



§ 2 全排列和对换

问题 把 n 个不同的元素排成一行，共有多少种不同的排法？

定义 把 n 个不同的元素排成一行，叫做这 n 个元素的全排列。 n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示。

显然 $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

即 n 个不同的元素一共有 $n!$ 种不同的排法。

引例 用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解 3个不同的元素一共有 $3! = 6$ 种不同的排法

123 , 132 , 213 , 231 , 312 , 321

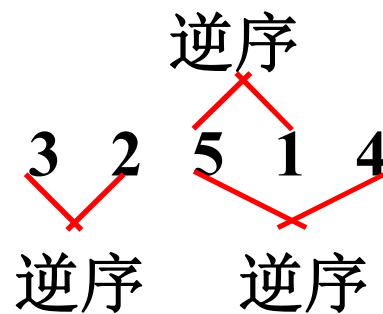
所有6种不同的排法中，只有一种排法（123）中的数字是按从小到大的自然顺序排列的，而其他排列中都有大的数排在小的数之前。

因此大部分的排列都不是“顺序”，而是“逆序”。

对于 n 个不同的元素，可规定各元素之间的标准次序。
 n 个不同的自然数，规定从小到大为标准次序。

定义 当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称这两个元素组成一个**逆序**。

例如 在排列32514中，



思考题：还能找到其它逆序吗？

答：2和1，3和1也构成逆序。

定义 排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数通常记为 $t(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

奇排列：逆序数为奇数的排列.

偶排列：逆序数为偶数的排列.

思考题：符合标准次序的排列是奇排列还是偶排列？

答：符合标准次序的排列（例如：123）的逆序数等于零，因而是偶排列.

计算排列的逆序数的方法

设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个自然数的任一排列，
并规定由小到大为标准次序。


先看有多少个比 p_1 大的数排在 p_1 前面，记为 t_1 ；

再看有多少个比 p_2 大的数排在 p_2 前面，记为 t_2 ；

.....

最后看有多少个比 p_n 大的数排在 p_n 前面，记为 t_n ；

则此排列的逆序数为 $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$



例4: 求排列 32514 的逆序数.

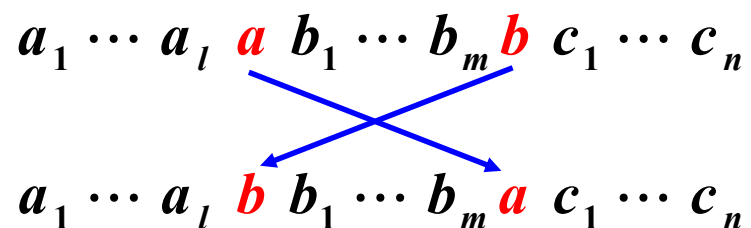
解: $t(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$

练习: 求排列 453162 的逆序数.

解: $t = 9$

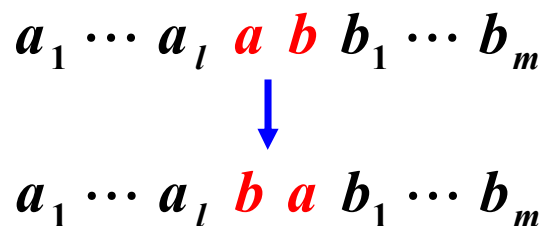
二、对换

定义 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做**对换**。



例如 对排列21354施以对换(1, 4)后得到排列24351.

◆ 将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**。



说明

1. 相邻对换是对换的特殊情形.
2. 一般的对换可以通过一系列的相邻对换来实现.
3. 如果连续施行两次相同的对换, 那么排列就还原了.

$$a_1 \cdots a_l \textcolor{red}{a} b_1 \cdots b_m \textcolor{red}{b} c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{\textcolor{red}{m} \text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \textcolor{red}{a} \textcolor{red}{b} b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{\textcolor{red}{m+1} \text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \textcolor{red}{b} b_1 \cdots b_m \textcolor{red}{a} c_1 \cdots c_n$$

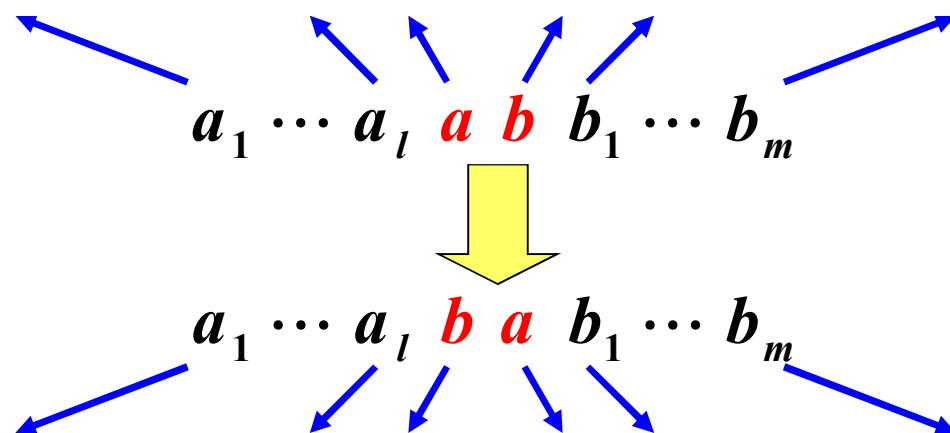
$$\xrightarrow{\textcolor{blue}{m} \text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \textcolor{red}{b} \textcolor{red}{a} b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{\textcolor{blue}{m+1} \text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \textcolor{red}{a} b_1 \cdots b_m \textcolor{red}{b} c_1 \cdots c_n$$

对换与排列奇偶性的关系

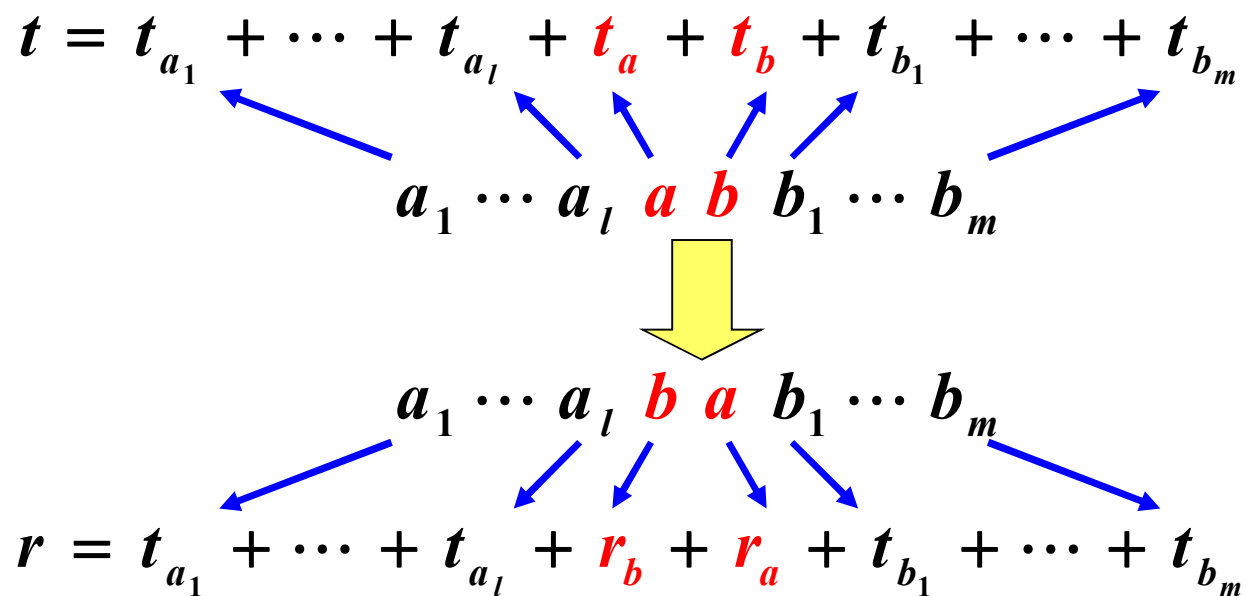
定理1 对换改变排列的奇偶性.

证明 先考虑相邻对换的情形.



$$\begin{array}{c}
 t = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + t_a + t_b + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}} \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad a_1 \cdots a_l \quad \color{red}{a} \quad \color{red}{b} \quad b_1 \cdots b_m \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad a_1 \cdots a_l \quad \color{red}{b} \quad \color{red}{a} \quad b_1 \cdots b_m \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\
 r = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + t_b + t_a + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}}
 \end{array}$$

注意到除 $\color{red}{a}, \color{red}{b}$ 外，其它元素的逆序数不改变.



当 $a < b$ 时, $r_a = t_a + 1$, $r_b = t_b$, $r = t + 1$.

当 $a > b$ 时, $r_a = t_a$, $r_b = t_b - 1$, $r = t - 1$.

因此相邻对换改变排列的奇偶性.

既然相邻对换改变排列的奇偶性，那么

$$a_1 \cdots a_l \textcolor{red}{a} b_1 \cdots b_m \textcolor{red}{b} c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{2m+1 \text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \textcolor{red}{b} b_1 \cdots b_m \textcolor{red}{a} c_1 \cdots c_n$$

因此，一个排列中的任意两个元素对换，排列的奇偶性改变.

推论 **奇排列**变成标准排列的对换次数为**奇数**，
 偶排列变成标准排列的对换次数为**偶数**.

证明 由定理1知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为零)，因此可知推论成立.