1、不清楚什么是等价关系，主要问题：要求判断是等价关系时，只得到某一条性质时，就下结论是等价关系。

2、没弄明白传递性的定义。

3、不正确的命题，要求举例子，要写详细的过程，而不是列几个集合就完了。

4、商集、等价类

5、限制、像

6、划分是是一个集合

7、矩阵表示

$$a=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

8、3 题（1）最后两步不正确

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle \in (A\cap B)\times(C\cap D) &\Leftrightarrow x\in A\cap B \wedge y\in C\cap D \\ &\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B)\wedge(y\in C \wedge y\in D) \\ &\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in C)\wedge(x\in B \wedge y\in D) \\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in (A\times B)\wedge \langle x,y\rangle \in (C\times D) \\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in A\times B\cap C\times D \end{aligned}$$

故

$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

9、8 题少了一些元素

15 题倒数第四、第一的式子 不正确

$A[\{\{\emptyset\}\}]=\emptyset$　　$A[\{\{\emptyset\}\}]=\emptyset$

10、16 题第一个式子不正确：

$$R_1\circ R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle\}$$

第二次作业（第七章）

1. 已知 $A=\{\phi,\{\phi\}\}$，求 $A\times P(A)$

$P(A)=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$

$A\times P(A)=\{<\phi,\phi>,<\phi,\{\phi\}>,<\phi,\{\{\phi\}\}>,<\phi,\{\phi,\{\phi\}\}>,$
$<\{\phi\},\phi>,<\{\phi\},\{\phi\}>,<\{\phi\},\{\{\phi\}\}>,<\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}>\}$

3. 设 A, B, C, D 是任意集合，

(1) 求证 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

任取 $<x,y>$，

$<x,y>\in(A\cap B)\times(C\cap D)$

$\Leftrightarrow x\in A\cap B\wedge y\in C\cap D$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\wedge y\in C\wedge y\in D$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times C\wedge <x,y>\in B\times D$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times C)\cap(B\times D)$

(2) 下列等式中哪些成立？哪些不成立？对于成立的给出证明，对于不成立的举一反例。

$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

$(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

都不成立，例如取 $A=\{0\}$, $B=\{0,1\}$, $C=\{0\}$, $D=\{2\}$

$(A\cup B)\times(C\cup D)=\{0,1\}\times\{0,2\}=\{<0,0>,<0,1>,<1,0>,<1,2>\}$

$(A\times C)\cup(B\times D)=\{<0,0>\}\cup\{<0,2>,<1,2>\}$
$=\{<0,0>,<0,2>,<1,2>\}$

因此. $(A\cup B)\times(C\cup D)\neq(A\times C)\cup(B\times D)$

$(A-B)\times(C-D)=\phi\times\{0\}=\phi$

$(A\times C)-(B\times D)=\{\langle 0,0\rangle\}-\{\langle 0,2\rangle,\langle 1,2\rangle\}$

$=\{\langle 0,0\rangle\}$

因此 $(A-B)\times(C-D)\neq(A\times C)-(B\times D)$

8. 列出集合

$A=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}\}$

上的包含关系

解: $R=\{\langle\phi,\phi\rangle,\langle\phi,\{\phi\}\rangle,\langle\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\rangle,$

$\langle\phi,\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}\rangle,$

$\langle\{\phi\},\{\phi\}\rangle,\langle\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\rangle,\langle\{\phi\},\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}\rangle,$

$\langle\{\phi,\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\rangle,\langle\{\phi,\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}\rangle,$

$\langle\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\},\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}\rangle\}$

9. 设 $A=\{1,2,4,6\}$, 列出下列关系R

(1) $R=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\wedge x+y\neq 2\}$

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,$
$\langle 2,6\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 6,1\rangle,\langle 6,2\rangle,$
$\langle 6,4\rangle,\langle 6,6\rangle\}$

<2> $R=\{<x,y> \mid x,y \in A \wedge |x-y|=1\}$

$R=\{<1,2>, <2,1>\}$

<3> $R=\{<x,y> \mid x,y \in A \wedge \frac{x}{y} \in A\}$

$R=\{<1,1>, <2,1>, <4,1>, <6,1>, <2,2>, <4,2>, <4,4>, <6,6>\}$

<4> $R=\{<x,y> \mid x,y \in A \wedge y$ 为素数$\}$

$R=\{<1,2>, <2,2>, <4,2>, <6,2>\}$

13. 设 $A=\{<1,2>, <2,4>, <3,3>\}$

$B=\{<1,3>, <2,4>, <4,2>\}$

求 $A\cup B$, $A\cap B$, $\mathrm{dom}A$, $\mathrm{dom}B$, $\mathrm{dom}(A\cup B)$, $\mathrm{ran}A$, $\mathrm{ran}B$, $\mathrm{ran}(A\cap B)$, $f\mathrm{ld}(A-B)$

解: ① $A\cup B=\{<1,2>, <2,4>, <3,3>, <1,3>, <4,2>\}$

② $A\cap B=\{<2,4>\}$

③ $\mathrm{dom}A=\{1,2,3\}$

④ $\mathrm{dom}B=\{1,2,4\}$

⑤ $\mathrm{dom}(A\cup B)=\{1,2,3,4\}$

⑥ $\mathrm{ran}A=\{2,3,4\}$

⑦ $\mathrm{ran}B=\{2,3,4\}$

⑧ $\mathrm{ran}(A\cap B)=\{4\}$

No.
Date.

⑨ $A-B=\{\langle 1,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$fld(A-B) = dom(A-B) \cup ran(A-B)$

$= \{1,3\} \cup \{2,3\}$

$= \{1,2,3\}$

15. 设 $A=\{\langle\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\rangle, \langle\{\phi\},\phi\rangle\}$

求 A^{-1}, A^2, A^3, $A\restriction\{\phi\}$, $A[\phi]$, $A\restriction\phi$, $A\restriction\{\{\phi\}\}$, $A[\{\{\phi\}\}]$.

解: ① $A^{-1}=\{\langle\{\phi,\{\phi\}\},\phi\rangle, \langle\phi,\{\phi\}\rangle\}$

② $A^2 = A\circ A = \{\langle\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\rangle\}$

③ $A^3 = \phi$

④ $A\restriction\{\phi\} = \{\langle\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\rangle\}$

⑤ $A[\phi] = \phi$

⑥ $A\restriction\phi = \phi$

⑦ $A\restriction\{\{\phi\}\} = \{\langle\{\phi\},\phi\rangle\}$

⑧ $A[\{\{\phi\}\}] = \{\phi\}$

16. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，R_1, R_2 为A上的关系，其中

$R_1=\{<a,a>, <a,b>, <b,d>\}$

$R_2=\{<a,d>, <b,c>, <b,d>, <c,b>\}$

求 $R_1 \circ R_2$，$R_2 \circ R_1$，R_1^2，R_2^3

解：① $R_1 \circ R_2=\{<a,d>, <a,c>\}$

② $R_2 \circ R_1=\{<c,d>\}$

③ $R_1^2=\{<a,a>, <a,b>, <a,d>\}$

④ $R_2^3=R_2 \circ R_2 \circ R_2$

$=\{<b,b>, <c,c>, <c,d>\} \circ R_2$

$=\{<b,c>, <b,d>, <c,b>\}$

19题. 设 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，定义A上的关系

$R=\{<x,y> \mid x,y \in A \wedge x+y=10\}$

说明R具有哪些性质并说明理由.

解: $R=\{<1,9>, <2,8>, <3,7>, <4,6>, <5,5>, <9,1>, <8,2>, <7,3>, <6,4>\}$

观察知R只有对称性.

说明：① 因为 $1+1 \neq 10$，即 $<1,1> \notin R$，因此R不是自反的.（也可以选别的元素进行说明。

② 因为 $<5,5>\in R$，因此 R 不是反自反的.

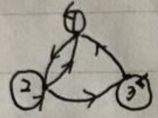
③ 由于 $<1,9>,<9,1>\in R$，因此 R 不是反对称的

④ 由于 $xRy \Leftrightarrow x+y=0 \Rightarrow y+x=10 \Rightarrow yRx$，因此R是对称的

⑤ 由于 $<1,9>,<9,1>\in R$，但 $<1,1>\notin R$，因此 R 不是传递的

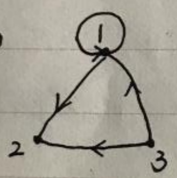
21. 设 $A=\{1,2,3\}$. 图 7.11 给出了12种 A上的关系，对于每种关系写出相应的关系矩阵，并说明它的性质.

解:

(a) 

$M_a=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，计算 $M_a^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

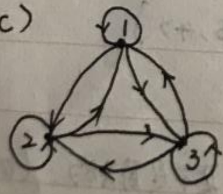
是自反的（因为主对角线元素全是1）

(b) 

$M_b=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$. $M_b^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

是反对称的（因为满足 $r_{ij}=1$ 且 $i\neq j$ 则 $r_{ji}=0$）

是传递的（因为对 M_b^2 中1所在的位置，M_b 中相应的位置都是1）

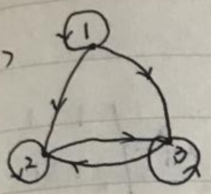
(c) 

$M_c=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $M_c^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

是自反的（主对角线元素全是1）

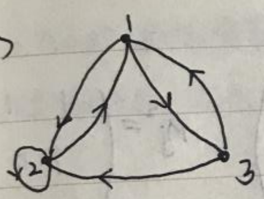
是对称的（Mc是对称矩阵）

是传递的（对M_c^2中1所在的位置，M_c中相应的位置都是1）

(d) 

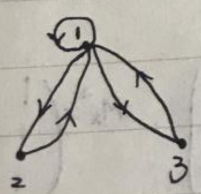
$$M_d=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad M_d^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

是自反的，传递的

(e) 

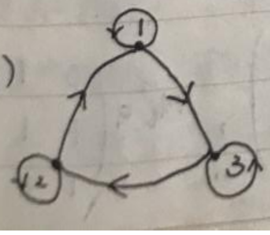
$$M_e=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix},\quad M_e^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

不具有任何性质

(f) 

$$M_f=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad M_f^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

是对称的

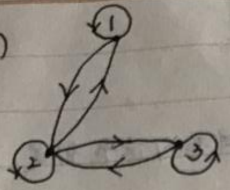
(g) 

$$M_g=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad M_g^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

是自反的，反对称的

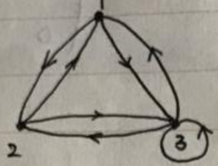
No.

Date.

(h) 

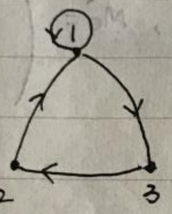
$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_h^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是自反的，对称的

(i) 

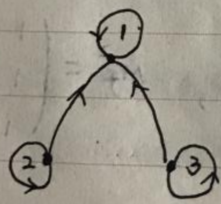
$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是对称的.

(j) 

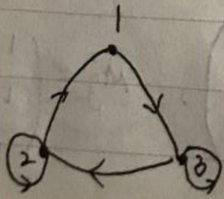
$$M_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_j^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是反对称的

(k) 

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_k^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是自反的，反对称的，传递的

(l) 

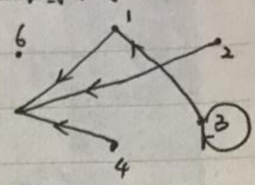
$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_l^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是反对称的.

$\boxed{24}$ 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，R为A上的关系，R的关系图如图所示．

(1) 求R^2，R^3的集合表达式

(2). 求 $r(R)$，$t(R)$，$s(R)$ 的集合表达式



解：由图得到 R的集合表达式如下

(1) $R = \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,5\rangle\}$

$R^2 = \{\langle 3,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^3 = \{\langle 3,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$r(R) = R \cup I_A$

(2) $r(R) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,5\rangle\}$

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

$t(R) = \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 3,5\rangle\}$

$s(R) = R \cup R^{-1}$

$s(R) = \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 5,4\rangle\}$

No.
Date.

26. 对于给定的A和R，判断R是否为A上的等价关系。

(1) A为实数集，$\forall x,y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x-y=2$.

不是等价关系，因为 $<1,1> \notin R$，R不是自反的

或者 $<4,2> \in R$，但 $<2,4> \notin R$，R不是对称的

或者 $<4,2> \in R$，$<2,0> \in R$，但 $<4,0> \notin R$，不是传递的

(2) $A=\{1,2,3\}$，$\forall x,y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x+y \neq 3$

不是等价关系，因为 $<3,1> \in R$，$<1,3> \in R$，但 $<3,3> \notin R$，不是传递的.

(3) $A=Z^+$，即正整数集，$\forall x,y \in A$，$xRy \Leftrightarrow xy$是奇数

不是等价关系，因为 $<2,2> \notin R$，R不是自反的.

(4) $A=P(X)$，$|X| \geq 2$，$\forall x,y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x \subseteq y \vee y \subseteq x$

不是等价关系，例如 $X=\{0,1\}$，

$A=P(X)=\{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

$x=\{0\}$，$y=\{0,1\}$；$z=\{1\}$

则有 xRy，yRz，但是 $x \not R z$，即不是传递的

(5) $A=P(X)$，$C \subseteq X$，$\forall x,y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x \oplus y \subseteq C$

是等价关系，因为 ① $\forall x, x \in A$，由于 $x \oplus x = \phi \subseteq C$ 即 $<x,x> \in R$ 因此，R是自反的

② $\forall <x,y>$，$<x,y> \in R \Rightarrow x \oplus y \subseteq C \Rightarrow y \oplus x \subseteq C \Rightarrow <y,x> \in R$.

因此R是对称的.

No.
Date.

③ $\forall \langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle$， $\langle x,y\rangle\in R \wedge \langle y,z\rangle\in R$

$\Rightarrow x\oplus y\subseteq C \wedge y\oplus z\subseteq C$

$\Rightarrow x\oplus z = x\oplus z\oplus\phi$

$\Rightarrow x\oplus z\oplus(y\oplus y)$

$\Rightarrow (x\oplus y)\oplus(y\oplus z)$

$= [(x\oplus y)\cup(y\oplus z)]-[(x\oplus y)\cap(y\oplus z)]$

$\subseteq (x\oplus y)\cup(y\oplus z)$

$\subseteq C\cup C$

$= C$

因此 $\langle x,z\rangle\in R$，R是传递的

$\boxed{30}$ 设 $A=\{1,2,3,4\}$，在 $A\times A$ 上定义二元关系R

$\forall\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\in A\times A$，$\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle \Leftrightarrow u+y=x+v$

(1) 证明R是 $A\times A$ 上的等价关系

(2) 确定由R引起的对 $A\times A$ 的划分

(1) 证明：因为 $\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle \Leftrightarrow u+y=x+v \Leftrightarrow u-v=x-y$

① $\forall\langle x,y\rangle\in A\times A$

$\langle x,y\rangle\in A\times A \Leftrightarrow x-y=x-y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$

R是自反的

② $\forall\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle$

$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle \Leftrightarrow x-y=u-v \Leftrightarrow u-v \Leftrightarrow x-y$

$\Leftrightarrow \langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle$

R是对称的.

No.
Date.

③ $\forall \langle x,y\rangle, \langle u,v\rangle, \langle g,h\rangle$

$$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle \wedge \langle u,v\rangle R\langle g,h\rangle \Leftrightarrow x-y=u-v \wedge u-v=g-h$$
$$\Leftrightarrow x-y=g-h$$
$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle R\langle g,h\rangle$$

R是传递的

(2) $A\times A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,$
$\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,$
$\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

根据有序对$\langle x,y\rangle$的差$x-y$来划分

$\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ 满足 $x-y=0$

$\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\}$ 满足 $x-y=-1$

$\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$ 满足 $x-y=-2$

$\{\langle 1,4\rangle\}$ 满足 $x-y=-3$

$\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$ 满足 $x-y=1$

$\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ 满足 $x-y=2$

$\{\langle 4,1\rangle\}$ 满足 $x-y=3$

因此，由R引起的对$A\times A$的划分为

$$\pi=\{\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\},\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\},$$
$$\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\},\{\langle 1,4\rangle\},\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle\},$$
$$\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\},\{\langle 4,1\rangle\}\}$$

No.
Date.

31 设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，R是A上的关系，且 $R=\{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle e,f\rangle\}$

设 $R^*=tsr(R)$，则 R^* 是 A上的等价关系。

$$\begin{cases} r(R)=R\cup I_A \\ t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots \\ s(R)=R\cup R^{-1} \end{cases}$$

(1) 给出 R^* 的关系矩阵

(2) 写出商集 A/R^*

(1) 已知 $R=\{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle e,f\rangle\}$

自反闭包：$r(R)=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle f,f\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle e,f\rangle\}$

对称闭包 $sr(R)=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle f,f\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle e,f\rangle, \langle f,e\rangle\}$

传递闭包 $R^*=tsr(R)=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle f,f\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle e,f\rangle, \langle f,e\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}$

因此 R^* 的关系矩阵如下

$$M_{R^*}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 商集 $A/R^*=\{\{a,b,c\}, \{d\}, \{e,f\}\}$

(2) $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$ $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$. $\{\langle 4,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$

$\{\langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}$. $\{\langle 4,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

31. (1) $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $t(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$s(tR) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $R^* = tsr(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2). $A/R^* = \{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$.

31. 解: $r(R) = R \cup R^0 = R \cup I_A = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle e,f\rangle, \langle f,f\rangle\}$.

$s(r(R)) = r(R) \cup r^{-1}(R) = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle e,f\rangle, \langle f,e\rangle, \langle f,f\rangle\}$.

$t(s(r(R))) = s(r(R)) \cup s^2(r(R)) \cup s^3(r(R)) \cup \cdots$

$= \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle e,f\rangle, \langle f,e\rangle, \langle f,f\rangle\}$.

$R^* = tsr(R) = t(s(r(R)))$

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $A/R^* = \{\{a,b,c\}, \{d\}, \{e,f\}\}$.