Metrične dimenzije usmerjenih grafov

Jasmina Mazej in Lana Stojčić

16. december 2025

Definicije

Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf, kjer je V množica vseh vozlišč in E množica vseh usmerjenih povezav v grafu. Privzeli bomo, da je v vseh definicijah graf usmerjen.

Definicija 1. Če obstaja direktna povezava iz vozlišča u v v, potem je to najkrajša povezava med vozliščima. Označimo jo z $d(u, v)$. Če taka povezava obstaja, pravimo da je v dosegljiv iz u. Če taka pot ne obstaja, označimo $d(u, v) = \infty$ in v ni dosegljiv iz u.

Definicija 2. Naj bodo $s, x, y \in V$. Pravimo, da vozlišče s razreši par vozlišč $x, y \in V$, če sta x in y obe dosegljiv iz s, vendar pri različnih razdaljah. Torej velja:

$$d(s, x) \neq d(s, y).$$

Množica vozlišč S razreši usmerjen graf G, če za vsak par $x, y \in V$ obstaja vsaj eno vozlišče $s \in S$, ki razreši x in y. Najmanjša možna velikost množice S se imenuje metrična dimenzija grafa G.

Definicija 3. Usmerjene cirkulantne grafe označimo kot $C(n, d)$, kjer je n število vozlišč v grafu, d pa seznam generatorjev. Označimo jih lahko tudi kot $C_n(1, \ldots, d)$. Njihova vozlišča so postavljena v krog, povezave pa si sledijo v periodičnem vzorcu. Vozlišča v tem grafu bomo označevali kot $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Vsako vozlišče je povezano z določenim drugim po fiksnem vzorcu, ki ga določijo generatorji. Torej množico povezav zapišemo kot:

$$E = \{(v_i, v_{i+k \text{ mod n}});\ 1 \leqslant k \leqslant d\} \text{ za } i = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Začetni problemi

Ker imava obe računalnike z operacijskim sistemom Windows, sva se morali omejiti na manjše število preizkušenih vrednosti.

Opis problema in postopek reševanja

Naloga 1

Metrična dimenzija grafa je pomembna invariantna količina v teoriji grafov, ki meri najmanjšo množico vozlišč, s pomočjo katerih lahko z razdaljami enolično ločimo vsa vozlišča grafa.
V projektu sva obravnavali **usmerjene cirkulantne grafe**

$$C_n(1, 2, \ldots, k),$$

ter eksperimentalno preverili znane teoretične ocene in domneve o njihovi metrični dimenziji.

Znano je, da velja:

$$\dim(C_n(1, 2, \ldots, k)) = k \quad \text{za } n > 2(k-1)^2.$$

Najin cilj je preveriti, ali obstaja manjša meja $f(k) < 2(k-1)^2$.
Najprej sva eksperimentalno preverili vrednosti $k \in \{3, 4, 5, 6\}$ in $n \in [4, 77]$ na že znani trditvi ter zbrali rezultate v tabeli. Da sva lahko to preverili, sva definirali funkcijo:

```
def preveri_dimenzijo(n, k):
    #funkcija ne deluje za k > n:
    if k >= n:
            return {"n": n,
                "k": k,
                "napaka": "Za cirkulantni graf mora veljati k < n."}

    # V primeru, da je n manjsi od funkcija f(k)
    if n <= 2*(k - 1)**2:
        return {"n": n,
                "k": k,
                "napaka": "Pogoj n > 2(k - 1)^2 ni izpolnjen."}

    # Ustvari cirkulantni graf
    Cn_k = clockwise_circulant_graph(n, k)

    # Izračuna razresljivo mn in pove metricno dimenzijo
    razresljiva_mnozica, dim = metricna_dimenzija_usmerjenega_grafa(Cn_k)

    # Preveri enakost
    rezultat = (dim == k)

    return {"n": n,
            "k": k,
            "dimCn_k": dim,
            "trditev_velja": rezultat}
```

Funkcija *preveri_dimenzijo(n, k)* vrne metrčno dimenzijo grafa $C_n(1, 2, \ldots, k)$ in preveri, ali velja $\dim(C_n(1, 2, \ldots, k)) = k$ za podana n in k. Pri oblikovanju te funkcije sva si pomagali s kodo Maše Popovič iz projekta iz študijskega leta 2024/2025. Rezultati so potrdili znano trditev za vse preizkušene vrednosti.

Nato sva za $f(k)$ izbrali funkcije $f(k) = 2(k-1)^2 - a$ za poljuben a. Za vrednosti $a \in \{1,2,3,4,5\}$ sva preverili, ali še vedno velja:

$$\dim(C_n(1,2,\ldots,k)) = k \quad \text{za } n > f(k).$$

Ponovno sva definirali funkcijo, kjer sva dodali parameter a:

```
def preveri_dimenzijo2(n, k, a):
    #funkcija ne deluje za k > n:
    if k >= n:
        return {"n": n,
                "k": k,
                "napaka": "Za cirkulantni graf mora veljati k < n."}

    # V primeru, da je n manjsi od funkcija f(k)
    if n <= 2*(k - 1)**2 - a:
        return {"n": n,
                "k": k,
                "napaka": f"Pogoj n > 2(k-1)^2 - {a} ni izpolnjen."}

    # Ustvari cirkulantni graf
    Cn_k = clockwise_circulant_graph(n, k)

    # Izračuna razresljivo mn in pove metricno dimenzijo
    razresljiva_mnozica, dim = metricna_dimenzija_usmerjenega_grafa(Cn_k)

    # Preveri enakost
    rezultat = (dim == k)

    return {"n": n,
            "k": k,
            "dimCn_k": dim,
            "trditev_velja": rezultat}
```

Kot prej sva vzeli $n \in [4, 77]$ in $k \in \{3,4,5,6\}$. Rezultati so pokazali sledeče:

- za $a = 1$: enakost velja za vse $n \in [4, 77]$ in $k \in \{3,4,5,6\}$,
- za $a = 2$: enakost velja za vse $n \in [4, 77]$ in $k \in \{3,4,5,6\}$,
- za $a = 3$: enakost velja za vse $n \in [4, 77]$ in $k \in \{3,4,5,6\}$,
- za $a = 4$: enakost ne velja za $n = 5$ in $k = 3$, $\dim(C_5(1,2,3)) = 2$ kar ni enako 3,
- za $a = 5$: enakost ne velja za $n = 5$ in $k = 3$, $\dim(C_5(1,2,3)) = 2$ kar ni enako 3.

Rezultati so pokazali, da je najmanjši $f(k)$ za katerega velja $n > f(k)$ in $\dim(C_n(1, 2, \ldots, k)) = k$ enak

$$f(k) = 2(k-1)^2 - 3.$$

Torej sva našli manjšo funkcijo $f(k)$ od prej znane meje $2(k-1)^2$. To lahko trdiva le za $n \in [4, 77]$ in $k \in \{3, 4, 5, 6\}$, saj sva le na teh vrednostih preverili enakost dimenzije.

Kot zanimivost sva si ogledali še, kaj se zgodi, če za $f(k)$ uzameva linearno funkcijo. Izbrali sva $f(k) = 2(k-1)$. Že pri $k = 3$ lahko opazimo, da je pri $n = 5$ dimenizija enaka 2, kar ni enako k. Vidimo tudi, da pri večjih k lahko najdemo tak n, da dimenzija ne bo enaka k. Torej linearna funkcija ne bo ustrezna izbira za $f(k)$, če želimo imeti enakost $\dim(C_n(1, 2, \ldots, k)) = k$.

Sklep:
Spodnja meja $f(k) < 2(k-1)^2$ za vrednosti $n \in [4, 77]$ in $k \in \{3, 4, 5, 6\}$ je $f(k) = 2(k-1)^2 - 3$.

Komentar:
Vsi rezultati so zbrani v excel datoteki `rezultati_dimenzija_cirkulantnih_grafov.xlsx`, kjer je vsak list poimenovan po funkciji $f(k)$. Spodnji tabeli prikazujta rezultate le za določne n. Ne zajemata vseh vrednosti, saj so tabele v excelu precej velike. Njun namen je prikazati, kako opazimo da dimenzija ustreza k ali ne.

Tabela 1: Dimenzije cirkulantnih grafov (4. list)

n	3	4	5	6
4				
5				
6	3			
7	3			
8	3			
14	3			
15	3	4		
16	3	4		
17	3	4		
21	3	4		
28	3	4		
29	3	4		
30	3	4	5	
31	3	4	5	
32	3	4	5	
45	3	4	5	
46	3	4	5	
47	3	4	5	
48	3	4	5	6
49	3	4	5	6
50	3	4	5	6
51	3	4	5	6
52	3	4	5	6
53	3	4	5	6
54	3	4	5	6
55	3	4	5	6
56	3	4	5	6
57	3	4	5	6
58	3	4	5	6
59	3	4	5	6
60	3	4	5	6

Tabela 2: Dimenzije cirkulantnih grafov (5. list)

n	3	4	5	6
4				
5	2			
6	3			
7	3			
8	3			
14	3			
15	3	4		
16	3	4		
17	3	4		
21	3	4		
28	3	4		
29	3	4	5	
30	3	4	5	
31	3	4	5	
32	3	4	5	
45	3	4	5	
46	3	4	5	
47	3	4	5	6
48	3	4	5	6
49	3	4	5	6
50	3	4	5	6
51	3	4	5	6
52	3	4	5	6
53	3	4	5	6
54	3	4	5	6
55	3	4	5	6
56	3	4	5	6
57	3	4	5	6
58	3	4	5	6
59	3	4	5	6
60	3	4	5	6

Tabela 1 prikazuje rezultate za $f(k) = 2(k-1)^2 - 3$, medtem ko tabela 2 prikazuje rezultate za $f(k) = 2(k-1)^2 - 4$. Iz tabel opazimo, da za $f(k) = 2(k-1)^2 - 3$ enakost velja za vse preizkušene vrednosti, medtem ko za $f(k) = 2(k-1)^2 - 4$ ne velja za $n = 5$ in $k = 3$.

Naloga 2

Vemo, da veljajo sledeče enakosti:

- $dim(C_n(1, 2, \ldots, n-1)) \geqslant n-1 \quad n \geqslant 3$
- $dim(C_n(1, 2, \ldots, n-2)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad n \geqslant 4$
- $dim(C_n(1, 2, \ldots, n-3)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad n \geqslant 5$

Preverili sva, ali za $n \geqslant 7$ velja $dim(C_n(1, \ldots, n-4)) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Nato sva raziskali še, ali obstajajo podobni rezultati za $dim(C_n(1, \ldots, n-k))$ za $k \geqslant 5$. Da sva lažje razlikovali med to in prejšnjo nalogo, sva označili $m := k$.

Naloga 2.1

Enakost $dim(C_n(1, \ldots, n-4)) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$ za $n \geqslant 7$ sva preverili tako, da sva definirali dve funkciji. Funkcija *dimenzija_odvisna_od_n(n, m)* računa metrično dimenzijo grafa:

```
def dimenzija_odvisna_od_n(n, m):
    if m >= n:
        return {"n": n,
                "m": m,
                "dimenzija": None}

    G = clockwise_circulant_graph(n, n-m)
    razresljiva_mnozica, dim = metricna_dimenzija_usmerjenega_grafa(G)
    return {"n": n,
            "m": m,
            "dimenzija": dim}
```

Funkcija *vse_dimenzije(vrednosti_n, m)* vzame seznam vrednosti n in vrne seznam izračunanih metričnih dimenzij:

```
def vse_dimenzije(vrednosti_n, m):
    rezultati = []

    for n in vrednosti_n:
        rezultati.append(dimenzija_odvisna_od_n(n, m))

    return rezultati
```

Na podlagi teh dveh funkcij, sva izračunali metrično dimenzijo za vse $n \in [7, 80]$ in $m = 4$. Rezultate sva shranili v excel tabelo.

Ustvarili sva seznam s pomočjo for zanke, ki za vsak n izračuna $\lceil \frac{2n}{5} \rceil$. Dobljene vrednosti, pa sva na to primerjali z izračunanimi metričnimi dimenzijami.

```
#Sezam s predvideno dimenzijo
izracun_dim = []
for n in sez_n:
    st = ceil(2*n/5)
    izracun_dim.append(st)

#Dimenzija za m=4
tabela = pd.read_excel("rezultati_naloga_2.xlsx", sheet_name="dimenzija za m=4")
vrednosti = tabela.iloc[:,1].tolist()

rezultat = [a == b for a, b in zip(izracun_dim, vrednosti)]
```

Rezultati so pokazali, da velja enakost med vsemi izračunanimi dimenzijami in $\lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Sklep:
Za vsak $n \in [7, 80]$ velja $dim(C_n(1, \ldots, n-4)) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Naloga 2.2

V tem delu projekta sva eksperimentalno preverili obnašanje metrične dimenzije $dim(C_n(1, \ldots, n-m))$, kjer sva vzeli $m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Pri reševanju sva uporabili zgoraj omenjeni funkciji in rezultate shranili v excel datoteko. To lahko najdete na najnem repozitoriju pod naslovom `rezultati_naloga_2.xlsx`.

Najne ugotovitve so sledeče:

- Za $m = 5$: Iz rezultatov sva opazili, da lahko metrično dimenzijo opiševa s funkcijo

  $$\dim(C_n(1, 2, \ldots, n-5)) = \begin{cases} \dfrac{n}{3}, & \text{če } 3 \mid n, \\ \left\lceil \dfrac{n}{3} \right\rceil + 1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

  Definirali sva funkcijo *dimenzija_m5(n)* in računali njene vrednosti za $n \in \{7, \ldots, 80\}$.

  ```
  def dimenzija_m5(n):
      if n % 3 == 0:
          return n // 3
      else:
          return ceil(n / 3) + 1
  ```

  Nato sva rezultate te funkcije primerjali z izračunanimi metričnimi dimenzijami in ugotovili, da se ujemajo za vse $n \in [9, \ldots, 80]$.

- Za $m = 6$: Podobno kot pri $m = 5$, sva na podlagi izračunanih metričnih dimenzij, poskušali najti funkcijo, ki bi jih opisala. Tu nisva imeli take sreče, saj nama ni uspelo najti funkcije, ki bi natančno opisala vse izračunane dimenzije. Poskušali sva s funkcijo $dim(C_n(1,\dots,n-6)) = \lfloor \frac{9n}{25} + b \rfloor$ za različne vrednosti b, vendar nobena ni ustrezala vsem izračunanim dimenzijam. Za $b = 1$ so bile razlike najmanjše, zato sva tej funkciji posvetili največ pozornosti. Definirali sva funkcijo:

$$\dim(C_n(1,2,\dots,n-6)) = \begin{cases} \text{int}(\text{round}(\frac{9n}{25}+1)) - 1, & \text{če } 11 \mid n, \\ \text{int}(\text{round}(\frac{9n}{25}+1)) + 1, & \text{če } n = \{43, 54, 65, 68, 76, 79\} \\ \text{int}(\text{round}(\frac{9n}{25}+1)), & \text{sicer.} \end{cases}$$

  Ta približek je veljal za vse $n \in [11,\dots,80]$. Njegovo veljavnost sva preverili podobno kot prej.

- Za $m = 7$: Kot pri $m = 6$ sva poskusili s funkcijo $dim(C_n(1,\dots,n-6)) = \lfloor \frac{9n}{25} + b \rfloor$ za $b \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Nobena ni ustrezala vsem izračunanim dimenzijam. Najboljše rezultate je dala funkcija za $b = 3$, a je odstopala pri več vrednostih n. Zato je nisva nadalje popravljali.

- za $m = 8, 9, 10$: Pri teh vrednostih nisva iskali nobene funkcije, saj sklepava na podlagi prejšnjih dveh, da je iskanje take funkcije za večje m zelo zahtevno in verjetno ne bo dalo dobrih rezultatov.

Sklep:
Za m = 5 sva našli funkcijo, ki natančno opisuje metrično dimenzijo $dim(C_n(1,\dots,n-5))$ za vse $n \in [9,80]$, in sicer

$$\dim(C_n(1,2,\dots,n-5)) = \begin{cases} \frac{n}{3}, & \text{če } 3 \mid n, \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Za $m = 6$ sva našli približek, ki velja za vse $n \in [11,80]$, in sicer

$$\dim(C_n(1,2,\dots,n-6)) = \begin{cases} \text{int}(\text{round}(\frac{9n}{25}+1)) - 1, & \text{če } 11 \mid n, \\ \text{int}(\text{round}(\frac{9n}{25}+1)) + 1, & \text{če } n = \{43, 54, 65, 68, 76, 79\} \\ \text{int}(\text{round}(\frac{9n}{25}+1)), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Za ostale vrednosti m nisva našli nobene funkcije, ki bi natančno opisala metrično dimenzijo.

Komentar:
Vsi rezultati so zbrani v excel datoteki `rezultati_naloga_2.xlsx`. Spodnji tabeli prikazujeta rezultate le za določen n.

Tabela 3: Dimenzije cirkulantnih grafov m = 4 (1. list)

n	4
7	3
8	4
9	4
10	4
11	5
12	5
13	6
14	6
15	6
16	7
17	7
18	8
19	8
20	8
21	9
22	9
23	10
24	10
25	10
26	11
27	11
28	12
29	12
30	12
31	13
32	13
33	14
34	14
35	14
36	15
37	15
38	16
39	16
40	16

Tabela 4: Dimenzije cirkulantnih grafov $m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (2. list)

n	5	6	7	8	9	10
7	2	1				
8	3	2	1			
9	3	3	2	1		
10	5	3	3	2	1	
11	5	4	4	3	2	1
12	4	6	3	4	3	2
13	6	6	5	5	4	3
14	6	6	7	4	5	4
15	5	6	6	5	5	5
16	7	7	6	8	5	5
17	7	7	7	7	6	6
18	6	7	7	6	9	5
19	8	8	8	8	8	7
20	8	8	8	8	8	10
21	7	9	8	7	9	9
22	9	8	9	9	9	8
23	9	10	9	10	10	9
24	8	10	9	8	9	9
25	10	10	10	10	10	10
26	10	10	10	11	11	11
27	9	11	11	9	10	10
28	11	11	11	11	12	12
29	11	11	11	12	12	12
30	10	12	12	10	12	11
31	12	12	12	13	12	13
32	12	13	12	13	13	12
33	11	12	13	11	14	12
34	13	14	13	14	12	13
35	13	14	14	14	14	13
36	12	14	14	12	14	14
37	14	14	14	15	14	15
38	14	15	15	15	15	14
39	13	15	15	13	15	16
40	15	15	15	16	16	15

Tabela 3 prikazuje rezultate za $m = 4$, medtem ko tabela 4 prikazuje rezultate za $m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Iz tabel opazimo, da za $m = 4$ enakost velja za vse preizkušene vrednosti. Za ostale m je težje določiti pravilo.