离 散 数 学

高等教育出版社

离散数学

第一部分：数理逻辑（第一、二、三章）

第二部分：集合论（第六、七章）

第三部分：图论（第九、十、十一章）

第一部分 数理逻辑

主要内容

- 命题逻辑基本概念
- 命题逻辑等值演算
- 命题逻辑推理理论

命题分类

命题分类：简单命题（也称原子命题）与复合命题

简单命题：不能被分解成更简单的命题.（如 $3>2$和$3\neq 2$）

复合命题：由简单命题通过联结词联结而成的命题。

（如，因为 $3>2$，所以 $3\neq 2$.）

联结词分类：否定式、合取式、析取式、蕴含式、等价式

简单命题符号化

- 用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ $(i\geq 1)$表示简单命题
- 用“1”表示真，用“0”表示假

例如，令

p：$\sqrt{2}$是有理数，则 p 的真值为0，

q：$2+5=7$，则 q 的真值为1

否定联结词

定义1.1 设 p为命题，复合命题 "非p"(或 "p的否定")称为p的**否定式**，记作$\neg p$，符号$\neg$称作**否定联结词**. 规定$\neg p$为真当且仅当p为假.

p	$\neg p$
1	0
0	1

合取联结词

定义1.2 设p,q为两个命题，复合命题 “p并且q”(或 “p与q”)称为p与q的合取式，记作$p\wedge q$，$\wedge$称作合取联结词. 规定$p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

注：（1）自然语言中的“既……又……”“不但……而且……”“虽然……但是……”“一面……一面……”都可以用$\wedge$符号化；（2）不要见到“与”“和”就使用联结词$\wedge$.

析取联结词

定义1.3 设p, q为两个命题，复合命题“p或q”称作p与q的**析取式**，记作$p\vee q$，$\vee$称作**析取联结词**. 规定$p\vee q$为假当且仅当p与q同时为假.

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

相容或和排斥或

析取联结词与自然语言中的“或”不完全一样. 自然语言中的或具有二义性，有时具有相容性（即用它联结的两个命题可以同时为真），有时具有排斥性（即只有当一个为真，另一个为假时才为真），分别称为相容或和排斥或.

相容或符号化为 $p \vee q$

排斥或符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

析取联结词的实例

例3 将下列命题符号化

(1) 2 或 4 是素数.

(2) 2 或 3 是素数.

(3) 4 或 6 是素数.

(4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.

(5) 王小红生于 1975 年或 1976 年.

析取联结词的实例

解

(1) 令p:2是素数, q:4是素数, $p \vee q$

(2) 令p:2是素数, q:3是素数, $p \vee q$

(3) 令p:4是素数, q:6是素数, $p \vee q$

(4) 令p:小元元拿一个苹果, q:小元元拿一个梨

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

(5) p:王小红生于 1975 年, q:王小红生于1976 年

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 或 $p \vee q$（当两个命题本身就不可能同为真时，相容或是排斥或一样的）

(1)—(3) 为相容或

(4)—(5) 为排斥或, 符号化时(5)可有两种形式，而(4)则不能

蕴涵联结词

定义1.4 设p, q为两个命题，复合命题"如果p, 则q"称作p与q的蕴涵式，记作$p\to q$，并称p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件，$\to$称作蕴涵联结词. 规定：$p\to q$为假当且仅当p为真q为假.

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

当 p为假时，为什么无论q是真是假，$p\to q$均为真呢？

蕴涵联结词

(1) $p \to q$ 的逻辑关系：q为 p 的必要条件

(2) “如果 p, 则 q” 有很多不同的表述方法：

若p，就q

因为p，所以q

只要p，就q

p仅当q

只有q 才p

除非q, 才p 或 除非q，否则非p，….

(3) 当 p 为假时，$p \to q$恒为真，称为空证明

如“如果太阳从西边出来，我就不姓李”

(4) 在逻辑推理中，“如果 p, 则 q”中的前件和后件可以无任何内在联系

等价联结词

定义1.5 设 p, q为两个命题，复合命题 “p当且仅当q”称作p与q的**等价式**，记作$p\leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$称作**等价联结词**. 规定$p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假.

$p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系：p与q互为充分必要条件，即 $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$

p	q	$p\leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

真值表

定义1.9 将命题公式A在所有赋值下取值的情况列成表, 称作A的真值表.

构造真值表的步骤:

(1) 找出公式中所含的全部命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$(若无下角标则按字母顺序排列), 列出2^n个全部赋值, 从00…0开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至11…1为止.

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次.

(3) 对每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.

真值表1

(1) $A = (p\vee q) \rightarrow \neg r$ （含有三个命题变项，二层合式公式）

p q r	$p\vee q$	$\neg r$	$(p\vee q)\rightarrow\neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值:000,001,010,100,110; 成假赋值:011,101,111

公式的类型

定义1.10

(1) 若A在它的任何赋值下均为真, 则称A为重言式或永真式;

(2) 若A在它的任何赋值下均为假, 则称A为矛盾式或永假式;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A是可满足式.

注意:

1、A是可满足式的等价定义是：A至少存在一个成真赋值.

2、重言式是可满足式，但反之不真. 若公式A是可满足式，且它至少存在一个成假真值，则称A为非重言式的可满足式.

3、真值表的用途:求出公式的全部成真赋值与成假赋值，判断公式的类型（根据真值表最后一列判断）

由例1可知，$(p\vee q)\rightarrow\neg r$, $(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p$, $\neg(\neg p\vee q)\wedge q$ 分别为非重言式的可满足式, 重言式, 矛盾式.

2.1 等值式

定义2.1 若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B**等值**，记作$A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$是**等值式**

几点说明:

- 定义中，$A, B, \Leftrightarrow$均为元语言符号
- A或B中可能有哑元出现.

例如 $(p\rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p\lor q)\lor(\neg r\land r))$ r为左边公式的哑元.

- 用真值表可检查两个公式是否等值

等值式例题

例1 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$ A 等值 B 不等值

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论：$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

基本等值式

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, （$\vee$对$\wedge$的分配律）

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, （$\wedge$对$\vee$的分配律）

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

零律	$A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
同一律	$A\vee 0\Leftrightarrow A$. $A\wedge 1\Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
归谬论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

$A=p\vee q\vee r$ $B=p\vee q$

$(p\vee q\vee r)\rightarrow(p\vee q)$

$\Leftrightarrow\neg(p\vee q\vee r)\vee(p\vee q)$

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础。其中的A，B，C可以替换成任意的公式。

判断公式类型

判断公式类型: A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例4 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \to q)$

(2) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

(3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r)$

解 (1) $q \wedge \neg(p \to q)$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p \wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

矛盾式

判断公式类型

(2) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

重言式

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

非重言的可满足式，101和111是成真赋值，000和010等是成假赋值.

2.2 析取范式与合取范式

基本概念

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

$p,\ \neg q,\ p\vee\neg q,\ p\vee q\vee r, \ldots$

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

$p,\ \neg q,\ p\wedge\neg q,\ p\wedge q\wedge r, \ldots$

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$p,\ \neg p\wedge q,\ p\vee\neg q,\ (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$p,\ p\vee\neg q,\ \neg p\wedge q,\ (p\vee q)\wedge\neg p\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

命题公式的范式

定理2.3（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式

公式A的析取(合取)范式——与A等值的析取(合取)范式

求给定公式的范式的步骤：

(1) 消去联结词$\to$, $\leftrightarrow$（若存在）

$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$ （蕴含等值式）

$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$ （等价等值式）

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

$\neg\neg A\Leftrightarrow A$ （双重否定律）

$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$ （德摩根律）

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$　　求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　　求析取范式

例5 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $(p\rightarrow\neg q)\vee\neg r$

(2) $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

解 (1) $(p\rightarrow\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$　（消去→）

$\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee\neg r$　（结合律）

注：既是析取范式又是合取范式

求公式的范式

(2) $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\lor\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\lor\neg q)\lor r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\land q)\lor r$ （否定号内移——德摩根律) 析取范式

$\Leftrightarrow (p\lor r)\land(q\lor r)$ （∨对∧分配律） 合取范式

极小项与极大项

定义2.4 在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或它的否定式按下标从小到大或按字典顺序排列，称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）.

几点说明：

- n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示. m_i（M_i）称为极小项（极大项）的名称.

Why?

实例

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

实例

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

定理2.4：命题变项$p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$的极小项$m_i$与极大项$M_i$的关系：

$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$,　$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式

主析取范式——由极小项构成的析取范式

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ ——主析取范式

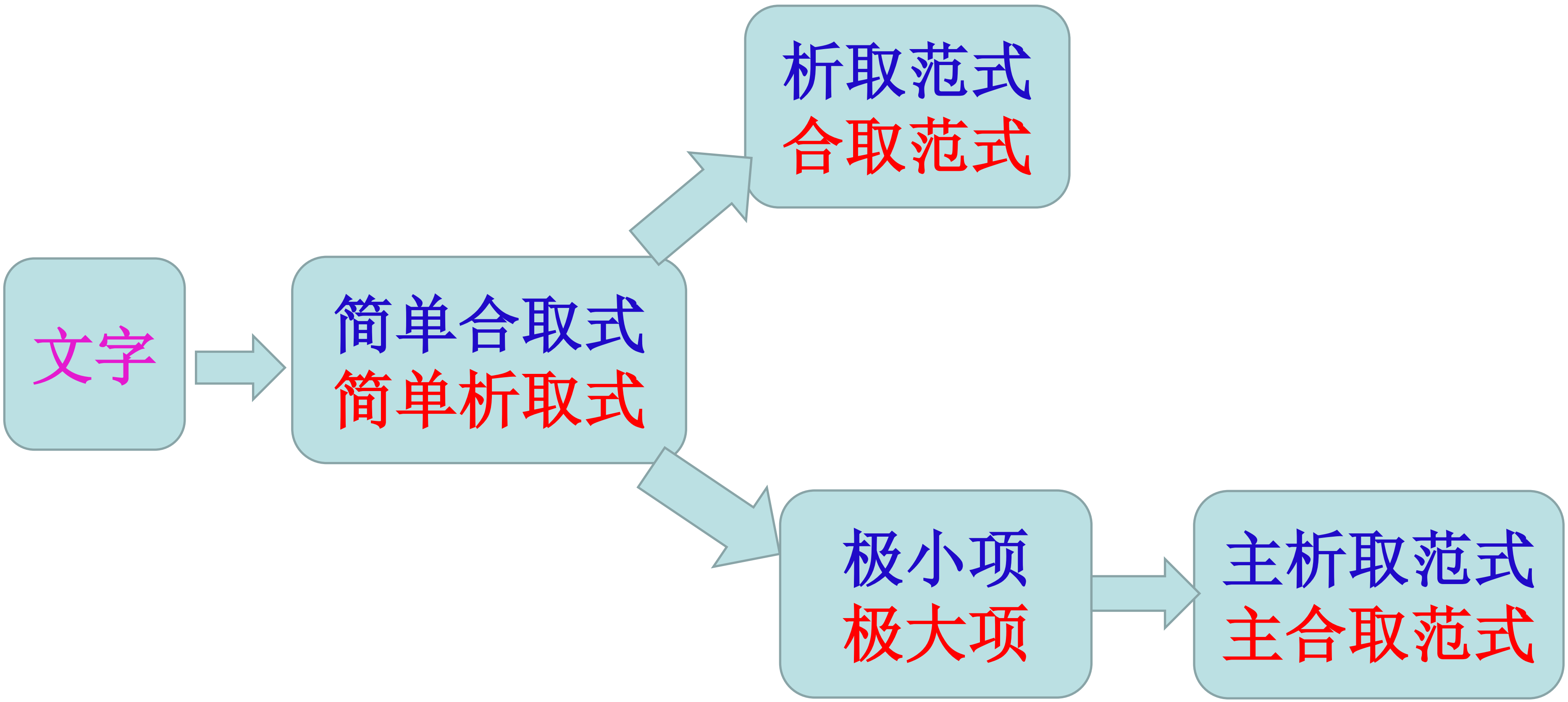
$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_7$——主合取范式

公式A的主析取(合取)范式——与A等值的主析取(合取)范式

定理2.5 (主范式的存在惟一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是惟一的.

主析取范式与主合取范式



求公式主范式的步骤

求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 $j=1, 2, \ldots, s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$ (排中律，同一律)

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的命题变项以及极小项和矛盾式, 即用p代替$p\wedge p$,用m_i代替$m_i\vee m_i$, 用0代替矛盾式

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求公式主范式的步骤

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2, \ldots ,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$ （矛盾律、同一律）

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的命题变项以及极大项和重言式, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$, 用1代替重言式

(4) 将极大项按下标从小到大排列

实例

例6 (1) 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$的主析取范式和主合取范式

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （析取范式） ①

$(p\wedge q)$ （既不含r，又不含$\neg r$）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$ ②

实例

r （既不含p，又不含$\neg p$；既不含q，又不含$\neg q$）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$ （按字典顺序排）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ （主析取范式）

实例

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$　（合取范式）　④

$p\vee r$　（既不含q，又不含$\neg q$）

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$　⑤

$q\vee r$　（既不含p，又不含$\neg p$）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$　⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$　（主合取范式）

主范式的四个应用(重要)

1. 求公式的成真成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值.

例如 $(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变项.

A为重言式$\Leftrightarrow A$的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式不含任何极大项, 记为1.

$$A=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s \wedge 1$$

A为矛盾式$\Leftrightarrow A$的主合取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow A$的主析取范式不含任何极小项, 记为0.

$$A=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s \vee 0$$

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项.

$\Leftrightarrow A$的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例7 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p \to q) \wedge q$ (2) $B \Leftrightarrow p \to (p \vee q)$ (3) $C \Leftrightarrow (p \vee q) \to r$

解

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$ 非重言式的可满足式

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值

例8 用主析取范式判以下每一组公式是否等值

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

主范式的应用

4. 解实际问题

例9 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\rightarrow r$, (2) $q\rightarrow\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

主范式的应用

求A的主析取范式

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$
$$\Leftrightarrow(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$
$$\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))$$
$$\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$
$$\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))$$
$$\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$
$$\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$
$$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去，方案2 派B去

用成真赋值和成假赋值确定主范式

由主析取范式确定主合取范式

例10 设A有3个命题变项, 且已知$A= m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求A的主合取范式.

解 A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

由主合取范式确定主析取范式

用真值表确定主范式

推理的形式结构

推理的形式结构

1. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$

   若推理正确, 记为$\{A_1,A_2,\ldots,A_k\} \vDash B$

2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

   若推理正确, 记为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

   （$\Rightarrow$表示蕴含式为重言式，回忆 $\Leftrightarrow$表示等价式为重言式）

3. 前提： $A_1, A_2, \ldots , A_k$

   结论： B

判断推理是否正确的方法（判断$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$是否为重言式）

真值表法

等值演算法

主析取范式法

推理实例

例1 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

(1) 前提：$p\rightarrow q$,p 结论: q

推理的形式结构：$(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$

用等值演算法

$$(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

由定理3.1可知推理正确，即

$$(p\rightarrow q)\wedge p \Rightarrow q$$

推理实例

(2) 前提: $p \to q$,q 结论: p

推理的形式结构: $(p \to q) \wedge q \to p$

用主析取范式法

$$
\begin{aligned}
& (p \to q) \wedge q \to p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \wedge q \to p \\
\Leftrightarrow\ & \neg\, ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p \\
\Leftrightarrow\ & \neg q \vee p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \\
\Leftrightarrow\ & m_0 \vee m_2 \vee m_3
\end{aligned}
$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确

即p不是$(p \to q)$与q的逻辑结论。

自然推理系统P

定义1.6 合式公式（简称公式）的递归定义：

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作**原子命题公式**

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是

(4) 只有有限次地应用(1)—(3) 形成的符号串是合式公式

2. 合式公式（同定义1.6）

3. 推理规则

(1) 前提引入规则：在证明的任何步骤都可以引入前提

(2) 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提

(3) 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式中的子公式都可以用等值的公式替换（**16组基本等值式**）

推理规则

(4) 假言推理规则

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ \underline{\quad A \quad} \\ \therefore B \end{array}$$

(5) 附加规则

$$\begin{array}{c} \underline{\quad A \quad} \\ \therefore A\vee B \end{array}$$

(6) 化简规则

$$\begin{array}{c} \underline{\quad A\wedge B \quad} \\ \therefore A \end{array}$$

(7) 拒取式规则

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ \underline{\quad \neg B \quad} \\ \therefore \neg A \end{array}$$

(8) 假言三段论规则

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ \underline{\quad B\rightarrow C \quad} \\ \therefore A\rightarrow C \end{array}$$

(9) 析取三段论规则

$$\begin{array}{c} A\vee B \\ \underline{\quad \neg B \quad} \\ \therefore A \end{array}$$

推理规则

(10) 构造性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ A\vee C \end{array}}{\therefore B\vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ \neg B\vee\neg D \end{array}}{\therefore \neg A\vee\neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{\therefore A\wedge B}$$

在自然推理系统P中构造证明

设前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$,结论B及公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$. 如果每一个$C_i(1\leq i\leq l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l = B$, 则称这个公式序列是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的证明.

例2 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一、也不是星期三.

解 (1) 设命题并符号化

设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我明天有课，s：我今天备课

直接证明法

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

即证明$((p\vee q)\to r)\wedge(r\to s)\wedge\neg s\Rightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

(3) 证明

$\boxed{(A\to B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A}$

①	$r\to s$	前提引入
②	$\neg s$	前提引入
③	$\neg r$	①和②拒取式规则
④	$(p\vee q)\to r$	前提引入
⑤	$\neg(p\vee q)$	③和④拒取式规则
⑥	$\neg p\wedge\neg q$	⑤ 置换规则

$$\begin{array}{l} A\to B \\ \neg B \\ \hline \therefore\neg A \end{array}$$

附加前提证明法

附加前提证明法 (适用于结论为蕴涵式)

前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论: $C \rightarrow B$; 即证: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow C \rightarrow B$

等价地证明

前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论: B

理由:

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$
$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B$$

附加前提证明法实例

例3 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

解 用附加前提证明法构造证明

(1) 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$ 是无理数，s：4是素数

(2) 推理的形式结构

前提：$p\vee q$，$p\to r$，$r\to\neg s$

结论：$s\to q$

即证：$(p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(r\to\neg s)\Rightarrow s\to q$

附加前提证明法实例

(3) 证明

① s　　附加前提引入，（附加前提）

② $p\to r$　　前提引入

③ $r\to\neg s$　　前提引入

④ $p\to\neg s$　　②③假言三段论　　$\boxed{(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow(A\to C)}$

⑤ $\neg p$　　①④拒取式　　$\boxed{(A\to B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A}$

⑥ $p\vee q$　　前提引入

⑦ q　　⑤⑥析取三段论　　$\boxed{(A\vee B)\wedge\neg B\Rightarrow A}$

归谬法（反证法）

归谬法 (反证法)也称F规则

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

即证：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

做法：在前提中加入$\neg B$，推出矛盾.

理由

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$$
$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0$$

归谬法实例

例4 前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p， 结论：$\neg q$

证明 用归缪法

① q 结论否定引入

② $r\rightarrow s$ 前提引入

③ $\neg s$ 前提引入

④ $\neg r$ ②③拒取式

$\boxed{(A\rightarrow B)\wedge\neg B \Rightarrow \neg A}$

⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$ 前提引入

⑥ $\neg(p\wedge q)$ ④⑤析取三段论

$\boxed{(A\vee B)\wedge\neg B \Rightarrow A}$

⑦ $\neg p\vee\neg q$ ⑥置换

⑧ $\neg p$ ①⑦析取三段论

⑨ p 前提引入

⑩ $\neg p\wedge p$ ⑧⑨合取

离散数学

高等教育出版社

第二部分　集合论

主要内容

- 集合的基本概念
- 集合的基本运算
- 集合恒等式
- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分、商集

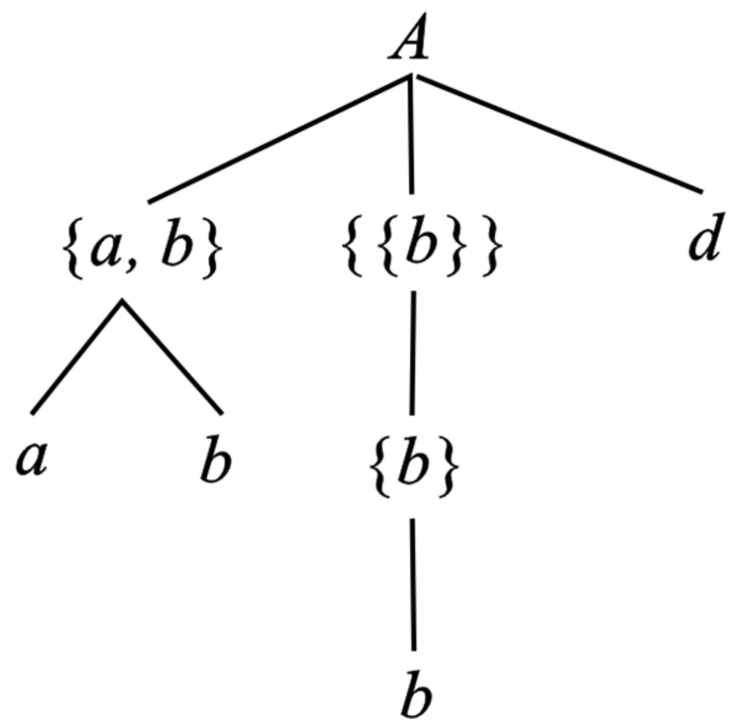
元素与集合

1. 集合的元素具有的性质
   无序性：元素列出的顺序无关
   相异性：集合的每个元素只计数一次
   确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素
   任意性：集合的元素都是集合（规定）

2. 元素与集合的关系
   隶属关系：∈或者∉（不同层次上的集合之间的关系）

3. 集合的树型层次结构（每一层上的节点都表示一个集合，它的儿子就是它的元素）

***A*={{*a*,*b*},{{*b*}},*d*}**



$d \in A$, $a \notin A$

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq, =, \nsubseteq, \neq, \subset, \not\subset$（讨论同一层次上的两个集合之间的关系）

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

(A是B的子集，A被B包含，或B包含A)

$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$ 或

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \neg(A \subseteq B)$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$$

(A不是B的子集，A不被B包含，或B不包含A)

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ （称A与B相等）

思考：$\neq$ 的定义

集合与集合

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$或

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists y(y \in B \wedge y \notin A)$

（称A是B的真子集）

思考： $\not\subset$ 的定义

注意： $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题（A={a,{a}}和{a}）

{a}∈A把它们看作不同层次上的两个集合

{a}⊆A把它们看作同一层次上的两个集合

空集、全集和幂集

2. 定义6.5 幂集：$P(A)=\{\,X \mid X \subseteq A\,\}$ 即由A的所有子集构成的集合叫做A的幂集。

实例：$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$， $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

分析：(1) A={a,b}

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

即 $|A|=2$，则 $|P(A)|=2^2$

其中，符号 |*| 指集合*中的元素个数

空集、全集和幂集

(2) A={a,b,c}

$P(A)$={∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

即 $|A|=3$，则 $|P(A)|=2^3$

零元子集：∅

一元子集：{a},{b},{c}

二元子集：{a,b},{a,c},{b,c}

三元子集：{a,b,c}

一般如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

6.2 集合的运算

集合的基本运算有

直观表示？

定义6.7 并集 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交集 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

（$A \cap B = \varnothing$, 则称这两个集合是不交的）

相对补集（差分） $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

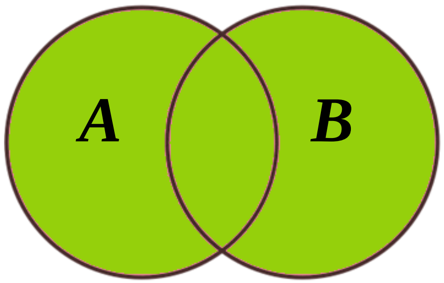
定义6.8 对称差集 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

或 $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$ （自己证明等价）

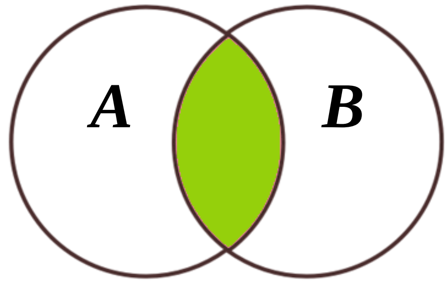
定义6.9 绝对补集 $\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$, 其中$E$为全集

文氏图

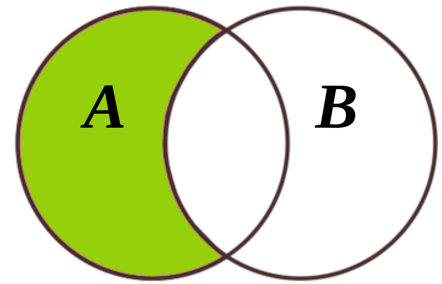
集合运算的表示



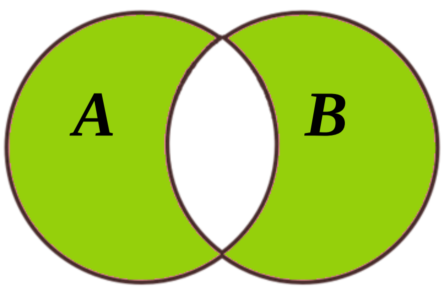
$A \cup B$



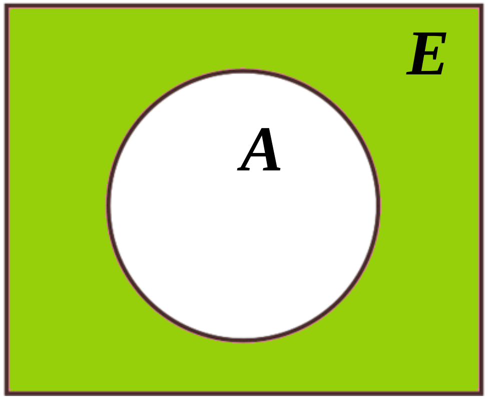
$A \cap B$



$A - B$



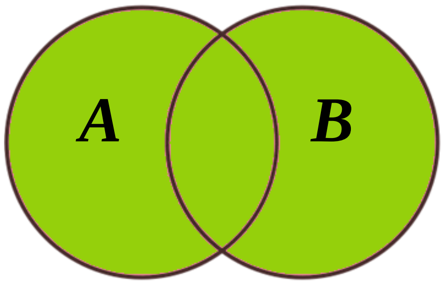
$A \oplus B$



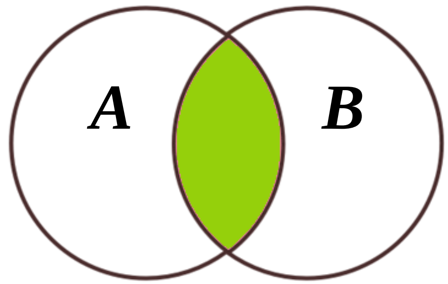
$\sim A$

6.3 有穷集的计数

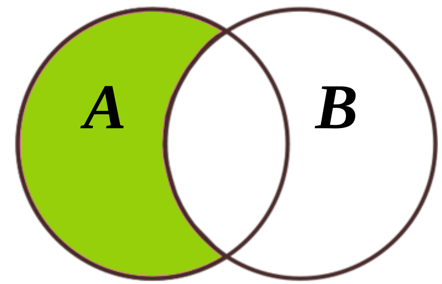
有穷集的计数问题可以采用文氏图或者包含排斥原理。



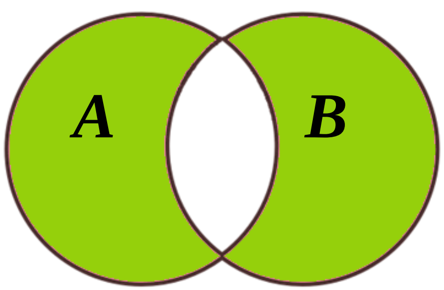
$A\cup B$



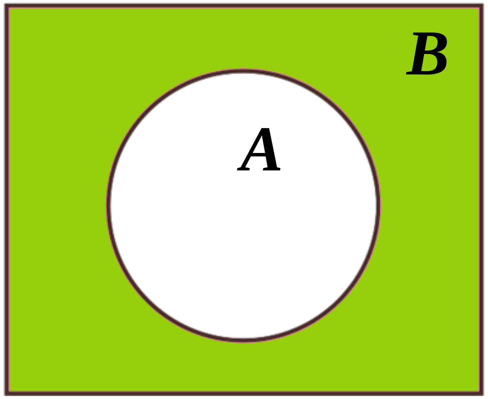
$A\cap B$



$A-B$



$A\oplus B$



$\sim A$

包含排斥原理

定理6.2（包含排斥原理）设S为有穷集，P_1， $P_2, ..., P_n$是n个性质. S中的任何一个元素x 或者具有性质P_i, 或者不具有性质P_i，两种情况必居其一. 令A_i表示S中具有性质P_i的元素构成的子集，则S中不具有性质P_1， $P_2, ..., P_n$的元素为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

包含排斥原理

推论 S至少具有一条性质的元素为

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\
&+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

6.4 集合恒等式

集合算律

1. 只涉及一个运算的算律：

   交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换律	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合律	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2． 涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	∪与∩	∩与⊕
分配律	$A\cup(B\cap C)=$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)$ $=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3．涉及补运算的算律：

德摩根律、双重否定律

	$-$	$\sim$
德摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定律		$\sim\sim A=A$

集合算律

4. 涉及全集和空集的算律：

矛盾律、排中律、零律、同一律、否定律（德摩根律）

	$\varnothing$	E
矛盾律、排中律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定（德摩根）律	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**，记作$\langle x,y\rangle$.

有序对性质:

(1) 有序性 $\langle x,y\rangle\neq\langle y,x\rangle$ （当$x\neq y$时）

(2) $\langle x,y\rangle$与$\langle u,v\rangle$相等的充分必要条件是

$$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle \Leftrightarrow x=u\wedge y=v.$$

笛卡儿积

定义7.2 设A,B为集合，A与B的笛卡儿积记作$A\times B$，且

$$A\times B = \{<x,y>|\ x\in A\wedge y\in B\}.$$

（注意元素顺序：A中的元素为第一元素，B中的元素为第二元素构成的有序对）

例1 (1) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B$

$=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

(2) $A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

$P(A)\times A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\times\{\varnothing\}=\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$P(A)\times B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\times\varnothing=\varnothing$

笛卡儿积的性质

(1) 不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(2) 不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

(3) 对于并运算或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

(4) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing, \quad \varnothing\times B = \varnothing$$

(5) 若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

(6) $A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

7.2 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

如果$\langle x,y\rangle\in R$, 可记作xRy；如果$\langle x,y\rangle\notin R$, 则记作$x\not R y$

或$\neg xRy$

实例：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $S=\{\langle 1,2\rangle,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb, 等.

*A*到*B*的关系与*A*上的关系

定义7.4

设*A*,*B*为集合，*A*×*B*的任何子集所定义的二元关系叫做**从*A*到*B*的二元关系**，当*A*=*B*时则叫做*A*上的二元关系.

例如*A*={0,1}，*B*={1,2,3},那么

R_1={<0,2>} R_2=A×B, R_3=∅，R_4={<0,1>}都是A到B的二元关系。 R_3 和R_4也是A上的二元关系。

1）二元关系的数目和A的基数及B的基数相关，例如设A的基数|A|=m，B的基数|B|=n于是集合A×B的基数| A×B |=m*n。

A到B的关系与A上的关系

2）从A到B有多少不同的二元关系呢？

显然 A×B有多少子集，就有多少种不同的二元关系。根据集合幂集的定义不难得出有2^{m*n}的结论，特别当A=B，且|A|=n时，A上应该有$2^{n*n}=2^{n^2}$种不同的二元关系。

对本例来说，由A到B的不同二元关系有$2^{2*3}=2^6$种

而对于A={a,b,c}即|A|=3来说，A上的不同二元关系数为：$2^{3*3}=2^9=512$种。

空关系∅是任何关系的子集。

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为空关系

(2) 全域关系 $E_A = \{\langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A\} = A\times A$

恒等关系 $I_A = \{\langle x,x\rangle \mid \forall x(x \in A \to x\, I_A x)\}$

小于等于关系 $L_A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\leq y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x$整除$y\}$, A为非0整数子集

$P(A)$为A的幂集，在$P(A)$上定义一个包含关系$\subseteq$

包含关系 $R_{\subseteq} = \{\langle X,Y\rangle \mid X, Y\in P(A) \wedge X\subseteq Y\}$

关系的基本运算

定义7.6 关系的定义域、值域与域分别定义为

$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y\,(\langle x,y\rangle \in R) \}$　　（domain的缩写）

（R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域）

$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x\,(\langle x,y\rangle \in R) \}$　　（range的缩写）

（R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域）

$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$　　（field的简写）

（R中定义域和值域的并集称为R的域）

例5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系运算(逆与合成)

定义7.7 关系的逆运算

设R是X到Y的二元关系，则从Y到X的关系R^{-1}定义为

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$ （R的逆）

定义7.8 关系的合成运算，设R是从X到Y的关系，S是从Y到Z的关系，则$R \circ S$称为R和S的合成关系，定义为：

$$R \circ S = \{ <x, z> \mid (x \in X) \land (z \in Z) \land \boxed{\exists y\, (<x, y> \in R \land <y, z> \in S)} \}$$

从R和S求得$R \circ S$的运算，称为关系的合成运算。

（右复合：右边的S是复合到R上的第二步作用，本课程采用此定义）

关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的限制记作 $R\restriction A$, 其中

$$R\restriction A = \{ \langle x,y\rangle \mid xRy \wedge x\in A \}$$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\restriction A)$$

说明:

- R在A上的限制 $R\restriction A$是 R 的子关系，即 $R\restriction A \subseteq R$
- A在R下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集，即 $R[A]\subseteq \mathrm{ran}R$

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 **R 的 n 次幂**定义为:

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x\in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$ 其中等号左面的+是普通意义下的加，等号右面的∘是复合运算。

注意:

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

幂R^n的求法

1）如果关系R使用集合表达式给出的，可以通过n-1次右复合计算得到R^n

2）如果R是用关系矩阵M给出的，则R^n的关系矩阵是M^n，即n 个矩阵M之积。与普通矩阵乘法不同的是，其中的相加是逻辑加，即

1+1=1， 1+0=1， 0+1=1， 0+0=0

3）如果R是用关系G给出的，可以直接由图G得到R^n的关系图G'。G'的顶点集与G相同。考察G的每个顶点x_i, 如果在G中从x_i出发经过n步长的路径到达顶点x_j，则在G'中加一条从x_i到x_j的边，当所有这样的边都找到以后，就得到图G'。

幂的求法

R^3和R^4的矩阵是:

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

$R^2=R^4=R^6=\ldots$, $R^3=R^5=R^7=\ldots$

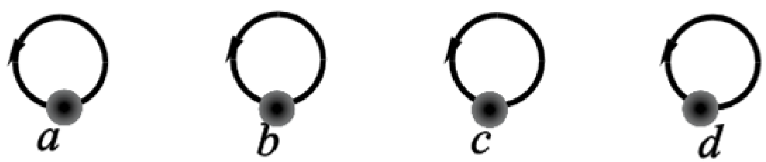
R^0的关系矩阵是

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关系图

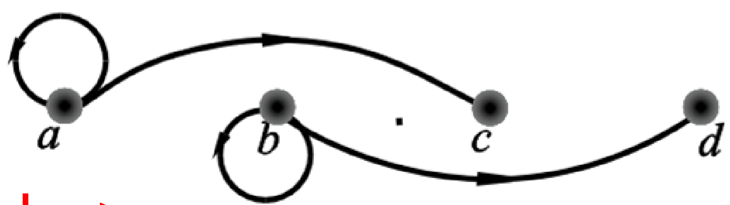
$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的关系图如下图所示.

$$R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$$



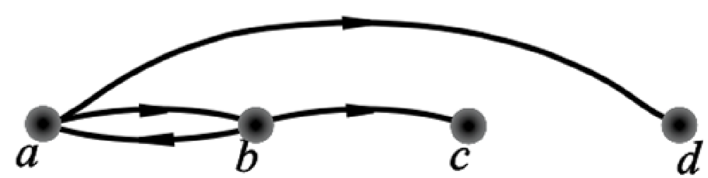
R^0

R^1



a-->b-->a
b-->a-->b
a-->b-->c
b-->c-->d

$R^2=R^4=\ldots$



a-->b-->a-->b
b-->a-->b-->a
b-->a-->b-->c
a-->b-->c-->d

$R^3=R^5=\ldots$

7.4 关系的性质

定义7.11 设 R 为A上的关系,（注意讨论关系的性质时，都是把R定义在A上）

(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的.

(2) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

实例:

自反：全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_2 自反，R_3 反自反，R_1既不是自反的也不是反自反的，叫不自反的。

对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A上的关系,

(1) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge<x,y>\in R\rightarrow<y,x>\in R)$, 则称 R 为 A上对称的关系.

(2) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R\rightarrow x=y)$, 则称 R 为A上的反对称关系.

实例：对称关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

反对称关系：恒等关系I_A和空关系也是A上的反对称关系.

设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，　$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$，　$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1：对称和反对称；R_2：只有对称；R_3：只有反对称；

R_4：不是对称的、也不是反对称的，叫不对称的

传递性

定义7.13 设R为A上的关系, 若

$$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\land <x,y>\in R\land <y,z>\in R\rightarrow <x,z>\in R),$$

则称 R 是A上的传递关系.

实例： A上的全域关系 E_A,恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$，小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

注意定义7.11，7.12，7.13中为蕴含式，当前件为假时，命题为真

关系性质成立的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	M^2中1位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边 (无单向边)	两点之间有边,是一条有向边 （无双向边）	点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则x_i到x_k也有边

闭包定义

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 并且R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R' \subseteq R''$

换句话说关系R的闭包，是满足某种性质的包含关系R的最小关系。

R的自反闭包记作$r(R)$, 对称闭包记作$s(R)$, 传递闭包记作$t(R)$.

r-reflexive　*s-symmetric*　*t-transitive*

闭包的求法

定理7.10　设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup I_A$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

说明：对有穷集$A(|A|=n)$上的关系, (3)中的并最多不超过R^n (根据第三节定理7.8)

闭包的求法：主要掌握集合表达（采用定理7.10）和矩阵表示法（下一页PPT）

闭包的矩阵表示和图表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s和 M_t 则

$M_r=M+E$　　$M_s=M + M'$　　$M_t=M + M^2 + M^3 + \ldots$

E 是单位矩阵, M'是 转置矩阵，+是逻辑加.

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则G_r, G_s, G_t的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新的边:

(1) 考察G 的每个顶点, 若没环就加一个环，得到G_r

(2) 考察G 的每条边, 若有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i≠j$, 则在G中加一条 x_j 到 x_i 的反向边，得到G_s

(3) 考察G 的每个顶点 x_i, 若 x_i到 x_j有有向边并且x_j到x_k有有向边，而x_i 到 x_k没有有向边的话，则添加一条这样的边，这样即可得到图G_t

等价关系的定义与实例

定义7.15 设R为非空集合上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若$<x,y>\in R$, 称 x等价于y, 记做$x\sim y$.

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{<x,y>| x,y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$$

其中$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$叫做 x与 y 模3相等, 即x除以3的余数与y除以3的余数相等. 不难验证 R 为A上的等价关系, 因为

(1) $\forall x\in A$, 有 $x\equiv x\ (\mathrm{mod}\ 3)$ （自反）

(2) $\forall x,y\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有$y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$ （对称）

(3) $\forall x,y,z\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有$x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$ （传递）

等价类定义

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称为x的**等价类**, 简记为$[x]$或$\overline{x}$

实例 $A=\{1, 2, \ldots , 8\}$上模3等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy, 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$ 与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

证 (1) 由定义, $\forall x \in A$有$[x] \subseteq A$. 又$x \in [x]$, 即$[x]$非空.

(2) 任取 z, 则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x,z \rangle \in R \Rightarrow \langle z,x \rangle \in R$$

$$\langle z,x \rangle \in R \wedge \langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle z,y \rangle \in R \Rightarrow \langle y,z \rangle \in R$$

从而证明了$z \in [y]$. 综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$. 同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 这就得到了$[x] = [y]$.

商集与划分

定义7.17 设 R 为非空集合A上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的**商集**, 记做A/R,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$ (商集的元素是集合)

实例 设 A=\{1,2,…,8\}，A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\}, \quad A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

定义7.18 设A为非空集合, 若A的子集族π($\pi \subseteq P(A)$)满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个**划分**, 称π中的元素为A的**划分块**.

离散数学

高等教育出版社

第三部分 图论

本部分主要内容

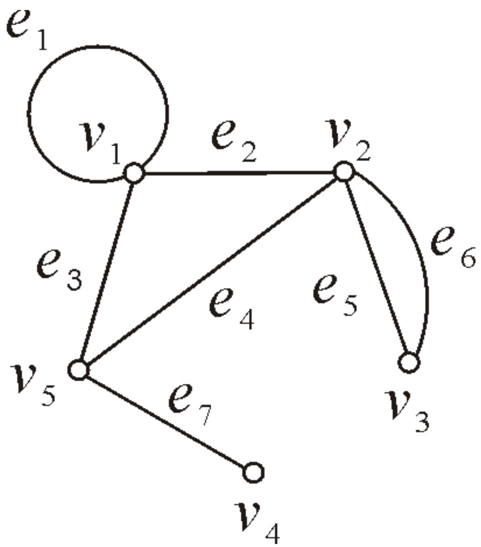
- 图的基本概念
- 树
- 欧拉图与哈密顿图

9.1 图

定义9.1 无向图$G = <V,E>$, 其中

(1) V为非空有穷集, 称为顶点集，其元素称为顶点

(2) E为 $V\times V$ 的多重有穷集, 称为边集, 其元素称为无向边, 简称边



例 无向图$G = <V,E>$, 其中

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

有向图

定义9.2 有向图$D=\langle V,E\rangle$,其中

(1) V为非空有穷集,称为顶点集，其元素称为顶点

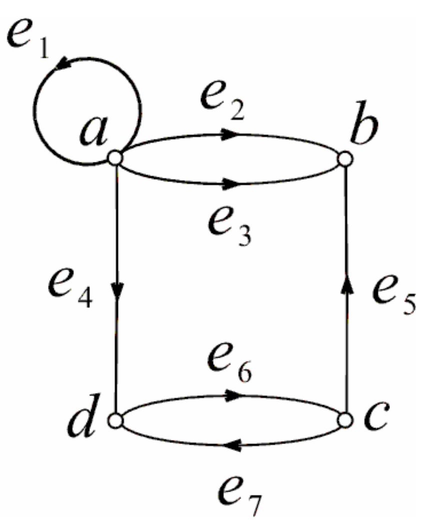
(2) E为 $V\times V$的多重有穷集,称为边集,其元素称为有向边,简称边

例 有向图$D=\langle V,E\rangle$, 其中

$V=\{a,b,c,d\}$

$E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,$

$\langle d,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,b\rangle\}$



注意：图的集合表示与图形表示之间的对应

相关概念

1. 无向图和有向图通称图. 记顶点集$V(G)$, 边集$E(G)$.

2. 图的阶, n阶图（n个顶点）.

3. n阶零图N_n, 平凡图N_1.（一条边也没有的图——零图）

4. 空图$\varnothing$.（顶点集为空集，可能由图的运算产生）

5. 标定图与非标定图.（每一个顶点和每一条边是否有名字）

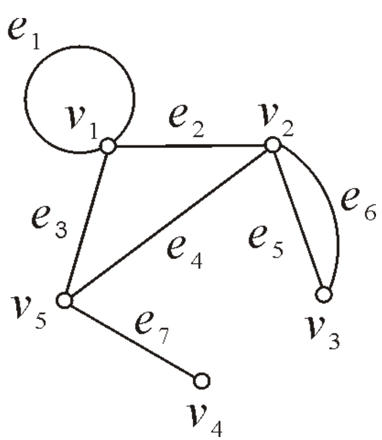
6. 有向图的基图.（将有向图的有向边改成无向边得到的图）

相关概念

7. 无向图中顶点与边的关联及关联次数, 顶点与顶点、边与边的相邻关系.

设图G=<V,E>, $e_k=(v_i,v_j)$, 称v_i,v_j为e_k的端点，e_k与$v_i(v_j)$关联；若$v_i \neq v_j$，则称e_k与$v_i(v_j)$关联次数为1；若$v_i=v_j$，则称e_k与$v_i(v_j)$关联次数为2，并称e_k为环。如果顶点v_i不与e_k关联，则称e_k与$v_i(v_j)$关联次数为0.

若两个顶点v_i与v_j之间有一条边连接，则称这两个顶点相邻；若两条边至少有一个公共端点，则称这两条边相邻.



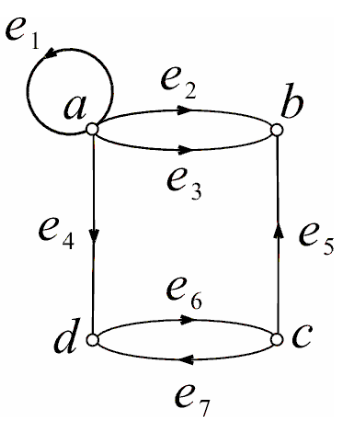
相关概念

8. 有向图中顶点与边的关联,顶点与顶点、边与边的相邻关系.

设图D=<V, E>, e_k=<v_i,v_j>∈E，称v_i,v_j为e_k的端点，v_i为e_k的始点，v_j为e_k的终点，并称e_k与v_i(v_j)关联,若v_i=v_j，则称e_k为D中的环.

若两个顶点v_i与v_j之间有一条有向边，则称这两个顶点相邻；若两条边中一条边的终点是另一条边的始点，则称这两条边相邻.

（如: 顶点a, b相邻，边e_4和e_6的相邻）



9. 孤立点.

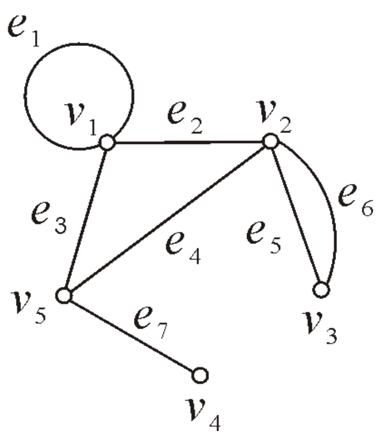
无向图（有向图）中没有边关联的顶点。

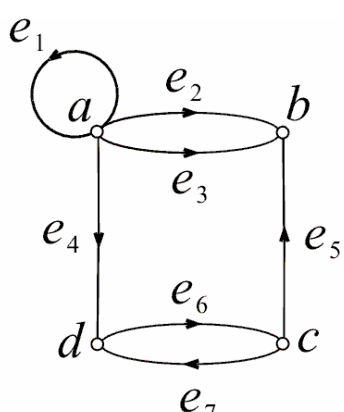
多重图与简单图

定义9.3 无向图中关联同一对顶点的2条和2条以上的边称为平行边. 有向图中2条和2条以上始点、终点相同的边称为平行边. 平行边的条数称为重数.

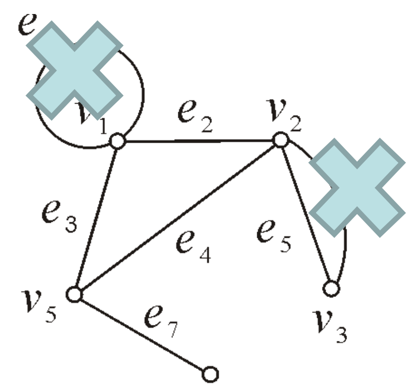
含平行边的图称为多重图, 不含平行边和环的图称为简单图.

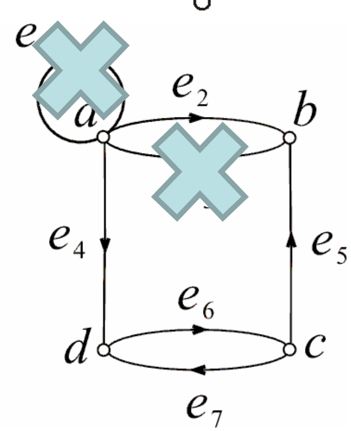
含有平行边，多重图





去掉环和重边



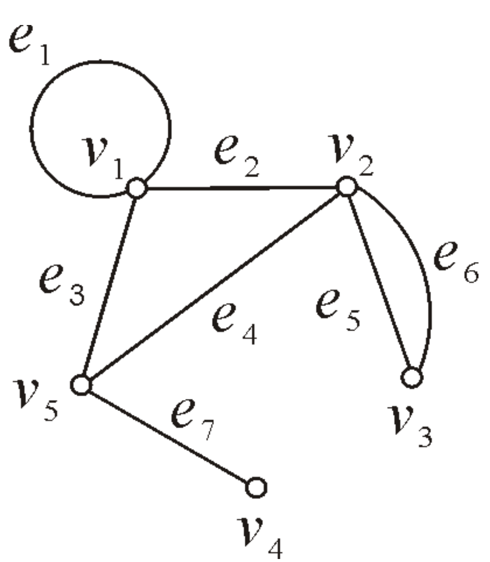


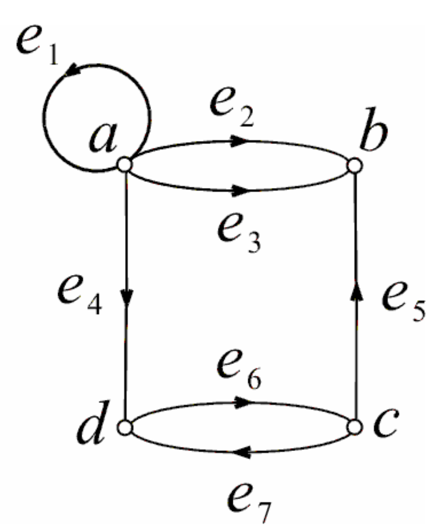
简单图

多重图与简单图

定义9.4 设$G=<V,E>$为无向图, $\forall v\in V$, 称v作为边的端点的次数之和为v的度数, 简称度, 记作$d(v)$.

设$D=<V,E>$为有向图, $\forall v\in V$, 称v作为边的始点的次数之和为v的出度, 记作$d^+(v)$; 称v作为边的终点的次数之和为v的入度, 记作$d^-(v)$; 称$d^+(v)+d^-(v)$为v的度数, 记作$d(v)$.





顶点的度数

设$G=<V,E>$为无向图,

G的最大度$\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$

G的最小度 $\delta(G)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$

设$D=<V,E>$为有向图,

D的最大度$\Delta(D)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$

D的最小度 $\delta(D)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$

D的最大出度$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v) \mid v\in V\}$

D的最小出度 $\delta^+(D)=\min\{d^+(v) \mid v\in V\}$

D的最大入度$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v) \mid v\in V\}$

D的最小入度 $\delta^-(D)=\min\{d^-(v) \mid v\in V\}$

悬挂顶点: 度数为1的顶点, 悬挂边: 与悬挂顶点关联的边.

偶度(奇度)顶点: 度数为偶数(奇数)的顶点

握手定理

定理9.1 在任何无向图中, 所有顶点的度数之和等于边数的2倍.

证 *G*中每条边 (包括环) 均有两个端点，所以在计算*G*中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，*m* 条边共提供 2*m* 度.

定理9.2 在任何有向图中，所有顶点的度数之和等于边数的2倍; 所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和, 都等于边数.

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证 由握手定理, 所有顶点的度数之和是偶数, 而偶度顶点的度数之和是偶数, 故奇度顶点的度数之和也是偶数. 所以奇度顶点的个数必是偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余均为2度顶点度，问G的阶数n为几？（阶数：顶点个数）

解 本题的关键是应用握手定理.
设除3度与4度顶点外，还有x个顶点, 由握手定理,

$$16\times 2=32 = 3\times 4+4\times 3+2x$$

解得 $x = 4$, 阶数 $n = 4+4+3=11$.

定理9.3 设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G)\leq n-1$.

不含平行边和环的图称为简单图

完全图与竞赛图

定义9.7

(1) n ($n\geq1$) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n.

性质：$m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$

(2) n ($n\geq1$)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

性质：$m=n(n-1)$, $\Delta=\delta=2(n-1)$

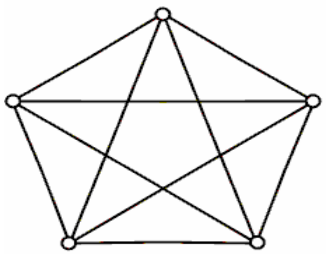
$\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$

(3) n ($n\geq1$) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

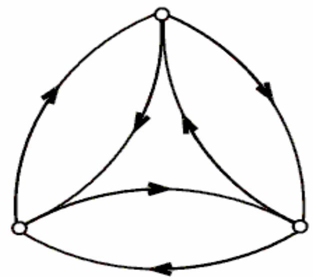
性质：$m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$

有向图的基图.（将有向图的有向边改成无向边得到的图）

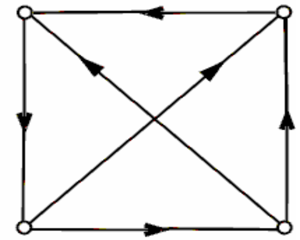
正则图



K_5



3阶有向完全图



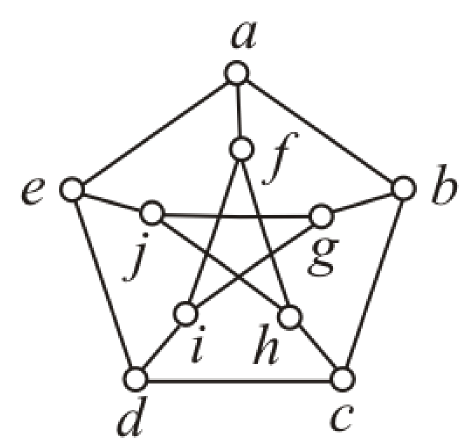
4阶竞赛图

定义9.8 k-正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图 （即最大度和最小度都为k ）

性质：$m=kn/2$, 当k是奇数时, n必为偶数.

例 K_n是 $(n-1)$-正则图

彼得松图是3-正则图

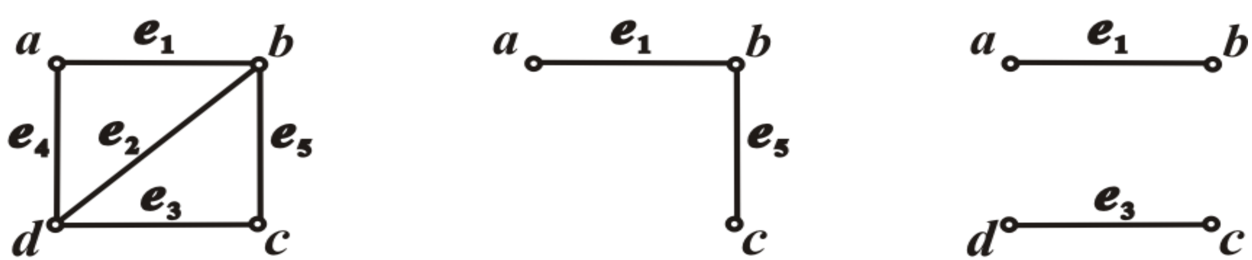


子图

定义9.9 设两个图$G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$（同为无向图或同为有向图），若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$，则称G'是G的子图，G为G'母图，记作$G'\subseteq G$. 又若$V'\subset V$或$E'\subset E$，则称G'为G的真子图. 若$G'\subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图.

设$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$, 称以V_1为顶点集, 以G中两个端点都在V_1中的边组成边集的图为G中V_1的导出子图, 记作$G[V_1]$. 设$E_1\subset E$且$E_1\neq\varnothing$, 称以E_1为边集, 以E_1中边关联的顶点为顶点集的图为G中E_1的导出子图, 记作$G[E_1]$.

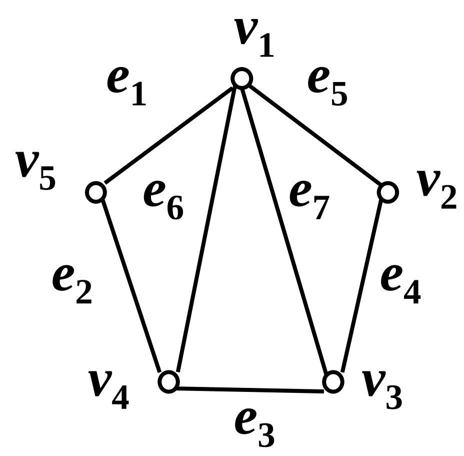
例



G　　　$G[\{a,b,c\}]$　　　$G[\{e_1,e_3\}]$

9.2 通路与回路

定义9.11 设图$G=<V,E>$ (无向或有向的), G中顶点与边的交替序列 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$， 如果$v_{i-1}$, v_i 是 e_i 的端点(始点和终点), $1\le i\le l$, 则称Γ为v_0到v_l的**通路**. v_0,v_l分别称作Γ的**始点**和**终点**. Γ中的边数l称作它的**长度**. 若 $v_0=v_l$, 则称Γ为**回路**.



G

$v_5e_1v_1e_5v_2$ 长度为2的通路

$v_5e_1v_1e_5v_2\, e_4v_3e_7v_1$ 长度为4的通路

$v_5e_1v_1e_5v_2\, e_4v_3e_3v_4e_2v_5$ 长度为5的回路

$v_5e_1v_1e_5v_2\, e_4v_3e_7v_1e_1v_5$ 长度为5的回路

9.2 通路与回路

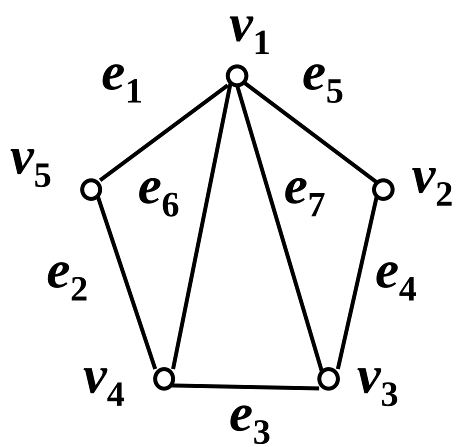
- 若所有的边各异, 则称Γ为简单通路. 若又有$v_0=v_l$, 则称Γ为简单回路.
- 若Γ中所有顶点各异(除v_0和v_l可能相同外)且所有边也各异, 则称Γ为初级通路或路径. 若又有$v_0=v_l$, 则称Γ为初级回路或圈. 长度为奇数的圈称为奇圈, 长度为偶数的圈称为偶圈.
- 若Γ中有边重复出现, 则Γ称为复杂通路. 若又有$v_0=v_l$, 则称Γ为复杂回路.

$v_5e_1v_1e_5v_2$ 长度为2的通路 (简单通路、初级通路)

$v_5e_1v_1e_5v_2\ e_4v_3e_7v_1$ 长度为4的通路 (简单通路)

$v_5e_1v_1e_5v_2\ e_4v_3e_3v_4e_2v_5$ 长度为5的回路 (初级回路)

$v_5e_1v_1e_5v_2\ e_4v_3e_7v_1e_1v_5$ 长度为5的回路 (复杂回路)



G

9.3 图的连通性

定义9.13 设无向图$G=<V,E>$，若$u,v\in V$之间存在通路，则称u,v是连通的，记作$u\sim v$. 规定: $\forall v\in V$, $v\sim v$.

若无向图G是平凡图或G中任何两个顶点都是连通的，则称G为连通图，否则称G为非连通图.

$\sim$是V上的等价关系, 具有自反性、对称性和传递性.

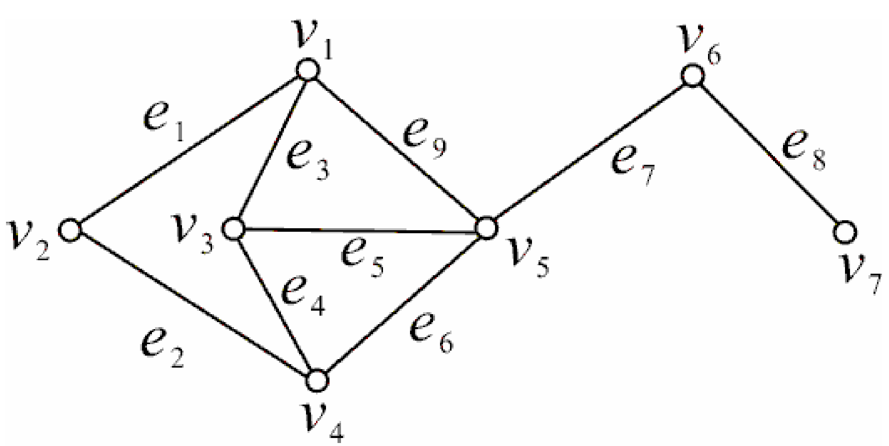
定义9.14 设无向图$G=<V,E>$，V_i是V关于顶点之间连通关系$\sim$的一个等价类，称导出子图$G[V_i]$为G的一个连通分支. G的连通分支数记为$p(G)$.

点割集与边割集

定义9.15 设无向图$G=\langle V,E\rangle$. 若$V'\subset V$使得$p(G-V')>p(G)$, 且对于任意的$V''\subset V'$, 均有$p(G-V'')=p(G)$, 则称V'是G的点割集. 若$V'=\{v\}$, 则称v为割点.

定义9.16 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, 若$E'\subseteq E$使得$p(G-E')>p(G)$, 且对于任意的$E''\subset E'$, 均有$p(G-E'')=p(G)$, 则称E'是G的边割集, 简称为割集. 若$E'=\{e\}$, 则称e为割边或桥.

例3 $\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集, v_6是割点. $\{v_2,v_3\}$不是. $\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥. 而$\{e_1,e_5,e_9\}$ 不是.



点连通度与边连通度

定义9.17 G为连通非完全图, 称

$$\kappa(G) = \min\{\ |V'|\ \big|\ V'\text{为点割集}\ \}$$

为G的点连通度, 简称连通度. 若$\kappa(G)\geq k$，则称G为 k-连通图 .

规定 $\kappa(K_n) = n-1$, 非连通图的连通度为0.

若G为 k-连通图（$k\geq1$），则在G中删除任何k-1个顶点后得到图还是连通的.

定义9.18 设G为连通图, 称

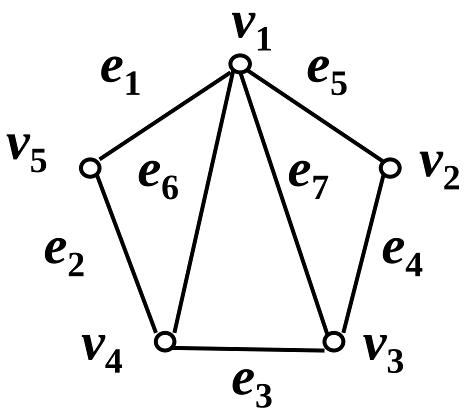
$$\lambda(G) = \min\{|E'|\ \big|\ E'\text{为边割集}\}$$

为G的边连通度. 若$\lambda(G)\geq r$，则称G是 r 边-连通图.

规定非连通图的边连通度为0.

若G为 r边-连通图（$r\geq1$），则在G中删除任何r-1条边后得到图还是连通的.

例 κ=2, 2-连通图, 也是1-连通.
λ=2, 2边-连通图, 也是1边-连通.



几点说明

- $\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$
- G非连通，则 $\kappa=\lambda=0$
- 若G中有割点，则$\kappa=1$，若有桥，则$\lambda=1$
- 若$\kappa(G)=k$, 则G是1-连通图，2-连通图，…，k-连通图，但不是$(k+s)$-连通图，$s\geq 1$
- 若$\lambda(G)=r$, 则G是1边-连通图，2边-连通图，…，r边-连通图，但不是$(r+s)$-边连通图，$s\geq 1$

定理9.6 $\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$

课本例题 9.7

有向图的连通性及分类

定义9.19 设$D=<V,E>$为一个有向图, $\forall v_i,v_j \in V$, 若从v_i到v_j存在通路, 则称v_i可达v_j, 记作$v_i \to v_j$. 规定$v_i \to v_i$.

若$v_i \to v_j$且$v_j \to v_i$， 则称v_i与v_j是相互可达的, 记作$v_i \leftrightarrow v_j$. 规定$v_i \leftrightarrow v_i$.

性质：$\to$ 具有自反性($v_i \to v_i$)、传递性

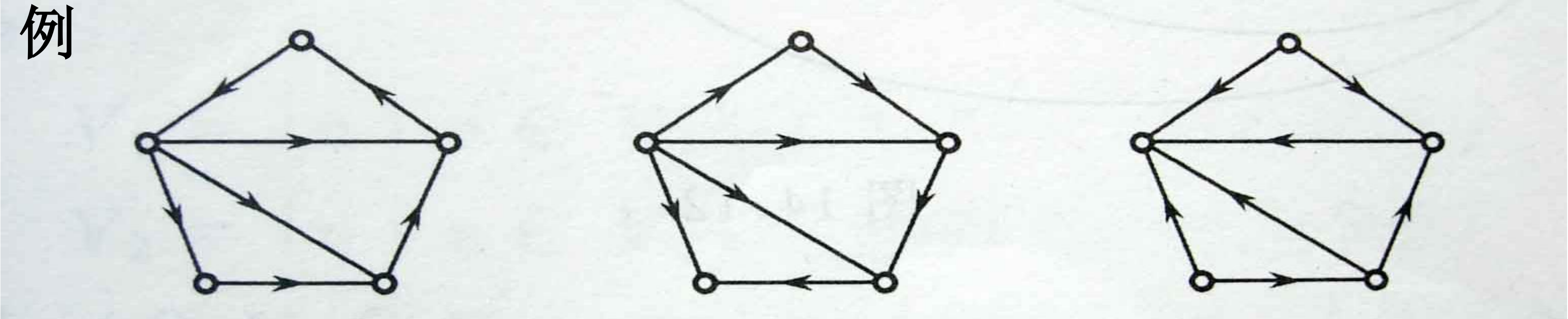
$\leftrightarrow$ 具有自反性、对称性、传递性 （等价关系）

定义9.20 若有向图$D=<V,E>$的基图是连通图, 则称D是弱连通图, 简称为连通图. 若$\forall v_i,v_j \in V$, $v_i \to v_j$与$v_j \to v_i$至少有一个成立, 则称 D是单向连通图. 若$\forall v_i,v_j \in V$, 均有$v_i \leftrightarrow v_j$, 则称D是强连通.

三类图的关系？ 强连通图 $\Longrightarrow$ 单向连通图 $\Longrightarrow$ 弱连通图

有向图的连通性

例



强连通　　　　单向连通　　　　弱连通

定理9.7 有向图D=<V,E>是强连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路.

证 充分性显然. 证必要性. 设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, Γ_i为v_i到v_{i+1}的通路(i=1,2,…,n−1), Γ_n为v_n到v_1的通路. 依次连接Γ_1, Γ_2, …, Γ_{n-1}, Γ_n所得到的回路经过D中每个顶点至少一次.

定理9.8 有向图D是单向连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路.

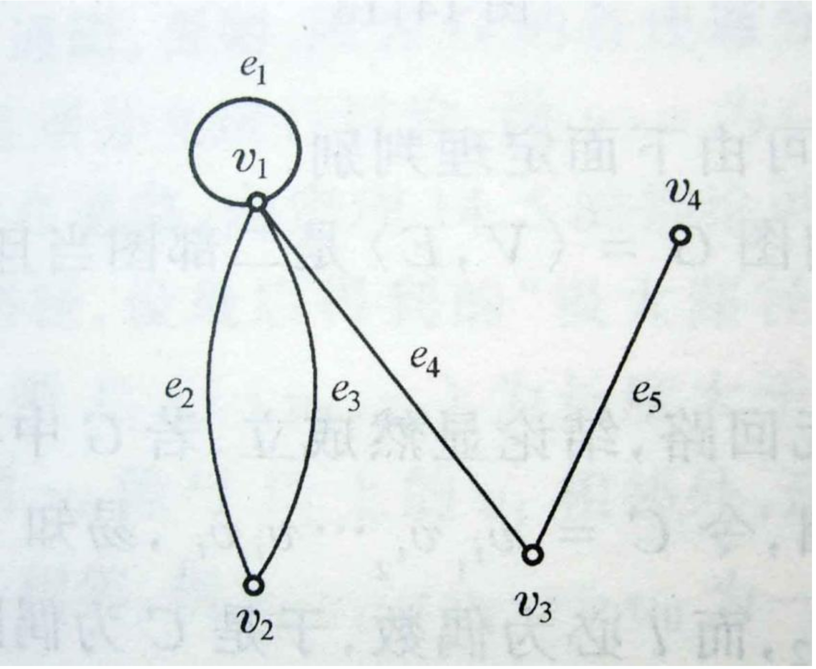
9.4 图的矩阵表示（重要）

无向图的关联矩阵

定义9.21 无向图$G=<V,E>$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j 的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.

例

$$M(G)=\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$



无向图关联矩阵的性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad , j = 1,2,\ldots,m$ （每条边恰好关联两个顶点）

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad , i = 1,2,\ldots,n$（行和为对应顶点的度）

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$ （握手定理）

(4) 平行边的列相同

(5) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0 \Leftrightarrow v_i$是孤立点

有向图(无环)的关联矩阵

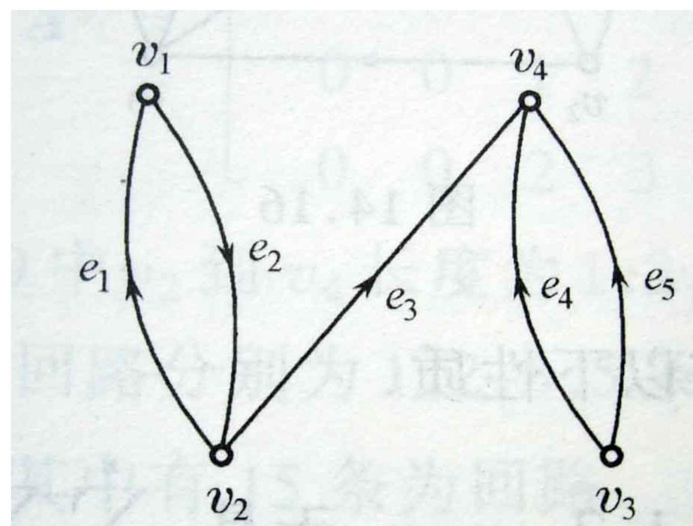
定义9.22 设有向图$D=\langle V,E\rangle$中无环，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的**关联矩阵**，记为$M(D)$.

例

$$M(D)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$



有向图关联矩阵的性质

(1) 每列恰好有一个+1和一个-1.

(2) -1的个数等于+1的个数，都等于边数m.

(3)第i行中，+1的个数等于$d^{+}(v_i)$，-1的个数等于$d^{-}(v_i)$.

(4) 平行边对应的列相同

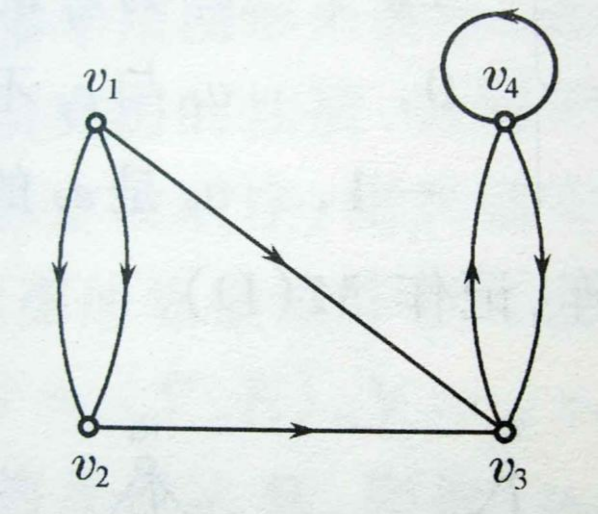
有向图的邻接矩阵

定义9.23 设有向图$D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令$a_{ij}^{(1)}$为顶点$v_i$邻接到顶点$v_j$边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})$为$D$的邻接矩阵，记作$A(D)$，或简记为$A$.

同样可以定义无向图的邻接矩阵，只要把每一条无向边看作一对方向相反的有向边即可，因此无向图的邻接矩阵是对称的。

例

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



有向图邻接矩阵的性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$ （行和为出度）

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1,2,\ldots,n$ （列和为出度）

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---D中长度为1的通路数 （即边的条数）

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---D中长度为1的回路数 （即环的条数）

邻接矩阵的应用

定理9.9 设 A为有向图 D 的邻接矩阵, 顶点集$V=\{v_1,v_2,\ldots, v_n\}$, 则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq1$）中元素

$\boxed{a_{ij}^{(l)}}$ 为v_i 到v_j长度为 l 的通路数,

$\boxed{a_{ii}^{(l)}}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数,

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为长度为 l 的通路总数, （所有元素）

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为长度为 l 的回路总数. （对角线元素）

这里的通路可以是复杂通路, 包括回路在内，且是在定义的意义下计数的。

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$ ($l\geq1$), 则

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$ 为长度小于或等于 l 的通路数,

$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为长度小于或等于 l 的回路数.

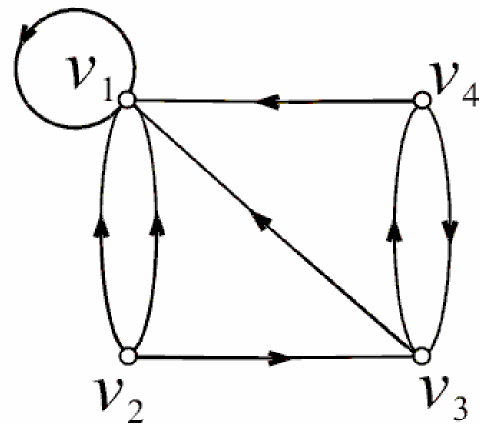
实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A^2, A^3, A^4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$



实例求解

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D中长度为3的通路为14条，其中有1条是回路.

D中长度为4的通路为17条，其中有3条是回路.

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

有向图的可达矩阵

定义9.24 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

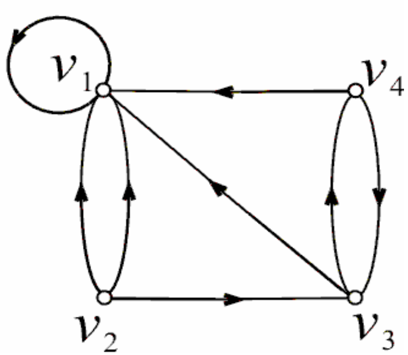
称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的**可达矩阵**，记作$P(D)$，简记为P.

$P(D)$的主对角线上的元素全为1.

D 强连通当且仅当 $P(D)$为全1矩阵.

同样可以定义无向图的可达矩阵，只要把每一条无向边看作一对方向相反的有向边即可，因此无向图的可达矩阵是对称的。

例

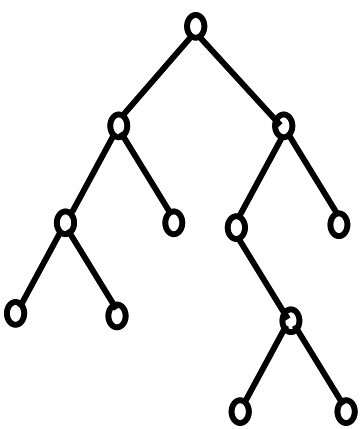


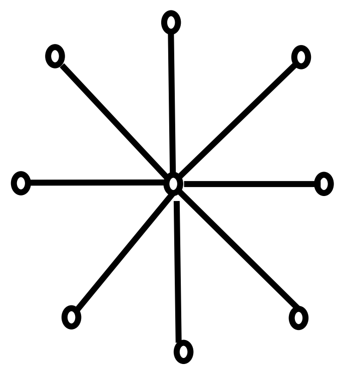
$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

10.1 无向树及其性质

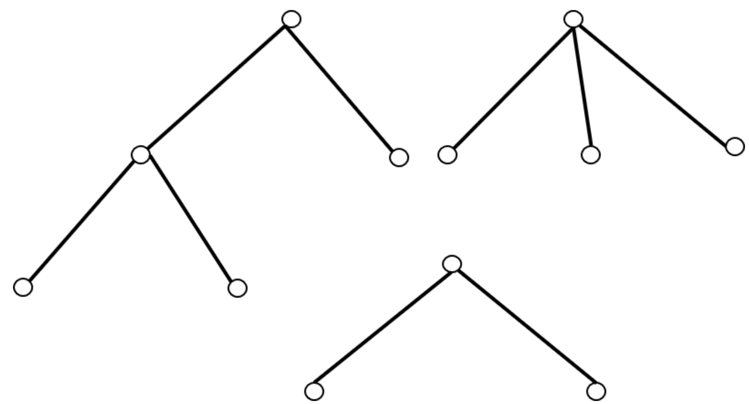
定义10.1 连通无回路的无向图称为**无向树**, 简称**树**. 每个连通分支都是树的无向图称为**森林**. 平凡图称为**平凡树**. 在无向树中, 悬挂顶点称为**树叶**, 度数大于或等于2的顶点称为**分支点**.

例





星形树



森林

无向树的性质

定理10.1 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.（边数为n-1）

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边后所得图中有惟一的一个含新边的圈.

无向树的性质

定理10.2 设T是n阶非平凡的无向树，则T 中至少有两片树叶.

证　设 T 有 x 片树叶，由握手定理及定理10.1可知，

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

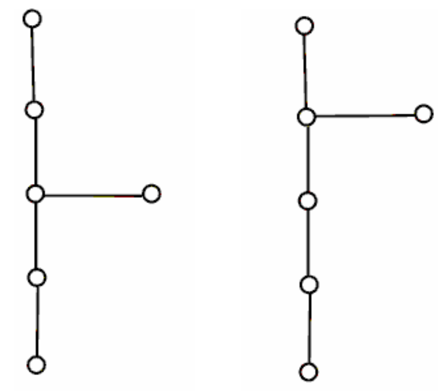
解得 $x\geq 2$.

例1　已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

解　设有x片树叶，$n=3+x$.

$$2(n-1)=2\times(2+x)=1\times3+2\times2+x$$

解出$x=3$，故T有3片树叶.



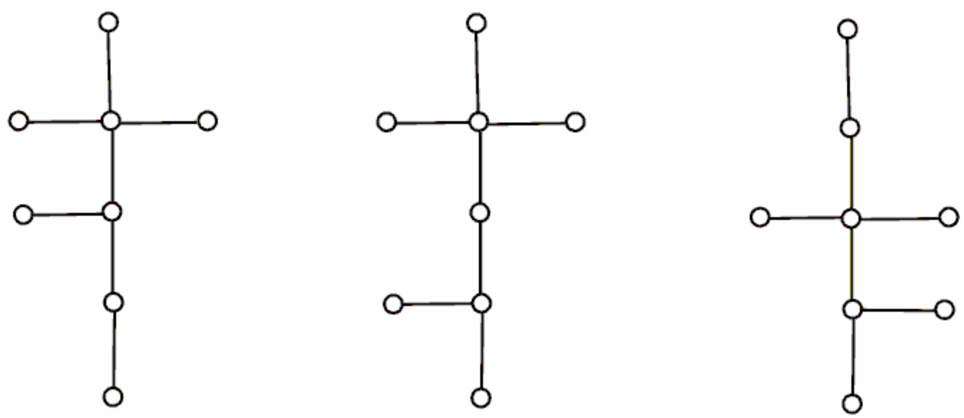
例题

例2 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.

解 设T的阶数为n, 则边数为$n-1$，4度顶点的个数为$n-7$.

由握手定理， $2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$,

解出$n = 8$，4度顶点为1个.



欧拉图定义

定义11.1 图(无向图或有向图)中所有边恰好通过一次且经过所有顶点的通路称为**欧拉通路**. 图中所有边恰好通过一次且经过所有顶点的回路称为**欧拉回路**. 具有欧拉回路的图称为**欧拉图**. 具有欧拉通路而无欧拉回路的图称为**半欧拉图**.

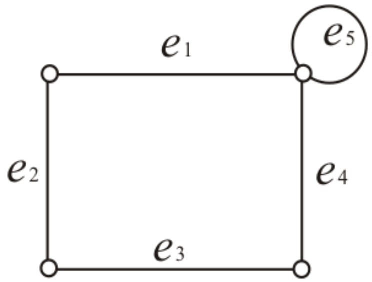
说明:

规定平凡图为欧拉图.

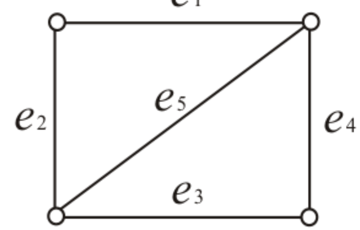
环不影响图的欧拉性.

注意：每条边只能经过一次，但顶点可以重复！

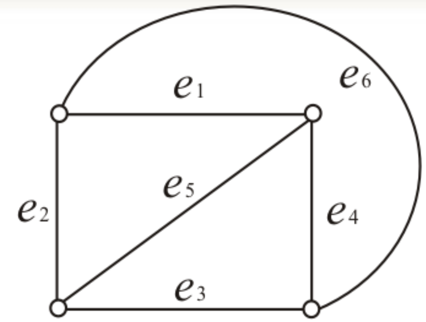
欧拉图实例



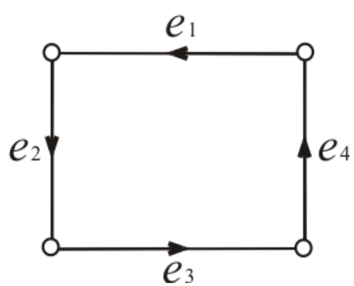
欧拉图



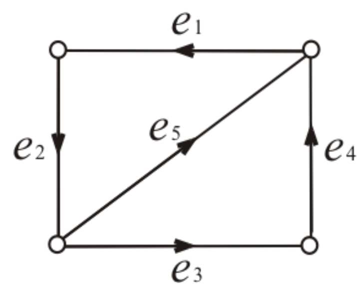
半欧拉图



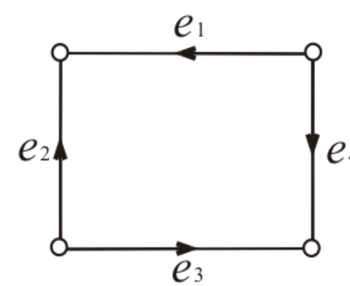
不是



欧拉图



半欧拉图



不是

欧拉图的判别法（重要）

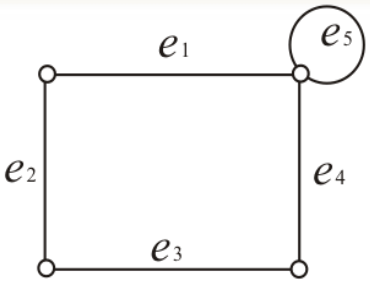
定理11.1 (1) 无向图G是欧拉图当且仅当G是连通的且没有奇度顶点.

(2) 无向图G是半欧拉图当且仅当G是连通的且恰有两个奇度顶点.

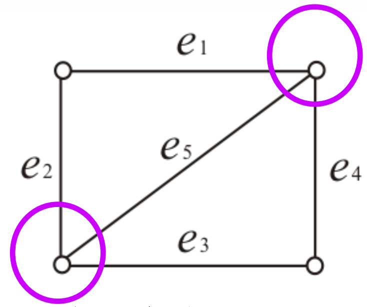
(3) 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度等于出度.

(4) 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的且恰有两个奇度顶点, 其中一个顶点的入度比出度大1, 另一个顶点出度比入度大1, 其余顶点的入度等于出度.

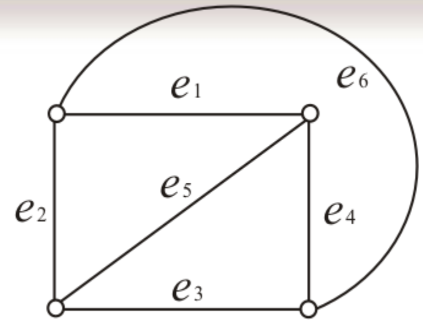
欧拉图实例



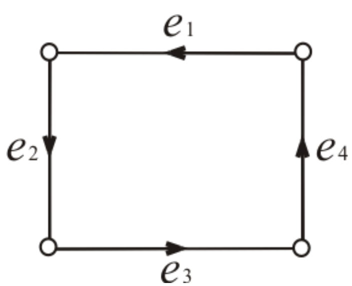
欧拉图



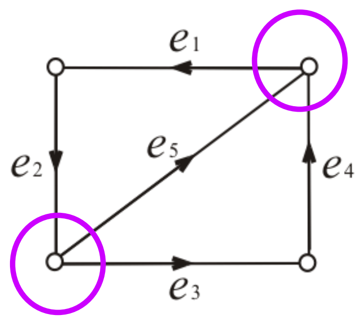
半欧拉图



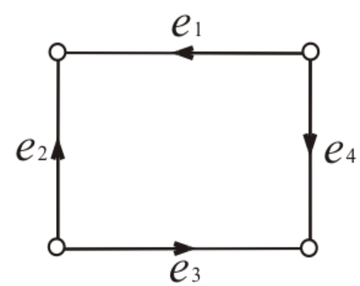
不是



欧拉图



半欧拉图



不是

例1 设G是非平凡的欧拉图，则$\lambda(G)\geq 2$.

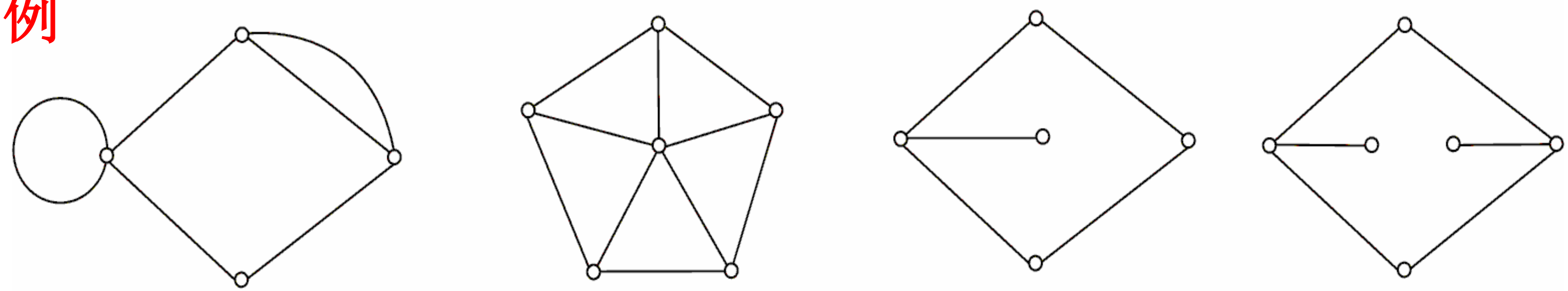
证　只需证明G的任意一条边e都不是桥. 设C是一条欧拉回路，e在C上，因而$G-e$仍是连通的，故e不是桥.

哈密顿图与半哈密顿图

定义11.2 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称作哈密顿通路. 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称作哈密顿回路. 具有哈密顿回路的图称作哈密顿图. 具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图称作半哈密顿图.

规定: 平凡图是哈密顿图.

例



哈密顿图　　哈密顿图　　半哈密顿图　　不是

无向哈密顿图的一个必要条件（重要）

定理11.2 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有

$$p(G-V_1) \le |V_1|$$

- 如果图G是哈密顿图，则去掉任意顶点集后产生的连通分支个数小于等于去掉的顶点个数。

- 如果找到某个顶点集，去除后上述不等式不满足，则此图不是哈密顿图。

注意：必要条件只能用来判断不是哈密顿图。

无向哈密顿图的一个必要条件（重要）

推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$均有

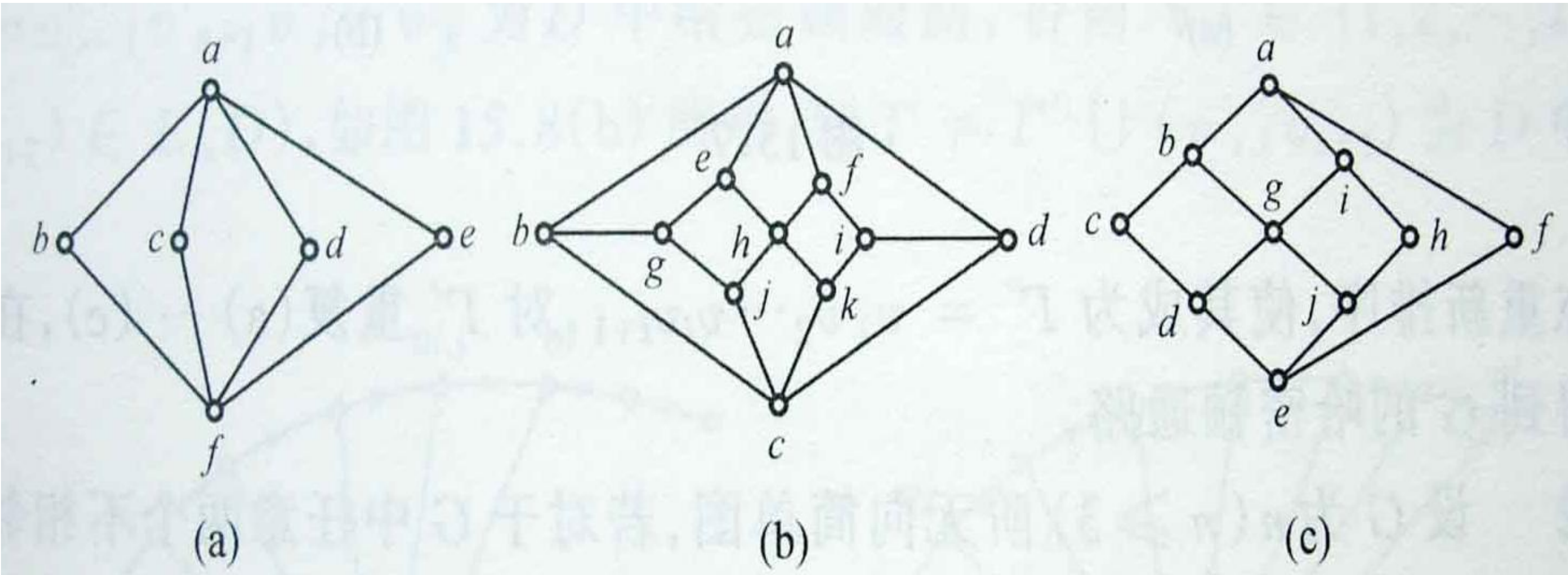
$$p(G-V_1) \leq |V_1|+1$$

- 如果图G是半哈密顿图，则去掉任意顶点集后产生的连通分支个数小于等于去掉的顶点个数+1。
- 如果找到某个顶点集，去除后上述不等式不满足，则此图不是半哈密顿图。

注意：该必要条件只能用来判断不是半哈密顿图。

例题

例2 判断下面的图是不是哈密顿图, 是不是半哈密顿图.



解 (a)取$V_1=\{a,f\}$, $p(G-V_1)=|\{b,c,d,e\}|=4>|V_1|=2$, 不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.

(b)取$V_1=\{a,g,h,i,c\}$, $p(G-V_1)=|\{b,e,f,j,k,d\}|=6>|V_1|=5$, 不是哈密顿图. 而*baegjckhfid*是一条哈密顿通路, 是半哈密顿图.

(c) *abcdgihjefa*是一条哈密顿回路，是哈密顿图.

无向哈密顿图的一个充分条件

定理11.3 设G是n阶无向简单图, 若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j, 均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在哈密顿通路.

推论 设G为n $(n\geq3)$ 阶无向简单图, 若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j, 均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路.

注意：充分条件不满足时，不能说明不是哈密顿图或者半哈密顿图。

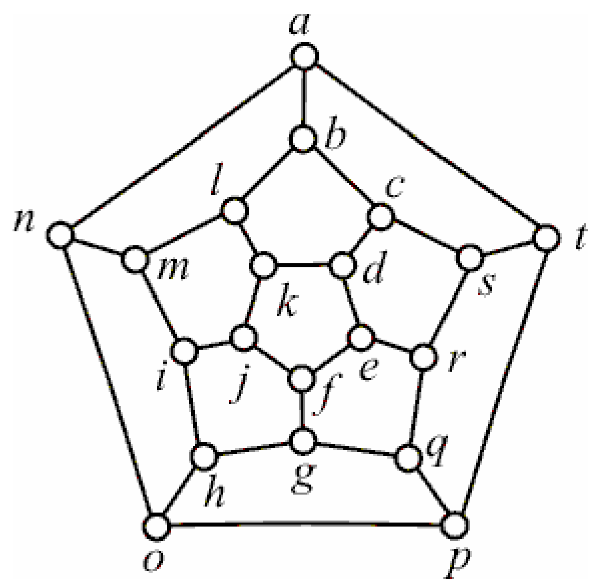
判断是否为哈密顿图

判断是否为(半)哈密顿图至今还是一个难题.

(1) 观察出一条哈密顿回路或哈密顿通路.

(2) 证明满足充分条件.【是（半）哈密顿图】

(3) 证明不满足必要条件.【不是（半）哈密顿图】



例4 证明右图(周游世界问题)是哈密顿图

证 $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ j\ k\ l\ m\ n\ o\ p\ q\ r\ s\ t\ a$

是一条哈密顿回路.

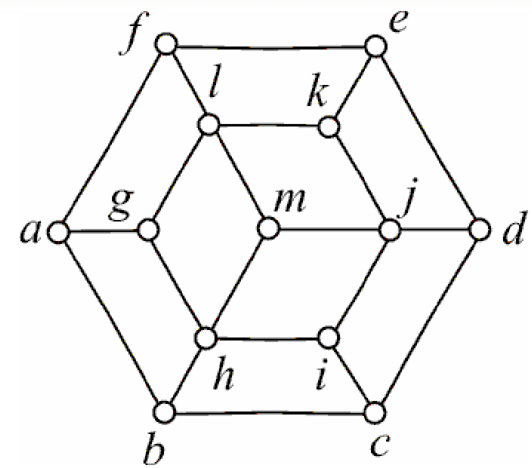
注意，此图不满足定理11.3推论的条件.

例5 完全图K_n $(n\geq 3)$是哈密顿图.

证 任何两个顶点u,v，$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n$

练习 1

2. 证明右图不是哈密顿图.



证一　取 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$,

$p(G-V_1) = 7 > 6=|V_1|$

证二　$n = 13$, $m = 21$. h, l, j为4度顶点, a, c, e为3度顶点, 且它们关联不相同的边. 而在哈密顿回路上, 每个顶点关联两条边, 于是可能用于哈密顿回路的边至多有$21-(3\times2+3\times1) = 12$. 12条边不可能构成经过13个顶点的回路.

练习 2

3．某次国际会议8人参加, 已知每人至少与其余7人中的4人能用相同的语言, 问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座, 使得每个人都能与两边的人交谈?

解 做无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中$V=\{v\mid v$为与会者$\}$,

$E=\{(u,v)\mid u,v\in V, u$与$v$有能用相同的语言, 且$u\neq v\}$.

G为简单图且$\forall v\in V$, $d(v)\geq 4$. 于是, $\forall u,v\in V$, $d(u)+d(v)\geq 8$, 故G为哈密顿图. 服务员在G中找一条哈密顿回路, 按回路中相邻关系安排座位即可.