# 实验三

# 圆周率$\pi$ 的计算

# 实验指导书

卢本捷

## 一. 实验目的

1. 学习并行计算的初步方法。

## 二. 实验内容

1. 用多种方法完成 pi 的并行计算

## 三. 实验环境

1. 两台或以上的 windows 或 linux 等。
2. 节点的网络互联。
3. vc2017 等

## 四. 实验要求

1. 记录实验过程，分析试验现象。
2. 记录主要源代码
3. 撰写实验报告.

## 五. MPICH 实验步骤

1. 方法 1：面积积分

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}=argtgx|(1,0)$$

对积分进行数值求解即可。

对区间进行划分。简单并行计算。

这是 MPICH2 中提供的示例方式。

2. 幂级数

tg（$\pi$ /4）=1

$\pi$ /4= arctg（1）

对 arctg（1）进行幂级数展开即可：

arctgx= $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\ (-x^2)^n$ dx 交换次序 $=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-x^2)^n dx$

计算积分得：argtgx=$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

所以当 x=1 时：

$\pi$ /4= $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ = 1-1/3+1/5-1/7+……+ $(-1)^n$/2n+1

并行计算方法：

1. 事先确定进程数。

2. 主进程确定计算的项数。向各个子进程发送项数。
3. 各个子进程进行自己这部分的累加。
4. 主进程集中。
5. 记录运算时间。

3. 改进的幂级数

以上方法收敛很慢。（每一项衰减得慢），要精确到$10^{-N}$ 大致需要计算 $2\times10^{N}$ 项。

为提高计算速度采用以下改进的方法：

对于幂级数而言，当 x 越接近于 0 时，收敛越快。 上面的例子中，x=1，离 0 有相当的距离。

令 x=1/5. 记φ=arctg(1/5). tgφ =1/5.

$tg2\varphi = 2tg\varphi/(1-tg^2\varphi) = 5/12.$

同理 tg4φ = 120/119. 而 tg（π /4）=1，可见 4φ 与π /4 非常接近。

令 θ =4φ-π /4

所以 tgθ =tg(4φ-π /4) = $\frac{\frac{120}{119}-1}{\frac{120}{119}+1} = \frac{1}{239}$ （根据 tan(A-B) = (tanA-tanB)/(1+tanAtanB)）

θ =arctg (1/239).

所以：

π /4 =4φ -θ

= 4 × arctg(1/5)- arctg(1/239)

再利用幂级数展开：

$$=4\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}}$$

上述级数收敛的速度非常快。

左边部分：当 n=4 时，即有 $1/9\times5^9 < 10^{-6}$

而右边收敛更快。

并行计算方法：

利用同方法 2 类似的方式。

4. 蒙特卡洛方式。
   a) 各个子进程的工作
      i. 使用随机数在正方形内投点
      ii. 计算落在圆内的点的次数。
      iii. 计算比值。
   b) 主进程收集所有的结果，进行平均。

5. 随机积分方式

利用公式：

$$\text{Area} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_r)(x_2-x_1)$$

计算 $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}$

6. 五种方式比较时间。

a) 五种算法达到同样的精度：3.141592653589793238462643
b) 以精度作为控制标准。
c) 比较五种算法的时间。
d) 如单机（多进程）运算时间太长，考虑集群的方式。

7. 其他的计算公式： Borwein, J.M., and Borwein, P.B. 1987, *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*

$X_0=\sqrt{2}$

$\pi_0=2+\sqrt{2}$

$Y_0=\sqrt[4]{2}$

*迭代公式为*:

$$X_{i+1}=\frac{1}{2}(\sqrt{X_i}+\frac{1}{\sqrt{X_i}})$$

$$\pi_{i+1}=\pi_i(\frac{X_{i+1}+1}{Y_i+1})$$

$$Y_{i+1}=\frac{Y_i\sqrt{X_{i+1}}+\frac{1}{\sqrt{X_{i+1}}}}{Y_i+1}$$

此公式为二次收敛。每一次迭代有效数字增加一倍。该方法称为算术几何平均法。AGM

8. 其他的计算公式 1

$\pi$ /4 = 12 arctg(1/49)+32arctg(1/57)- 5arctg(1/239)+ 12arctg(1/110443)

2002 年日本东京大学的金田康正使用该公式打破世界纪录 12411 亿位。

9. 其他的公式 2. Chudnovsky 公式：

$$\frac{1}{\pi}=12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!}{(3n!)n!^3}\cdot\frac{(An+B)}{C^{3n+\frac{3}{2}}}$$

$A$ = 1657145277365 + 212175710912$p$61,

$B$ = 107578229802750 + 13773980892672$p$61,

$C$ = 5280(236674 + 30303$p$61)

当前的世界纪录。

10. 其他的公式 3 BBP 公式 Borwein 兄弟发明

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6})$$

此公式可以直接计算出在 16 进制下的某一指定位置的数字，而无需计算前面的数字。

11. 其他相关问题：高精度的算术运算。 Karatsuba 算法。FFT 算法。
12. 并行的算法实现