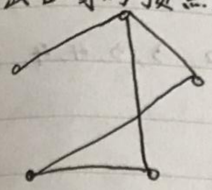
# 第九章

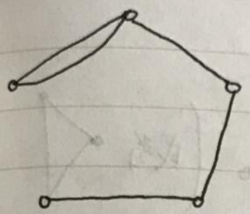
3. 写出各图的顶点度数，对有向图还要写出出度和入度

(a)



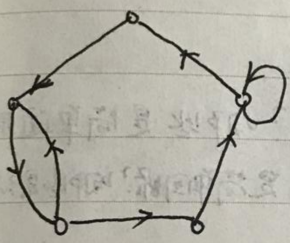
顶点度数为：1，3，2，2，2

(b).



顶点度数为：2，3，2，2，1

(c)



出度：1，1，2，1，2

入度：2，1，2，1，1

度数：3，2，4，2，3

5. 设无向图G有10条边，3度和4度顶点各两个，其余顶点的度数均小于3. G中至少有几个顶点？在最小顶点的情况下，写出各顶点的度数及$\Delta(G)$，$\delta(G)$.

解：设G有n个顶点，由题意，分别有2个3度和2个4度顶点，其余顶点的度数均小于3，即小于等于2，由握手定理知

$$2\times10 \le 2\times3+2\times4+(n-4)\times2 = 2n+6$$

$$\Rightarrow n \ge 7$$

No.
Date.

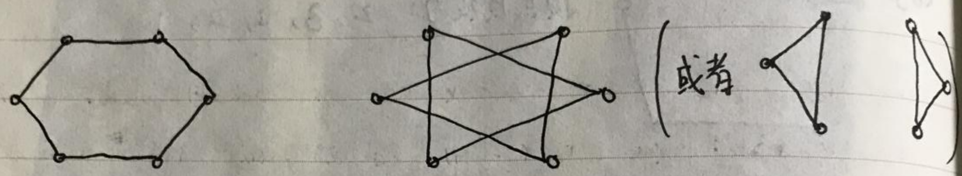
因此，G中至多有7个顶点。

当G中有7个顶点时，其度数为 2，2，2，3，3，4，4。则有

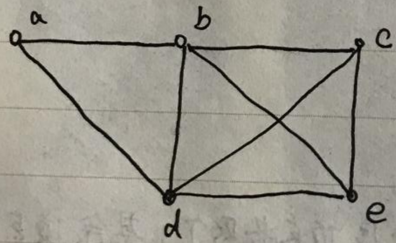
$\Delta(G)=4$，$\delta(G)=2$，

20. 6阶2-正则图有几种非同构的情况

两种。



21题：图中，下述顶点序列是否构成通路？哪些是简单通路？哪些是初级通路？哪些是回路？哪些是简单回路？哪些是初级回路？



(1) a, b, c, d, b, e

(2) a, b, e, d, b, a

(3) a, d, c, e, b

(4) d, b, a, c, e

(5) a, b, c, d, e, b, d, c

(6) a, d, b, e, c, b, d

(7) c, d, a, b, c

(8) a, b, c, e, b

通路：(1) (2) (3) (5) (6) (7) (8)

简单通路：(1) (3) (7) (8)

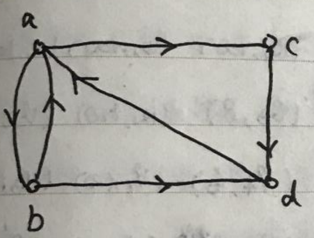
初级通路：(3) (7)

回路：(2) (7)

简单回路：(7)

初级回路：(7)

22、图中，下述顶点序列是否构成通路？哪些是简单通路？哪些是初级通路？哪些是回路？哪些是简单回路？哪些是初级回路？




(1) a, b, a　　(2) a, c, d, b, a

(3) a, c, d, a, b, d　　(4) a, b, d, a, b, a

通路：(1) (3) (4)

简单通路：(1) (3)

初级通路：(1)

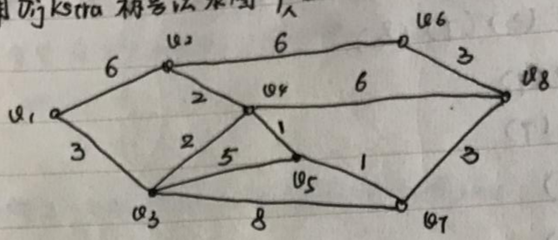
回路：(1) (4)

简单回路：(1)

初级回路：(1)

No.
Date.

23. 用Dijkstra标号法求图中从顶点$v_1$到各顶点的最短路径和距离




解:

| 步骤 | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(v_1,0)^{**}$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ |
| 2. | $(v_1,0)^{*}$ | $(v_1,6)$ | $(v_1,3)^{**}$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_1,+\infty)$ |
| 3 | $(v_1,0)^{*}$ | $(v_1,6)$ | $(v_1,3)^{*}$ | $(v_3,5)^{**}$ | $(v_3,8)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_3,11)$ | $(v_1,+\infty)$ |
| 4. | $(v_1,0)^{*}$ | $(v_1,6)^{**}$ | $(v_1,3)^{*}$ | $(v_3,5)^{*}$ | $(v_4,6)$ | $(v_1,+\infty)$ | $(v_3,11)$ | $(v_4,11)$ |
| 5 | $(v_1,0)^{*}$ | $(v_1,6)^{*}$ | $(v_1,3)^{*}$ | $(v_3,5)^{*}$ | $(v_4,6)^{**}$ | $(v_2,12)$ | $(v_3,11)$ | $(v_4,11)$ |
| 6. | $(v_1,0)^{*}$ | $(v_1,6)^{*}$ | $(v_1,3)^{*}$ | $(v_3,5)^{*}$ | $(v_4,6)^{*}$ | $(v_2,12)$ | $(v_5,7)^{**}$ | $(v_4,11)$ |
| 7 | $(v_1,0)^{*}$ | $(v_1,6)^{*}$ | $(v_1,3)^{*}$ | $(v_3,5)^{*}$ | $(v_4,6)^{*}$ | $(v_2,12)$ | $(v_5,7)^{*}$ | $(v_7,10)^{**}$ |
| 8 | $(v_1,0)^{*}$ | $(v_1,6)^{*}$ | $(v_1,3)^{*}$ | $(v_3,5)^{*}$ | $(v_4,6)^{*}$ | $(v_2,12)^{**}$ | $(v_5,7)^{*}$ | $(v_7,10)^{*}$ |

其中 * 表示永久标号，** 表示这一步选中的永久标号，其余均为临时标号，由表格最后一行，从$v_1$到其余各顶点的最短路径和距离如下：

$v_1v_2$，$d(v_1,v_2)=6$

$v_1v_3$，$d(v_1,v_3)=3$

$v_1v_3v_4$，$d(v_1,v_4)=5$

$v_1v_3v_4v_5$，$d(v_1,v_5)=6$

$v_1v_2v_6$，$d(v_1,v_6)=12$

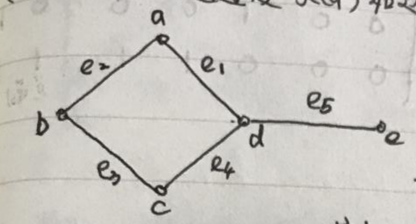
$v_1v_3v_4v_5v_7$，$d(v_1,v_7)=7$

$v_1v_3v_4v_5v_7v_8$，$d(v_4,v_8)=10$

26. 无向图G如图所示.

(1) 求G的全部点割集和边割集, 并指出其中的割点和桥(割边)

(2) 求G的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$




解: (1) 点割集: $\{d\}$, $\{a,c\}$

边割集: $\{e_5\}$, $\{e_1,e_3\}$, $\{e_2,e_4\}$, $\{e_1,e_2\}$, $\{e_3,e_4\}$, $\{e_1,e_4\}$.

其中, d为割点, $e_5$为桥

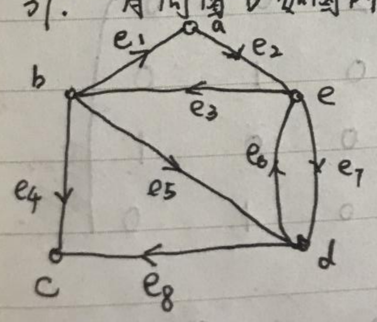
(2) 由(1)知 图G有割点和桥, 因此 $\kappa(G)=\lambda(G)=1$

27. 设G是n阶n+1条边的无向图, 证明G中存在顶点v, 使得 $d(v)\geq 3$.

证明: 用反证法, 即对于 $\forall v \in V(G)$, 都有 $d(v) \leq 2$, 则由握手定理得 $2m = 2(n+1) \leq 2n$, 矛盾.

因此, G中存在顶点v, 使得 $d(v) \geq 3$.

37. 有向图D如图所示, 问D是哪类连通图.



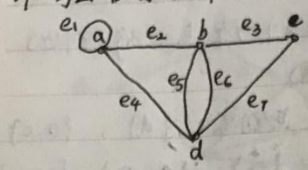

由定理9.7 图为强连通 ⇔ 图中存在经过每个顶点至少一次的回路.

注意到顶点c不在任何回路中, 因此可判断此图不是强连通的

由定理9.8. 图D为单向连通 ⇔ 图中存在经过每个顶点至少1次的通路. 如 $b e_1 a e_2 e e_7 d e_8 c$.

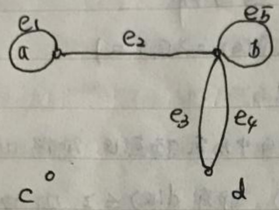
因此, 该图为单向连通图.

39. 写出各图的关联矩阵.




(a)

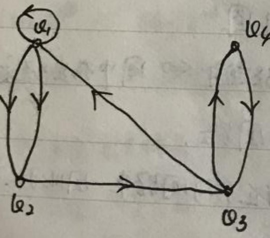
$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$




(b)

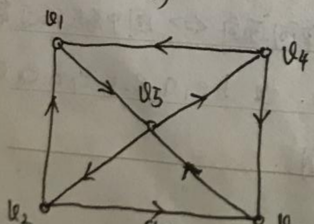
$$M_b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

40. 写出各图的邻接矩阵.




(a)

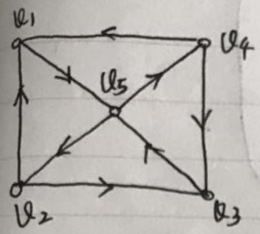
$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$




(b)

$$A_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

44. 有向图 D 如图所示，求 (1) $v_2$ 到 $v_5$ 长度为 1, 2, 3, 4 的通路数




(2) $v_5$ 到 $v_5$ 长度为 1, 2, 3, 4 的回路数

(3) D 中长度为 4 的通路数（含回路）

(4) D 中长度小于等于 4 的回路数

(5) 写出 D 的可达矩阵

解：图的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\2&0&2&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

No.

Date.

$$A^4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $v_2$到$v_5$长度为1, 2, 3, 4的通路数分别为 0条, [illegible]条, 0条, 0条

(2) $v_5$到$v_5$长度为1, 2, 3, 4的回路数分别为 0, 0, 4, 0

(3) D中长度为4的通路数为 32条

(4) D中长度小于等于4的回路数为 12条

(5) D的可达矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$