P186.

第六次作业.

6.(1). $x_1(n) = (\frac{1}{2})^n u(n+3)$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^n u(n+3) e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-3}^{\infty} (\frac{e^{-j\Omega}}{2})^n = \frac{(\frac{e^{-j\Omega}}{2})^{-3}}{1-\frac{e^{-j\Omega}}{2}} = \frac{16 \cdot e^{3j\Omega}}{2-e^{-j\Omega}}$$

(2) $x(n) = a^n \sin(n\omega_0) u(n)$

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n\omega_0) e^{-j\Omega n}.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}) e^{-j\Omega n}.$$

$$= \frac{1}{2j} [\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot e^{j(\omega_0-\Omega)})^n - (a e^{-j(\omega_0+\Omega)})^n]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2j} [\frac{1-(a e^{j(\omega_0-\Omega)})^n}{1-a e^{j(\omega_0-\Omega)}} - \frac{1-(a e^{-j(\omega_0+\Omega)})^n}{1-a e^{-j(\omega_0+\Omega)}}]$$

$$= \frac{1}{2j} [\frac{1}{1-a e^{j(\omega_0-\Omega)}} - \frac{1}{1-a e^{-j(\omega_0+\Omega)}}] \quad |a| \le 1.$$

7、 $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$

$$= \frac{1}{2\pi} [\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} 1 \cdot e^{j\Omega n} d\Omega + \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 1 \cdot e^{j\Omega n} d\Omega]$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{1}{4}\pi} (\cos n\Omega + j \sin n\Omega) d\Omega + \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} (\cos n\Omega + j \sin n\Omega) d\Omega.$$

$$= \frac{1}{n\pi} [\sin \frac{3}{4} n\pi - \sin \frac{1}{4} n\pi]$$

8. (3). $x(n) - x(n-2)$

DTFT: $X(\Omega) - e^{-j\Omega \cdot 2} \cdot X(\Omega)$

$= (1 - e^{-2j\Omega}) X(\Omega)$

(4) $x(n) * x(n-1)$

DTFT: $X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega} \cdot X(\Omega)$

$= e^{-j\Omega} \cdot X(\Omega) \cdot X(\Omega)$

13.(2)、求 $X_2(k)$ 的10点DFT反变换：

$$X_2(k)=\begin{cases}3 & k=0\\ 2 & k=3,7.\\ 1 & 其他、\end{cases}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\cdot k\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot n}$$

$$=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}X(k)e^{j\cdot k\cdot\frac{2\pi}{10}\cdot n}$$

$$=\frac{1}{10}\Big[3\cdot e^{j\cdot 0\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}+e^{j\cdot 1\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}+e^{j\cdot 2\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}+2e^{j\cdot 3\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}+e^{j\cdot 4\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}$$

$$+e^{j\cdot 5\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}+e^{j\cdot 6\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}+2e^{j\cdot 7\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}+e^{j\cdot 8\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}+e^{j\cdot 9\cdot\frac{1}{5}\pi\cdot n}\Big]$$

$$=\frac{1}{10}\Big[3+2\cdot\cos\frac{1}{5}n\pi+2\cdot\cos\frac{2}{5}n\pi+4\cos\frac{3}{5}n\pi+\cos\frac{4}{5}n\pi+\cos n\pi\Big]$$

补充：(1)、求下列序列的4点DFT.

$x(0)=1.\quad x(1)=0\quad x(2)=1\quad x(3)=0$、

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\cdot k\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot n}$$

$$=\sum_{n=0}^{3}x(n)\cdot e^{-j\cdot k\cdot\frac{2\pi}{4}\cdot n}$$

$$=1\cdot e^{-j\cdot k\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 0}+0+1\cdot e^{-j\cdot k\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 2}+0$$

$$=1+e^{-j\cdot k\cdot\pi}$$

$X(0)=2.\quad X(1)=0\quad X(2)=2.\quad X(3)=0$

(2). 求下列序列的6点DFT.

$$x(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$$

解: $X(k) = \sum_{n=0}^{5} x(n) e^{-j\cdot k\cdot \frac{2\pi}{N}\cdot n}$

$$= \sum_{n=0}^{5} x(n)\cdot e^{-j\cdot k\cdot \frac{2\pi}{6} n}$$

$$= 4\cdot e^{-j\cdot k\cdot \frac{1}{3}\pi\cdot 0} + 3\cdot e^{-j\cdot k\cdot \frac{1}{3}\pi\cdot 1} + 2\cdot e^{-j\cdot k\cdot \frac{1}{3}\pi\cdot 2} + e^{-j\cdot k\cdot \frac{1}{3}\pi\cdot 3}$$

$$= 4 + 3\cdot e^{-j\cdot k\cdot \frac{1}{3}\pi} + 2\cdot e^{-j\cdot k\cdot \frac{2}{3}\pi} + e^{-j\cdot k\cdot \pi}$$

$$X(0) = 4 + 3\cdot e^{-j\cdot 0\cdot \frac{1}{3}\pi} + 2\cdot e^{-j\cdot 0\cdot \frac{2}{3}\pi} + e^{-j\cdot 0\cdot \pi} = 4+3+2+1 = 10$$

$$X(1) = 4 + 3\cdot e^{-j\cdot 1\cdot \frac{1}{3}\pi} + 2\cdot e^{-j\cdot 1\cdot \frac{2}{3}\pi} + e^{-j\cdot 1\cdot \pi}$$

$$= 4 + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) - 1$$

$$= \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3}j$$

$$X(2) = 4 + 3\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \frac{1}{3}\pi} + 2\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \frac{2}{3}\pi} + e^{-j\cdot 2\cdot \pi}$$

$$= 4 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) + 1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}j$$

$$X(3) = 4 + 3\cdot e^{-j\cdot 3\cdot \frac{1}{3}\pi} + 2\cdot e^{-j\cdot 3\cdot \frac{2}{3}\pi} + e^{-j\cdot 3\cdot \pi}$$

$$= 4 + 3\cdot(-1) + 2\cdot(1) + (-1)$$

$$= 2$$

$$X(4) = 4 + 3\cdot e^{-j\cdot 4\cdot \frac{1}{3}\pi} + 2\cdot e^{-j\cdot 4\cdot \frac{2}{3}\pi} + e^{-j\cdot 4\cdot \pi}$$

$$= 4 + 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) + 1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$X(5) = 4 + 3\cdot e^{-j\cdot 5\cdot \frac{1}{3}\pi} + 2\cdot e^{-j\cdot 5\cdot \frac{2}{3}\pi} + e^{-j\cdot 5\cdot \pi}$$

$$= 4 + 3\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) - 1$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$