Metrične dimenzije usmerjenih grafov

Jasmina Mazej in Lana Stojčić

13. november 2025

1 Uvod

V tej nalogi, si bova pomagali s spodaj navedenimi definicijami. Na podlagi teh definicij, sva oblikovali razmislek, kako se bova lotili reševanja nalog.

2 Definicije in osnovni pojmi

Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf, kjer je V množica vseh vozlišč in E množica vseh usmerjenih povezav v grafu. Privzeli bomo, da je v vseh definicijah graf usmerjen.

Definicija 1. Če obstaja direktna povezava iz vozlišča u v v, potem je to najkrajša povezava med vozliščima. Označimo jo z $d(u, v)$. Če taka povezava obstaja, pravimo da je v dosegljiv iz u. Če taka pot ne obstaja, označimo $d(u, v) = \infty$ in v ni dosegljiv iz u.

Definicija 2. Naj bodo $s, x, y \in V$. Pravimo, da vozlišče s razreši par vozlišč $x, y \in V$, če sta x in y obe dosegljiv iz s, vendar pri različnih razdaljah. Torej velja:

$$d(s, x) \neq d(s, y).$$

Množica vozlišč S razreši usmerjen graf G, če za vsak par $x, y \in V$ obstaja vsaj eno vozlišče $s \in S$, ki razreši x in y. Najmanjša možna velikost množice S se imenuje metrična dimenzija grafa G.

Definicija 3. Usmerjene cirkulantne grafe označimo kot $C(n, d)$, kjer je n število vozlišč v grafu, d pa seznam generatorjev. Označimo jih lahko tudi kot $C_n(1, \ldots, d)$. Njihova vozlišča so postavljena v krog, povezave pa si sledijo v periodičnem vzorcu. Vozlišča v tem grafu bomo označevali kot $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Vsako vozlišče je povezano z določenim drugim po fiksnem vzorcu, ki ga določijo generatorji. Torej množico povezav zapišemo kot:

$$E = \{(v_i, v_{i+k \text{ mod n}});\ 1 \leqslant k \leqslant d\} \text{ za } i = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

3 Postopek reševanja

3.1 Naloga 1

Vemo, da je $dim(C_n(1,\ldots,k)) = k$ za $n > 2(k-1)^2$. Zanima nas, ali za $k \geqslant 3$ obstaja $f(k) < 2(k-1)^2$, da še vedno velja $dim(C_n(1,\ldots,k)) = k$ pri pogoju $n > f(k)$.

Problema se bova lotili eksprimentalno na sledeč način:

- Vzeli bova funkcijo za izračun metrične dimenzije cirkulantnih grafov od Maše Popovič in preverili njeno delovanje. V primeru pravilnega delovanja, jo bova nadalje uporabljali v svoji nalogi.
- Izbrali bova čim več različnih vrednost za n in $k \geqslant 3$.
- Izbrali bova različne funkcije za $f(k)$.

Osredotočili se bova na poljubno izbrane vrednosti za $n \geqslant 4$ in $k \geqslant 3$. Ne splača se jemati $n < 4$, saj imamo manj vozlišč kot povezav. Za izbiro $f(k)$, pa si bova izbrali poljubno manjšo kvadratno funkcijo, in opazovali, kaj se dogaja z vrednostmi. Ogledali si bova tudi, kaj se zgodi, če za $f(k)$ vzamemo linearno funkcijo.

3.2 Naloga 2

Vemo:

- $dim(C_n(1,2,\ldots,n-1)) \geqslant n-1 \quad n \geqslant 3$
- $dim(C_n(1,2,\ldots,n-2)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad n \geqslant 4$
- $dim(C_n(1,2,\ldots,n-3)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad n \geqslant 5$

Za $n \geqslant 7$ imamo $dim(C_n(1,\ldots,n-4)) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$. To pomeni, da bo dimenzija enaka navzgor zaokroženmu celemu številu (npr. $4,4$ bo enaka 5).

Raziskali bova, ali obstajajo podobni rezultati za $dim(C_n(1,\ldots,n-k))$ za $k \geqslant 5$. Opazimo, da mora biti $n > 5$, saj smo predpostavili, da število generatorjev ne more biti negativno. Torej moramo za vsak k izbrati dovolj velik n.

Za poljubno izbrane k, bova izračunali metrično dimenzijo pri različnih vrednostih n. Opazovali bova, kaj se dogaja z metrično dimenzijo in tako podatke shranjevali. Najin cilj je poiskati oceno za metrično dimenzijo pri fiksnih k za različne vrednosti n.