2023 年「高等数学 1」杭电期中模拟试题一

MathHub 七星考研 未央学社

出题：MathHub 审题：未央学社

HDU 数学营 未央学社公众号

本资料仅作为模拟练习之用，目的是为了帮助大家更有效地复习，并减轻对考试的担忧。请正确的对待此资料，其旨在辅助复习，而非预示具体的考试内容。我们鼓励同学们认真复习，大学学习主打理解，而非刷题，期望大家在期中考试中取得优异成绩。

1. 选择题

题目 1 【 A 】

设 $y=\tan^2 x\sin\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to 0$ 时，y 是

A. 无穷小量 B. 无穷大量 C. 有界但非无穷小量 D. 无界但非无穷大量

分析与解 本题考察了无穷小性质，无穷小乘以有界量为无穷小

解：$x\to 0$ 时，$\tan^2 x\sin\dfrac{1}{x}\sim x^2\sin\dfrac{1}{x}\to 0$. 故本题选择 **A** 项.

题目 2 【 D 】

设函数 $f(u)$ 可导，$y=f\left(x^2\right)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数的增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$

A. -1 B. 0.1 C. 1 D. 0.5

分析与解 本题考察了微分的概念

解：$\mathrm{d}y=\left[f\left(x^2\right)\right]'\mathrm{d}x=f'\left(x^2\right)\cdot 2x\,\mathrm{d}x=2xf'\left(x^2\right)\mathrm{d}x$，即

$$0.1=2\cdot(-1)\cdot f'\left[(-1)^2\right]\cdot(-0.1)\Longrightarrow 1=-2f'(1)\cdot(-1)\Longrightarrow 2f'(1)=1\Longrightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$$

故本题选择 **D** 项.

题目 3 【 D 】

下列各式中正确的是

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ C. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arctan x}{x}=1$ D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

分析与解

A. $|\sin x|\le 1$，于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$. B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=0$，$\ln(1+x)$ 的速度远慢于 x.

C. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arctan x}{x}=\dfrac{\arctan 1}{1}=\dfrac{\frac{\pi}{4}}{1}=\dfrac{\pi}{4}$. D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$.

故本题选择 **D** 项.

题目 4 【 B 】

设 $f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3\sin x)-f(2\arctan x)}{x}=$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. 2 C. $\dfrac{1}{4}$ D. 4

分析与解 本题考察了导数的定义，具体计算如下

$$
\begin{aligned}
L&=\lim_{x\to0}\frac{f(3\sin x)-f(2\arctan x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(3\sin x)-f(0)+f(0)-f(2\arctan x)}{x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{f(3\sin x)-f(0)-[f(2\arctan x)-f(0)]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(3\sin x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{f(2\arctan x)-f(0)}{x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{f(0+3\sin x)-f(0)}{3\sin x}\cdot\frac{3\sin x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{f(0+2\arctan x)-f(0)}{2\arctan x}\cdot\frac{2\arctan x}{x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{f(0+3\sin x)-f(0)}{3\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{f(0+2\arctan x)-f(0)}{2\arctan x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\arctan x}{x}\\
&=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{3x}{x}-f'(0)\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=3f'(0)-2f'(0)=f'(0)=2
\end{aligned}
$$

故本题选择 **B** 项.

题目 5 【 D 】

设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是

A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值 B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 D. $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

分析与解 本题考察了微分的概念本题考察了极限保号性，导数的定义、二阶导的正负性和极值、拐点的关系

解：由导数定义：$f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$.

由极限的保号性可知，在去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 中 $\begin{cases}当x\in(x_0,\delta)\ 时，x-x_0>0,\ f''(x)>0\\ 当x\in(-\delta,x_0)\ 时，x-x_0<0,\ f''(x)<0\end{cases}$.

于是，$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 故本题选择 **D** 项.

题目 6　　【 C 】

设函数 $g(x)$ 可导，$h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}$，其中 $h'(1)=1, g'(1)=2$，则 $g(1)=$

A. $\ln 3-1$　　B. $-\ln 3-1$　　C. $-\ln 2-1$　　D. $\ln 2-1$

分析与解 本题考察的是用求导公式和求导法则求抽象复合函数的导数

解： 由题意可知：$h'(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}\cdot[1+g(x)]'=\mathrm{e}^{1+g(x)}\cdot\left[0+g'(x)\right]=g'(x)\mathrm{e}^{1+g(x)}$.

将 $h'(1)=1, g'(1)=2$ 代入其中有

$$h'(1)=g'(1)\mathrm{e}^{1+g(1)}\Longrightarrow 1=2\mathrm{e}^{1+g(1)}\Longrightarrow \mathrm{e}^{1+g(1)}=\frac{1}{2}\Longrightarrow \ln\mathrm{e}^{1+g(1)}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow 1+g(1)=\ln 2^{-1}\Longrightarrow g(1)=-\ln 2-1$$

故本题选择 **C** 项.

题目 7　　【 C 】

曲线 $y_1=ax^3+1$ 与 $y_2=\mathrm{e}^x$ 在 $x=1$ 处斜率相等，则 $a=$

A. e　　B. $\frac{\mathrm{e}}{2}$　　C. $\frac{\mathrm{e}}{3}$　　D. $\frac{\mathrm{e}}{4}$

分析与解 本题考察了切线斜率与导数的关系.

解： 若两曲线在 $x=1$ 处斜率相等，则在该点处的导数相同

$$\begin{cases} y_1'=3ax^2+0=3ax^2 \\ y_2'=\mathrm{e}^x \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} y_1'(1)=3a\cdot 1^2=3a \\ y_2'(1)=\mathrm{e}^1=\mathrm{e} \end{cases}\Longrightarrow y_1'(1)=y_2'(1)\Longrightarrow 3a=\mathrm{e}\Longrightarrow a=\frac{\mathrm{e}}{3}.$$

故本题选择 **C** 项.

题目 8　　【 A 】

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

分析与解 本题首先是利用极限求出函数表达式，再求得间断点

解：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx-x}{nx^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{x}{n}}{\frac{nx^2}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{x+\frac{1}{n}}=\frac{1-0}{x+0}=\frac{1}{x}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，因此 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$. 于是：$(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 故本题选择 **A** 项.

2. 填空题

题目 9

求极限 $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\underline{\ 2\ }$.

分析与解 本题利用了等价无穷小替代求极限

解：

$$L=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=2$$

题目 10

求参数方程的导数：$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t+t\end{cases}$　　求解结果 $=\underline{\ -\cot t-\csc t\ }$.

分析与解 本题考察了参数方程的导数：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sin t$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t+1$. 于是有

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\cos t+1}{-\sin t}=-\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{1}{\sin t}=-\cot t-\csc t$$

题目 11

求曲线 $y=xe^{-x}$ 的拐点及在拐点处的曲率分别为 $\underline{\ (2,2e^{-2}),\ \kappa=0\ }$.

分析与解 本题考察了拐点的概念和曲率公式

解：

$$y'=e^{-x}+x\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$$
$$y''=-e^{-x}(1-x)+e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(x-1)-e^{-x}=e^{-x}(x-2)$$

$y''=0\Longrightarrow e^{-x}(x-2)=0\Longrightarrow x=2$

- 当 $x>2$ 时，$y''>0$；当 $x<2$ 时，$y''<0$. 故 $x=2$ 为拐点的横坐标.
- 当 $x=2$ 时，$y=2e^{-2}$. 故拐点为 $(2,2e^{-2})$.
- 拐点处的曲率

$$\kappa=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{0}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=0$$

3. 解答题

题目 12

求极限 $L=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

分析与解 分母利用平方差公式，再化简即可直接求解该极限

解：$L=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{3+3}=\dfrac{1}{6}$.

题目 13

求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$.

分析与解 本极限利用夹逼准则求解

解：首先对 $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}$ 进行适当放缩：

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}&\geqslant\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{n}{(2n)^2}=\frac{n}{4n^2}=\frac{1}{4n}\\ \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}&\leq\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}\\ &=\frac{n}{(n+1)^2}=\frac{n}{n^2+2n+1}=\frac{1}{n+2+\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4n}\right)=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+2+\frac{1}{n}}\right)=0$，由夹逼定理得 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]=0$.

题目 14

求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}\cdot\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$.

分析与解 本极限利用了幂指代换与等价替代求解；且 $\exp f(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$

解：

$$\begin{aligned}L&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{1}{n}\ln n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{\ln n}{n}=1\end{aligned}$$

题目 15

设 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $\mathrm{d}y$ 为?

分析与解 本题考察了复合函数求导（求微分）的问题

解：

$$\begin{aligned}y'&=[f(\ln x)]'\cdot\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)\left[\mathrm{e}^{f(x)}\right]'=f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)\\&=\mathrm{e}^{f(x)}\left[\frac{f'(\ln x)}{x}+f(\ln x)f'(x)\right]\Longrightarrow\mathrm{d}y=y'\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{f(x)}\left[\frac{f'(\ln x)}{x}+f(\ln x)f'(x)\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

题目 16

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\left(x^2+y\right)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ 为?

分析与解 本题考察了隐函数求导，将代入 $x=0, y=1$ 即可.

解：当 $x=0$ 时，代入方程中有

$$\ln\left(0^2+y\right)=0^3\cdot y+\sin 0\Longrightarrow \ln y=0\Longrightarrow y=1$$

对方程 $\ln\left(x^2+y\right)=x^3y+\sin x$ 两边同时求导有

$$\frac{1}{x^2+y}\cdot\left(2x+y'\right)=3x^2y+x^3y'+\cos x$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上述方程有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{0^2+1}\cdot\left(2\cdot 0+\left.y'\right|_{x=0,y=1}\right)=3\cdot 0^2\cdot 1+0^3\cdot y'+\cos 0\\ &\Longrightarrow \left.y'\right|_{x=0,y=1}=1\Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1\end{aligned}$$

题目 17

$y=x^{x^x}$，求 y'.

分析与解 本题考察了对数求导法.

解：对 $y=x^{x^x}$ 两边同时取对数有

$$\begin{aligned}\ln y=\ln x^{x^x}&\Longrightarrow \ln y=x^x\ln x\\ &\Longrightarrow \ln\ln y=\ln\left(x^x\ln x\right)=\ln\left(x^x\right)+\ln\ln x\\ &\Longrightarrow \ln\ln y=x\ln x+\ln\ln x\end{aligned}$$

两边求导有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\cdot y'&=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\\ &\Longrightarrow y'=y\ln y\left(\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\right)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}y'&=x^{x^x}\cdot x^x\ln x\left(\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\right)\\ &=x^{x^x}\cdot x^{x-1}\left(x\ln^2 x+x\ln x+1\right)\\ &=x^{x^x+x-1}\left(x\ln^2 x+x\ln x+1\right)\end{aligned}$$

题目 18

求极限：$L=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}$.

分析与解 本极限利用了分子有理化求解.

解：

$$
\begin{aligned}
L&=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}{(x^2-4)\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}\\
&=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{5x-1}\right)^2-\left(\sqrt{2x+5}\right)^2}{(x^2-4)\left(\sqrt{5\cdot2-1}+\sqrt{2\cdot2+5}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{(5x-1)-(2x+5)}{(x^2-4)\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)}\\
&=\lim_{x\to2}\frac{3x-6}{(x^2-4)(3+3)}=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)}{6(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{2(x+2)}=\frac{1}{2(2+2)}=\frac18
\end{aligned}
$$

题目 19

设 $f(x)=(x^3-1)^n\mathrm{e}^x$，求 $f^{(n)}(1)$.

分析与解 本题利用莱布尼茨求导公式即可，因为求的是 $x=1$ 处的 n 阶导数，只要保留 $[(x^3-1)^n]^{(n)}$ 项即可.

解答：根据莱布尼茨 n 阶导数公式有：$[u(x)v(x)]^(n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}u^{(n-k)}v^k$.

设 $u(x)=(x^3-1)^n$，$v(x)=\mathrm{e}^x$，则有

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^k\\
&=\binom{n}{0}[(x^3-1)^n]^{(n)}\cdot\mathrm{e}^x+\binom{n}{1}\left[(x^3-1)^n\right]^{(n-1)}\cdot(e^x)'+\cdots+\binom{n}{n}\left[(x^3-1)^n\right]\cdot(e^x)^{(n)}\\
&=\left[(x^3-1)^n\right]^{(n)}\Big|_{x=1}\cdot\mathrm{e}^1+\underbrace{0+0+\cdots+0}_{n\text{个}0}=\left[(x^3-1)^n\right]^{(n)}\Big|_{x=1}\cdot\mathrm{e}.
\end{aligned}
$$

下面单独研究 $[(x^3-1)^n]^{(n)}$：

$$
\begin{aligned}
\left[(x^3-1)^n\right]'&=n\cdot(x^3-1)^{n-1}\cdot3x^2\\
\left[(x^3-1)^n\right]''&=n(n-1)\cdot(x^3-1)^{n-2}\cdot3x^2\cdot3x^2+n\cdot(x^3-1)^(n-1)\cdot6x\\
&=n(n-1)\cdot(x^3-1)^{n-2}\cdot3^2\cdot x^4+\cdots\\
\left[(x^3-1)^n\right]'''&=n(n-1)(n-2)\cdot(x^3-1)^{n-3}\cdot3^3\cdot x^6+\cdots\\
&\vdots\quad(\text{注意到除了第一项之外，求 } n \text{ 阶导数均会保留 } x^3-1\text{，代入 } x=1 \text{ 均为 } 0)\\
\left[(x^3-1)^n\right]^{(n-1)}&=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot(x^3-1)\cdot e^{n-1}\cdot x^{2(n-1)}+\cdots=n!\cdot(x^3-1)\cdot3^{n-1}\cdot x^{2(n-1)}+\cdots\\
\left[(x^3-1)^n\right]^{(n)}&=n!\cdot3x^2\cdot3^{n-1}\cdot x^{2(n-1)}+\cdots=n!\cdot3^n\cdot x^{2n}+\cdots\xlongequal{x=1}3^nn!\cdot1^{2n}+0+\cdots0=3^nn!
\end{aligned}
$$

综上所述：$f^{(n)}(1)=3^nn!\mathrm{e}$.

题目 20

设 $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$，求

1. 函数的间断点并判断其类型.
2. 该函数的水平渐近线和垂直渐近线.

分析与解 本题考察了间断点和渐近线的相关知识点

1. 当 $x=0$ 时，函数无定义，因此 $x=0$ 为间断点.
2. 当 $x=0$ 时，函数无定义，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\infty$，因此 $x=0$ 为垂直渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

因此，$y=-1, y=1$ 为水平渐近线.

题目 21

讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 的连续性和可导性质.

分析与解 连续性通过讨论左右极限和函数值；可导性讨论左右导数.

$$\begin{cases}\text{左极限：}\ f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{0}{1+0}=0\\ \text{函数值：}\ f(0)=0\\ \text{右极限：}\ f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{0}{1+\infty}=0\end{cases}$$

于是，$f(0-0)=f(0)=f(0+0)\Longrightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

下面讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性质，

$$\begin{cases}\text{左导数：}\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\\ \qquad=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1+0}=1\\ \text{右导数：}\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\\ \qquad=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1+\infty}=0\end{cases}$$

于是：$f'_-(0)\neq f'_+(0)\Longrightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

题目 22

设 $0<x<a$，对任意的自然数 m,n，试证：$x^m(a-x)^n \le \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$.

分析与解 本题通过研究左边函数的单调性，确认出极值（最值），再利用其与不等式右边的数相比较

证明：设 $f(x)=x^m(a-x)^n$

$$\begin{aligned}f'(x)&=mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}\\&=x^{m-1}(a-x)^{n-1}\left[m(a-x)-nx\right]\\&=x^{m-1}(a-x)^{n-1}\left[ma-(m+n)x\right]\end{aligned}$$

令 $f'(x)=0$，则 $x^{m-1}(a-x)^{n-1}\left[ma-(m+n)x\right]=0$.

$x\in(0,a)$ 时，$x^{m-1}(a-x)^{n-1}\neq 0$，故 $ma-(m+n)x=0$，即 $x=\dfrac{ma}{m+n}$. 下面进行列表

x	$\left(0,\dfrac{ma}{m+n}\right)$	$\dfrac{ma}{m+n}$	$\left(\dfrac{ma}{m+n},a\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

因此 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{ma}{m+n}$ 取得极大值：

$$\begin{aligned}f\left(\frac{ma}{m+n}\right)&=\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\left(a-\frac{ma}{m+n}\right)^n=\frac{m^m a^m}{(m+n)^m}\left[\frac{a(m+n)}{m+n}-\frac{ma}{m+n}\right]^n\\&=\frac{m^m a^m}{(m+n)^m}\left(\frac{na}{m+n}\right)^n=\frac{m^m a^m}{(m+n)^m}\cdot\frac{n^n a^n}{(m+n)^n}=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}\end{aligned}$$

又因为 $f(0)=f(a)=0$，故 $f\left(\dfrac{ma}{m+n}\right)$ 也为 $x\in(0,a)$ 时，$f(x)$ 的最大值. 因此，在 $x\in(0,a)$ 时，$f(x)\le \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$，即不等式 $x^m(a-x)^n\le\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$ 成立.

题目 23

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0\le f(x)\le\dfrac{x}{1+x^2}$. 证明：存在 $\xi\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

分析与解 构造函数后利用罗尔定理证明即可

证明：设 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$，$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且可导. 由于 $0\le f(x)\le\dfrac{x}{1+x^2}$ 可得

$$f(0)=0,\ f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\le\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=0$$

于是 $F(0)=f(0)-0=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}\right]=f(+\infty)-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$. 由于 $F(0)=F(+\infty)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,+\infty)$ 使得

$$f'(\xi)=0\Longrightarrow f(\xi)-\frac{\xi}{1+\xi^2}=0\Longrightarrow f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

构造函数：令 $\xi=x$，则有 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Longrightarrow f'(x)-\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$. 注意到 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的导数为

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Longrightarrow F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$$