

# 粒子物理简介

## 第二节 粒子运动学、衰变和散射

余钊焕

中山大学物理学院

<http://yzhxxzxy.github.io>



2020 年 8 月



## 能量、动量和质量

💡 粒子物理学常常研究高速运动的粒子，需要在**狭义相对论**框架下描述粒子的运动。平直时空中的**闵可夫斯基度规**通常约定为

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

爱因斯坦求和约定

省略求和符号

对重复的指标求和

💡 粒子的**能量**  $E$  和 **3 维动量**  $\mathbf{p}$  构成 **4 维动量**  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ 。  $p^\mu$  是一个洛伦兹逆变矢量，对应的协变矢量为  $p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (E, -\mathbf{p})$ 。  $p^\mu$  的内积

$$p^2 \equiv p \cdot p \equiv p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

是一个**洛伦兹不变量**，即在洛伦兹变换下不变，在所有惯性系中有相同的值。

🌑  $m$  是粒子的**（静止）质量**

🌕 自由运动的粒子满足**质壳条件**  $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$ ，即  $E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$

🌕 粒子的**3 维速度**定义为  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$

# 洛伦兹变换

💡 **洛伦兹变换** 将一个洛伦兹矢量在一个**惯性参考系**  $\Sigma$  中的测量值变换成它在另一个**惯性参考系**  $\Sigma'$  中的测量值

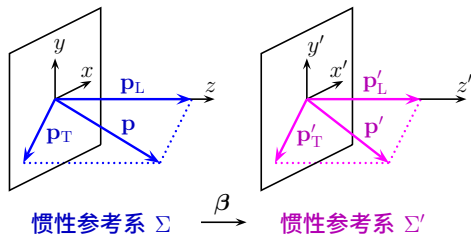
🖋 设  $\Sigma'$  系相对于  $\Sigma$  系的运动速度为  $\beta$ ，粒子在  $\Sigma$  系中的能量和动量分别为  $E$  和  $\mathbf{p}$ ，记  $\mathbf{p}$  在平行于  $\beta$  方向上的分量为  $p_L$ ，在垂直于  $\beta$  方向上的分量为  $\mathbf{p}_T$ ，则粒子在  $\Sigma'$  系中的能量和动量为

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma|\beta| \\ -\gamma|\beta| & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}'_T = \mathbf{p}_T,$$

其中洛伦兹因子  $\gamma = (1 - |\beta|^2)^{-1/2}$

✨ 可以验证， $p'^2 = p^2$ ，即 4 维动量的内积在洛伦兹变换下不变

粒子能量  $E$  与质量  $m$  的关系为  
 $E = \gamma m$ ，这里  $\gamma = (1 - |\mathbf{v}|^2)^{-1/2}$ 。



# 动尺缩短和动钟延缓

💡 时空坐标  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$  是洛伦兹矢量，服从洛伦兹变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{x}'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma|\boldsymbol{\beta}| \\ -\gamma|\boldsymbol{\beta}| & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x}_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_T = \mathbf{x}_T.$$

🖋️ 引起两个相对论效应

- ① **运动的尺子变短**：从静止参考系  $\Sigma$  中观察固定在运动参考系  $\Sigma'$  中的一个物体，则它在平行于  $\boldsymbol{\beta}$  方向上的长度  $L'$  变短为  $L = L'/\gamma < L'$
- ② **运动的时钟变慢**：运动参考系  $\Sigma'$  中的时间间隔  $\Delta t'$  比静止参考系  $\Sigma$  中的时间间隔  $\Delta t$  长，满足  $\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t$

🟡  $\mu$  子质量  $m = 106 \text{ MeV}$ ，寿命  $\tau = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ ；对于能量  $E = 106 \text{ GeV}$  的  $\mu$  子， $\gamma = E/m = 10^3$ ，因而飞行寿命会延长到  $\tau' = 2.2 \times 10^{-3} \text{ s}$

🟡  $\pi^\pm$  介子质量为  $140 \text{ MeV}$ ，寿命为  $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ ，能量为  $1.4 \text{ GeV}$  时从产生到衰变平均可以飞行七十多米，能量为  $14 \text{ GeV}$  时则可达到七百多米

# 质心系

💥 对粒子能动量的实验测量是在**实验室参考系**中进行的；不过，对于多粒子系统，在**质心参考系**中描述粒子运动状态通常会更加简单


✎ **质心系**定义为使系统总动量为零的参考系，满足  $\mathbf{p}_{\text{CM}} \equiv \sum_i \mathbf{p}_i^{\text{CM}} = 0$

💡 系统的**质心系能量（质心能）**  $E_{\text{CM}} \equiv \sum_i E_i^{\text{CM}}$  是一个洛伦兹不变量：


$$p_{\text{CM}}^\mu \equiv (E_{\text{CM}}, \mathbf{p}_{\text{CM}}), \quad p_{\text{CM}}^2 = \left( \sum_i E_i^{\text{CM}} \right)^2 - \left( \sum_i \mathbf{p}_i^{\text{CM}} \right)^2 = \left( \sum_i E_i^{\text{CM}} \right)^2 = E_{\text{CM}}^2$$


- 系统的质心系总能量  $E_{\text{CM}}$  是激发粒子体系内部相互作用的**有效能量**
- 几个粒子的总质心能也称为它们的**不变质量**， $m_{\text{inv}} = E_{\text{CM}}$ ；由于**能动量守恒**，如果几个粒子是同一个母粒子的衰变产物， $m_{\text{inv}}$  就是母粒子的质量
- 两个粒子碰撞时，质心系中两个入射粒子动量大小相同，方向相反；质心系中出射粒子的角度分布是**轴对称**的，以任一入射粒子的动量方向为轴
- 标量粒子衰变所产生的次级粒子在质心系中呈**球对称**分布；若母粒子自旋不为零，次级粒子在质心系中则呈**轴对称**分布，以母粒子自旋方向为轴

## 固定靶实验和对撞实验

 **固定靶实验** 用粒子束流轰击固定靶来发生相互作用。实验室系中，记静止靶粒子  $A$  的动量为  $p_A^\mu = (m_A, \mathbf{0})$ ，入射粒子  $B$  的动量为  $p_B^\mu = (E_B, \mathbf{p}_B)$ ，则

$$E_{\text{CM}}^2 = (p_A + p_B)^2 = p_A^2 + p_B^2 + 2p_A \cdot p_B = m_A^2 + m_B^2 + 2m_A E_B$$

 对于高能入射粒子， $m_A, m_B \ll E_B$ ，质心能  $E_{\text{CM}} \simeq \sqrt{2m_A E_B}$

 **对撞实验** 用两个粒子束流相撞来发生相互作用。目前已有  $e^+e^-$ 、 $pp$ 、 $p\bar{p}$  和  $e^\pm p$  等束流不同的对撞机。设粒子  $A$  和  $B$  沿相反方向入射并对撞，若能量远高于质量，则  $|\mathbf{p}_A| \simeq E_A$ ， $|\mathbf{p}_B| \simeq E_B$ ， $p_A^2 \simeq p_B^2 \simeq 0$ ，在实验室系中可得

$$E_{\text{CM}}^2 = p_A^2 + p_B^2 + 2p_A \cdot p_B \simeq 2E_A E_B + 2|\mathbf{p}_A||\mathbf{p}_B| \simeq 4E_A E_B$$

 质心能  $E_{\text{CM}} \simeq \sqrt{4E_A E_B}$

费米实验室的 Tevatron 是  $p\bar{p}$  对撞机， $E_p = E_{\bar{p}} \simeq 1 \text{ TeV}$ ， $E_{\text{CM}} \simeq 2 \text{ TeV}$ 。若改为以  $p$  为靶的打靶实验，需要入射  $\bar{p}$  能量为  $E_{\bar{p}} \simeq 2000 \text{ TeV}$  才能达到相同的质心能。由此可见，**对撞实验远比固定靶实验更能有效地利用能量。**

## 末态相空间



衰变和散射过程可包含多个末态粒子，其能动量可取运动学允许的任意值



计算衰变宽度和散射总截面要**对所有末态粒子的动量相空间积分**



单个粒子的**洛伦兹不变动量相空间体积元**为  $d^4p/(2\pi)^4 = dp^0 d^3p/(2\pi)^4$



末态粒子应满足**质壳条件**且**能量为正**



考虑到这两个限制，体积元变成  $\frac{dp^0 d^3p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta((p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2) \theta(p^0)$



对  $p^0$  积分，利用恒等式  $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$  ( $x_i$  为  $f(x)$  的根)，可得

$$\begin{aligned} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi} 2\pi \delta((p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2) \theta(p^0) &= \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int dp^0 \frac{\delta(p^0 - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2})}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} \\ &= \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \end{aligned}$$



因此， $n$  体末态相空间不变体积元为  $d\Pi_n = \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$

# 衰变

💥 不稳定粒子的**衰变**是一个泊松过程

✎ 在静止参考系中，粒子衰变前存活的时间  $\geq t$  的概率由**指数分布**给出，

$$P(t) = e^{-t/\tau} = e^{-\Gamma t},$$

✨  $\tau$  是粒子**寿命**， $\Gamma$  是粒子**衰变宽度**

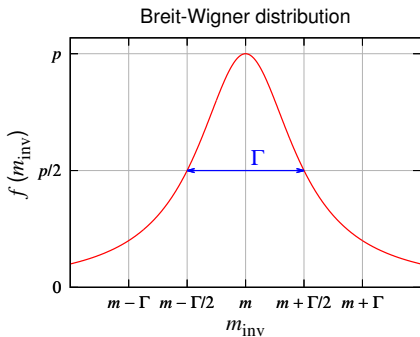
$$\Gamma \equiv \frac{1}{\tau}$$

🌑 不稳定粒子的质量并不是确定的值，

而是一个分布，即衰变产物不变质量  $m_{\text{inv}}$  的分布，服从 **Breit-Wigner 分布**

$$f(m_{\text{inv}}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(m_{\text{inv}} - m)^2 + \Gamma^2/4}$$

🌑 分布的中心值  $m$  是通常所说的粒子**质量**，分布的半峰全宽是粒子宽度  $\Gamma$





## 分支比和分宽度

💥 一个粒子可能有多种衰变过程。在一次衰变中，某个衰变过程  $j$  发生的概率称为它的**分支比**  $\mathcal{B}_j$ 。定义衰变过程  $j$  的**分宽度**为  $\Gamma_j = \Gamma \mathcal{B}_j$ ，则

$$\sum_j \mathcal{B}_j = \frac{1}{\Gamma} \sum_j \Gamma_j = 1, \quad \text{即 } \Gamma = \sum_j \Gamma_j$$

🖋️ 对于末态为  $n$  体的衰变过程  $j$ ，分宽度在理论计算中表达为

$$\Gamma_j = \frac{1}{2m} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p^\mu - \sum_i p_i^\mu\right) |\mathcal{M}_j|^2$$

✨ 这里  $m$  和  $p^\mu$  是母粒子的质量和 4 动量，4 维  $\delta$  函数体现能动量守恒

🌙 **不变振幅**  $\mathcal{M}_j$  是发生  $j$  过程的概率振幅，在洛伦兹变换下不变

一个粒子物理理论模型会定义粒子类型和拉格朗日密度量（**拉氏量**），由此给出一套**费曼规则** 🖐️ 利用这套规则画出**费曼图**来表示所有可能发生的衰变和散射过程 🖐️ 根据**量子场论**知识，通过费曼图计算不变振幅

## 寿命和衰变长度

### ● 寿命长于 $10^{-10}$ s 的粒子

👉  $\mu^\pm$ ,  $\pi^\pm$  介子,  $K^\pm$  介子, 中子  $n$ ,  $\Lambda^0$  重子,  $K_L^0$  介子, ……

👉 相对稳定, 产生后能够飞行较长距离

### ● 寿命在 $10^{-12} - 10^{-10}$ s 之间的粒子

👉  $\tau^\pm$ ,  $K_S^0$  介子,  $D^0$  介子,  $D^\pm$  介子,  $B^0$  介子,  $B^\pm$  介子, ……

👉 产生后能够飞行一段探测器可分辨的距离

### ● 寿命短于 $10^{-12}$ s 的粒子

👉  $W^\pm$ ,  $Z^0$ ,  $t$ ,  $H^0$ ,  $\pi^0$  介子,  $\rho^0$  介子,  $\rho^\pm$  介子, ……

👉 平均衰变长度  $d = \beta\gamma\tau \simeq \gamma \left( \frac{\tau}{10^{-12} \text{ s}} \right) 300 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $\gamma = \frac{E}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

👉  $\pi^\pm$  介子质量  $m = 140 \text{ MeV}$ , 寿命  $\tau = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ , 能量  $E = 1.4 \text{ GeV}$   
 时  $\gamma = 10$ , 平均衰变长度  $d \simeq 10 \times (2.6 \times 10^4) \times (3 \times 10^{-4} \text{ m}) = 78 \text{ m}$

# 散射

💥 **散射**是两个粒子通过碰撞发生反应的过程

🟡 **弹性散射**：碰撞粒子之间只有动量交换，类型和内部状态没有发生改变

🟡 **非弹性散射**：粒子内部状态有所改变或转化为其它粒子

🌙 描述散射过程本质的物理量是**散射截面**  $\sigma$ ，它是粒子间相互作用的有效面积，表征相互作用的强弱；常用单位是**靶**，记作 b， $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$

💧  $1 \text{ pb} = 10^{-36} \text{ cm}^2 = 2.568 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}$ ,  $1 \text{ GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^8 \text{ pb}$

🖋️ 对于末态为  $n$  体的散射过程，散射截面在理论计算中表达为

$$\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A^\mu + p_B^\mu - \sum_i p_i^\mu) |\mathcal{M}|^2$$

✨ 与分宽度的计算公式类似，**4 维  $\delta$  函数**体现能动量守恒，而  $\mathcal{M}$  是散射过程的**不变振幅**，可以通过费曼图计算

## 散射截面与相互作用率

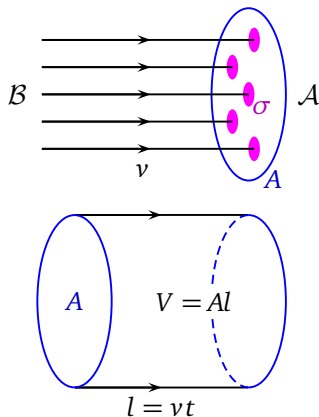
● 设两束粒子  $A$  和  $B$  发生散射，各自含有  $N_A$  和  $N_B$  个粒子， $A$  与  $B$  相互作用的散射截面为  $\sigma$ ，粒子束相互投射的区域横截面积为  $A$ ，则相互作用发生的次数为

$$N = N_A N_B \frac{\sigma}{A}$$


● 若两个粒子束的数密度为  $n_A$  和  $n_B$ ，彼此间相对速度为  $v = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ ，则在  $t$  时间内相互投射的区域体积为  $V = Avt$

● 由于  $N_A = n_A V$ ， $N_B = n_B V$ ，单位时间单位体积内的相互作用率为

$$R = \frac{N}{Vt} = \frac{1}{Vt} \frac{n_A V n_B V \sigma}{A} = n_A n_B \sigma \frac{V}{At} = n_A n_B \sigma v$$





# Mandelstam 变量

 两体散射常用到洛伦兹不变的 **Mandelstam 变量**

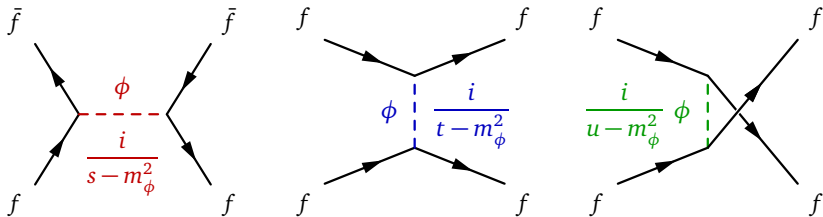
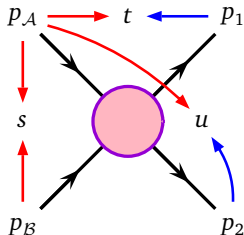
$$s \equiv (p_A + p_B)^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad t \equiv (p_A - p_1)^2 = (p_B - p_2)^2$$

$$u \equiv (p_A - p_2)^2 = (p_B - p_1)^2, \quad s + t + u = \sum_{i=A,B,1,2} m_i^2$$

  $s$  的定义可推广到任意  $n$  体末态, 且  $\sqrt{s} = E_{\text{CM}}$

 习惯上使用  $\sqrt{s}$  表示散射过程的**质心能**

★ 当两体散射费曼图只包含一条内线时, 内线传播子的动量对应于  $s$ 、 $t$  或  $u$ , 相应地称之为  **$s$  通道**、 **$t$  通道**或  **$u$  通道**的费曼图



# 运动学条件

💡 根据**狭义相对性原理**，物理定律在一切惯性参考系中具有相同形式

👉 利用**质心系**可以方便地分析一个过程需要满足的运动学条件

🌑 衰变过程质心能为母粒子质量  $m$

👉 根据能量守恒，发生衰变的**运动学条件**是  $m > \sum_i m_i$

👉 **粒子只能衰变成质量之和比它轻的末态粒子**

🌀  $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ ,  $m_\mu = 106 \text{ MeV}$ ,  $m_{\nu_e} \simeq m_{\nu_\mu} \simeq 0$

👉  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$  可以发生,  $e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_e$  不能发生

👉  $\mu$  子是不稳定粒子，电子是稳定粒子

🌑 对于散射过程，能量守恒要求的**运动学条件**是  $\sqrt{s} > \sum_i m_i$

👉 **散射过程质心能应大于末态粒子质量之和**

🌀 当  $\sqrt{s} > 2m_\mu$  时， $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  过程才能发生

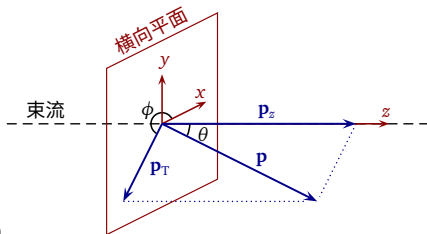
# 对撞机实验坐标系

● 以束流方向为  $z$  轴，视作**纵向**

● 将粒子的三维动量  $\mathbf{p}$  分解为**纵向动量**  $p_z \equiv |\mathbf{p}_z|$  和**横向动量**  $p_T \equiv |\mathbf{p}_T|$

●  $\mathbf{p}$  的方向由**极角**  $\theta \in [0, \pi]$  和**方位角**  $\phi \in [0, 2\pi)$  描述

● 通常用**赝快度**  $\eta \in (-\infty, \infty)$  代替  $\theta$



$$\eta \equiv -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right), \quad \theta = 2\tan^{-1}e^{-\eta}, \quad -\eta = -\ln\left(\tan\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

$\eta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5	10
$\theta$	90°	62.5°	40.4°	25.2°	15.4°	9.4°	5.7°	2.1°	0.77°	0.005°

● 在壳粒子的四维动量  $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$  可以用变量集  $\{m, p_T, \eta, \phi\}$  表达

● 两个粒子动量之间的**角间距**用  $\Delta R = \sqrt{(\phi_1 - \phi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}$  描述

●  $p_T$  较大的粒子更可能来自**硬散射** 🖐️ 根据  $p_T$  大小为粒子或喷注**排序**

# 快度

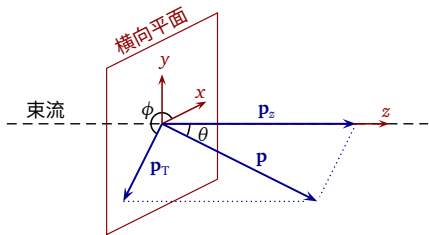
📍 引入**快度**  $\xi \equiv \tanh^{-1} \frac{p_z}{E}$ ，它是将  $p_z$  变换为零的洛伦兹变换的速度参数

💡 质量  $m = 0$  📍  $E = |\mathbf{p}|$

📍  $\cos \theta = \frac{p_z}{|\mathbf{p}|} = \frac{p_z}{E} = \tanh \xi$

📍  $\eta = -\ln \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh \xi}{1 - \tanh \xi} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh \xi + \sinh \xi}{\cosh \xi - \sinh \xi} = \frac{1}{2} \ln e^{2\xi} = \xi$$



★ 对于**相对论性**粒子，赝快度  $\eta$  是快度  $\xi$  的**良好近似**


📍 引入**横向能量**  $E_T \equiv \sqrt{m^2 + p_T^2}$  📍  $E = E_T \cosh \xi$ ,  $p_z = E_T \sinh \xi$

🌙 若一个粒子衰变为粒子 1 和粒子 2，则它的质量  $m$  可以表达为


$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2[E_{1T}E_{2T} \cosh(\xi_1 - \xi_2) - \mathbf{p}_{1T} \cdot \mathbf{p}_{2T}]}$$





# 运动学变量：不变质量、反冲质量

 在对撞机实验中，经常有多个过程贡献到**相同**的末态


 通过构造多种各具特色的**运动学变量**，可以在数据分析中区分不同过程

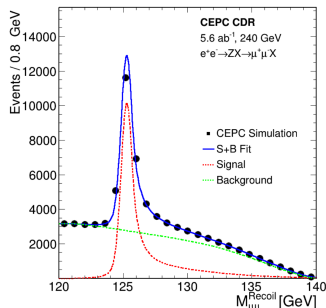
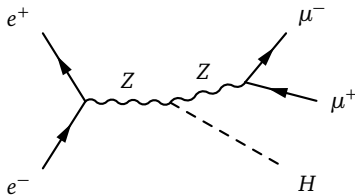
 **不变质量**  $m_{\text{inv}} \equiv \sqrt{(p_1 + p_2 + \cdots + p_i)^2}$  用于从衰变产物重建母粒子质量

 在  $e^+e^-$  对撞机上，入射粒子的四维动量是确定的，可以定义**反冲质量**

 对于  $e^+ + e^- \rightarrow 1 + 2 + \cdots + n$  过程，粒子 1 的反冲质量定义为

$$m_{1,\text{rec}} \equiv \sqrt{[p_{e^+} + p_{e^-} - (p_2 + \cdots + p_n)]^2}$$

 在  $e^+e^-$  对撞机上可以利用**伴随产生**的粒子来测量粒子质量和产生截面



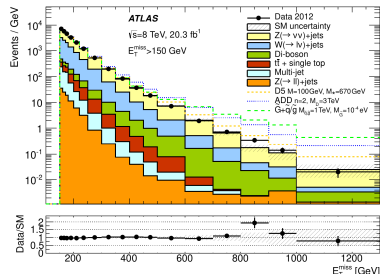
[CEPC CDR Vol. 2, arXiv:1811.10545]

# 运动学变量: $\cancel{E}_T$ , $H_T$ , $m_{\text{eff}}$

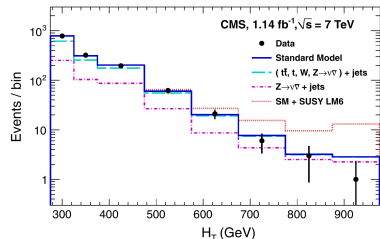
对撞机上的探测器**不能**测量**中微子**和假想的**暗物质粒子**，它们的存在会导致测量到的横向总动量非零，可用所有可见粒子  $i$  的横向动量定义**横向丢失动量**  $\vec{p}_T \equiv -\sum_i \vec{p}_T^i$  和**横向丢失能量**  $\cancel{E}_T \equiv |\vec{p}_T|$  (亦记为  $E_T^{\text{miss}}$ )，以表征**不可见粒子**的能量标度

喷注  $j_i$  的横向动量的**标量和**  $H_T \equiv \sum_i p_T^{j_i}$  表征硬散射过程中喷注的能量标度

**有效质量**  $m_{\text{eff}} \equiv \cancel{E}_T + H_T$  表征硬散射过程中喷注加不可见粒子的能量标度



[ATLAS Coll., arXiv:1502.01518, EPJC]



[CMS Coll., arXiv:1109.2352, PRL]

## 运动学变量: $m_T$

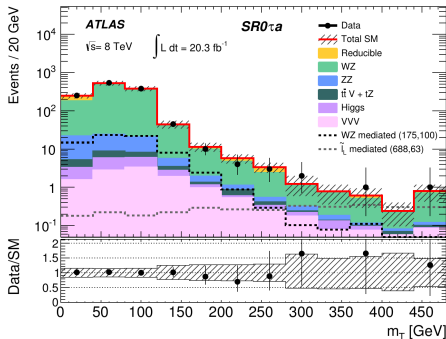
考虑像  $W \rightarrow \ell \nu_\ell$  这样的**半不可见衰变**过程  $P \rightarrow \nu + i$ , 其中  $\nu$  是可见粒子,  $i$  是不可见粒子, 定义**横向质量**  $m_T \equiv \sqrt{m_\nu^2 + m_i^2 + 2(E_T^\nu E_T^i - \mathbf{p}_T^\nu \cdot \mathbf{p}_T^i)}$ , 其中  $E_T^{\nu,i} \equiv \sqrt{m_{\nu,i}^2 + (p_T^{\nu,i})^2}$ ,  $\mathbf{p}_T^i = \mathbf{p}_T$ , 则由  $\cosh x \geq 1$  得

$$m_T \leq \sqrt{m_\nu^2 + m_i^2 + 2[E_T^\nu E_T^i \cosh(\xi_\nu - \xi_i) - \mathbf{p}_T^\nu \cdot \mathbf{p}_T^i]} = m_P$$

👉  $P$  的质量  $m_P$  约束了  $m_T$  的值

💡 在实践中,  $m_\nu$  通常很小,  $m_i$  要么为零要么未知, 因此经常采用**近似**定义  $m_T = \sqrt{2(p_T^\nu \cancel{E}_T - \mathbf{p}_T^\nu \cdot \mathbf{p}_T)}$

💡 对于只包含一个不可见粒子的**三体衰变**过程 (如  $t \rightarrow b \ell^+ \nu_\ell$ ), 可以先将两个可见粒子的横向动量叠加起来, 然后再定义  $m_T$



[ATLAS Coll., arXiv:1402.7029, JHEP]

# 运动学变量: $m_{T2}$

对于双重半不可见衰变过程，可以利用  $m_{T2}$  变量

考虑一对正反粒子  $P\bar{P}$  的衰变过程  $P(\rightarrow \nu_1 i) + \bar{P}(\rightarrow \nu_2 \bar{i})$ ，其中  $\nu_1$  和  $\nu_2$  是可见粒子， $i$  和  $\bar{i}$  是不可见粒子，定义 [Lester & Summers, arXiv:hep-ph/9906349, PLB]

$$m_{T2}(\mu_i) = \min_{\mathbf{p}_T^1 + \mathbf{p}_T^2 = \mathbf{p}_T} \left\{ \max \left[ m_T(\mathbf{p}_T^{\nu_1}, \mathbf{p}_T^1; m_{\nu_1}, \mu_i), m_T(\mathbf{p}_T^{\nu_2}, \mathbf{p}_T^2; m_{\nu_2}, \mu_i) \right] \right\}$$

$\mu_i$  是  $i$  粒子的测试质量，经常设为零

如果  $\mu_i$  等于  $i$  粒子的真实质量  $m_i$ ，就可以推出  $m_{T2} \leq m_P$

