杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2021 年 6 月 28 日	成绩	
课程号	A0714202	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一 1-8	二 9-12	三 13-16	四 17-20	五 21	六 22
得分						

得分	

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 母线平行于 y 轴，且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=2\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程是（ A ）.

(A) $3x^2+2z^2=2$　(B) $x^2+2y^2=2$　(C) $3y^2-z^2=2$　(D) $3y^2+z^2=2$

2. 设 $u=2xy-z^2$，则 u 在 $(1,-1,1)$ 处的方向导数的最大值为（ C ）.

(A) $2\sqrt{6}$　(B) 4　(C) $2\sqrt{3}$　(D) $2\sqrt{2}$

3. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，则点 P 的坐标为（ B ）.

(A) $(1,-1,2)$　(B) $(1,1,2)$　(C) $(-1,1,2)$　(D) $(-1,-1,2)$

4. 设 $I_1=\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint_D \sin(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则下列关系正确的是（ B ）.

(A) $I_3>I_2>I_1$　(B) $I_1>I_2>I_3$　(C) $I_2>I_1>I_3$　(D) $I_3>I_1>I_2$

5. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则曲线积分 $\oint_L x^2\,\mathrm{d}s=$（ B ）.

(A) 0　(B) π　(C) 2π　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

6. 设曲面 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，曲面 Σ_1 为曲面 Σ 在第一卦限中的部分，则有（ C ）.

(A) $\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$　(B) $\iint_\Sigma y\,\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1} y\,\mathrm{d}S$

(C) $\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$　(D) $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S$

7. 下列级数发散的是（ D ）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$　(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln 3n}$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n}$

8. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=5$ 处（ C ）.

(A) 发散　(B) 条件收敛　(C) 绝对收敛　(D) 收敛性不确定

得分	

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9. 向量 $\overrightarrow{a}=(3,5,2)$ 在向量 $\overrightarrow{b}=(2,1,2)$ 上的投影为＿＿5＿＿.

10. 交换二次积分的积分次序 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

11. 若曲线积分 $\int_L\dfrac{x\,\mathrm{d}x-ay\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2-2}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$＿＿-1＿＿.

12. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[0,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\pi-x$，则其正弦级数在 $x=\dfrac{2021}{2}\pi$ 处收敛于＿＿$\dfrac{\pi}{2}$＿＿.

得分	

三、简单计算题（共4小题，每题6分，共24分）

13．已知空间直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与 $L_2:x+1=y-1=z$ 相交于一点，求λ的值.

L_1的参数方程：$\begin{cases}x=1+t\\ y=-1+2t\\ z=1+\lambda t\end{cases}$，代入 L_2，得 $\lambda=\dfrac{5}{4}$.

说明：1. 参数方程3分，代入求值3分；

2. 写出 L_2 的参数方程，代入直线 L_1 求解，给分标准一样；

3. 两直线方程联立方程组求解也可以，联立方程组3分，求方程组3分；

4. 分别写出两条直线的参数方程，再对应未知量相等求解，写出参数方程3分，求解3分.

14．求函数 $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ 的极值，并说明是极大值还是极小值.

令 $\begin{cases}f_x=3y-3x^2=0\\ f_y=3x-3y^2=0\end{cases}\Rightarrow$ 驻点$(0,0)$和$(1,1)$

$A=f_{xx}=-6x$，$B=f_{xy}=3$，$C=f_{yy}=-6y$

$(0,0)$处，$AC-B^2<0$，所以不是极值点；

$(1,1)$处，$A=-6<0, AC-B^2>0$，所以是极大值点，且$f(1,1)=1$为极大值.

说明：1. 求驻点2分，判断驻点是否为极值点4分；

2. 三个二阶偏导数1分；

3. 判断驻点是，或不是极值点各1分，求出极大值1分；

15. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$,其中$\Omega$由抛物面$x^2+y^2=z$与平面$z=1$围成的闭区域.

积分$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi}{6}$.

(或柱面坐标)积分$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{1}\rho^2\mathrm{d}z=\cdots=\dfrac{\pi}{6}$.

(或"先二后一")积分$=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi}{6}$.

说明：1. 不管哪种方法，第一个等式3分，计算过程2分，答案1分；

2. 第一步个别积分限写错，小组自己讨论决定.

16. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $0\le z\le 1$ 的那部分.

曲面方程：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\mathrm{d}S=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$

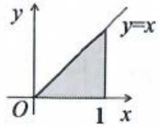
所以积分$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

说明：1. 化为二重积分表达式3分，计算过程2分，答案1分；

2. 如果二重积分表达式错误，有面积元素表达式式子1分，投影区域表示式1分.

得分	

四、计算题（共4小题，每题7分，共28分）



17. 计算二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_y^1 \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

方法一（交换积分次序）：积分 $= \iint_D \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^x \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{4-\pi}{8}$.

交换积分次序4分，计算2分，答案1分；如果交换积分次序错误，有这个思想得2分.

方法二（直接计算）：

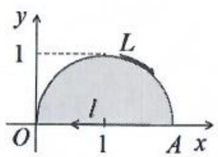
积分 $= \int_0^1 y(\frac{\pi}{4} - \arctan y)\,\mathrm{d}\,y = \frac{\pi}{4}\int_0^1 y\,\mathrm{d}\,y - \int_0^1 y\arctan y\,\mathrm{d}\,y = \frac{4-\pi}{8}$.

第一个等式3分，后面计算4分.

18. 计算曲线积分 $\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - 2y)\,\mathrm{d}\,x + (\mathrm{e}^x \cos y - 2)\,\mathrm{d}\,y$，其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$ 的一段弧.

令 $P = \mathrm{e}^x \sin y - 2y, Q = \mathrm{e}^x \cos y - 2; \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y, \frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{e}^x \cos y - 2;$

添加曲线 $l: y = 0, x: 2 \to 0$，则由格林公式得



$\oint_{(L\cup l)^-} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_D 2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \pi$,

$\int_l P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y = 0$,

$\Rightarrow \int_L = \int_{L\cup l} - \int_l = -\int_{(L\cup l)^-} - \int_l = -\pi$.

说明：1. 添加曲面1分；格林公式包括二重积分的计算3分；
2. 曲线 l 上的曲线积分计算2分，结论1分.
3. 格林公式算错，则两偏导数求对1分，格林公式写出来1分

19. 设 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

令 $F = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$，则 $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z - 4$,

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{x}{2-z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{y}{2-z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-x(-\frac{\partial z}{\partial y})}{(2-z)^2} = \frac{xy}{(2-z)^3}$$

说明：1. 两个一阶偏导数各2分，二阶偏导数3分；

2. 若一阶偏导数求错，则隐函数求导公式正确2分（不累加），二阶导数的求导运算法则正确2分。

20. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n})x^n$ 的收敛域及和函数.

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n})x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$　　1分

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{x}{3-x}$，收敛域 $(-3,3)$　　2分

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^x \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}\,x = -\ln(1-x)$，收敛域 $[-1,1)$　2分

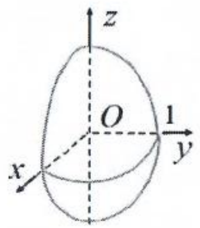
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n})x^n$ 的收敛域：$[-1,1)$；和函数表达式 $s(x) = \frac{x}{3-x} - \ln(1-x)$　　2分

说明：1. 通过求收敛半径求收敛域，收敛半径1分，两段点处判断各一分；
2. 第一个和函数表达式1分，第二个和函数表达式2分；
3. 结论1分.

得分	

五、计算题（本题8分）

21. 计算 $\iint_{\Sigma}(z-1)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(xy+1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=1$外侧在 $x\geq 0, y\geq 0$的部分.



补面 $\Sigma_1: y=0$,左侧； $\Sigma_2: x=0$,后侧； 1分

则 $\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}(z-1)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(xy+1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=\iiint_{\Omega}x\,\mathrm{d}v$ $\left(=\iiint_{\Omega}(z+x)\,\mathrm{d}v\right)$ 2分

方法一（球面坐标）$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\sin\varphi\cos\theta\, r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\cdots=\frac{\pi}{8}$,

方法二（柱面坐标）$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\cos\theta\,\mathrm{d}z=\cdots=\frac{\pi}{8}$, 2分

$\iint_{\Sigma_1}=\iint_{\Sigma_1}1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=-\iint_{D_{zx}}1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$, $\iint_{\Sigma_2}=0$ 2分

$\iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{8}\pi$ 1分

方法三.(先二后一) $=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\iint_{D_x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1 x\cdot\frac{\pi}{2}(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$

说明：1. 只补一个面（包括侧的说明）也给1分

2. 只写出高斯公式，也给2分

或直接计算 原式 $=-\frac{\pi}{3}+\frac{5}{8}\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{8}\pi$

得分	

六、证明题（本题4分）

22. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且导函数 $f'(x)$ 有界，证明：

（1）级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})\right]$绝对收敛；

（2）$\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})$存在.

证明：（1）因为$f'(x)$在区间 $(0,1)$ 内有界，所以存在 $M>0$，使得 $\forall x\in(0,1)$ 有 $|f'(x)|\leq M$. 由拉格朗日中值定理，对任意正整数 n，存在 $\xi_n\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$，使得

$$\left|f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})\right|=|f'(\xi_n)|(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\leq\frac{M}{n(n+1)}$$

由比较审敛法得，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})\right]$绝对收敛；

（2）级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})\right]$绝对收敛，所以收敛，从而部分和数列收敛，

而

$$s_n=f(1)-f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{3})+\cdots+f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})=f(1)-f(\frac{1}{n+1})$$

所以 $\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n+1})=\lim_{n\to\infty}[s_n-f(1)]$存在.

说明：1. 每个小题各2分；

2. 第一问，有拉格朗日中值定理思想得1分；

3. 第二问，部分和表达式写出来1分.