第二章 连续信号的分析

方璐 2教322
杭州电子科技大学 自动化学院

第二章 连续信号的分析

2.1 连续信号的时域描述和分析

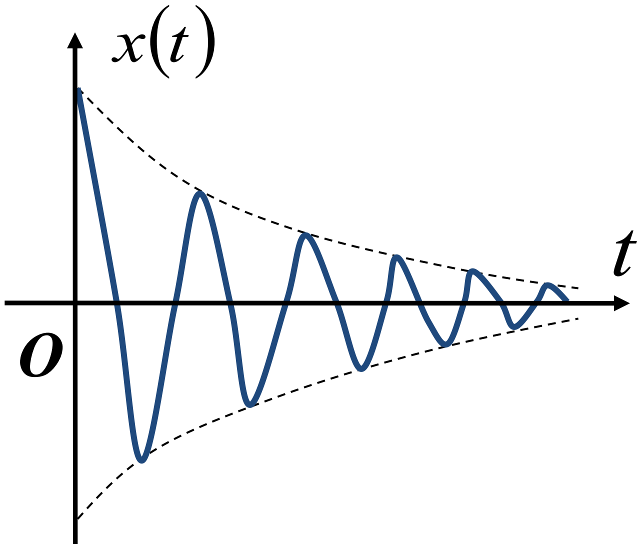
2.2 连续信号的频域分析

2.3 连续信号的复频域分析

*2.4 信号的相关分析

2.1 连续信号的时域描述和分析

- 信号的时域描述
  - 信号取值随时间的变化关系;
  - 直观地反映信号的时间历程;
  - 不能反映信号的频率结构;
  - 用于简单信号的描述.
  - 推广:



信号取值随其它连续变量的关系，如:

表面粗糙度随测量长度的变化;

导线电阻随导线长度的变化;

热变形大小随温度的变化。

2.1 连续信号的时域描述和分析

一、时域描述 →
- 普通信号的时域描述
- 奇异信号的时域描述

二、时域计算 →
- 基本运算
- 叠加和相乘
- 微分和积分
- 卷积运算

三、信号分解 →
- 分解成冲激函数之和
- 正交分解

2.1 连续信号的时域描述和分析

一、时域描述

1. 普通信号的时域描述

- 正弦信号
- 指数信号

2. 奇异信号的描述

- 单位斜坡信号
- 单位阶跃信号
- 单位冲激信号

一、时域描述—普通信号的时域描述

- **正弦信号**

表达式： $f(t)=A\sin(\omega t+\theta)$

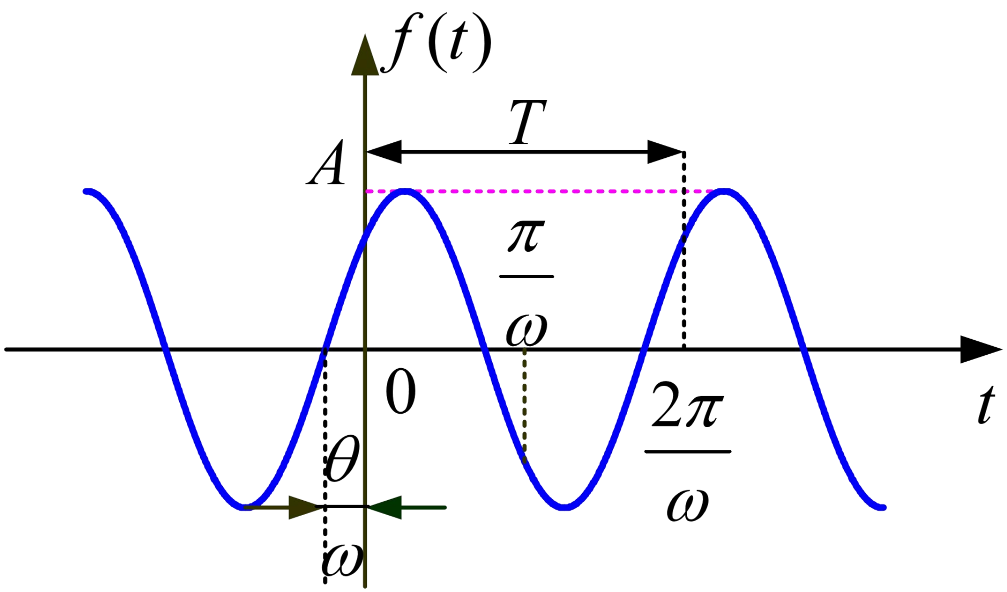
振幅： A

初相： θ

频率： f

周期： $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{1}{f}$

角频率： $\omega=2\pi f$



一、时域描述—普通信号的时域描述

➢ 正弦信号的性质

1）正弦信号的微、积分仍为正弦信号。

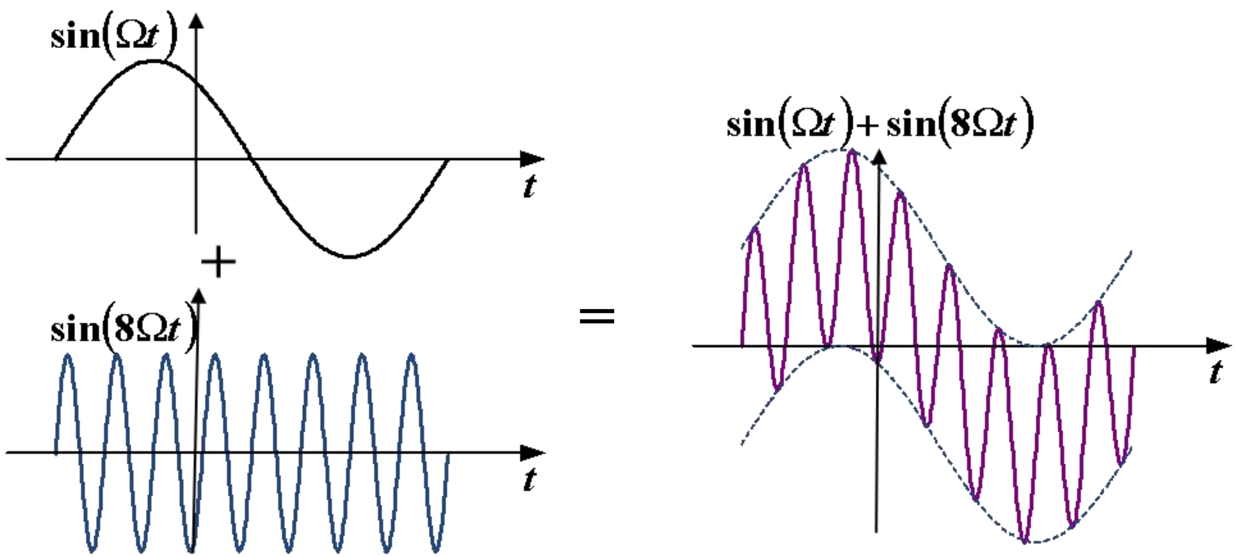
2）两个同频正弦信号相加，仍得同频信号，且频率不变，幅值和相位改变。

3）频率比为整数的正弦信号合成为非正弦周期信号，以低频（基频f_0）为基频，叠加一个高频(nf_0)分量。

4）复杂周期信号可以分解成（无穷）多个正弦信号的线性组合。

一、时域描述—普通信号的时域描述

➢ 正弦信号的性质



一、时域描述—普通信号的时域描述

➤ 指数信号

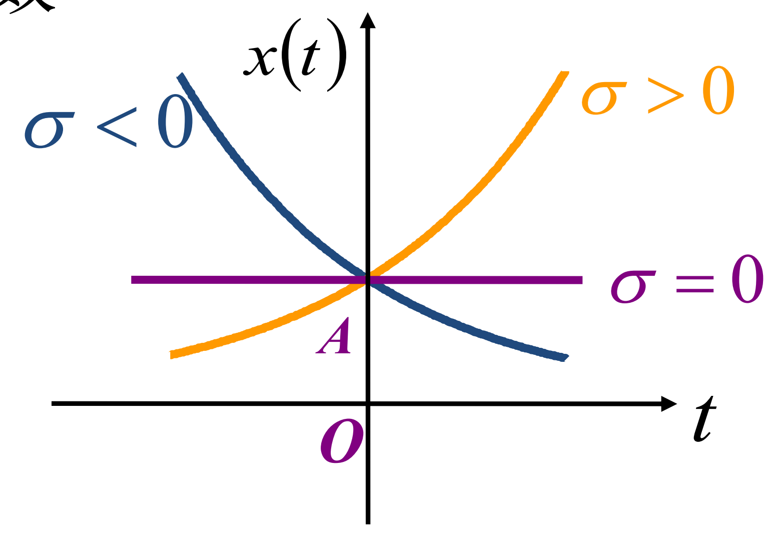
$x(t) = A\mathrm{e}^{st}, s = \sigma + j\omega$为复数

当$\omega = 0$时，为实指数信号

$\sigma = 0, \omega = 0$　　直流信号

$\sigma < 0, \omega = 0$　　指数衰减

$\sigma > 0, \omega = 0$　　指数增长



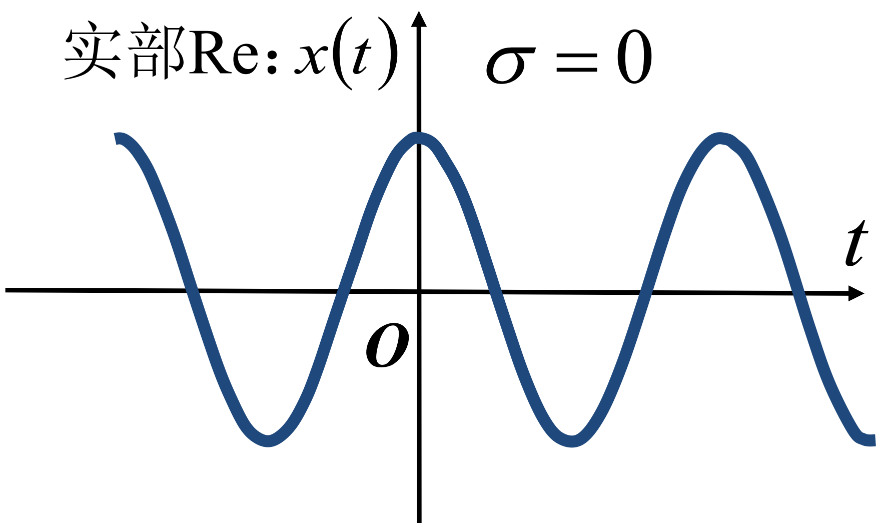
通常把 $\dfrac{1}{|\sigma|}$ 称为指数信号的<u>时间常数</u>，记作τ，代表信号衰减速度，具有时间的量纲。

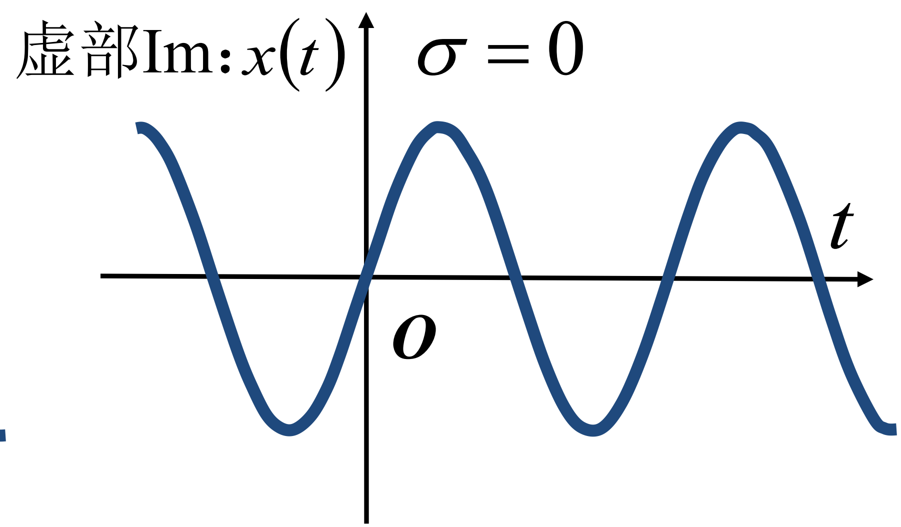
一、时域描述—普通信号的时域描述

➢ 指数信号

当$\omega \neq 0$，$\sigma \neq 0$时，为复指数信号

$$x(t) = A\mathrm{e}^{(\sigma + j\omega)t} = A\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{j\omega t} = Ae^{\sigma t}\cos\omega t + jAe^{\sigma t}\sin\omega t$$





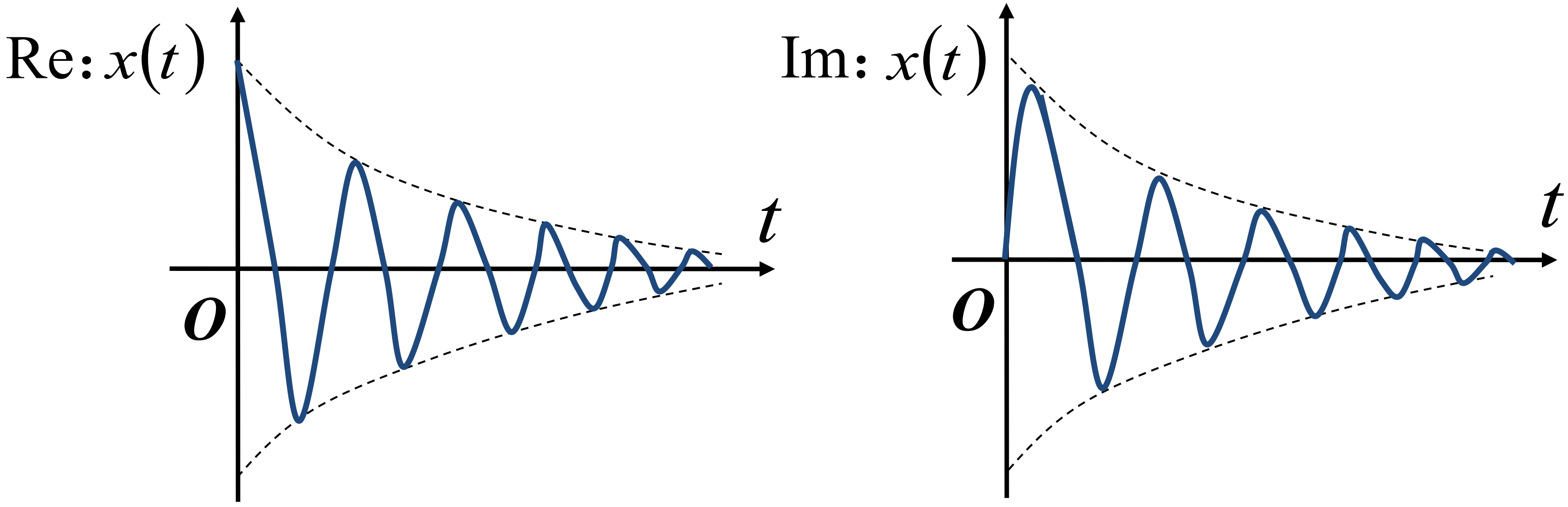
$s = \sigma + j\omega$ 称为复指数信号的复频率。

一、时域描述—普通信号的时域描述

➢ 指数信号

$$x(t) = Ae^{\sigma t}\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right)$$

$\sigma < 0$ 时，衰减的复信号



$\sigma > 0$ 时, 发散复信号

一、时域描述—普通信号的时域描述

➢ 指数信号

正弦信号和余弦信号常借助于复指数信号来表示，由欧拉（Euler）公式：

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

一、时域描述—奇异信号的描述

➢ 单位阶跃信号

➢ 定义

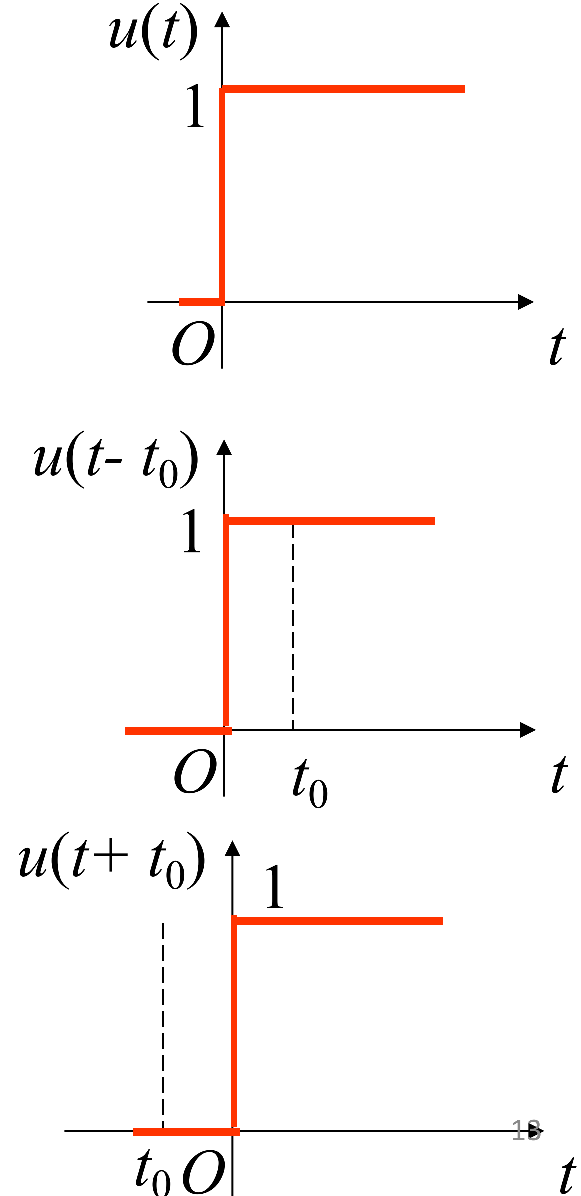
$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}\quad (0\text{点无定义或}\frac{1}{2})$$

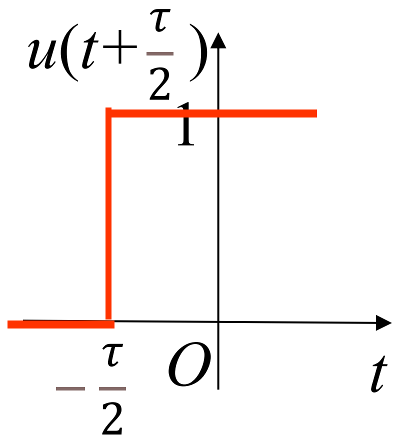
➢ 有延迟的单位阶跃信号

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases},\quad t_0>0$$

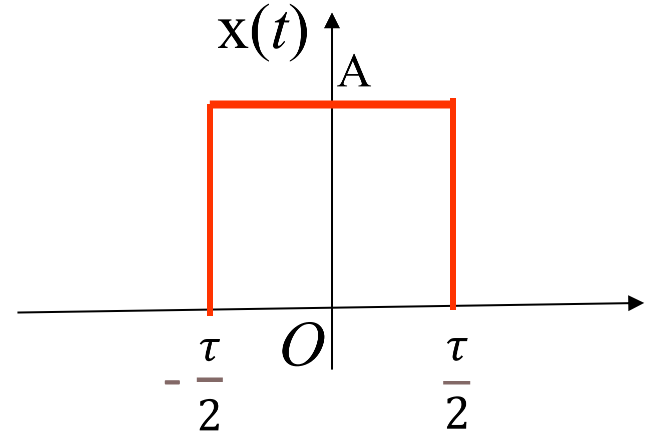
$$u(t+t_0)=\begin{cases}0 & t<-t_0\\ 1 & t>-t_0\end{cases},\quad t_0>0$$

在 $t=\pm t_0$ 处，信号发生跳变

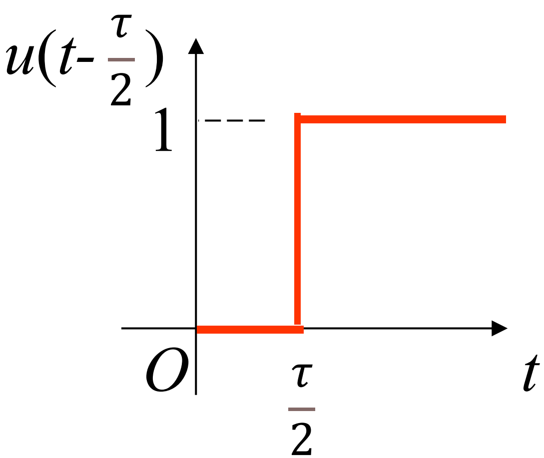




$$u(t-\frac{\tau}{2}) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\tau}{2} \\ 1 & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



$$x(t) = A[u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2})]$$



$$u(t+\frac{\tau}{2}) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\tau}{2} \\ 1 & t > -\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

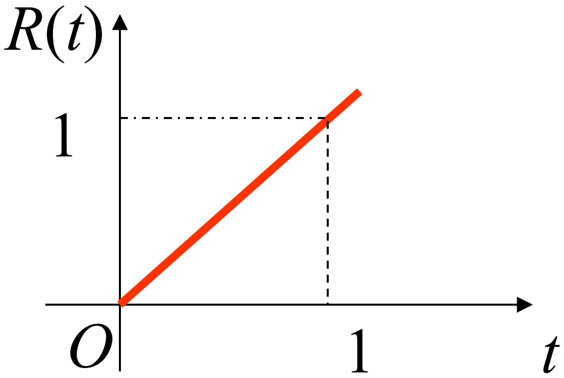
$$\sin\omega_0 t \cdot u(t-t_0)$$

一、时域描述—奇异信号的描述

➢ 单位斜坡信号

➢ 定义

$$R(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$$

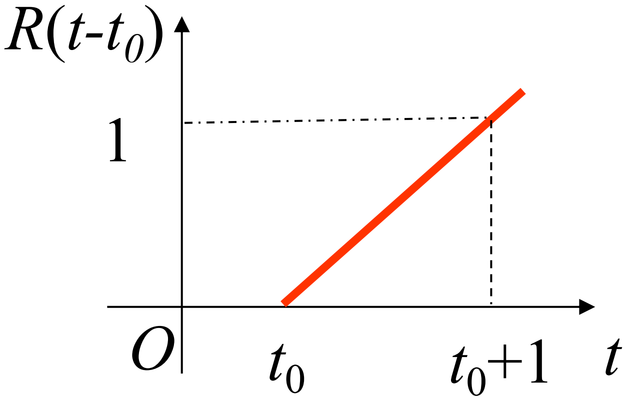


$$R^{'}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

在t=0处，导数不连续

➢ 有延迟的单位斜坡信号

$$R(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ t-t_0 & t>t_0\end{cases}$$



在 $t-t_0$ = 0处，导数不连续

一、时域描述—奇异信号的描述

➢ 斜坡信号与阶跃信号对应关系

$$R(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dR(t)}{dt}=u(t)$$

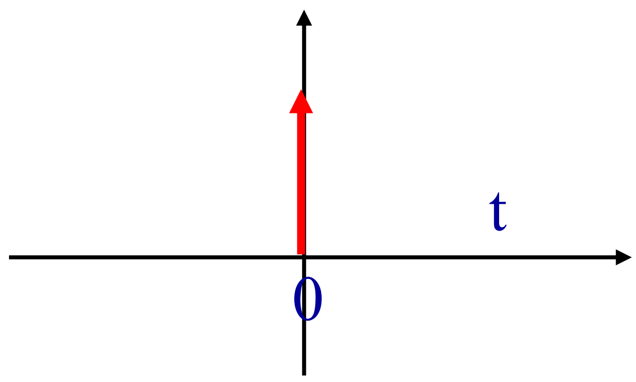
一、时域描述—奇异信号的描述

➢ 单位冲激信号

狄拉克给出的定义：

$$\left.\begin{aligned}&\delta(t)=0\ ,\ (t\neq 0)\\&\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1\end{aligned}\right\}\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\,\mathrm{d}t$$

- ➢ 函数值只在 $t=0$ 时不为零；
- ➢ 积分面积为1；
- ➢ $t=0$ 时，$\delta(t)\rightarrow\infty$ ，为无界函数。



一、时域描述—奇异信号的描述

- **单位冲激信号** $\delta(t)=\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$

$$\begin{cases}\delta(t)=0\ ,\ (t\neq 0)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1\end{cases}$$

考虑：矩形脉冲函数宽度→0时的极限

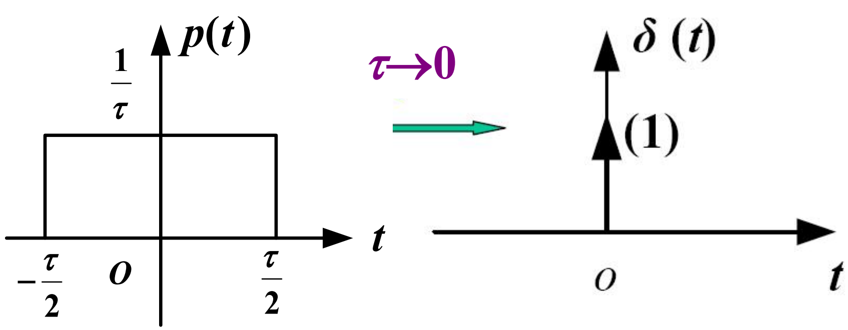
窗高＝窗宽的倒数，面积≡1

脉宽↓，脉冲高度↑

则窄脉冲集中于 t=0 处，面积=1；当τ→0时，窗高→∞

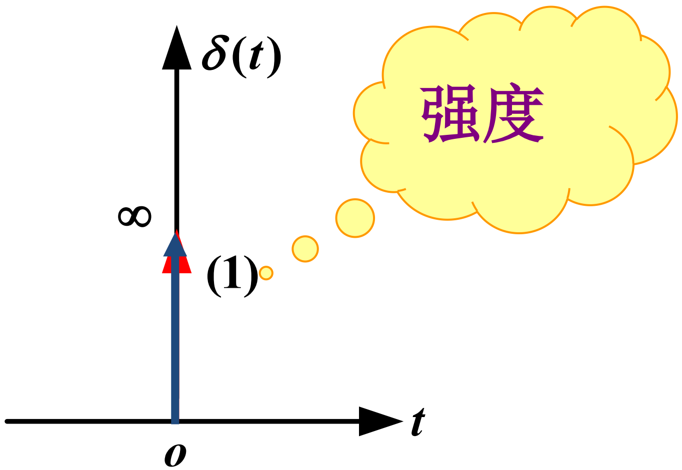
三个特点：

- ★面积恒为1
- ★宽度为0
- ★幅度 $\begin{cases}\text{无穷} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$



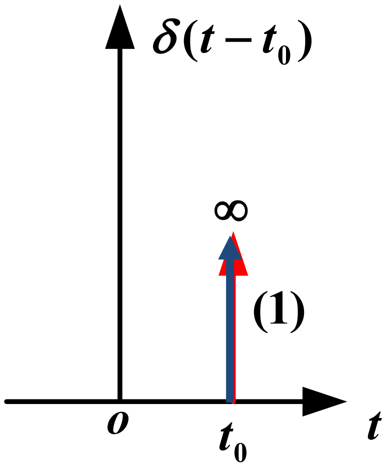
一、时域描述—奇异信号的描述

➢ 单位冲激信号



若面积为k，则强度为k。

时移的冲激函数

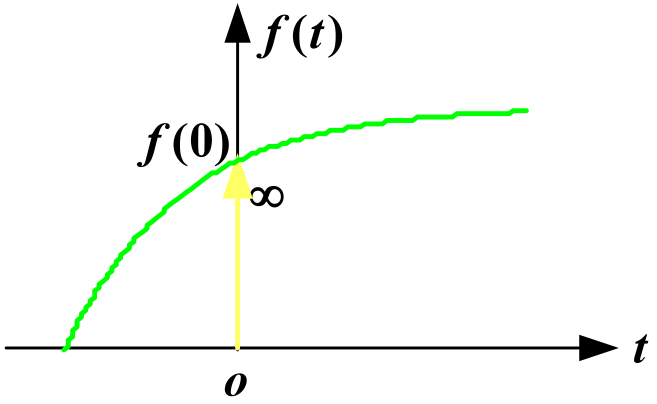


一、时域描述—奇异信号的描述

➢ 单位冲激信号的性质

（1）抽样性（筛选性）

积分筛选特性



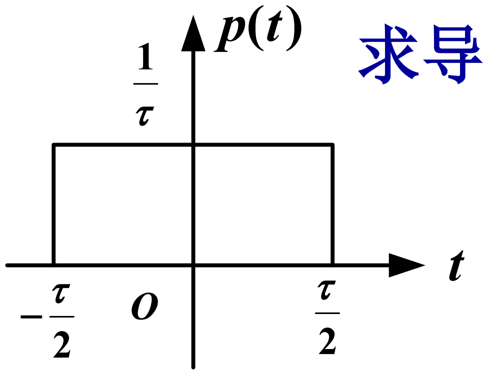
如果$f(t)$在$t=0$处连续，且处处有界，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$$

积分只与t=0时$f(t)$的取值有关

一、时域描述—奇异信号的描述

➢ 单位冲激信号的性质



求导？

（2）奇偶性

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

（3）微积分特性：冲激信号与阶跃信号互为积分和微分关系

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=u(t)\qquad \frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$$

（4）尺度变换特性：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

单选题 5分

设置

$$\int_{-2}^{+3} e^{-5t} \cdot \delta(t-1)dt$$

A 0

B e^{-5}

C $e^{-5}\delta(t-1)$

D e^{-5t}

提交

单选题 5分

设置

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \cdot \delta(2-2t)dt$$

A $2e^{-1}$

B $-\frac{1}{2}e^{-1}$

C e^{-1}

D $\frac{1}{2}e^{-1}$

提交

一、时域描述—奇异信号的描述

利用冲激信号的特性，计算下列各式的值

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\cdot\delta(t-\frac{\pi}{4})dt$$

$$(2)\int_{-2}^{+3}e^{-5t}\cdot\delta(t-1)dt$$

$$(3)\int_{-4}^{+6}e^{-2t}\cdot\delta(t+8)dt$$

$$(4)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\cdot\delta(2-2t)dt$$

2.1、连续信号的时域描述和分析

二、时域运算

1. 基本运算

- 尺度变换
- 翻转
- 平移
- 复合变换

2. 叠加和相乘

3. 微分和积分

4. 卷积运算

二、时域运算—基本运算

➢ 尺度变换

波形的压缩与扩展，又称标度变换，时间压扩。

幅度尺寸变换： $f(t) \to af(t), (a > 0\text{常数}),$

基本特性不变，幅度放大或缩小a倍

如线性放大器。

时间尺寸变换： $f(t) \to f(at), (a > 0\text{常数}),$

基本特性发生变化，时间坐标压缩或扩展。

原信号$f(t)$以原点($t=0$)为基准，沿横坐标轴展缩到原来的1/a。

方法：将原信号$f(t)$中自变量$t \to at$，得到$f(at)$。

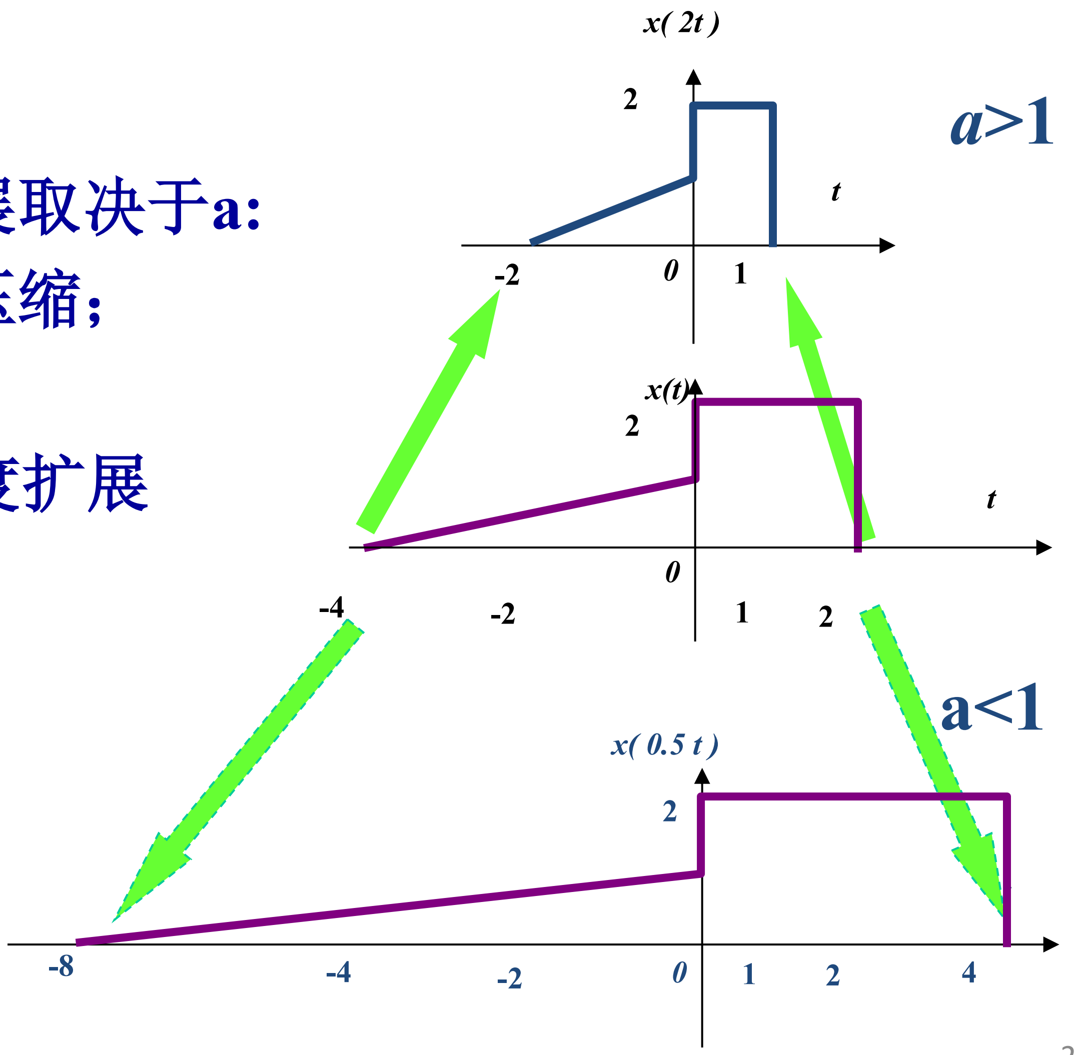
二、时域运算—基本运算

➢ 尺度变换

时间尺度压缩或扩展取决于a:

➢ a>1→时间尺度压缩；
录音带快放

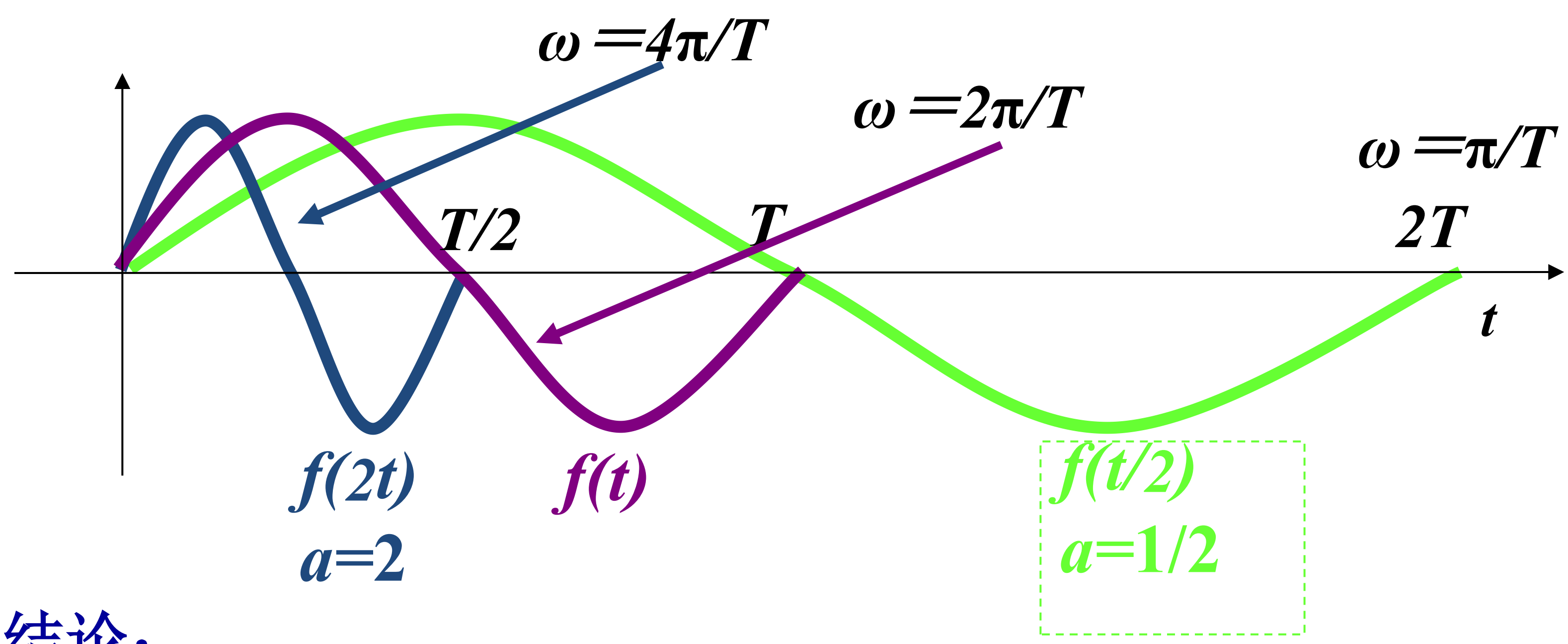
➢ 0<a<1→时间尺度扩展
录音带慢放



二、时域运算—基本运算

➢ 尺度变换

正弦信号的尺度变换



- 结论：
  - ➢ a>1→时域压缩→频域（带）扩展
  - ➢ a<1→时域扩展→频域（带）压缩

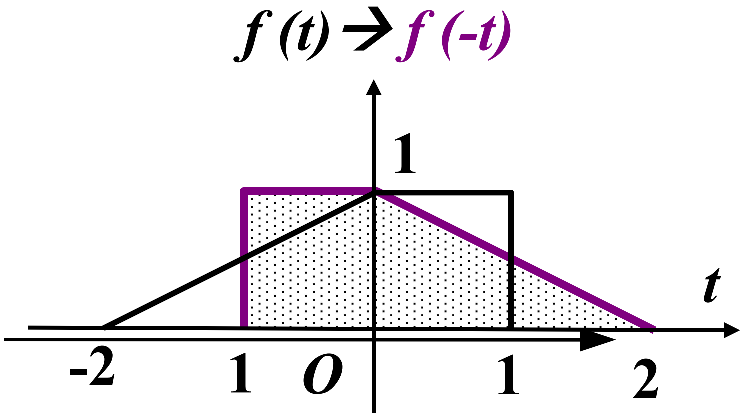
二、时域运算—基本运算

- **翻转**

$$f(t) \rightarrow f(-t)$$

以纵轴为轴折叠，把信号的过去与未来对调，
t =0点不动。方法： t ➔ $-t$

例：



二、时域运算—基本运算

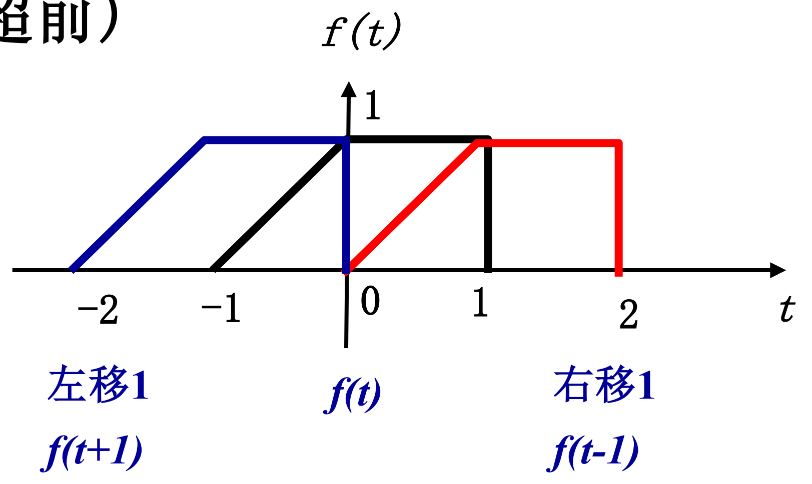
➢ 平移

将信号$f(t)$沿时间轴t移动一段距离，得$f(t-\tau)$，即 $f(t) \to f(t-\tau)$，称为平移。

$\tau > 0$，右移(滞后)

$\tau < 0$，左移(超前)

例：



二、时域运算—基本运算

➢ 复合变换　　　　一切变换都是相对*t* 而言

$$f(t) \to f(-at \pm b) = f[a(-t \pm \frac{b}{a})] \quad (a > 0)$$

➢ 信号运算中，一般同时存在尺度变换、平移、翻转、以及幅度变换，变换准则：

➢ 尺度变换：$f(t) \to f(at)$

$a>1$，压缩a倍；
$a<1$，扩展$1/a$倍

➢ 平移：$f(at) \to f[a(t \pm \frac{b}{a})]$

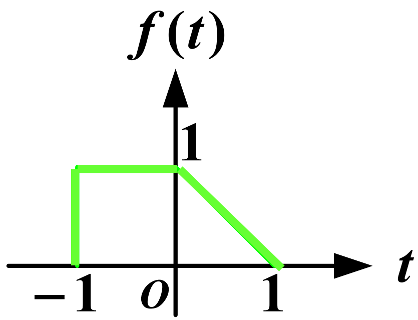
+，左移b/a单位；
一，右移b/a单位

➢ 翻转：$f[a(t \pm \frac{b}{a})] \to f[a(-t \pm \frac{b}{a})]$

二、时域运算—基本运算

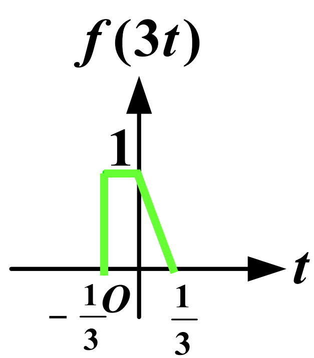
例：已知$f(t)$，求$f(3t+5)$。

解:



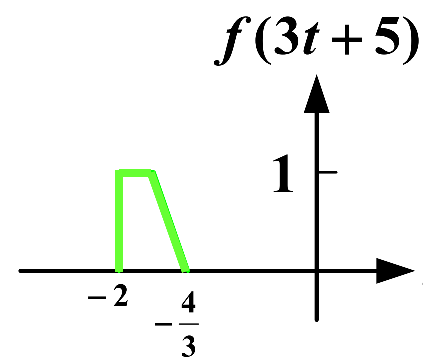
$$f(3t+5) = f\,[3(t+5/3)]$$

尺度变换

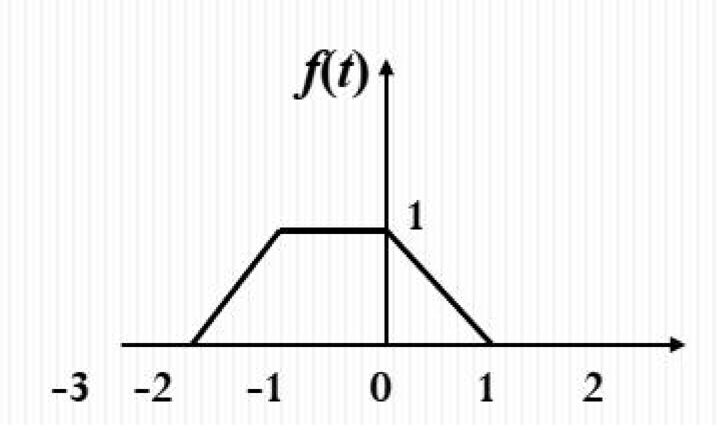


$3t \longrightarrow 3(t+5/3)$

时移



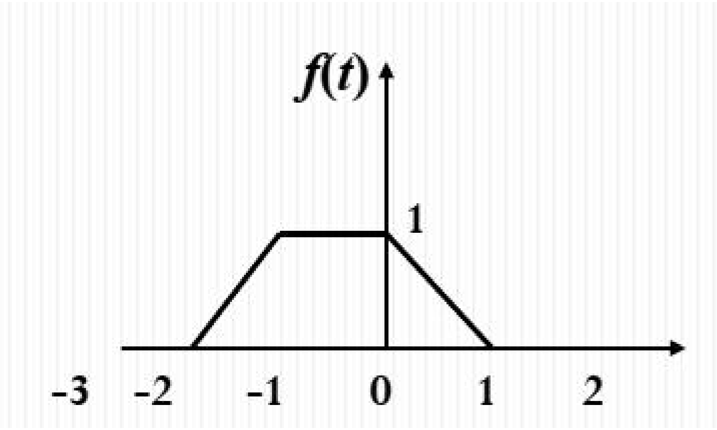
例：已知 $f(t)$ 如右图所示，求 $f(1-2t)$ 的波形。

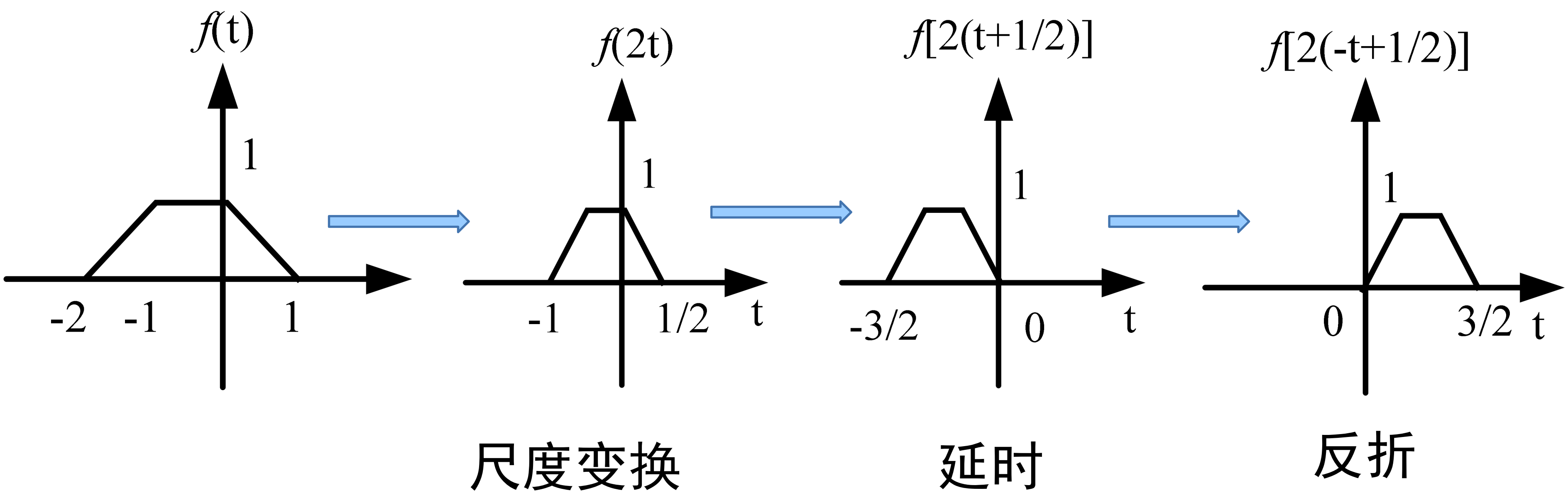


作答

二、时域运算—基本运算

例：已知 $f(t)$ 如右图所示，求 $f(1-2t)$ 的波形。



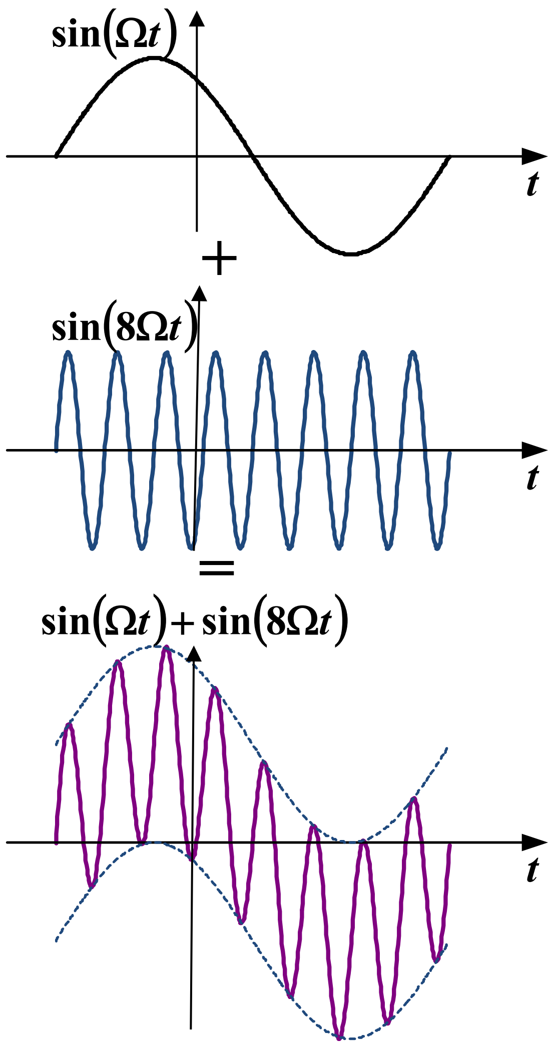


二、时域运算—叠加和相乘

- 连续系统叠加

若 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 是两个连续信号，它们的和（差）定义为：两信号瞬时值和（差）

$$y(t)=x_1(t)\pm x_2(t)$$

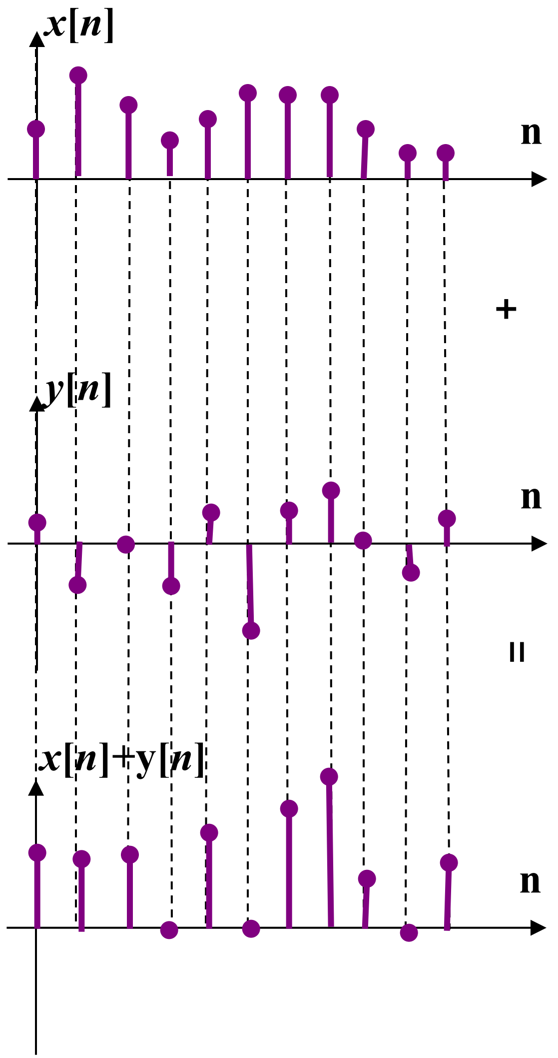


二、时域运算—叠加和相乘

➢ 离散系统叠加

➢ 若 $x[n]$、$y[n]$是两个离散信号，它们的和（差）定义为：两信号对应点取值之和（差）

$$z[n] = x[n] \pm y[n]$$



二、时域运算—叠加和相乘

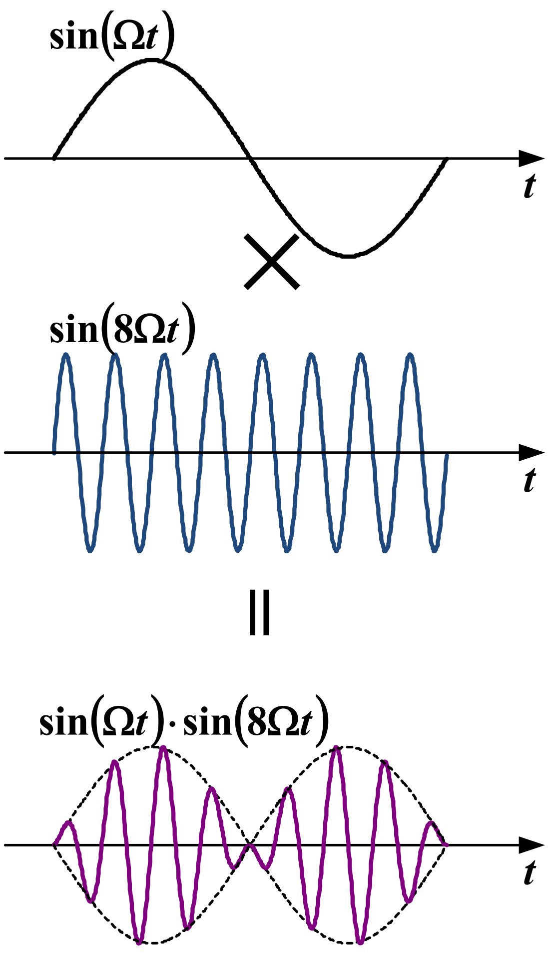
➢ 连续系统乘除

- 若 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 是两个连续信号，它们的积定义为：两信号瞬时值之积

$$y(t)=x_1(t)\times x_2(t)$$

- 两个连续信号，它们的商定义为：两信号瞬时值之商

$$y(t)=x_1(t)\div x_2(t)$$



二、时域运算—叠加和相乘

- 离散系统乘除

  - 离散信号的积定义为两离散信号对应点的积，即内积。

$$Z[n] = x[n] \times y[n]$$

  - 离散信号的商定义为两离散信号对应点的商。

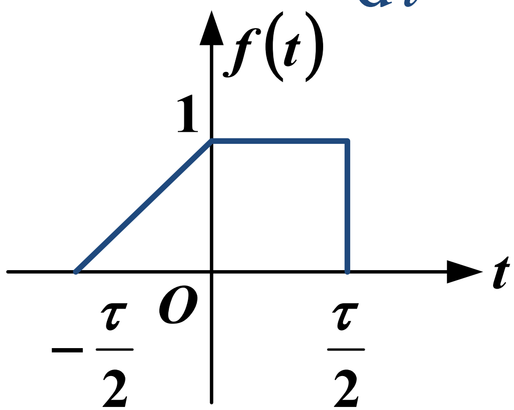
$$z[n] = x[n] \div y[n]$$

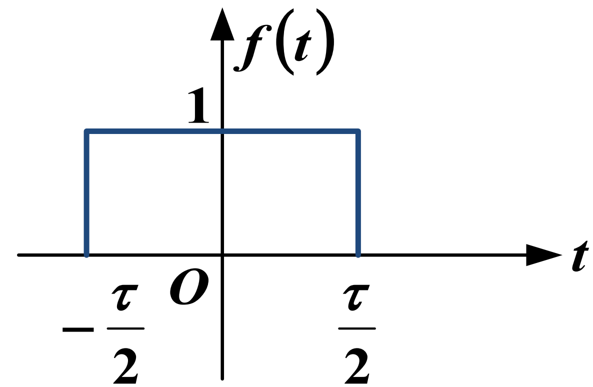
二、时域运算—微分和积分

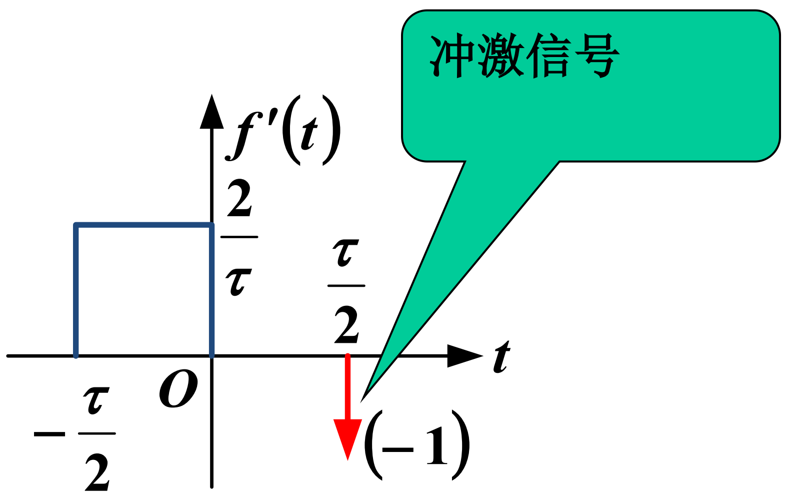
微分：$f'(t)=\dfrac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t}$

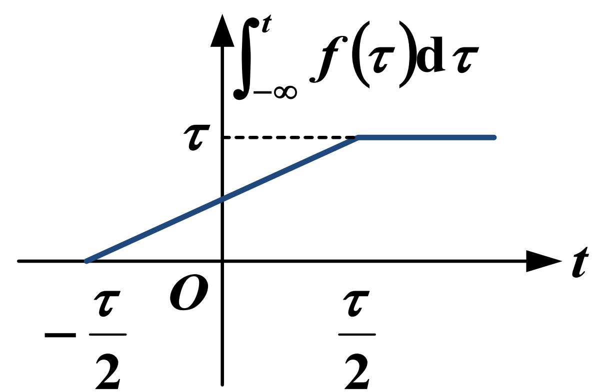
积分：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$

信号的微分表示了信号的变化率









二、时域运算—卷积

- 定义：称 $\boxed{f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)\cdot d\tau \rightarrow x_1(t)*x_2(t)}$

  为信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的卷积。

- 运算：变量代换→翻转→平移→乘积→积分

二、时域运算—卷积

例：求两信号的卷积

$$x_1(t)=\begin{cases}2 \quad , & |t|<2\\ 0 \quad , & |t|>2\end{cases};\quad x_2(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{4} & ,0<t<2\\ 0 & ,t<0/t>2\end{cases}$$

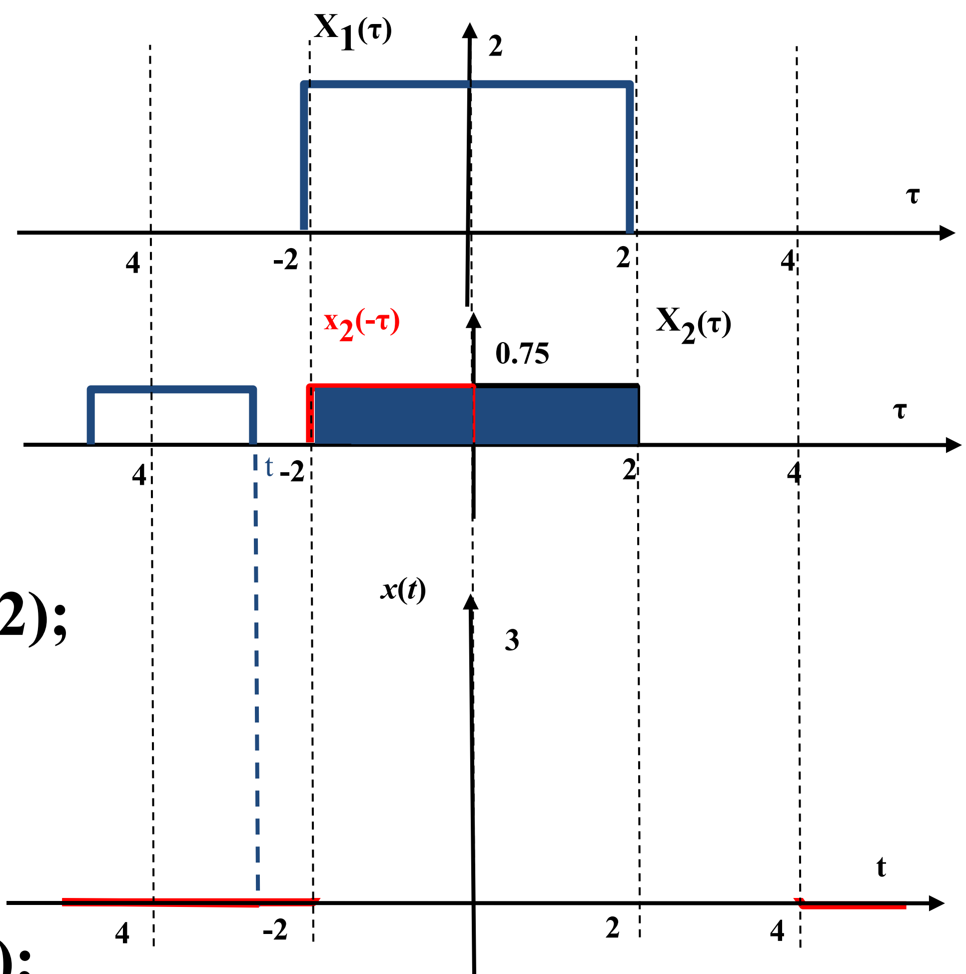
求：$x_1(t)*x_2(t)$

解：变量代换 $t \rightarrow \tau$

$$x_1(\tau)=\begin{cases}2 \quad , & |\tau|<2\\ 0 \quad , & |\tau|>2\end{cases};\quad x_2(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{4} & ,0<\tau<2\\ 0 & ,\tau<0/\tau>2\end{cases}$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)\cdot d\tau \rightarrow x_1(t) * x_2(t)$$

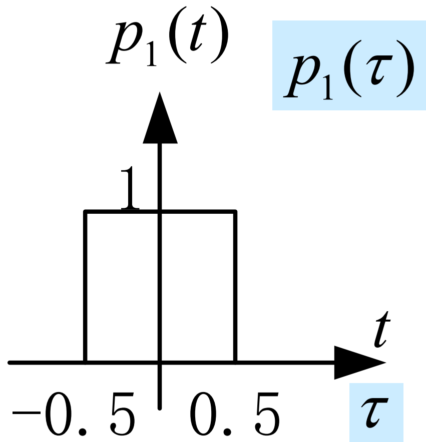
- **变量代换：** $t \rightarrow \tau$;
- x_2**翻转**$\rightarrow x_2(-\tau)$;
- **左移**$t \rightarrow x_2(-\tau+t)$，$t<0$;
  - ✓ $t<-2$**时**，$x(t)=0$;
  - ✓ $t=-2$**时**，$x(t)=0$;
  - ✓ $-2<t\leq 0$**时**，$x(t)=3/2*(t+2)$;
  - ✓ $t=0$**时**，$x(t)=3$ (max);
  - ✓ $0<t<2$**时**，$x(t)=3$;
  - ✓ $2<t<4$**时**，$x(t)=3/2*(4-t)$;
  - ✓ $t>4$**时**，$x(t)=0$.



$$x(t)=x_1(t)*x_2(t)=\begin{cases}0 & , \quad t\le -2\\ \dfrac{3}{2}(t+2) & , \quad -2<t\le 0\\ 3 & , \quad 0<t\le 2\\ \dfrac{3}{2}(-t+4) & , \quad 2<t\le 4\\ 0 & , \quad t>4\end{cases}$$

- **计算卷积的关键：**
  - 正确划分时间变量 t 的取值区间；
  - 正确确定积分的上、下限。
  - 分段函数图解法具有的效果好。

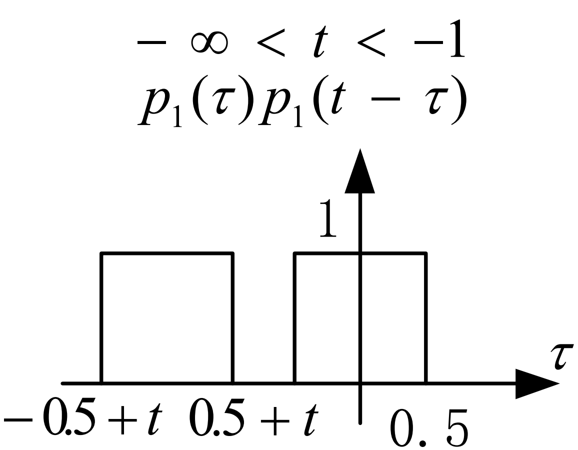
例：计算$y(t) = p_1(t) * p_1(t)$。

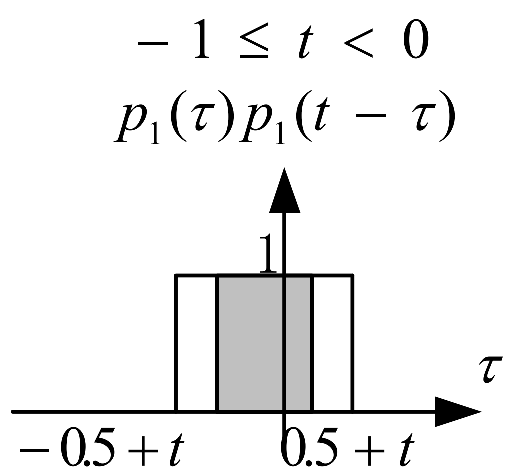


(1) $-\infty < t \le -1$, $y(t)=0$

(2) $-1 \le t < 0$

$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5+t} dt = 1 + t$$

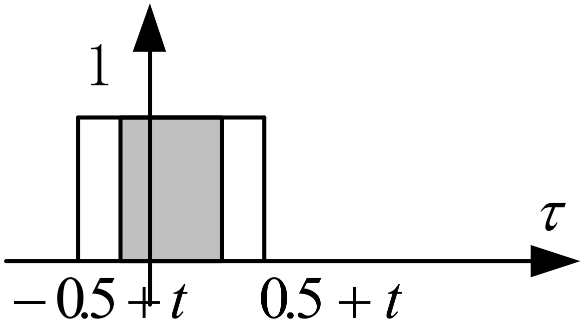




例：计算$y(t) = p_1(t) * p_1(t)$。

$0 \le t < 1$

$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$

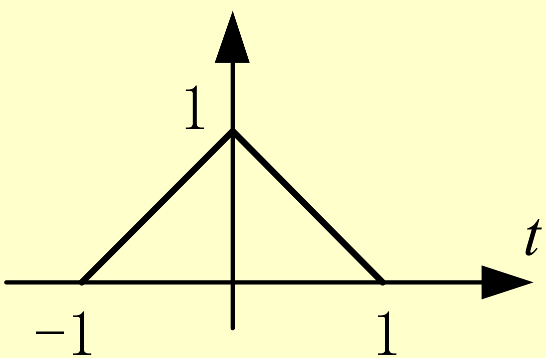


(3) $0 \le t < 1$

$$y(t) = \int_{-0.5+t}^{0.5} dt = 1 - t$$

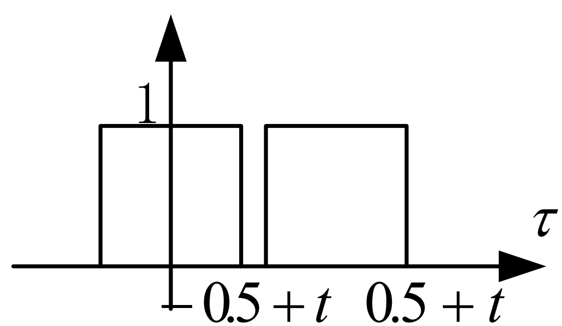
(4) $1 \le t < \infty$, $y(t) = 0$

$p_1(t) * p_1(t)$



$t > 1$

$p_1(\tau)p_1(t-\tau)$



卷积的性质

(1) 交换律 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

(2) 分配律 $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

(3) 结合律 $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

(4) 微分特性

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t)$$

(5) 积分特性

$$\int_{-\infty}^{t}\left[f_1(\tau) * f_2(\tau)\right] d\tau = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau) d\tau = f_2(t) * \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau) d\tau$$

卷积的性质

(6) 位移特性

– 已知 $f_1(t) * f_2(t) = y(t)$

– 则: $\boldsymbol{f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)}$

(7) 展缩

$$f_1(at) * f_2(at) = \frac{1}{|a|} y(at)$$

二、时域运算—卷积

➢ 函数 *f(t)* 与冲激函数或阶跃函数的卷积

（1） *f(t)*与冲激函数卷积，结果是*f(t)*本身

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

类似有：

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

证明：根据卷积定义和冲激函数的抽样性质

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$=f(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)d\tau=f(t)$$

二、时域运算—卷积

（2）f(t)与冲激偶的卷积

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$

δ′(t)称为微分器

（3）f(t)与阶跃函数的卷积

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda$$

u(t)称为积分器

推广：$$f(t)*\delta^{(k)}(t)=f^{(k)}(t)$$

$$f(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=f^{(k)}(t-t_0)$$

三、信号的分解

为了便于研究信号的传输和处理问题，往往将复杂信号分解为一些简单(基本)的信号之和，分解角度不同，可以分解为不同的分量

- 直流分量与交流分量
- 偶分量与奇分量
- 脉冲分量（冲激函数）
- 实部分量与虚部分量
- 正交函数分量

三、信号的分解

（一）分解成冲激函数之和

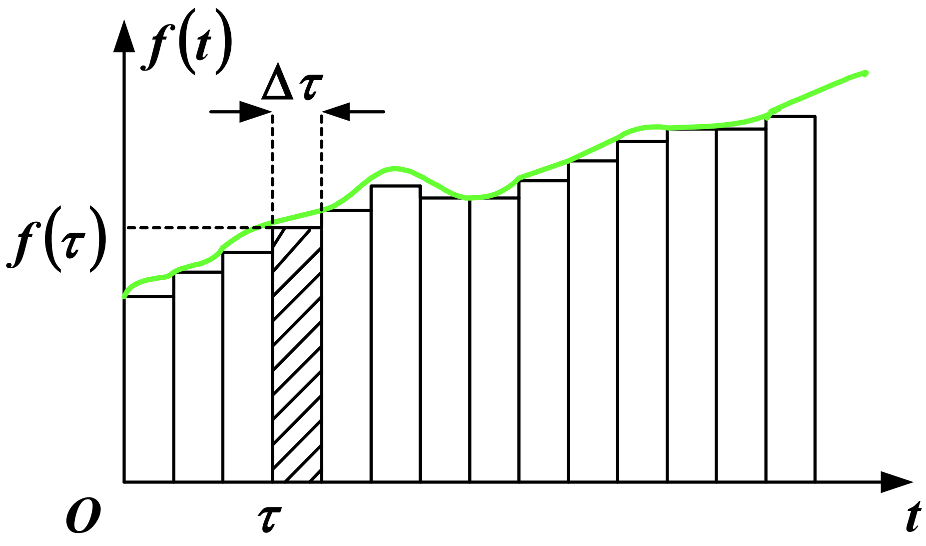
将信号分解成一系列脉冲函数的代数和。

(1) 矩形窄脉冲序列

当 $t=\tau$, 时

脉冲高度： $f(\tau)$

脉宽：$\Delta\tau$,



在区间[τ , τ + Δ τ]内：

窄脉冲面积为： $f(\tau)\cdot\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)\right]$

三、信号的分解

(2) $f(t)$表示为矩形窄脉冲序列之和

从 $\tau=-\infty$ 到 ∞, $f(t)$可表示为许多窄脉冲的叠加

$$f(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)\right]$$

$$=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)\right]}{\Delta\tau}\cdot\Delta\tau$$

令 $\Delta\tau\to 0$

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)\right]}{\Delta\tau}=\frac{\mathrm{d}\,u(t-\tau)}{\mathrm{d}\,t}=\delta(t-\tau)$$

表示在 $t=\tau$ 时的一个单位脉冲

三、信号的分解

（3） $f(t)$表示为单位脉冲函数的代数和

令 $\Delta\tau \to 0$

$$\Delta\tau \to \mathrm{d}\tau, \quad \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \to \int_{\tau=-\infty}^{\infty}$$

$\delta(t-\tau)$

$d\tau$

$$\boxed{f(t)} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)]}{\Delta\tau}\cdot\Delta\tau$$

所以 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 卷积

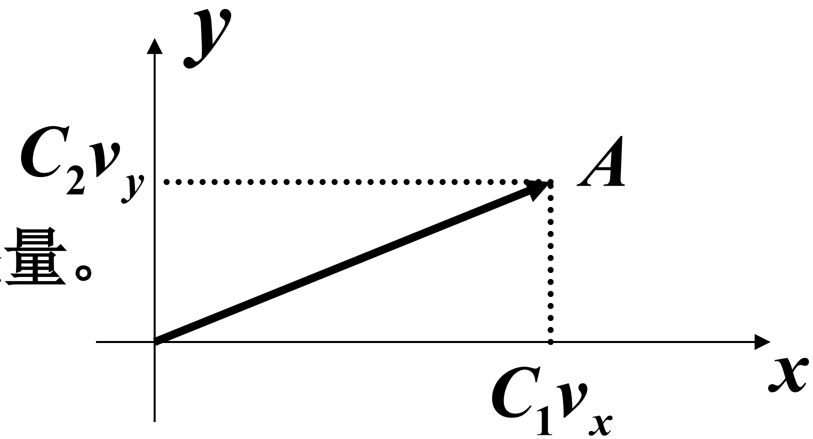
结论： 任意信号都可以分解成无穷密集的、不同强度的冲激函数之加权和；加权系数＝该点的函数值。

三、信号的分解

（二）信号的正交分解

信号分解为正交函数的原理与矢量分解为正交矢量的概念相似。

$$A = C_1 v_x + C_2 v_y$$



v_x, v_y 为各相应方向的正交单位矢量。

它们组成一个二维正交矢量集。

矢量正交分解的概念可以推广到信号空间，在信号空间找到若干个相互正交的信号作为基本信号，使得信号空间中的任意信号均可表示成它们的线性组合。

1. 正交函数集

（1）正交函数： 在 $[t_1,t_2]$ 区间上定义的非零实函数

$\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 若满足条件 $\int_{t_1}^{t_2}\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = 0$

则函数 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 为在区间 $[t_1,t_2]$ 的正交函数。

（2）正交函数集：在区间 $[t_1,t_2]$ 上的n个函数（非零）

$\varphi_1(t)\cdots\cdots\varphi_n(t)$,其中任意两个均满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j(t)dt=\begin{cases}0, & i\neq j\\ k_i\neq 0, & i=j\end{cases}$$

k_i 为常数，则称函数集 $\{\varphi_1(t)\ldots\ldots\varphi_n(t)\}$ 为区间

$[t_1,t_2]$ 内的正交函数集。

三、信号的分解

（3）完备正交函数集

如果在正交函数集 $\{\varphi_1(t)........\varphi_n(t)\}$ 之外不存在函数

$\varphi(t)$ 满足等式 $\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi(t)dt = 0, (i = 1,2,3......n)$

，则称该函数集为完备正交函数集。

$$\{1\ ,\ \cos\omega_0 t\ ,\ \cos 2\omega_0 t\ ,\ldots,\ \cos(m\omega_0 t)\ ,\ldots,\ \sin\omega_0 t\ ,\ \sin 2\omega_0 \mathrm{t}\ ,\ldots,\sin(n\omega_0 t),\ldots\}$$

在区间 (t_0, t_0+T) 内组成完备正交函数集。

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

这是因为：

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos\left(m\omega_0 t\right)\cos\left(n\omega_0 t\right)dt=\begin{cases}0, & \text{当 } m\neq n\\ \dfrac{T}{2}, & \text{当 } m=n\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin\left(m\omega_0 t\right)\sin\left(n\omega_0 t\right)dt=\begin{cases}0, & \text{当 } m\neq n\\ \dfrac{T}{2}, & \text{当 } m=n\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin\left(m\omega_0 t\right)\cos\left(n\omega_0 t\right)dt=0,\ \text{对于所有的} m \text{和} n$$

三、信号的分解

对于复函数:

若复函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ $(i=1，2，\ldots\ldots, n)$ 在区间 $(t_1，t_2)$ 满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt=\begin{cases}0 & i\neq j\\ k_i\neq 0 & i=j\end{cases}$$

则称此复函数集为正交函数集。

三、信号的分解

复函数集 $\{e^{j\omega_0 nt}\}$ **(n=0，±1，±2，…)** 在区间 **(t_0 ，t_0+T)** 内是完备的正交函数集。

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jm\omega_0 t}(e^{jn\omega_0 t})^* dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ T & , \quad m = n \end{cases}$$

其中 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 。

三、信号的分解

2. 信号分解为正交函数

设有n个函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)$ 在区间 $(t_1\ ,\ t_2)$ 构成一个正交函数空间。将任一函数 $f(t)$ 用这 n 个正交函数的线性组合来近似，可表示为：

$$f(t)\approx C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\cdots+C_n\varphi_n(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)$$

$$f(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)+e(t)$$

三、信号的分解

根据最小均方误差原则，可推出（了解下，P22）：

$$[\overline{e}(t)]^2=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)\right]^2$$

$$C_i=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^{\,2}(t)dt}=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)dt$$

$$\boxed{f(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)}$$

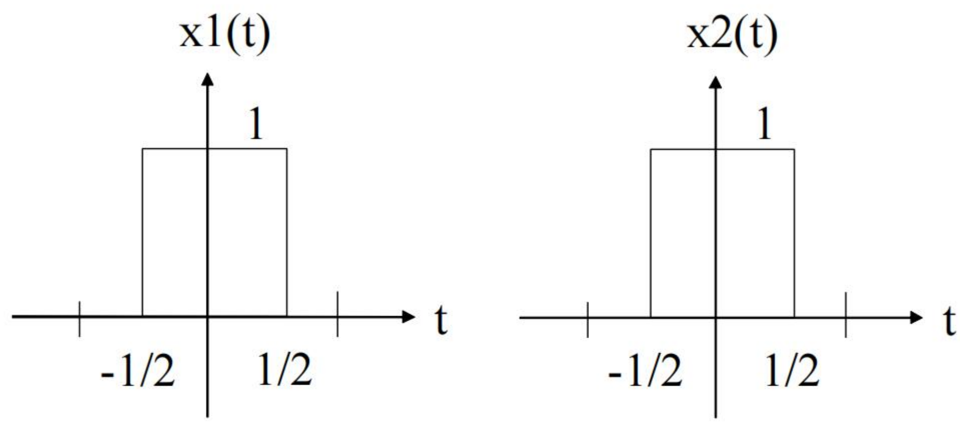
式中：$K_i=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^{\,2}(t)dt$

如果分解的项数越多则误差愈小。即 $n\to\infty$，均方误差 $\overline{\varepsilon^2}\to 0$，即 $f(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内分解为无穷多项之和

9.14 课后作业

- **P99-101:**
- **题 1：（1），（2），（4），（6）**
- **题 3：（3），（5），（7），（10）**
- **题 17（1）**

补充作业：求x1(t)*x2(t)



$$x1(t) = x2(t) = \begin{cases} 0 & t < -1/2 \\ 1 & -1/2 < t < 1/2 \\ 0 & t > 1/2 \end{cases}$$