设A，B为满足$AB=O$的两个非零矩阵，则必有（ ）.

A A的列向量组线性相关，B的行向量组线性相关

B A的列向量组线性相关，B的列向量组线性相关

C A的行向量组线性相关，B的行向量组线性相关

D A的行向量组线性相关，B的列向量组线性相关

P_{107} 例23

$AB=0$ $A(b_1, b_2, \cdots b_s)=0$

B的列向量就是 $AX=0$ 的非零解 $\Rightarrow R(A)<$ 未知数的个数 n

A的列向量组线性相关

$B^T A^T=0$ $B^T(a_1, \cdots a_s)=0$

A^T的列向量组，(A行向量组)是 $B^T X=0$ 的非零解 $\Rightarrow R(B^T)<$ 未知数个数 n

$R(B)=R(B^T)<n$

$\therefore$ B的行向量组线性相关 (A)

n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\,(3 \leq s \leq n)$线性无关的充要条件是（ ）.

A $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意两个向量都线性无关

B $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中存在一个向量不能用其余向量线性表示

C $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任一个向量都不能用其余向量线性表示

D $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中不含零向量

A. B. D 都是向量组线性无关的必要条件

C 是线性无关的定义

(C)

设两个向量组α_1，α_2，…，α_s和β_1，β_2，…，β_s均线性相关，则（ ）.

A 有不全为0的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$使$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=\mathbf{0}$和$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_s\beta_s=\mathbf{0}$

B 有不全为0的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_s$使$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_s(\alpha_s+\beta_s)=\mathbf{0}$

C 有不全为0的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_s$使$\lambda_1(\alpha_1-\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2-\beta_2)+\cdots+\lambda_s(\alpha_s-\beta_s)=\mathbf{0}$

D 有不全为0的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_s$和不全为0的数$\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_s$,使$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=\mathbf{0}$和$\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2+\cdots+\mu_s\beta_s=\mathbf{0}$

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$　　$AX=0$ 有非零解

$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$　　$BX=0$

(A) $AX=0$与$BX=0$ 不一定同解 (×)

(B) $\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \cdots,\ \alpha_s+\beta_s$ 不一定相关

(C) $\alpha_1-\beta_1,\ \alpha_2-\beta_2,\ \cdots\ \alpha_s-\beta_s$ 不一定相关

(D) 线性相关定义

(D)

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，则以下命题中不一定成立的是（　　）

A α_1不能被$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示

B α_2不能被$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性表示

C α_4能被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

D $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关

P90 定理5

Th5 (1) 相关组扩大后仍相关 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也相关 (D) ✓

Th5 (3) 无关组加一个向量变相关组，则此向量可由无关组唯一表示.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 相关 $\Rightarrow$ α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一表示 (C) ✓

若 α_1 可以由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，无关组缩短后仍无关. α_2,α_3 也无关. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 相关 $\Rightarrow$ α_4 可由 α_2,α_3 表示

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 相关 $\Rightarrow$ α_1 可由 α_2,α_3 表示 矛盾 ∵ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关 (A) ✓

B. α_2 由 α_3,α_4 表示 α_2 有可能 由 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 表示 (B)

设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$都是4维列向量，且4阶行列式$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$，$|\alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \alpha_2| = n$，则行列式$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2| =$（ ）.

A $m+n$

C $-m+n$

B $m-n$

D $-m-n$

行列式：〈拆分性质

$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1+\beta_2| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| + |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| = m-n$

$|\alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \alpha_2| = -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| = -n$

(B)

设3阶矩阵$Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$为3阶非零矩阵，且$PQ=O$，则（ ）.

A $t=6$时，$R(P)=1$

B $t=6$时，$R(P)=2$

C $t\neq 6$时，$R(P)=1$

D $t\neq 6$时，$R(P)=2$

$PQ=0$　　$P(q_1,q_2,q_3)=0$　　Q的列向量是 $PX=0$ 的非零解.

$R(P)<3$　　$R(P)+R(Q)\leq 3$　（P 列 则 为 8）

$t=6$时　　$Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　　$R(Q)=1$　　$\therefore R(P)\leq 2$

$t\neq 6$时　　$Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&t-6\\0&0&0\end{pmatrix}$　　$t\neq 6$　$R(Q)=2$　$\therefore R(P)\leq 1$

又$\because P$非零矩阵　$R(P)\geq 1$　$\Rightarrow$　$R(P)=1$

$\therefore t\neq 6$时，$R(P)=1$　　【C】

已知向量组$\alpha_1=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，
$\alpha_2=(0,k,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(2,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，
$\alpha_4=(0,0,2,1)^{\mathrm{T}}$线性相关，则$k=$（ ）．

A -1

C 0

B -2

D 1

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 相关

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 相关 $\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow R(A)<4$

$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0$ 时的 k.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow k=0$$

(C)

已知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是齐次线性方程组$Ax = 0$的基础解系，那么（ ）也是它的基础解系.

A $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$（$k_1, k_2, k_3$为任意常数）

B $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

C $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$

D $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_2$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

其它基础解系所含向量个数也为3个. (A)(C) ✗

(D) $\alpha_1, \quad \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_3 - \alpha_2$ 显然线性相关

$-\alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_2) = 0$

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_3 + \alpha_1$

$x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + x_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$ 否则，证明只有零解

$\alpha_1(x_1 + x_3) + \alpha_2(x_1 + x_2) + \alpha_3(x_2 + x_3) = 0$ $\qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$ $\qquad \therefore \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_3 + \alpha_1$ 无关

$A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$

$A(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$

$A(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$ 是基础解系

向量组$\alpha_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,3,5)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(2,2,5)^{\mathrm{T}}$的最大线性无关组是（　）.

A α_1,α_2

B α_1,α_3

C α_2,α_3

D $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\2&3&1&2\\3&5&1&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&-1&1&-2\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&-1&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div(-1)}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha_1&\alpha_2&&\alpha_4\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$\therefore$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 最大无关组　(D)

齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的基础解系中所含解向量的个数是（ ）.

A 1

B 2

C 3

D 4

基础解系所含向量个数 = 自由变量个数 = 未知数个数 − 非自由变量个数 = 未知数个数 − 系数矩阵的秩

$n=4$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2$

$\therefore\ n-R(A)=4-2=2$ 个

(B)