1. 定义

单位阻值电阻的瞬时功率

$p(t)=v(t)i(t)=i^2(t)=v^2(t)$

在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内消耗

$E_T=\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \_ = \_$

平均能量

$P_T=\frac{E_T}{t_2-t_1} = \_ = \_$

连续 $\begin{cases} E_\infty = \lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt \\ P_\infty = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt \end{cases}$

离散 $\begin{cases} E_\infty = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 \\ P_\infty = \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 \end{cases}$

2. 分类 $\begin{cases} \text{有限 (能量有限) } 0<E_\infty<\infty \rightarrow \text{平方可积 (连续) | 平方可和信号 (离散)} \\ \text{无限 (功率有限) } 0<P_\infty<\infty \end{cases}$

(振荡导致积分不存在)

$x[n]=(0.5)^n,\ n\geq 0$

等比数列求和

$E_\infty=\sum_{n=0}^{\infty}(0.25)^n=\frac{1}{1-0.25}=\frac{4}{3}$

$P_\infty=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}E_\infty=0$ (功率一定为0)

例2 考虑信号 $x(t)=\cos(2\pi t)+\cos(4\pi t)$ 和 $y(t)=\cos(2\pi t)+\cos(2t)$，$-\infty<t<\infty$，分别计算这两个信号的功率。

1　0.5

最小公倍数

$P_{x_1}=P_{x_2}=0.5$

$P_x=P_{x_1}+P_{x_2}$

各自平均功率

$x(t)$ 基波周期 $T_0=1$　$x(t)$ 包含频率成分是谐波相关

$y(t)$ 不是周期的，频率 2π 和 2 不是谐波相关的

$y(t)$ 也是两个分量 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 功率之和

周期信号具有无限能量 (三角恒等式)

$x^2(t)=1+\frac{1}{2}\cos(4\pi t)+\frac{1}{2}\cos(8\pi t)+\cos(2\pi t)+\cos(6\pi t)$

$P_x=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x^2(t)\,dt=\int_0^1 x^2(t)\,dt=1$

令 $y(t) = \underbrace{\cos(2\pi t)}_{y1(t)} + \underbrace{\cos(2t)}_{y2(t)}$

其功率为

$$
\begin{aligned}
P_y &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\cos(2\pi t)+\cos(2t)]^2\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos^2(2\pi t)dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos^2(2t)dt \\
&\quad + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}2\cos(2\pi t)\cos(2t)dt \\
&= P_{y1} + P_{y2} + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\cos(2(\pi+1)t)+\cos(2(\pi-1)t)]dt \\
&= P_{y1} + P_{y2} + 0 = 0.5 + 0.5 = 1
\end{aligned}
$$

正弦函数 → 各分量功率之和，不论频率与简谐是否相关

扩展：周期信号的功率等于每一个正弦分量功率之和，即功率叠加

(非周期信号，仍存在叠加关系)