粒子物理简介

第四节　粒子物理标准模型

余钊焕

中山大学物理学院

http://yzhxxzxy.github.io

2018 年 5 月

粒子物理标准模型

粒子物理**标准模型**是一个 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论。模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子。规范玻色子传递费米子间相互作用。

1. $SU(3)_C$ 部分描述夸克的**强相互作用**，称为**量子色动力学**，相应的规范玻色子是**胶子**。
2. $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 部分统一描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱统一理论**。理论中有一个希格斯二重态，引起规范群的**自发对称性破缺**，使 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群破缺为 $U(1)_{EM}$ 群。
   - 破缺前，理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个希格斯自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数。
   - 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个希格斯自由度结合，从而获得质量，成为 $W^\pm$ **和** Z^0 **玻色子**，传递**弱相互作用**；剩下的 1 个无质量规范玻色子是**光子**，即是 $U(1)_{EM}$ 群的规范玻色子，传递**电磁相互作用**；与希格斯二重态的汤川耦合导致左手费米子和右手费米子获得质量，组合成狄拉克费米子。
   - 理论中的中微子没有右手分量，因而没有获得质量。1998 年实验发现中微子振荡，证明中微子具有质量，所以需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理。

U(1) 整体对称性

时空坐标的函数称为**场**。在**量子场论**中，场被量子化，而粒子是场的激发态，粒子间相互作用来源于各种场之间的相互作用。场的运动规律由**最小作用量原理**决定，作用量 $S=\int d^4x\mathcal{L}(x)$，其中拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是用场表达出来的。

对于一个**不参与相互作用**的狄拉克费米子场 $\psi(x)$，运动规律可以用拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{free}}(x)=\bar{\psi}(x)i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)-m\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

描述，其中狄拉克矩阵 γ^{μ} 是满足 $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2g^{\mu\nu}$ 的 4×4 常数矩阵，时空导数 $\partial_{\mu}\equiv\partial/\partial x^{\mu}$，$m$ 为费米子质量，$\bar{\psi}\equiv\psi^{\dagger}\gamma^{0}$。对 ψ 作 **U(1) 整体变换**

$$\psi(x)\to\psi'(x)=e^{iQ\theta}\psi(x),$$

(整体意味着相位 θ 不是时空坐标的函数)，则 $\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{-iQ\theta}$，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}}(x)\to\mathcal{L}'_{\text{free}}(x) &= \bar{\psi}'(x)(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi'(x)\\ &= \bar{\psi}(x)e^{-iQ\theta}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)e^{iQ\theta}\psi(x)=\mathcal{L}_{\text{free}}(x).\end{aligned}$$

可见，自由费米子场的拉氏量具有 **U(1) 整体对称性**。于是，根据**诺特定理**，U(1) 群的荷（生成元）Q 是**守恒**的。

U(1) 规范对称性

若相位 θ 是时空坐标的函数，则上述变换变成局域的 U(1) **规范变换**

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}\psi(x).$$

从而，$\partial_\mu\psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}[\partial_\mu + iQ\partial_\mu\theta(x)]\psi(x)$ 导致 $\mathcal{L}'_{\text{free}}(x) \neq \mathcal{L}_{\text{free}}(x)$。为了重新得到对称性，需要引入**规范场** $A_\mu(x)$，令它的 U(1) **规范变换**为

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x),$$

以此补偿相位 $\theta(x)$ 的时空导数引起的差异。将拉氏量修改为

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x),$$

其中**协变导数**定义为 $D_\mu \equiv \partial_\mu - iQeA_\mu(x)$，则可得 $\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x)$。因此 $\mathcal{L}(x)$ 具有 U(1) **规范对称性**，描述 U(1) **规范理论**。代价是拉氏量中多了一项

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}_{\text{free}}(x) = QeA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x),$$

它将费米子 $\psi(x)$ 和规范场 $A_\mu(x)$ 耦合起来，发生相互作用，**耦合常数**为 e。规范场 $A_\mu(x)$ 带着时空指标 μ，是一个洛伦兹矢量，对应的粒子称为**规范玻色子**，自旋为 1。$\mathcal{L}_{\text{int}}$ 导致费米子与规范玻色子发生**规范相互作用**。

量子电动力学

量子电动力学（Quantum Electrodynamics）简称 **QED**，是 $\mathrm{U(1)_{EM}}$ **规范理论**，规范玻色子为光子，描述电磁相互作用。QED 的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} &= \sum_f (\bar{f} i\gamma^\mu D_\mu f - m_f \bar{f} f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \sum_f \left[\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f + Q_f e A_\mu \bar{f}\gamma^\mu f\right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

- 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - iQ_f e A_\mu$，**电磁耦合常数** e 就是单位电荷量。
- f 代表标准模型中各种带电的费米子场，Q_f 为 f 所带**电荷**量子数，m_f 是 f 的质量。$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 中 $\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f$ **项**描述费米子场在时空中传播的过程。
- 光子场 A_μ 的**场强张量**定义为 $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$。可以验证，$-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ **项**在 $\mathrm{U(1)_{EM}}$ 规范变换下不变。它描述光子场在时空中传播的过程。
- $Q_f e A_\mu \bar{f}\gamma^\mu f$ **项**描述费米子场与光子场的电磁相互作用。

费米子 f	上型夸克 u, c, t	下型夸克 d, s, b	带电轻子 e^-, μ^-, τ^-
电荷 Q_f	$+2/3$	$-1/3$	-1

动量空间

$\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 中 $\bar{f}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f$ **项**与自由费米子场的拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{free}}$ 形式相同，描述远离相互作用顶点时的费米子。根据**最小作用量原理**，此项对应于**狄拉克方程**

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f(x) = 0.$$

经过傅立叶变换之后，动量空间中的旋量系数 $u(p,s)$ 和 $v(p,s)$ 满足

$$(\not{p} - m_f)u(p,s) = 0, \quad (\not{p} + m_f)v(p,s) = 0,$$

其中 $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$。$s = \pm 1$ 称为**螺旋度**，是自旋在动量方向上的投影被归一化后的值。$s = +1$ (-1) **对应于右手（左手）费米子。**螺旋度求和关系为

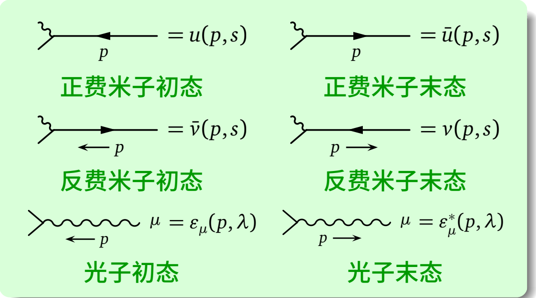
$$\sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s) = \not{p} + m_f, \quad \sum_s v(p,s)\bar{v}(p,s) = \not{p} - m_f.$$

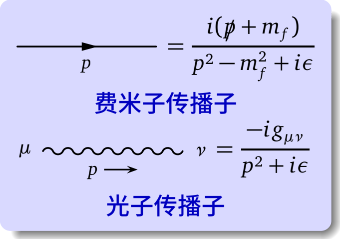
类似地，$\mathcal{L}_{\text{QED}}$ 中 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ **项**描述远离相互作用顶点时的光子。在动量空间中，光子的运动行为可用**极化矢量** $\varepsilon_\mu(p,\lambda)$ 描写，其中 $\lambda = \pm 1$ 是光子的螺旋度。$\lambda = +1$ (-1) **对应于右旋（左旋）极化的光子。**螺旋度求和关系为

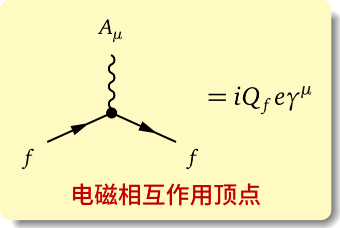
$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(p,\lambda)\varepsilon^*_\nu(p,\lambda) \to -g_{\mu\nu}.$$

QED 费曼规则

$\bar{f}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f$ 项和 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 项分别提供费米子与光子的**初末态**和**传播子**的费曼规则，而 $Q_f eA_\mu\bar{f}\gamma^\mu f$ 项提供**电磁相互作用顶点**的费曼规则：



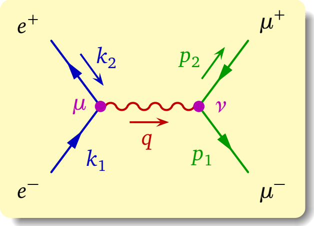




- 光子用波浪线表示。
- 费米子用带箭头的实线表示，线上的箭头方向是费米子数的方向。正粒子的动量方向与费米子数方向相同，反粒子则相反。

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射振幅

右图为 QED 散射过程 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 的最低阶费曼图，利用费曼规则将它表达成**不变振幅**：



$$i\mathcal{M} = \bar{v}(k_2,s_2)(-ie\gamma^\mu)u(k_1,s_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$
$$\times\bar{u}(p_1,s_1')(-ie\gamma^\nu)v(p_2,s_2').$$

通常考虑没有特殊极化的初态，需对初态螺旋度**取平均**，即 $\frac{1}{2}\sum_{s_1}\frac{1}{2}\sum_{s_2}$；对末态螺旋度则通过**求和**包括所有情况，即 $\sum_{s_1'}\sum_{s_2'}$。因而截面表达式的被积项应为

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1s_2s_1's_2'}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4}\sum_{s_1s_2s_1's_2'}\big[\bar{v}(k_2,s_2)\gamma^\mu u(k_1,s_1)\bar{u}(k_1,s_1)\gamma^\rho v(k_2,s_2)$$
$$\times\,\bar{u}(p_1,s_1')\gamma_\mu v(p_2,s_2')\bar{v}(p_2,s_2')\gamma_\rho u(p_1,s_1')\big]$$
$$= \frac{e^4}{4q^4}\mathrm{Tr}\big[(\not{k}_2-m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1+m_e)\gamma^\rho\big]\,\mathrm{Tr}\big[(\not{p}_1+m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2-m_\mu)\gamma_\rho\big].$$

每个电磁相互作用顶点贡献一个耦合常数 e，故 $\mathcal{M}\propto e^2$，$|\mathcal{M}|^2\propto e^4$。

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射截面

对狄拉克矩阵乘积作求迹运算，可得

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2 s_1' s_2'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4}[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)+(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)+m_e^2(p_1\cdot p_2)+m_\mu^2(k_1\cdot k_2)+2m_e^2 m_\mu^2].$$

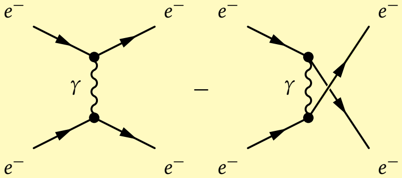
在质心系中，设 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{k}_1$ 的夹角为 θ，则 $\mathbf{p}_2$ 与 $\mathbf{k}_2$ 的夹角也为 θ，有

$$q^2 = (k_1+k_2)^2 = (p_1+p_2)^2 = s, \quad k_1\cdot k_2 = \frac{s}{2} - 2m_e^2, \quad p_1\cdot p_2 = \frac{s}{2} - 2m_\mu^2,$$
$$k_1\cdot p_1 = k_2\cdot p_2 = \frac{s}{4}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta), \quad k_1\cdot p_2 = k_2\cdot p_1 = \frac{s}{4}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta),$$

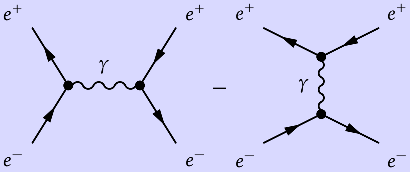
其中 $\beta_e \equiv \sqrt{1-4m_e^2/s}$，$\beta_\mu \equiv \sqrt{1-4m_\mu^2/s}$。散射发生条件是 $\sqrt{s} \geq 2m_\mu \gg m_e$，因而可以忽略电子质量 m_e，$m_e \to 0$，$\beta_e \to 1$。从而，散射截面为

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}2E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}}-\mathbf{v}_{\mathcal{B}}|}\int d\Omega_1 \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{\mathrm{CM}}}\frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2 s_1' s_2'}|\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4\beta_\mu}{64\pi^2 s}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\left(1+\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4m_\mu^2}{s}\right) = \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3s}\left(1+\frac{2m_\mu^2}{s}\right).\end{aligned}$$

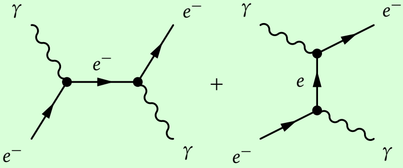
典型 QED 过程



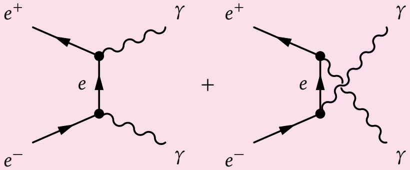
Møller 散射 $e^-e^- \to e^-e^-$



Bhabha 散射 $e^+e^- \to e^+e^-$



Compton 散射 $e^-\gamma \to e^-\gamma$



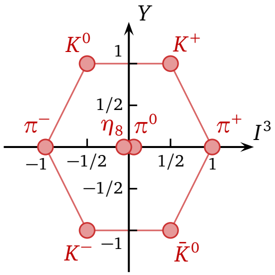
e^+e^- 湮灭到双光子 $e^+e^- \to \gamma\gamma$

初末态相同的过程可以具有多个费曼图，它们对应的振幅之间**相互干涉**。

夸克模型

1964 年，盖尔曼和茨威格分别独立提出**夸克模型**，当时认为存在 3 种味道的夸克，u、d 和 s，属于 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 群的基础表示。强子具有 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ **味对称性**：

- 介子由一对正反夸克组成，构成**单态**和**八重态**；
- 重子由三个夸克组成，构成**八重态**和**十重态**。



$\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 八重态的权图

同位旋 SU(2) 对称性实际上是 u 和 d 的味对称性，$\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 味对称性是它的进一步推广。根据**群表示论**，$J^P=0^-$ 的赝标量介子是 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 八重态，成分为

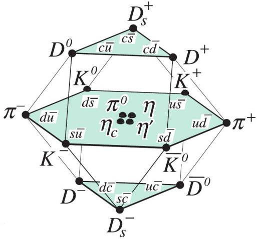
$$\pi^+=u\bar{d},\quad \pi^0=\frac{1}{2}(u\bar{u}-d\bar{d}),\quad \pi^-=d\bar{u},\quad \eta_8=\frac{1}{6}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}),$$
$$K^+=u\bar{s},\quad K^0=d\bar{s},\quad \bar{K}^0=s\bar{d},\quad K^-=s\bar{u}.$$

电荷满足**盖尔曼－西岛关系** $Q=I^3+Y/2$，其中**超荷** $Y=B+\mathcal{S}$。

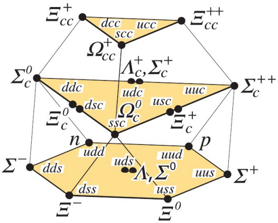
由于 s 夸克的质量大于 u 和 d 夸克的质量，$\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 味对称性不是严格成立的，这导致同个多重态中的粒子存在不小的**质量差异**。

$SU(4)_F$ 味对称性

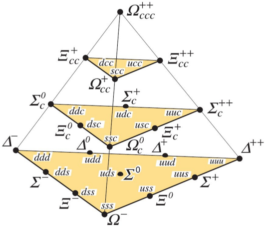
把 c 夸克也加入进来，上述对称性可以进一步推广为 $SU(4)_F$ **味对称性**。由于 c 夸克很重，多重态中粒子的质量差异更大。



$J^P = 0^-$ 介子 15 重态及单态



$J^P = \frac{1}{2}^+$ 重子 20 重态



$J^P = \frac{3}{2}^+$ 重子 20 重态

上述自旋为 3/2 的重子多重态中存在 $\Delta^{++} \sim uuu$、$\Delta^- \sim ddd$、$\Omega^- \sim sss$ 和 $\Omega_{ccc}^{++} \sim ccc$ 这样的重子。它们是 3 个全同夸克组成的 $L = 0$ 的态，因而 3 个夸克的自旋取向必须相同才能得到 $J = 3/2$。根据**泡利不相容原理**，全同费米子不能处于相同的状态，这预示着新的内部自由度——**颜色**——的存在。

颜色自由度

从实验上确立的强子态都可以用正反夸克对（介子）、三个正夸克（正重子）和三个反夸克（反重子）组成的体系来描述。为什么两个正夸克或四个正夸克构成的强子态不存在呢？**颜色自由度**的引入解决了这个问题。

- 夸克具有 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ **颜色对称性**。每味夸克都具有 3 种颜色，构成 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ 群的基础表示，记为 q^i（$i=1,2,3;\ q=d,u,s,c,b,t$）。
- 强子都是**颜色单态**。介子中两个夸克的颜色态必须互为复共轭，以组成颜色单态；重子中三个夸克的颜色各不相同，组成全反对称的颜色单态。
- 两个正夸克或四个正夸克不能组成颜色单态，因而不构成强子态。
- 用 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ 颜色对称性构建规范理论，得到**量子色动力学**。

1960 年代末，在高能电子和中微子与核子散射的实验中，出现大动量转移过程的概率很高，常常发生**深度非弹性散射**。这意味着核子内部存在局域的散射中心。费曼由此提出**部分子模型**，假设强子由一些在深度非弹性散射中近似自由的**部分子**组成。进一步实验数据和理论分析表明，有些部分子与夸克具有相同的量子数，它们就是夸克；其它部分子是电中性的，后来证实是量子色动力学中的规范玻色子——**胶子**。

非阿贝尔规范理论

SU(3) 群是个非阿贝尔群，它的生成元彼此不对易，因而它的规范变换形式与 U(1) 群（阿贝尔群）不同。**非阿贝尔群的规范理论**由杨振宁和米尔斯于 1954 年提出，也称为**杨–米尔斯理论**，其规范场也称为**杨–米尔斯场**。

对于非阿贝尔的李群，生成元 t^a 满足 $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$，依赖时空坐标的群变换为 $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$。费米子场 ψ 和规范场 A^a_μ 的**规范变换**是

$$\psi(x) \to U(x)\psi(x), \quad A^a_\mu(x)t^a \to U(x)A^a_\mu(x)t^a U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x).$$

定义协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu t^a$，则可得 $D_\mu\psi(x) \to U(x)D_\mu\psi(x)$。从而，具有**规范对称性**的拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu},$$

其中 $F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$。

量子色动力学

量子色动力学（Quantum Chromodynamics）简称 **QCD**，是 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ **非阿贝尔规范理论**，规范场记作 G^a_μ，规范玻色子为 8 种胶子。QCD 的拉氏量为

$$\mathcal{L}_\mathrm{QCD} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a,\mu\nu}, \quad q = d,u,s,c,b,t, \quad a = 1,\cdots,8,$$

其中协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - ig_s G^a_\mu t^a$，$G^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g_s f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu$。$g_s$ 称为**强耦合常数**。结构常数 f^{abc} 关于 3 个指标是全反对称的，独立分量为

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

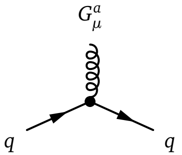
$t^a = \lambda^a/2$ 是 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ 基础表示的生成元，其中 λ^a 是 8 个盖尔曼矩阵：

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

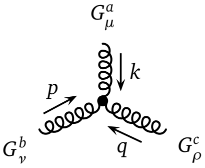
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

QCD 相互作用顶点

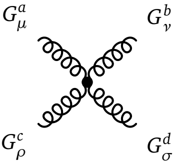
$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}$ 中 $g_s G^a_\mu \bar{q}\gamma^\mu t^a q$ **项**带来的相互作用顶点如右图所示。此外，$-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a,\mu\nu}$ **项**带来非阿贝尔规范理论特有的**规范玻色子自相互作用顶点**——胶子的三线性和四线性自相互作用顶点：



$$= i g_s \gamma^\mu t^a$$



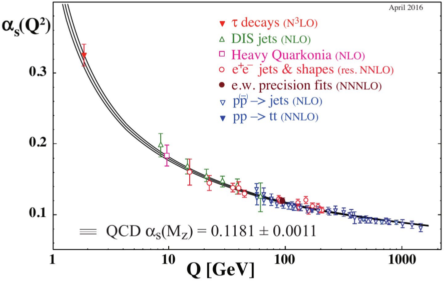
$$= g_s f^{abc}\left[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu\right]$$



$$\begin{aligned} = -i g_s^2 \big[& f^{abe} f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ace} f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ade} f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}) \big] \end{aligned}$$

渐近自由和夸克禁闭

受**量子场论**中高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值随着能标 Q 的变化而变化。在 QED 中，**电磁耦合常数 $\alpha \equiv e^2/(4\pi)$ 随能标升高而变大。**然而，QCD 的情况相反，**强耦合常数 $\alpha_s \equiv g_s^2/(4\pi)$ 随能标升高而变小。**由于高能标意味着短距离，这个特性被称为 **QCD 的渐近自由**。1973 年，D. Gross、F. Wilczek 和 D. Politzer 通过计算发现这个特性，因而获得 2004 年的诺贝尔物理学奖。



随着能标下降，α_s 越来越大，夸克间相互作用变得越来越强。因此，夸克在低能区被强相互作用紧紧地束缚在强子中，这个现象称为**夸克禁闭**。于是，实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现颜色多重态。由于质量太大，**顶夸克**会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中。

部分子

强子深度散射的相互作用能标 Q 很高，QCD 渐近自由特性意味着强子中的部分子几乎自由地参与散射。部分子包括胶子和两种来源的夸克：

- 价夸克：构成强子的组分夸克，贡献强子的各种量子数。
- 海夸克：来自真空极化，即由胶子分裂而来，成对出现。

强子 h_1 与 h_2 深度散射过程 $h_1 h_2 \to X$ 的截面可以表示为

$$\sigma(h_1 h_2 \to X) = \sum_{ij} \int dx_1 dx_2\, f_{i/h_1}(x_1, Q^2) f_{j/h_2}(x_2, Q^2) \hat{\sigma}_{ij\to X}(x_1 x_2 s, Q^2).$$

这里 $\hat{\sigma}_{ij\to X}$ 为部分子 i 与 j 碰撞产生末态 X 的截面。$f_{i/h}(x, Q^2)$ 是部分子 i 在强子 h 中的部分子分布函数，其中 $x = p_i^\mu / p_h^\mu$ 是 i 动量占 h 动量的比例。

质子的价夸克为 uud，反映在部分子分布函数上的关系为

$$\int_0^1 dx[f_{u/p}(x, Q^2) - f_{\bar{u}/p}(x, Q^2)] = 2, \quad \int_0^1 dx[f_{d/p}(x, Q^2) - f_{\bar{d}/p}(x, Q^2)] = 1.$$

能动量守恒体现为 $\int_0^1 dx \sum_i x f_{i/p}(x, Q^2) = 1, \quad i = g, d, u, s, c, b, \bar{d}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}.$

费米子手征性

费米子具有**手征性**。

- **左手**费米子的螺旋度为负，即自旋在动量方向上的投影为负。
- **右手**费米子的螺旋度为正，即自旋在动量方向上的投影为正。
- 对于**有质量**的费米子，洛伦兹变换可以把动量方向反过来，改变螺旋度。
- 对于**无质量**的费米子，螺旋度在任意惯性系中都相同，可以把左手和右手费米子视作两种不同粒子，螺旋度有可能成为相加性守恒量。左手正费米子的反粒子是右手反费米子，右手正费米子的反粒子是左手反费米子。

可以用左右手投影算符 $P_\mathrm{L} \equiv (1-\gamma^5)/2$ 和 $P_\mathrm{R} \equiv (1+\gamma^5)/2$ 分解费米子场 ψ。

- **左手费米子场** $\psi_\mathrm{L} \equiv P_\mathrm{L}\psi$ 描述左手正费米子和右手反费米子。
- **右手费米子场** $\psi_\mathrm{R} \equiv P_\mathrm{R}\psi$ 描述右手正费米子和左手反费米子。
- **质量项** $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_\mathrm{R}\psi_\mathrm{L} + \bar{\psi}_\mathrm{L}\psi_\mathrm{R})$ 可视为左右手费米子场的相互作用项。

空间反射变换使螺旋度反号。**弱相互作用**没有空间反射对称性，导致宇称不守恒，其根源是**左手费米子与右手费米子参与不同的规范相互作用**。

电弱统一理论

电弱统一理论是 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ **非阿贝尔规范理论**。

- $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 的生成元称为**弱同位旋** T^a，$\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ 的生成元称为**弱超荷** Y。
- **电荷** $Q=T^3+Y$，这类似于盖尔曼－西岛关系。
- 左手费米子场构成 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ **二重态**，右手费米子场则是 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ **单态**。

统一记号	第 1 代	第 2 代	第 3 代	T^3	Y	Q
$L_{i\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}\nu_{i\mathrm{L}}\\ \ell_{i\mathrm{L}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{e\mathrm{L}}\\ e_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{\mu\mathrm{L}}\\ \mu_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{\tau\mathrm{L}}\\ \tau_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$-1/2$ $-1/2$	0 -1
$Q_{i\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}u_{i\mathrm{L}}\\ d'_{i\mathrm{L}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}u_\mathrm{L}\\ d'_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}c_\mathrm{L}\\ s'_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}t_\mathrm{L}\\ b'_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$1/6$ $1/6$	$2/3$ $-1/3$
$\ell_{i\mathrm{R}}$	e_R	μ_R	τ_R	0	-1	-1
$u_{i\mathrm{R}}$	u_R	c_R	t_R	0	$2/3$	$2/3$
$d'_{i\mathrm{R}}$	d'_R	s'_R	b'_R	0	$-1/3$	$-1/3$

表中的下型夸克场是**规范本征态** d'_i，通过 **CKM 矩阵** V_{ij} 与**质量本征态** d_i 联系起来：$d'_i=V_{ij}d_j$。

费米子的电弱规范不变拉氏量

三代费米子的电弱规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EWF}}=\bar{L}_{i\mathrm{L}}i\gamma^{\mu}D_{\mu}L_{i\mathrm{L}}+\bar{Q}_{i\mathrm{L}}i\gamma^{\mu}D_{\mu}Q_{i\mathrm{L}}+\bar{\ell}_{i\mathrm{R}}i\gamma^{\mu}D_{\mu}\ell_{i\mathrm{R}}+\bar{u}_{i\mathrm{R}}i\gamma^{\mu}D_{\mu}u_{i\mathrm{R}}+\bar{d}'_{i\mathrm{R}}i\gamma^{\mu}D_{\mu}d'_{i\mathrm{R}}.$$

$\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}$ 二重态 $Q_{i\mathrm{L}}$ 和 $L_{i\mathrm{L}}$ 的协变导数为 $D_{\mu}=\partial_{\mu}-igW_{\mu}^{a}T^{a}-ig'YB_{\mu}$，其中 $T^{a}=\sigma^{a}/2$。$\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}$ 单态 $\ell_{i\mathrm{R}}$、$u_{i\mathrm{R}}$ 和 $d'_{i\mathrm{R}}$ 的协变导数为 $D_{\mu}=\partial_{\mu}-ig'YB_{\mu}$。这里**没有质量项**，因为质量项耦合左右手费米子场，会破坏规范对称性。

规范场 W_{μ}^{a} $(a=1,2,3)$ 和 B_{μ} 跟左手费米子的相互作用与右手费米子不同，而 QED 中的光子场却相同。为了得到 QED，需要把 W_{μ}^{3} 和 B_{μ} 混合起来：

$$\begin{pmatrix} A_{\mu} \\ Z_{\mu} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{\mathrm{W}} & s_{\mathrm{W}} \\ -s_{\mathrm{W}} & c_{\mathrm{W}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{\mu} \\ W_{\mu}^{3} \end{pmatrix},\quad s_{\mathrm{W}}\equiv\sin\theta_{\mathrm{W}}=\frac{g'}{\sqrt{g^{2}+g'^{2}}},\quad c_{\mathrm{W}}\equiv\sqrt{1-s_{\mathrm{W}}^{2}},$$

其中转动角 θ_{W} 称为**温伯格角**。

- A_{μ} 对应于**光子**，传递电磁相互作用，**电磁耦合常数** $e=gs_{\mathrm{W}}=g'c_{\mathrm{W}}$。
- Z_{μ} 和 $W_{\mu}^{\pm}\equiv(W_{\mu}^{1}\mp iW_{\mu}^{2})/\sqrt{2}$ 对应于 Z^{0} **和** $W^{\pm}$ **玻色子**，传递弱相互作用。

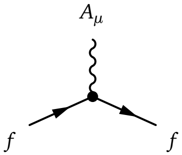
费米子的电弱规范相互作用

整理一下，得到费米子的电弱规范相互作用项

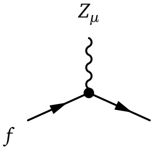
$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset eA_\mu J^\mu_{\text{EM}} + gZ_\mu J^\mu_Z + g(W^+_\mu J^{+,\mu}_W + \text{h.c.}),$$

弱中性流 $J^\mu_Z \equiv \dfrac{1}{2c_{\text{W}}} \sum_f \bar{f}\gamma^\mu(g^f_{\text{V}} - g^f_{\text{A}}\gamma_5)f, \quad g^f_{\text{V}} \equiv T^3_f - 2Q_f s^2_{\text{W}}, \quad g^f_A \equiv T^3_f,$

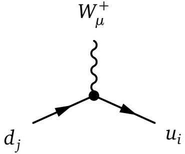
电磁流 $J^\mu_{\text{EM}} \equiv \sum_f Q_f \bar{f}\gamma^\mu f,$ **弱带电流** $J^{+,\mu}_W \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{i\text{L}}\gamma^\mu V_{ij} d_{j\text{L}} + \bar{\nu}_{i\text{L}}\gamma^\mu \ell_{i\text{L}}).$



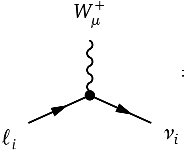
$$= iQ_f e\gamma^\mu$$



$$= i\frac{g}{2c_{\text{W}}}\gamma^\mu(g^f_{\text{V}} - g^f_{\text{A}}\gamma_5)$$



$$= i\frac{g}{\sqrt{2}}V_{ij}\gamma^\mu P_{\text{L}}$$



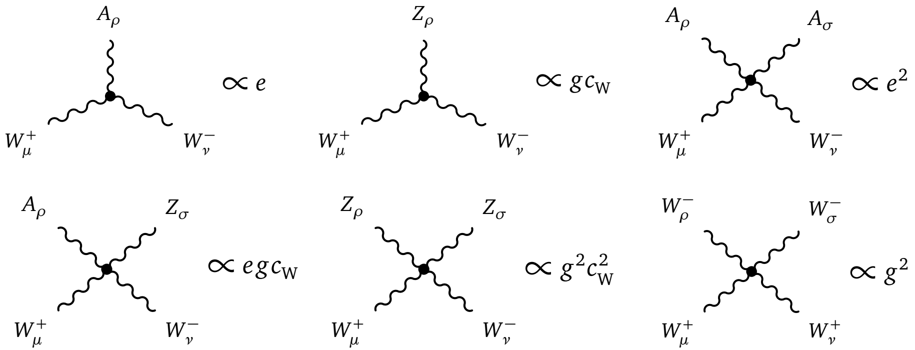
$$= i\frac{g}{\sqrt{2}}\gamma^\mu P_{\text{L}}$$

电弱规范玻色子的自相互作用

电弱规范场自身的规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EWG}} = -\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu},$$

其中 $W^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g\epsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu$，$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$。



布劳特－恩格勒－希格斯机制

夸克、带电轻子、Z^0 和 $W^\pm$ 都具有质量，但上述 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ 规范理论的拉氏量**还没有任何质量项**。

- 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是**可重整性**。
- 在规范理论中直接放入**规范场的质量项**，会破坏规范对称性。
- 直接引入**费米子场的质量项**会破坏 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ 规范对称性。

为了在保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的质量，需要引入**布劳特－恩格勒－希格斯 (BEH) 机制**，使 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ 对称性自发破缺。

首先，加入**希格斯标量场** $\Phi=\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}$，$\phi^+$ 和 ϕ^0 都是复标量场。Φ 是 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 二重态，具有超荷 $Y=1/2$，电弱规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_\mathrm{H}=(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi)-V_\mathrm{H}(\Phi),\quad V_\mathrm{H}(\Phi)=-\mu^2\Phi^\dagger\Phi+\lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2,$$

其中协变导数为 $D_\mu=\partial_\mu-igW_\mu^aT^a-ig'YB_\mu$，$T^a=\sigma^a/2$。而 $V_\mathrm{H}(\Phi)$ 是希格斯标量场的**势能项**，依赖于 $\Phi^\dagger\Phi=|\phi^+|^2+|\phi^0|^2$。

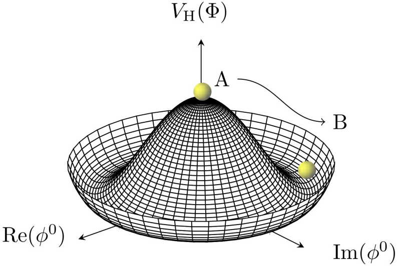
自发对称性破缺

假设 $\lambda > 0$。若 $\mu^2 < 0$，势能项 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 的最小值对应 $\Phi^\dagger\Phi = 0$。希格斯场真空期待值为 $\langle\Phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，它在电弱规范变换下不变，故规范对称性未受到破坏。

若 $\mu^2 > 0$，$\Phi^\dagger\Phi = 0$ 处变成 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 的局域极大值，而最小值位于 $\Phi^\dagger\Phi = v^2/2$ 对应的 3 维球面上，其中 $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$。

若压缩掉 ϕ^+ 的实部和虚部两个维度，则 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 在 ϕ^0 的实部和虚部坐标上呈现出右图所示墨西哥草帽状的形式。希格斯场的真空期待值位于这个 3 维球面上的某一点，不失一般性，可取为

$$\langle\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$



由于这个期待值会在电弱规范变换下改变，真空态不满足电弱规范对称性。这种拉氏量满足对称性、真空态却不满足的现象称为自发对称性破缺。

希格斯玻色子

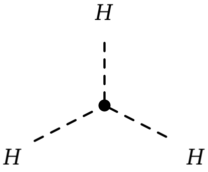
以上述真空期待值 $\langle\Phi\rangle$ 为基础，考虑沿 ϕ^0 实数轴扰动的实标量场 $H(x)$：

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+H(x)\end{pmatrix},\quad \Phi^\dagger\Phi\to\frac{1}{2}(v+H)^2.$$

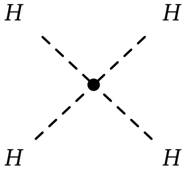
这种参数化方法称为**幺正规范**，其它规范可由 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 规范变换得到。从而，

$$-V_\mathrm{H}(\Phi)=\frac{1}{2}\mu^2(v+H)^2-\frac{1}{4}\lambda(v+H)^4=\frac{1}{4}\mu^2v^2-\frac{1}{2}m_H^2H^2-\frac{m_H^2}{2v}H^3-\frac{m_H^2}{8v^2}H^4,$$

其中 $m_H\equiv\sqrt{2}\mu=\sqrt{2\lambda}v$。实标量场 H 对应于一个**质量为** m_H 的中性标量粒子 H^0，称为**希格斯玻色子**，具有三线性和四线性自相互作用。



$$=-3i\frac{m_H^2}{v}$$

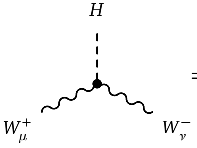


$$=-3i\frac{m_H^2}{v^2}$$

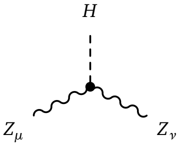
规范玻色子质量

在幺正规范下，希格斯场的协变动能项化为

$$(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) = \frac{1}{2}(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{2m_W^2}{v} H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{v} H Z_\mu Z^\mu + \frac{m_W^2}{v^2} H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{2v^2} H^2 Z_\mu Z^\mu,$$

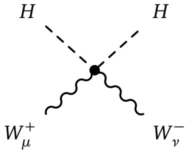


$$= 2i\frac{m_W^2}{v}g^{\mu\nu}$$

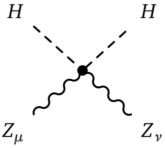


$$= 2i\frac{m_Z^2}{v}g^{\mu\nu}$$

其中 $m_W \equiv \frac{1}{2}gv$ 和 $m_Z \equiv \frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}v$。可见，自发对称性破缺之后，$W^\pm$ **和** Z^0 **规范玻色子获得了质量** m_W **和** m_Z，有 3 个希格斯场自由度变成它们的纵向分量。



$$= 2i\frac{m_W^2}{v^2}g^{\mu\nu}$$



$$= 2i\frac{m_Z^2}{v^2}g^{\mu\nu}$$

费米子质量

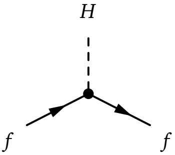
希格斯场与费米子场之间能够发生电弱规范不变的**汤川相互作用**：

$$\mathcal{L}_\mathrm{Y} = -\tilde{y}_d^{ij}\bar{Q}_{i\mathrm{L}}d'_{j\mathrm{R}}\Phi - y_u d_i \bar{Q}_{i\mathrm{L}}u_{i\mathrm{R}}\tilde{\Phi} - y_{\ell_i}\bar{L}_{i\mathrm{L}}\ell_{i\mathrm{R}}\Phi + \mathrm{h.c.}\,,$$

其中 $\tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2\Phi^*$。由于 CKM 矩阵将 $\tilde{y}_d^{ij}$ 对角化，$V_{li}^\dagger \tilde{y}_d^{ij} V_{jk} = y_{d_k}\delta_{lk}$，自发对称性破缺之后汤川耦合项化为

$$\mathcal{L}_\mathrm{Y} = -m_{d_i}\bar{d}_i d_i - m_{u_i}\bar{u}_i u_i - m_{\ell_i}\bar{\ell}_i\ell_i - \frac{m_{d_i}}{v}H\bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v}H\bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v}H\bar{\ell}_i\ell_i.$$

其中 $m_{d_i} \equiv y_{d_i}v/\sqrt{2}$，$m_{u_i} \equiv y_{u_i}v/\sqrt{2}$，$m_{\ell_i} \equiv y_{\ell_i}v/\sqrt{2}$。可见，**费米子获得了质量**，并与希格斯玻色子发生汤川相互作用，其耦合常数正比于费米子质量。



$$= -i\frac{m_f}{v}$$