杭州电子科技大学学生考试卷（A）卷

考试课程	高等数学 A2	考试日期	2020 年 月 日	成绩	
课程号	A0714202	任课教师姓名			
考生姓名		学号（8 位）		专业	

题号	一 1-8	二 9-12	三 13-16	四 17-19	五 20	六 21
得分						

注意：本卷总共 4 页，总分 100 分，时间 120 分钟

得分	

一、选择题 （本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1、向量 $\vec{a}=(6,-1,2)$ 在向量 $\vec{b}=(7,-4,4)$ 上的投影为（ B ）

（A）3； （B）6； （C）-2； （D）-4.

2、直线 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和平面 $3x-2y+7z-8=0$ 的位置关系是（ B ）

（A）平行； （B）垂直； （C）斜交； （D）直线在平面上.

3、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=$（ C ）

（A）0； （B）1； （C）2； （D）不存在.

4、二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数存在是函数在该点连续的（ D ）

（A）充分非必要条件； （B）必要非充分条件； （C）充要条件； （D）以上都不对.

5、函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=a^3$ 所确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（ A ）

（A）$\dfrac{yz}{z^2-xy}$； （B）$\dfrac{yz}{xy-z^2}$； （C）$\dfrac{xy-z^2}{yz}$； （D）$\dfrac{z^2-xy}{yz}$.

6、已知 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\pi$，其中 $D:x^2+y^2\le a^2$，则 $a=$（ D ）

（A）1； （B）$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$； （C）$\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$； （D）$\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

7、设 α 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n}{n^3}-\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{n}}\right)$（ C ）

（A）绝对收敛； （B）条件收敛； （C）敛散性与有 α 关； （D）发散.

8、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的和函数是（ A ）

（A）e^{-x^2}； （B）e^{x^2}； （C）$-e^{-x^2}$； （D）$-e^{x^2}$.

得分	

二、填空题 （本题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9、函数 $u=2xy+2z$ 在点 $(1,1,2)$ 处的方向导数的最大值为________.（ $2\sqrt{3}$ ）

10、交换积分次序 $\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{2-x^2}f(x,y)dy=\underline{\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}}f(x,y)dx}$.

11、设 L 为 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长 a，则 $\oint_L(3x^2-4xy+2y^2)\,ds=$________.（ $6a$ ）

12、设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于______.（ $\dfrac{1}{2}\pi^2$ ）

得分	

三、计算题（共 4 小题，每题 6 分，共 24 分）

13、设 $z = x\ln(x+\ln y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},dz$.

14、求曲线 $\begin{cases} x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=10 \end{cases}$ 在点 $(1,1,3)$ 处的切线和法平面方程.

15、求 $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^3}dxdy$，其中 D 是由 $x=2$, $y=\sqrt{x}$, $xy=1$ 围成.

16、设 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧，证明积分与路径无关，并求积分值.

得分	

四、综合计算题（共 3 小题，17 题 8 分，18-19 各 9 分，共 26 分）

[8 分] 17、求双曲抛物面 $z=xy$ 被柱面 $x^2+y^2=2$ 所截得的曲面面积.

[9 分] 18、求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}$ 的收敛域与和函数.

[9 分] 19、求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xoy 平面距离最短的点.

得分	

五、计算题（本题 9 分）

20、求 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2-1)x\,dydz+xy\,dzdx+z\,dxdy$，其中 $\Sigma: x^2+y^2=z$，（$0\le z\le 4$）取下侧.

得分	

六、分析题 （本题 5 分）

21、已知，阿贝尔判别法是这样描述的：设 $\{b_n\}$ 为单调有界数列，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,b_n$ 收敛. 下面讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ $(p\in R)$ 的敛散性，如果收敛请判断绝对收敛与条件收敛.

2019-2020-2 高等数学 A2 期末考卷（A）-参考答案

一、选择题： B B C D A D C A

二、填空题： 9、$2\sqrt{3}$ 10、$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$ 11、$6a$ 12、$\frac{\pi^2}{2}$

三、计算题（每题 6 分）

13、$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(x+\ln y)+\frac{x}{x+\ln y}$ .... 2 分 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x+\ln y}\cdot\frac{1}{y}$ .... 2 分

$dz=[\ln(x+\ln y)+\frac{x}{x+\ln y}]dx+\frac{x}{y(x+\ln y)}dy$ .... 2 分

14、令 $F(x,y,z)=x^2+z^2-10,\ G(x,y,z)=y^2+z^2-10$

$\vec{T}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 0 & 2z \\ 0 & 2y & 2z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}=(-12,-12,4)$或$(3,3,-1)$ .... 2 分

切线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$ .... 2 分

法平面 $3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0,$ 即$3x+3y-z-3=0$ .... 2 分

15、原式 $=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\frac{x^2}{y^3}dy$ .... 3 分

$=\int_1^2 x^2[-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}]_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}dx=-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2(\frac{1}{x}-x^2)dx$ .... 2 分

$=-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5]_1^2=\frac{47}{20}$ .... 1 分

16、(1) $P=x^2-y,Q=-x-\sin^2 y$， $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$ .... 2 分

(2) 原式$=\int_{L_1}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{L_2}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$

$=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1(1+\sin^2 y)dy$ .... 2 分

$=-\frac{2}{3}-\int_0^1\frac{1-\cos 2y}{2}dy=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2$ .... 2 分

四、综合计算题（17 题 8 分，18-19 题各 9 分）

17、$A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}d\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{1+x^2+y^2}d\sigma$ ……………. 4 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho=\frac{1}{2}2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+\rho^2}d(1+\rho^2)$ …. 2 分

$=\frac{2}{3}\pi[(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3}-1)$ …………. 2 分

18、(1) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ ………………. 2 分

故 $R=2$, 当 $x=\pm2$ 时，级数发散． 收敛域为 $(-2,2)$ ………………. 2 分

(2) $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x^n)'=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n})'$ ……………………. 2 分

$=(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}})'=(\frac{x}{2-x})'=\frac{2}{(2-x)^2}$， $x\in(-2,2)$ ……………………. 3 分

19、设所求点为 (x,y,z) ，目标函数 $d=|z|$ …………………. 2 分

建立辅助函数 $L=z^2+\lambda(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1)$ ，………………. 2 分

可得 $\begin{cases}L_x=\frac{1}{3}\lambda+2\mu x=0\\ L_y=\frac{1}{4}\lambda+2\mu y=0\\ L_z=2z+\frac{1}{5}\lambda=0\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ ………………………………… 2 分

解得，$x=\frac{4}{5},y=\frac{3}{5},z=\frac{35}{12}$ 或 $x=-\frac{4}{5},y=-\frac{3}{5},z=\frac{85}{12}$ ……………. 2 分

故所求点为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$ ………………………………………………. 1 分

五、计算题（本题 9 分）

20、作辅助面$\Sigma_1 : z=4,(x^2+y^2\le 4)$，取上侧. Σ和Σ_1围成Ω. .... 1 分

利用高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(z^2-1)xdydz+xydzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}(z^2+x)dv=\iiint_{\Omega}z^2dv\ ,$$ .... 3 分

而$\iiint_{\Omega}z^2dv=\int_0^4 z^2dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^4 z^2\pi zdz=64\pi$， .... 2 分

又因为 $\iint_{\Sigma_1}(z^2-1)xdydz+xydzdx+zdxdy=\iint_{D_{xy}}4dxdy=16\pi$， .... 2 分

故原式=48π .... 1 分

六、分析题（本题 5 分）

21、解答要点

① $p\le 0$，通项$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\ne 0$，故级数发散; ....1 分

② $p>1$，$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|=\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}<\dfrac{1}{n^p}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛，故级数绝对收敛； ....1 分

③ $0<p\le 1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$收敛，而数列$\left\{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right\}$是单减有下界（极限为 1），由阿贝尔判别法，得 题中级数收敛， .... 2 分

另外由于$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|\Big/\dfrac{1}{n^p}\to 1\ (n\to\infty)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$发散，

所以，题中级数为条件收敛。 .... 1 分