Aufgabe 2

(a) Lösen Sie folgende Gleichungen:

**i. cos(x) = x** <=> f(x) = x – cos(x)

***Sekantenverfahren:***

Für diesen Algorithmus müssen zunächst zwei Startpunkte a und b gewählt werden, wobei einer der zugehörigen Funktionswerte f(a) oder f(b) negativ sein muss, damit sich das Verfahren einer Nullstelle des Graphen nähern kann. Dabei wird die Sekante zwischen f(a) und f(b) gebildet. Der Schnittpunkt von Sekante und x-Achse markiert den Funktionswert f(x). Ist f(x) \* f(a) negativ, wird aus f(x) der neue Punkt f(b), durch den die nächste Sekante gebildet wird. Ist f(x) \* f(b) negativ, wird entsprechend f(a) angepasst. Besteht keine der zwei Bedingungen bricht das Verfahren ab. Durch dieses Verfahren befindet sich die anzunähernde Nullstelle stets zwischen den sich nähernden Funktionswerten f(a) und f(b). Die Berechnung des Schnittpunktes zwischen Sekante und x-Achse folgt der Gleichung:

x **=** a **-** f(a)**\***(b **-** a) **/** (f(b) **-** f(a))

Das Verfahren endet durch Abbruch oder durch erreichen der Nullstelle mit f(x) = 0 bzw. einer geeigneten Näherung.

***Ergebnis:*** 1 Nullstelle bei x = 0.7390851332151607

**ii. 2 sin(x) = x** <=> j(x) = x – 2 \* sin(x); dj(x) = 1 – 2 \* cos(x)

***Newton-Verfahren:***

Das Newton-Verfahren ähnelt dem Sekantenverfahren. Statt einer Sekante zwischen zwei Startpunkten wird jedoch die Tangente eines einzelnen Startpunktes a gebildet. Der Schnittpunkt x zwischen Tangente und x-Achse wird errechnet und dessen zugehöriger Funktionswert als neue Basis der Tangente eingesetzt. Die Iteration folgt der Formel:

a **=** x **–** f(x) **/** Df(x)

Das Verfahren bricht ab nachdem sich einer Nullstelle in vorgegebener Toleranz genähert wurde, oder nachdem die Anzahl der maximal auszuführenden Iterationen überschritten wurde. Die Toleranz stellt dabei die Höhe des aktuell iterierten Funktionswertes f(a) dar. Die obige Funktion besitzt drei Nullstellen, weshalb drei verschiedene Startwerte benötigt werden.

***Ergebnis****:* 3 Nullstellen bei x1 = -1.8954942672087132; x2 = 0; x3 = 1.8954945666276892

**iii. x = 2 – exp(-x)** <=> q(x) = (2 – exp(-x)) – x

***Bisektionsverfahren:***

Das Bisektionsverfahren ähnelt dem Sekantenverfahren und besitzt ebenfalls zwei Startwerte a und b. Statt der Sekante zwischen den zugehörigen Funktionswerten wird hier jedoch lediglich der Mittelwert auf der x-Achse zwischen a und b gebildet. Die Entscheidung ob a oder b nun durch den neuen Wert ersetzt wird erfolgt ebenfalls über die Bedingung f(a)\*f(x) < 0 oder f(b)\*f(x) < 0 (vgl. Sekantenverfahren). Die Iteration der Werte erfolgt über die Formel:

x = (a + b) / 2

Das Verfahren bricht ab sollte die Bedingung zur Anpassung der Grenzen nicht gegeben sein, oder durch Erreichen der Nullstelle, bzw. einer geeigneten Näherung. Um mehrere Nullstellen zu bestimmen, muss das Verfahren dementsprechend mit mehreren Startintervallen ausgeführt werden.

***Ergebnis:*** 2 Nullstellen bei x1 = -1.1461932206205825; x2 = 1.8414056604369606

**iv. x = exp(1 – x^2)** <=> p(x) = exp(1 – x^2) – x

Bei der letzten Gleichung wurde ebenfalls das bereits erklärte Bisektionsverfahren angewandt.

***Ergebnis:*** 1 Nullstelle bei x = 1

**(b)** In der Molekularfeldtheorie des Ferromagnetismus wird die Magnetisierung

m aus der Gleichung m = tanh(m/T) bestimmt. Bestimmen Sie die Lösung m (m != 0) als Funktion der Temperatur T mit einer Genauigkeit von 10^-6.

***Fixpunktiteration:***

Die Fixpunktiteration bestimmt schrittweise den Schnittpunkt der Funktion mit der Ursprungsgerade f(x) = x. In unserem Beispiel hat die Gleichung die Form m = tanh(m/T). Es wird ein Startwert für m gewählt. Dieser Startwert bildet einen neuen Funktionswert m der wiederum Iterativ in die Funktion eingesetzt wird und somit eine Folge von Werten für m bildet. Das Verfahren bricht ab, sobald zwei aufeinanderfolgende Werte für m eine Differenz von höchstens 10^-6 besitzen. Während eines Durchlaufs der Fixpunktiteration bleibt T konstant.

Um aber die Magnetisierung m als eine Funktion der Temperatur T abzubilden, muss die Fixpunktiteration mit verschiedenen Werten für T (zwischen 0 und 1) durchgeführt werden.

Hierfür wird für T der Startwert 0.01 gewählt. In einer Schleife wird T schrittweise um 0.01 erhöht und in einer Liste gespeichert. Dabei wird zu jedem T ein korrespondierender Wert m (mit entsprechender Toleranz) über Fixpunktiteration errechnet und ebenfalls in einer Liste gespeichert. Zuletzt werden die Werte der Temperatur auf die Werte der Magnetisierung geplottet und ergeben folgende ***Lösung:***

