数 学 物 理 方 法

第十一章　球函数

第 2 节　一般球函数

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

更新日期：2022 年 10 月 1 日

§2 一般球函数

§2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

如前所述，在**球坐标**下对 **Laplace 方程**分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{dx}\right] + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0 \\ P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0) \end{cases}$$

如果问题的边界条件并**不具有**轴对称性，则除了上节讨论的**特殊情况** $m = 0$ 以外，还需要研究 $m \neq 0$ 的情况，即**连带 Legendre 方程**的本征值问题

§2 一般球函数

§2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

如前所述，在**球坐标**下对 **Laplace 方程**分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{dx}\right]+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)P=0 \\ P(\pm1)=0 \quad (m\neq0) \quad \text{或} \quad |P(\pm1)|<\infty \quad (m=0) \end{cases}$$

如果问题的边界条件并**不具有**轴对称性，则除了上节讨论的**特殊情况** $m=0$ 以外，还需要研究 $m\neq0$ 的情况，即**连带 Legendre 方程**的本征值问题

作**变换** $P(x)=(1-x^2)^{m/2}y(x)$，代入**连带 Legendre 方程**

由 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=(1-x^2)^{m/2}y'-mx(1-x^2)^{m/2-1}y$ 推出

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)^{m/2+1}y'-mx(1-x^2)^{m/2}y] \\ &= (1-x^2)^{m/2+1}y''-(m+2)x(1-x^2)^{m/2}y'-mx(1-x^2)^{m/2}y' \\ &\quad -m(1-x^2)^{m/2}y+m^2x^2(1-x^2)^{m/2-1}y \end{aligned}$$

§2 一般球函数

§2.1 非轴对称问题、连带 Legendre 函数

如前所述，在**球坐标**下对 **Laplace 方程**分离变量会出现本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}P}{dx}\right]+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)P=0 \\ P(\pm1)=0 \quad (m\neq0) \quad \text{或} \quad |P(\pm1)|<\infty \quad (m=0) \end{cases}$$

如果问题的边界条件并**不具有**轴对称性，则除了上节讨论的**特殊情况** $m=0$ 以外，还需要研究 $m\neq0$ 的情况，即**连带 Legendre 方程**的本征值问题

作**变换** $P(x)=(1-x^2)^{m/2}y(x)$，代入**连带 Legendre 方程**

由 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=(1-x^2)^{m/2}y'-mx(1-x^2)^{m/2-1}y$ 推出

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)^{m/2+1}y'-mx(1-x^2)^{m/2}y] \\ &\qquad\qquad = -2(m+1)x(1-x^2)^{m/2}y' \\ &= (1-x^2)^{m/2+1}y''-(m+2)x(1-x^2)^{m/2}y'-mx(1-x^2)^{m/2}y' \\ &\quad -m(1-x^2)^{m/2}y+m^2x^2(1-x^2)^{m/2-1}y \end{aligned}$$

$y(x)$ 满足的方程

因此，作**变换** $P(x) = (1-x^2)^{m/2} y(x)$ 之后，**连带 Legendre 方程**化为

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P \\
&= (1-x^2)^{m/2+1} y'' - 2(m+1)x(1-x^2)^{m/2} y' - m(1-x^2)^{m/2} y \\
&\quad + m^2 x^2 (1-x^2)^{m/2-1} y + \lambda(1-x^2)^{m/2} y - m^2(1-x^2)^{m/2-1} y \\
&= (1-x^2)^{m/2}\left[(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' - my - m^2\frac{-x^2}{1-x^2}y + \lambda y - m^2\frac{1}{1-x^2}y\right] \\
&= (1-x^2)^{m/2}\{(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y\}
\end{aligned}
$$

可见，$y(x)$ 满足的方程为

$$
(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [\lambda - m(m+1)]y = 0
$$

对 Legendre 方程求导 m 次

- 另一方面，将 **Legendre 方程**中的函数 $P(x)$ 写作 $f(x)$，得

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda f=(1-x^2)f''-2xf'+\lambda f$$

- 现在对它**求导 m 次**，注意到

$$(1-x^2)''=(-2x)'=-2,\quad C_m^0=1,\quad C_m^1=m,\quad C_m^2=\frac{m(m-1)}{2}$$

- 由**高阶导数的 Leibniz 公式**得到

$$\begin{aligned}[(1-x^2)f'']^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-x^2)^{(k)} f''^{(m-k)}\\ &= C_m^0(1-x^2)f''^{(m)}+C_m^1(1-x^2)'f''^{(m-1)}+C_m^2(1-x^2)''f''^{(m-2)}\\ &= (1-x^2)f^{(m)\prime\prime}-2mxf^{(m)\prime}-m(m-1)f^{(m)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2xf')^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (2x)^{(k)} f'^{(m-k)} = C_m^0(2x)f'^{(m)}+C_m^1(2x)'f'^{(m-1)}\\ &= 2xf^{(m)\prime}+2mf^{(m)}\end{aligned}$$

连带 Legendre 方程的解

从而推出

$$
\begin{aligned}
0 &= [(1-x^2)f'' - 2xf' + \lambda f]^{(m)} \\
&= (1-x^2)f^{(m)\prime\prime} - 2mxf^{(m)\prime} - m(m-1)f^{(m)} - 2xf^{(m)\prime} - 2mf^{(m)} + \lambda f^{(m)}
\end{aligned}
$$

整理得 $(1-x^2)f^{(m)\prime\prime} - 2(m+1)xf^{(m)\prime} + [\lambda - m(m+1)]f^{(m)} = 0$

连带 Legendre 方程的解

- 从而推出

$$\begin{aligned}0 &= [(1-x^2)f''-2xf'+\lambda f]^{(m)} \\ &= (1-x^2)f^{(m)\prime\prime}-2mxf^{(m)\prime}-m(m-1)f^{(m)}-2xf^{(m)\prime}-2mf^{(m)}+\lambda f^{(m)}\end{aligned}$$

- 整理得 $(1-x^2)f^{(m)\prime\prime}-2(m+1)xf^{(m)\prime}+[\lambda-m(m+1)]f^{(m)}=0$
- 与 $(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[\lambda-m(m+1)]y=0$ 比较，可知

$$y(x)=f^{(m)}(x)$$

- 这就是说，只要将 **Legendre 方程**的解 $f(x)$ **求导** m **次**，就能够得到**方程** $(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[\lambda-m(m+1)]y=0$ 的解 $y(x)$

连带 Legendre 方程的解

- 从而推出

$$\begin{aligned} 0 &= [(1-x^2)f''-2xf'+\lambda f]^{(m)} \\ &= (1-x^2)f^{(m)\prime\prime}-2mxf^{(m)\prime}-m(m-1)f^{(m)}-2xf^{(m)\prime}-2mf^{(m)}+\lambda f^{(m)} \end{aligned}$$

- 整理得 $(1-x^2)f^{(m)\prime\prime}-2(m+1)xf^{(m)\prime}+[\lambda-m(m+1)]f^{(m)}=0$
- 与 $(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[\lambda-m(m+1)]y=0$ 比较，可知

$$y(x)=f^{(m)}(x)$$

- 这就是说，只要将 **Legendre 方程**的解 $f(x)$ **求导** m **次**，就能够得到**方程** $(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[\lambda-m(m+1)]y=0$ 的解 $y(x)$
- 由于 $P(x)=(1-x^2)^{m/2}y(x)$，为了满足**边界条件** $P(\pm1)=0$，$y(\pm1)$ 应该**有限**
- 因此 $f(\pm1)$ 也应该**有限**，这只有当 $\lambda=l(l+1)$ $(l\in\mathbb{N})$ 时才有可能
- 相应的解 **Legendre 多项式**，即 $f(x)=\mathrm{P}_l(x)$，故 $P(x)=(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$

连带 Legendre 方程本征值问题的本征值和本征函数

🚲 于是求得连带 Legendre 方程本征值问题的本征值

$$\lambda_l = l(l+1), \quad l = m, m+1, \cdots$$

🏍 相应是本征函数是连带 Legendre 函数

$$\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x), \quad l = m, m+1, \cdots$$

🚍 如果 $l < m$ 时，则 $\mathrm{P}_l^{(m)}(x) = 0$，本征函数化为零

🚗 所以 l 的取值被 m **限制**为 $l = m, m+1, \cdots$

连带 Legendre 方程本征值问题的本征值和本征函数

- 于是求得**连带 Legendre 方程本征值问题**的**本征值**

$$\lambda_l = l(l+1), \quad l = m, m+1, \cdots$$

- 相应是**本征函数**是**连带 Legendre 函数**

$$\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x), \quad l = m, m+1, \cdots$$

- 如果 $l < m$ 时，则 $\mathrm{P}_l^{(m)}(x) = 0$，本征函数化为零
- 所以 l 的取值被 m **限制**为 $l = m, m+1, \cdots$
- 对于连带 Legendre 方程的本征值问题来说，m 是事先给定的
- 它来源于 $\Phi(\phi)$ **的本征值问题**
- 当 $m = 0$ 时，**连带 Legendre 函数**退化为 **Legendre 多项式**，即 $\mathrm{P}_l^0(x) = \mathrm{P}_l(x)$
- 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 线性独立的另一个解记作 $\mathrm{Q}_l^m(x)$，它在 $x = \pm 1$ 处有**奇性**

说明

- 文献中的**连带 Legendre 函数**有两种不同定义
- 上述 $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$ 是 **Ferrer 定义**
- 另有一种 **Hobson 定义** $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (-)^m(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$
- 定义不同，有关公式 (如递推关系) 也会有所**不同**
- 因此读者在使用**不同参考书**时应该留意其所用定义

说明

- 文献中的**连带 Legendre 函数**有两种不同定义
- 上述 $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$ 是 **Ferrer 定义**
- 另有一种 **Hobson 定义** $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (-)^m(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$
- 定义不同，有关公式 (如递推关系) 也会有所**不同**
- 因此读者在使用**不同参考书**时应该留意其所用定义
- 有些作者将连带 Legendre 函数称为 **"连带 Legendre 多项式"**，这一名称**并不恰当**
- 当 m **不是偶数**时，$\mathrm{P}_l^m(x)$ 并**不是** x **的多项式**
- 如果令 $x=\cos\theta$，则 $(1-x^2)^{m/2}=\sin^m\theta$
- $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 变成**两个宗量** $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的多项式，显然**不是**通常意义下的多项式

§2.2 连带 Legendre 函数的微分表示

由 **Legendre 多项式的微分表示** $\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$ 得

$$\mathrm{P}_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\right]$$

可见，**连带 Legendre 函数的微分表示**为

$$\mathrm{P}_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$$

这也称为 **Rodrigues 公式**

§2.3 函数 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$

- 按照 $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$，$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 并没有意义
- 因为求导 $-m$ 次是没有意义的
- 然而，只要 $m \le l$，就能通过微分表示 $\mathrm{P}_l^m(x) = \dfrac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$

定义函数 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$，即

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) \equiv \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l$$

§2.3 函数 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$

按照 $\mathrm{P}_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$，$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 并没有意义

因为求导 $-m$ 次是没有意义的

然而，只要 $m \le l$，就能通过微分表示 $\mathrm{P}_l^m(x) = \dfrac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$ 定义函数 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$，即

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) \equiv \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l$$

由于 m 在连带 Legendre 方程中只以 m^2 形式出现，方程对于 $m \to -m$ 的替换是不变的，所以有理由推测，这样定义的 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 也是连带 Legendre 方程的解

根据 **Sturm-Liouville 本征值问题**的一般结论，只要不涉及周期性边界条件，一个本征值只对应于一个线性独立的本征函数

从而进一步推测，$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 实质上应该相同，即最多相差一个常数因子

$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^{m}(x)$ 的关系

事实上，可以证明

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^{m}(x)$$

对 $m>0$ 证明上式（见讲义中选读内容）之后，可以推出

$$\mathrm{P}_l^{-|m|}(x) = (-)^{|m|} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\mathrm{P}_l^{|m|}(x), \quad \mathrm{P}_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\mathrm{P}_l^{-|m|}(x)$$

$$|m| \to -|m|$$

$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的关系

- 事实上，可以证明

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x)$$

- **对 $m>0$ 证明上式**（见讲义中选读内容）之后，可以推出

$$\mathrm{P}_l^{-|m|}(x) = (-)^{|m|}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\mathrm{P}_l^{|m|}(x), \quad \mathrm{P}_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\mathrm{P}_l^{-|m|}(x)$$

$$|m| \to -|m|$$

- 对于 $m<0$，则 $|m|=-m$，就可以得到

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = \mathrm{P}_l^{|m|}(x) = (-)^{-|m|}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\mathrm{P}_l^{-|m|}(x) = (-)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x)$$

- 可见，$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-)^m\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x)$ 对于 $m>0$ 和 $m<0$ 两种情况**都成立**

- 如果对 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 中 m **的正负不作限制**，则 $l \geq |m|$

§2.4–§2.5 连带 Legendre 函数的正交关系和模

作为 **Sturm-Liouville 本征值问题**的特例，**相同** m **不同** l 的**连带 Legendre 函数**在区间 $[-1,1]$ 上有**正交关系**

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad l \neq l'$$

连带 Legendre 函数的**模**（推导过程见讲义选读内容）为

$$\|\mathrm{P}_l^m\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_l^m(x)]^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

上式**对** $m>0$ **和** $m<0$ **均成立**，$m=0$ 时退化为 $\|\mathrm{P}_l^0\| = \|\mathrm{P}_l\| = \sqrt{\dfrac{2}{2l+1}}$

§2.4–§2.5 连带 Legendre 函数的正交关系和模

作为 **Sturm-Liouville 本征值问题**的特例，**相同** m **不同** l 的**连带 Legendre 函数**在区间 $[-1,1]$ 上有**正交关系**

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad l \neq l'$$

连带 Legendre 函数的**模**（推导过程见讲义选读内容）为

$$\|\mathrm{P}_l^m\| \equiv \sqrt{\int_{-1}^{1} [\mathrm{P}_l^m(x)]^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

上式**对** $m>0$ **和** $m<0$ **均成立**，$m=0$ 时退化为 $\|\mathrm{P}_l^0\| = \|\mathrm{P}_l\| = \sqrt{\dfrac{2}{2l+1}}$

以上两式可以统一写为 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} = \|\mathrm{P}_l^m\|^2\delta_{ll'}$

等价地，有 $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} = \|\mathrm{P}_l^m\|^2\delta_{ll'}$

§2.6 广义 Fourier 级数

作为 **Sturm-Liouville 本征值**问题的特例，**连带 Legendre 函数**在区间 $[-1,1]$ 上是**完备**的

因此，区间 $[-1,1]$ 上任意一个**解析良好的函数** $f(x)$ 必定可以用 $\{\mathrm{P}_l^m(x)\}_{l=m}^{\infty}$ 展开为**广义 Fourier 级数**

$$f(x)=\sum_{l=m}^{\infty} f_l \mathrm{P}_l^m(x), \quad -1\le x\le 1$$

利用 $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\,\mathrm{d}x=\|\mathrm{P}_l^m\|^2\delta_{ll'}$，求得**展开系数**为

$$f_l=\frac{1}{\|\mathrm{P}_l^m\|^2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_l^m(x)\,\mathrm{d}x, \quad l=m,m+1,\cdots$$

为**确定**起见，上面认为 $m>0$

§2.7 连带 Legendre 函数的递推关系

- 连带 Legendre 函数的递推关系都可以从 Legendre 多项式的递推关系导出
- 例如，对递推关系一 $(2l+1)x\mathrm{P}_l(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x) + l\mathrm{P}_{l-1}(x)$ 求导 m 次
- 利用 $[x\mathrm{P}_l(x)]^{(m)} = \sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k x^{(k)} \mathrm{P}_l^{(m-k)}(x) = x\mathrm{P}_l^{(m)}(x) + m\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x)$，推出

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l^{(m)}(x) + m(2l+1)\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x) = (l+1)\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x) + l\mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)$$

§2.7 连带 Legendre 函数的递推关系

- 连带 Legendre 函数的递推关系都可以从 Legendre 多项式的递推关系导出
- 例如，对递推关系一 $(2l+1)x\mathrm{P}_l(x)=(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)+l\mathrm{P}_{l-1}(x)$ 求导 m 次
- 利用 $[x\mathrm{P}_l(x)]^{(m)}=\sum\limits_{k=0}^{m}C_m^k x^{(k)}\mathrm{P}_l^{(m-k)}(x)=x\mathrm{P}_l^{(m)}(x)+m\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x)$，推出

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l^{(m)}(x)+m(2l+1)\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x)=(l+1)\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x)+l\mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)$$

- 对递推关系三 $(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)-\mathrm{P}'_{l-1}(x)$ 求导 $m-1$ 次，得

$$(2l+1)\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x)=\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x)-\mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)$$

- 联立消去 $\mathrm{P}_l^{(m-1)}(x)$，有

$$(2l+1)x\mathrm{P}_l^{(m)}(x)+m[\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x)-\mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)]=(l+1)\mathrm{P}_{l+1}^{(m)}(x)+l\mathrm{P}_{l-1}^{(m)}(x)$$

- 两边同乘以 $(1-x^2)^{m/2}$，整理得到连带 Legendre 函数的递推关系

$$(l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}^m(x)-(2l+1)x\mathrm{P}_l^m(x)+(l+m)\mathrm{P}_{l-1}^m(x)=0$$

§2.8 球谐函数

- 在球坐标系中对 Laplace 方程或 Helmholtz 方程作分离变量 $u(\boldsymbol{r}) = R(r)Y(\theta, \phi)$
- 那么，角向部分 $Y(\theta, \phi)$ 满足球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0$$

- 由于球坐标系的特点，函数 $Y(\theta, \phi)$ 应该满足以下两个自然边界条件

$$Y(0, \phi) \text{ 和 } Y(\pi, \phi) \text{ 没有奇性}, \quad Y(\theta, \phi + 2\pi) = Y(\theta, \phi)$$

- 这里没有奇性指具有确切的定义，并且是有限的
- 上述方程和边界条件构成一个偏微分方程的本征值问题

§2.8 球谐函数

- 在球坐标系中对 Laplace 方程或 Helmholtz 方程作分离变量 $u(\boldsymbol{r}) = R(r)Y(\theta,\phi)$
- 那么，角向部分 $Y(\theta,\phi)$ 满足球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0$$

- 由于球坐标系的特点，函数 $Y(\theta,\phi)$ 应该满足以下两个自然边界条件

$$Y(0,\phi)\ \text{和}\ Y(\pi,\phi)\ \text{没有奇性},\quad Y(\theta,\phi+2\pi) = Y(\theta,\phi)$$

- 这里没有奇性指具有确切的定义，并且是有限的
- 上述方程和边界条件构成一个偏微分方程的本征值问题
- 进一步作分离变量 $Y(\theta,\phi) = H(\theta)\Phi(\phi)$
- 已经求得 $\Phi(\phi) = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\}\ (m\in\mathbb{N})$，相应的本征值 m^2 进入 $H(\theta)$ 的方程
- 对于确定的 m，$H(\theta) = \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$，本征值为 $\lambda_l = l(l+1),\ l = m, m+1, \cdots$

球谐函数

🏇 对于一个确定**本征值** $\lambda_l = l(l+1)$，上述**偏微分方程本征值问题**有下列**本征函数**

$$\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, l$$

🚴 或者表达成

$$\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$$

球谐函数

- 对于一个确定**本征值** $\lambda_l = l(l+1)$，上述**偏微分方程本征值问题**有下列**本征函数**

$$\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, l$$

- 或者表达成

$$\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$$

- 由于 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 只**相差一个常数因子**，以上本征函数又等价于

$$S_{lm}(\theta, \phi) = \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$$

- 这些函数称为**球谐函数** (spherical harmonics)
- 可见，对应于一个本征值，本征函数是 $2l+1$ **个线性独立**的球谐函数
- 故本征值 λ_l 的**简并度**为 $2l+1$
- l 称为球谐函数的**阶**

归一化球谐函数

- 物理上更常用的是**归一化的球谐函数**

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) = (-)^m \frac{\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)}{\|\mathrm{P}_l^m\|}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}}{\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\|} = (-)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$l\in\mathbb{N},\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$$

- 归一化因子 $\|\mathrm{P}_l^m\| = \sqrt{\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}\dfrac{2}{2l+1}}$ 是函数 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ **的模**

- 归一化因子 $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\| = \sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}|^2\,\mathrm{d}\phi} = \sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi} = \sqrt{2\pi}$ 是函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ **的模**

归一化球谐函数

- 物理上更常用的是**归一化的球谐函数**

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) = (-)^m \frac{\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)}{\|\mathrm{P}_l^m\|}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}}{\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\|} = (-)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$l\in\mathbb{N},\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$$

- 归一化因子 $\|\mathrm{P}_l^m\| = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}$ 是函数 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 的**模**
- 归一化因子 $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\| = \sqrt{\int_0^{2\pi}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}|^2\,\mathrm{d}\phi} = \sqrt{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi} = \sqrt{2\pi}$ 是函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ 的**模**
- **归一化**以后相位因子还可以**任取**，**相位因子** $(-)^m$ 的取法是历史上沿袭下来的
- 球谐函数有**不同**的**定义**，主要就在于相位因子的取法不同
- 定义不同，有关的公式也会有所不同，在使用时应该加以留意

球面上的广义 Fourier 级数

- 由 $\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \|\mathrm{P}_l^m\|^2\delta_{ll'}$ 和 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-m')\phi}\mathrm{d}\phi = \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\|\delta_{mm'}$
- 容易得到**归一化球谐函数**在**单位球面**上的**正交归一关系**

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \mathrm{Y}_{l'm'}^*(\theta,\phi)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

球面上的广义 Fourier 级数

由 $\int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)P_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = \|P_l^m\|^2\delta_{ll'}$ 和 $\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi}d\phi = \|e^{im\phi}\|\delta_{mm'}$

容易得到**归一化球谐函数**在**单位球面**上的**正交归一关系**

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta,\phi)\sin\theta\,d\theta\,d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

球谐函数在**球面**上是**完备**的，**球面**上**任意解析良好的函数** $f(\theta,\phi)$ 一定可以展开为

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

根据**正交归一关系**，**展开系数**为

$$f_{lm} = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi Y_{lm}^*(\theta,\phi)f(\theta,\phi)\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

球坐标系下 Laplace 方程的一般解

在球坐标下讨论 **Laplace 方程** $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$，**本征值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0 \\ Y(0,\phi) \text{ 和 } Y(\pi,\phi) \text{ 没有奇性,} \quad Y(\theta,\phi+2\pi) = Y(\theta,\phi) \end{cases}$$

的**本征值** $\lambda = l(l+1)$ **与** m **无关**

因此，**径向方程** $r^2R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$ 的**解**仍然是 $R(r) = \left\{r^l, \dfrac{1}{r^{l+1}}\right\}$

于是，**球坐标系**下 Laplace 方程的**一般解**为

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)$$

球坐标系下 Laplace 方程的一般解

在球坐标下讨论 **Laplace 方程** $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$，**本征值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \lambda Y = 0 \\ Y(0,\phi) \text{ 和 } Y(\pi,\phi) \text{ 没有奇性，} \quad Y(\theta,\phi+2\pi) = Y(\theta,\phi) \end{cases}$$

的**本征值** $\lambda = l(l+1)$ **与 m 无关**

因此，**径向方程** $r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$ 的**解**仍然是 $R(r) = \left\{ r^l, \dfrac{1}{r^{l+1}} \right\}$

于是，**球坐标系**下 Laplace 方程的**一般解**为

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)$$

本征函数族 $\{\cos m\phi, \sin m\phi\}_{m=0}^{\infty}$ 与 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\}_{m=0}^{\infty}$ 等价，**一般解**也可以写成

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\Big[& r^l (A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi) \\ & + \frac{1}{r^{l+1}}(C_{lm}\cos m\phi + D_{lm}\sin m\phi)\Big]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) \end{aligned}$$