第五讲

刚体定轴转动的角动量定理与角动量守恒

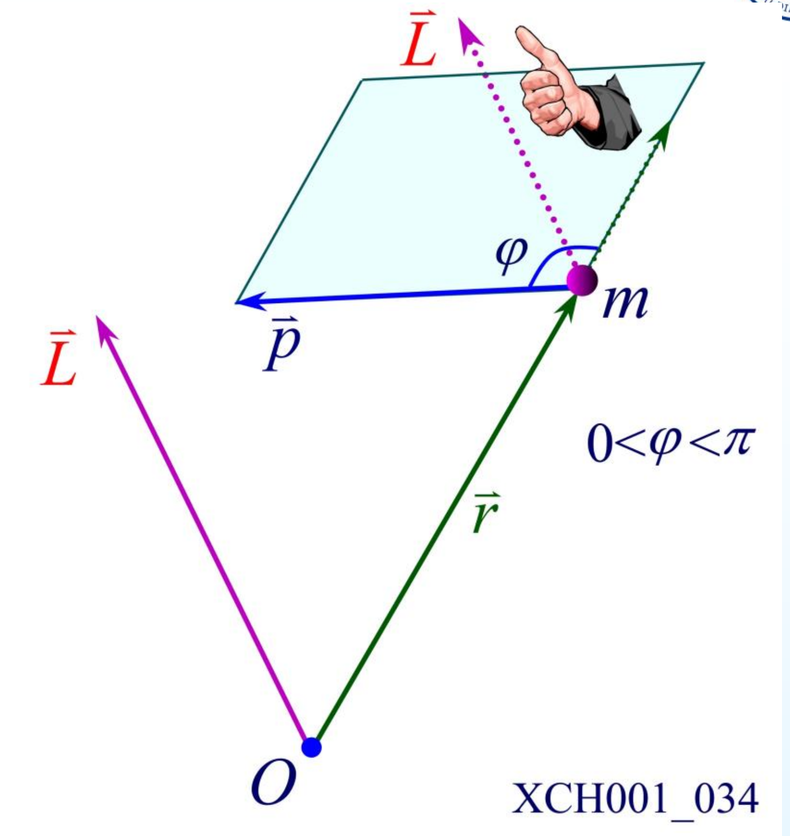
01 角动量

1 质点的角动量

质点**m**以动量 $\vec{p} = m\vec{v}$ 运动

对**O**点的角动量

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$



大小 $|\vec{L}| = mvr\sin\varphi$

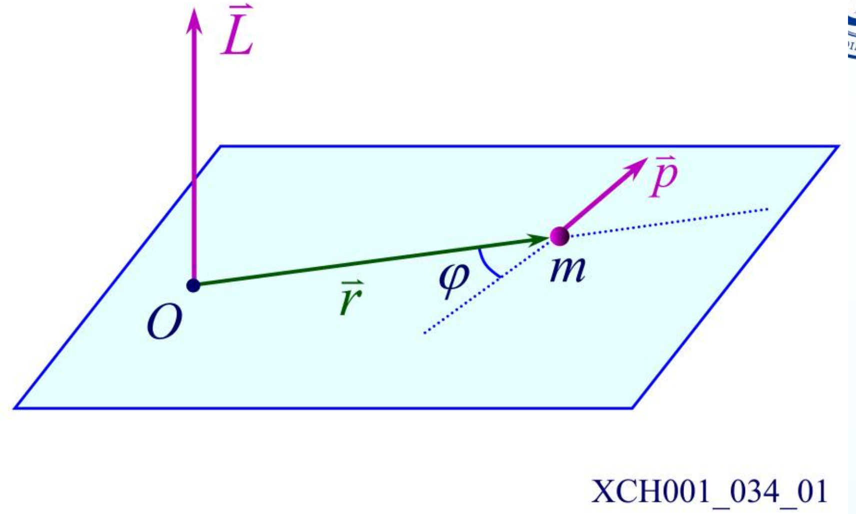
方向 $\vec{r} \times m\vec{v}$ —— 满足右手螺旋关系

1 质点平面运动的角动量

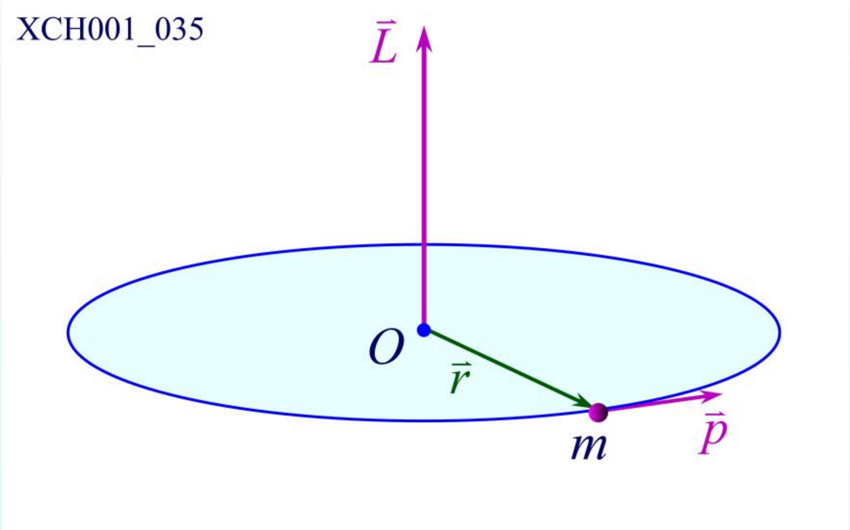
质点在水平面内运动

对平面内O点的角动量

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$



—— 过O点垂直于平面的z轴的角动量

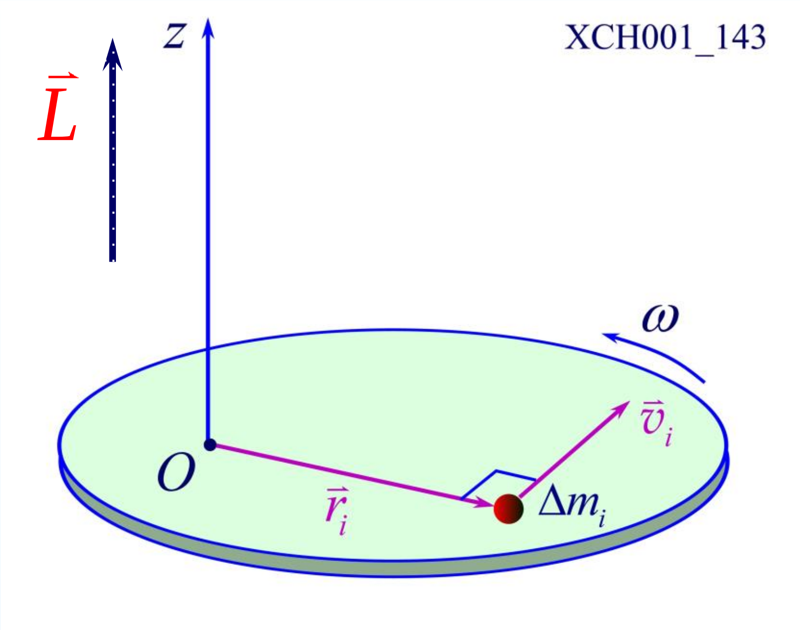


质点做圆周运动

角动量的大小 $\boxed{L=mvr}$

2 刚体定轴转动的角动量

质量元 Δm_i 对转轴角动量 $L_i = \Delta m_i v_i r_i$



—— 方向沿转轴的正方向

刚体对转轴的角动量

$$L_z = \sum_i \Delta m_i v_i r_i = \sum_i \Delta m_i (\omega r_i) r_i$$

$$L_z = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega$$

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

$$\boxed{L_z = J\omega}$$

—— 沿转轴正方向

02 角动量定理

1 质点角动量定理

质点角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v} \longrightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt}$

$$=\vec{r}\times\frac{d(m\vec{v})}{dt}+\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}\times(m\vec{v})}$$

$$\xrightarrow{\vec{v}\times(m\vec{v})=0} \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\boxed{\frac{d(m\vec{v})}{dt}}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$

$$\boxed{\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}} \longrightarrow \boxed{\vec{M}dt=d\vec{L}}$$

—— 力矩对时间的积累等于角动量的增量

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$

2 质点系的角动量定理 —— N个质点构成的系统

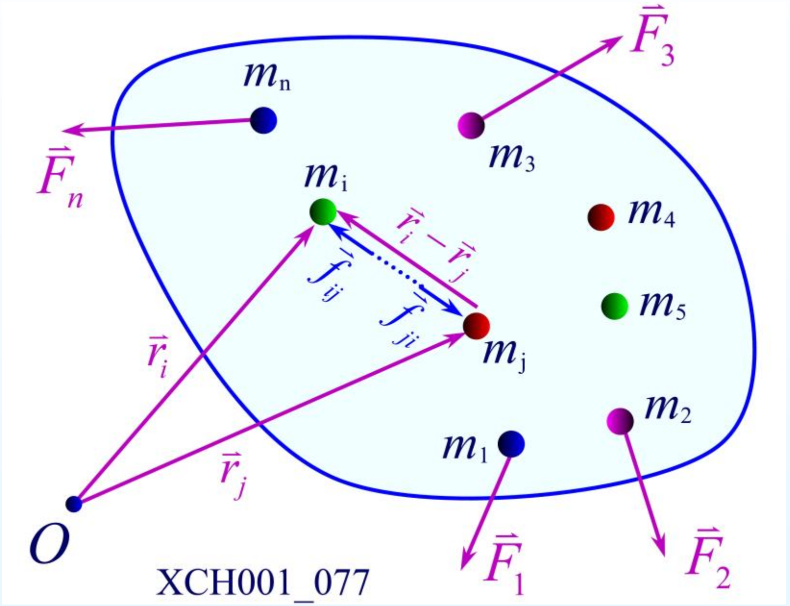
第i个质点对O点的角动量 $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$　　$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i = \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij})$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i [\vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij})]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \boxed{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i} + \underbrace{\boxed{\sum_i (\vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij})}}_{=0}$$

$\vec{M}_e$ 合外力矩

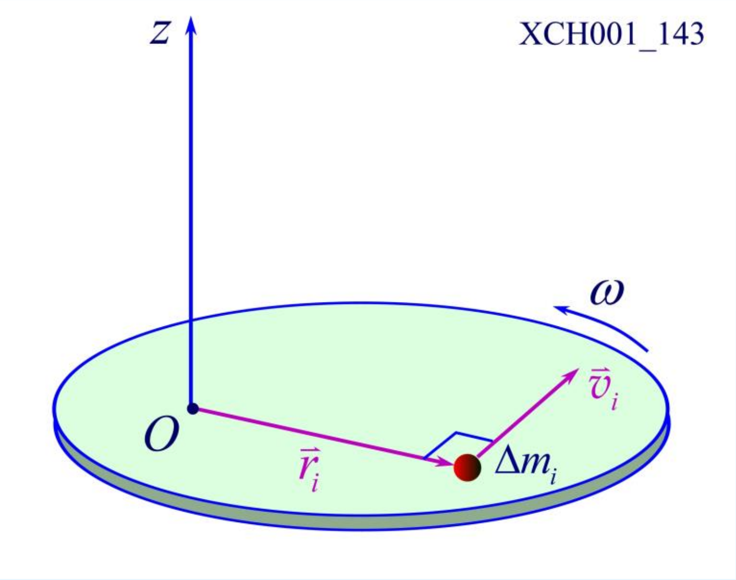


$$\begin{cases} \vec{M}_e dt = d\vec{L} \\ \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_e dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \end{cases}$$

—— 质点系角动量定理

3 刚体定轴转动的角动量定理

刚体对定轴的角动量 $L = J\omega$ —— 两边对时间微分



$$\frac{dL}{dt} = \boxed{\frac{d(J\omega)}{dt}} = J\frac{d\omega}{dt} = J\alpha = \boxed{M}$$

$$M dt = d(J\omega)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = J\omega_2 - J\omega_1$$

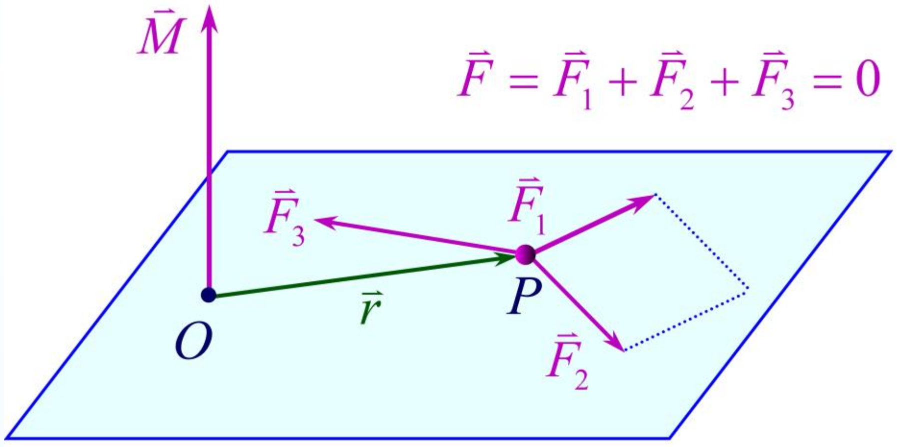
力矩对时间的积累等于刚体定轴转动角动量的增量

03 角动量守恒定律

1 单个质点

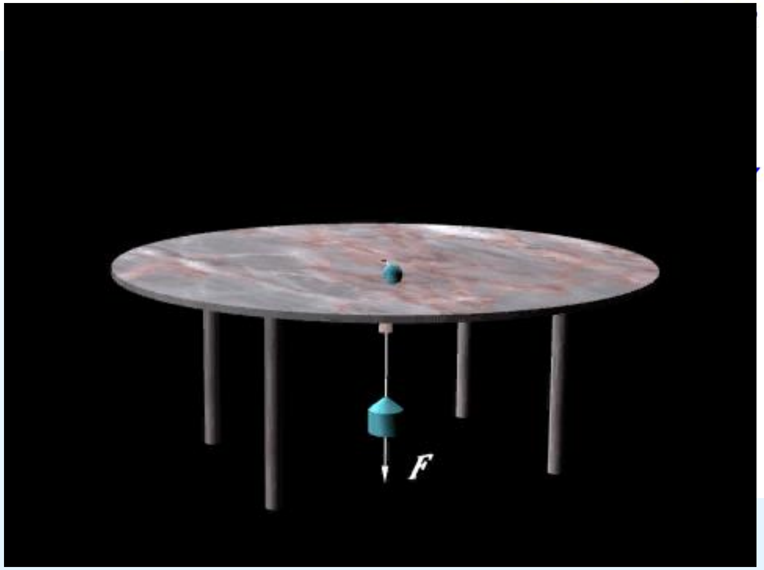
质点的角动量定理

$$\vec{M}dt = d\vec{L}$$



如果 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{C}}$$



—— 质点的角动量守恒

自然界最基本定律之一 —— 不依赖于牛顿定律

2 质点系

$$\vec{M}_e dt = d\vec{L}$$ —— 质点系角动量定理

$$\xrightarrow{\vec{M}_e=0} \boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \vec{C}}$$

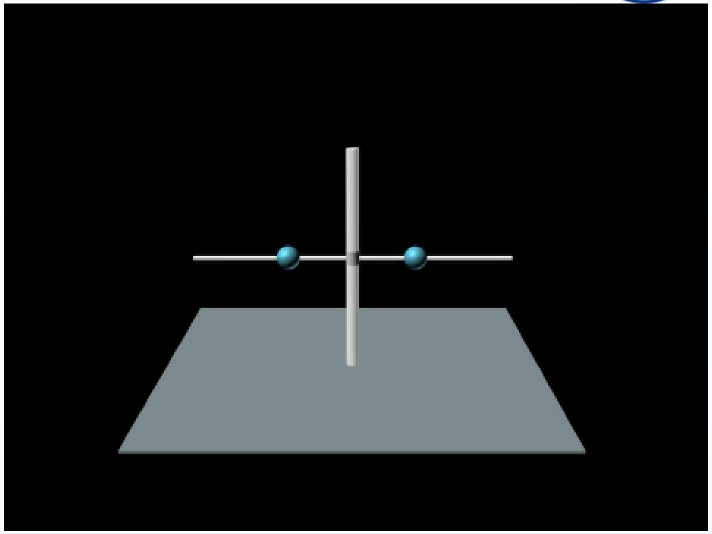
—— 质点系角动量守恒

3 刚体定轴转动

角动量定理 $Mdt = d(J\omega)$

$$\xrightarrow{M=0} \boxed{J\omega = Constant}$$ —— 刚体的角动量守恒

刚体角动量守恒 $J\omega = Constant$



冰上舞蹈

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

04 角动量守恒定律的应用

1) 确定研究的对象 —— 刚体和质点

2) 分析研究对象受力和对转轴的力矩是否为零？

确定角动量守恒 —— 选取转轴正方向

3) 应用角动量守恒列出方程

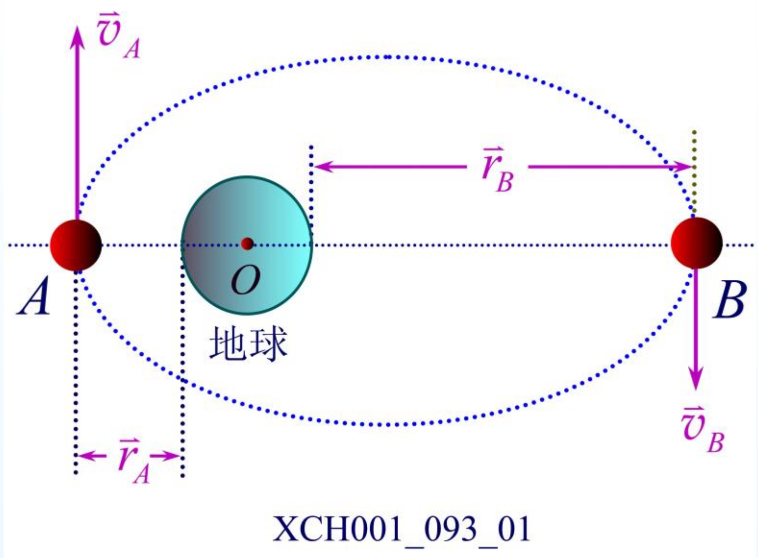
4) 求出相关的物理量

5) 如果还求其它的物理量

需根据角动量定理，刚体定轴转动定律，牛顿定律，质心运动定理列出相关方程，求得相应的的物理量。

设人造地球卫星在地球引力场中沿平面椭圆轨道运动，地球中心可看作固定点，在椭圆的一个焦点上

$$\begin{cases} r_A = 439\ km, & r_B = 2384\ km \\ v_A = 8.12\ km/s, & R = 6370\ km \end{cases}$$



求卫星在远地点的速度大小

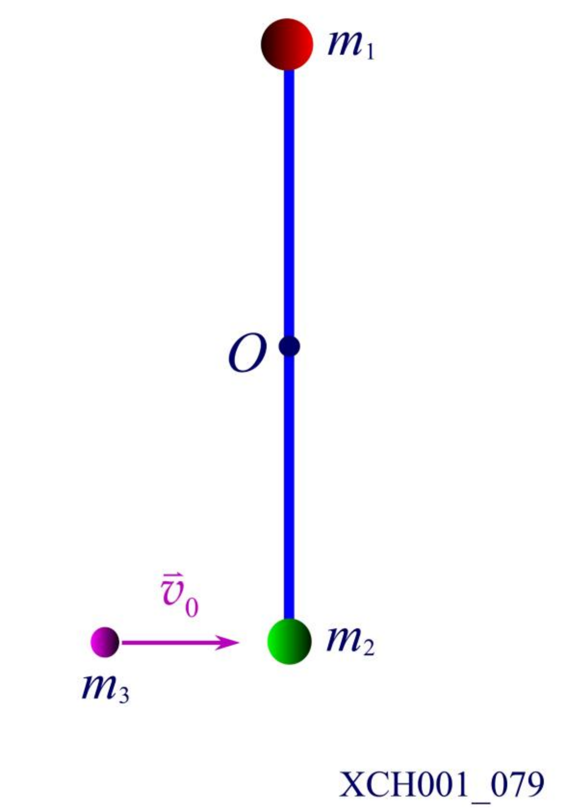
卫星在地球有心力场中运动

卫星对地心的角动量守恒 $mv_B(r_B+R)=mv_A(r_A+R)$

$$\boxed{v_B = \frac{r_A+R}{r_B+R}v_A = 6.32km/s}$$ —— 卫星远地点的速率

质量为m_1和m_2的两个小钢球固定在一个长度为a的轻质硬杆的两端，杆可以绕通过中心O的轴在水平面自由转动，杆原来静止，不计杆的质量。

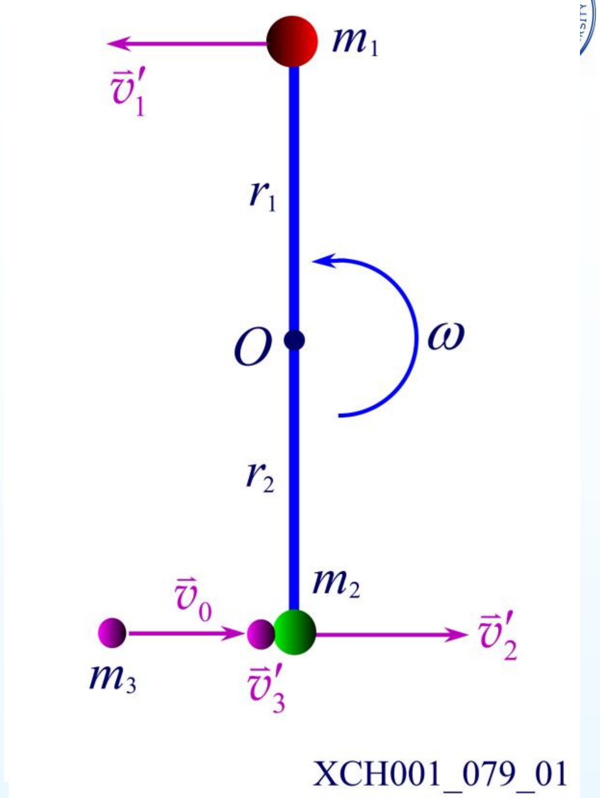
有一个质量为m_3的泥球，以水平速度$\vec{v}_0$垂直于杆的方向与m_2发生碰撞，并粘在一起



计算碰撞后杆转动的角速度

三个质点：对O点的外力矩为零

系统对O点的角动量守恒



碰撞前 $\left|\vec{L}_1\right| = m_3 v_0 r_2$ —— 方向向外

$\parallel$

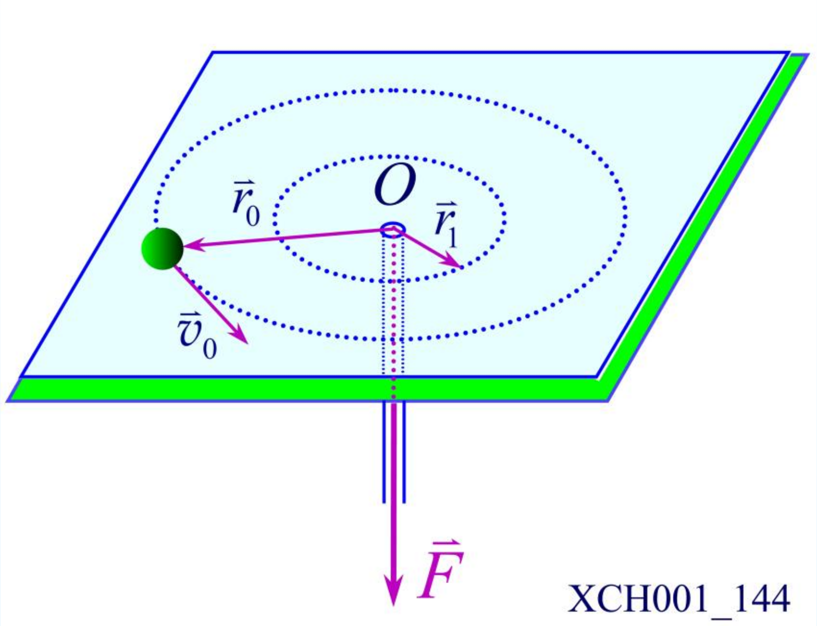
碰撞后 $\left|\vec{L}_2\right| = m_3 v_3' r_2 + m_2 v_2' r_2 + m_1 v_1' r_1$

—— 方向向外

$$\begin{cases} r_1 = r_2 = \dfrac{1}{2}a \\ v_1' = v_2' = v_3' = \dfrac{1}{2}a\omega \end{cases} \longrightarrow m_3 v_0 \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4}a^2\omega(m_1 + m_2 + m_3)$$

角速度 $$\boxed{\omega = \frac{2v_0}{a}\frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}}$$

质量为m的小球在穿过铅直管绳子的作用下在光滑平面上运动。初始小球以速度v_0和半径r_0作圆周运动，向下拉绳使小球的运动轨迹为半径为r_1圆。求



1) 此时小球的速度大小

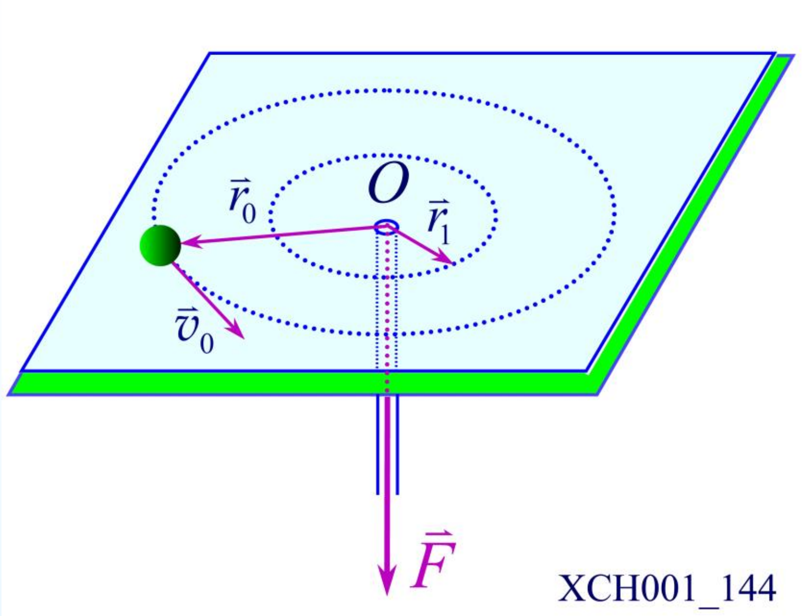
2) 由r_0缩短到r_1的过程中

F 做的功

小球受F，重力和平面支承力

三个力对转轴的力矩为零 —— 小球的角动量守恒

1) 半径为r_1时小球的速率



角动量守恒 $mv_0r_0 = mvr_1$

小球的速率 $v = (\frac{r_0}{r_1})v_0$

2) 力F做的功

应用质点动能定理 $A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2[(\frac{r_0}{r_1})^2 - 1]$$

质量M、半径R的转盘，绕铅直轴无摩擦转动

转盘的初角速度为零。

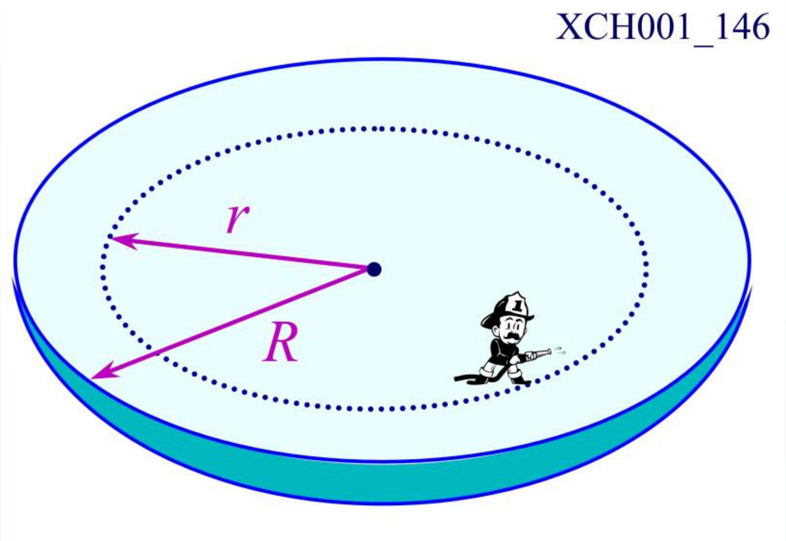
一个质量m的人

从静止开始沿半径为r的圆周

相对于转盘匀速走动。

求人行走一周回到原来位置时

转盘相对于地面转过多少角度。

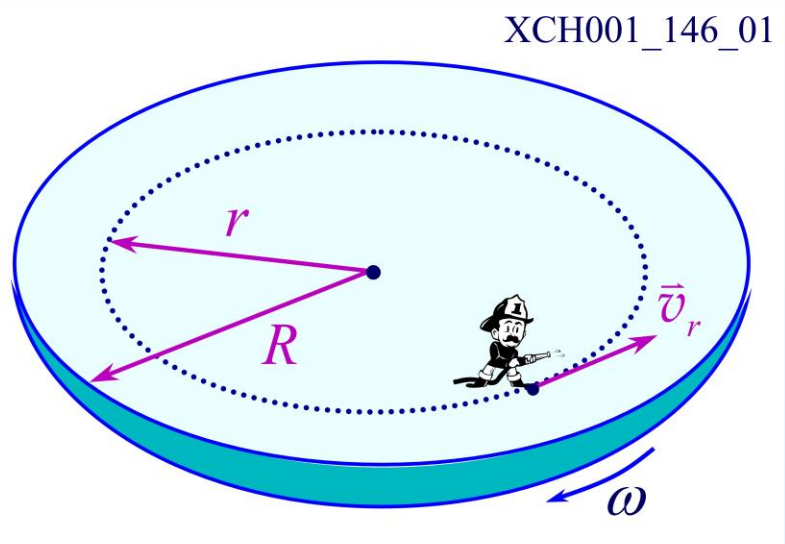


对象人和转盘，规定转轴正方向向上

系统外力矩为零，角动量守恒

角动量守恒 $0 = m(v_r + \omega r)\cdot r + (\frac{1}{2}MR^2)\cdot\omega$

$$\omega = -\frac{mrv_r}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2}$$ ——和规定转轴正方向相反



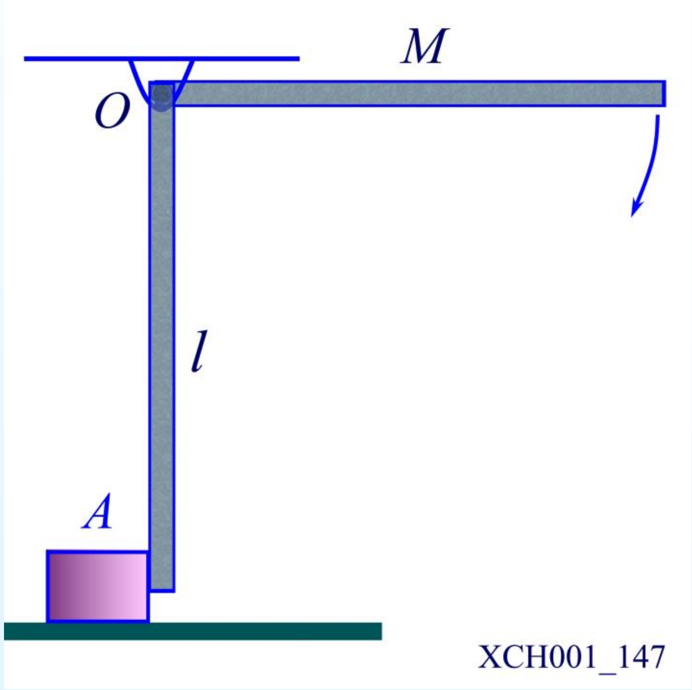
人走一圈需要时间 $\Delta t = \frac{2\pi r}{v_r}$

转盘相对于地面转过 $\theta = (-\omega)\Delta t = 2\pi \frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2}$

长l、质量为M 匀质杆，一端悬挂，可绕通过O点垂直于纸面的轴转动。杆自水平位置静止落下，在铅直位置与质量为m的物体A发生完全非弹性碰撞。

碰后物体A沿摩擦系数为μ的水平面滑动。

求物体A沿水平面滑动的距离。



三个过程

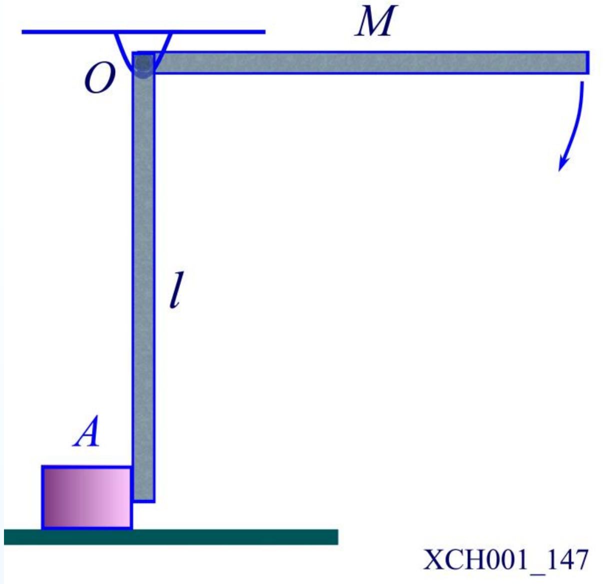
1) 杆下落到铅直位置

2) 杆与物体碰撞

3) 碰撞后物体的运动

1) 杆下落到铅直位置 —— 机械能守恒

$$\frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}Mgl = 0$$



杆与A碰撞前的角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}$

2) 杆与物体碰撞前后 —— 角动量守恒

$$J\omega = J\omega' + m(\omega' l)\cdot l$$

碰撞后的角速度

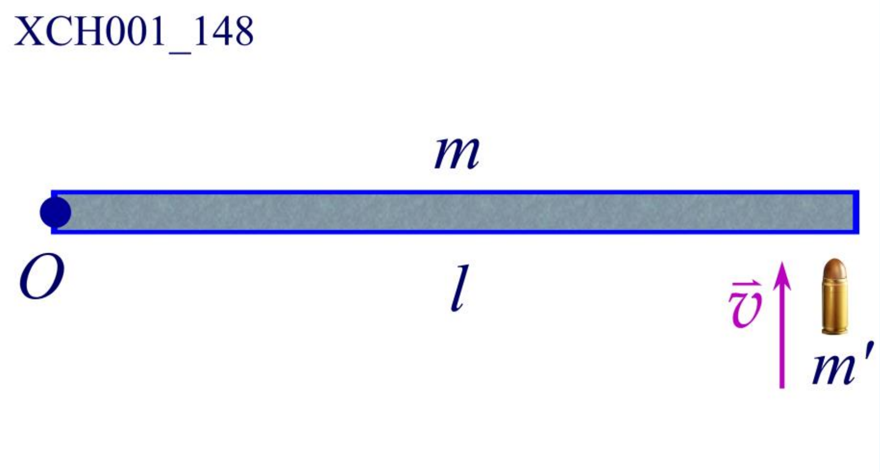
$$\omega' = \frac{M}{M+3m}\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

3) 碰撞后物体 —— 动能定理

$$-(\mu mg)\cdot s = 0 - \frac{1}{2}m(\omega' l)^2$$

$$\boxed{s = \frac{3l}{2\mu}\frac{M^2}{(M+3m)}}$$

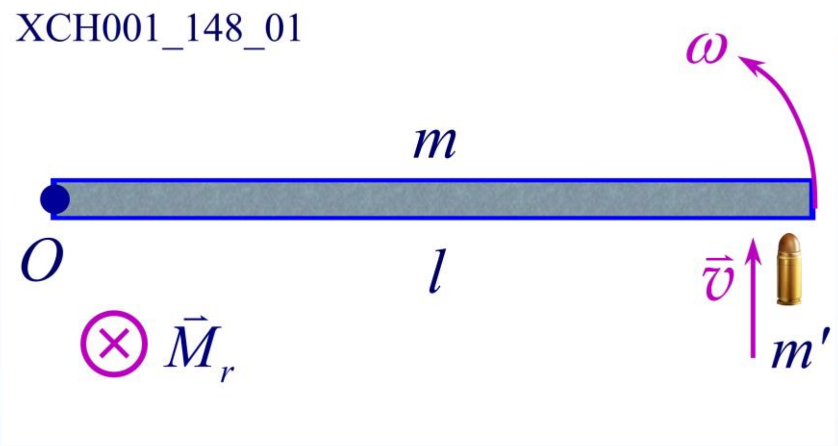
一根放在光滑平面上质量为*m*，长度为*l*的匀质棒可以绕通过*O*点的垂直轴转动。初始时静止。现有一颗质量为*m'*，速率为 v 的子弹垂直射入棒另一端并且留在棒中。问



1) 棒和子弹一起转动时的角速度ω为多少？

2) 如果棒转动时受到了恒定的阻力矩为M_r棒能转过多大的角度？

棒和子弹碰撞前后系统对O点的角动量守恒



碰撞前的角动量

$$L_1 = m'vl$$

碰撞后的角动量

$$L_2 = m'(\omega l)l + (\frac{1}{3}ml^2)\omega \longrightarrow m'vl = (m' + \frac{1}{3}m)l^2\omega$$

棒和子弹一起转动时的角速度

$$\boxed{\omega = \frac{m'}{(m' + m/3)l}v}$$

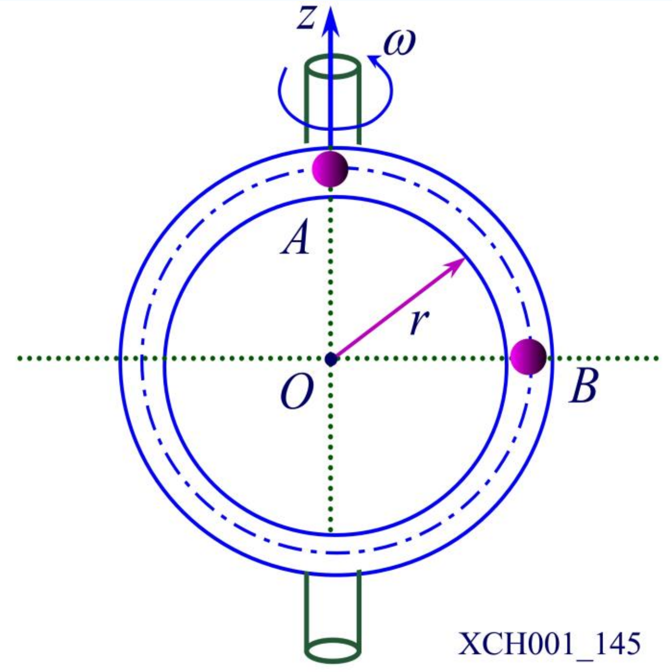
应用刚体定轴转动的动能定理

$$-M_r\theta = 0 - \frac{1}{2}\underline{(\frac{1}{3}ml^2 + m'l^2)}\omega^2$$

$$\boxed{\theta = \frac{m'^2v^2}{2M_r(m' + m/3)}}$$

半径为r圆形管对直径的转动惯量为J，以角速度ω绕z轴自由转动。管顶部A处有一质量m小球。受扰动后小球沿管子下落，计算小球到达B点时，圆管的角速度

对象小球和圆形管 —— 系统的重力对z轴力矩和为零

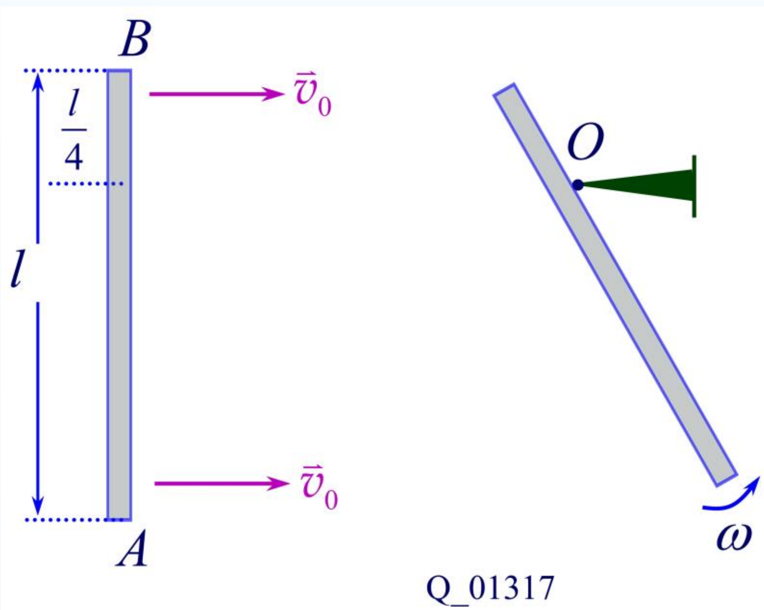


系统的角动量守恒

$$J\omega = J\omega_B + mr^2\omega_B$$

$$\boxed{\omega_B = \frac{J + mr^2}{J}\omega}$$

一个长度为l，质量为m的匀质细棒，以速度$\vec{v}_0$在光滑平面上平动时，与前方一个固定的光滑支点O发生完全非弹性碰撞，碰撞点在棒的 $\frac{1}{4}l$ 长处。求棒在碰撞后的瞬时绕点的转动角速度ω。

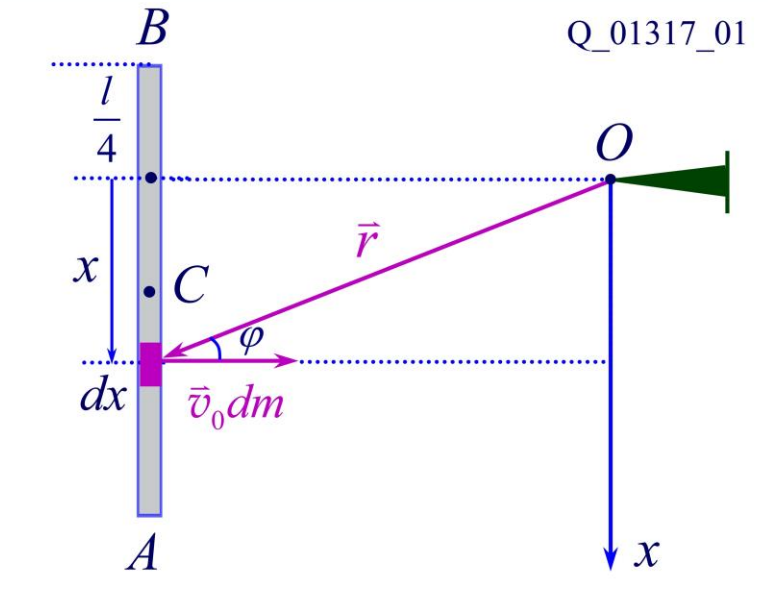


细棒和发生支点碰撞，支点对棒的作用力通过转轴对转轴的力矩为零。

碰撞前后

—— 棒对O点的角动量不变

碰撞前细棒对O点的角动量



选取质量元 $dm = (\frac{m}{l})dx$

质量元对点角动量大小

$$dL_1 = (dm)v_0 \cdot r\sin(\pi - \varphi)$$

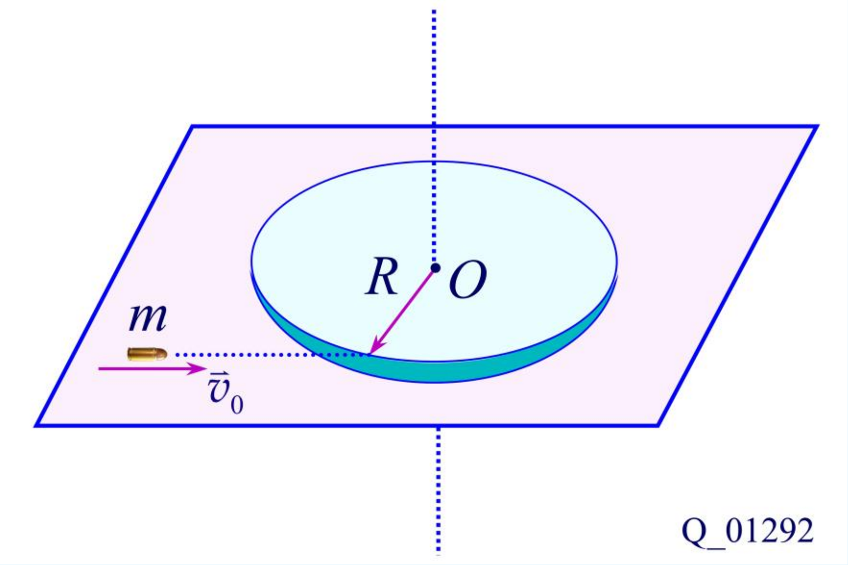
$$= (\frac{m}{l})v_0 x dx$$ —— 方向向外

总的角动量 $L_1 = \int_{-\frac{l}{4}}^{\frac{3l}{4}} (\frac{m}{l})v_0 x dx = \frac{1}{4}mv_0 l$ —— 方向向外

碰撞后的角动量 $L_2 = J\omega = [\frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{1}{4}l)^2]\omega = (\frac{7}{48}ml^2)\omega$

$$\omega = \frac{12v_0}{7l}$$

一个质量均匀分布的圆盘，质量为M，半径为R，放在一粗糙的水平面上(圆盘与平面之间的摩擦系数为μ)，圆盘可绕通过中心的光滑轴转动，开始时，圆盘静止，一个质量为m的子弹以水平速度 v_0 垂直于半径打入圆盘边缘并嵌在盘边，



求：

1) 子弹击中圆盘后，

圆盘获得的角速度；

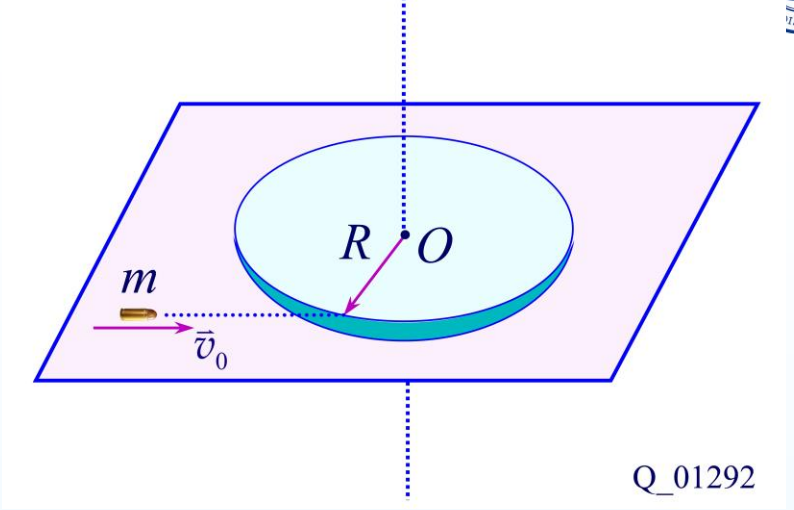
2) 经过多长时间，

圆盘停止转动

(忽略子弹重力产生的摩擦阻力矩)

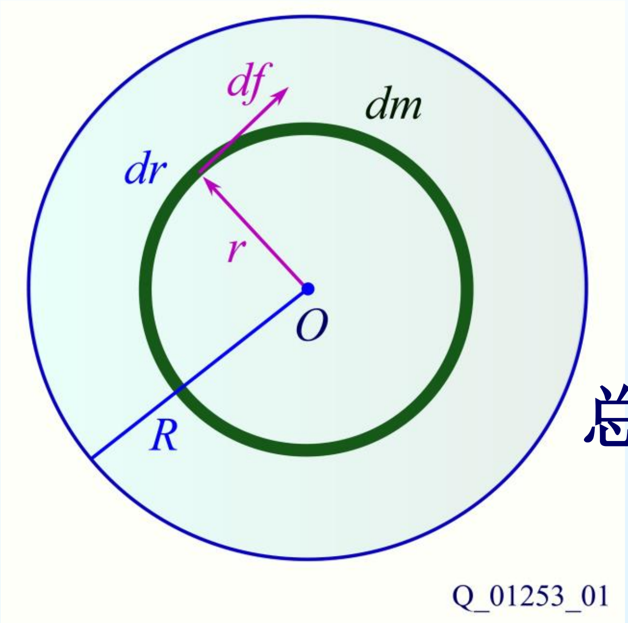
子弹打入前后，子弹和圆盘对转轴的角动量守恒

$$mv_0R=(\frac{1}{2}MR^2+mR^2)\omega$$



圆盘获得的角速度

$$\omega=\frac{2m}{(M+2m)}\frac{v_0}{R}$$

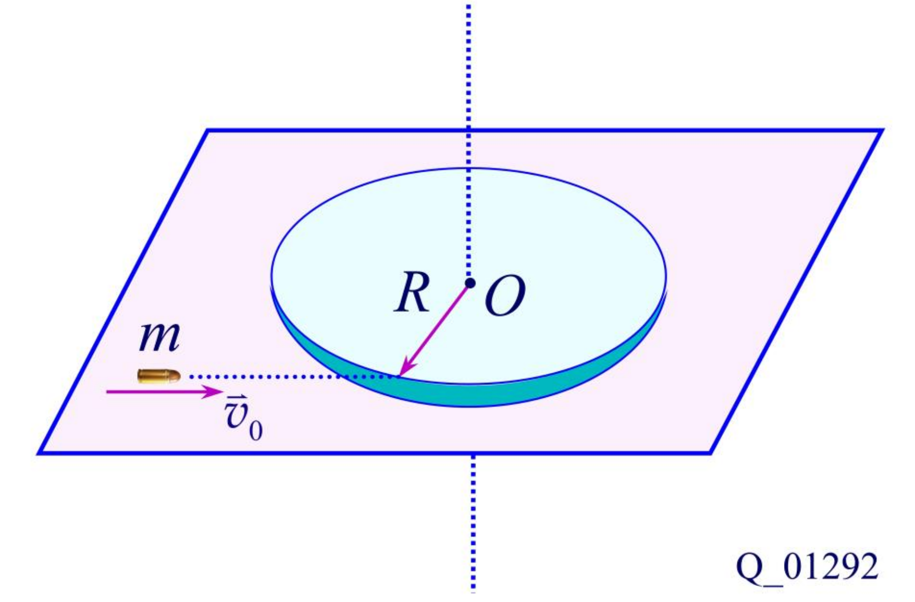


摩擦力矩 选取面积元 $dS=(2\pi r)dr$

摩擦力矩 $dM_f=r[(\frac{M}{\pi R^2})(2\pi rdr)g\mu]$

总的摩擦力矩 $M_f=\int_0^R\frac{2\mu Mg}{R^2}r^2dr$

$$=\frac{2}{3}\mu MgR$$



圆盘的摩擦力矩

$$M_f = \frac{2}{3}\mu MgR$$

应用角动量定理

$$(-\frac{2}{3}\mu MgR)\Delta t = 0 - J\omega$$

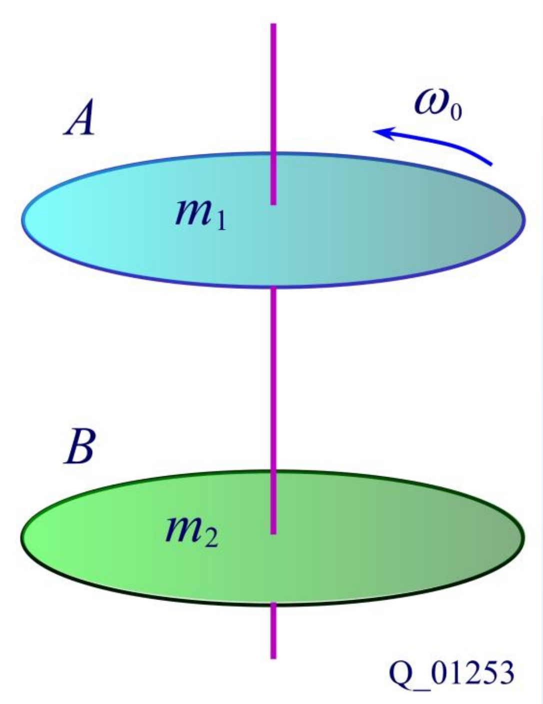
$$\left\{\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \\ \omega &= \frac{2m}{(M+2m)}\frac{v_0}{R} \end{aligned}\right. \xrightarrow[\text{转动时间}]{\text{圆盘停止}} \boxed{\Delta t = \frac{3}{2}\frac{mv_0}{\mu Mg}}$$

两个半径均为***R***、质量分别为$m_1 = 3m$和$m_2 = m$的圆盘***A***和***B***在同一轴上，均可绕轴无摩擦地旋转。***A***盘的初始角速度为ω_0。***B***盘开始时静止，现将盘放下，使两盘互相接触，若两盘间的摩擦系数为μ。

问：

1) 经过多少时间两盘以相同角速度旋转？

2) 共同旋转的角速度为多大？



将***A***和***B***视为一个系统，接触后相互之间的摩擦力矩是内力矩，系统对转轴的角动量守恒。

$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$接触前 $L_1 = (\frac{1}{2}m_1R^2)\omega_0$

$\parallel$

$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$接触后 $L_2 = (\frac{1}{2}m_1R^2)\omega_1 + (\frac{1}{2}m_2R^2)\omega_2$

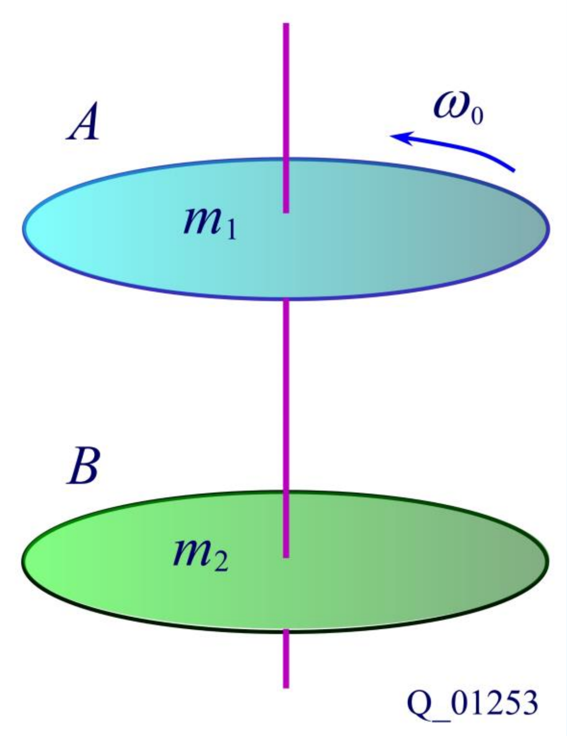
$$\xrightarrow{\begin{cases} m_1 = 3m \\ m_2 = m \end{cases}} \quad 3\omega_0 = 3\omega_1 + \omega_2$$

相同角速度旋转 $\omega = \omega_1 = \omega_2 = \frac{3}{4}\omega_0$

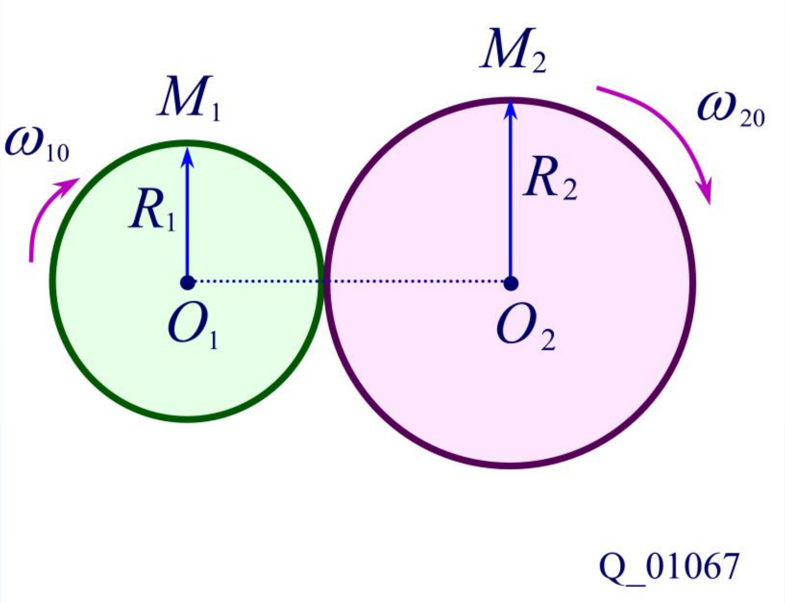
$\boldsymbol{A}$盘的摩擦力矩 $M_f = \frac{2}{3}\mu m_1 gR = 2\mu mgR$

$$-(2\mu mgR)\Delta t = J_1\omega - J_1\omega_0$$

$$\xrightarrow[J_1 = \frac{1}{2}m_1R^2 = \frac{3}{2}mR^2]{} \boxed{\Delta t = \frac{3R\omega_0}{16\mu g}}$$



质量分别为M_1 and M_2，半径分别为R_1 and R_2 的两均匀圆柱，可分别绕它们自身的轴转动，二轴平行。原来它们沿同一转向分别以 ω_{10} and ω_{20} 的角速度匀速转动，然后平移二轴，使它们的边缘相接触。求最后在接触处无相对滑动，每个圆的角速度是 ω_1 and ω_2。



对上述问题有以下解法：

在接触处无相对滑动，

二圆柱边缘的线速度相等。

则：$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$

二圆柱系统角动量守恒：

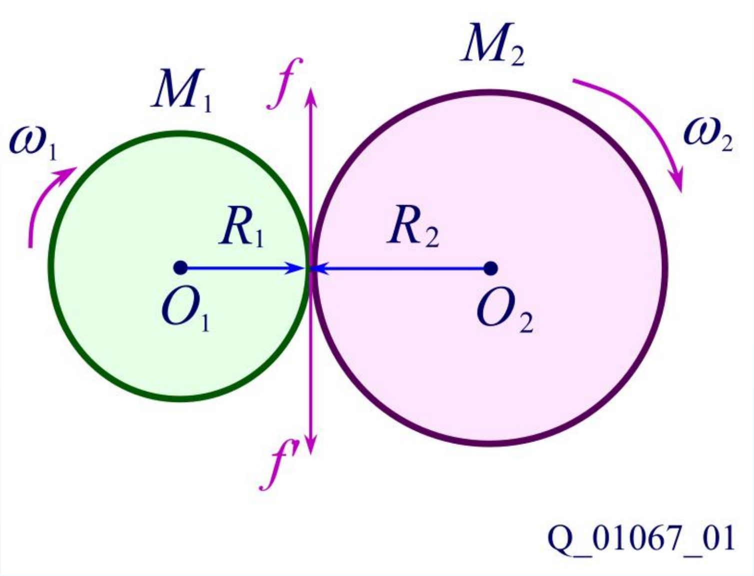
$$\omega_{10} J_1 + \omega_{20} J_2 = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2$$

解以上二式即可解出角速度。你对这种解法有何意见？

这种做法是错误的

$\omega_{10}J_1+\omega_{20}J_2 \cancel{=} J_1\omega_1+J_2\omega_2$ 中的角动量不是对**同一个转轴**

对两个圆柱分别应用角动量定理



圆柱1 $\int_0^t(-fR_1)dt = J_1\omega_1 - J_1\omega_{10}$

圆柱2 $\int_0^t(-fR_2)dt = J_2\omega_2 - J_2\omega_{20}$

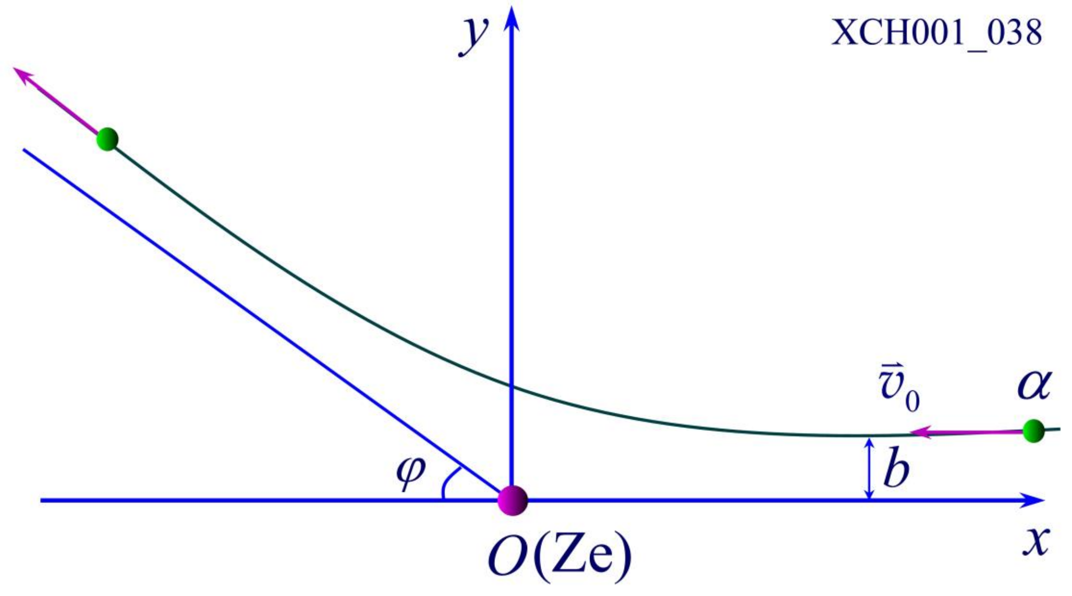
$$\frac{J_1\omega_1 - J_1\omega_{10}}{R_1} = \frac{J_2\omega_2 - J_2\omega_{20}}{R_2}$$

$$\begin{cases} J_1 = \dfrac{1}{2}M_1R_1^2 \\ J_2 = \dfrac{1}{2}M_2R_2^2 \quad \omega_1R_1 = -\omega_2R_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{M_1R_1\omega_{10} - M_2R_2\omega_{20}}{(M_1+M_2)R_1} \\ \omega_2 = \dfrac{-M_1R_1\omega_{10} + M_2R_2\omega_{20}}{(M_1+M_2)R_2} \end{cases}$$

α粒子在远处以速度 $\vec{v}_0$ 入射一个重原子核

瞄准距离 b (原子核到瞄准直线的距离)

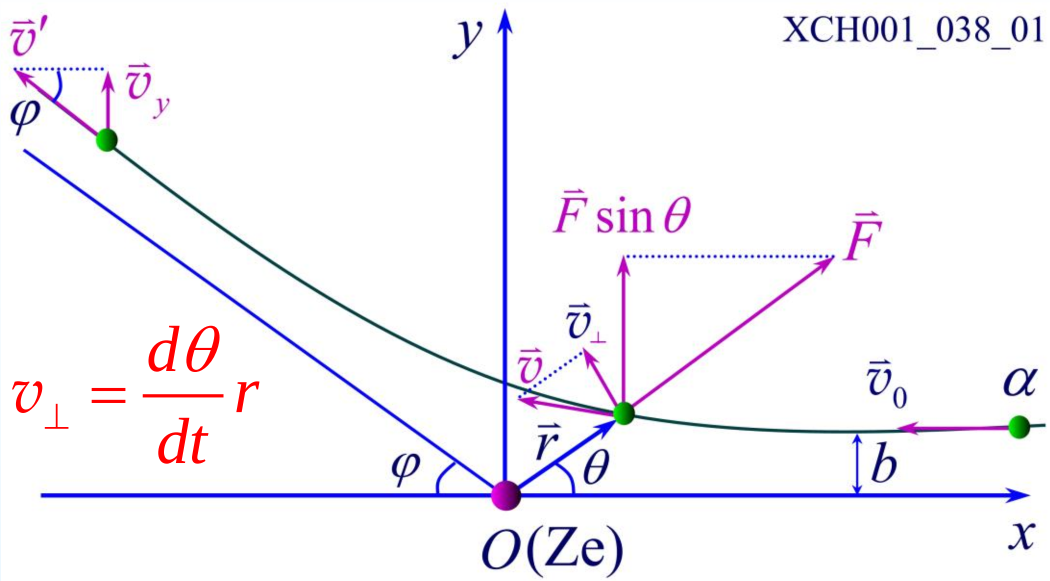
重原子核的电量 Ze，计算 α 粒子被重原子核散射的角度。



重核的质量远远大于α粒子的质量，重核静止不动

散射过程α粒子受重核库仑力， α粒子角动量守恒。

α粒子受到库仑力 $F=\dfrac{kZe\cdot 2e}{r^2}=\dfrac{2kZe^2}{r^2}$



—— 方向沿位矢方向

α粒子远处入射时

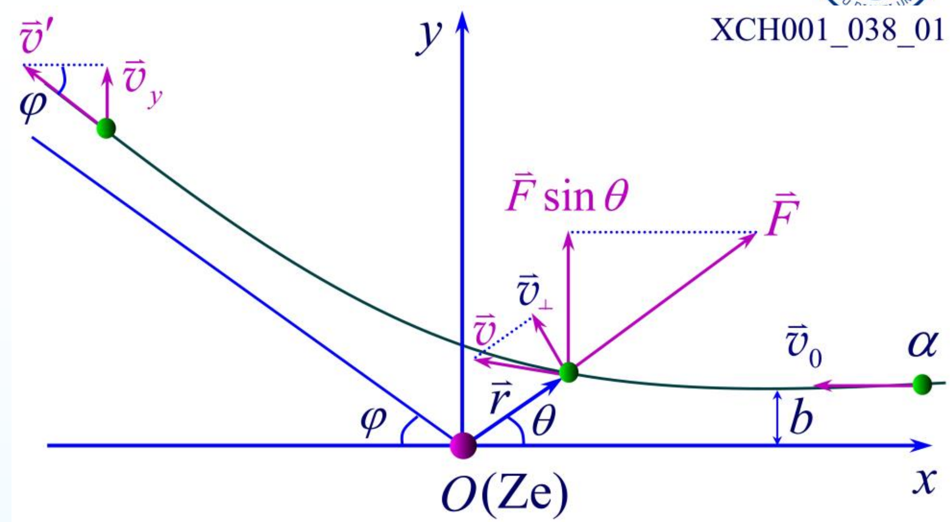
$$L_1=mv_0b$$

任一位置α粒子的角动量 $L_2=mv_\perp r=mr^2\dfrac{d\theta}{dt}$

α粒子角动量守恒 $\longrightarrow$ $mr^2\dfrac{d\theta}{dt}=mv_0b$

XCH001_038_01

$$mr^2\frac{d\theta}{dt}=mv_0 b$$



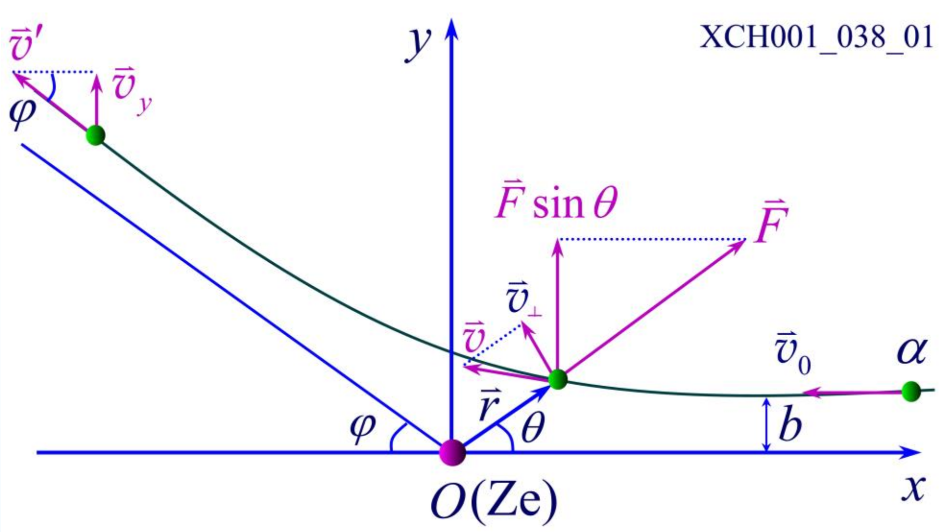
***y*方向** $m\frac{dv_y}{dt}=(\frac{2kZe^2}{r^2})\sin\theta$

$$\xrightarrow{\text{消去 } r \text{ 和 } dt} dv_y=\frac{2kZe^2}{mv_0 b}\sin\theta d\theta$$

重核的库仑场为保守力

粒子从远处入射和散射后运动到很远处时

动能不变，速率大小相等 $v'=v_0$



$$dv_y = \frac{2kZe^2}{mv_0 b}\sin\theta d\theta$$

$$\int_0^{v_0\sin\varphi} dv_y = \int_0^{\pi-\varphi} \frac{2kZe^2}{mv_0 b}\sin\theta d\theta$$

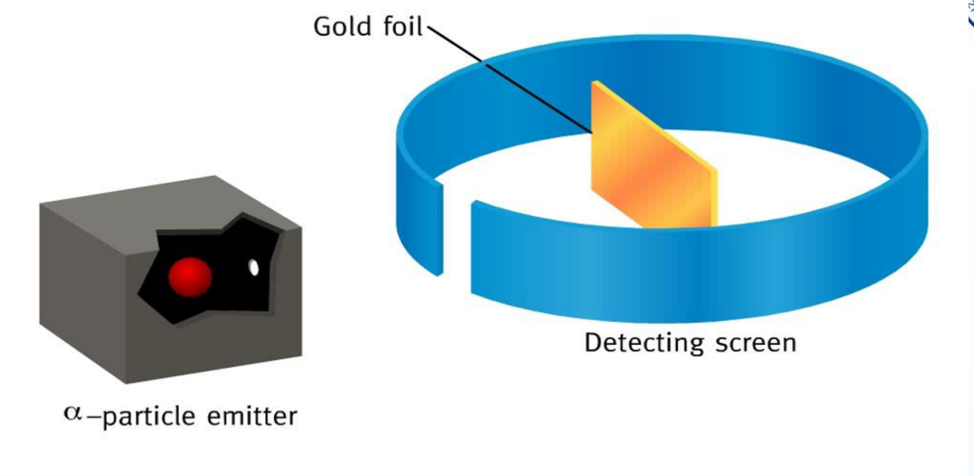
$$v_0\sin\varphi = \frac{2kZe^2}{mv_0 b}(1+\cos\varphi)$$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \frac{mv_0^2 b}{2kZe^2}$$

$$\boxed{\cot\frac{1}{2}\varphi = \frac{mv_0^2 b}{2kZe^2}}$$

—— 1911年卢瑟福建立了原子的核式模型

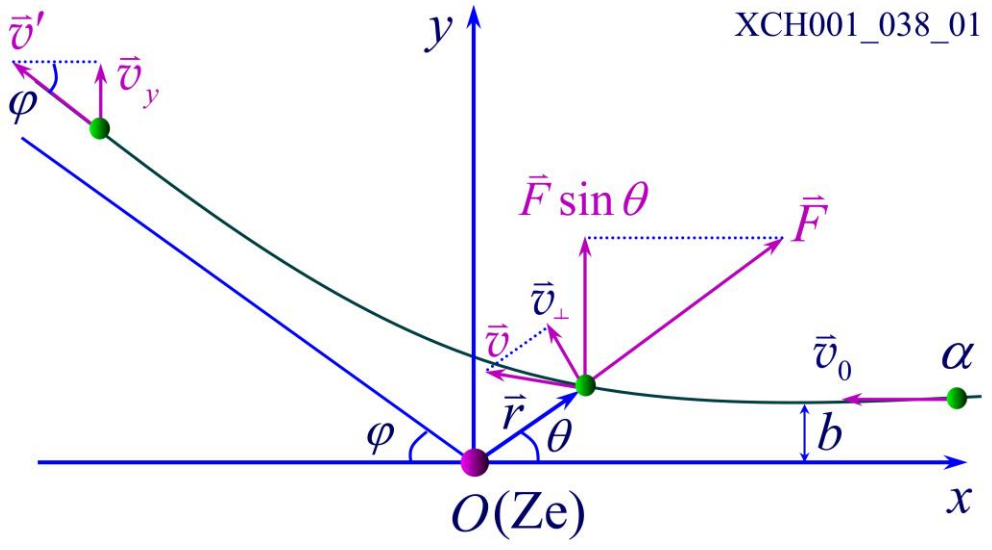
$$\cot\frac{1}{2}\varphi=\frac{mv_0^2 b}{2kZe^2}$$



$$b\downarrow\longrightarrow\varphi\uparrow$$

$$b\longrightarrow 0$$

$$\varphi\longrightarrow\pi$$



α粒子大角度散射