注意：作业要参考 PPT 中的例题，步骤规范。

1、9 题(4)(5)(6)没有弄清楚集合的元素性质（无序性、相异性、任意性），没有弄清楚幂集的定义。

2、没有弄清楚幂集中的元素和集合之间是属于还是包含关系。（45 题证明）

3、集合括号写得不标准

4、文氏图画法不正确。注意首先画一个矩形表示全集，有时为简单起见可将全集省略；其次在矩形内画一些圆，用圆得内部表示集合。不同的圆代表不同的集合，如果没有关于集合不相交的说明，任何两个圆应彼此相交。

5、交集和并集的符号写得不规范，与合取析取不区分。

6、证明题过程不规范

7、广义运算掌握得不好

No.
Date.

第五次作业（第六章）

8. 求下列集合的幂集

(1) $\{a, b, c\}$

幂集 $P(\{a,b,c\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

(2) $\{1, \{2,3\}\}$

幂集为: $\{\phi, \{1\}, \{\{2,3\}\}, \{1, \{2,3\}\}\}$

(3) $\{\phi\}$

幂集为: $\{\phi, \{\phi\}\}$

(4) $\{\phi, \{\phi\}\}$

幂集为: $\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

(5) $\{\{1,2\}, \{2,1,1\}, \{2,1,1,2\}\}$

幂集为: $\{\phi, \{\{1,2\}\}\}$

(6) $\{\{\phi,2\}, \{2\}\}$

幂集为: $\{\phi, \{\{\phi,2\}\}, \{\{2\}\}, \{\{\phi,2\}, \{2\}\}\}$

No.
Date.

9. 设 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，

$C=\{2,4\}$，求下列集合。

(1) $A\cap\sim B$

$=\{1,4\}\cap\sim\{1,2,5\}$

$=\{1,4\}\cap\{3,4,6\}$

$=\{4\}$

(2) $(A\cap B)\cup\sim C$

$=\{1,4\}\cap\{1,2,5\}\cup\sim\{2,4\}$

$=\{1\}\cup\{1,3,5,6\}$

$=\{1,3,5,6\}$

(3) $\sim(A\cap B)$

$=\sim(\{1,4\}\cap\{1,2,5\})$

$=\sim\{1\}$

$=\{2,3,4,5,6\}$

(4) $P(A)\cap P(B)$

$=\{\emptyset,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}\cap\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{5\},\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},\{1,2,5\}\}$

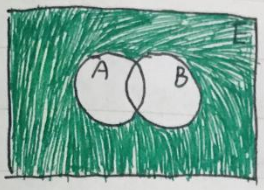
$=\{\emptyset,\{1\}\}$

<5> $P(A) - P(B)$

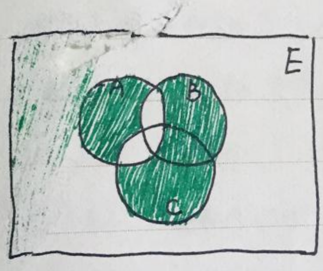
$= \{\{4\}, \{1,4\}\}$

15. 画出下列集合的文氏图.

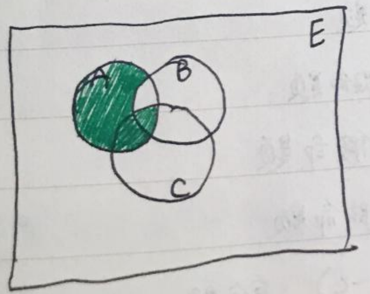
(1) $\sim A \cap \sim B$



<2> $(A-(B\cup C)) \cup ((B\cup C)-A)$



<3> $A \cap (\sim B \cup C)$



18. 设集合 $A=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{\phi\}\}$，计算下列表达式

(1) $\cup A$

$\cup A=\{1,2,3,\phi\}$

(2) $\cap A$

$\cap A=\phi$

(3) $\cap\cup A$

$=\cap\{1,2,3,\phi\}$

$=\phi$

(4) $\cup\cap A=\cup\phi=\phi$

19. 判断以下命题的真假.

(1) $a\in\{\{a\}\}$ 假命题

(2) $\{a\}\in\{\{a\}\}$ 真命题

(3) $x\in\{x\}-\{\{x\}\}$ 真命题

(4) $\{x\}\subseteq\{x\}-\{\{x\}\}$ 真命题

(5) $A-B=A \Leftrightarrow B=\phi$ 假命题

(6) $A-B=\phi \Leftrightarrow A=B$ 假命题

(7) $A\oplus A=A$ 假命题

(8) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ 真命题

(9) 如果 $A\cap B=B$，则 $A=E$　　假命题

(10) $A=\{x\}\cup x$，则 $x\in A$ 且 $x\subseteq A$　　真命题

22. 在1-300的整数中（1和300包含在内）分别求满足以下条件的整数个数.

解：设 $S=\{x \mid x\in Z \wedge 1\le x\le 300\}$

$A=\{x \mid x\in S \wedge x$ 可被3整除$\}$

$B=\{x \mid x\in S \wedge x$ 可被5整除$\}$

$C=\{x \mid x\in S \wedge x$ 可被7整除$\}$

则有 $|S|=300$

$|A|=\lfloor 300/3\rfloor=100$

$|B|=\lfloor 300/5\rfloor=60$

$|C|=\lfloor 300/7\rfloor=42$

$|A\cap B|=\lfloor 300/lcm(3,5)\rfloor=20$

$|A\cap C|=\lfloor 300/lcm(3,7)\rfloor=14$

$|B\cap C|=\lfloor 300/lcm(5,7)\rfloor=8$

$|A\cap B\cap C|=\lfloor 300/lcm(3,5,7)\rfloor=2$

其中 $|*|$ 表示有穷集 * 中的元素数，$\lfloor x\rfloor$ 表示小于等于 x 的最大整数，$lcm(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $x_1,\cdots,x_n$ 的最小公倍数

(1) 同时能被3，5和7整除

$|A\cap B\cap C|=2.$

No.

Date.

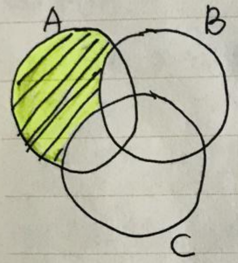
<2> 不能被3和5，也不能被7整除

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |S| - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$$

$$= 300-(100+60+42)+(20+14+8)-2$$

$$= 138$$ （包含排斥原理）

<3> 可以被3整除，但不能被5和7整除

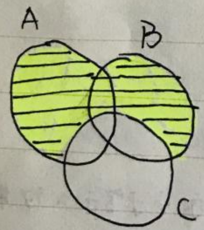


$$|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |A| - |A\cap B| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

$$= 100-20-14+2$$

$$= 68$$

<4> 可以被3或5整除，但不能被7整除

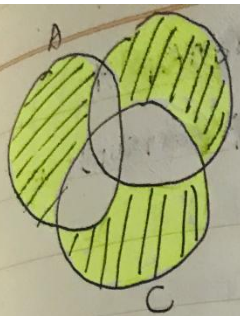


$$|A\cup B\cap\bar{C}| = |A|+|B| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

$$= 100+60-20-14-8+2$$

$$= 120$$

<5> 只被3，5和7之中的一个数整除

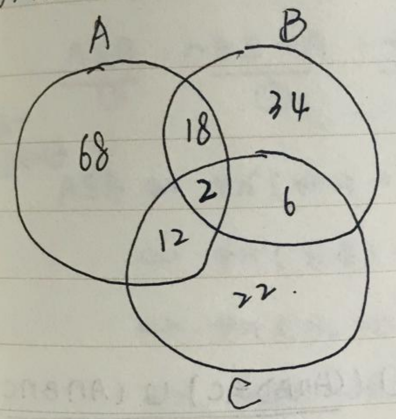


$|A|+|B|+|C| - 2(|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|) + 3|A\cap B\cap C|$

$= 100+60+42-2(20+14+8)+3\times 2$

$= 124$

(3)(4)(5)也可由如下方法得到



满足(3)中要求的元素个数为68.

满足(4)中要求的元素个数为 $68+34+18=120$

满足(5)中要求的元素个数为 $68+34+22=124$

28. 化简下述集合公式

(1) $(A\cap B)\cup(A-B)$

$= (A\cup(A-B))\cap(B\cup(A-B))$

$= (A\cup(A\cap\sim B))\cap(B\cup(A\cap\sim B))$

$= (A\cup A)\cap(A\cup\sim B)\cap(B\cup A)\cap(B\cup\sim B)$

$= A\cap(A\cup\sim B)\cap(A\cup B)\cap E$

$= A$

(2) $(A\cup(B-A))-B$

$= (A\cup(B\cap\sim A))-B$

$=((A\cup B)\cap(A\cup\sim A))-B$

$=((A\cup B)\cap E)-B$

$= (A\cup B)-B$

$= (A\cup B)\cap\sim B$

$= (A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim B)$

$= (A\cap\sim B)\cup\varnothing$

$= A\cap\sim B$

$= A-B$

(3) $\underbrace{((A-B)-C)\cup((A-B)\cap C)}_{①}\cup\underbrace{((A\cap B)-C)\cup(A\cap B\cap C)}_{②}$

利用(1)的结论得到 ①式 $((A-B)-C)\cup((A-B)\cap C)$

$= A-B$

②式 $((A\cap B)-C)\cup((A\cap B)\cap C)$

$= A\cap B$

原式 $=(A-B)\cup(A\cap B)$

再利用(1)的结论 $= A$

(4) $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\sim B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)$

$=((A\cap C)\cap B)\cup((A\cap C)-B)\cup(\sim A\cap B\cap C)$

由(1) $= (A\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)$

$= (A \cup (\sim A \cap B \cap C)) \cap (C \cup (\sim A \cap B \cap C))$

$= (A \cup \sim A) \cap (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap C$

$= E \cap (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap C$

$= (A \cup B) \cap C$

35、证明以下4个命题是等价的

$\underset{①}{\underline{A \subseteq B}}$，$\underset{②}{\underline{\sim B \subseteq \sim A}}$，$\underset{③}{\underline{\sim A \cup B = E}}$，$\underset{④}{\underline{A - B \subseteq B}}$

方法一：

①⇔②

证明：$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$

$\Leftrightarrow \forall x\,(x \notin B \to x \notin A)$

$\Leftrightarrow \forall x\,(x \in \sim B \to x \in \sim A)$

$\Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$

①⇒③ $A \subseteq B \Rightarrow \sim A \cup A \subseteq \sim A \cup B$

$\Rightarrow E \subseteq \sim A \cup B$

另外，显然有 $\sim A \cup B \subseteq E$. 因此 $A \subseteq B \Rightarrow \sim A \cup B = E$

③⇒① $\sim A \cup B = E \Rightarrow A \cap (\sim A \cup B) = A$

$\Rightarrow A \cap B = A$

$\Rightarrow A \subseteq B$

因此 ①⇔③

Date.

① ⇒ ④ $A \subseteq B \Rightarrow A-B=\phi$

$\Rightarrow A-B\subseteq B$

④ ⇒ ① $A-B\subseteq B \Rightarrow (A-B)\cup B\subseteq B$

$\Rightarrow (A\cap\sim B)\cup B\subseteq B$

$\Rightarrow A\cup B\subseteq B$

$\Rightarrow A\subseteq B$

因此，① ⇔ ④

综上得到 ① ⇔ ② ⇔ ③ ⇔ ④

方法二. ① ⇒ ② $A\subseteq B \Rightarrow A\cap B = A$

$\Rightarrow \sim(A\cap B) = \sim A$

$\Rightarrow \sim A\cup\sim B = \sim A$

$\Rightarrow \sim B\subseteq\sim A$

② ⇒ ③ $\sim B\subseteq\sim A \Rightarrow \sim B\cup B\subseteq\sim A\cup B$

$\Rightarrow E\subseteq\sim A\cup B$

另外，$\sim A\cup B\subseteq E$ 显然成立. 因此有 $E=\sim A\cup B$

③ ⇒ ④ $\sim A\cup B=E \Rightarrow (A\cap\sim B) = (A\cap\sim B)\cap(\sim A\cup B)$

$= (A\cap(\sim A\cup B))\cap(\sim B\cap(\sim A\cup B))$

$= ((A\cap\sim A)\cup(A\cap B))$

$\cap((\sim B\cap\sim A)\cup(\sim B\cap B))$

No.
Date.

$= (\phi \cup (A\cap B)) \cap ((\sim B \cap \sim A) \cup \phi)$

$= (A\cap B \cap \sim B \cap \sim A$

$= \phi \subseteq B$

$\Rightarrow A\cap \sim B \subseteq B$

$\Rightarrow A-B \subseteq B$

④ ⇒ ①

$A-B \subseteq B \Rightarrow (A-B)\cup B \subseteq B$

$\Rightarrow (A\cap \sim B)\cup B \subseteq B$

$\Rightarrow A\cup B \subseteq B$

$\Rightarrow A \subseteq B$

综上得到 ① ⇔ ② ⇔ ③ ⇔ ④

37. 设A, B, C是任意集合，证明

$\underbrace{C \subseteq A \wedge C}_{①} \subseteq B \Leftrightarrow \underbrace{C \subseteq A\cap B}_{②}$

证明:

①⇒②. $\forall x,\ x\in C \Rightarrow x\in C \wedge x\in C$

$\Rightarrow x\in A \wedge x\in B$

$\Rightarrow x\in A\cap B$

因此 $C \subseteq A\cap B$

②⇒① $C \subseteq A\cap B \Rightarrow C \subseteq A\cap B \subseteq A \wedge C \subseteq A\cap B \subseteq B$

$\Rightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B$

因此 ① ⇔ ②

Date.

43. 设A，B，C，D为集合，判断下列命题是否为真，如果恒真请给出证明，否则请举一个反例

(1) $A\subseteq B \wedge C\subseteq D \Rightarrow A\cup C \subseteq B\cup D$ 真命题

证明： $\forall x \in A\cup C \Rightarrow x\in A \vee x\in C$

$\Rightarrow x\in B \vee x\in D$

$\Rightarrow x\in B\cup D$

因此，$A\cup C \subseteq B\cup D$

(2) $A\subset B \wedge C\subset D \Rightarrow A\cup C \subseteq B\cup D$ 假命题

$A=\{1\}$，$B=\{1,2\}$

$C=\{2\}$，$D=\{1,2\}$

45. 设A，B为任意集合，证明：

(1) $P(A)\cap P(B) = P(A\cap B)$

$\forall x$，$x\in P(A)\cap P(B) \Leftrightarrow x\in P(A) \wedge x\in P(B)$

$\Leftrightarrow x\subseteq A \wedge x\subseteq B$

$\Leftrightarrow x\subseteq A\cap B$

$\Leftrightarrow x\in P(A\cap B)$

(2) $P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$

$\forall x$，$x\in P(A)\cup P(B) \Leftrightarrow x\in P(A) \vee x\in P(B)$

$\Leftrightarrow x\subseteq A \vee x\subseteq B$

No.
Date.

$\Rightarrow x \subseteq A\cup B$

$\Leftrightarrow x \in P(A\cup B)$

因此 $P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$

(3) 举一反例，说明 $P(A)\cup P(B) = P(A\cup B)$ 对某些集合A和B是不成立的.

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $A\cup B=\{1,2\}$

$P(A)\cup P(B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}\}$

$P(A\cup B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

50. 设 $A=\{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$, 计算

(1) $P(A)$

$P(A) = \{\phi, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}, \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}\}$

(2) $P(\cup A)$

$\cup A = \{\phi, \{\phi\}\}$

$P(\cup A) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

(3) $\cup P(A)$

$\cup P(A) = \phi \cup \{\{\phi\}\} \cup \{\{\{\phi\}\}\} \cup \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$

$= \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$