第四章 信号处理基础

范姗慧

杭州电子科技大学 自动化学院

QQ：307388793

二教南316

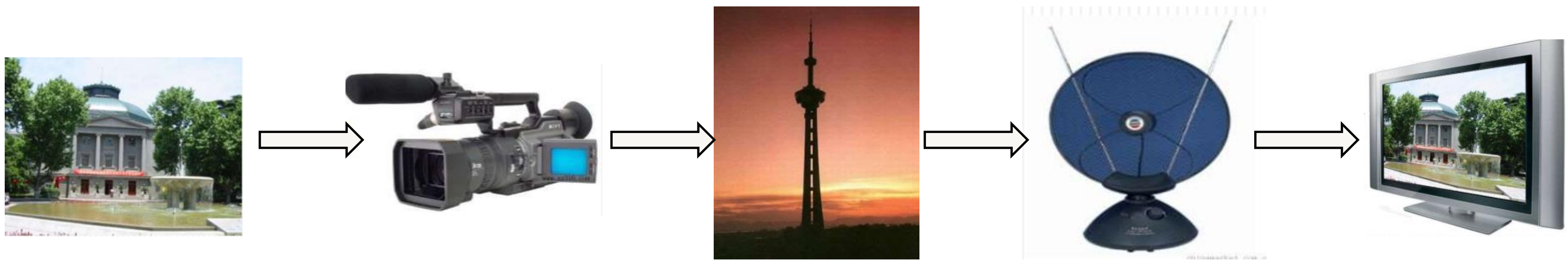
第四章 信号处理基础

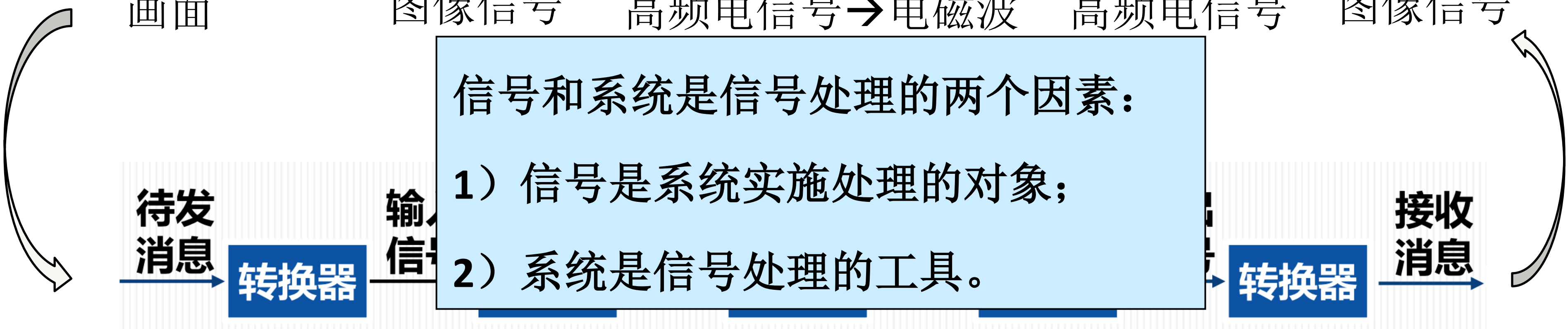
- 系统及其性质
  - ✓ 系统的描述
  - ✓ 系统的性质 ★
- 信号的线性系统处理 ★
  - ✓ 时域法分析
  - ✓ 频域法分析
  - ✓ 复频域法分析
- 数字信号处理技术（自学）
  - ✓ 数字信号处理的特点
  - ✓ 数字信号处理的实现
  - ✓ 有限字长对实现数字信号处理的影响

4.1 系统及其性质

- 系统的描述
- 系统的性质
  - ✓ 记忆性，瞬时系统和动态系统
  - ✓ 因果性，因果系统和非因果系统
  - ✓ 可逆性，可逆系统
  - ✓ 稳定性，稳定系统
  - ✓ 时不变性，时变系统与时不变系统
  - ✓ 线性，线性系统，增量线性系统

一、系统的描述

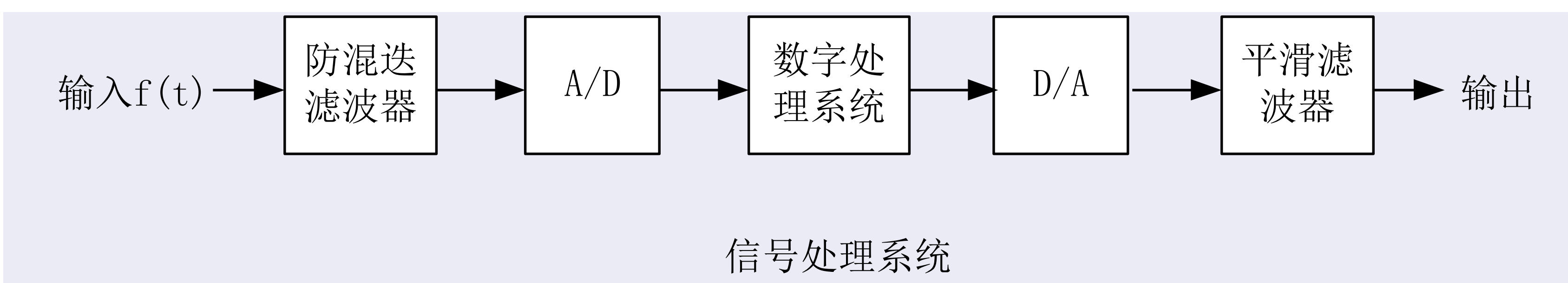




信号和系统是信号处理的两个因素：

1）信号是系统实施处理的对象；

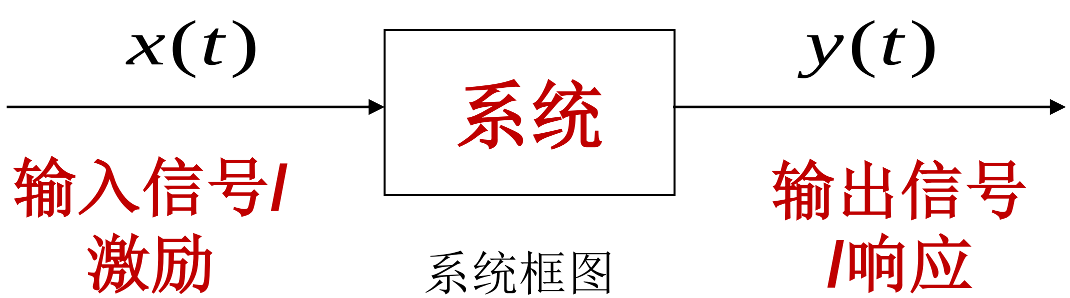
2）系统是信号处理的工具。



一、系统的描述

1. 相关概念（系统/输入信号/输出信号）

- **系统：**
  - ✓ 为了达到传输和利用信息的目的而对信号进行处理的器件、装置、设备及其组合
  - ✓ 其作用是对施加于它的信号做出响应，产生出另外的信号
- **输入信号：** 施加于系统的信号
- **输出信号：** 输入信号经系统后产生出来的信号



系统框图

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

一、系统的描述

2. 系统与信号的关系

- 任何系统都接受输入信号，产生输出信号，系统的特定功能就体现在系统接受一定输入信号情况下产生什么样的输出信号。
- 任何信号的改变（包括物理形态以及所包含的信息内容）都是通过某种系统实现的，系统是信号处理的工具。

系统框图

一、系统的描述

- 信号有函数、图形、列表等多种方法，同样地，描述系统的方法，比如数学模型（输入输出模型/状态空间模型）、物理模型（如电路，框图）

3. 系统的数学模型

对系统进行抽象，用能表达信号加工或变换关系的数学式子来描述系统，就是系统的数学模型。

系统数学模型的分类

（1）输入输出模型：只反映系统输入和输出之间的关系，或者说只反映系统的外特性，称为输入输出模型，通常由输入输出方程描述；

（2）状态空间模型：不仅反映系统的外特性，而且更着重反映系统的内部状态，称之为状态空间模型，通常由状态方程和输出方程描述。

一、系统的描述

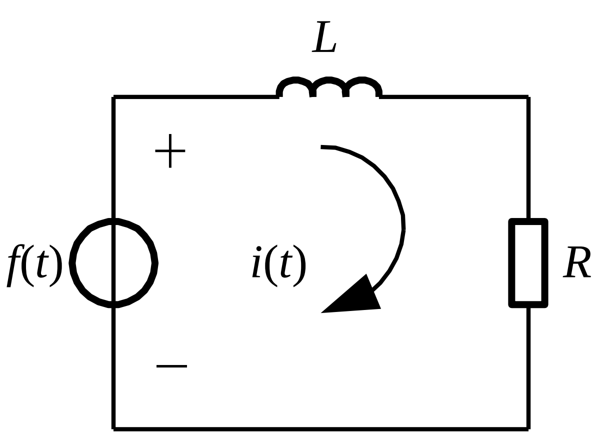
- **输入输出方程**：将系统的输入与输出之间的关系用一个数学方程表示出来

$$r(t) = f\{e(t), r(0), r'(0), \ldots\}$$

例如：$r''(t)+3r'(t)+5r(t)=e(t)$ 输入输出模型

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=f(t)$$

物理模型：电路模型



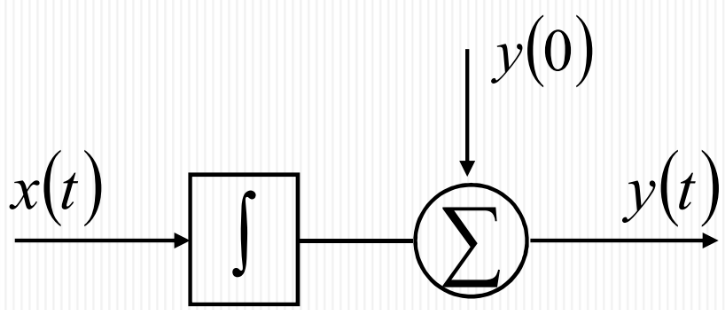
RL串联电路

一、系统的描述

系统的框图模型

- 通过基本的功能部件的联结来表示复杂系统——框图。

如：标量乘法器，乘法器，加法器，积分（差分）器，微分器……

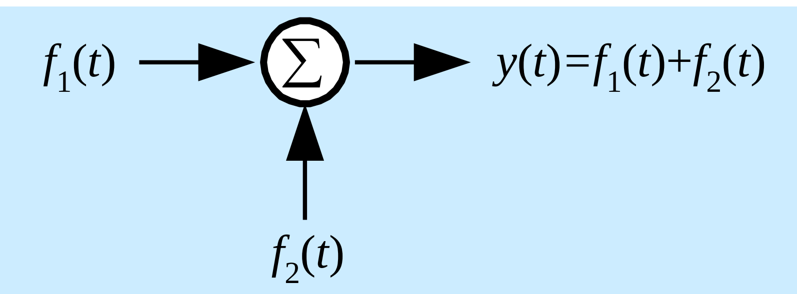


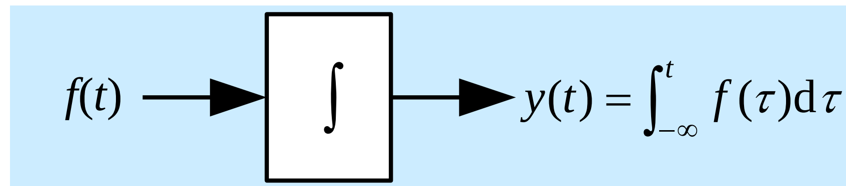
$$y(t)=y(0)+\int_0^t x(\tau)d\tau$$

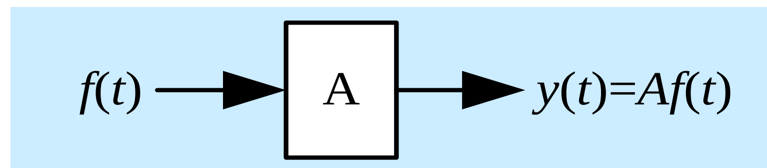
一、系统的描述

➢ 描述系统的基本单元方框图

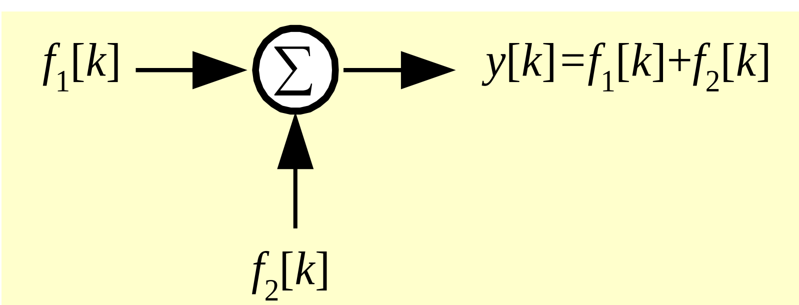
连续时间系统

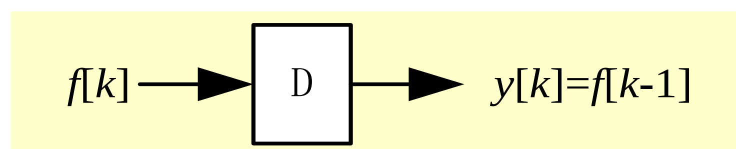


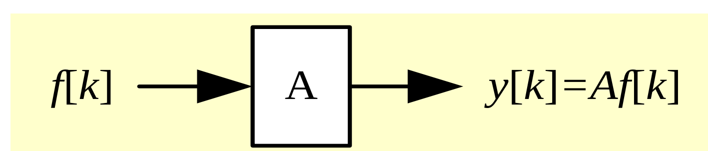




离散时间系统







一、系统的描述

4. 系统的研究方法

- **系统分析**

在给定系统情况下，研究系统对输入信号所产生的响应，并由此获得对系统功能和特性的认识。

- **系统综合**

已知系统的输入信号及对输出信号要求的情况下，通过调整系统中可变动部分的结构和参数，以保证所要求的输出信号。

系统框图

一、系统的描述

5. 系统的分类

通信、控制、信号处理、信号检测、计算机等

- **系统**
  - **物理系统**
    - **电系统：**对电信号进行传输和处理的电路、设备和仪器
    - **非电系统：**机械系统，光系统，声系统
  - **非物理系统**
    - **自然系统：**原子，太阳系，宇宙
    - **社会系统，生态系统**……
    - **人工系统：**水利，交通，交响乐团……
    - **神经系统……**

一、系统的描述

5. 系统的分类

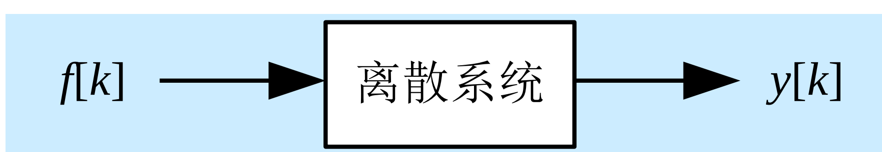
➢连续时间系统与离散时间系统

➢**连续时间系统**

✓ 系统的**输入输出信号**，或者中间变量**都**是连续时间信号。通常用**微分方程**或连续时间状态方程描述。

➢**离散时间系统**

✓ 系统的**输入输出信号**，或者中间变量**有**离散时间信号。通常用**差分方程**或离散时间状态方程描述。



一、系统的描述

5. 系统的分类

- ➢单输入、单输出系统和多输入、多输出系统
- ➢单输入、单输出系统
  - ✓ 系统只有一个输入信号，也只有一个输出信号
- ➢多输入、多输出系统
  - ✓ 一个系统有多个输入信号和（或）多个输出信号

二、系统的性质

- 记忆性，瞬时系统和动态系统
- 因果性，因果系统和非因果系统
- 可逆性，可逆系统
- 稳定性
- 时不变性，时变系统与时不变系统
- 线性，线性系统，增量线性系统

二、系统的性质

1. 记忆性——瞬时系统和动态系统

➢ 对任意的输入信号，如果每一时刻系统的输出信号值仅仅取决于该时刻的输入信号值，而与别的时刻值无关，称该系统具有无记忆性，否则，该系统为有记忆的。

➢ 无记忆的系统称为无记忆系统或瞬时系统，通常由代数方程描述。如：电阻器、加法器等

例：电阻器R 两端某时刻的电压值$u(t)$完全由该时刻流过电阻R的电流值$i(t)$ 决定， $u(t)=Ri(t)$

二、系统的性质

1. 记忆性——瞬时系统和动态系统

➢ 对任意的输入信号，如果每一时刻系统的输出信号值仅仅取决于该时刻的输入信号值，而与别的时刻值无关，称该系统具有无记忆性，否则，该系统为有记忆的。

➢有记忆的系统称为记忆系统或动态系统。通常可用微分方程或差分方程描述。如：含有储能元件的系统。

例：电容器C是一个动态系统，它两端的电压$\boldsymbol{u(t)}$与流过它的电流 $\boldsymbol{i(t)}$ 具有关系式

$$y(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

二、系统的性质

2. 因果性——因果系统和非因果系统

对于任意的输入信号，如果系统在任何时刻的输出值，只取决于该时刻和该时刻以前的输入值，而与将来时刻的输入值无关，就称该系统具有因果性

- 因果系统：响应不早于激励产生
- 非因果系统：不满足上述条件

- 因果系统才可实现
- 非因果概念也有实际意义，如天气预报等

例：判断下列系统是否为因果系统？

1. $r(t) = e(t-2)$ √
2. $r(t) = e(t+2)$ X

判别方法：输出是否会超前于输入

二、系统的性质

2. 因果性——因果系统和非因果系统

➢**因果系统的表示方法：**

从数学角度，若把 t_0 或 n_0看作现在时刻，那么 $t < t_0$ 或 $n < n_0$ 时刻就是以前时刻，而 $t > t_0$ 或者 $n > n_0$ 时刻为将来时刻，因果系统可表示为

$$y(t) = f\{x(t-\tau), \tau \geq 0\}$$

或

$$y(n) = f\{x(n-k), k \geq 0\}$$

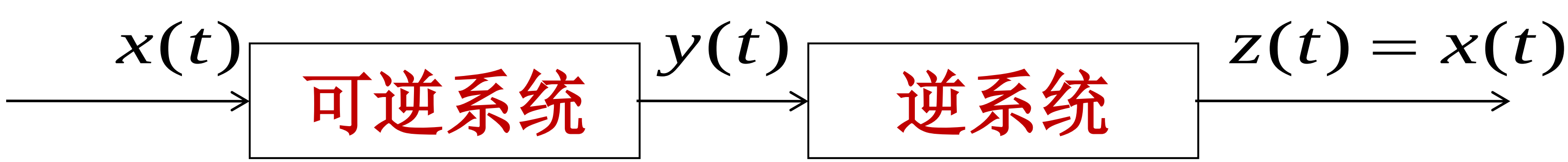
所以，按定义 $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau,\ y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ 表示的系统是因果系统。

二、系统的性质

3. 可逆性——可逆系统

- 如果一个系统对不同的输入信号产生不同的输出信号，即系统的输入输出信号成一一对应的关系，则称该系统是可逆的，或称为可逆系统，否则就是不可逆系统。

对于许多信号处理问题，最后都希望能从被处理或变换后的信号中恢复出原信号。其次，逆系统在自动控制系统中也有重要的应用。



二、系统的性质

例： 讨论下列系统的可逆性，若可逆求逆系统方程：

1. $y(t) = 2x(t);$　　　　$z(t) = 0.5y(t)$

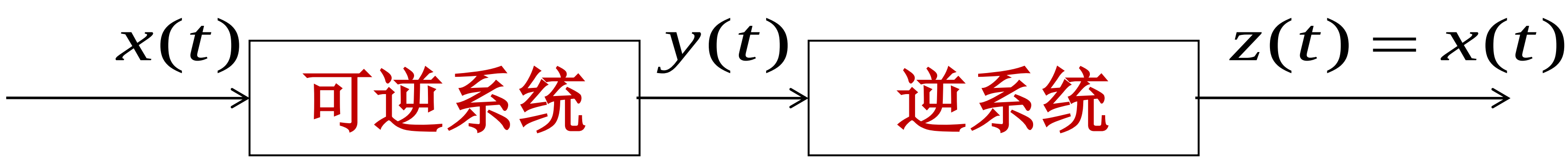
2. $y(t) = x(t - t_0);$　　　　$z(t) = y(t + t_0)$

3. $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k);$　　　　$z(n) = y(n) - y(n-1)$

4. $y(t) = 0;$　　　　不可逆，任意输入输出相同

5. $y(t) = \cos x(t);$　　　　输入为 $x(t) = x(t) + 2k\pi$ 输出相同

6. $y(n) = x(n)x(n-1).$　$x(n) = \delta(n)$,有相同的输出信号0



二、系统的性质

4. 稳定性——稳定系统/不稳定系统

➢ 如果一个系统对其有界的输入信号的响应也是有界的，则该系统具有稳定性，或称该系统是稳定系统。

➢ 如果对有界输入产生的输出不是有界的，则是不稳定的系统

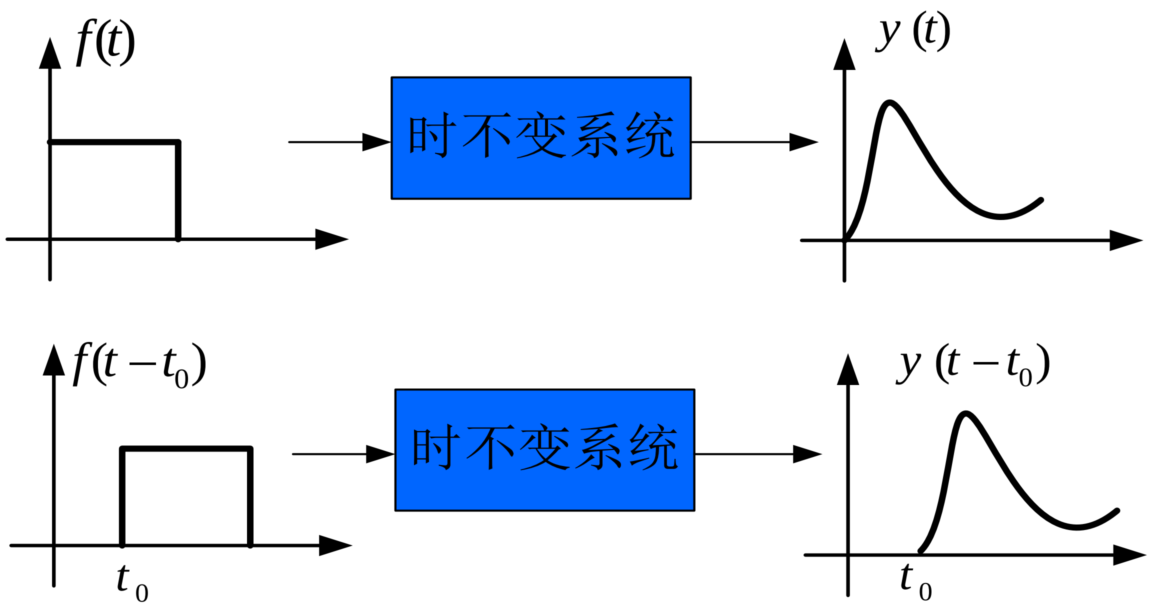
稳定的系统才是有意义的，不稳定的系统难以被实际应用。从工程的角度讲，一个实用系统在所有可能的条件下都保持稳定至关重要！

二、系统的性质

5. 时不变性——时变系统与时不变系统

➢ 定义：

对于一个系统，如果其输入信号在时间上有一个任意的平移，导致输出信号仅在时间上产生一个相同的平移，则该系统具有时不变性，或称系统为时不变系统，否则就是时变系统。



二、系统的性质

5. 时不变性——时变系统与时不变系统

➢ 时不变的连续系统表示为

$$f(t) \longrightarrow y_f(t)$$

$$f(t-t_0) \longrightarrow y_f(t-t_0)$$

➢ 时不变的离散时间系统表示为

$$f[k] \longrightarrow y_f[k]$$

$$f[k-n] \longrightarrow y_f[k-n]$$

二、系统的性质

例：判断下列系统是否是时变系统：

1. $y(t)=\cos x(t)$; 时不变系统
2. 反转系统 $y(t)=x(-t)$; 时变系统
3. 调制系统 $y(t)=x(t)\cos wt$. 时变系统
4. $y(t)=4x^2(t)+3x(t)$ 时不变系统
5. $y(t)=2t\cdot x(t)$ 时变系统

➢ 时变、时不变系统的检验方法：

检验一个系统的时不变性，可从定义出发，对于变量 $x_1(t)$，有 $y_1(t)$，

令 $x_2(t)=x_1(t-t_0)$，检验 $y_2(t)$ 是否等于 $y_1(t-t_0)$，若是，则系统

注意：时不变特性只考虑系统的**零状态响应**，因此在判断系统的时不变特性时，**不涉及系统的初始状态**。

二、系统的性质

6. 线性——线性系统/非线性系统，增量线性系统

- 同时满足叠加性和齐次性的系统称为线性系统，否则为非线性系统。

✓ 叠加性：几个输入信号同时作用于系统时，系统的响应等于每个输入信号单独作用所产生的响应之和。

$$\text{若}x_1(t) \to y_1(t),\ x_2(t) \to y_2(t),\ \text{则}x_1(t)+x_2(t) \to y_1(t)+y_2(t).$$

✓ 齐次性：当输入信号为原输入信号的K倍时，系统的输出响应也为原输出响应的K倍。

$$\text{若}x(t) \to y(t),\ \text{则}\mathrm{k}x(t) \to Ky(t).$$

二、系统的性质

6. 线性——线性系统/非线性系统，增量线性系统

➢ <u>同时满足叠加性和齐次性</u>的系统称为线性系统，否则为非线性系统。

线性系统判断：

$$若 x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) \to y_1(t),$$

$$则 x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \to y_3(t) = a\, y_1(t) + by_2(t)$$

二、系统的性质

例：判断系统$y(t)=tx(t)$是否线性系统

解：$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow \begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) \\ &= t[ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= tax_1(t) + tbx_2(t) \end{aligned}$$

二者相等

$$ay_1(t) + by_2(t) = atx_1(t) + btx_2(t)$$

所以，系统是线性的

二、系统的性质

例： 判断系统y(t)=x(t) x(t-1)是否线性系统

解： $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t)x_1(t-1)$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t)x_2(t-1)$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_3(t) &= x_3(t)x_3(t\text{-}1) \\ &= [ax_1(t) + bx_2(t)][ax_1(t\text{-}1) + bx_2(t\text{-}1)] \\ &= a^2x_1(t)x_1(t\text{-}1) + b^2x_2(t)x_2(t\text{-}1) \\ &\quad + abx_1(t)x_2(t\text{-}1) + abx_1(t-1)x_2(t) \end{aligned}$$

二者不相等

$$ay_1(t) + by_2(t) = a\left[x_1(t)x_1(t-1)\right] + b\left[x_2(t)x_2(t-1)\right]$$

所以，系统是非线性的

二、系统的性质

例：判断系统y(t)=2x(t)＋3是否线性系统

解：

$$x_1(t) \to y_1(t) = 2x_1(t) + 3$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = 2x_2(t) + 3$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow \begin{aligned} y_3(t) &= 2x_3(t) + 3 \\ &= 2[ax_1(t) + bx_2(t)] + 3 \\ &= 2ax_1(t) + 2bx_2(t) + 3 \end{aligned}$$

二者不相等

$$ay_1(t) + by_2(t) = 2ax_1(t) + 3a + 2bx_2(t) + 3b$$

所以，系统是非线性的

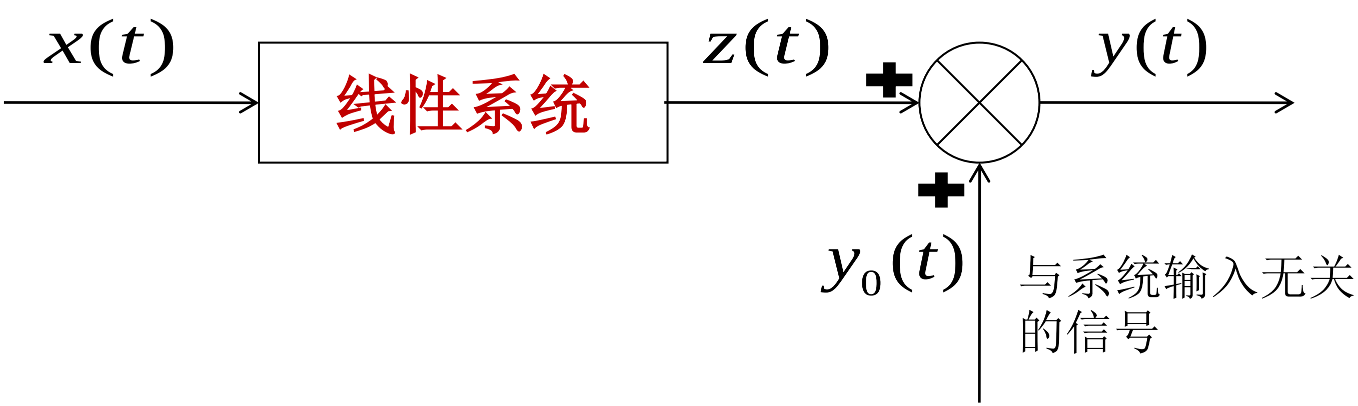
二、系统的性质

考虑上述系统输入的差和输出的差，即

$$\Delta x(t) = x_2(t) - x_1(t)$$
$$\Delta y(t) = y_2(t) - y_1(t) = 2\Delta x(t)$$

满足叠加性和齐次性

- 系统输出的增量与输入增量之间成线性关系，把这一类系统称为**增量线性系统**。



增量线性系统的结构示意图

二、系统的性质

➢ **线性时不变系统(LTI系统)** ★

Linear Time Invariant System（LTI System）

$$e_1(t) \to r_1(t), e_2(t) \to r_2(t)$$

$$\Downarrow$$

$$k_1 e_1(t-t_1) + k_2 e_2(t-t_2) \to k_1 r_1(t-t_1) + k_2 r_2(t-t_2)$$

线性时不变系统可由定常系数的线性微分方程式或差分方程式描述

第四章 信号处理基础

范姗慧

杭州电子科技大学自动化学院

二教南316

第二节 信号的线性系统处理

- **时域法分析**

  线性时不变因果系统的时域响应

  线性时不变系统的单位冲激响应

  线性时不变系统的时域分析

- 频域法分析

  频率响应

  无失真传输

  理想低通滤波器

- 复频域分析

  复频域分析的研究意义

  微分方程的复频域求解

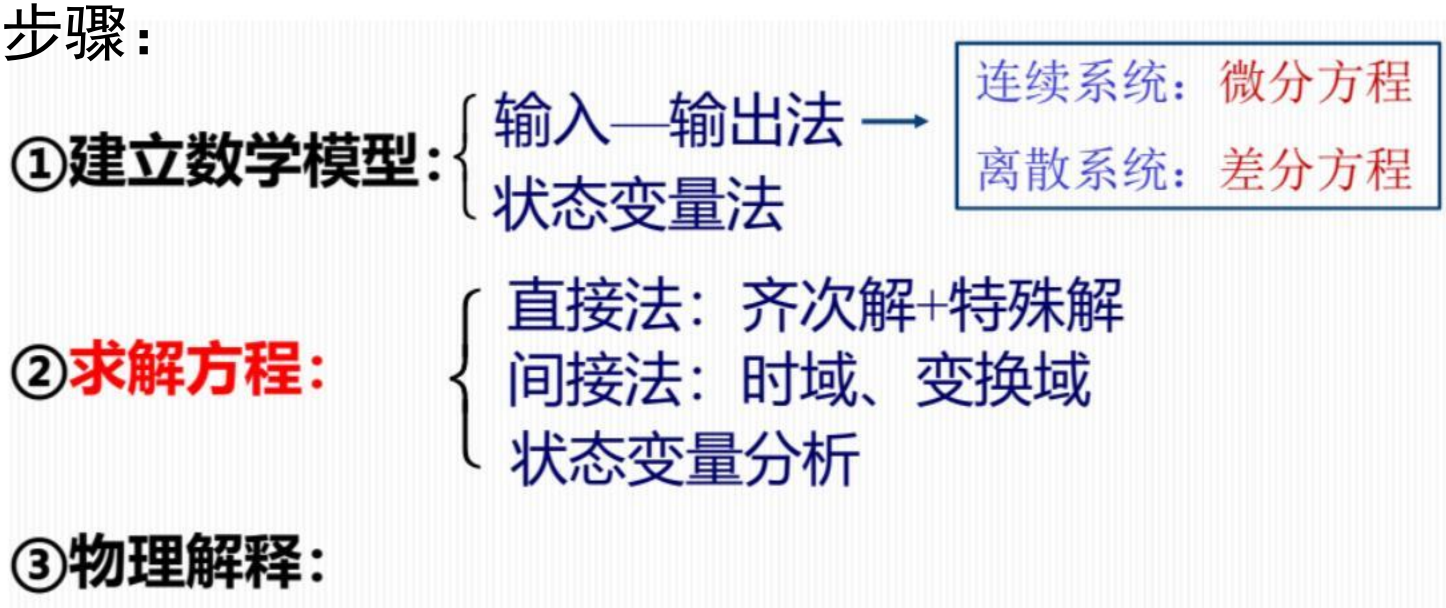
  传递函数

一、信号与系统分析概述

➢ 任务：响应与激励之间的关系

目的：得到信号通过线性系统后所产生的一个响应及其特性

➢ 步骤：



一、时域分析法

（一）线性时不变因果系统的时域响应

1. 线性时不变动态系统的数学模型表示方法

- 对于连续系统，由线性常系数微分方程描述：

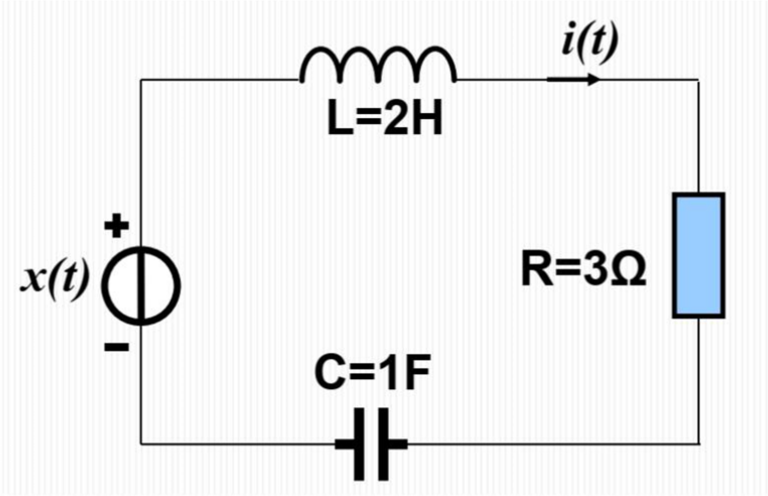
$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t)$$

- 对于离散系统，由线性常系数差分方程描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

连续线性时不变因果系统

例：电路如图，激励信号为$x(t)=e^{-2t}U(t)$， 在$t=0$和$t=1$时刻测得系统的输出为$i(0)=2$， $i'(0)=-1.5$。



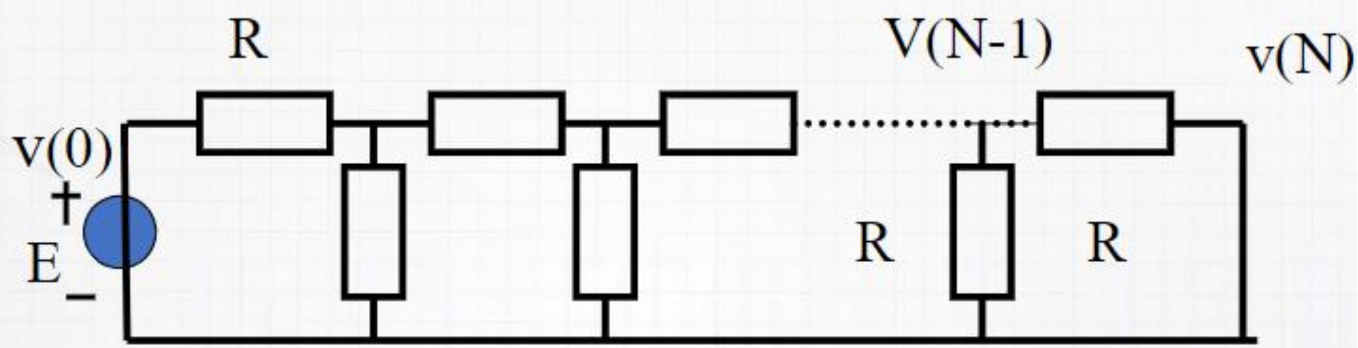
$$x(t)=L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}i(t)dt$$

$$x(t)=2\frac{di(t)}{dt}+3i(t)+\int_{-\infty}^{\infty}i(t)dt$$

$$2i''(t)+3i'(t)+i(t)=x'(t)$$

离散线性时不变因果系统

例1 已知梯形网络电阻为R，结点电压为$V(n)$, $n=0, 1, \ldots, N$，试写出第n个结点电压$v(n)$的差分方程。



$$\frac{v(n-1)}{R}=\frac{v(n)-v(n-1)}{R}+\frac{v(n-2)-v(n-1)}{R}$$

$$v(n)-3v(n-1)+v(n-2)=0$$

离散线性时不变因果系统

例2 某人在银行储蓄，每月存入款数用$x(n)$表示，银行月利率为β ，试写出总存与月存数关系的方程。

设 第n个月的总存为$y(n)$，则

$$y(n)=\underbrace{y(n-1)}_{\text{上个月的总存}}+\underbrace{\beta y(n-1)}_{\text{上个月的利息}}+\underbrace{x(n)}_{\text{本月存入的款数}}$$

$$y(n)-y(n-1)-\beta y(n-1)=x(n)$$

一、时域分析法

- LTI系统的时域分析（**求解输出信号*y*(*t*)**）

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t)$$

- 经典法：齐次解+特解 （最直接，但不能体现物理意义）
- 卷积法：系统完全响应=零输入响应+零状态响应

连续时间系统描述

- 连续时间系统用*N*阶常系数微分方程描述

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y(t)+a_0y(t)$$
$$=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f(t)+b_0 f(t)$$

a_i、b_i为常数

- 右边是输入信号$f(t)$及其各阶导数的线性组合;
- 左边是输出信号$y(t)$及其各阶导数的线性组合;
- 由此描述了输入信号$f(t)$和输出信号$y(t)$之间的关系。

经典时域分析法

微分/差分方程的全解即系统的完全响应, 由齐次解$y_h(t)$和特解$y_p(t)$组成

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- 齐次解$y_h(t)$的形式由齐次方程的特征根确定
- 特解$y_p(t)$的形式由方程右边激励信号的形式确定

齐次解$y_h(t)$的形式

(1) 特征根是不等实根$s_1, s_2, \ldots, s_n$

$$y_h(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t}$$

(2) 特征根是相等实根$s_1 = s_2 = \ldots = s_n$

$$y_h(t) = K_1 e^{st} + K_2 t e^{st} + \cdots + K_n t^{n-1} e^{st}$$

(3) 特征根是成对共轭复根 $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i, \quad i = n/2$

$$y_h(t) = e^{\sigma_1 t}(K_1 \cos\omega_1 t + K_1 \sin\omega_1 t) + \cdots + e^{\sigma_i t}(K_i \cos\omega_i t + K_i \sin\omega_i t)$$

常用激励信号对应的特解$y_p(t)$形式

输入信号	特解
K	A
Kt	$A+Bt$
$K\mathrm{e}^{-at}$(特征根 $s\neq -a$)	$A\mathrm{e}^{-at}$
$K\mathrm{e}^{-at}$(特征根 $s=-a$)	$At\mathrm{e}^{-at}$
$K\sin\omega_0 t$ 或 $K\cos\omega_0 t$	$A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t$
$K\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 t$ 或 $K\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t$	$A\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 t+B\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t$

例： 已知某二阶线性时不变连续时间系统的动态方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=f(t), t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$f(t)=e^{-t}u(t)$，求系统的完全响应$y(t)$。

解 (1)求齐次方程$y''(t)+6y'(t)+8y(t) = 0$的齐次解$y_h(t)$

特征方程为 $s^2+6s+8=0$

特征根为 $s_1=-2$，$s_2=-4$

齐次解$y_h(t)$ $y_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t}$

(2) 求非齐次方程 $y''(t)+6y'(t)+8y(t) = f(t)$ 的特解$y_p(t)$

由输入$f(t)$的形式，设方程的特解为

$$y_p(t)=Ce^{-t}$$

将特解带入原微分方程即可求得常数C=1/3。

(3) 求方程的全解,即**<u>系统响应$y(t)$</u>**

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t}$$

$$y(0) = A + B + \frac{1}{3} = 1$$

解得 A=5/2，B= −11/6

$$y'(0) = -2A - 4B - \frac{1}{3} = 2$$

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{11}{6}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t} \qquad t > 0$$

例：差分方程$y(n)+y(n-1)=nu(n)$，$y(-1)=1$，求$y(n)$

解：$$y(n)=-y(n-1)+nu(n)$$

$$y(0)=-y(-1)=-1$$

$$y(1)=-y(0)+u(1)=2$$

$$y(2)=-y(1)+2u(2)=0$$

$$y(3)=-y(2)+3u(2)=3$$

$$\vdots$$

迭代法

特点：概念清楚，计算简便，但很难求解其闭式解。

例：已知方程 $y(n)+2y(n-1)=x(n)-x(n-1)$， $x(n)=n^2, y(-1)=-1$, 求方程的解。

求解步骤：

(1)求齐次解

齐次方程 → **特征方程** → **特征根** → **齐次解（通解）**

α_i

通解形式：

特征根为单根时

$$y_c(n)=c_1\alpha_1^{\,n}+c_2\alpha_2^{\,n}+\ldots+c_N\alpha_N^{\,n}=\sum_{i=1}^{N}c_i\alpha_i^{\,n}$$

(2)特解

将 $y_p(n)$ 代入原方程 → 比较方程两边系数

时域经典法

(3)完全解

齐次解＋特解 → **代入初始条件** → **完全解**

经典法求解全响应的不足之处

- 若微分/差分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

系统分析

《信号分析与处理》课程采用的思想，是将系统的响应，也就是微分/差分方程的解，分成零输入响应和零状态响应两部分。

没有外界输入激励，仅由原始储能引起的响应

没有原始储能，仅有外加激励引起的响应

一、时域分析法

（一）线性时不变因果系统的时域响应

2. 线性时不变动态系统的输出：零状态响应 + 零输入响应

➢**零初始状态（ 起始松驰）**：

如果系统输出的初始条件为零，即

$$x(t)=0 \quad t<0 \rightarrow y(t)=0 \quad t<0$$

因果信号，因果系统

或

$$x(n)=0 \quad n<0 \rightarrow y(n)=0 \quad n<0$$

➢ **零状态响应**：

系统在“起始松驰”(即零初始条件)情况下，系统对本次输入激励的响应，称之为“零状态响应”。

一、时域分析法

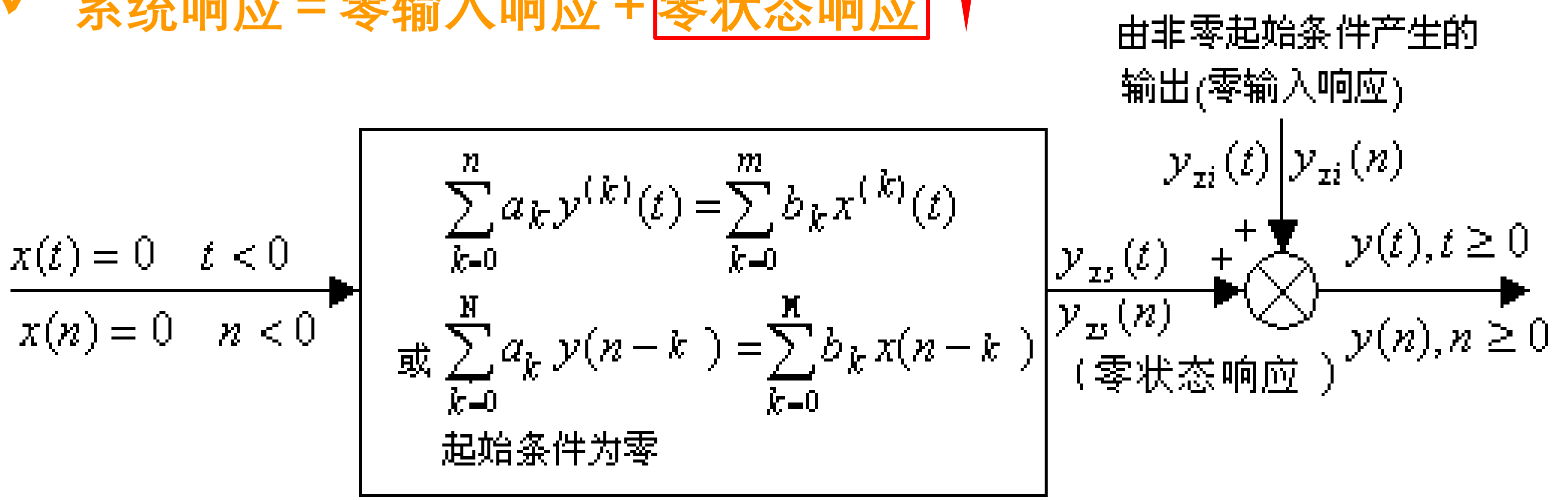
（一）线性时不变因果系统的时域响应

- **零输入响应：**

  没有外加激励信号的作用，只有起始状态（起始时刻系统储能）所产生的响应。相当于本次输入为零系统仍有的输出，称之为“零输入响应”

- **系统响应表达式：**

  ✓ 系统响应 = 零输入响应 + $\boxed{\text{零状态响应}}$ ✦



以离散系统为例

零输入与零状态法

系统方程：

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)$$

边界条件： y(-1), y(-2),…, y(-N)

转化

(a)零输入响应：

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = 0$$

y(-1), y(-2),…, y(-N)

(b)零状态响应：

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{i=0} b_i x(n-i)$$

y(-1)= y(-2)=…= y(-N)=0

一、时域分析法

1、**经典时域分析方法：** 求解微分方程—通解+特解

2、卷积法：

系统完全响应=零输入响应（$y_{zi}(t)/y_{zi}(n)$）+零状态响应（$y_{zs}(t)/y_{zs}(n)$）

连续系统 $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \ = y_{zi}(t) + f(t) * \boxed{h(t)}$

?

离散系统 $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zi}(n) \ = y_{zi}(n) + f(n) * \boxed{h(n)}$

- ➢ 求解齐次微分方程得到零输入响应（齐次解）
- ➢ 利用卷积积分/卷积和可求出零状态响应

系统的全解 $y(t) = \overset{\text{齐次解}}{y_h(t)} + \overset{\text{特解}}{y_p(t)}$

例： 已知某线性时不变系统的动态方程式为：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y(t)=4f(t) \qquad t>0$$

系统的初始状态为$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=3$，求系统的零输入响应$y_x(t)$。

[**解**] 系统的特征方程为 $s^2+5s+6=0$

系统的特征根为 $s_1=-2$，$s_2=-3$

$$y_x(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t}$$

$y(0^-)=y_x(0^-)=K_1+K_2=1$

$y'(0^-)=y'_x(0^-)=-2K_1-3K_2=3$

解得 $K_1=6$，$K_2=-5$

$$y_x(t)=6e^{-2t}-5e^{-3t}, t\geq 0$$

一、时域分析法

（二）线性时不变系统的单位冲激响应

1. 线性时不变系统的单位冲激响应的定义

- 在零初始条件下，**LTI**离散系统对激励为**单位样值信号**$\boldsymbol{\delta(n)}$的响应，记为$\boldsymbol{h(n)}$

- 在零初始条件下，**LTI**连续系统对激励为**单位冲激函数**$\boldsymbol{\delta(t)}$所产生的响应，记为$\boldsymbol{h(t)}$

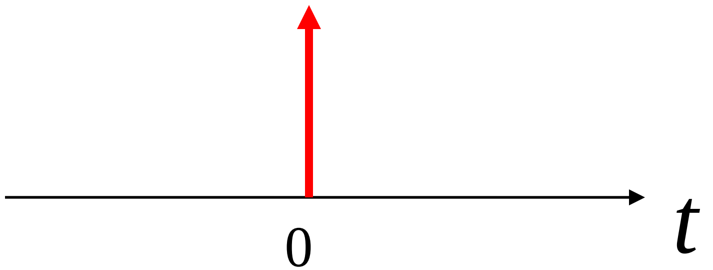
一、时域分析法

(1) δ(t)和δ(n)的区别

➢ δ(t)的定义

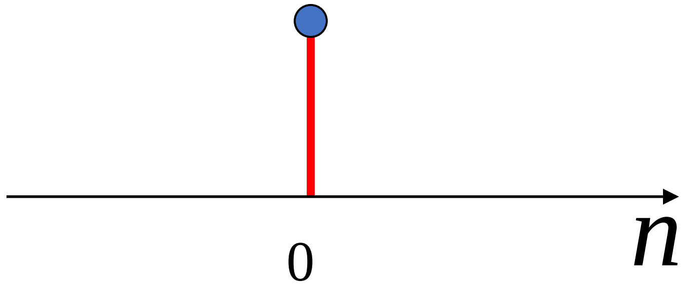
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1 \qquad (t = 0)$$

$$\delta(t) = 0 \qquad (t \neq 0)$$



➢ δ(n) 的定义

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



一、时域分析法

2. 线性时不变连续系统的单位冲激响应

（1）表达式

➢ 对于线性时不变连续系统

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t)$$

$y(t)=h(t)$　　　　$x(t)=\delta(t)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta^{(k)}(t)$$

一、时域分析法

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta^{(k)}(t)$$

（2）*h*(*t*)的特点：

- $\because$ $t>0$时， $\delta^{(k)}(t)=0$， $\therefore$ *h*(*t*)应具有齐次微分方程解的基本形式，即$t>0_+$后，方程右端为零

- $\because$ *h*(*t*)是因果系统 $\therefore$ *h*(*t*)满足：$h(t)=0 \quad t<0$

$$\because \ \delta(t)=0, \quad t\geq 0_+$$

$$\therefore \ \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = 0 \qquad t\geq 0_+$$

齐次方程

若系统具有n个不同的单特征根λ_i时，那么*h*(*t*)应具有如下函数形式

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

一、时域分析法 $\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta^{(k)}(t)$

➢根据方程两边函数项匹配的原则，$h(t)$为:

$n > m$ 时，**$h(t)$**具有形式:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

冲激平衡法

$n = m$ 时，**$h(t)$**具有形式:

$$h(t) = c\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

$n < m$时，**$h(t)$**具有形式:

$$\mathrm{h(t)} = \sum_{j=0}^{m-n} c_j \delta^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

将$h(t)$代入微分方程，使方程两边平衡（相等），确定系数C_i，A_i

一、时域分析法

例 试求如下微分方程所描述的系统的单位冲激响应

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+2x(t)$$

解：首先系统对应的特征方程为$\lambda^2+4\lambda+3=0$

求得其两个特征根分别为：$\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-3$

$h(t)$应具有如下形式：$h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$

将其代入原方程：$h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

根据 $h(t)$可以求解出$h^{'}(t)$和$h^{''}(t)$的形式，代入上式

$$(A_1+A_2)\delta'(t)+(3A_1+A_2)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t) \quad (*)$$

方程两边各奇异函数项系数相等，有 $A_1=A_2=1/2$

$$h(t)=(\tfrac{1}{2}e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

$$h(t) = (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t})\, u(t) = A_1 e^{-t} u(t) + A_2 e^{-3t} u(t)$$

$$h'(t) = A_1(-e^{-t})u(t) + A_1 e^{-t}\delta(t) + A_2(-3e^{-3t}u(t)) + A_2 e^{-3t}\delta(t)$$

$$= -A_1 e^{-t}u(t) + A_1\delta(t) - 3A_2 e^{-3t}u(t) + A_2\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$h''(t) = A_1 e^{-t}u(t) - A_1 e^{-t}\delta(t) + A_1\delta'(t) + 9A_2 e^{-3t}u(t) - 3A_2 e^{-3t}\delta(t) + A_2\delta'(t)$$

$$= A_1 e^{-t}u(t) - A_1\delta(t) + A_1\delta'(t) + 9A_2 e^{-3t}u(t) - 3A_2\delta(t) + A_2\delta'(t)$$

$$h''(t) + 4h'(t) + 3h(t) = [\cancel{A_1 e^{-t}u(t)} - A_1\delta(t) + A_1\delta'(t) + \cancel{9A_2 e^{-3t}u(t)} - 3A_2\delta(t) + A_2\delta'(t)]$$

$$+ 4[\cancel{-A_1 e^{-t}u(t)} + A_1\delta(t) \cancel{-3A_2 e^{-3t}u(t)} + A_2\delta(t)] + 3[\cancel{A_1 e^{-t}u(t)} + \cancel{A_2 e^{-3t}u(t)}]$$

$$= 3A_1\delta(t) + A_1\delta'(t) + A_2\delta(t) + A_2\delta'(t) = (3A_1 + A_2)\delta(t) + (A_1 + A_2)\delta'(t)$$

$$= \delta'(t) + 2\delta(t)$$

例　已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2f(t),\quad t>0$$

试求系统的单位冲激响应。

解：当$f(t)=\delta(t)$时, $y(t)=h(t)$, 即

$$\frac{dh(t)}{dt}+3h(t)=2\delta(t)$$

动态方程式的特征根$s=-3$, 且$n>m$, 故$h(t)$的形式为

$$h(t)=Ae^{-3t}u(t)$$

$$\frac{d}{dt}[Ae^{-3t}u(t)]+3Ae^{-3t}u(t)=2\delta(t)$$

解得$A=2$

$$h(t)=2e^{-3t}u(t)$$

例 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=2f(t)+3f'(t),\quad t>0$$

试求系统的冲激响应。

解： 当$f(t)=\delta(t)$时, $y(t)=h(t)$, 即

$$\frac{dh(t)}{dt}+6h(t)=2\delta(t)+3\delta'(t)$$

动态方程式的特征根$s=-6$, 且$n=m$, 故$h(t)$的形式为

$$h(t)=Ae^{-6t}u(t)+B\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}[Ae^{-6t}u(t)+B\delta(t)]+6[Ae^{-6t}u(t)+B\delta(t)]=2\delta(t)+3\delta'(t)$$

解得$A=-16$, $B=3$

$$h(t)=3\delta(t)-16e^{-6t}u(t)$$

冲激平衡法求 *h*(*t*) 小结

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t})u(t)+\sum_{j=0}^{m-n}A_j\delta^{(j)}(t)$$

(1) 由系统的特征根来确定 $u(t)$ 前的指数形式.

(2) 由动态方程右边 $\delta(t)$ 的最高阶导数与方程左边 $h(t)$ 的最高阶导数确定 $\delta^{(j)}(t)$ 项.

一、时域分析法

（2）表达式

➢ 对于线性时不变离散系统

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \boxed{y(n-k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k \boxed{x(n-k)}$$

$y(n)=h(n)$　　　　$x(n)=\delta(n)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underline{h(n-k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k \underline{\delta(n-k)}$$

一、时域分析法

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h(n-k) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta(n-k)$$

（3）$h(n)$ 的特点：

$$h(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i^{\,n} u(n) & n > m \\ \sum_{j=0}^{m-n} C_j \delta(n-j) + \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^{\,n} u(n) & n \le m \end{cases}$$

将$h(n)$代入差分方程，使方程两边平衡，确定系数C_i，A_i

例 线性时不变因果离散系统的差分方程为

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

试求出该系统的单位样值响应。

提示：$h(n)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}A_i\lambda_i^n u(n) & N>M\\ \sum_{j=0}^{M-N}C_j\delta(n-j)+\sum_{i=1}^{N}A_i\lambda_i^n u(n) & N\le M\end{cases}$

解：系统的特征方程为：$\lambda^2-5\lambda+6=0$

求得两个特征根分别为：$\lambda_1=3, \lambda_2=2$

有**N=M**，得到 $h(n)=C_0\delta(n)+A_1 3^n u(n)+A_2 2^n u(n)$

应满足方程：$h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$

分别求出***h*(*n*-1)**，***h*(*n*-2)**代入上式

法1 $$h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$$

$$h(n)=C_0\delta(n)+A_1 3^n u(n)+A_2 2^n u(n)$$

而 $A_1 3^n u(n)$ 和 $A_2 2^n u(n)$ 分别可写为

$$A_1 3^n u(n)=A_1\delta(n)+3A_1\delta(n-1)+9A_1\delta(n-2)+\cdots$$

$$A_2 2^n u(n)=A_2\delta(n)+2A_2\delta(n-1)+4A_2\delta(n-2)+\cdots$$

所以 $$h(n)=(C_0+A_1+A_2)\delta(n)+(3A_1+2A_2)\delta(n-1)+(9A_1+4A_2)\delta(n-2)+\cdots$$

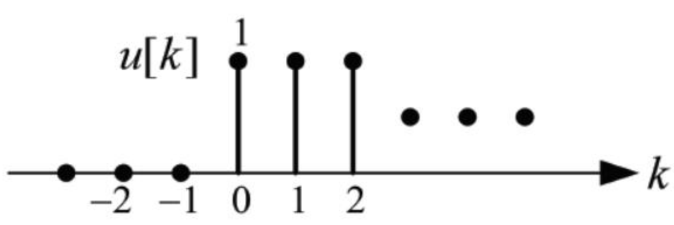
且有 $$h(n-1)=(C_0+A_1+A_2)\delta(n-1)+(3A_1+2A_2)\delta(n-2)+\cdots$$

$$h(n-2)=(C_0+A_1+A_2)\delta(n-2)+\cdots$$

将它们代入上面的差分方程并加以整理得

$$(C_0+A_1+A_2)\delta(n)+(-5C_0-2A_1-3A_2)\delta(n-1)+6C_0\delta(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$$

2. 单位阶跃序列：$u[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$



$\delta[\mathbf{n}]=u[n]-u[n-1]$

$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$

$$h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$$

$$h(n)=C_0\delta(n)+A_1 3^n u(n)+A_2 2^n u(n)$$

将它们代入上面的差分方程并加以整理得

$$(C_0+A_1+A_2)\delta(n)+(-5C_0-2A_1-3A_2)\delta(n-1)+6C_0\delta(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$$

等式两边对应项系数相等，则有

$$\begin{cases} C_0+A_1+A_2=1 \\ 5C_0+2A_1+3A_2=0 \\ 6C_0=-3 \end{cases}$$

解此联立方程，得

$$C_0=-1/2,\ A_1=2,\ A_2=-1/2$$

故系统的单位脉冲响应为

$$h(n)=-0.5\delta(n)+2\cdot 3^n u(n)-0.5\cdot 2^n u(n)$$

法2

迭代法 $h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$

$$h(n)=\delta(n)-3\delta(n-2)+5h(n-1)-6h(n-2)$$

分别令 $n=0$、1、2，得

$$h(0)=\delta(0)-3\delta(-2)+5h(-1)-6h(-2)=1$$

$$h(1)=\delta(1)-3\delta(-1)+5h(0)-6h(-1)=5$$

$$h(2)=\delta(2)-3\delta(0)+5h(1)-6h(0)=16$$

其中 $h(-1)=0$，$h(-2)=0$，这是零初始条件决定的。分别将 $h(0)$、$h(1)$、$h(2)$代入下式：

$$h(n)=C_0\delta(n)+A_1\cdot 3^n u(n)+A_2\cdot 2^n u(n)$$

得如下联立方程：

$$\begin{cases} C_0+A_1+A_2=1 \\ 3A_1+2A_2=5 \\ 9A_1+4A_2=16 \end{cases}$$

解此联立方程，得 $C_0=-1/2$，$A_1=2$，$A_2=-1/2$，得到和上面同样的结果，即

$$h(n)=-0.5\delta(n)+2\cdot 3^n u(n)-0.5\cdot 2^n u(n)$$

一、时域分析法

（三）线性时不变系统的时域分析

系统完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t) = y_x(t) + f(t) * h(t)$$

- 求解齐次微分方程得到零输入响应
- <u>利用卷积积分/卷积和可求出零状态响应</u>

一、时域分析法

（三）线性时不变系统的时域分析法基本思想

任意连续时间信号可以分解为一系列冲激函数之和，

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\cdot\Delta t$$ （连续信号）

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$ （离散信号）

因此，如果已知线性时不变系统的单位冲激响应，利用线性时不变系统的线性和时不变性，就能确定出系统对任意信号的响应，即系统的零状态响应

1. 连续系统的卷积积分

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\cdot\Delta t$

如果线性时不变连续系统的单位冲激响应为**h(t)**，则

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

系统的时不变性

$$\delta(t-k\Delta t) \rightarrow h(t-k\Delta t)$$

系统的齐次性

$$x(k\Delta t)\cdot\Delta t\cdot\delta(t-k\Delta t) \rightarrow x(k\Delta t)\cdot\Delta t\cdot h(t-k\Delta t)$$

系统的叠加性

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\cdot\Delta t \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)h(t-k\Delta t)\cdot\Delta t$$

当$\Delta t\to 0$时，有$k\Delta t\to\tau$，$\Delta t\to d\tau$ （取极限）

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

卷积法求解系统零状态响应$y_f(t)$的思路

(1) 将任意信号分解为单位冲激信号的线性组合。

(2) 求出单位冲激信号作用在系统上的零状态响应 —单位冲激响应$h(t)$ 。

(3) 利用线性时不变系统的特性，求出单位冲激信号线性组合作用在系统上的响应，即系统在任意信号$f(t)$激励下的零状态响应$y_f(t)$ 。

一、时域分析法

连续系统的时域特征

- 以单位冲激信号 $\delta(t)$ 作为激励时，系统产生的零状态响应，记作 $h(t)$ 。

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=\delta(t)*h(t) = h(t)$$

- 任意时域信号**x(t)**激励时系统的零状态响应

$$\mathbf{x(t)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

例 已知某LTI系统的动态方程式为$y'(t)+3y(t)=2f(t)$，系统的冲激响应$h(t)=2e^{-3t}u(t)$，$f(t)=3u(t)$，试求系统的零状态响应$y_f(t)$。

[解] $y_f(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}3u(\tau)\cdot 2e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\begin{cases}\int_0^t 3\cdot 2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-e^{-3t}) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$=2(1-e^{-3t})u(t)$$

作业（第四章课后习题）P256-257

3、4、5、10

例： 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3f(t)$$

激励信号$f(t)=e^{-t}u(t)$

系统的初始状态为$y(0_-)=1$，求系统的完全响应$y(t)$。

以及零输入响应$\boldsymbol{y_x(t)}$和零状态响应$\boldsymbol{y_f(t)}$

复习要点

- ➢深入理解系统的几个属性，**掌握通过属性对系统进行分类**
- ➢了解线性时不变连续/离散系统的数学模型表示（**线性常微分/差分方程**）
- ➢**重点掌握线性时不变系统的响应的时域分析法**
  - ✓全解（完全响应）=齐次解+特解　（经典法）
  - ✓**完全响应=零输入响应+零状态响应　（时域分析法）**
  - ✓深入理解零输入响应的定义，**掌握零输入响应的求解方法**
  - ✓深入理解零状态响应的定义，**掌握零状态响应的求解方法（输入信号与单位冲激响应的卷积积分）**
  - ✓**重点掌握LTI系统单位冲激响应的求解（冲激平衡法）**