = -h(N-1-n), \quad \tau = \frac{N-1}{2}, \quad \beta = \pm \pi/2 \quad (4-98)$$

条件 1) 是滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 的偶对称条件，对称中心是 $n = \frac{N-1}{2}$ ，此时时间延迟 τ 等于 $h(n)$ 长度的一半，即 $\tau = \frac{N-1}{2}$ 个取样周期，此类 FIR 滤波器通常称为第一类线性相位滤波器。

条件 2) 是滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 的奇对称条件，对称中心仍是 $n = \frac{N-1}{2}$ ，时间延迟 τ 也仍然为 $\tau = \frac{N-1}{2}$ 个取样周期，但它存在 $\beta = \pm \pi/2$ 的初始相位，此类 FIR 滤波器通常称为第二类线性相位滤波器。

FIR数字滤波器（线性相位）

线性相位： $\varphi(\Omega) = \beta - \tau\Omega$

其中， β ， τ 均为实常数

3、线性相位条件



➤ FIR滤波器具有线性相位特性的条件

偶对称： $h(n) = h(N-1-n)$, $\tau = \frac{N-1}{2}$, $\beta = 0$

第一类线性
相位滤波器

奇对称： $h(n) = -h(N-1-n)$, $\tau = \frac{N-1}{2}$, $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$

对称中心在 $n = \frac{N-1}{2}$

第二类线性
相位滤波器

具体证明过程详见教材P293-294

例： 线性相位FIR低通滤波器的单位脉冲响应 $h(n) = \delta(n) + a\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + b\delta(n-4)$, 求 a, b 的值

解： 该FIR滤波器是线性相位滤波器，所以 $h(n)$ 需满足：

偶对称 $h(n) = h(N-1-n)$, $0 \leq n \leq N-1$

或

奇对称 $h(n) = -h(N-1-n)$, $0 \leq n \leq N-1$

对称中心在 $n = \frac{N-1}{2}$

由此得， $a=4, b=1$ (偶对称)或 $a=-4, b=-1$

FIR数字滤波器（概述）

FIR滤波器设计

- FIR数字滤波器的系统函数是关于 z^{-1} 的多项式（有限项），与模拟滤波器的系统函数没有对应关系，不能利用模拟滤波器的设计结果，采用直接设计法
- 其设计目标是根据设计要求的技术指标，得到理想滤波器的频率响应 $H_d(\Omega)$ ，再找出单位脉冲响应 $h(n)$ 为有限长的离散时间系统（数字滤波器），使其频率响应特性 $H(\Omega)$ 尽可能逼近 $H_d(\Omega)$
- 设计方法：**窗函数法**，模块法，频率抽样法，等波纹逼近法等

有限冲激响应（FIR）数字滤波器

- 概述
- **FIR滤波器的线性相位**
- **窗函数设计法**
- **FIR滤波器的网络结构**

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

窗函数法设计线性相位FIR数字滤波器

- FIR滤波器的窗函数法，又称为傅立叶级数法，其给定的设计指标一般为频域指标
- 如果技术指标要求的理想滤波器的频率响应为 $H_d(\Omega)$ 。根据DTFT，频率响应特性 $H_d(\Omega)$ 和对应的单位脉冲响应 $h_d(n)$ 满足以下关系：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$H_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\Omega n}$$

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

1、窗函数设计法原理

➤ **窗函数法**：用宽度为 N 的时域窗函数 $w(n)$ 乘以理想滤波器单位冲激响应 $h_d(n)$ （无限长），对无限长的单位冲激响应序列进行截断，构成FIR数字滤波器的单位脉冲响应序列

$h(n)$ ，即

$$h(n) = h_d(n) w(n)$$

➤ 可得FIR数字滤波器的频率响应特性为

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) w(n) e^{-jn\Omega}$$

由上式可知，实际设计滤波器的频率响应 $H(\Omega)$ 与技术指标要求的 $H_d(\Omega)$ 是有差别的，前者只是后者的逼近

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

1、窗函数设计法原理

$$h(n) = h_d(n) w(n)$$

- 常用的窗函数有矩形窗函数、三角窗函数、汉宁窗函数、汉明窗函数、布莱克曼窗函数和凯瑟窗函数等。窗函数形状和长度对系统性能指标影响很大

表 4-4 常用的窗函数表达式

窗函数名称	时域表达式 $w(n)$, $0 \leq n \leq N-1$
矩形窗	$r_N(n)$
汉宁 (Hanning) 窗	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right)$
汉明 (Hamming) 窗	$0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right)$
布莱克曼 (Blackman) 窗	$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}$
三角 (Bartlett) 窗	$\frac{2 \left(n - \frac{N-1}{2} \right)}{N-1}$
凯瑟 (Kaiser) 窗	$\frac{I_0 \left[a \sqrt{\left(\frac{N-1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{N-1}{2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[a \left(\frac{N-1}{2} \right) \right]}$

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

1、窗函数设计法原理

$$h(n) = h_d(n) w(n)$$

- 窗函数形状和长度对系统性能指标影响很大。
- 下表为五种窗函数特性及加权后响应滤波器达到的性能指标

表 4-5 五种窗函数特性比较

窗函数	主瓣宽度/(2 π /N)	最大旁瓣电平/dB	加权后相应滤波器指标	
			过渡带宽度 A	最小阻带衰减/dB
矩形窗	2	-13	0.9	-21
汉宁窗	4	-32	3.1	-44
汉明窗	4	-43	3.3	-53
布莱克曼窗	6	-58	5.5	-74
三角窗	4	-27	2.1	-25

$$\Delta\Omega = A \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N = A \frac{2\pi}{\Delta\Omega}$$

其中， $\Delta\Omega$ 为过渡带频率范围，为 $\Omega_s - \Omega_p$ ，
N为窗宽

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

2、窗函数设计线性相位FIR滤波器的一般步骤

- 1) 根据给定的技术指标，确定满足技术指标理想滤波器的频率响应特性 $H_d(\Omega)$
- 2) 根据DTFT反变换，由 $H_d(\Omega)$ 求出理想滤波器的单位脉冲响应 $h_d(n)$
- 3) 根据技术指标选择合适的窗函数，并根据线性相位的条件确定窗函数长度 N ：
 - ✓ 由阻带衰减率确定窗函数，由过渡带宽确定 N ， $\Delta\Omega$ 为过渡带频率范围， A 为过渡带宽度（查表4-5）

$$\Delta\Omega = A \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N = A \frac{2\pi}{\Delta\Omega}$$

- 4) 利用 $h(n) = h_d(n) w(n)$ ，求出FIR滤波器的单位冲激响应 $h(n)$ ；
- 5) 对 $h(n)$ 作Z变换，得到线性相位FIR滤波器的传递函数 $H(z)$

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

例： 设计一个线性相位FIR低通滤波器，该滤波器的截止频率为 Ω_c ，频率响应为

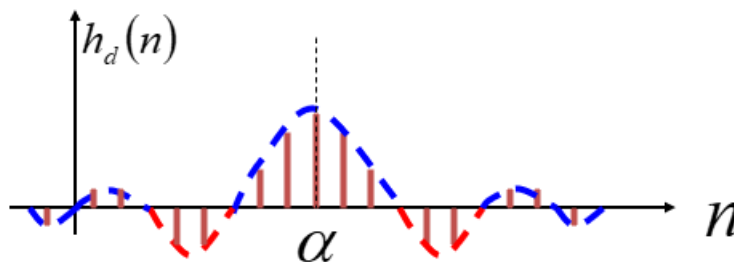
$$H_d(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\alpha\Omega} & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

解： 这实际上一个理想低通滤波器

(1) 滤波器的单位冲激响应为

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{-j\alpha\Omega} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\sin(\Omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

$h_d(n)$ 是一个以 α 为中心偶对称的无限长序列



解：(2) 设选择的窗函数为矩形窗

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 用窗函数 $w(n)$ 截取 $h_d(n)$ 在 $n=0$ 至 $n=N-1$ 的一段作为 $h(n)$

$$h(n) = h_d(n).w(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

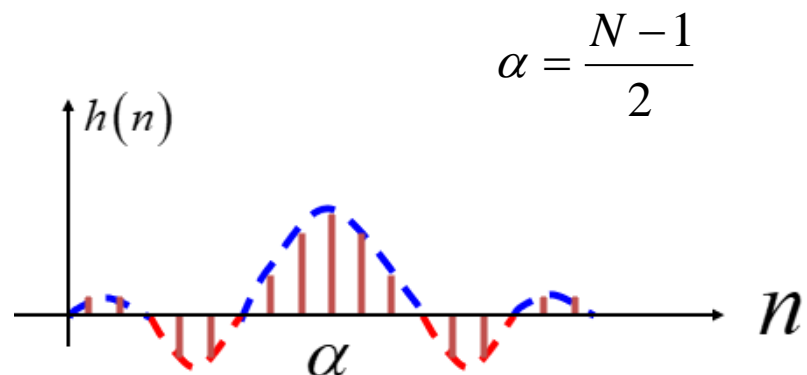
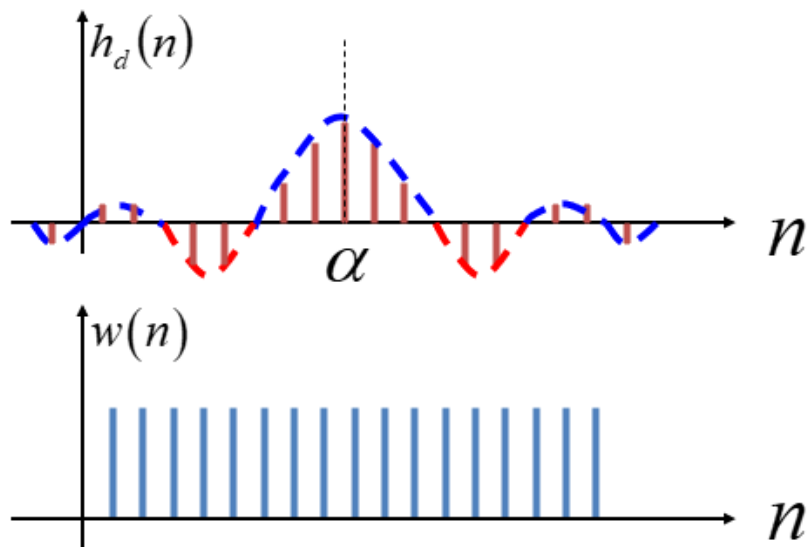
在截取时，必须保证满足线性相位的约束条件，即保证 $h(n)$

以 $\frac{N-1}{2}$ 偶对称，则必须要求

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

这样得到的 $h(n)$ 作为所设计的滤波器的单位脉冲响应

解： (3)



$h(n)$ 由 $h_d(n)$ 截断而得，所以是 $h_d(n)$ 的一个近似

(4) 再对 $h(n)$ 作 z 变换即可得到线性相位FIR滤波器的传递函数 $H(z)$ ，即

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

3、窗函数的影响

- 对于矩形窗函数，若 $H_d(\Omega)$ ， $H(\Omega)$ ， $W(\Omega)$ 分别为 $h_d(n)$ ， $h(n)$ ， $w(n)$ 的频率响应

根据 $h(n) = h_d(n)w(n)$

$$\text{得到 } H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} H_d(\Omega) * W(\Omega)$$

- 频响特性如右图所示，卷积后的幅频特性 $H(\Omega)$ 在 Ω_c 有很大的波动，称为**吉布斯效应**

- 吉布斯效应使过渡带变宽，阻带特性变坏

- 可采用其他形式的窗函数，如汉宁窗函数或凯瑟窗函数，改善 $H(\Omega)$ 特性

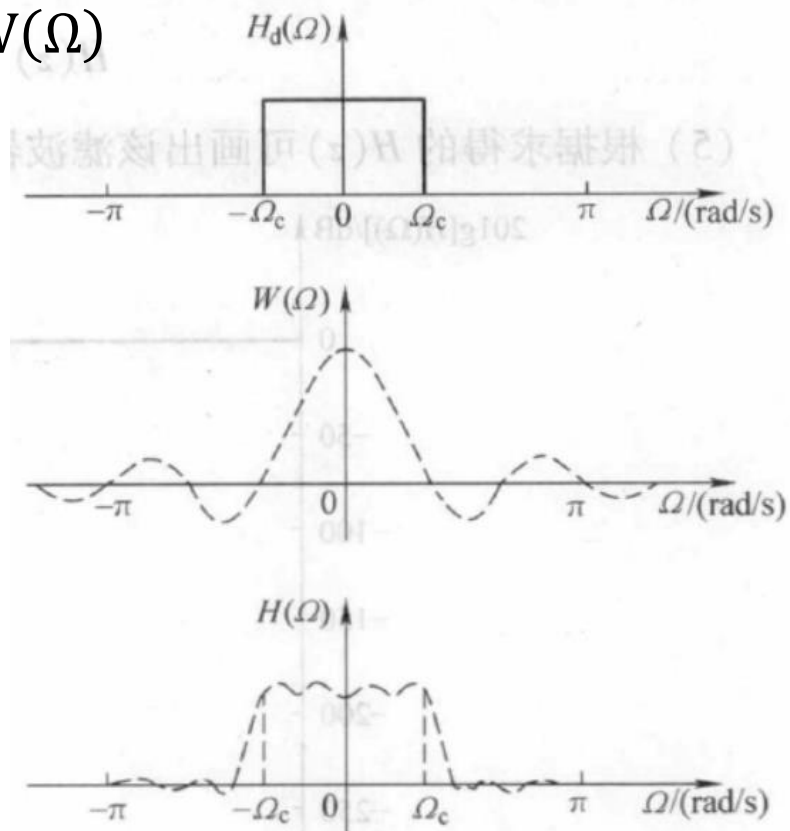


图 4-26 选择矩形窗时 $H_d(\Omega)$ 、 $H(\Omega)$ 和 $W(\Omega)$ 之间的关系

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

例 4-15 用窗函数法设计一个线性相位 FIR 低通滤波器，其技术指标为

当 $0 \leq \Omega \leq 0.3\pi \text{rad}$ 时，通带允许起伏 1dB ($\Omega_p = 0.3\pi \text{rad}$)

当 $0.5\pi \text{rad} \leq \Omega \leq \pi \text{rad}$ 时，阻带衰减 $\alpha_s \leq -50\text{dB}$ ($\Omega_s = 0.5\pi \text{rad}$)

解 用窗函数法设计时，截止频率不易准确控制，近似取理想低通滤波器的截止频率为

$$\Omega_c \approx \frac{1}{2}(\Omega_p + \Omega_s) = 0.4\pi \text{rad}$$

(1) 由例 4-14 可知，理想低通滤波器的单位脉冲响应为

$$h_d(n) = \frac{\sin[0.4\pi(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)} \quad \text{其中 } \alpha \text{ 为序列中心}$$

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

(2) 确定窗函数形状及滤波器长度 N 。

由于阻带衰减小于 -50dB ，查表 4-5 选择汉明窗。根据表中给出汉明窗的过渡带宽度计算出滤波器长度 N 为

$$\Delta\Omega = A \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N = A \frac{2\pi}{\Delta\Omega}$$

$$N = 3.3 \times \frac{2\pi}{\Omega_s - \Omega_p} = 3.3 \times \frac{2\pi}{0.5\pi - 0.3\pi} = 33$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 16$$

(3) 所设计滤波器的单位冲激响应为

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \frac{\sin[0.4\pi(n-16)]}{\pi(n-16)} \left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{n\pi}{16}\right) \right]$$

其中查表 4-4 得到汉明窗 $w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{\pi n}{16}\right)$ 。

FIR数字滤波器（窗函数设计法）

(4) 由上式可计算出 FIR 低通滤波器单位脉冲响应 $h_d(n)$ 截短后的序列 $h(n)$, $n=0 \sim 32$ 。对 $h(n)$ 按下式求 Z 变换即可得到所设计数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

(5) 根据求得的 $H(z)$ 可画出该滤波器的频率特性，如图 4-27 所示。

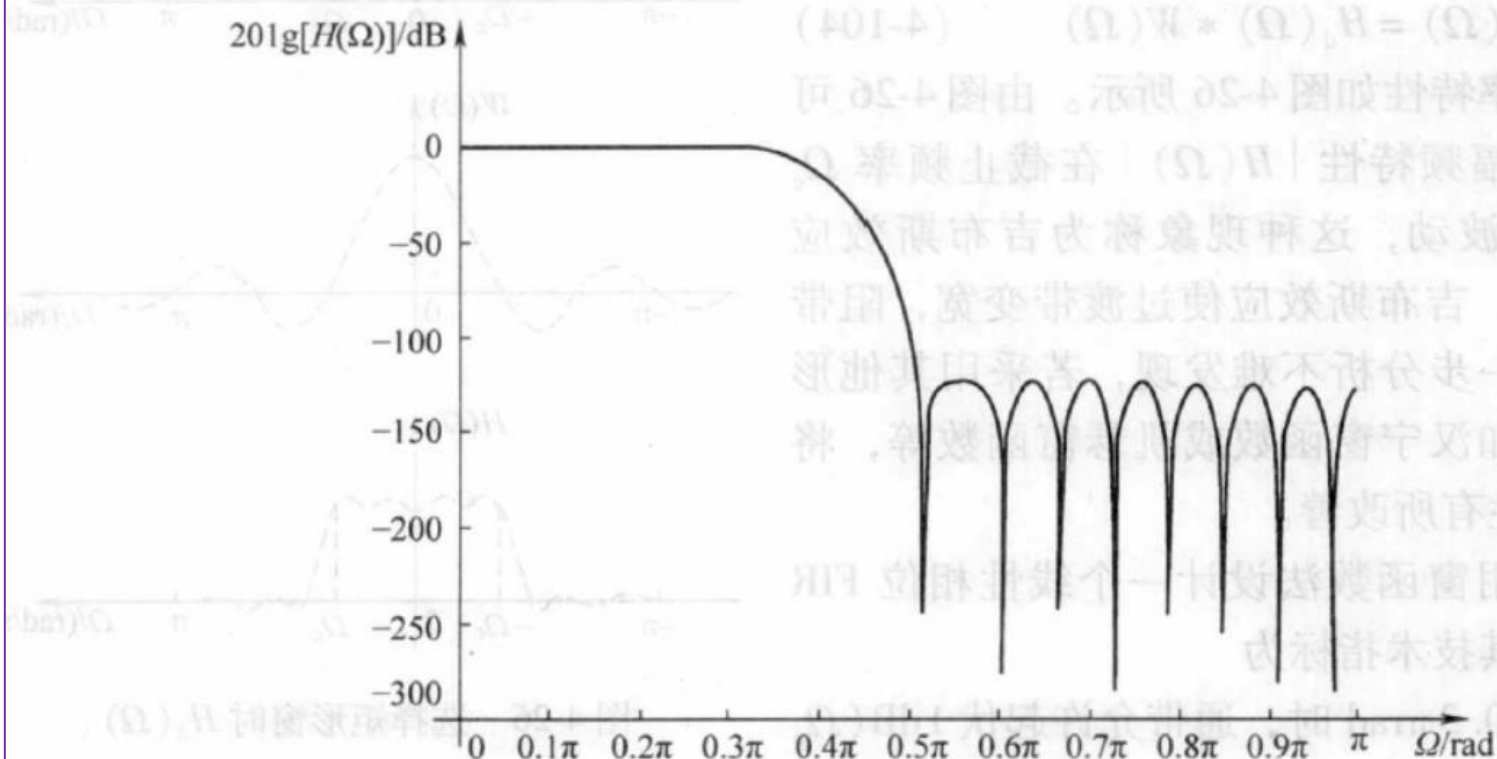


图 4-27 例 4-15 低通滤波器的频率特性

有限冲激响应（FIR）数字滤波器

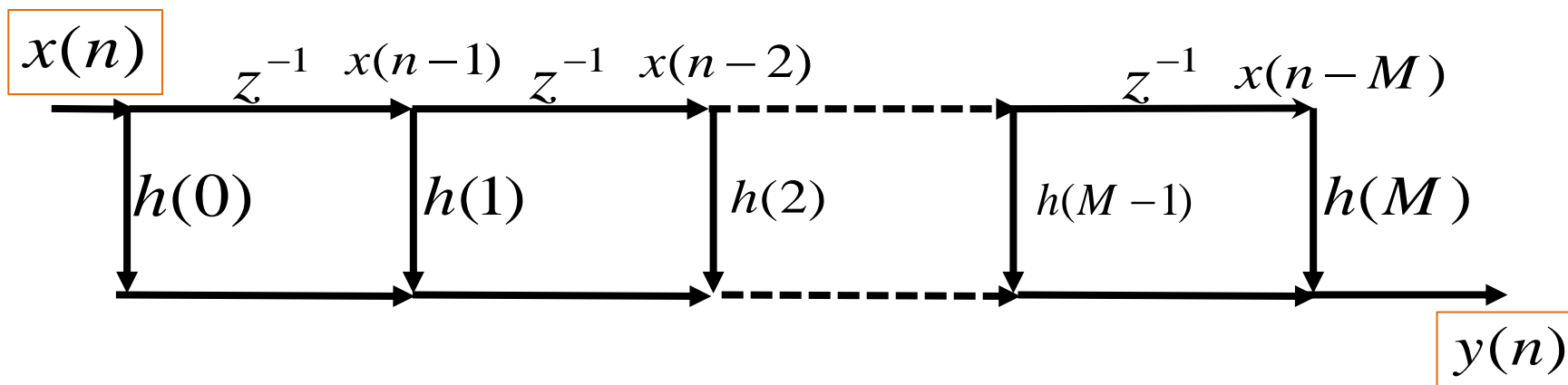
- 概述
- FIR滤波器的线性相位
- 窗函数设计法
- FIR滤波器的网络结构

FIR数字滤波器（网络结构）

1、直接型

又称为横截型或卷积型，由系统函数定义式直接得到，即按下式乘法和加法获得。

$$y(n) = \sum_{r=0}^M h(r)x(n-r) \quad H(z) = \sum_{r=0}^M h(n)z^{-r}$$



FIR数字滤波器（网络结构）

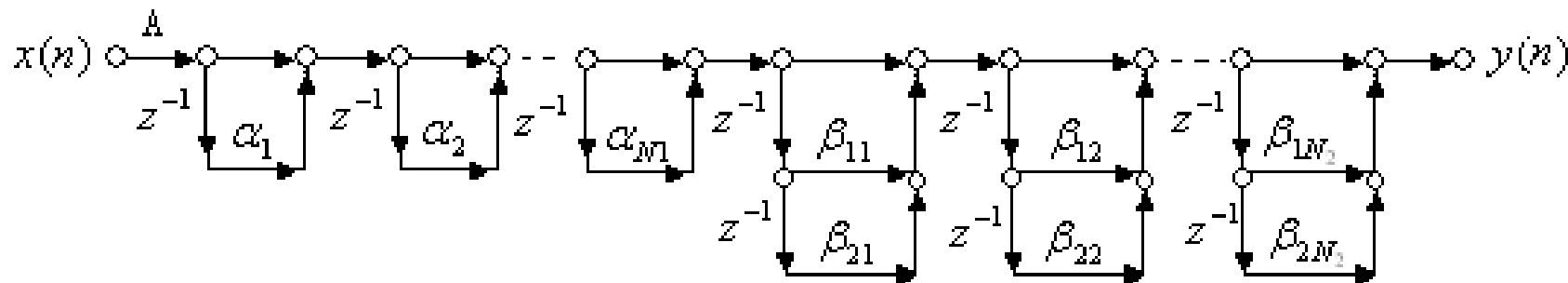
2、级联型

若 $h(n)$ 均为实数，则 $H(z)$ 可分解为若干个实系数的一阶和二阶因子的乘积形式

$$H(z) = A \prod_{i=1}^{N_1} H_{1i}(z) \prod_{i=1}^{N_2} H_{2i}(z)$$

$$= A \prod_{i=1}^{N_1} (1 + \alpha_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2})$$

其中， $N = N_1 + 2N_2$ ； A 为常数； α_i 为一阶因子的系数，对应决定一阶因子的零点； β_{1i} 和 β_{2i} 为二阶因子的系数，对应决定一堆共轭复数的零点



FIR数字滤波器（网络结构）

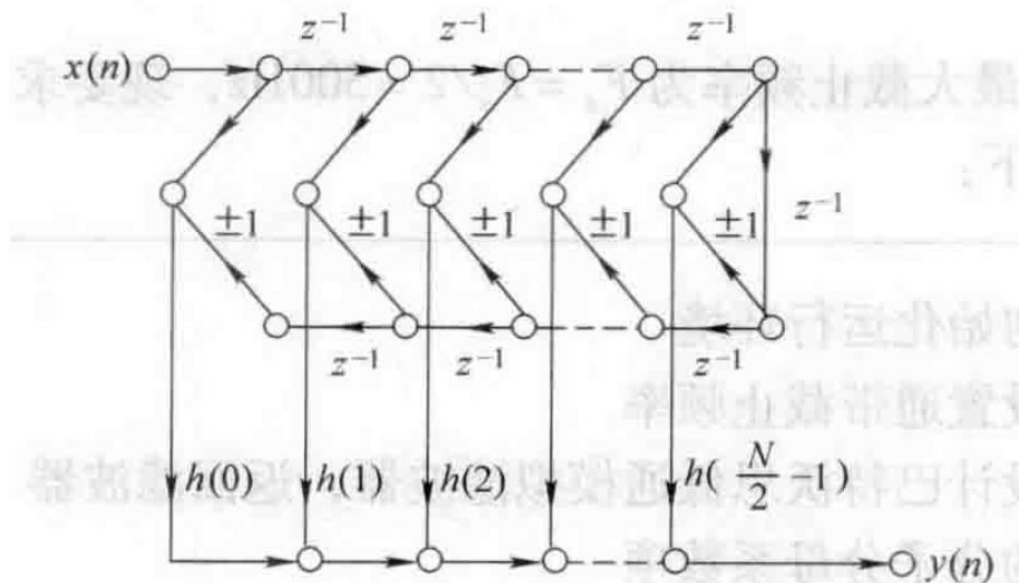
3、线性相位型

线性相位FIR滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 具有对称性，

满足以下条件： $h(n) = \pm h(N-1-n)$ 对称中心为 $n = \frac{N-1}{2}$

当**N为偶数**时，其系统函数可以简化为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n) (z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)})$$



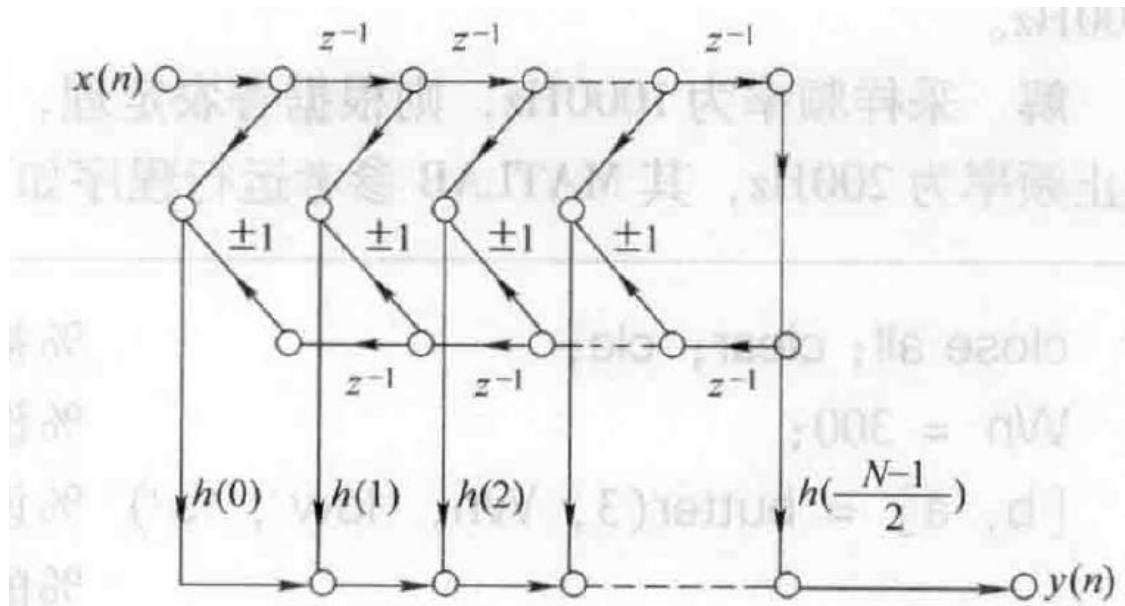
FIR数字滤波器（网络结构）

3、线性相位型

线性相位FIR滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 具有对称性，满足以下条件： $h(n) = \pm h(N-1-n)$

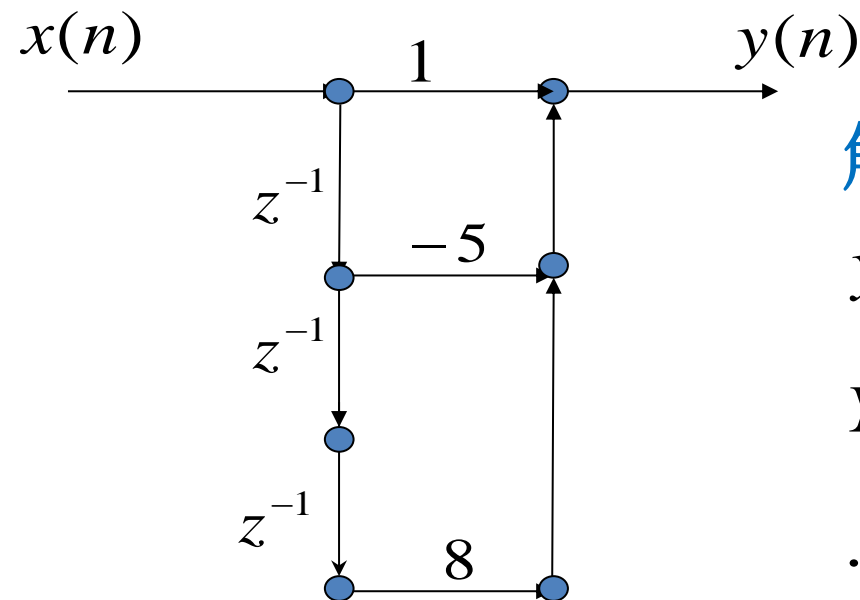
当**N为奇数**时，其系统函数可以简化为

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} h(n)(z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}) + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}$$



FIR数字滤波器（网络结构）

例：由下列差分方程求出网络结构，并求其系统函数 $H(z)$ 和单位冲激响应 $h(n)$



解：

$$y(n) = x(n) - 5x(n-1) + 8x(n-3)$$

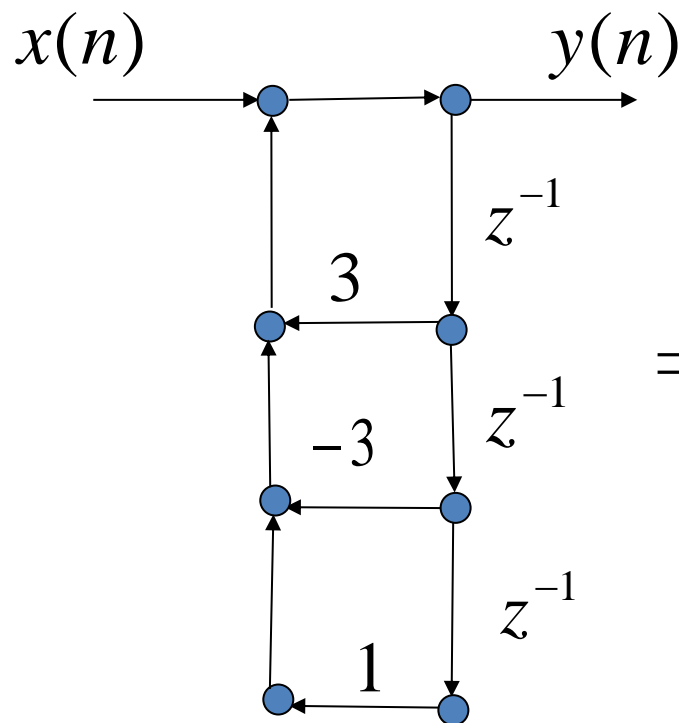
$$Y(z) = (1 - 5z^{-1} + 8z^{-3})X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - 5z^{-1} + 8z^{-3}$$

$$\Rightarrow h(n) = \delta(n) - 5\delta(n-1) + 8\delta(n-3)$$

FIR数字滤波器（网络结构）

例：由下列差分方程求出网络结构，并求其系统函数 $H(z)$ 和单位冲激响应 $h(n)$



解：

$$y(n) = x(n) + 3y(n-1) - 3y(n-2) + y(n-3)$$

$$\Rightarrow y(n) - 3y(n-1) + 3y(n-2) - y(n-3) = x(n)$$

$$Y(z) = X(z) + 3z^{-1}Y(z) - 3z^{-2}Y(z) + z^{-3}Y(z)$$

$$\Rightarrow (1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3})Y(z) = X(z)$$

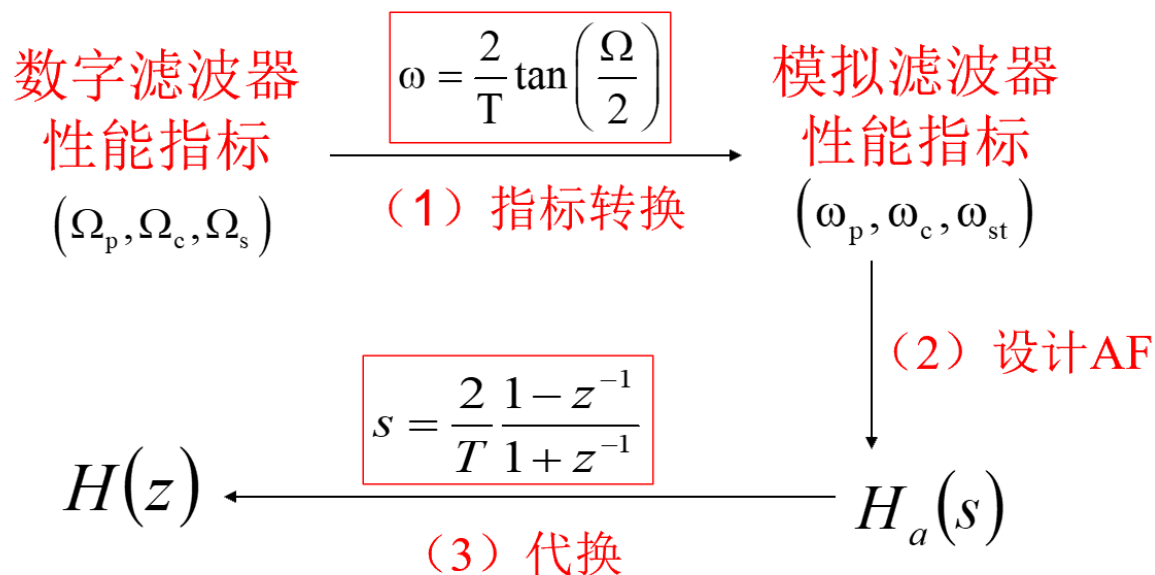
$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^3}$$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)u(n)$$

1209复习要点

➤ 重点掌握IIR数字滤波器的原理和设计方法

✓ 双线性变换法（优点：避免频率响应混叠；缺点：非线性相位）



注意：如果是用查表法，得到的是模拟滤波器的归一化系统函数，需要先做反归一化，才能得到系统的实际传递函数 $H_a(s)$

复习要点1209

➤ 掌握数字滤波器的信号流图（信号框图）

- ✓ 已知系统函数画出信号流图（**IIR**：直接型、级联型和并联型，**FIR**：直接型、级联型、线性相位型）
- ✓ 已知信号框图/信号流图得到滤波器系统传递函数

➤ 深入理解并掌握**FIR**线性相位的条件

- ✓ $h(n)$ 为实数且满足奇对称/偶对称条件（对称中心为 $(N-1)/2$ ）

➤ 重点掌握窗函数法设计**FIR**滤波器的步骤

- ✓ 了解几种常见窗函数
- ✓ 掌握利用窗函数法设计**FIR**滤波器的一般步骤
- ✓ 了解FIR滤波器的网络结构（特别是线性相位型）

1209课后作业

第四章习题 P319

11(用双线性变换法)、 12（用双线性变换法）、 15、 16、 17、 18

14. 用双线性变换法设计巴特沃斯低通数字滤波器，要求3dB截止频率为25Hz，并当频率大于50Hz至少衰减15dB，采样频率为200Hz