

粒子物理简介

第四节 粒子物理标准模型

余钊焕

中山大学物理学院

<http://yzhxxzxy.github.io>



2018 年 5 月



粒子物理标准模型

粒子物理**标准模型**是一个 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论。模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子。规范玻色子传递费米子间相互作用。

- 1 $SU(3)_C$ 部分描述夸克的**强相互作用**，称为**量子色动力学**，相应的规范玻色子是**胶子**。
- 2 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 部分统一描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱统一理论**。理论中有一个希格斯二重态，引起规范群的**自发对称性破缺**，使 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群破缺为 $U(1)_{EM}$ 群。
 - 破缺前，理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个希格斯自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数。
 - 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个希格斯自由度结合，从而获得质量，成为 W^\pm 和 Z^0 **玻色子**，传递**弱相互作用**；剩下的 1 个无质量规范玻色子是**光子**，即是 $U(1)_{EM}$ 群的规范玻色子，传递**电磁相互作用**；与希格斯二重态的汤川耦合导致左手费米子和右手费米子获得质量，组合成狄拉克费米子。
 - 理论中的中微子没有右手分量，因而没有获得质量。1998 年实验发现中微子振荡，证明中微子具有质量，所以需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理。

U(1) 整体对称性

时空坐标的函数称为**场**。在**量子场论**中，场被量子化，而粒子是场的激发态，粒子间相互作用来源于各种场之间的相互作用。场的运动规律由**最小作用量原理**决定，作用量 $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ ，其中拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是用场表达出来的。

对于一个**不参与相互作用**的狄拉克费米子场 $\psi(x)$ ，运动规律可以用拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{free}}(x) = \bar{\psi}(x) i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x)$$

描述，其中狄拉克矩阵 γ^μ 是满足 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ 的 4×4 常数矩阵，时空导数 $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ ， m 为费米子质量， $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ 。对 ψ 作 **U(1) 整体变换**

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iQ\theta} \psi(x),$$

(整体意味着相位 θ 不是时空坐标的函数)，则 $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-iQ\theta}$ ，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free}}(x) &\rightarrow \mathcal{L}'_{\text{free}}(x) = \bar{\psi}'(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x) e^{-iQ\theta} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{iQ\theta} \psi(x) = \mathcal{L}_{\text{free}}(x). \end{aligned}$$

可见，自由费米子场的拉氏量具有 **U(1) 整体对称性**。于是，根据**诺特定理**，U(1) 群的荷（生成元） Q 是**守恒**的。

U(1) 规范对称性

若相位 θ 是时空坐标的函数，则上述变换变成局域的 U(1) 规范变换

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}\psi(x).$$

从而， $\partial_\mu \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}[\partial_\mu + iQ\partial_\mu \theta(x)]\psi(x)$ 导致 $\mathcal{L}'_{\text{free}}(x) \neq \mathcal{L}_{\text{free}}(x)$ 。为了重新得到对称性，需要引入**规范场** $A_\mu(x)$ ，令它的 U(1) 规范变换为

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x),$$

以此补偿相位 $\theta(x)$ 的时空导数引起的差异。将拉氏量修改为

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x),$$

其中**协变导数**定义为 $D_\mu \equiv \partial_\mu - iQeA_\mu(x)$ ，则可得 $\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x)$ 。因此 $\mathcal{L}(x)$ 具有 U(1) **规范对称性**，描述 U(1) **规范理论**。代价是拉氏量中多了一项

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}_{\text{free}}(x) = QeA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x),$$

它将费米子 $\psi(x)$ 和规范场 $A_\mu(x)$ 耦合起来，发生相互作用，**耦合常数**为 e 。规范场 $A_\mu(x)$ 带着时空指标 μ ，是一个洛伦兹矢量，对应的粒子称为**规范玻色子**，自旋为 1。 \mathcal{L}_{int} 导致费米子与规范玻色子发生**规范相互作用**。

量子电动力学

量子电动力学 (Quantum Electrodynamics) 简称 **QED**, 是 $U(1)_{\text{EM}}$ **规范理论**, 规范玻色子为光子, 描述电磁相互作用。QED 的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \sum_f (\bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f - m_f \bar{f} f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \sum_f [\bar{f} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f + Q_f e A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

- 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - i Q_f e A_\mu$, **电磁耦合常数** e 就是单位电荷量。
- f 代表标准模型中各种带电的费米子场, Q_f 为 f 所带**电荷**量子数, m_f 是 f 的质量。 \mathcal{L}_{QED} 中 $\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f$ **项**描述费米子场在时空中传播的过程。
- 光子场 A_μ 的**场强张量**定义为 $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 。可以验证, $-F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/4$ **项**在 $U(1)_{\text{EM}}$ 规范变换下不变。它描述光子场在时空中传播的过程。
- $Q_f e A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f$ **项**描述费米子场与光子场的电磁相互作用。

费米子 f	上型夸克 u, c, t	下型夸克 d, s, b	带电轻子 e^-, μ^-, τ^-
电荷 Q_f	+2/3	-1/3	-1

动量空间

\mathcal{L}_{QED} 中 $\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f$ 项与自由费米子场的拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{free}}$ 形式相同, 描述远离相互作用顶点时的费米子。根据**最小作用量原理**, 此项对应于**狄拉克方程**

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f(x) = 0.$$

经过傅立叶变换之后, 动量空间中的旋量系数 $u(p, s)$ 和 $v(p, s)$ 满足

$$(\not{p} - m_f)u(p, s) = 0, \quad (\not{p} + m_f)v(p, s) = 0,$$

其中 $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ 。 $s = \pm 1$ 称为**螺旋度**, 是自旋在动量方向上的投影被归一化后的值。 $s = +1$ (-1) 对应于右手 (左手) 费米子。螺旋度求和关系为

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + m_f, \quad \sum_s v(p, s)\bar{v}(p, s) = \not{p} - m_f.$$

类似地, \mathcal{L}_{QED} 中 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 项描述远离相互作用顶点时的光子。在动量空间中, 光子的运动行为可用**极化矢量** $\varepsilon_\mu(p, \lambda)$ 描写, 其中 $\lambda = \pm 1$ 是光子的螺旋度。 $\lambda = +1$ (-1) 对应于右旋 (左旋) 极化的光子。螺旋度求和关系为

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(p, \lambda)\varepsilon_\nu^*(p, \lambda) \rightarrow -g_{\mu\nu}.$$

QED 费曼规则

$\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f$ 项和 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 项分别提供费米子与光子的初末态和传播子的费曼规则，而 $Q_f e A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f$ 项提供电磁相互作用顶点的费曼规则：

$$\text{费米子初态} = u(p, s)$$

正费米子初态

$$\text{费米子末态} = \bar{u}(p, s)$$

正费米子末态

$$\text{反费米子初态} = \bar{v}(p, s)$$

反费米子初态

$$\text{反费米子末态} = v(p, s)$$

反费米子末态

$$\text{光子初态} = \epsilon_\mu(p, \lambda)$$

光子初态

$$\text{光子末态} = \epsilon_\mu^*(p, \lambda)$$

光子末态

$$\text{费米子传播子} = \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}$$

费米子传播子

$$\text{光子传播子} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

光子传播子

- 光子用波浪线表示。
- 费米子用带箭头的实线表示，线上的箭头方向是费米子数的方向。正粒子的动量方向与费米子数方向相同，反粒子则相反。

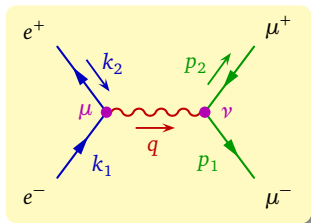
$$\text{电磁相互作用顶点} = iQ_f e \gamma^\mu$$

电磁相互作用顶点

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射振幅

右图为 QED 散射过程 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的最低阶费曼图，利用费曼规则将它表达成**不变振幅**：

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(k_2, s_2)(-ie\gamma^\mu)u(k_1, s_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \times \bar{u}(p_1, s'_1)(-ie\gamma^\nu)v(p_2, s'_2).$$



通常考虑没有特殊极化的初态，需对初态螺旋度**取平均**，即 $\frac{1}{2} \sum_{s_1} \frac{1}{2} \sum_{s_2}$ ；对末态螺旋度则通过**求和**包括所有情况，即 $\sum_{s'_1} \sum_{s'_2}$ 。因而截面表达式的被积项应为

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} \left[\bar{v}(k_2, s_2) \gamma^\mu u(k_1, s_1) \bar{u}(k_1, s_1) \gamma^\rho v(k_2, s_2) \right. \\ &\quad \left. \times \bar{u}(p_1, s'_1) \gamma_\mu v(p_2, s'_2) \bar{v}(p_2, s'_2) \gamma_\rho u(p_1, s'_1) \right] \\ &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{k}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{k}_1 + m_e) \gamma^\rho] \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m_\mu) \gamma_\rho]. \end{aligned}$$

每个电磁相互作用顶点贡献一个耦合常数 e ，故 $\mathcal{M} \propto e^2$ ， $|\mathcal{M}|^2 \propto e^4$ 。

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射截面

对狄拉克矩阵乘积作求迹运算，可得

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + 2m_e^2 m_\mu^2].$$

在**质心系**中，设 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{k}_1 的夹角为 θ ，则 \mathbf{p}_2 与 \mathbf{k}_2 的夹角也为 θ ，有

$$q^2 = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = s, \quad k_1 \cdot k_2 = \frac{s}{2} - 2m_\mu^2, \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{s}{2} - 2m_e^2,$$

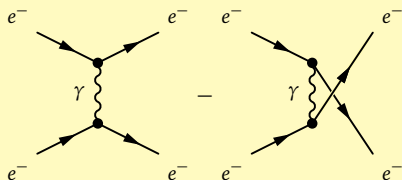
$$k_1 \cdot p_1 = k_2 \cdot p_2 = \frac{s}{4}(1 - \beta_e \beta_\mu \cos \theta), \quad k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = \frac{s}{4}(1 + \beta_e \beta_\mu \cos \theta),$$

其中 $\beta_e \equiv \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$, $\beta_\mu \equiv \sqrt{1 - 4m_\mu^2/s}$ 。散射发生条件是 $\sqrt{s} \geq 2m_\mu \gg m_e$ ，因而可以**忽略电子质量** m_e ， $m_e \rightarrow 0$, $\beta_e \rightarrow 1$ 。从而，**散射截面**为

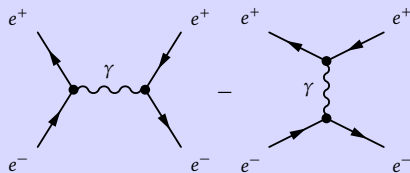
$$\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Omega_1 \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{\text{CM}}} \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}|^2$$

$$= \frac{e^4 \beta_\mu}{64\pi^2 s} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(1 + \beta_\mu^2 \cos^2 \theta + \frac{4m_\mu^2}{s} \right) = \frac{4\pi \alpha^2 \beta_\mu}{3s} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s} \right).$$

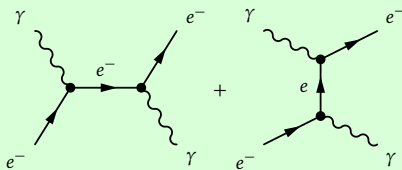
典型 QED 过程



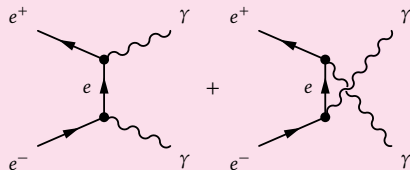
Møller 散射 $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$



Bhabha 散射 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



Compton 散射 $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$



e^+e^- 湮灭到双光子 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$

初末态相同的过程可以具有多个费曼图，它们对应的振幅之间**相互干涉**。

2018 年 5 月 11 / 28

颜色自由度

从实验上确立的强子态都可以用正反夸克对（介子）、三个正夸克（正重子）和三个反夸克（反重子）组成的体系来描述。为什么两个正夸克或四个正夸克构成的强子态不存在呢？**颜色自由度**的引入解决了这个问题。

- 夸克具有 $SU(3)_c$ **颜色对称性**。每味夸克都具有 3 种颜色，构成 $SU(3)_c$ 群的基础表示，记为 q^i ($i = 1, 2, 3$; $q = d, u, s, c, b, t$)。
- 强子都是**颜色单态**。介子中两个夸克的颜色态必须互为复共轭，以组成颜色单态；重子中三个夸克的颜色各不相同，组成全反对称的颜色单态。
- 两个正夸克或四个正夸克不能组成颜色单态，因而不构成强子态。
- 用 $SU(3)_c$ 颜色对称性构建规范理论，得到**量子色动力学**。

1960 年代末，在高能电子和中微子与核子散射的实验中，出现大动量转移过程的概率很高，常常发生**深度非弹性散射**。这意味着核子内部存在局域的散射中心。费曼由此提出**部分子模型**，假设强子由一些在深度非弹性散射中近似自由的**部分子**组成。进一步实验数据和理论分析表明，有些部分子与夸克具有相同的量子数，它们就是夸克；其它部分子是电中性的，后来证实是量子色动力学中的规范玻色子——**胶子**。

非阿贝尔规范理论

SU(3) 群是个非阿贝尔群，它的生成元彼此不对易，因而它的规范变换形式与 U(1) 群（阿贝尔群）不同。**非阿贝尔群的规范理论**由杨振宁和米尔斯于 1954 年提出，也称为**杨-米尔斯理论**，其规范场也称为**杨-米尔斯场**。

对于非阿贝尔的李群，生成元 t^a 满足 $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$ ，依赖时空坐标的群变换为 $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$ 。费米子场 ψ 和规范场 A_μ^a 的**规范变换**是

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad A_\mu^a(x)t^a \rightarrow U(x)A_\mu^a(x)t^a U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x).$$

定义协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$ ，则可得 $D_\mu \psi(x) \rightarrow U(x)D_\mu \psi(x)$ 。从而，具有**规范对称性**的拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu},$$

其中 $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ 。

量子色动力学

量子色动力学 (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**, 是 **SU(3)_c 非阿贝尔规范理论**, 规范场记作 G_μ^a , 规范玻色子为 8 种胶子。QCD 的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8,$$

其中协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a t^a$, $G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ 。 g_s 称为 **强耦合常数**。结构常数 f^{abc} 关于 3 个指标是全反对称的, 独立分量为

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

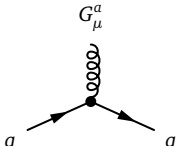
$t^a = \lambda^a/2$ 是 SU(3)_c 基础表示的生成元, 其中 λ^a 是 8 个盖尔曼矩阵:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

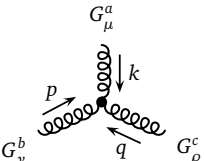
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

QCD 相互作用顶点

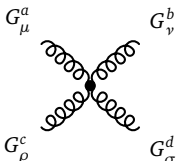
\mathcal{L}_{QCD} 中 $g_s G_\mu^a \bar{q} \gamma^\mu t^a q$ 项带来的相互作用顶点如右图所示。此外, $-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$ 项带来非阿贝尔规范理论特有的**规范玻色子自相互作用顶点**——胶子的三线性和四线性自相互作用顶点:



$$= i g_s \gamma^\mu t^a$$



$$= g_s f^{abc} [g^{\mu\nu} (k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (p-q)^\mu + g^{\rho\mu} (q-k)^\nu]$$

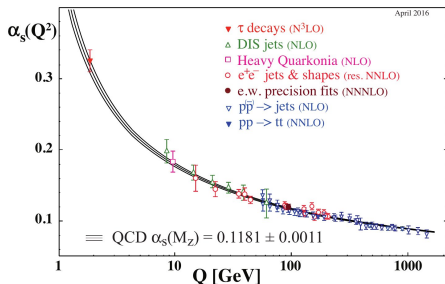


$$= -i g_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$

渐近自由和夸克禁闭

受量子场论中高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值随着能标 Q 的变化而变化。在 QED 中，电磁耦合常数 $\alpha \equiv e^2/(4\pi)$ 随能标升高而变大。然而，QCD 的情况相反，强耦合常数 $\alpha_s \equiv g_s^2/(4\pi)$ 随能标升高而变小。由于高能标意味着短距离，这个特性被称为 **QCD 的渐近自由**。1973 年，D. Gross、F. Wilczek 和 D. Politzer 通过计算发现这个特性，因而获得 2004 年的诺贝尔物理学奖。

随着能标下降， α_s 越来越大，夸克间相互作用变得越来越强。因此，夸克在低能区被强相互作用紧紧地束缚在强子中，这个现象称为**夸克禁闭**。于是，实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现颜色多重态。由于质量太大，**顶夸克**会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中。



部分子

强子深度散射的相互作用能标 Q 很高, QCD 渐近自由特性意味着强子中的**部分子**几乎自由地参与散射。部分子包括胶子和两种来源的夸克:

- **价夸克**: 构成强子的组分夸克, 贡献强子的各种量子数。
- **海夸克**: 来自真空极化, 即由胶子分裂而来, 成对出现。

强子 h_1 与 h_2 深度散射过程 $h_1 h_2 \rightarrow X$ 的截面可以表示为

$$\sigma(h_1 h_2 \rightarrow X) = \sum_{ij} \int dx_1 dx_2 f_{i/h_1}(x_1, Q^2) f_{j/h_2}(x_2, Q^2) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow X}(x_1 x_2 s, Q^2).$$

这里 $\hat{\sigma}_{ij \rightarrow X}$ 为部分子 i 与 j 碰撞产生末态 X 的截面。 $f_{i/h}(x, Q^2)$ 是部分子 i 在强子 h 中的**部分子分布函数**, 其中 $x \equiv p_i^\mu / p_h^\mu$ 是 i 动量占 h 动量的比例。

质子的价夸克为 uud , 反映在部分子分布函数上的关系为

$$\int_0^1 dx [f_{u/p}(x, Q^2) - f_{\bar{u}/p}(x, Q^2)] = 2, \quad \int_0^1 dx [f_{d/p}(x, Q^2) - f_{\bar{d}/p}(x, Q^2)] = 1.$$

能动量守恒体现为 $\int_0^1 dx \sum_i x f_{i/p}(x, Q^2) = 1, \quad i = g, d, u, s, c, b, \bar{d}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}.$

费米子手征性

费米子具有**手征性**。

- **左手**费米子的螺旋度为负，即自旋在动量方向上的投影为负。
- **右手**费米子的螺旋度为正，即自旋在动量方向上的投影为正。
- 对于**有质量**的费米子，洛伦兹变换可以把动量方向反过来，改变螺旋度。
- 对于**无质量**的费米子，螺旋度在任意惯性系中都相同，可以把左手和右手费米子视作两种不同粒子，螺旋度有可能成为相加性守恒量。左手正费米子的反粒子是右手反费米子，右手正费米子的反粒子是左手反费米子。

可以用左右手投影算符 $P_L \equiv (1 - \gamma^5)/2$ 和 $P_R \equiv (1 + \gamma^5)/2$ 分解费米子场 ψ 。

- **左手费米子场** $\psi_L \equiv P_L \psi$ 描述左手正费米子和右手反费米子。
- **右手费米子场** $\psi_R \equiv P_R \psi$ 描述右手正费米子和左手反费米子。
- **质量项** $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$ 可视为左右手费米子场的相互作用项。

空间反射变换使螺旋度反号。**弱相互作用**没有空间反射对称性，导致宇称不守恒，其根源是**左手费米子与右手费米子参与不同的规范相互作用**。

电弱统一理论

电弱统一理论是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 非阿贝尔规范理论。

- $SU(2)_L$ 的生成元称为**弱同位旋** T^a , $U(1)_Y$ 的生成元称为**弱超荷** Y 。
- **电荷** $Q = T^3 + Y$, 这类似于盖尔曼-西岛关系。
- 左手费米子场构成 $SU(2)_L$ **二重态**, 右手费米子场则是 $SU(2)_L$ **单态**。

统一记号	第 1 代	第 2 代	第 3 代	T^3	Y	Q
$L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$-1/2$ $-1/2$	0 -1
$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$1/6$ $1/6$	$2/3$ $-1/3$
ℓ_{iR}	e_R	μ_R	τ_R	0	-1	-1
u_{iR}	u_R	c_R	t_R	0	$2/3$	$2/3$
d'_{iR}	d'_R	s'_R	b'_R	0	$-1/3$	$-1/3$

表中的下型夸克场是**规范本征态** d'_i , 通过 **CKM 矩阵** V_{ij} 与**质量本征态** d_i 联系起来: $d'_i = V_{ij}d_j$ 。

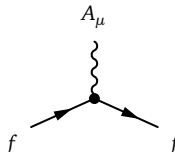
费米子的电弱规范相互作用

整理一下，得到费米子的电弱规范相互作用项

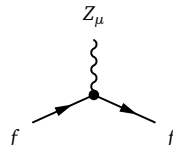
$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset e A_\mu J_{\text{EM}}^\mu + g Z_\mu J_Z^\mu + g (W_\mu^+ J_W^{+, \mu} + \text{h.c.}),$$

$$\text{弱中性流 } J_Z^\mu \equiv \frac{1}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f, \quad g_V^f \equiv T_f^3 - 2Q_f s_W^2, \quad g_A^f \equiv T_f^3,$$

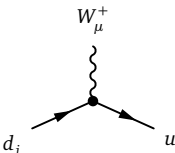
$$\text{电磁流 } J_{\text{EM}}^\mu \equiv \sum_f Q_f \bar{f} \gamma^\mu f, \quad \text{弱带电流 } J_W^{+, \mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL} + \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \ell_{iL}).$$



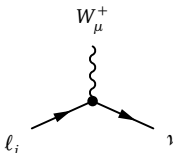
$$= iQ_f e \gamma^\mu$$



$$= i \frac{g}{2c_W} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5)$$



$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_L$$



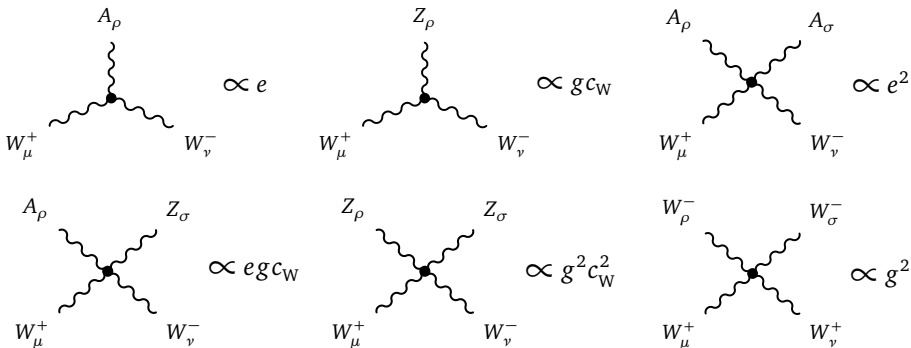
$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$

电弱规范玻色子的自相互作用

电弱规范场自身的规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu},$$

其中 $W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$, $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ 。



布劳特—恩格勒—希格斯机制

夸克、带电轻子、 Z^0 和 W^\pm 都具有质量，但上述 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论的拉氏量还没有任何质量项。

- 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性。
- 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏规范对称性。
- 直接引入费米子场的质量项会破坏 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范对称性。

为了保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的质量，需要引入布劳特—恩格勒—希格斯 (BEH) 机制，使 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性自发破缺。

首先，加入希格斯标量场 $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ ， ϕ^+ 和 ϕ^0 都是复标量场。 Φ 是 $SU(2)_L$ 二重态，具有超荷 $Y = 1/2$ ，电弱规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V_H(\Phi), \quad V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2,$$

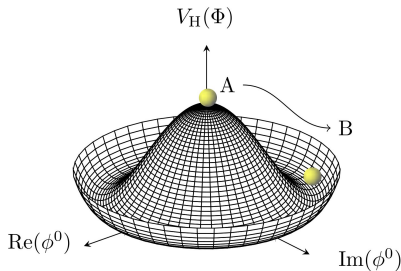
其中协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - ig W_\mu^a T^a - ig' Y B_\mu$ ， $T^a = \sigma^a/2$ 。而 $V_H(\Phi)$ 是希格斯标量场的势能项，依赖于 $\Phi^\dagger \Phi = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2$ 。

假设 $\lambda > 0$ 。若 $\mu^2 < 0$ ，势能项 $V_H(\Phi)$ 的最小值对应 $\Phi^\dagger \Phi = 0$ 。希格斯场真空期待值为 $\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下不变，故规范对称性未受到破坏。

若 $\mu^2 > 0$, $\Phi^\dagger \Phi = 0$ 处变成 $V_H(\Phi)$ 的局域极大值, 而最小值位于 $\Phi^\dagger \Phi = v^2/2$ 对应的 3 维球面上, 其中 $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ 。

若压缩掉 ϕ^+ 的实部和虚部两个维度，则 $V_H(\Phi)$ 在 ϕ^0 的实部和虚部坐标上呈现出右图所示墨西哥草帽状的形式。希格斯场的真空期待值位于这个 3 维球面上的某一点，不失一般性，可取为

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$



由于这个期待值会在电弱规范变换下改变，真空态不满足电弱规范对称性。这种拉氏量满足对称性、真空态却不满足的现象称为**自发对称性破缺**。

希格斯玻色子

以上述真空期待值 $\langle \Phi \rangle$ 为基础，考虑沿 ϕ^0 实数轴扰动的实标量场 $H(x)$ ：

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger \Phi \rightarrow \frac{1}{2}(v + H)^2.$$

这种参数化方法称为**么正规化**，其它规范可由 $SU(2)_L$ 规范变换得到。从而，

$$-V_H(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^2(v + H)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + H)^4 = \frac{1}{4}\mu^2 v^2 - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \frac{m_H^2}{2v}H^3 - \frac{m_H^2}{8v^2}H^4,$$

其中 $m_H \equiv \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$ 。实标量场 H 对应于一个**质量为 m_H** 的中性标量粒子 H^0 ，称为**希格斯玻色子**，具有三线性和四线性自相互作用。

$$= -3i \frac{m_H^2}{v}$$

$$= -3i \frac{m_H^2}{v^2}$$

规范玻色子质量

在么正规范下，希格斯场的协变动能项化为

$$\begin{aligned}
 (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = & \frac{1}{2} (\partial^\mu H) (\partial_\mu H) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} \\
 & + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{2m_W^2}{v} H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{v} H Z_\mu Z^\mu \\
 & + \frac{m_W^2}{v^2} H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{2v^2} H^2 Z_\mu Z^\mu,
 \end{aligned}$$

$$= 2i \frac{m_W^2}{v} g^{\mu\nu}$$

$$= 2i \frac{m_Z^2}{v} g^{\mu\nu}$$

其中 $m_W \equiv \frac{1}{2} g v$ 和 $m_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v$ 。可见，

自发对称性破缺之后， W^\pm 和 Z^0 规范玻色子

获得了质量 m_W 和 m_Z ，有 3 个希格斯场自由度变成它们的纵向分量。

$$= 2i \frac{m_W^2}{v^2} g^{\mu\nu}$$

$$= 2i \frac{m_Z^2}{v^2} g^{\mu\nu}$$

费米子质量

希格斯场与费米子场之间能够发生电弱规范不变的**汤川相互作用**：

$$\mathcal{L}_Y = -\tilde{y}_d^{ij} \bar{Q}_{iL} d'_{jR} \Phi - y_u d_i \bar{Q}_{iL} u_{iR} \tilde{\Phi} - y_{\ell_i} \bar{L}_{iL} \ell_{iR} \Phi + \text{h.c.},$$

其中 $\tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2 \Phi^*$ 。由于 CKM 矩阵将 \tilde{y}_d^{ij} 对角化， $V_{li}^\dagger \tilde{y}_d^{ij} V_{jk} = y_{d_k} \delta_{lk}$ ，自发对称性破缺之后汤川耦合项化为

$$\mathcal{L}_Y = -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i.$$

其中 $m_{d_i} \equiv y_{d_i} v / \sqrt{2}$ ， $m_{u_i} \equiv y_{u_i} v / \sqrt{2}$ ， $m_{\ell_i} \equiv y_{\ell_i} v / \sqrt{2}$ 。可见，**费米子获得了质量**，并与希格斯玻色子发生汤川相互作用，其耦合常数正比于费米子质量。

