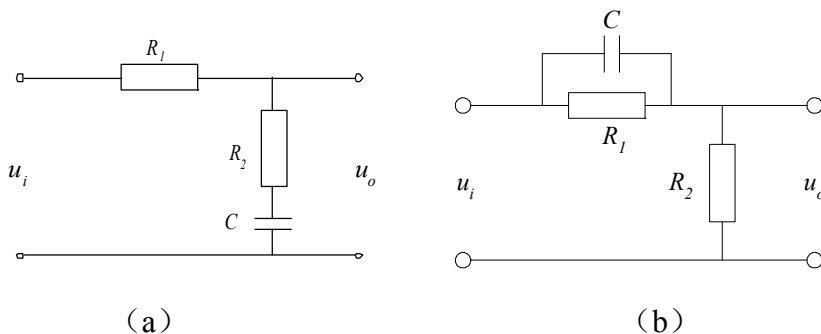


总复习例题

【例 2-1】求下图所示系统输入为 u_i ，输出为 u_o 时的传递函数 $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$



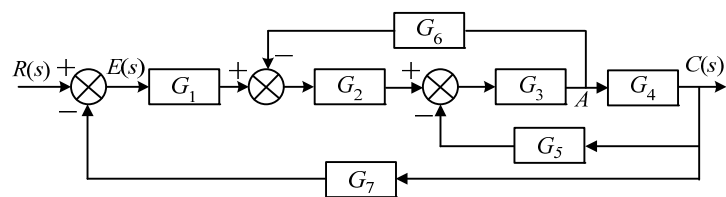
无源电网络

【解】 根据基尔霍夫定律，采用运算阻抗的方法，所以传递函数为

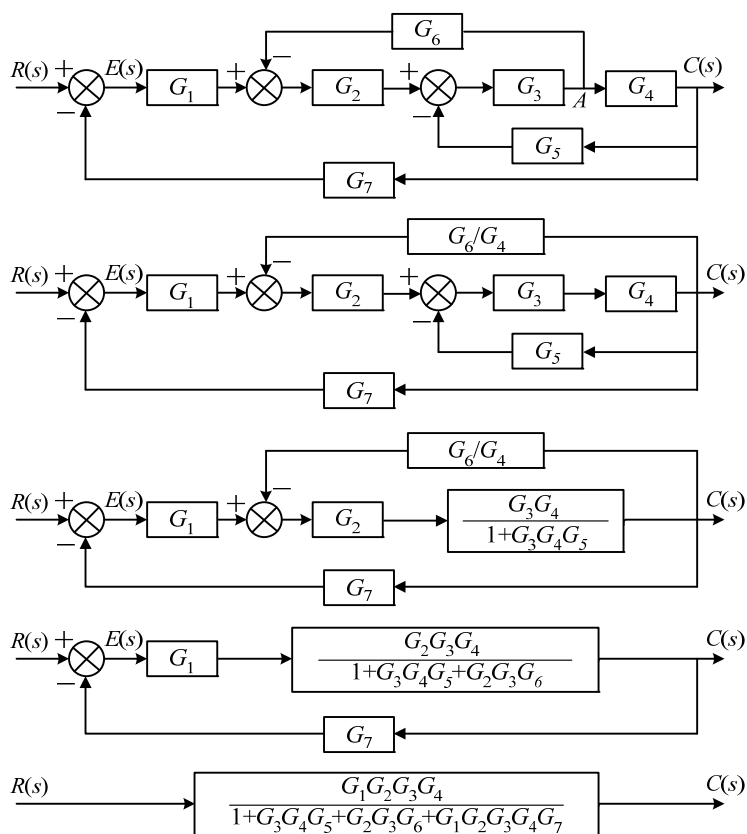
$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{U_o(s)}{U_i(s)} &= \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1} \\
 \text{(b)} \quad \frac{U_o(s)}{U_i(s)} &= \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_1R_2Cs + R_2}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}
 \end{aligned}$$

【提示】基尔霍夫定律的时域表示式为：对任一节点， $\Sigma i(t) = 0$ ；对任一回路， $\Sigma u(t) = 0$ 。电阻 R 的运算阻抗就是电阻 R 本身，电感 L 的运算阻抗是 Js ，电容 C 的运算阻抗是 $1/Js$ ，其中 s 为拉氏变换的复参量。把普通电路中的电阻 R 、电感 L 、电容 C 全换成相应的运算阻抗，把电流 $i(t)$ 和电压 $u(t)$ 全换成相应的拉氏变换式 $I(s)$ 和 $U(s)$ ，因此可得到根据拉氏变换的线性性质而得出基尔霍夫定律的运算形式为： $\Sigma I(s) = 0$ ；对任一回路， $\Sigma U(s) = 0$ 。于是我们可以采用普通的电路定律，如欧姆定律、基尔霍夫定律和电压定律，经过简单的代数运算，就可求解 $I(s)$ 、 $U(s)$ 及相应的传递函数。采用运算阻抗的方法又称为运算法，相应的电路图称为运算电路。

【例 2-2】试化简如图所示系统的方框图，并求系统传递函数。



【解】 用方框图等效变换法求解，A 点后移，得

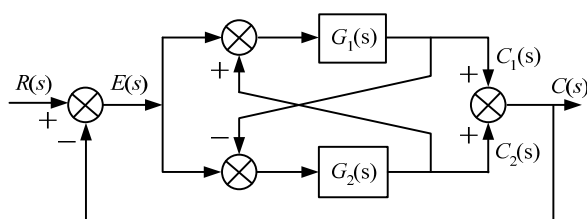


所以，传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}$$

【提示】：等效变换时，应将分支点（相加点）向另外的分支点（相加点）移动，一般不宜向另外的相加点（分支点）移动。

【例 2-3】化简下面方框图，求系统传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。



方框图

【解】

采样梅逊公式，有 4 条前向通道和 5 个回环。

4 条前向通道

$$P_1 = G_1(s), \quad P_2 = -G_1(s)G_2(s), \quad P_3 = G_2(s), \quad P_4 = G_1(s)G_2(s)$$

5 个回环

$$\sum L_i = -G_1(s) - G_2(s) - G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_2(s) - G_1(s)G_2(s)$$

特征式

$$\Delta = 1 - \sum L_i = 1 + G_1(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)$$

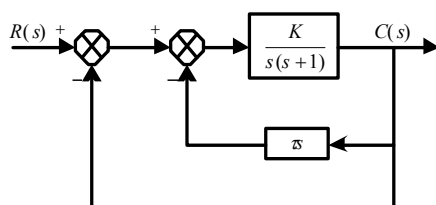
4 条前向通道对应的余因子

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1$$

由此可得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)}$$

例【3.1】设某控制系统方框图如图所示，欲保证阻尼比 $\xi = 0.7$ 和响应单位斜坡函数的稳态误差 $e_{ss} = 0.25$ ，试确定系统参数 K 、 τ 。



系统结构图

解 由图求得系统的开环传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1) + K\tau s} = \frac{K}{s(s + K\tau + 1)}$$

注意：系统开环传递函数不能写成

$$G(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(s+1)}$$

对于 I 型系统， $r(t) = t$ 作用下系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{K\tau + 1}{K} = 0.25$$

给定系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + (1 + K\tau)s + K}$$

所以

$$\omega_n = \sqrt{K}$$

$$2\zeta\omega_n = 1 + K\tau$$

按题意 $\zeta = 0.7$ ，求得

$$1.4\sqrt{K} = 1 + K\tau$$

最终解出待确定参数

$$K = 31.36$$

$$\tau = 0.186$$

例【3.2】 讨论特征方程

$$126s^3 + 219s^2 + 258s + 85 = 0$$

问其中有多少根的实部落在开区间 $(0, -1)$ 内？

解 分析 系统特征根有 3 个。首先用劳斯判据判断有几个根不在 s 左半平面，然后再作代换 $s = s' - 1$ ，判断有几个根不在 $s = -1$ 之左面，便可得出结论。

列劳斯表

s^3	126	258
s^2	219	85
s^1	290.1	
s^0	85	

可见在 s 右半平面不存在不稳定根。令 $s = s' - 1$ 代入特征方程整理后有

$$126s'^3 - 159s'^2 + 225s' - 107 = 0$$

列劳斯表

s^3	126	258
s^2	-159	-107
s^1	140.2	
s^0	-107	

可见第一列元素变号 3 次，3 个根全部位于 $s = -1$ 的右面。

因此得出结论：3 个根的实部全部位于开区间 $(-1, 0)$ 之内。

例 4-1 设负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_1(s+1)}{s^2(s+10)}$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解 渐近线与实轴的交点： $\sigma_a = \frac{-10+1}{3-1} = -4.5$

渐近线与实轴正方向的夹角为： $\pm 90^\circ$

分离点与会合点，由

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{s^2(s+10)}{s+1} \right) = \frac{s(2s^2 + 13s + 20)}{(s+1)^2} = 0$$

或

$$\frac{2}{s_d} + \frac{1}{s_d + 10} = \frac{1}{s_d}$$

得

$$2s^2 + 13s + 20 = 0$$

$$s_1 = -2.5$$

$$s_2 = -4$$

可以验证这两个点均为根轨迹上的点。

从而根轨迹图如图 4-1 所示。注意该题的根轨迹不要画成图 4-2 的形式

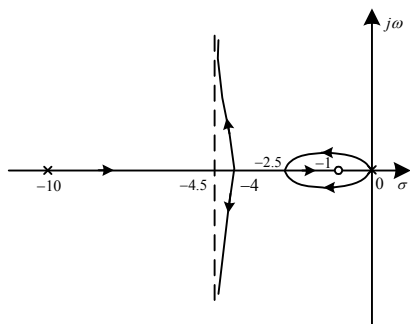


图 4-1

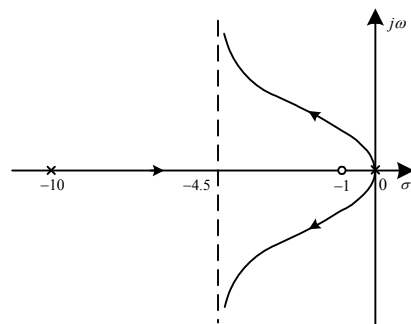
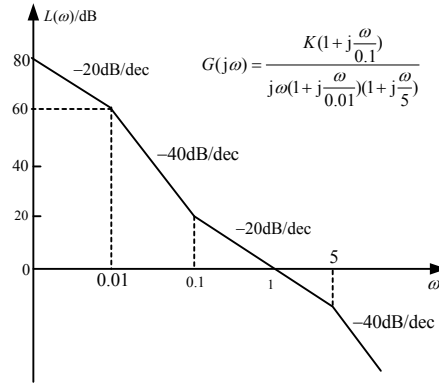


图 4-2

【例 5.1】 设一单位反馈系统开环对数幅频特性如图所示(最小相位系统)。(1) 写出系统的开环传递函数；(2)判别系统的稳定性；(3)如果系统是稳定的，则求 $r(t) = t$ 时的稳态误差。



开环对数幅频特性

解 (1) 由图得开环传递函数形式为

$$G(s) = \frac{K(1 + \frac{s}{0.1})}{s(1 + \frac{s}{0.01})(1 + \frac{s}{5})}$$

其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\frac{\omega}{0.1})}{j\omega(1 + j\frac{\omega}{0.01})(1 + j\frac{\omega}{5})}$$

下一步求 K 。

方法一：

由于

$$L(\omega_c = 1) = 0$$

所以

$$\begin{aligned} 0 = L(\omega)|_{\omega=1} &= 20 \lg K + 20 \lg \sqrt{1 + (\frac{1}{0.1})^2} - 20 \lg 1 - 20 \lg \sqrt{1 + (\frac{1}{0.01})^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (\frac{1}{5})^2} \\ &\approx 20 \lg K + 20 \lg \sqrt{0 + (\frac{1}{0.1})^2} - 20 \lg 1 - 20 \lg \sqrt{0 + (\frac{1}{0.01})^2} - 20 \lg \sqrt{1 + 0} \end{aligned}$$

解得

$$K = 10$$

方法二：

$$\lg K = \lg 1 + (\lg 0.1 - \lg 0.01) = \lg 10$$

所以，开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(1+10s)}{s(1+100s)(1+0.2s)}$$

(2) 由于是最小相位系统，因而可通过计算相位裕度是否大于零来判断系统的稳定性。

由图可知 $\omega_c = 1$

$$\varphi(\omega_c) = -90^\circ + \arctg \frac{1}{0.1} - \arctg \frac{1}{0.01} - \arctg \frac{1}{5} = -106.4^\circ$$

则得

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 73.6^\circ$$

系统稳定。

(3) 单位斜坡输入时，系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{10} = 0.1$$

【例 5.2】 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{3}{s(s+1)(s+3)}$$

绘出乃氏图，并用乃氏稳定判据判断闭环系统的稳定性。

解 开环幅频特性和相频特性分别为

$$A(\omega) = \frac{3}{\omega \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{9+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega - \arctg(\omega/3)$$

起点： $\omega = 0^+$ 时， $A(\omega) = \infty, \varphi(\omega) = -90^\circ - \Delta$ ， Δ 为正的很小量，故乃氏图起点在第 III 象限；

终点： $\omega = +\infty$ 时， $A(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -270^\circ + \Delta$ ，故在第 II 象限趋向终点 $(0, j0)$ 。

由于系统开环传递函数有 1 个极点在 s 平面的原点处，因此乃氏回线中半径为无穷小量的半圆弧对应的映射曲线是一个半径为无穷大的圆弧，即

$$\omega: 0^- \rightarrow 0^+; \quad \theta: -90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow +90^\circ; \quad \varphi: +90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow -90^\circ$$

乃氏图如下图所示。

与负实轴交点处的频率和幅值为

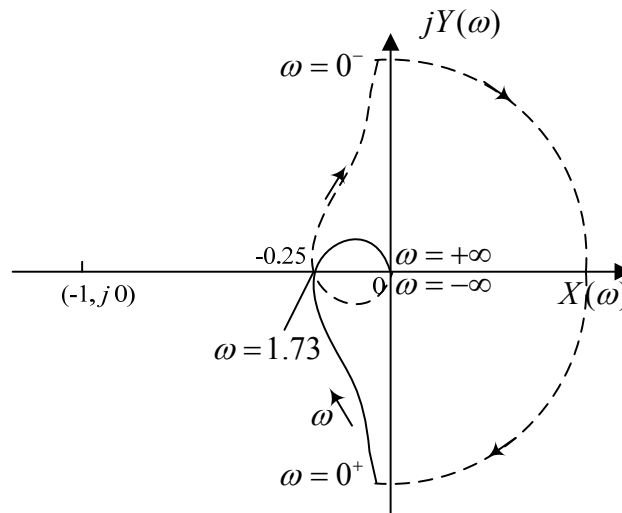
$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan(\omega/3) = -180^\circ$$

$$\arctan \omega + \arctan(\omega/3) = 90^\circ$$

$$\frac{\omega^2}{3} = 1 \text{ 或 } \frac{\omega + (\omega/3)}{1 - \omega \cdot \omega/3} = \infty, \quad \omega = \sqrt{3} = 1.73$$

$$A(\omega) = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{(1+3)(9+3)}} = \frac{3}{12} = 0.25$$

因为 s 平面右半部的开环极点数 $P=0$ ，且乃氏曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，即 $N=0$ ，则 $Z=P-N=0$ ，所以系统稳定。



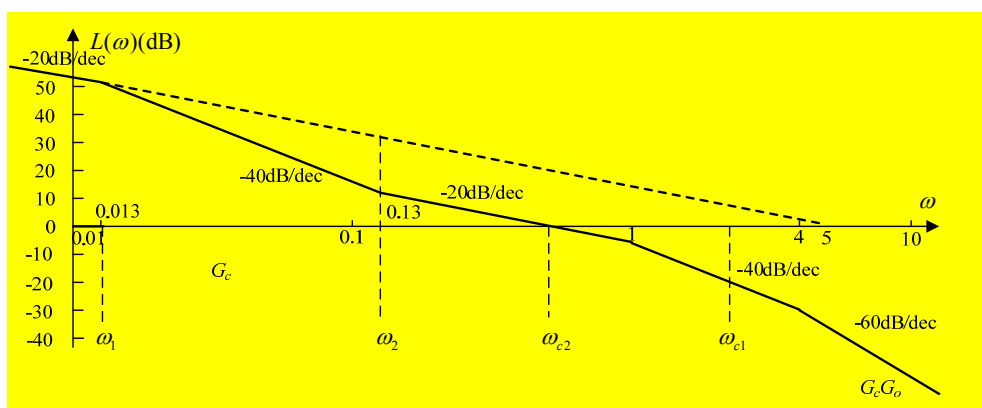
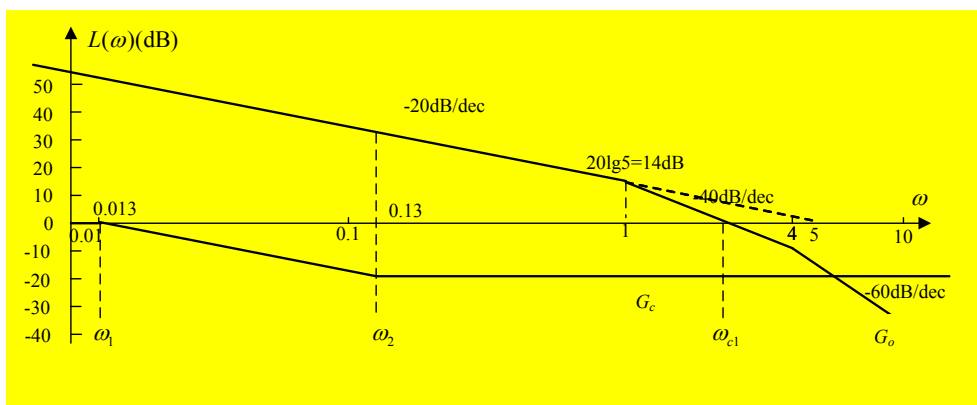
例 6.1 设单位反馈系统原有部分的开环传递函数和串联迟后校正装置分别为

$$G_o(s) = \frac{5}{s(s+1)(0.25s+1)} \text{ 和 } G_c(s) = \frac{7.7s+1}{77s+1}$$

画出系统校正后的 Bode 图，计算系统校正前后的相角裕度，分析校正装置对系统性能（稳定性、动态性能和噪声抑制能力）的影响。

解：

(1) 系统校前、正后的开环传递函数伯德图如图中 G_o 和 $G_c G_o$ 所示。



(2) 未校正系统的剪切频率 ω_{c1} 为

$$\frac{0 - 20 \lg 5}{\lg \omega_{c1} - \lg 1} = -40 \quad \omega_{c1} = \sqrt{5} = 2.24 \text{ s}^{-1}$$

相应的相角稳定裕度为

$$\gamma_0 = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \omega_{c1} - \arctg 0.25 \omega_{c1} = 90^\circ - \arctg 2.24 - \arctg 0.56 = -5.19^\circ$$

说明未校正系统是不稳定的。

(3) 校正环节 $G_c(s) = \frac{7.7s+1}{77s+1}$, 一个相位滞后校正环节。校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{5(7.7s+1)}{s(77s+1)(s+1)(0.25s+1)}$$

校验校正后系统的剪切频率 ω_{c2} 为

$$L(\omega_{c2}) = 0 = 20 \lg 5 + 20 \lg 7.7 \omega_{c2} - 20 \lg \omega_{c2} - 20 \lg 77 \omega_{c2}$$

或者

$$\lg \omega_{c2} = \lg K - (\lg \omega_2 - \lg \omega_1) = \lg 5 - (\lg 0.13 - \lg 0.013) = \lg 0.5$$

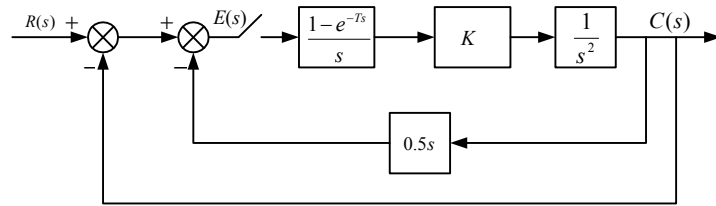
所以 $\omega_{c2} = 0.5$ 。

校正后系统的相角稳定裕度为

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 7.7\omega_{c_2} - \arctan 77\omega_{c_2} - \arctan \omega_{c_2} - \arctan 0.25\omega_{c_2} = 43.24^\circ$$

(4) 性能改进：1) 相角裕度增加，系统相对稳定性好；2) 中频段幅频特性斜率由 -40 变为 -20 使得系统动态性能有所改善，振荡性减弱；3) 高频增益下降很快使得系统抑制噪声能力提高；4) 但是校正后的剪切频率变小使得系统快速性下降。

例 7-1 已知系统结构图如图所示，其中 $K = 10$ ， $T = 0.2$ ， $r(t) = 1(t) + t + \frac{1}{2}t^2$



系统结构图

试用静态误差系数法计算图示系统的稳态误差。

解：从图中不难看出，反馈通道传递函数为

$$H(s) = 1 + 0.5s$$

前向通道传递函数为

$$G(s) = G_h(s) \cdot K \cdot \frac{1}{s^2}$$

因此，系统开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} GH(z) &= Z[G(s)H(s)] = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10(1+0.5s)}{s^2}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{10(1-0.5s)}{s^3}\right] \\ &= 10(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^3} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{0}{s}\right] = (1-z^{-1})\left[\frac{5T^2z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{5Tz}{(z-1)^2}\right] \end{aligned}$$

令 $T = 0.2$ ，代入上式简化后得

$$GH(z) = \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2}$$

开环系统为 II 型。

误差脉冲传递函数为

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1+GH(z)} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.8z + 0.2}$$

闭环特征方程为

$$D(z) = z^2 - 0.8z + 0.2 = 0$$

闭环特征根

$$z_{1,2} = 0.4 \pm j0.2$$

由于 $|z_{1,2}| < 1$ ，所以系统稳定。

输入信号采样序列的 Z 变换为

$$R(z) = Z\left[1 + t + \frac{t^2}{2}\right] = \frac{z}{z-1} + \frac{0.2z}{(z-1)^2} + \frac{0.02z(z+1)}{(z-1)^3}$$

因此，系统稳态误差为

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \Phi_e(z) R(z) = 0.1$$

另外，还有一种计算稳态误差的方法。

位置误差系数

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 + \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2} \right] = \infty$$

速度误差系数

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2} = \infty$$

加速度误差系数

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2} = 0.4$$

故系统的稳态误差为

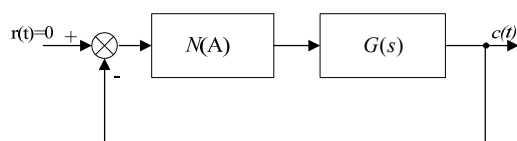
$$e(\infty) = e_{ss} = \frac{1}{K_p} + \frac{T}{K_v} + \frac{T^2}{K_a} = 0.1$$

例8-1 非线性系统如图所示，线性环节传递函数和非线性环节描述函数分别为

$$G(s) = \frac{20K}{s(0.1s+1)(0.1s+1)}; \quad N(A) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi A}$$

已知参数 $K = \frac{\pi}{40\sqrt{3}}$ 。

试（1）判断系统是否存在自持振荡；（2）若存在自持振荡，求其自振振幅和频率。提示：大致画出 $G(j\omega)$ 曲线即可，可以不写出画图的具体步骤。



非线性系统结构图

解：（1）非线性部分的描述函数负倒特性为：

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4\sqrt{3}}$$

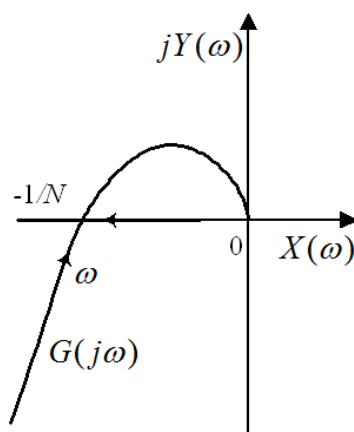
A 从 0 增加到无穷时，该曲线为负实轴 $(0, -\infty)$ 。

线性部分的频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{20K}{j\omega(0.1j\omega+1)^2}$$

$G(j\omega)$ 与负实轴必有交点，所以系统一定存在自持振荡。

系统稳定性分析曲线如下图所示：



（2）当 $G(j\omega)$ 与负实轴相交时的频率即为自持振荡频率，可由下式计算：

$$\varphi(\omega_g) = -90^\circ - \arctan 0.1\omega_g - \arctan 0.1\omega_g = -180^\circ$$

$$\omega_g = 10$$

交点处幅频特性为：

$$A(\omega_g) = \frac{20K}{\omega_g \sqrt{(0.1\omega_g)^2 + 1} \sqrt{(0.1\omega_g)^2 + 1}} = \frac{20K}{10\sqrt{2}\sqrt{2}} = K = \frac{\pi}{40\sqrt{3}}$$

自持振荡幅值可由下式求解得到：

$$-\frac{1}{N(A)} = -A(\omega_g)$$

$$A=0.1$$