



INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO PANAMERICANO CAMPESTRE
SINCELEJO – SUCRE – 2 023
GUIA DE ESTADISTICA DEL SEGUNDO PERIODO
GRADO: ONCE
DOCENTE: ARTURO RAFAEL RICARDO ORTEGA
CONTENIDO TEMATICO: TECNICAS DE CONTEO

TECNICAS DE CONTEO

INTRODUCCIÓN

El análisis combinatorio es una rama de las matemáticas discretas de gran aplicación, como la teoría de las probabilidades y el análisis de algoritmos, entre otras. Las aplicaciones de la teoría combinatoria están basadas en el empleo de métodos para cuantificar los diferentes tipos de arreglos que se obtienen con los elementos de uno o más conjuntos.

Puesto que en la teoría de las probabilidades no siempre es fundamental encontrar todos los puntos muestrales, basta conocer la cantidad de éstos; en particular, cuando se aplica la definición de probabilidad, es decir, cuando el espacio muestral se considera uniforme, el cálculo de la probabilidad de un evento requiere una división de la cantidad de elementos del evento entre la cantidad de elementos del espacio muestral, por lo que es necesario conocer las técnicas que se pueden aplicar para calcular la cantidad de puntos muestrales en un experimento.

En esta guía se analizan varios conjuntos y sus arreglos por medio de dos reglas elementales de conteo: regla de multiplicación y regla de suma.

En ocasiones los arreglos se grafican por medio de diagramas de árbol. También se trabajarán por separado los casos especiales de los arreglos que se forman con una parte o todos los elementos de un conjunto cuando el orden en que se coloquen éstos sea importantes (permutaciones) y la elección de los elementos se realice con o sin reemplazo; se ampliará el estudio de los casos con elementos iguales en un conjunto y los casos cuando el orden entre los elementos de los arreglos no es importante (combinaciones).

REGLA DE MULTIPLICACIÓN O PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

La regla de multiplicación aplicada a dos conjuntos consiste en que dados los conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, se quiere saber cuántas parejas diferentes se pueden formar con sus elementos si se coloca un elemento del conjunto A y posteriormente un elemento del conjunto B.

Primero se elige un elemento cualquiera del conjunto A y se relaciona con cada uno de los elementos del conjunto B, de tal forma que se obtienen m arreglos diferentes (puesto que B contiene m elementos).

Después se escoge un segundo elemento del conjunto A, y se relaciona con cada uno de los elementos del conjunto B y se obtienen otros m arreglos, los cuales son todos diferentes respecto de los que se formaron antes, ya que se combinaron elementos diferentes del conjunto A.

Continuando el proceso se tienen $n \times m$ parejas distintas que contienen un elemento de cada conjunto. En estos arreglos se escriben primero los elementos del conjunto A seguidos de los del B.

Ejemplo1: Se tienen ocho libros de física, cuatro de química y siete de matemáticas, todos ellos diferentes, ¿cuántos arreglos de tres libros, que contengan un libro de cada tema, se pueden formar con todos los libros si primero van los de física, seguidos por química y matemáticas?

Con los datos anteriores y el uso de la regla de multiplicación, que indica el total, de arreglos de libros diferentes de cada tema, se obtiene $8 \times 4 \times 7 = 224$

Ejemplo 2: Para ir de la ciudad **A** a la ciudad **B** existen tres caminos, de la ciudad **B** a la **C** existen cuatro, de la ciudad **C** a la **D** dos, ¿dé cuántas maneras se puede ir de la ciudad **A** a ¿la D, sin pasar por la misma ciudad más de una vez?

Con los datos anteriores y con el uso de la regla de multiplicación, el total de caminos diferentes para ir de **A** a **D** es

$3 \times 4 \times 2 = 24$

Actividad 1

- 1) ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar con las letras **a, r, m** y los números **3, 5, 6 y 8**, si primero va la letra y después el número?
- 2) Para viajar de la ciudad de México a Veracruz existen tres caminos y de Veracruz a Tabasco también tres, calcula de cuántas formas puede viajar una persona de México a Tabasco si debe pasar por Veracruz.
- 3) Una persona quiere regalar dulces de tres tipos a su hijo: chocolate, caramelo y goma de mascar; entra a una tienda donde hay doce variedades de chocolates, quince de caramelos y diez de goma de mascar, calcula de cuántas maneras puede integrar el arreglo de dulces.

DIAGRAMAS DE ÁRBOL

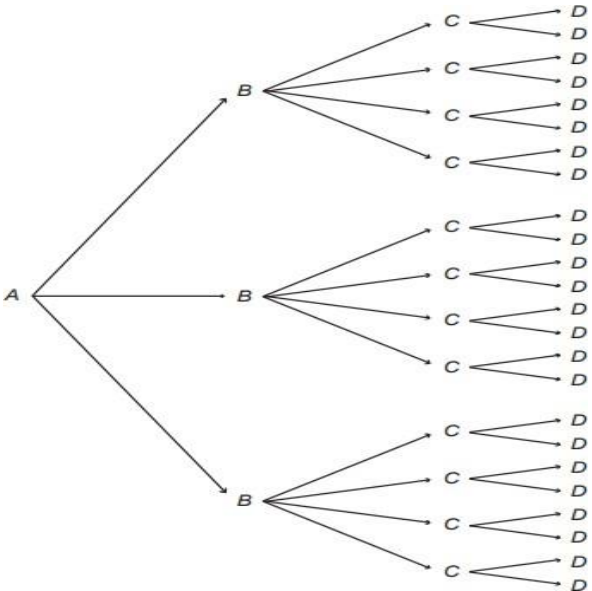
El nombre diagrama de árbol se debe a su forma, ya que con los elementos de los diferentes conjuntos que se estudian se construyen ramificaciones, con las cuales se obtienen todos los arreglos posibles.

El diagrama de árbol es una forma grafica de encontrar todos los arreglos que se pueden formar con los diferentes elementos de los conjuntos que se tienen. Un arreglo es una ramificación (desde su punto inicial hasta su punto final), donde cada ramificación debe tener un elemento de cada conjunto.

Ejemplo: Resolvamos el ejemplo 2 del principio multiplicativo, ahora utilizando un diagrama de árbol.

Para ir de la ciudad **A** a la ciudad **B** existen tres caminos, de la ciudad **B** a la **C** existen cuatro, de la ciudad **C** a la **D** dos, ¿dé cuántas maneras se puede ir de la ciudad **A** a ¿la D, sin pasar por la misma ciudad más de una vez?

Primero se representa en un punto a la ciudad **A**, después se trazan, a partir de este punto, tres líneas rectas para los tres caminos de la ciudad **A** a la **B**; de igual forma, de cada punto que representa a la ciudad **B**, se trazan cuatro líneas para los cuatro caminos de la ciudad **B** a la **C**; finalmente, de cada punto que representa la ciudad **C**, se trazan dos líneas para los dos caminos de la ciudad **C** a la **D**.



El diagrama de árbol muestra todos los caminos posibles para viajar de la ciudad **A** a la **D**, pasando por las ciudades **B** y **C**, los cuales se pueden obtener al unir rectas desde el punto **A** al **D** sin regresar por ningún camino.

Como se observa, los diagramas de árbol son bastante sencillos y muestran todos los arreglos posibles. Sin embargo, en los casos en que la cantidad de elementos es grande, se tiene también una cantidad grande de ramificaciones, y trazarlo ya no sería factible. No obstante, como se verá en el siguiente periodo, los diagramas de árbol tienen gran aplicación al resolver problemas de probabilidad condicional.

Actividad 2

- 1) ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar con las letras a, r, m y los números 3, 5, 6 y 8, si primero va la letra y después el número?
Resuelve mediante diagramas de árbol.
- 2) Para viajar de la ciudad de México a Veracruz existen tres caminos y de Veracruz a Tabasco también, calcula de cuántas formas puede viajar una persona de México a Tabasco, si debe de pasar por Veracruz. Resuelve mediante diagramas de árbol.
- 3) Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forme tantos números de tres dígitos como pueda sin repetir ninguno. ¿Cuántos hay? Compruébalo con el diagrama de árbol.
- 4) Construye un diagrama de árbol para determinar el número de posibilidades de la extracción, sin devolución (la bola que se extrae no se puede devolver a la urna), de dos bolas de una urna que contiene cuatro.

ARREGLOS CON Y SIN REEMPLAZO

Al aplicar la regla de multiplicación se debe tomar en cuenta que no sólo se emplea con diferentes conjuntos, sino que puede estar aplicada a un mismo conjunto en los casos que se pida realizar arreglos con todos o alguna parte de sus elementos. Dichos arreglos, sin embargo, pueden ser de dos tipos: cuando se permite el reemplazo (o repetición) y cuando no se permite.

Arreglos con reemplazo

Se dice que los arreglos son con reemplazo o con repetición cuando después de tomar un elemento éste se puede tomar nuevamente cada vez que se realice otra extracción. Es decir, si se tiene un conjunto A con n elementos diferentes y se realiza una extracción, ésta se podrá hacer de n formas diferentes.

Dado el conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ con n elementos diferentes, la cantidad de arreglos que contengan k elementos tomados con reemplazo del conjunto A está dada por

$$n^k$$

Ejemplo:

¿Cuántos números diferentes de placas se pueden formar con los números dígitos y las letras del alfabeto, si cada placa consta de tres letras y tres dígitos y se permite la repetición?

Cada letra del arreglo se puede elegir de 26 maneras, ya que se permite la repetición, al igual que cada dígito del arreglo se puede escoger de diez maneras, por tanto
 $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17\,576\,000$ placas diferentes

Arreglos sin reemplazo (permutaciones)

Los arreglos son sin reemplazo o sin repetición cuando después de tomar un elemento, éste no se puede tomar de nuevo. Es decir, si se tiene un conjunto $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ con n elementos diferentes y se realiza una extracción, ésta se podrá hacer de n maneras diferentes. Sea el elemento tomado a_3 , éste ya no se regresa al conjunto teniendo un conjunto $A_2 = \{a_1, a_2, a_4, a_5, \dots, a_n\}$ con $n - 1$ elementos diferentes, de forma tal que cuando se realice una segunda extracción será de $n - 1$ maneras.

Dado el conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ con n elementos diferentes, la cantidad de arreglos ordenados que contengan k elementos tomados sin reemplazo del conjunto A está dado por la resultante de $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (k - 1))$

Ejemplo:

¿Cuántas placas diferentes se pueden formar con los números dígitos y las letras del alfabeto, si cada placa consta de tres letras y tres dígitos si no se permite la repetición?

La primera letra se puede elegir de 26 maneras, la segunda los 25 restantes, la tercera 24. En el caso de los números se escogerán el primero de diez maneras, el segundo nueve y el tercero ocho. Finalmente, por la definición anterior y la regla de multiplicación se tiene que la cantidad de arreglos es $(26 \times 25 \times 24)(10 \times 9 \times 8) = 11\,232\,000$

La expresión para los arreglos sin repetición se simplifica introduciendo la siguiente definición.

El factorial de un número n , con $n \in \mathbb{N}$, se define como el producto sucesivo $(n - 1)(n - 2) \dots 1$ y se simboliza por $n!$

NOTA: Por definición, $0! = 1$.

Si la expresión $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (k - 1))$ Se multiplica y se divide por la $(n - k)!$ se obtiene la definición de **Permutación** cuando **no** se permite la **repetición de elementos**

Se llama **permutación** de r elementos escogidos de un total n (todos diferentes) a,

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0 \leq r \leq n$$

que representa la cantidad total de arreglos ordenados de tamaño r que se pueden formar con n elementos diferentes cuando no se permite la repetición.

Ejemplos:

1) Calcular:

a) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

b) $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$

$$\frac{10!}{(10-7)!} = \frac{3\,628\,800}{6} = 604\,800$$

c) $10P7 =$

d) $200P4 = \frac{200 \times 199 \times 198 \times 197 \times \cancel{196!}}{\cancel{196!}} = 200 \times 199 \times 198 \times 197 = 1\,552\,438\,800$

2) Para qué valor de n es $nP_3 = 8 \cdot [n-1P_2]$

$$\begin{aligned} nP_3 &= 8 \cdot [n-1P_2] \\ \frac{n!}{(n-3)!} &= 8 \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} \\ \frac{\cancel{n(n-1)!}}{\cancel{(n-3)!}} &= 8 \frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-3)!}} \\ n &= 8 \end{aligned}$$

PERMUTACIONES CON ELEMENTOS IGUALES O REPETIDOS

Para los casos en que se quieren formar arreglos con todos los elementos de un conjunto, entre los cuales existen algunos que son iguales, se tiene que, de forma general, cuando existen n_1 elementos iguales, n_2 elementos iguales, ... y n_m elementos iguales, tales que $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$, resulta la cantidad total de ordenamientos diferentes considerando todos los n elementos por ordenamiento

$$nP_{n_1 n_2 \dots n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}; \text{ con } n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$$

Ejemplos:

a) Se tienen cuatro computadoras X, tres computadoras Y y tres computadoras W; ¿de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar en línea recta?

Se tienen en total diez computadoras, de las cuales existen cuatro, tres y tres de cada tipo, aplicando la fórmula anterior se tiene, se tiene:

$$10P_{433} = \frac{10!}{4!3!3!} = 4\,200 \text{ (total de arreglos diferentes)}$$

b) ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden formar con todas las letras de la palabra **Guanajuato**?

Aquí el problema es que existen elementos iguales, se tienen **tres letras a**, **dos u** y sólo una de las siguientes **g, n, j, t, o**. Por la fórmula, se tiene:

$$10P_{3311111} = \frac{10!}{3!2!1!1!1!1!1!} = 302\,400 \text{ permutaciones diferentes}$$

Actividad 3

1) Calcular

a) $12P6$

b) $9P5$

2) Calcula, sin emplear la calculadora, $453P2$

3) Calcula valor de n que hace que se cumpla $nP8 = 8!$

4) Considera todas las letras de la palabra Cuitláhuac, calcula la cantidad de arreglos diferentes que se pueden formar considerando todas las letras.

5) Una persona acomoda en un estante de una librería seis libros de filosofía, cuatro de química y ocho de historia. De cuántas formas se pueden acomodar los libros si

a) los de historia siempre deben ir juntos

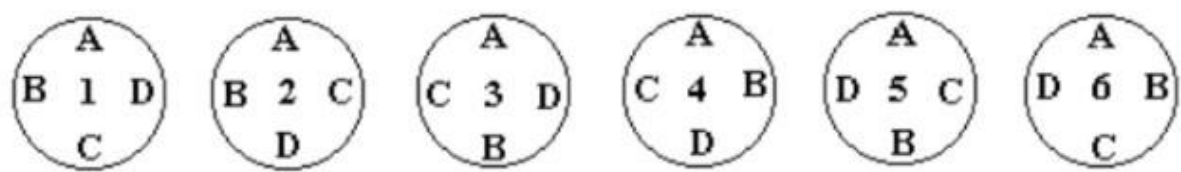
b) los libros de cada asignatura siempre deben estar juntos

- 6) Se pide tomar seis números, uno tras otro sin reemplazo de un total de 44, calcula cuántos arreglos diferentes se pueden formar.
- 7) Cuatro parejas (cuatro hombres y cuatro mujeres) van a ir al teatro; compraron ocho boletos en la misma fila.
- calcula de cuántas maneras diferentes se pueden colocar las cuatro parejas sin que alguna quede separada
 - calcula de cuántas maneras diferentes se pueden colocar las ocho personas, si se toman dos hombres para que no se sienten juntos?

PERMUTACIONES CIRCULARES

Ahora estudiaremos algunos ejemplos de arreglos circulares, sabemos que si queremos sentar a cuatro personas una al lado de la otra en fila, el número de arreglos que podemos hacer es 4!; ahora bien, si las queremos sentar alrededor de una mesa circular, ¿de cuántas formas lo podemos hacer?

Observemos los siguientes arreglos:



Por cada una de las permutaciones o arreglos circulares tenemos 4 de ellos diferentes en fila; esto es, el arreglo circular 1 puede leerse en sentido contrario a las agujas del reloj de las siguientes formas: ABCD, BCDA, CDAB, y DABC, que son 4 arreglos diferentes si fueran en filas; pero es un solo arreglo circular. Entonces, en lugar de tener 4! que es el número de arreglos en fila, tenemos solamente

$$\frac{4!}{4} = \frac{4 \times 3!}{4} = 3! = 6$$

En consecuencia se puede establecer

PERMUTACIONES CIRCULARES

"El número de permutaciones circulares de n elementos tomados todos a la vez es $(n - 1) !$ " y lo denotaremos por

$$P_{cir,n} = (n - 1)!$$

Hay 3 condiciones importantes que se cumplen en las permutaciones circulares:

- Importa el orden.
- Los elementos se ordenan en círculo.
- Participan todos los elementos en los ordenamientos.

EJEMPLO

Ejemplo

1. ¿De cuántas maneras se puede acomodar una reunión de 9 personas alrededor de una mesa redonda?

Solución

Una persona puede sentarse en cualquier posición fija de la mesa; las otras ocho personas pueden arreglarse de $(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 8!$ maneras alrededor de la misma, es decir:

Datos
 $n = 9$

Fórmula
 $P_c = (n - 1)!$

Sustitución
 $P_c = (9 - 1)! = 8! = 40\,320$

El número de maneras en las que pueden acomodarse nueve personas alrededor de una mesa redonda es de 40 320.

2 •• ¿De cuántas maneras pueden sentarse siete personas alrededor de una mesa, si dos personas insisten en sentarse una al lado de la otra?

Solución

Si se consideran a las dos personas que insisten en sentarse una al lado de la otra como una sola, entonces habrá seis personas para sentarse alrededor de la mesa y lo pueden hacer de $(5)(4)(3)(2)(1) = 5!$ maneras. Pero las dos personas consideradas como una sola pueden ordenarse entre sí de $(2)(1) = 2!$ maneras. En total existen $(5!)(2!) = 240$ maneras.

El número de maneras en las que pueden sentarse siete personas alrededor de una mesa, si dos personas insisten en sentarse una al lado de la otra, es 240.

Actividad 4

- 1 ¿De cuántas formas se pueden sentar 3 parejas de casados alrededor de una mesa circular, si: No debe haber dos mujeres juntas ni dos hombres juntos?
- 2 ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 5 parejas de esposos alrededor de una fogata, si:
 - a) Se sientan sin restricción alguna.
 - b) Un matrimonio se sienta junto.
 - c) Dos matrimonios se sientan juntos.
 - d) Los 5 matrimonios se sientan juntos.
- 3 ¿De cuántas maneras puede sentarse 5 marcianos y 5 venusinos en una mesa circular?

COMBINACIONES

En la sección anterior se analizaron las permutaciones, arreglos en los que el orden entre sus elementos es de suma importancia, por tanto, la permutación ***ab*** es diferente al arreglo ***ba***.

En la presente sección se verán los arreglos en los que el orden entre sus elementos no importa, es decir, dado un conjunto de ***n*** elementos distintos se desea contar el número de subconjuntos no ordenados de tamaño ***r***. Por ejemplo, dado un grupo de 40 estudiantes, se piden tres alumnos para que representen al grupo. En este caso no es importante el orden de los alumnos. Esto lleva a la siguiente definición.

Dado un conjunto con ***n*** elementos diferentes, se llama combinación a cualquier subconjunto no ordenado de tamaño ***r***. El número de combinaciones de tamaño ***r*** que se pueden formar con los ***n*** elementos se denota por:

$${}^nCr = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \quad \text{con } 0 \leq r \leq n$$

NOTA: Una diferencia fundamental entre las permutaciones y las combinaciones consiste en que el ***orden*** de los elementos de los grupos escogidos en las combinaciones ***no importan***, sólo se considera la cantidad de elementos en el grupo, mientras que en las permutaciones el orden entre sus elementos es fundamental.

Permutaciones $ab \neq ba$
Combinaciones $\{a, b\} = \{b, a\}$

Ejemplos:

1) Calcular: ${}_8C_5$, ${}_7C_3$ y ${}_9C_4$.

Aplicando la formula ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ tenemos:

Para ${}_8C_5$:

$${}_8C_5 = \frac{8!}{(8-5)!5!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8(7)(6)(5!)}{3(2)(1)(5!)} = 56$$

Para ${}_7C_3$:

$${}_7C_3 = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7(6)(5)(4!)}{4!3!} = 35$$

Para ${}_9C_4$:

$${}_9C_4 = \frac{9!}{(9-4)!4!} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9(8)(7)(6)(5!)}{5!4(3)(2)(1)} = 126$$

2) ¿Cuántos grupos de dos elementos se pueden formar de un conjunto que contiene cinco elementos?

Como en estos casos no importa el orden entre los elementos, con la fórmula, se tiene

$${}_5C_2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Diez es el total de grupos diferentes con dos elementos cada uno. Por ejemplo, si el conjunto es $\{a, b, c, d, e\}$, los grupos de dos elementos son:

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$

3) En una fábrica de textiles se presentan a solicitar trabajo 9 hombres y 5 mujeres.
¿De cuántas formas el jefe de personal puede hacer la selección si únicamente puede contratar a 6 hombres y a 3 mujeres?

Con la fórmula

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Hacemos dos sustituciones con:

$$n = 9$$

$$r = 6$$

y con:

$$n = 5$$

$$r = 3$$

Por el principio multiplicativo del conteo:

$$\begin{aligned} {}_9C_6 \cdot {}_5C_3 &= \frac{9!}{(9-6)!6!} \cdot \frac{5!}{(5-3)!3!} \\ &= \frac{9(8)(7)(6!)}{3(2)(1)(6!)} \cdot \frac{5(4)(3!)}{2(1)(3!)} = 840 \end{aligned}$$

Se pueden contratar a los 6 hombres y a las 3 mujeres de 840 formas.

- 4) Un alumno de enseñanza media superior tiene 7 libros de física y 5 de matemáticas. Calcula de cuántas maneras se pueden ordenar 3 libros de física y 2 de matemáticas en un librero.

Solución:

Posibles combinaciones de libros de física:

$${}_7C_3 = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7(6)(5)(4!)}{4!(3)(2)(1)} = \frac{210}{6} = 35$$

Posibles combinaciones de libros de matemáticas:

$${}_5C_2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5(4)(3!)}{3!2(1)} = \frac{20}{2} = 10$$

Posibles maneras de elegir los 5 libros (principio multiplicativo del conteo):

$${}_7C_3 \cdot {}_5C_2 = 35 (10) = 350$$

Cada una de estas 350 combinaciones posibles para colocar 5 libros diferentes es de ${}_5P_5 = 5!$, cada combinación se puede ordenar de 5! maneras diferentes:

$$5! = (5) (4) (3) (2) (1) = 120$$

Hay 120 permutaciones para cada combinación; por lo tanto, el número total de permutaciones es de:

$$350 (120) = 42\,000$$

Hay 42 000 formas de ordenar los libros, 3 de física y 2 de matemáticas en un librero de un total de 7 libros de física y 5 de matemáticas.

Actividad 5

- 1) Calcula

a) ${}_{12}C_6$

b) ${}_9C_4$

- 2) Calcula, sin emplear la calculadora

a) ${}_{450}C_2$

b) ${}_{348}C_{346}$

- 3) Encuentra el valor de r o n , que cumpla la igualdad correspondiente

a) ${}_nP_4 = 5! \cdot {}_{n-1}C_3$

b) ${}_4C_r = {}_6C_r$

- 4) Se pide tomar seis números a la vez de un total de 44, calcula cuántas combinaciones es posible hacer si el orden no es importante.

- 5) Un examen de métodos numéricos está formado por tres temas. El tema **A** contiene seis preguntas, el tema **B** cuatro y el tema **C** ocho preguntas, y se tienen que contestar tres preguntas de cada tema, calcula de cuántas maneras diferentes un estudiante puede elegir sus preguntas.

REGLA DE SUMA

Existen muchos problemas relacionados con las permutaciones o combinaciones donde para encontrar la cantidad total de arreglos se tiene que recurrir a diferentes tipos de éstos.

Por ejemplo, se va a formar un comité de cinco personas de un grupo de 20, de los cuales tres son hermanos, ¿de cuántas maneras se puede formar el comité, si deben estar por lo menos dos de los hermanos?

Se pueden formar los arreglos de dos maneras:

- 1) Cuando de las cinco personas seleccionadas estén dos de los hermanos.
- 2) Cuando de las cinco personas seleccionadas estén los tres hermanos.

La respuesta al problema es la suma de los arreglos puesto que los dos cumplen la condición de tener por lo menos dos de los hermanos en el comité.

Por lo expuesto es posible concluir que si **A** y **B** son dos tipos de arreglos diferentes y el total de arreglos **A** ocurre de ***n*** maneras e igualmente el total de arreglos **B** ocurre de ***m*** maneras, entonces el total de arreglos de ambos tipos ocurre de ***n + m*** maneras.

NOTA: La aplicación de la regla de suma por lo general se realiza cuando aparecen en el enunciado del problema las frases: ***a lo más o por lo menos***

Ejemplo:

Se va a formar un comité de cinco personas de un grupo de 20, de los cuales tres son hermanos; ¿de cuántas maneras se puede formar el comité, si deben estar por lo menos dos de los hermanos?

Se pide que ***por lo menos dos de los tres hermanos*** integren el comité, luego se presentan dos casos:

- 1) Cuando se tengan dos hermanos en el comité (el orden en este problema no es importante, ya que sólo interesa que en el comité existan cinco personas)

puesto que se requieren cinco personas en el comité y dos de ellas deben elegirse de los tres hermanos, se tiene que, con el uso de la regla de multiplicación, esto podrá ocurrir de ${}^3C_2 \times {}^{17}C_3$ maneras, en donde 3C_2 **representa** la cantidad de maneras de escoger dos de los tres hermanos, mientras que ${}^{17}C_3$ es la cantidad de maneras de escoger a las otras tres personas de los 17 restantes.

- 2) Cuando en el comité se elijan los tres hermanos, lo cual ocurre de ${}^3C_3 \times {}^{17}C_2$ maneras, en donde 3C_3 representa la cantidad de maneras de escoger tres de los tres hermanos, mientras que ${}^{17}C_2$ representa la cantidad de maneras de escoger a las otras dos personas de los 17 restantes.

Finalmente, con la regla de suma, el total de maneras en que pueden ocurrir los dos tipos de arreglos es:

$${}^3C_2 \times {}^{17}C_3 + {}^3C_3 \times {}^{17}C_2 = 3 \times 680 + 1 \times 36 = 2176$$