列出劳思表如下：

$$
\begin{array}{c|cc}
w^2 & 0.1967K & 3.213-0.0163K \\
w^1 & 0.787-0.1804K & 0 \\
w^0 & 3.213-0.0163K &
\end{array}
$$

根据劳思判据得系统稳定的条件为

$$0.1967K>0，\ 0.787-0.1804K>0，\ 3.213-0.0163K>0$$

则有系统稳定时，K 值范围为

$$0<K<4.3625$$

八、考察描述函数法确定非线性系统稳定、不稳定以及产生周期运动的条件

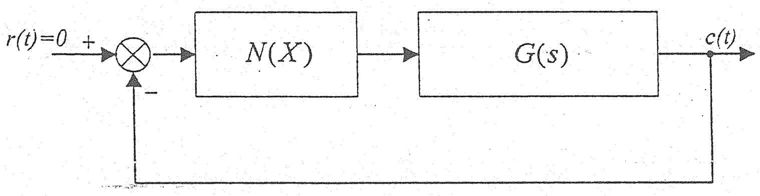
P187 ~ 194)

1、非线性系统如下图(a)所示，其中线性环节传递函数为 $G(s)=\dfrac{70}{s^2+10s+100}$，非线性环节的描述函数

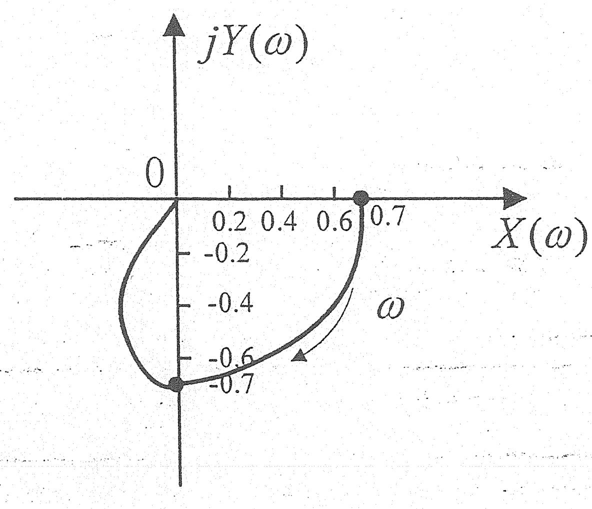
$$N=\frac{4}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2}-j\frac{4}{\pi X^2}，\quad X\geq 1$$

试用描述函数法判断系统是否发生自振（要求作图）。提示：频率特性 $G(j\omega)$ 如下图(b)所示。

（15分）



(a)



(b)

解：
$$N(X)=\frac{4}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{1}{X}\right)^{2}}-j\frac{4}{\pi X^{2}}=\frac{4}{\pi X^{2}}(\sqrt{X^{2}-1}-j)$$

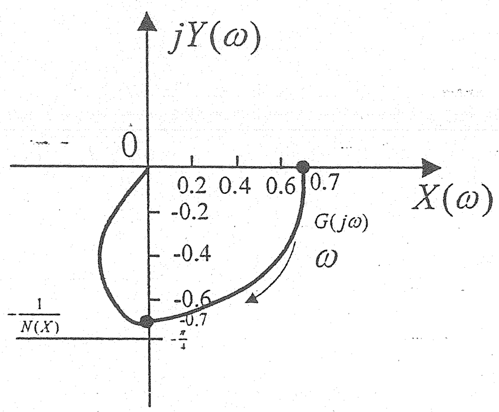
$$-\frac{1}{N(X)}=-\frac{\pi X^{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{X^{2}-1}-j}=-\frac{\pi X^{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{X^{2}-1}+j}{(\sqrt{X^{2}-1})^{2}+1}$$
$$=-\frac{\pi}{4}(\sqrt{X^{2}-1}+j)$$ ④

显然

$$\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{N(X)}\right]<0,\quad \forall X\geq 1$$
$$\mathrm{Im}\left[-\frac{1}{N(X)}\right]=-\frac{\pi}{4}=-0.7854,\quad \forall X$$ ⑤

已知频率特性$G(j\omega)$如图(b)所示，则画出$G(j\omega)$与$-1/N(X)$曲线如下图。

由图知，$G(j\omega)$与$-1/N(X)$无交点，故系统不会发生自振。 ③



图③

3. 设非线性系统如图 5 所示，其中参数K_1，K_2，T_1，T_2，M均为正。

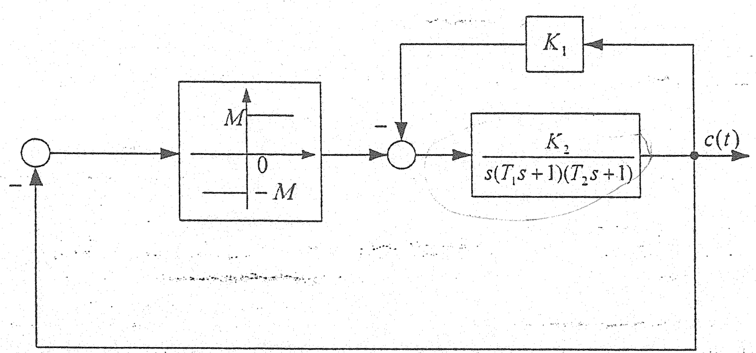


图 5 非线性系统

试确定系统发生自振时，各参数应满足的条件。已知理想继电特性的描述函数为$N(A)=\dfrac{4M}{\pi A}$。

解 将图示非线性系统化为典型结构

$$G(j\omega)=\frac{K_2}{j\omega(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1)+K_1K_2}$$
$$=\frac{K_2}{K_1K_2-(T_1+T_2)\omega^2+(1-T_1T_2\omega^2)j\omega}$$

$$-\frac{1}{N(A)}=-\frac{\pi A}{4M}$$

当 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$ 时，有

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)]=\frac{K_2}{K_1K_2-\left(\dfrac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right)}$$

令

$$-\frac{1}{N(A)}=\mathrm{Re}[G(j\omega)]$$

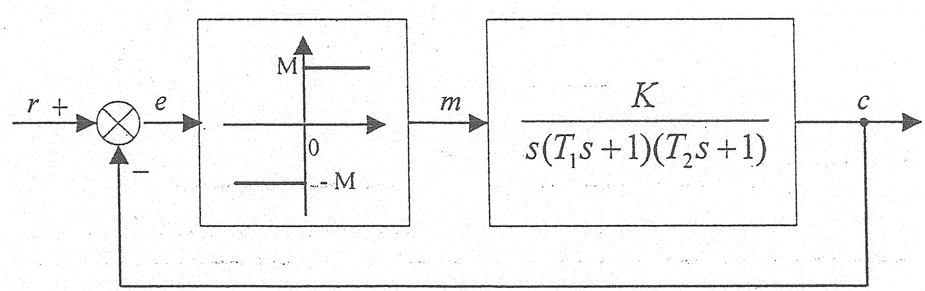
即

$$-\frac{\pi A}{4M}=\frac{K_2}{K_1K_2-\left(\dfrac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right)}$$

由此可知，使系统产生稳定自振时各参数应满足的条件为

$$K_1K_2<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$$

4、设非线性系统如下图所示，已知非线性环节的描述函数 $N=\dfrac{4M}{\pi X}$，且 $K>0,T_1>0,T_2>0$，试求极限环对应的振幅和频率。（15分）



解：由题意

$$-\frac{1}{N(X)}=-\frac{\pi X}{4M}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(jT_1\omega+1)(jT_2\omega+1)}$$ ②

令 $\angle G(j\omega)=-90^\circ-arctgT_1\omega-arctgT_2\omega=-180^\circ$

求出 $G(j\omega)$ 曲线与负实轴交点处的频率

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$$ ②

及相应幅值

$$|G(j\omega)|=\frac{T_1T_2K}{T_1+T_2}$$ ②

$G(j\omega)$ 曲线与 $-1/N(X)$ 曲线如下图所示，由图知，系统存在极限环，

极限环对应的频率为 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$ ②

极限环对应的振幅 $\dfrac{\pi X}{4M}=\dfrac{T_1T_2K}{T_1+T_2}$ $X=\dfrac{4MT_1T_2K}{\pi(T_1+T_2)}$ ②

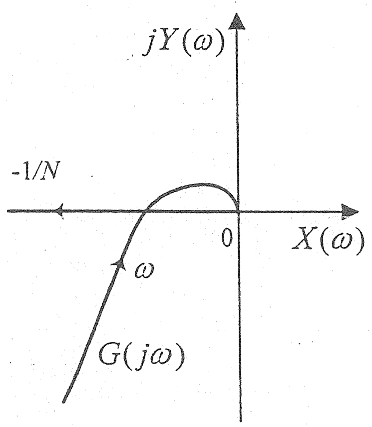
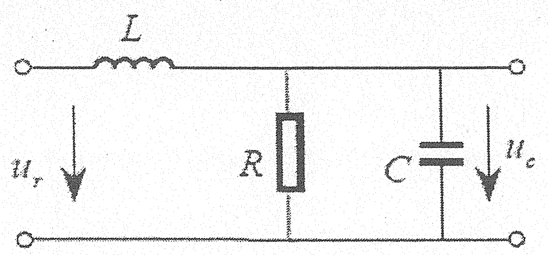


图 ⑤

其他考点

1、电路系统建模

1、列写下图所示RLC 网络的微分方程和传递函数，其中u_r为输入变量，u_c为输出变量。（15分）



解：令流过电感的电流为i，则有：$L\dfrac{di}{dt}+U_c=U_r, i=C\dfrac{dU_c}{dt}+\dfrac{U_c}{R}$　④分

所以有：$LC\dfrac{d^2U_c}{dt}+\dfrac{L}{R}\dfrac{dU_c}{dt}+U_c=U_r$　②分

传递函数为：　$G(s)=\dfrac{U_c(s)}{U_r(s)}=\dfrac{R}{RLCs^2+Ls+R}$　④分

2. 劳斯判据

1、已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{s+2}{s^2(s^3+2s^2+9s+10)}$$

用劳斯判据判断系统稳定性，如果不稳定，求系统在s右半平面根的个数及虚根值。（15 分）

解：总共 15 分，闭环特征方程正确得 3 分，劳斯表头两行正确得 2 分，后三行每行 2 分，结论正确得 3 分。

已知反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{s+2}{s^2(s^3+2s^2+9s+10)}$$

试用劳斯判据判别系统稳定性。若系统不稳定，指出位于右半 S 平面和虚轴上的特征根的数目。

解：闭环特征方程为：

$$s^5+2s^4+9s^3+10s^2+s+2=0$$

$$\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 9 & 1 \\
s^4 & 2 & 10 & 2 \\
s^3 & 4 & 0 & 0 \\
s^2 & 10 & 2 & \\
s^1 & -4/5 & 0 & \\
s^0 & -2 & &
\end{array}$$

第一列数的符号变化一次，所以有一特征根在右半平面。

$$\frac{-\frac{5}{2}-0}{-\frac{5}{4}}=-2$$

2、已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{8(3s^2+4s+6)}{s^3(s^2+3s+12)}$$

用劳斯判据判断系统稳定性，如果不稳定，求出系统 s 右半平面根的个数及虚根值。(20 分)

解：系统闭环特征方程为：

$$D(s)=s^3(s^2+3s+12)+8(3s^2+4s+6)=s^5+3s^4+12s^3+24s^2+32s+48=0$$ ④分

列出劳斯表为：

s^5	1	12	32	
s^4	3	24	48	
s^3	4	16		
s^2	12	48	辅助方程：$12s^2+48=0$，对应的解为：$s=\pm 2j$.	2*④=⑧分
s^1	24	$\cancel{48}$ 0		
s^0	48			

所以系统不稳定（临界稳定），④分 右半平面没有根，但纯虚根有两个，为 $s=\pm 2j$. ④分

2、已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{s+2}{s^2(s^3+2s^2+9s+10)}$$

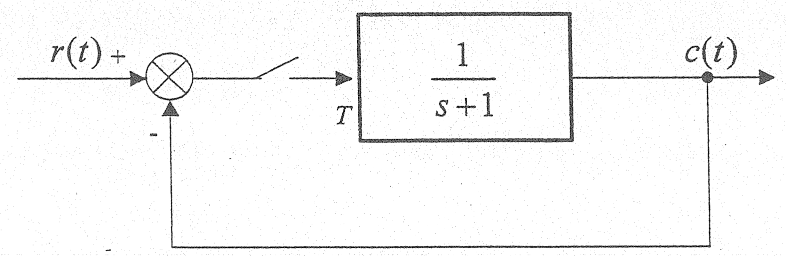
用劳斯判据判断系统稳定性，如果系统不稳定，求出系统在 s 右半平面的根的个数及虚根值。（15 分）

3. 正弦输入下稳态输出的计算

习题 5-1

4. 从框图求闭环脉冲传递函数，及确定单位阶跃信号作用下前几个时刻的输出

1、已知采样系统如下图所示，采样周期 $T=1s$，试求系统单位阶跃响应前 4 次的采样值。（15 分）



解：　　　系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=Z\left[\frac{1}{s+1}\right]=\frac{z}{z-e^{-T}}=\frac{z}{z-0.368} \qquad ②$$

闭环脉冲传递函数的 z 变换为

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{z}{2z-0.368} \qquad ②$$

输入的 z 变换

$$R(z)=\frac{z}{z-1} \qquad ②$$

则输出的 z 变换

$$C(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{z}{2z-0.368}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{2z^2-2.368z+0.368} \qquad ⑤$$

$$=0.5+0.592z^{-1}+0.609z^{-2}+0.612z^{-3}+0.613z^{-4}+\cdots$$

故得　$c(0)=0.5,\ c(T)=0.592,\ c(2T)=0.609,\ c(3T)=0.612,\ c(4T)=0.613$　④

5. 串联校正

1、设 I 型单位反馈系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{200}{s(0.1s+1)}$，若设计串联超前校正装置为 $G_c(s)=\dfrac{0.036s+1}{0.009s+1}$，画出校正前后系统的伯德图，求校正后系统的截至频率 ω_{c2} 和相角裕度 γ_2 并分析该校正装置的作用。（15 分）

解：未校正系统的伯德图如下图中的曲线 G_0，可以计算出其剪切频率 ω_{c1}。

$$20\lg(10/1)+40\lg(\omega_{c1}/10)=20\lg K=20\lg 200 \qquad ②$$

$$\omega_{c1}=\sqrt{2000}=44.72s^{-1}。 \qquad ②$$

于是未校正系统的相角裕度为

$$\gamma_0 = 180^\circ - 90^\circ - arctg\omega_{c1} = 90^\circ - arctg(44.72/10) = 11.96^\circ \qquad ②$$

引入串联超前校正网络 $G_c(s) = \dfrac{0.0316s+1}{0.0079s+1}$，则

$\alpha = 0.0316/0.0079 = 4$

$\alpha = \dfrac{W_2}{W_1}$　$W_1 = \dfrac{W_{c2}}{\sqrt{\alpha}}$　$W_2 = W_{c2}\sqrt{\alpha}$

在校正后系统剪切频率 $\omega_{c2} = \omega_m$ 处校正网络的增益应为

$$10\lg\alpha = 10\lg 4 = 40\lg\sqrt{2} = 6dB$$

$$\omega_{c2} = \omega_m = \sqrt{\alpha}\omega_1 = \sqrt{4}\times(1/0.0316) = 63.29\mathrm{s}^{-1} \qquad ②$$

$W_{c2} = \sqrt{0.0079\times0.0316}$

$W_{c2} = \sqrt{W_1 W_2}$ 或：$L_o(\omega) = -6dB = -40\lg(\omega_{c2}/\omega_{c1}) = -40\lg(\omega_{c2}/44.72)$，$\omega_{c2} = 44.72\times\sqrt{2} = 63.24s^{-1}$

经过超前校正，系统开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{10(0.0316s+1)}{s(0.1s+1)(0.0079s+1)}$$

其相角裕度为

$$\gamma_2 = 180^\circ - 90^\circ + arctg(0.0316*63.29) - arctg(0.1*63.29) - arctg(0.0079*63.29) \qquad ②$$
$$= 90^\circ + 63.43^\circ - 81.02^\circ - 26.56^\circ = 45.85^\circ$$

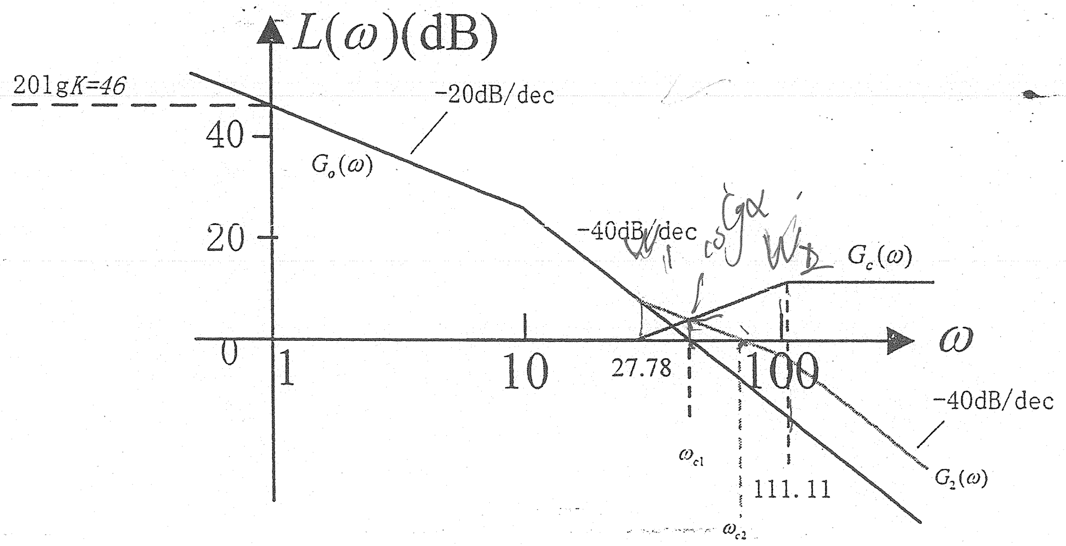
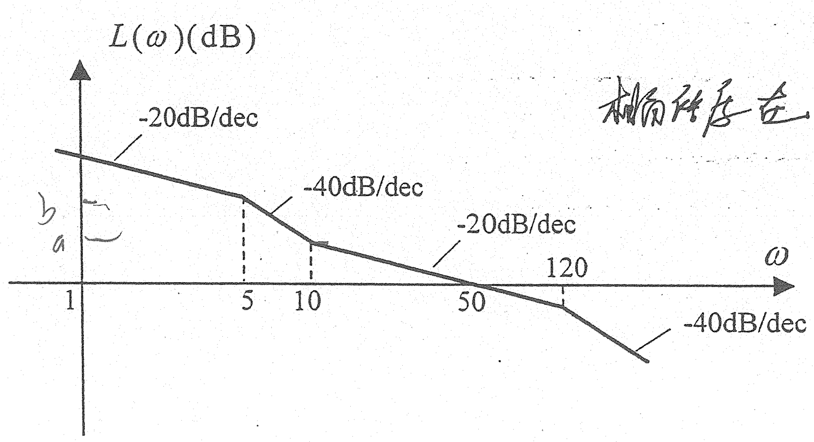


图 ⑤

2、已知单位负反馈系统的开环传递函数$G(s)$无右半平面的零点和极点，且$G(j\omega)$的对数幅频渐进特性如下图所示，试写出$G(s)$的表达式，并求出相角裕度、判断闭环系统的稳定性。 (15 分)



幅频特性 P(102) ∧ 104)

$\frac{y_1-0}{\lg 10-\lg 50}=-20$

$y_1=-20+20\lg 50$

$\frac{y_2-y_1}{\lg 5-\lg 10}=-40$

$y_2-y_1=-40\lg 5+40$

$y_2=-40\lg 5-20+20\lg 50+40$

$y_2=20-40\lg 5+20\lg 50$

解：$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s}\dfrac{\tau s+1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}=\dfrac{K}{s}\dfrac{\frac{1}{10}s+1}{\left(\frac{1}{5}s+1\right)\left(\frac{1}{120}s+1\right)}=\dfrac{K(0.1s+1)}{s(0.2s+1)(0.0083s+1)}$

$\frac{20\lg K-y_2}{\lg 1-\lg 5}=-20$

$\omega=1$ 时，$20\lg K=L(\omega)=20\lg\frac{5}{1}+40\lg\frac{10}{5}+20\lg\frac{50}{10}=20\lg 100$，

$K=100$

$20\lg K=-20\lg 5+20\lg 50-40\lg 5+20$

$=-20\lg 5+20\lg 50+20$

$=-20\lg 5+20\lg 5+20\lg 10+20$

$=40$

$k=100$

$$G(s)H(s)==\frac{100(0.1s+1)}{s(0.2s+1)(0.0083s+1)}$$

积分环节、一阶微分环节、一阶惯性环节各 ②

比例环节 ④

$\omega_c=50s^{-1}$ ①

$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)=180-90^\circ+arctg50/10-arctg50/5-arctg50/120$

$=90^\circ+78.69^\circ-84.29^\circ-22.62^\circ=61.79^\circ$

系统稳定 ④

3、已知最小相位系统的开环对数幅频渐进特性如下图所示，试写出$G(s)$的表达式，并求出相角裕度、判断闭环系统的稳定性。 (20 分)

P(90 ∧ 93)

其他题目

1. 已知系统信号流图如图 1 所示。试求出传递函数$C(s)/R(s)$及$C(s)/N(s)$。（16 分）

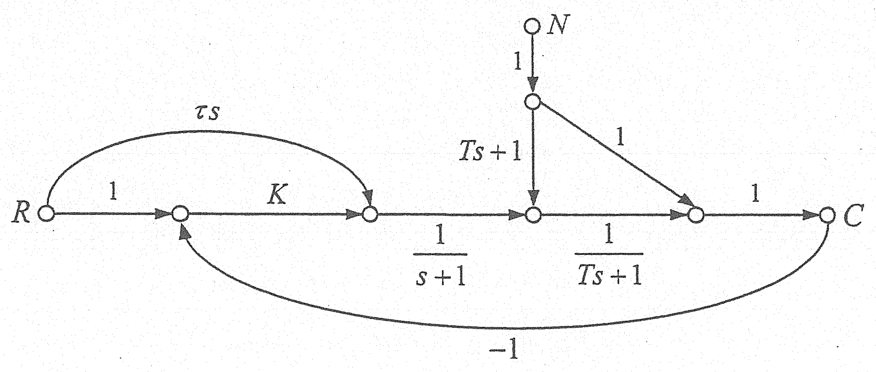


图 1 系统的信号流图

解：1）求$C(s)/R(s)$

由图可知，此时系统有两条前向通道，一个单独回路，即

$$L_1=-\frac{K}{(s+1)(Ts+1)},\qquad \Delta=1-L_1=1+\frac{K}{(s+1)(Ts+1)}$$

$$p_1=\frac{K}{(s+1)(Ts+1)},\qquad \Delta_1=1;$$

$$p_2=\frac{\tau s}{(s+1)(Ts+1)},\qquad \Delta_2=1$$

由梅森增益公式可得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\sum p_i\Delta_i}{\Delta}=\left(\frac{K+\tau s}{(s+1)(Ts+1)}\right)\Bigg/\left(1+\frac{K}{(s+1)(Ts+1)}\right)=\frac{\tau s+K}{(s+1)(Ts+1)+K}$$

2）求$C(s)/N(s)$

由图可知，此时系统有两条前向通道，一个单独回路，即

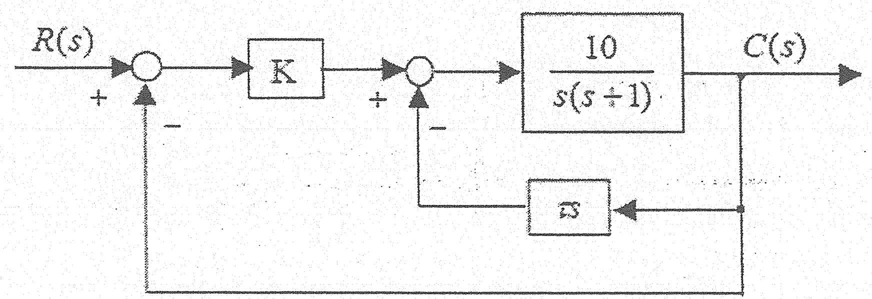
$$L_1=-\frac{K}{(s+1)(Ts+1)},\qquad \Delta=1-L_1=1+\frac{K}{(s+1)(Ts+1)}$$

$$p_1=1,\qquad \Delta_1=1;\qquad p_2=1,\qquad \Delta_2=1$$

由梅森增益公式可得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{\sum p_i\Delta_i}{\Delta}=2\Bigg/\left(1+\frac{K}{(s+1)(Ts+1)}\right)=\frac{2(s+1)(Ts+1)}{(s+1)(Ts+1)+K}$$

2、控制系统结构图如下图所示。要求系统单位阶跃响应的超调量$\sigma_p=16.3\%$，峰值时间$t_p=1s$。试确定K与τ的值。(15分) （$\sigma_p=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$，$t_p=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-\xi}\ \omega_n}$ ）



解：总共15分，ξ和ωn计算正确得5分，闭环传递函数正确得5分，结果正确得5分。

由$\sigma=e^{-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}=0.163$，$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}}=1$，可求得$\varsigma=0.5$，$\omega_n=3.63$弧度/秒。

系统的开环传递函数$G(s)$为

$$G(s)=\frac{10K}{s(s+(1+10\tau))}$$

系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{10K}{s^2+(1+10\tau)s+10K}$$

故

$$10K=\omega_n^2=3.63^2$$
$$1+10K=2\varsigma\omega_n=2\times0.5\times3.63$$

由此得到

$$K=1.32，\tau=0.263\text{秒}$$

$$G(s)H(s)=\frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+\frac{10\tau s}{s(s+1)}}$$

$$\frac{10K}{s^2+s+10\tau s}$$

闭环 $10K$

$$\sigma=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}.\quad t_p=\frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}},$$

$$G(s)H(s)=\frac{K\cdot\frac{10}{s(s+1)}}{1+\tau s\cdot\frac{10}{(s+1)s}}=\frac{10K}{s^2+s+10\tau s}=\frac{10K}{s^2+(10\tau+1)s}$$

$$s^2+(10\tau+1)s+10K=0.$$

$$\begin{cases}2w_n\xi=10\tau+1\\ w_n^2=10K\end{cases}\qquad \xi=0.5,\ w_n=3.63$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tau=\dfrac{2w_n\xi-1}{10}\\ K=\dfrac{w_n^2}{10}\end{cases}$$