1. $f'(x_0)=0$ 是$f(x)$在x_0处取得极值的（　　）.

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 既非充分又非必要条件　　D. 充分必要条件

2. 若$f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，则$f(x)=$（　　）.

A. $x-\frac{1}{2}x^2+C$　　B. $x+\frac{1}{2}x^2+C$

C. $\cos x-\sin x+C$　　D. $\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$

3. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，则方程$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在$[a,b$

内有（　　）个根.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 已知实数a,b满足，则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}=b$，则$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$（　　）.

A. $b\sin f(a)$　　B. $b\cos f(a)$　　C. $b\sin a$　　D. $b\cos a$

5. 曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于$x$从 0 到 2 的一段弧的长度为（　　）.

A. $\frac{2}{3}(2^{\frac{1}{2}}-1)$　　B. $\frac{2}{3}(3^{\frac{1}{2}}-1)$　　C. $\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$　　D. $\frac{2}{3}(3^{\frac{3}{2}}-1)$

6. 设函数$f(x)$有连续的导数，则下列式子正确的是（　　）.

A. $(\int f(x)\mathrm{d}x)'=f(x)$　　B. $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$

C. $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$　　D. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

7. 下列反常积分收敛的是（　　）.

A. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$　　C. $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_{0}^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

8. 微分方程$y''+2y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$的特解形式为（　　）.

A. $\mathrm{e}^{-x}(a\sin x+bx\cos x)$　　B. $\mathrm{e}^{-x}(a\cos x+bx\sin x)$

C. $\mathrm{e}^{-x}(a\cos x+b\sin x)$　　D. $x\mathrm{e}^{-x}(a\cos x+b\sin x)$

9. 不定积分$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x =$________________.

10. 定积分$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x =$________________.

11. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x-y}$的通解为________________.

12. 函数$f(x) = \frac{1}{x}$ 按$(x+1)$的幂展开的带佩亚诺型余项的n阶泰勒公式是

____.

二. 12. $f(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}=(-1)x^{-2}$

$f''(x)=(-1)(-2)x^{-3}$, $\cdots$

$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdot\cdots\cdot(-n)x^{-(n+1)}=(-1)^n\cdot n!\,x^{-(n+1)}$

代入 $x_0=-1$, 则有

$f(-1)=-1$, $f'(-1)=-1$, $f''(-1)=-2$, $\cdots$

$f^{(n)}(-1)=(-1)^{2n+1}n!=-n!$

故 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$

$=-1-(x+1)-2(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n+o[(x+1)^n]$

13. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{洛}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

14. 求定积分$\int_0^{\pi}(1-\cos x)^2 dx$.

14. 求定积分$\int_0^{\pi}(1-\cos x)^2 dx$.

解. $\int_0^{\pi}(1-\cos x)^2 dx = \int_0^{\pi} 4\sin^4\frac{x}{2}dx$. 令 $\frac{x}{2}=t$, $x=2t$

$dx=2dt$, $x=0$ 时 $t=0$

$x=\pi$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$

$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, dt$

$= 8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$

方法2. $I=\int_0^{\pi}(1-2\cos x+\cos^2 x)dx$

$= \int_0^{\pi} 1 dx - 2\underbrace{\int_0^{\pi}\cos x\, dx}_{=0} + \int_0^{\pi}\cos^2 x\, dx$

$= \pi - 0 + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

15. 设$f(x)$的一个原函数为$\frac{\sin x}{x}$，求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

15. 设$f(x)$的一个原函数为$\frac{\sin x}{x}$，求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解：由题得 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$，$\int f(x)dx=\frac{\sin x}{x}+C$

$$I=\int xf'(x)dx = \int x\,df(x) = xf(x)-\int f(x)dx$$

$u=x,\ v'=f'(x)$

$u'=1,\ v=f(x)$

$$= x\cdot\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+C$$

$$=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$$

16. 已知当$x\to0$时，$e^{2x}-(ax^2+2bx+1)$是比x^2高阶的无穷小，求a和b.

16. 已知当$x\to0$时，$e^{2x}-(ax^2+2bx+1)$是比x^2高阶的无穷小，求a和b.

解. 由题: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-(ax^2+2bx+1)}{x^2}=0$. 由于分母. $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$

故分子 $\lim\limits_{x\to0}\left[e^{2x}-(ax^2+2bx+1)\right]=1-1=0$. 由洛比达法则, 有

$0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{2x}-2ax-2b}{2x}$, $\lim\limits_{x\to0}2x=0$, 故 $\lim\limits_{x\to0}(2e^{2x}-2ax-2b)=2-2b=0$

即 $b=1$. 代入 $b=1$. 又有.

$$0=\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}-2ax-2}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-ax-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}-a}{1}$$

故 $0=\lim\limits_{x\to0}(2e^{2x}-a)=2-a$, 即 $a=2$.

17. 设函数$y=f(x)$由方程$e^y+xy+x^2-1=0$确定，求$y''(0)$.

17. 设函数$y=f(x)$由方程$e^y+xy+x^2-1=0$确定，求$y''(0)$.

解，两边求导，得. $y'e^y+y+xy'+2x=0$. *

代入$x=0$，有 $\begin{cases} e^y-1=0 \\ y'e^y+y=0 \end{cases}$，即得 $y(0)=0$，$y'(0)=0$

再对*式两边求导：

$$\underline{y''e^y}+y'e^y\cdot y'+y'+y'+\underline{xy''}+2=0$$

代入$x=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$，即得

$$y''(0)=-2$$

18. 已知$f(x)=\int_0^1 \sin^3(tx)\mathrm{d}t$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2\ln(1+2x)}$.

18. 已知$f(x)=\int_0^1 \sin^3(tx)\mathrm{d}t$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2\ln(1+2x)}$.

解：对 $f(x)=\int_0^1 \sin^3(tx)\,dt$，令积分变换：$\underset{\text{旧变量}}{\underline{t}}x=\underset{\text{新变量}}{\underline{u}}$.

$t=\frac{u}{x}$，$dt=\frac{1}{x}du$. $t=0$ 时 $u=0$，$t=1$ 时 $u=x$

故 $f(x)=\int_0^x \sin^3 u\cdot\frac{1}{x}du=\frac{\int_0^x \sin^3 u\,du}{x}$

有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^3 u\,du}{x^3\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^3 u\,du}{x^3\cdot 2x}$

$\ln(1+2x)\sim 2x$

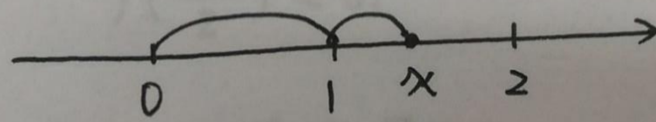
$\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{8x^3}=\frac{1}{8}$

19. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1]\\ e^x, & x\in[1,2)\end{cases}$，求$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$在$[0,2]$上的表达式.

$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. 当 $x\in[0,1]$ 时.

$$\Phi(x)=\int_0^x t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^x=\frac{1}{3}x^3$$

当 $x\in[1,2]$ 时



$$\Phi=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt$$

$$=\int_0^1 t^2\,dt+\int_1^x e^t\,dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1+e^t\Big|_1^x=\frac{1}{3}+e^x-e.$$

故 $\Phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & x\in[0,1]\\ \frac{1}{3}+e^x-e, & x\in[1,2]\end{cases}$

20. 设连续函数$f(x)$满足$f(x) = e^{2x} + \int_0^x (6t+5)f(t)dt - 6x\int_0^x f(t)dt$，

$(6t+5)f(t)dt - 6x\int_0^x f(t)dt$，

求$f(x)$.

解：整理：$f(x) = e^{2x} + \int_0^x (6t+5)f(t)dt - 6x\int_0^x f(t)dt$

$f'(x) = 2e^{2x} + (\underline{6x}+5)\underline{f(x)} - 6\int_0^x f(t)dt \underline{- 6xf(x)}$

$f'(x) = 2e^{2x} + 5f(x) - 6\int_0^x f(t)dt$

$f''(x) = 4e^{2x} + 5f'(x) - 6f(x)$

即. $y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x}$，初值条件：$f(0) = 1$，$f'(0) = 2+5 = 7$

特征方程 $r^2 - 5r + 6 = 0$，　$\lambda = 2$，$m = 0$．$\lambda=2$是特根

特根、$r_1 = 2$，$r_2 = 3$　相应齐次通解 $Y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

设非齐次特解为 $y^* = x\cdot a\cdot e^{2x} \overset{记}{=} R(x)e^{2x}$，其中 $R(x) = ax$，$R'(x) = a$，$R''(x) = 0$

于是y^*代入原方程得

$\underbrace{R''(x)}_{为0} + (2\lambda+p)R'(x) + \underbrace{(\lambda^2+p\lambda+q)}_{为0}R(x) = 4$. 得 $-a = 4$ 即 $a = -4$

故通解 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - 4xe^{2x}$

$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} - 4(e^{2x} + 2x e^{2x})$

代入$f(0)=1$，$f'(0)=7$，有 $\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 7 = 2C_1 + 3C_2 - 4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} C_1 = -8 \\ C_2 = 9 \end{cases}$

故 $f(x) = -8e^{2x} + 9e^{3x} - 4xe^{2x}$

21. 过点(0,1)作曲线L: $y=\ln x$的切线，切点为A，曲线L与x轴交于B点，区域D由L与直线AB围成.求：

(1) 切点坐标；(2) 区域D的面积；(3) D绕x轴旋转所得的旋转体体积.

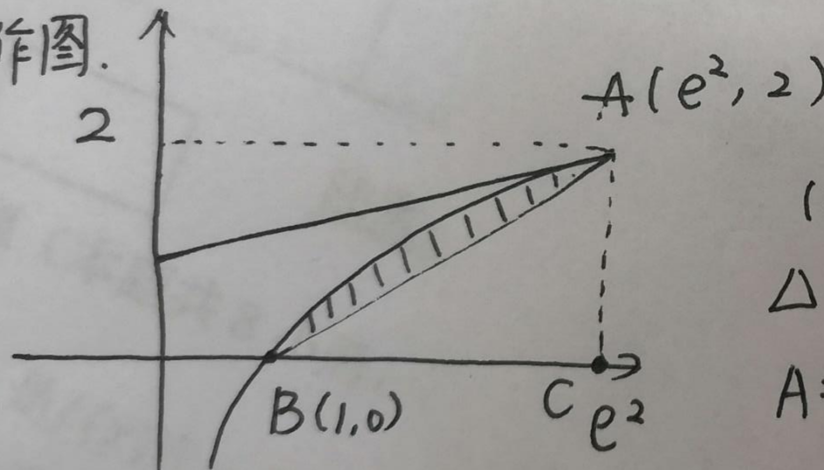
解 (1) 设切点$(x_0, \ln x_0)$，则 $k_{切} = y' = \frac{1}{x_0}$. 切线方程为

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$ 切线过$(0,1)$点，代入得

$$1 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(-x_0)$$ 解得 $x_0 = e^2$，$y_0 = \ln x_0 = 2$.

故切点$(e^2, 2)$

作图.



(2) A是曲边梯形ABC面积与$\triangle ABC$面积之差.

$$A = \int_1^{e^2} \ln x\,dx - \frac{1}{2}\cdot(e^2-1)\cdot 2$$

$$= (x\ln x - x)\Big|_1^{e^2} - (e^2-1)$$

$$= e^2+1$$

(3) $V_x = \pi \int_1^{e^2} (\ln x)^2 \, dx - \frac{\pi \times 2^2 \times (e^2 - 1)}{3}$

$= \pi \left[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x \right]_1^{e^2} - \frac{4\pi}{3}(e^2 - 1)$

$= \frac{2\pi}{3} (e^2 - 1)$

22. 已知函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f''(x)>0$ 且$\int_a^b f(x)dx=0$，证明

$$f(\frac{a+b}{2})<0.$$

且$\int_a^b f(x)dx=0$，证明

证：记 $\frac{a+b}{2}=c$，则$f(x)$可在c点泰勒展开：

$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$. ξ介于x与c之间

$\because f''(x)>0$，$(x-c)^2\geqslant 0$（等号成立当且仅当 $x=c$时）

故 $f(x)>f(c)+f'(c)(x-c)$

$\because \int_a^b f(x)dx=0$，故 $\int_a^b[f(c)+f'(c)(x-c)]dx<0$

而 $\int_a^b[f(c)+f'(c)(x-c)]dx=\int_a^b f(c)dx+f'(c)\int_a^b(x-c)dx$

$=f(c)(b-a)+f'(c)\cdot\underbrace{\frac{1}{2}(x-c)^2\Big|_a^b}_{\text{结果}0}$

$=f(c)(b-a)$

$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)$ $\because b-a>0$.

故 $f(\frac{a+b}{2})<0$