(2). $x(n) = \cos(8\pi n/7 + 2)$.

对于离散信号. 满足 ~~若~~ $x(n) = x(n+N)$ 为周期信号.

$\sin(n\Omega) = \sin(\Omega \cdot n + \Omega \cdot N)$. ∵ 正弦函数周期为 $2k\pi$.

∴ $\Omega \cdot N = 2k\pi$. ∴ ~~Ω~~ $\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{N}{K}$.

其中 K. N 都为正整数. ∴ $\frac{2\pi}{\Omega}$ 为有理数.

周期 $N = \frac{2\pi}{\Omega} \cdot K$.

对于 $x(n) = \cos\left(\frac{8\pi n}{7} + 2\right)$. $\Omega = \frac{8}{7}\pi$.

$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{8}{7}\pi} = \frac{7}{4}$ 为有理数. ∴ 该信号为周期信号

$N = \frac{2\pi}{\Omega} \cdot k = \frac{7}{4} \cdot 4 = 7$. 周期为7

(4). $x_4(t) = e^{-t}\sin 2t$

$$W = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} e^{-t}\sin^2 2t\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} e^{-t}\frac{1-2\cos 4t}{2}dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-t}}{2}dt - \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} e^{-2t}\cos 4t\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{e^{-2T}}{-4}+\frac{e^{2T}}{4}\right) - \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} e^{-2t}\cos 4t\cdot dt.$$

$$= 0+\infty.$$

$$P = 0+\infty.$$

$x_4(t)$ 既非能量信号、又非功率信号

第二章 连续信号的分析

方璐 2教南322
杭州电子科技大学 自动化学院

2.2 连续信号的频域分析

一、周期信号的频谱分析

- 周期信号的傅里叶级数展开式
- 周期信号的频谱
- 周期信号的功率分配
- 周期信号的傅里叶级数近似

二、非周期信号的频谱分析

- 从傅里叶级数到傅里叶变换
- 常见非奇异信号的频谱
- 奇异信号的频谱
- 周期信号的傅里叶变换

三、傅里叶变换的性质

- 线性性质
- 奇偶性
- 对偶性
- 尺度变换特性
- 时移特性
- 频移特性
- 微分特性
- 积分特性
- 帕斯瓦尔定理
- 卷积定理

2.2 连续信号的频域分析

二、非周期信号的频谱分析

1. 从傅里叶级数到傅里叶变换

2. 常见非奇异信号的频谱

3. 奇异信号的频谱

4. 周期信号的傅里叶变换

从周期信号FS推导非周期的FT

$$T_0 \to \infty \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \to 0 \to d\omega$$

$$n\omega_0 \to \omega$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{X}(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

傅里叶系数

$$\hat{X}(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \hat{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

消除T0的影响

$$T_0 \hat{X}(n\omega_0) = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \hat{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{X}(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \lim_{T_0 \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_0 \hat{X}(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{1}{T_0}$$

$$= \lim_{T_0 \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} T_0 \hat{X}(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

T0趋于无穷

T0趋于无穷

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

傅立叶反变换

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

傅立叶变换

二、 非周期信号的频谱分析

1. 从傅里叶级数到傅里叶变换

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

物理意义:

- X(ω)是一个频谱密度函数的概念
- X(ω)是一个连续谱
- X(ω)包含了从零到无限高频率的所有频率分量
- 各频率分量的频率不成谐波关系

二、 非周期信号的频谱分析

1. 从傅里叶级数到傅里叶变换

傅立叶变换存在的条件

狄里赫利条件只是信号存在傅立叶变换的充分条件

- 在无限区间内是绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- 在任意有限区间内，**x(t)**只有有限个不连续点，在这些点上函数取有限值。
- 在任意有限区间内， **x(t)**只有有限个极大值和极小值。

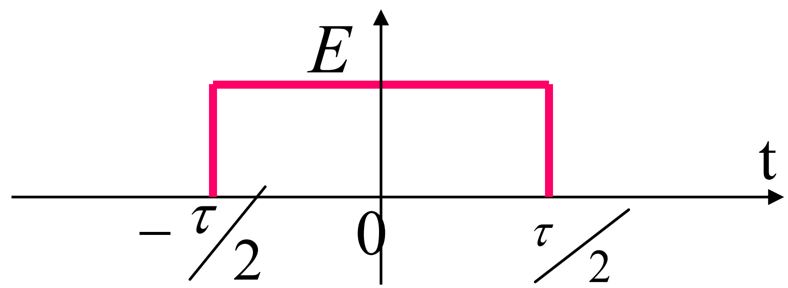
二、非周期信号的频谱分析

2. 常见非奇异信号的频谱

$$g(t) \leftrightarrow E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

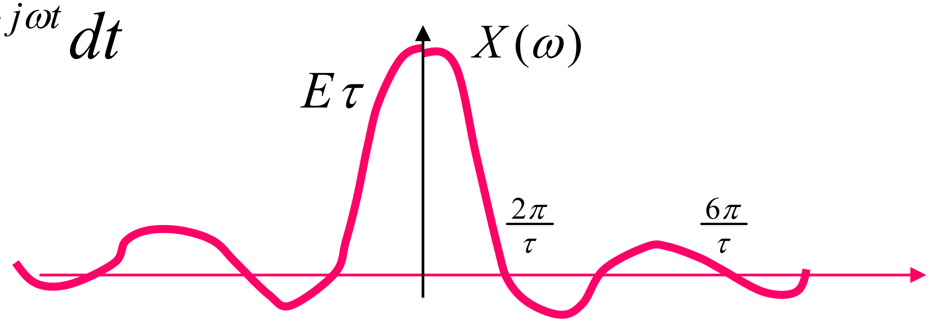
➢ 矩形脉冲信号

$$g(t) = \begin{cases} E & |t| < \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



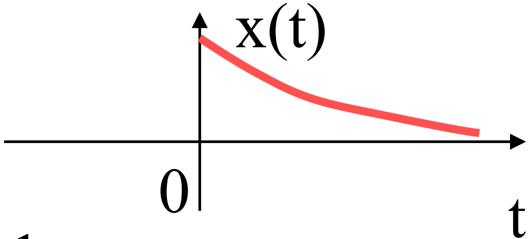
二、 非周期信号的频谱分析

2. 常见非奇异信号的频谱

$$\frac{1}{a+j\omega}$$

➢ 单边指数信号

$$x(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0, a>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



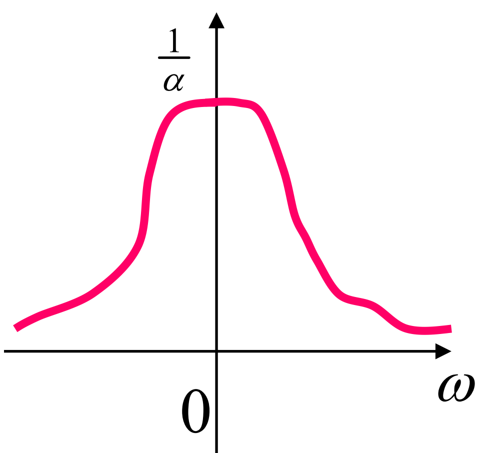
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a+j\omega}$$

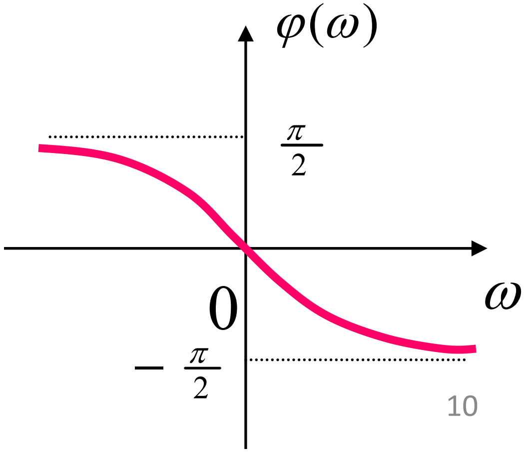
幅频

$$\left|X(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

相频

$$\varphi(\omega)=-\tan^{-1}(\frac{\omega}{a})$$





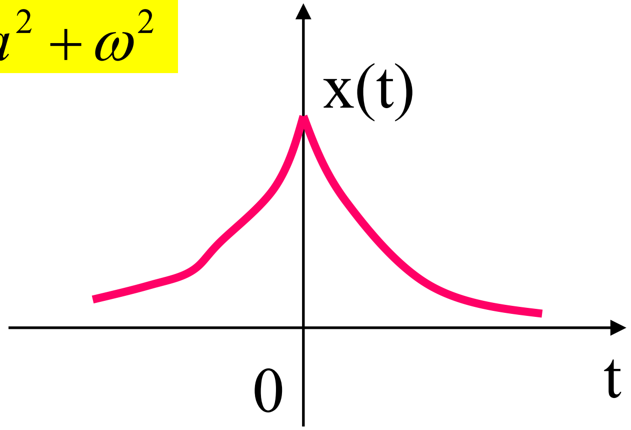
二、 非周期信号的频谱分析

2. 常见非奇异信号的频谱

$$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

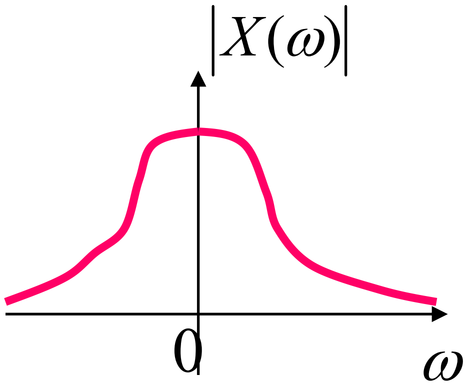
➢ 双边指数信号

$$x(t)=e^{-a|t|} \qquad a>0$$



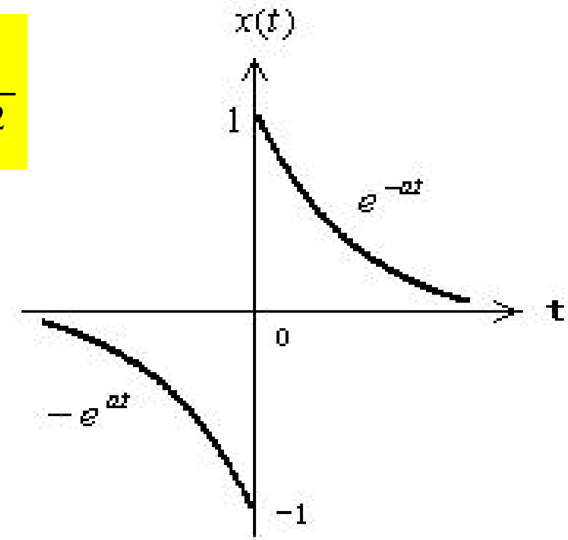
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$



2. 常见非奇异信号的频谱

$$-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$$

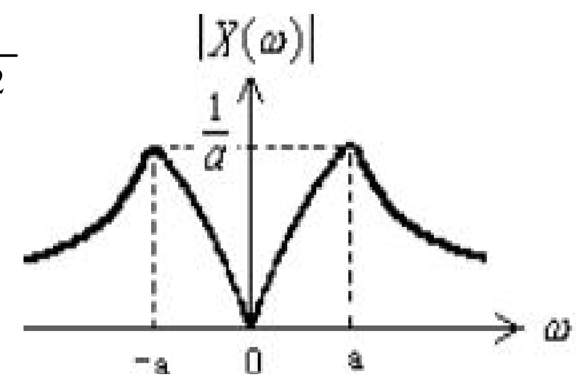


➢ 双边奇指数信号

$$x(t)=\begin{cases}-e^{at} & t<0, a>0\\ e^{-at} & t>0, a>0\end{cases}$$

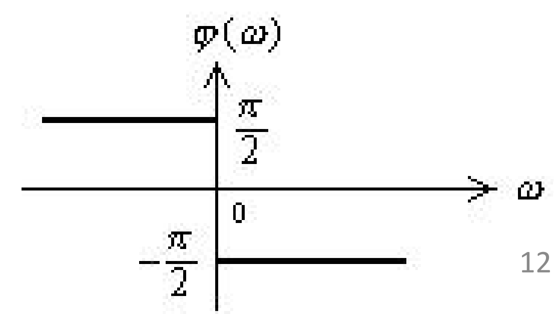
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}(-e^{at}e^{-j\omega t})dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$$



幅频 $|X(\omega)|=\dfrac{2|\omega|}{a^2+\omega^2}$

相频 $$\varphi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \omega<0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \omega>0\end{cases}$$



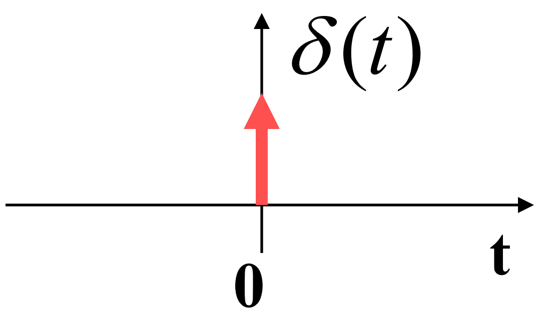
二、 非周期信号的频谱分析

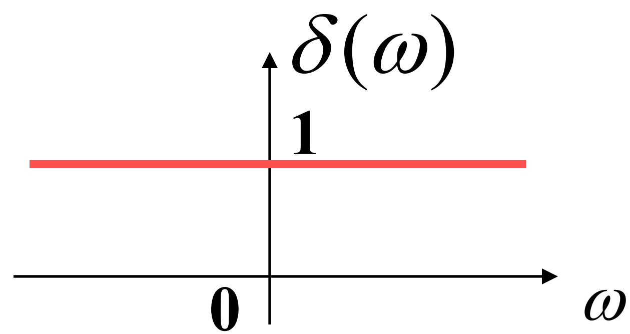
3. 奇异信号的频谱

➢ 单位冲激信号 $\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$

根据冲激函数的抽样特性，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{0} = 1$$





二、非周期信号的频谱分析

3. 奇异信号的频谱

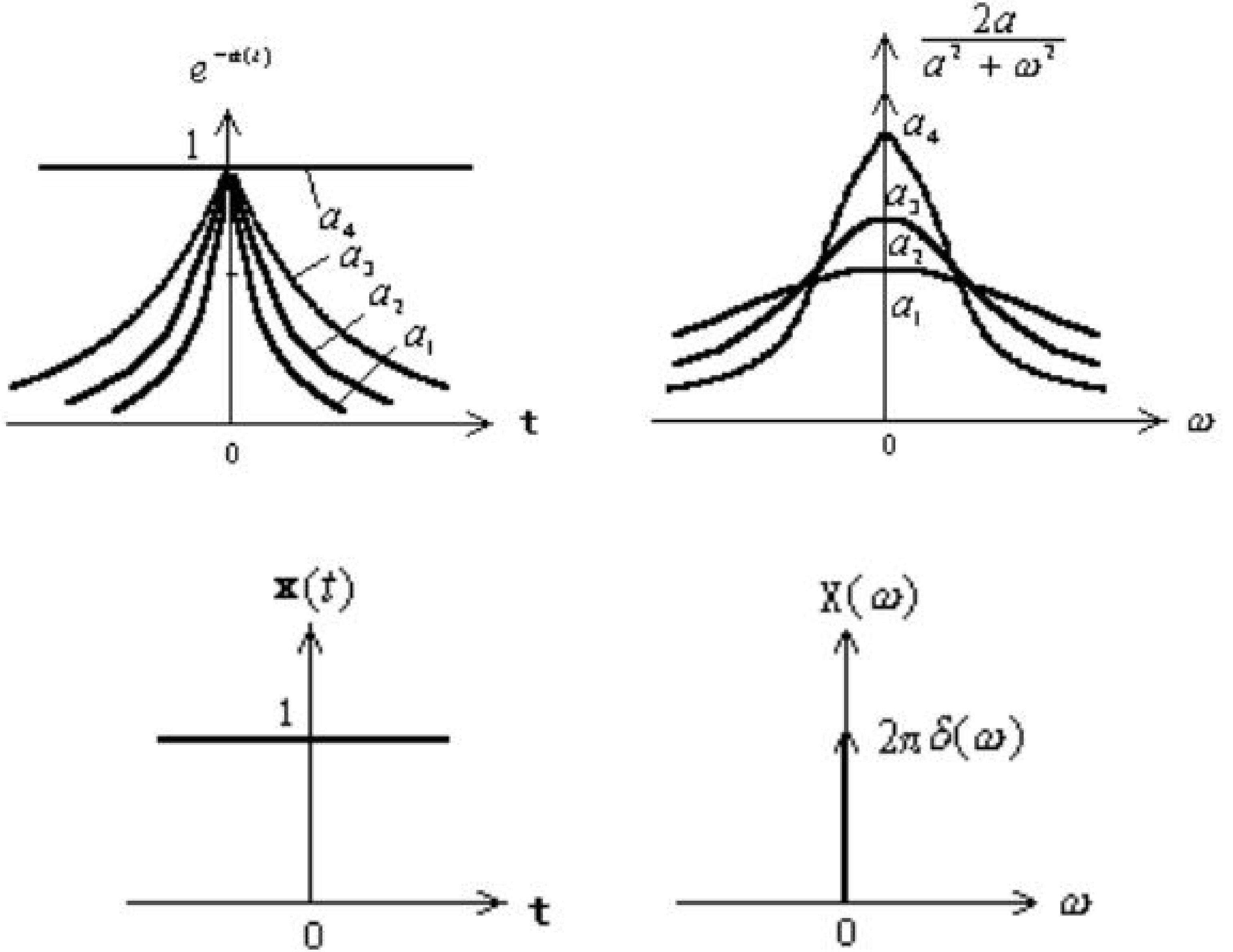
➤ 单位直流信号 $\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$

$$x(t) = 1 \qquad -\infty < t < \infty$$

该信号不满足绝对可积条件，可以把它看作双边指数信号

$e^{-a|t|}(a > 0)$ 当 $a \to 0$ 的极限。

$$F[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \xrightarrow{\text{a趋于零}} X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$


1
a_4
a_3
a_2
a_1
t
0
$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
a_4
a_3
a_2
a_1
ω
0
x(t)
1
t
0
X(ω)
$2\pi\delta(\omega)$
ω
0

二、非周期信号的频谱分析

3. 奇异信号的频谱

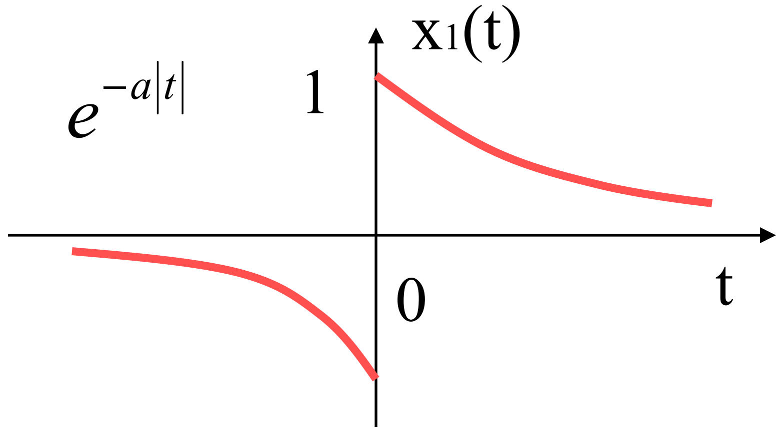
➢ 符号函数信号

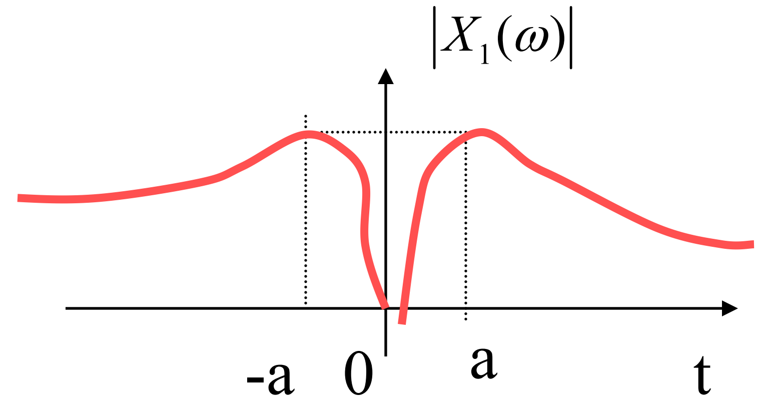
$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}(\omega \neq 0)}$$

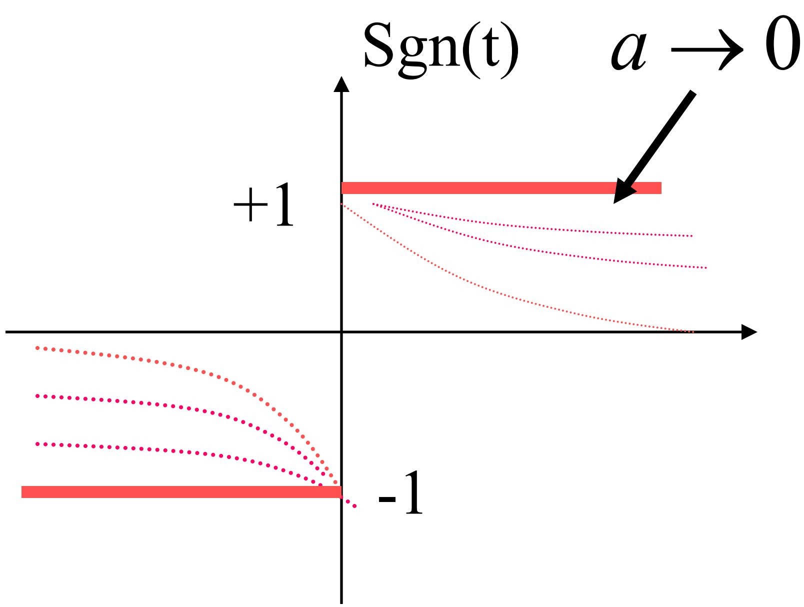
$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

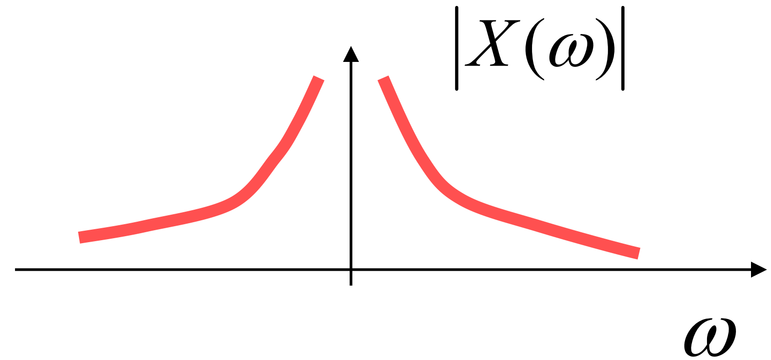
把符号函数信号看成是双边奇指数信号当a趋于0时的极限。

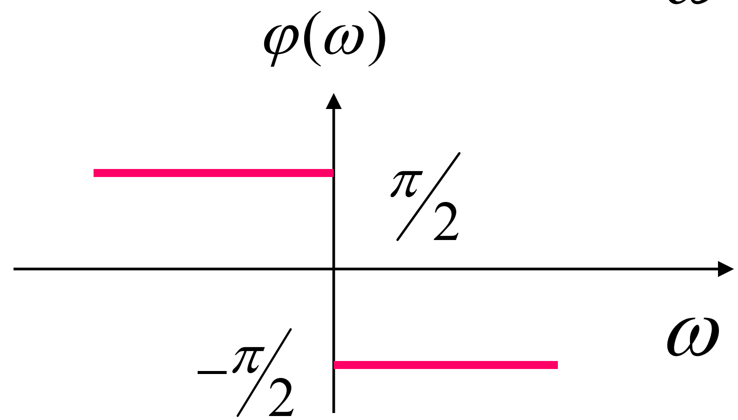
$$X(\omega) = \lim_{a \to 0}\left[-j\frac{2\omega}{a^2 + \omega^2}\right] = \begin{cases} \dfrac{2}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$


$e^{-a|t|}$
x1(t)
1
0
t


$|X_1(\omega)|$
-a
0
a
t


Sgn(t)
$a \rightarrow 0$
+1
-1


$|X(\omega)|$
ω


$\varphi(\omega)$
$\pi/2$
$-\pi/2$
ω

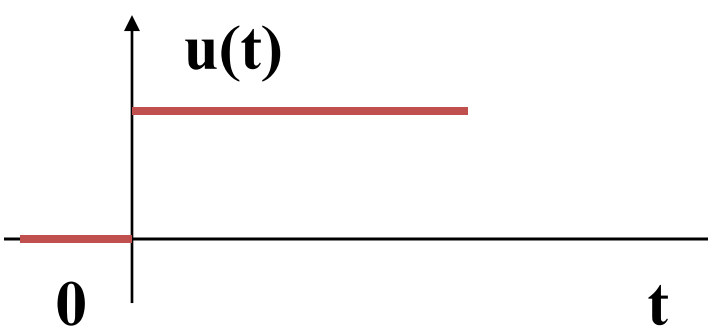
二、 非周期信号的频谱分析

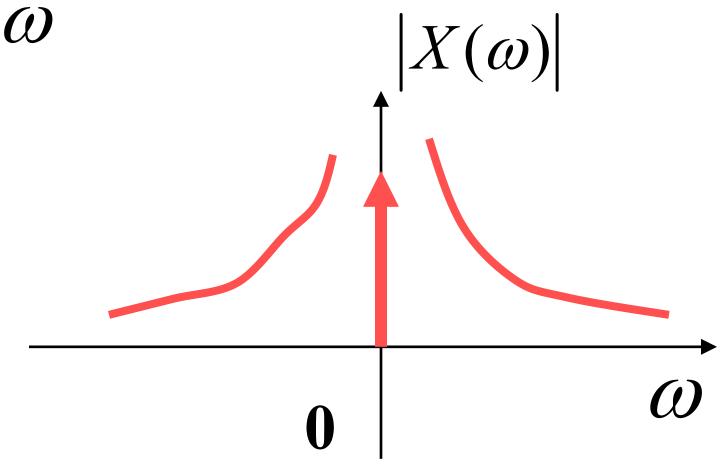
3. 奇异信号的频谱

➢ 单位阶跃信号 $\boxed{u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$

把它视为单边指数信号当a趋于0时的极限

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$





二、 非周期信号的频谱分析

4. 周期信号的傅里叶变换

- 复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$$

考虑 $x(t)e^{j\omega_0 t}$ 的傅立叶变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

设x(t)的傅立叶变换为X(ω)，则上式为$X(\omega-\omega_0)$

令x(t)＝1，则由直流信号的傅立叶变换式，有

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$X_e(\omega) = X(\omega-\omega_0) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

二、 非周期信号的频谱分析

4. 周期信号的傅里叶变换

$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow -j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

- 正弦信号 $\sin\omega_0 t$

欧拉公式 $\sin\omega_0 t = \dfrac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$

应用复指数信号的傅立叶变换

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$= -j\pi\delta(\omega-\omega_0) + j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

二、 非周期信号的频谱分析

4. 周期信号的傅里叶变换

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

➢ 余弦信号 $\cos\omega_0 t$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$= \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

二、 非周期信号的频谱分析

➤ 一般周期信号

一般周期信号可以展开成指数形式的傅立叶级数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

$$X(\omega)=F[\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)F[e^{jn\omega_0 t}]$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

二、 非周期信号的频谱分析

➢ 一般周期信号

一般周期信号可以展开成指数形式的傅立叶级数

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

周期信号的傅里叶变换（即频谱密度函数）由无穷多个冲激函数组成，这些冲激函数位于周期信号的各谐波频率 $n\omega_0$ 处，其强度为各相应幅度 $X(n\omega_0)$ 的 2π 倍。

二、非周期信号的频谱分析

➢ 一般周期信号

周期矩形脉冲信号的傅里叶变换

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\frac{E\tau}{T_0}Sa(\frac{1}{2}n\omega_0\tau)\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$=\omega_0 E\tau\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa(\frac{1}{2}n\omega_0\tau)\delta(\omega-n\omega_0)$$

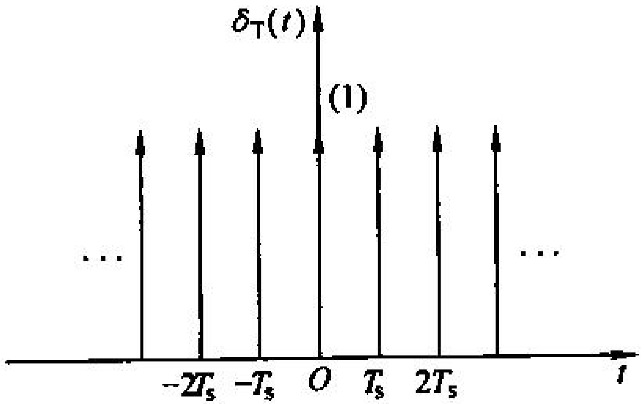
二、非周期信号的频谱分析

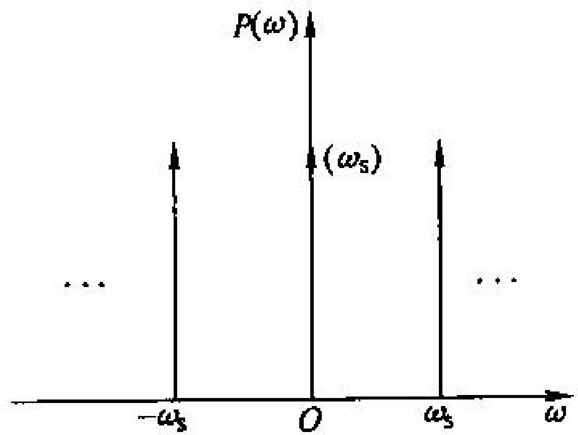
➢ 一般周期信号

思考：采样信号的傅里叶变换？

$$\delta_{\mathrm{T}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$X(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$





2.2 连续信号的频谱分析

一、周期信号的频谱分析

- 周期信号的傅里叶级数展开式
- 周期信号的频谱
- 周期信号的功率分配
- 周期信号的傅里叶级数近似

二、非周期信号的频谱分析

- 从傅里叶级数到傅里叶变换
- 常见非奇异信号的频谱
- 奇异信号的频谱
- 周期信号的傅里叶变换

三、傅里叶变换的性质

- 线性性质
- 奇偶性
- 对偶性
- 尺度变换特性
- 时移特性
- 频移特性
- 微分特性
- 积分特性
- 帕斯瓦尔定理
- 卷积定理

2.2 连续信号的频谱分析

三、傅里叶变换的性质

1. 线性性质（叠加性）

若 $$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$$
$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

则

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

2.2 连续信号的频谱分析

三、傅里叶变换的性质

2. 奇偶性

无论**x(t)**是实函数还是复函数，均成立

若 $F[x(t)] = X(\omega)$

则 $F[x^*(t)] = X^*(-\omega)$

时域共轭
频域共轭
并且反摺

证明：由傅立叶变换定义式

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\Big\downarrow \text{取共轭}$$

$$X^*(\omega)=\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^*=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)e^{j\omega t}dt$$

$$\Big\downarrow \text{以}-\omega\text{代替}\omega$$

$$X^*(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)e^{-j\omega t}dt=F[x^*(t)]$$

讨论：若$x(t)$是实函数

对ω而言：

$$X(\omega)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t dt}_{R(\omega)}-j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t dt}_{I(\omega)}$$

偶函数

奇函数

$R(\omega)=R(-\omega)$　　$I(\omega)=-I(-\omega)$

$$\left.\begin{aligned}|X(\omega)|&=\sqrt{R^2(\omega)+I^2(\omega)}\\ \varphi(\omega)&=\arctan\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right)\end{aligned}\right\}$$

实函数傅立叶变换幅度谱为偶函数，相位谱为奇函数

讨论：若*x*(*t*)是实偶函数

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t dt$$

$x(t)\cos\omega t$ 关于t的偶函数

$x(t)\sin\omega t$ 关于t的奇函数

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(\omega)=0$

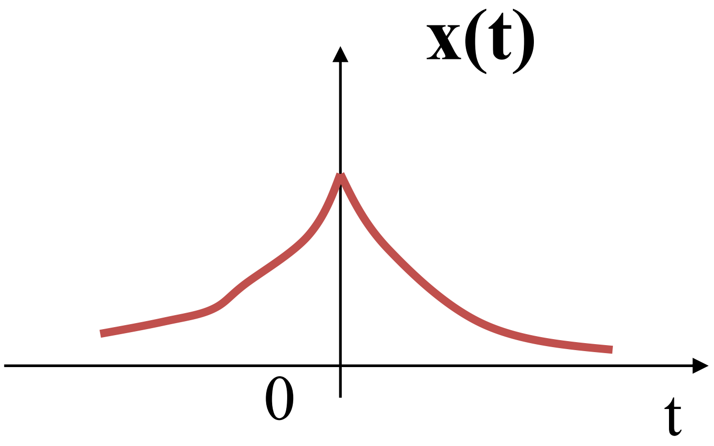
$$X(\omega)=\mathrm{Re}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t dt=2\int_{0}^{\infty}x(t)\cos\omega t dt=X(-\omega)$$

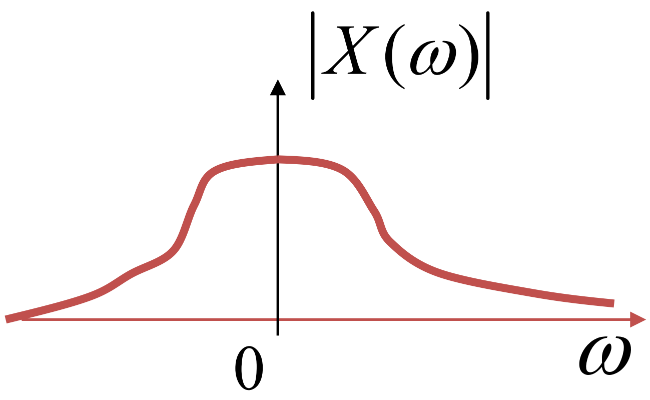
X(ω)是ω的实偶函数

实偶函数的傅立叶变换仍为实偶函数

$$x(t) = e^{-\alpha|t|} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

$$X(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad \varphi(\omega) = 0$$





讨论：若$x(t)$是实奇函数

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t dt-j\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t dt$$

$x(t)\cos\omega t$ 关于t的奇函数

$x(t)\sin\omega t$ 关于t的偶函数

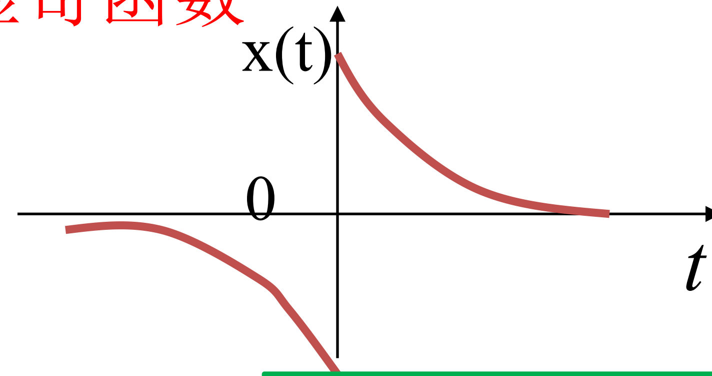
$\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(\omega)=0$

$$X(\omega)=j\,\mathrm{Im}(\omega)=-j\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t dt=-2j\int_{0}^{\infty}x(t)\sin\omega t dt$$

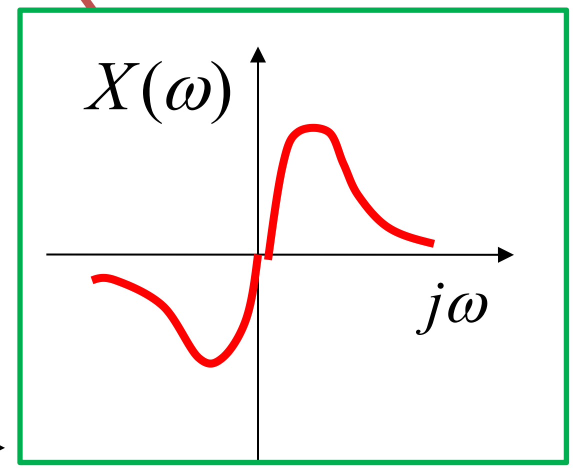
X(ω)是ω的虚奇函数

实奇函数的傅立叶变换则为虚奇函数

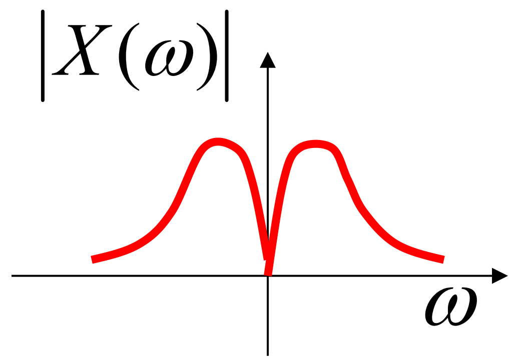
$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & (t > 0) \\ -e^{-at} & (t < 0) \end{cases}$$



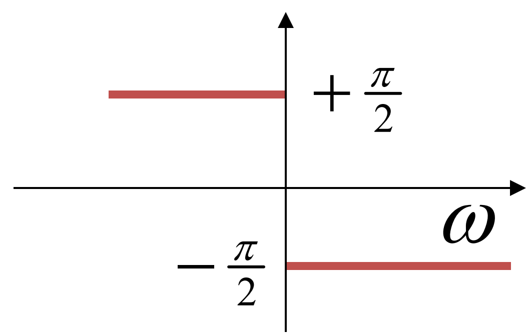
$$X(\omega) = \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$



$$|X(\omega)| = \frac{2|\omega|}{\alpha^2 + \omega^2}$$



$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases}$$



3. 对偶性

- 若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ 则 $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

证明：由傅立叶反变换式

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

自变量t变成－t

$$x(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

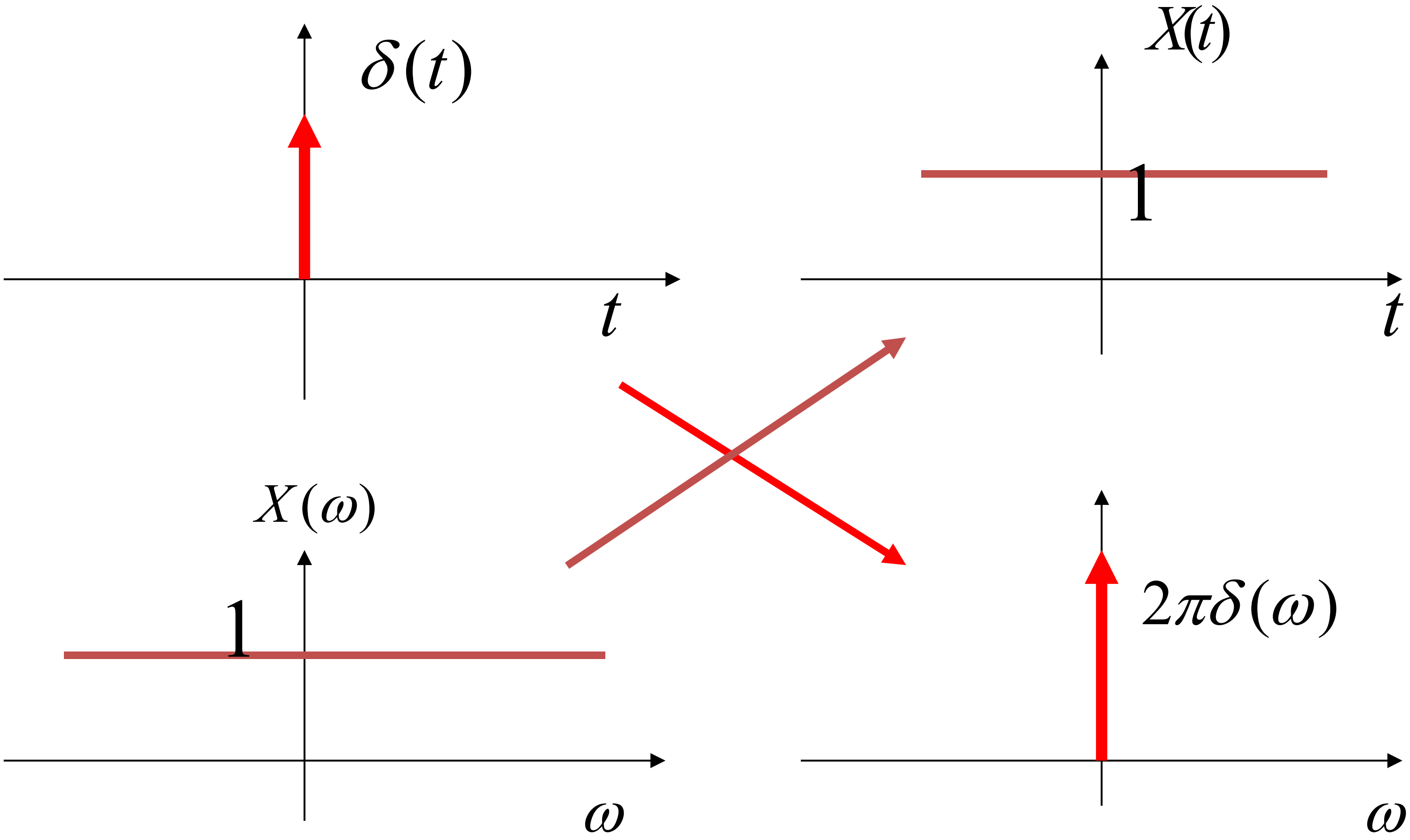
将t和ω互换

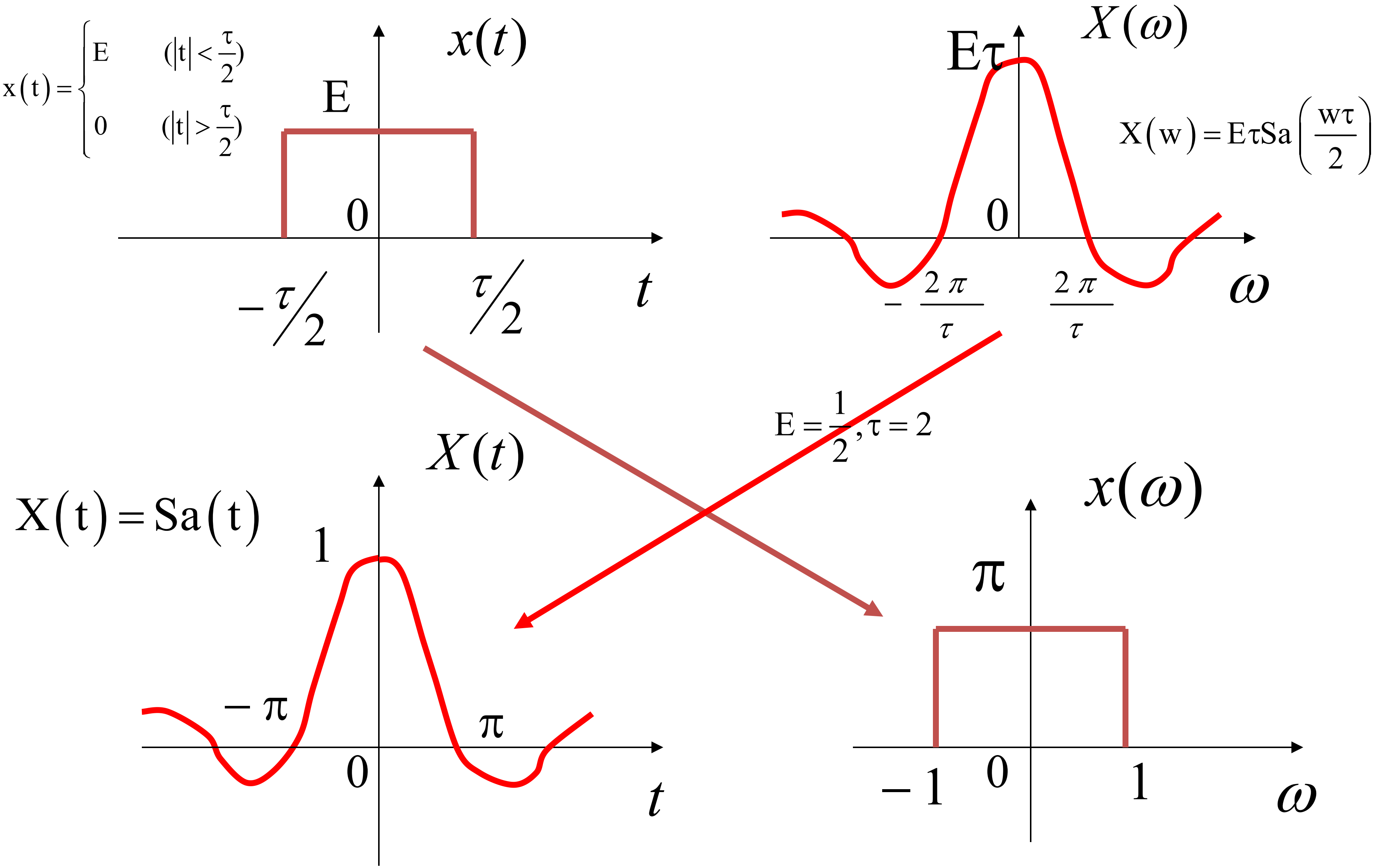
$$x(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{X(t)}e^{-j\omega t}dt = \boxed{2\pi x(-\omega)}$$

为X（t）的傅立叶变换

直流和冲激函数的频谱的对称性





详见课本P46页例1-10

$$a > 1, \quad t > 0$$

$$x(t) = e^{-at}$$

傅立叶变换

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

x 换成 X_1

t 换成 $-\omega$

$$X_1(\omega) = F\left[\frac{1}{a + jt}\right] = ?$$

ω 换成t

对偶性

$$X_1(\omega) = 2\pi x(-\omega) = 2\pi e^{+a\omega}$$

2.2 连续信号的频谱分析

三、傅里叶变换的性质

4. 尺度变换特性

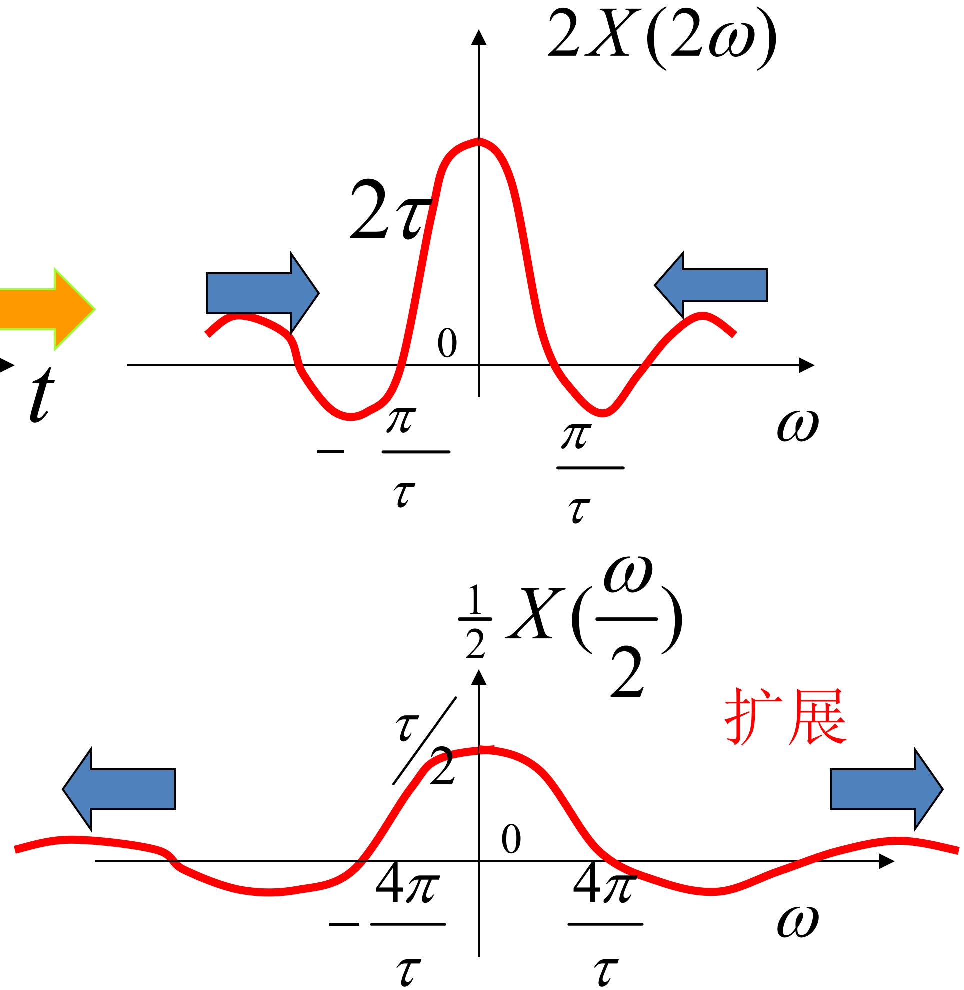
- 若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
- 则

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

根据傅立叶变换定义式证明

$a=-1, x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$ 信号在时域翻转，频谱对应频域翻转

时域中的压缩（扩展）等于频域中的扩展（压缩），同时幅度相应的进行压缩（扩展）



2.2 连续信号的频谱分析

三、傅里叶变换的性质

5. 时移特性

时间变化引起相应的频谱函数的变换

若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

信号右移（延时），其幅度谱不变，而相位谱产生（$-\omega t_0$ ）的变化

则 $x(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0} X(\omega)$

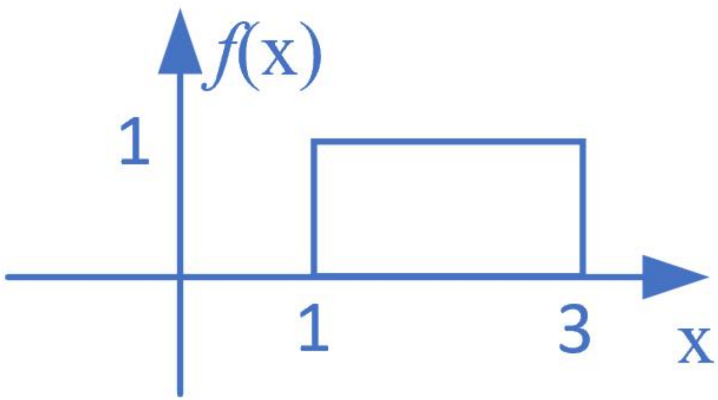
带有尺度变换的时移特性

$$F\left[x(at - t_0)\right] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

单选题 5分

设置

下列信号的频谱为（）



A $2e^{j2\omega}Sa(\omega)$

B $2e^{-j2\omega}Sa(\omega)$

C $2Sa(2\omega)$

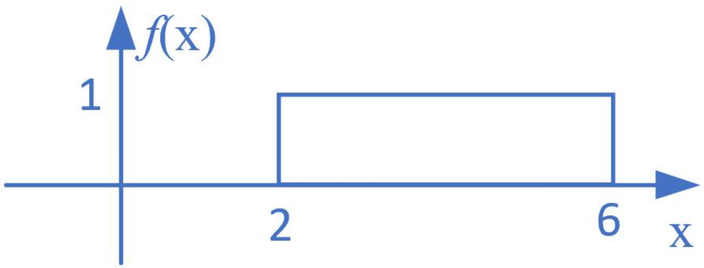
D $2Sa(-2\omega)$

提交

单选题 5分

设置

下列信号的频谱为（）



A $2e^{j2\omega}Sa(\omega)$

B $e^{-j\omega}Sa(\frac{\omega}{2})$

C $2e^{-j4\omega}Sa(2\omega)$

D $4e^{-j4\omega}Sa(2\omega)$

提交

例：求三脉冲信号的频谱

解： 单矩形脉冲 $f_0(t)$ 的频谱为 $F_0(\omega) = E\tau\, Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

有如下三脉冲信号

$$f(t) = f_0(t) + f_0(t+T) + f_0(t-T)$$

其频谱为

$$F(\omega) = F_0(\omega)(1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})$$

$$= F_0(\omega)(1 + 2\cos \omega T)$$

$$= E\tau\, Sa(\frac{\omega\tau}{2})(1 + 2\cos \omega T)$$

三、傅里叶变换的性质

6. 频移特性

频率变化引起相应的时间函数的变化

若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

则 $x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega \mp \omega_0)$

在时域将信号x(t)乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$，对应于在频域将原信号的频谱右移ω_0，即往高频段平移，实行频谱的搬移。

三、傅里叶变换的性质

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$$

$$\boxed{\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})} \leftrightarrow \boxed{\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)}$$

$$\boxed{\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})} \leftrightarrow \boxed{-j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)}$$

调幅信号的频谱（调制技术）

将调制信号x(t)乘以正弦或余弦信号，在时域由信号x(t)改变正弦或余弦信号的幅度，在频域则是使x(t)频谱右移，将发送信号的频谱搬移到适合信道传输的较高频率范围，频移特性也称为调制特性。

求： $x(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱？

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

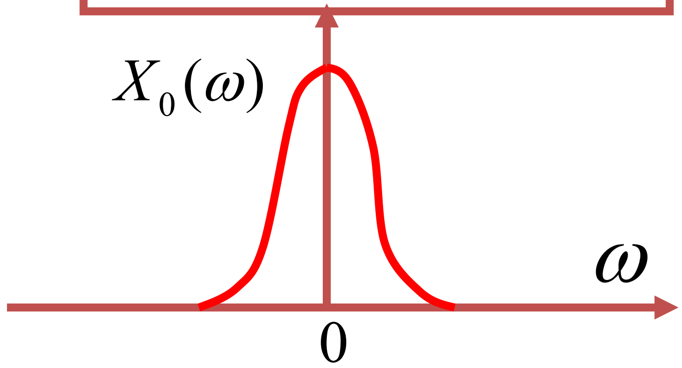
$$F[x(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)]$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$F[x(t)\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2j}[X(\omega-\omega_0) - X(\omega+\omega_0)]$$

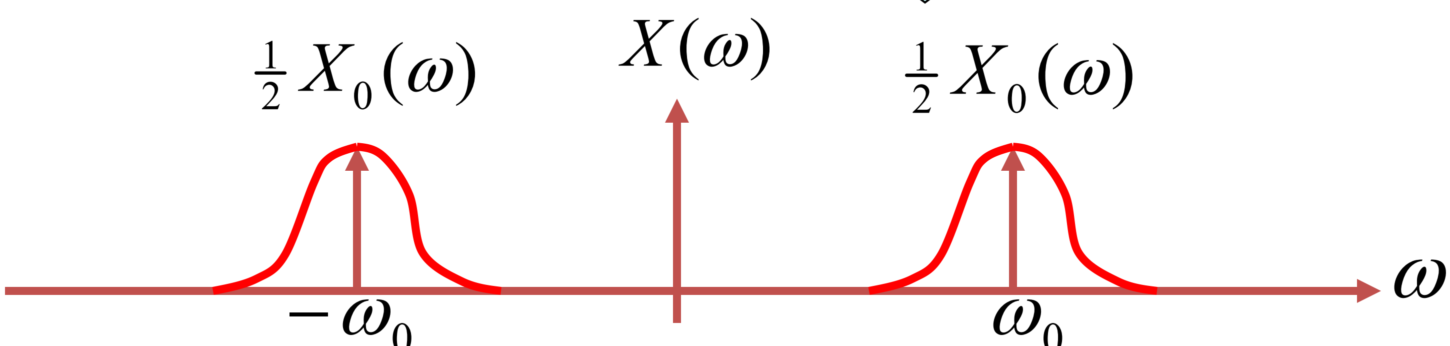
$$F[x(t)\cos\omega_0 t]$$

$$F[x(t)] = X_0(\omega)$$



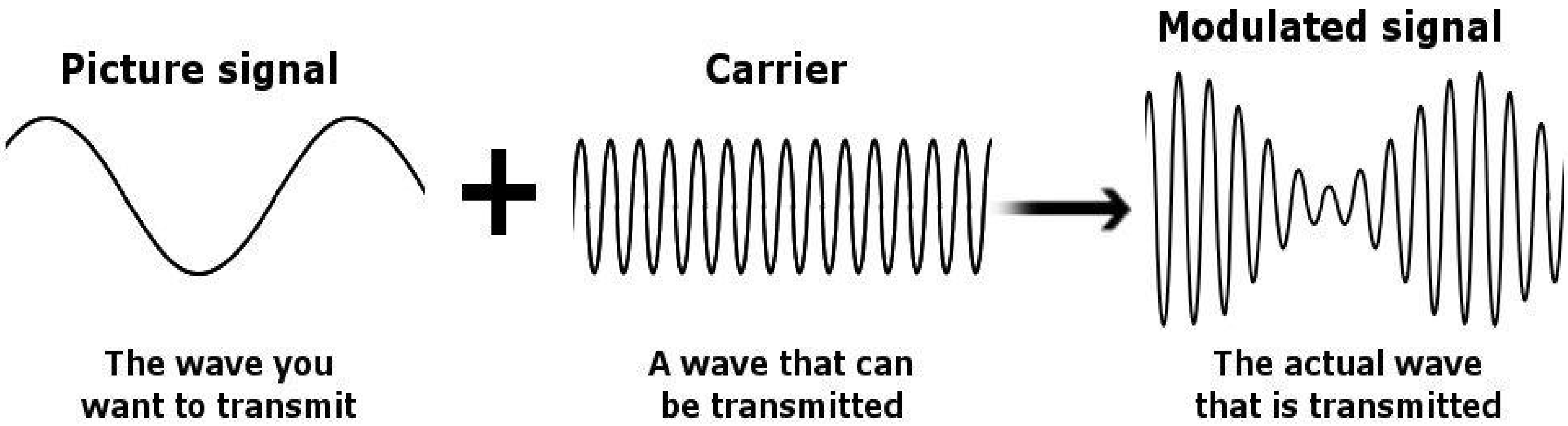
$$\frac{1}{2}x(t)[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

频移特性



$$\frac{1}{2}[X_0(\omega - \omega_0) + X_0(\omega + \omega_0)]$$

Modulation



Demodulation

2.2 连续信号的频谱分析

三、傅里叶变换的性质

7. 微分特性（时域微分）

- 若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
- 则 $$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

例： 求三角脉冲 $x(t)=\begin{cases}E(1-\frac{2}{\tau}|t|) & (|t|<\frac{\tau}{2})\\ 0 & (|t|>\frac{\tau}{2})\end{cases}$ 的频谱

方法一： 代入定义计算

方法二： 利用二阶导数的FT（或可以参考课本P51的一阶方法）

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{2E}{\tau}\left[\delta(t+\tfrac{\tau}{2})+\delta(t-\tfrac{\tau}{2})-2\delta(t)\right]$$

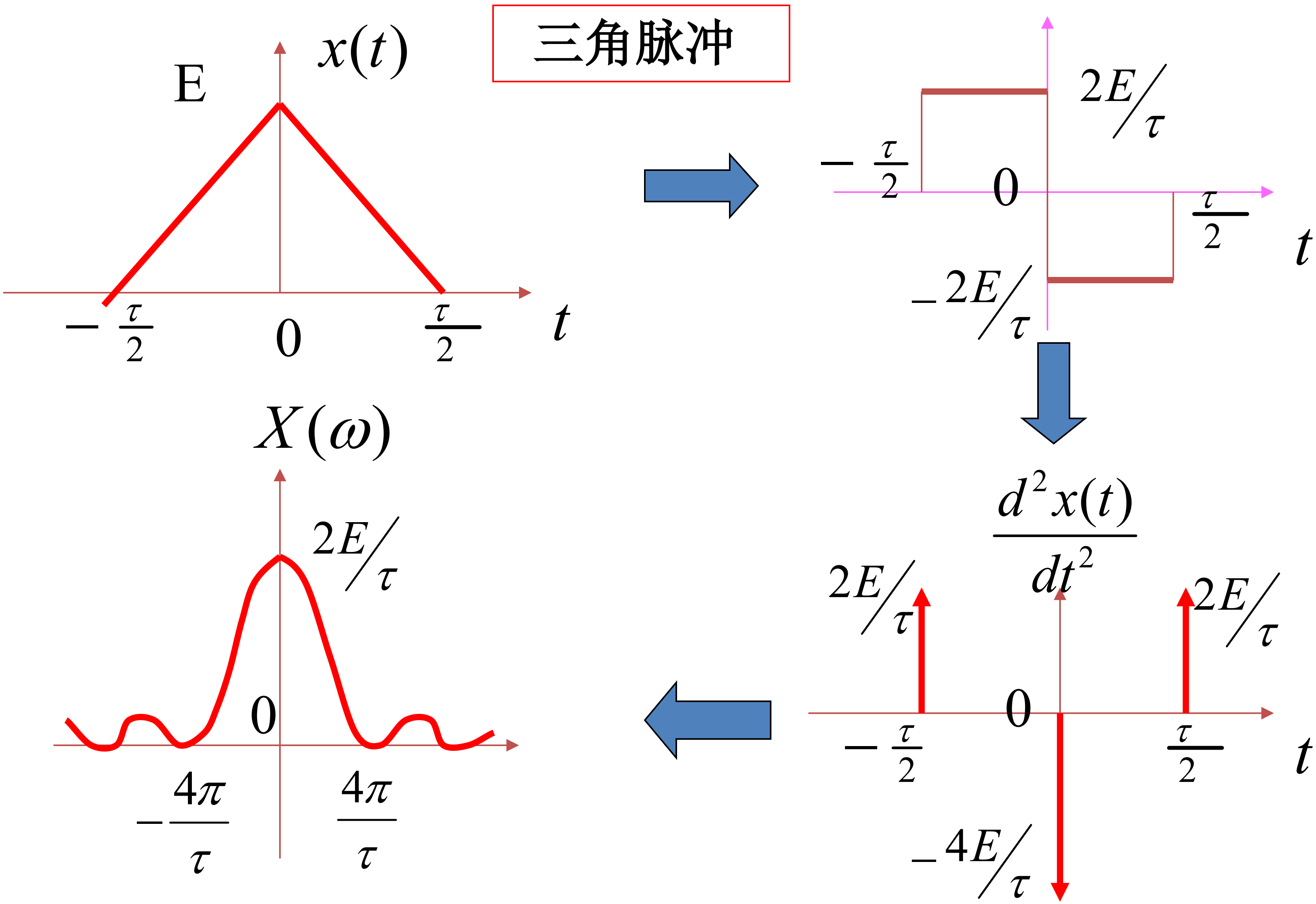
$$\Big\Downarrow \text{FT}$$

$$(j\omega)^2X(\omega)=\frac{2E}{\tau}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-2)$$

$$=-\frac{8E}{\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)=-\frac{\omega^2E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$\boxed{X(\omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})}$$

三角脉冲频谱的求解过程



三、傅里叶变换的性质

7. 微分特性（频域微分）

- 若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
- 则 $tx(t) \leftrightarrow j\dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$

$$t^n x(t) \leftrightarrow j^n \frac{dX^n(\omega)}{d\omega^n}$$

试求单位斜坡信号$tu(t)$的傅立叶变换。

[解] 已知单位阶跃信号傅立叶变换为:

$$F[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

利用频域微分特性可得:

$$F[tu(t)] = j\frac{d}{d\omega}[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] = \pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

8. 积分特性

若

$$F[x(t)] = X(\omega)$$

$$\boxed{X(0) \neq 0}$$

则

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \boxed{\pi X(0)\delta(\omega)}$$

积分特性的证明(建议参考课本P51的证明！！！)

令 $$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)d\tau$$

两边求导 $$\frac{dy(t)}{dt}=x(t)$$

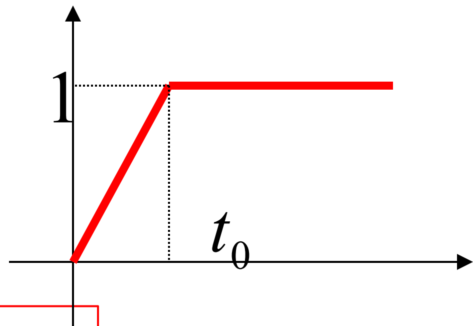
FT 微分特性

$$j\omega Y(\omega)=X(\omega)$$

FT 积分特性

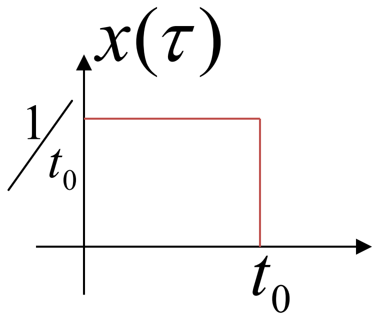
$$F\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)d\tau\right]=\frac{X(\omega)}{j\omega}$$

例：求斜平信号 $y(t)=\begin{cases} 0 & (\tau<0) \\ t/t_0 & (0<\tau<t_0) \\ 1 & (\tau>t_0) \end{cases}$ 的频谱



看成高 $1/t_0$，宽 t_0 的矩形脉冲 $x(\tau)$ 的积分

$$x(\tau)=\begin{cases} 0 & (\tau<0) \\ 1/t_0 & (0<\tau<t_0) \\ 0 & (\tau>t_0) \end{cases}$$



$$\mathrm{X}(\mathrm{w})=\mathrm{Sa}\left(\frac{\mathrm{wt_0}}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{jwt_0}}{2}}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

$$Y(\omega)=F[y(t)]=\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\boxed{\pi X(0)\delta(\omega)}$$

$$=\frac{1}{j\omega}Sa(\frac{\omega t_0}{2})e^{-j\frac{\omega t_0}{2}}+\boxed{\pi\delta(\omega)}$$

X(0)为1

三、傅里叶变换的性质

例1-15

9. 帕斯瓦尔定理

能量密度谱，能谱

若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

则
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{|X(\omega)|^2} d\omega$$

帕斯瓦尔定理表明，信号的总能量也可由频域求得，即从单位频率的能量 $\left(|X(\omega)|^2 / 2\pi\right)$ 在整个频率范围内积分得到。

2.2 连续信号的频谱分析

三、傅里叶变换的性质

10. 卷积定理(时域卷积定理、频域卷积定理)

- 时域卷积定理

若

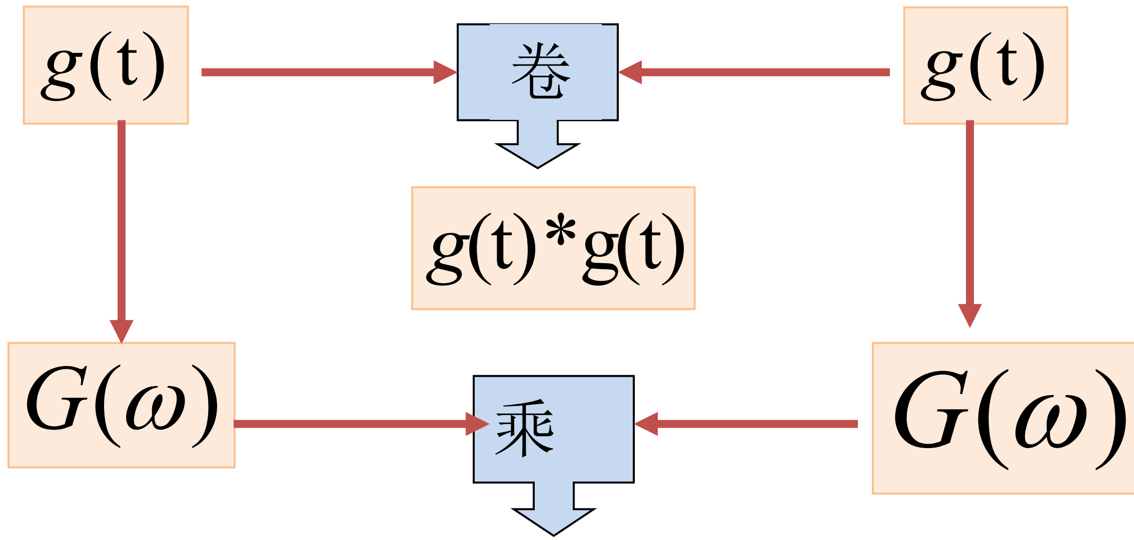
$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

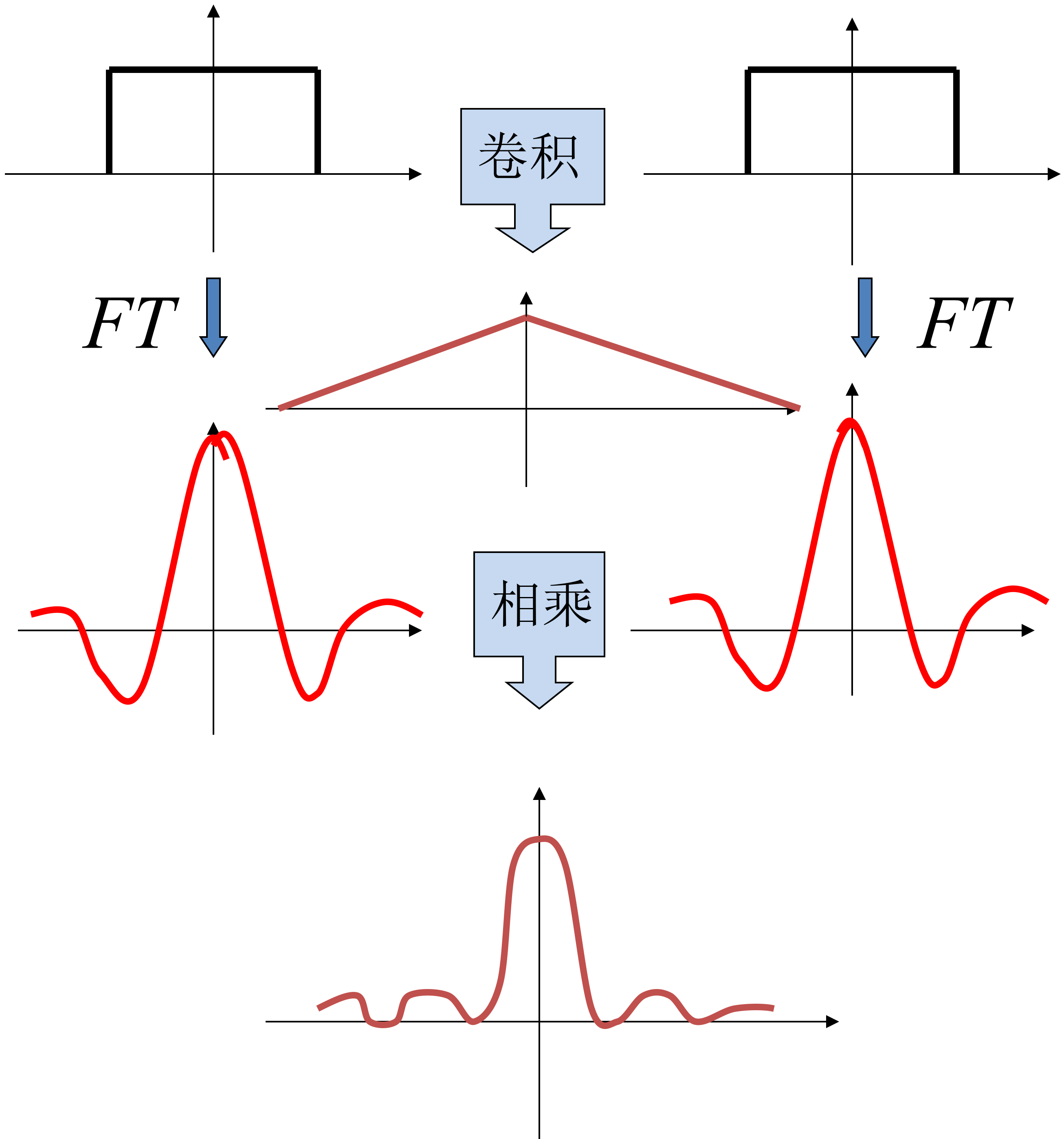
则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

例：求两个矩形脉冲卷积后的频谱（结合P54例1-16）



$$F(\omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^{2}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$


卷积
FT
FT
相乘

2.2 连续信号的频谱分析

三、傅里叶变换的性质

➢ 频域卷积定理

结合P56例1-17

若 $$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

则

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$