宇宙线相关粒子物理知识

第二节　粒子物理标准模型

余钊焕

中山大学物理学院

http://yzhxxzxy.github.io

2019 年 LHAASO 暑期学校
山东大学青岛校区
8 月 18 日至 26 日

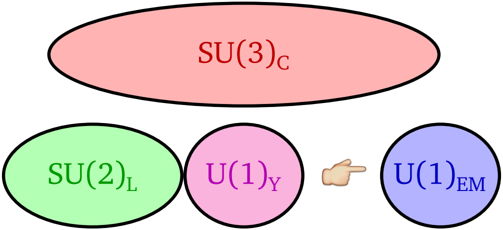
粒子物理标准模型

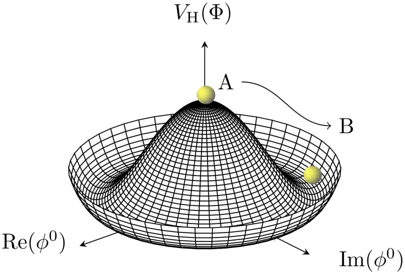
粒子物理**标准模型**是一个 $\mathrm{SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 规范理论

模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子，规范玻色子传递费米子间相互作用

$\mathrm{SU(3)_C}$ 部分描述**强相互作用**，称为**量子色动力学**，规范玻色子是**胶子**

$\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 部分统一描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱统一理论**；理论中有一个希格斯二重态，引起规范群的**自发对称性破缺**，使 $\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 群破缺为 $\mathrm{U(1)_{EM}}$ 群

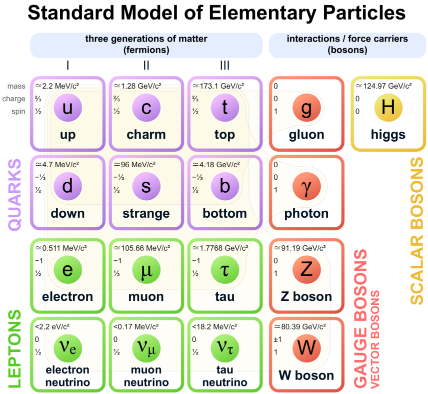




质量起源

破缺前，理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个希格斯自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数

破缺后，3 个规范玻色子与 3 个希格斯自由度结合，从而获得质量，成为 $W^\pm$ **和** Z^0 **玻色子**，传递**弱相互作用**；剩下的 1 个无质量规范玻色子是**光子**，即是 $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{EM}}$ 群的规范玻色子，传递**电磁相互作用**；与希格斯二重态的汤川耦合导致左手费米子和右手费米子获得质量，组合成狄拉克费米子



在标准模型中，中微子没有右手分量，因而没有获得质量

1998 年实验发现中微子振荡，证明**中微子具有质量**，因此需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理

同位旋

实验表明，质子和中子**质量相近，强相互作用性质相似**；在强相互作用中互换质子和中子，系统性质不会改变；π 介子也有类似性质

粒子	质子 p	中子 n	π^+ 介子	π^0 介子	π^- 介子
质量 (MeV)	938.27	939.57	139.57	134.98	139.57
电荷 Q	$+1$	0	$+1$	0	-1

W. Heisenberg
(1901-1976)

类比于**自旋**，海森堡在 1932 年提出**同位旋**的概念

同位旋 I 由 SU(2) 群描述，生成元记为 I^a，$a = 1, 2, 3$

质子和中子的同位旋为 $I = \frac{1}{2}$，构成**二重态** $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$，$I^3(p) = +\frac{1}{2}$，$I^3(n) = -\frac{1}{2}$

π 介子的同位旋为 $I = 1$，构成**三重态** $\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$，$I^3(\pi^\pm) = \pm 1$，$I^3(\pi^0) = 0$

同位旋守恒

在强相互作用中，同位旋守恒，初态与末态的 (I, I^3) 相同，$\Delta I = \Delta I^3 = 0$

对于 π 介子与核子的弹性散射，电荷守恒定律允许存在以下过程

弹性散射	截面	弹性散射	截面	弹性散射	截面	准弹性散射	截面
$\pi^+ p \to \pi^+ p$	σ_1	$\pi^0 p \to \pi^0 p$	σ_3	$\pi^- p \to \pi^- p$	σ_5	$\pi^+ n \leftrightarrow \pi^0 p$	σ_7
$\pi^+ n \to \pi^+ n$	σ_2	$\pi^0 n \to \pi^0 n$	σ_4	$\pi^- n \to \pi^- n$	σ_6	$\pi^- p \leftrightarrow \pi^0 n$	σ_8

强相互作用具有同位旋 SU(2) 不变性，在同位旋空间绕第 2 个轴转 180°，使得 $p \leftrightarrow n$，$\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$，$\pi^0 \leftrightarrow \pi^0$，得到的散射截面不变：

$$\sigma_1 = \sigma_6, \quad \sigma_2 = \sigma_5, \quad \sigma_3 = \sigma_4, \quad \sigma_7 = \sigma_8$$

同位旋多重态各分量的质量有微小差异 👉 上述截面关系略有破坏

在电磁和弱相互作用中，同位旋不守恒

夸克

- 强子的同位旋对称性源自 u 夸克和 d 夸克的同位旋对称性
- 迄今发现 6 种**味道**不同的夸克 (d, u, s, c, b, t)，量子数和质量列于下表

夸克	I	I^3	$\mathcal{S}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{T}$	B	Q	质量 (GeV)	
d	1/2	−1/2	0	0	0	0	+1/3	−1/3	~ 0.3	组分质量
u	1/2	+1/2	0	0	0	0	+1/3	+2/3	~ 0.3	
s	0	0	−1	0	0	0	+1/3	−1/3	~ 0.5	
c	0	0	0	+1	0	0	+1/3	+2/3	~ 1.6	
b	0	0	0	0	−1	0	+1/3	−1/3	~ 4.6	
t	0	0	0	0	0	+1	+1/3	+2/3	173 (极点质量)	

- $\mathcal{S}$ 是**奇异数**，$\mathcal{C}$ 是**粲数**，$\mathcal{B}$ 是**底数**，$\mathcal{T}$ 是**顶数**，它们都在**强和电磁相互作用中守恒**，在**弱相互作用中不守恒**
- B 是**重子数**，介子的重子数为 0，重子的重子数为 ± 1，**重子数守恒**
- 强子的相加性量子数是价夸克相应量子数之和，满足**盖尔曼—西岛关系**

电荷 $Q = I^3 + Y/2$，其中**超荷** $Y = B + \mathcal{S} + \mathcal{C} + \mathcal{B} + \mathcal{T}$

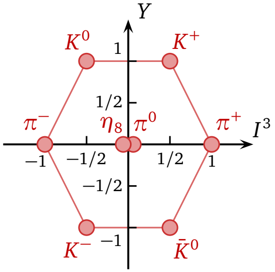
夸克模型

1964 年，盖尔曼和茨威格分别提出**夸克模型**，当时认为存在 3 种**味道**的夸克，u、d 和 s，属于 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 群的基础表示，强子具有 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ **味对称性**

介子由一对正反夸克组成，构成**单态**和**八重态**

重子由三个夸克组成，构成**八重态**和**十重态**

u 和 d 的味对称性就是 $\mathrm{SU}(2)$ **同位旋**对称性，$\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 味对称性是它的进一步推广。根据**群表示论**，$J^P=0^-$ 的赝标量介子是 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 八重态，成分为



$\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 八重态的权图

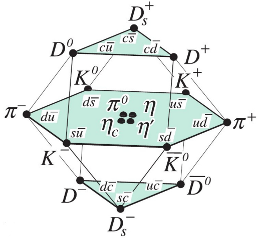
$$\pi^+=u\bar{d},\quad \pi^0=\frac{1}{2}(u\bar{u}-d\bar{d}),\quad \pi^-=d\bar{u},\quad \eta_8=\frac{1}{6}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}),$$

$$K^+=u\bar{s},\quad K^0=d\bar{s},\quad \bar{K}^0=s\bar{d},\quad K^-=s\bar{u}$$

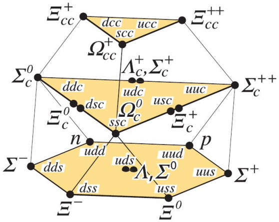
由于 s 夸克的质量大于 u 和 d 夸克的质量，$\mathrm{SU}(3)_\mathrm{F}$ 味对称性不是严格成立的，同个多重态中的粒子存在不小的**质量差异**

$\mathrm{SU}(4)_\mathrm{F}$ 味对称性

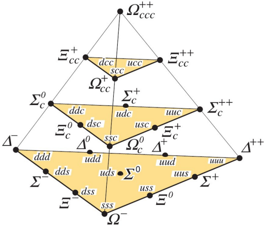
- 把 c 夸克也加入进来，上述对称性可以进一步推广为 $\mathrm{SU}(4)_\mathrm{F}$ 味对称性
- 由于 c 夸克很重，同个多重态中粒子的质量差异更大



$J^P=0^-$ 介子 15 重态及单态



$J^P=\frac{1}{2}^+$ 重子 20 重态



$J^P=\frac{3}{2}^+$ 重子 20 重态

上述自旋为 3/2 的重子多重态中存在 $\Delta^{++}\sim uuu$、$\Delta^-\sim ddd$、$\Omega^-\sim sss$ 和 $\Omega_{ccc}^{++}\sim ccc$ 这样的重子。它们是 3 个同味夸克组成的 $L=0$ 的态，因而 3 个夸克的自旋取向必须相同才能得到 $J=3/2$。根据泡利不相容原理，全同费米子不能处于相同的状态，这预示着夸克具有额外的内部自由度——颜色。

颜色自由度

从实验上确立的强子态基本都可以用一个正夸克加一个反夸克（介子）、三个正夸克（正重子）和三个反夸克（反重子）组成的体系来描述

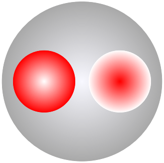
？ 为什么两个正夸克或四个正夸克构成的强子态不存在呢?

！ **颜色自由度**的引入解决了这个问题

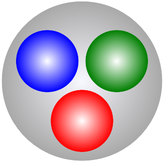
- 夸克具有 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ **色对称性**，每味夸克具有 3 种颜色，构成 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ 群的基础表示，可记为

$$q^i \quad (i = 1, 2, 3;\ q = d, u, s, c, b, t)$$

- 强子都是**色单态**；介子中两个夸克的颜色必须相反，以组成色单态；重子中三个夸克的颜色各不相同，组成全反对称的色单态
- 两个正夸克或四个正夸克不能组成色单态，因而不构成强子态
- 用 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ 色对称性构建规范理论，得到**量子色动力学**



介子



重子

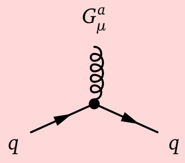
量子色动力学

💥 **量子色动力学**（Quantum Chromodynamics）简称 **QCD**，是 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ **非阿贝尔规范理论**，规范场记作 G_μ^a，规范玻色子为 8 种胶子

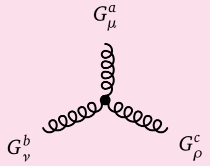
✏️ QCD 的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a,\mu\nu}, \quad q = d,u,s,c,b,t, \quad a = 1,\cdots,8$$

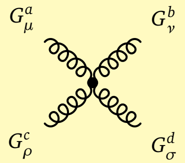
- 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a t^a$，场强张量 $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g_s f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu$
- g_s 是**强耦合常数**，t^a 是 SU(3) 基础表示生成元，f^{abc} 是结构常数
- QCD 耦合包括**夸克强相互作用顶点**和**胶子自相互作用顶点**



$= ig_s\gamma^\mu t^a$



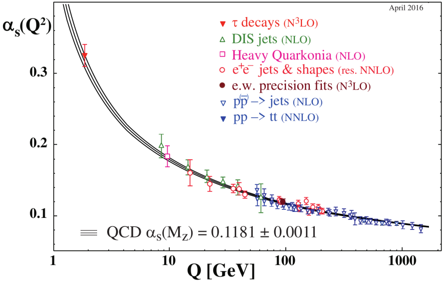
$\propto g_s$



$\propto g_s^2$

渐近自由和夸克禁闭

- 受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“**跑动**”的，即数值依赖于能标 Q
- 在量子电动力学中，**电磁耦合常数 $\alpha = e^2/(4\pi)$ 随能标升高而增大**
- 然而，QCD 的情况相反，**强耦合常数 $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ 随能标升高而减小**



[PDG 2018]

- 由于高能标意味着短距离，这个特性被称为 **QCD 的渐近自由**
- 随着能标下降，α_s 越来越大，夸克间相互作用变得越来越强
- 夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为**夸克禁闭**
- 实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态
- 由于质量太大，**顶夸克**会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中

轻子

电子、μ 子、τ 子及相应中微子统称为**轻子**，它们**不参与强相互作用**

1962 年，L. Lederman、M. Schwartz 和 J. Steinberger 在中微子束流实验中发现，能够在中微子与原子核 N 的散射中**探测到反应** $\nu+N\to\mu^-+X$（X 代表不包含带电轻子的其它所有粒子），但**没有探测到反应** $\nu+N\to e^-+X$

中微子具有不同**味道**，存在 μ 子型中微子 ν_μ，与电子型中微子 ν_e 不同

不同代轻子在反应过程中不会混合起来，以下表方式指定三种**轻子数** L_e、L_μ 和 L_τ，则它们分别在**电磁和弱相互作用中守恒**

轻子	L_e	L_μ	L_τ	Q	质量	寿命
e^-	$+1$	0	0	-1	0.511 MeV	稳定
μ^-	0	$+1$	0	-1	105.7 MeV	2.2×10^{-6} s
τ^-	0	0	$+1$	-1	1.777 GeV	2.9×10^{-13} s
ν_e	$+1$	0	0	0		稳定
ν_μ	0	$+1$	0	0	$\sum_{i=1}^{3} m_{\nu_i}\lesssim 0.2$ eV	稳定
ν_τ	0	0	$+1$	0		稳定

轻子数守恒允许

$n\to pe^-\bar\nu_e$

$\mu^-\to e^-\bar\nu_e\nu_\mu$

$\tau^-\to\mu^-\bar\nu_\mu\nu_\tau$

$\pi^-\to\mu^-\bar\nu_\mu$

轻子数守恒禁戒

$e^-e^-\not\leftrightarrow\pi^-\pi^-$

$\mu^-\not\to e^-\gamma$

$\pi^-\not\to\mu^-\bar\nu_e$

电弱统一理论

- **电弱统一理论**是 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ **规范理论**
- $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 的生成元称为**弱同位旋** T^a，$\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ 的生成元称为**弱超荷** Y
- **电荷** $Q=T^3+Y$，类似于盖尔曼－西岛关系
- 左手费米子场构成 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ **二重态**，右手费米子场则是 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ **单态**

统一记号	第 1 代	第 2 代	第 3 代	T^3	Y	Q
$L_{i\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}\nu_{i\mathrm{L}}\\ \ell_{i\mathrm{L}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{e\mathrm{L}}\\ e_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{\mu\mathrm{L}}\\ \mu_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{\tau\mathrm{L}}\\ \tau_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$-1/2$ $-1/2$	0 -1
$Q_{i\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}u_{i\mathrm{L}}\\ d'_{i\mathrm{L}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}u_\mathrm{L}\\ d'_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}c_\mathrm{L}\\ s'_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}t_\mathrm{L}\\ b'_\mathrm{L}\end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$1/6$ $1/6$	$2/3$ $-1/3$
$\ell_{i\mathrm{R}}$	e_R	μ_R	τ_R	0	-1	-1
$u_{i\mathrm{R}}$	u_R	c_R	t_R	0	$2/3$	$2/3$
$d'_{i\mathrm{R}}$	d'_R	s'_R	b'_R	0	$-1/3$	$-1/3$

- **规范本征态** d'_i 通过 **CKM 矩阵** V_{ij} 与**质量本征态** d_i 联系起来：$d'_i=V_{ij}d_j$

费米子的电弱规范不变拉氏量

三代费米子的电弱规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{L}_{i\text{L}} i\gamma^\mu D_\mu L_{i\text{L}} + \bar{Q}_{i\text{L}} i\gamma^\mu D_\mu Q_{i\text{L}} + \bar{\ell}_{i\text{R}} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{i\text{R}} + \bar{u}_{i\text{R}} i\gamma^\mu D_\mu u_{i\text{R}} + \bar{d}'_{i\text{R}} i\gamma^\mu D_\mu d'_{i\text{R}}$$

- $\text{SU}(2)_\text{L}$ 二重态 $Q_{i\text{L}}$ 和 $L_{i\text{L}}$ 的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig'YB_\mu$，其中 $T^a = \sigma^a/2$；$\text{SU}(2)_\text{L}$ 单态 $\ell_{i\text{R}}$、$u_{i\text{R}}$ 和 $d'_{i\text{R}}$ 的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - ig'YB_\mu$
- 这里**没有质量项**：质量项耦合左右手费米子场，从而破坏规范对称性

规范场 W_μ^a $(a = 1, 2, 3)$ 和 B_μ 跟**左手**费米子的耦合与**右手**费米子**不同**，而电磁场却**相同** 👉 为了得到电磁相互作用，需要把 W_μ^3 和 B_μ **混合**起来

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\text{W} & s_\text{W} \\ -s_\text{W} & c_\text{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad s_\text{W} \equiv \sin\theta_\text{W} = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad c_\text{W} \equiv \sqrt{1 - s_\text{W}^2}$$

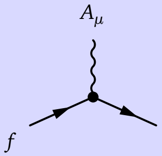
- 转动角 θ_W 称为**温伯格角**
- A_μ 对应于**光子**，传递电磁相互作用，**电磁耦合常数** $e = gs_\text{W} = g'c_\text{W}$
- Z_μ 和 $W_\mu^\pm \equiv (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$ 对应于 Z^0 **和** $W^\pm$ **玻色子**，传递弱相互作用

费米子的电弱规范相互作用

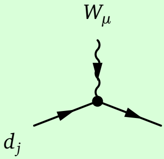
- 费米子电弱规范相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset eA_\mu J^\mu_{\text{EM}} + gZ_\mu J^\mu_Z + g(W^+_\mu J^{+,\mu}_W + \text{h.c.})$

电磁流 $J^\mu_{\text{EM}} \equiv \sum_f Q_f \bar{f}\gamma^\mu f$, **弱带电流** $J^{+,\mu}_W \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{i\text{L}}\gamma^\mu V_{ij} d_{j\text{L}} + \bar{\nu}_{i\text{L}}\gamma^\mu \ell_{i\text{L}})$

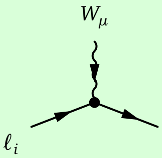
弱中性流 $J^\mu_Z \equiv \dfrac{1}{2c_{\text{W}}}\sum_f \bar{f}\gamma^\mu(g^f_{\text{V}} - g^f_{\text{A}}\gamma_5)f$, $g^f_{\text{V}} \equiv T^3_f - 2Q_f s^2_{\text{W}}$, $g^f_A \equiv T^3_f$



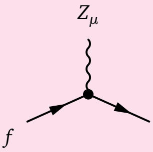
$= iQ_f e\gamma^\mu$



$= i\dfrac{g}{\sqrt{2}}V_{ij}\gamma^\mu P_{\text{L}}$



$= i\dfrac{g}{\sqrt{2}}\gamma^\mu P_{\text{L}}$



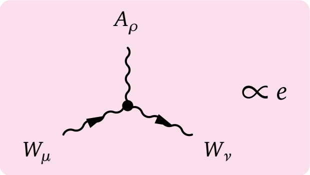
$= i\dfrac{g}{2c_{\text{W}}}\gamma^\mu(g^f_{\text{V}} - g^f_{\text{A}}\gamma_5)$

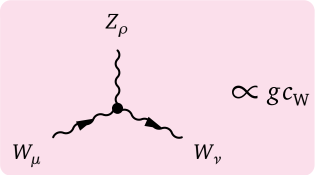
电弱规范玻色子的自相互作用

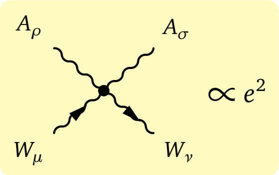
- 电弱规范场自身的规范不变拉氏量为

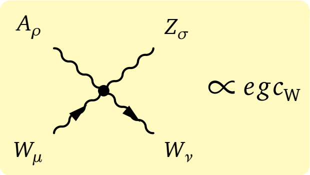
$$\mathcal{L}_{\mathrm{EWG}} = -\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

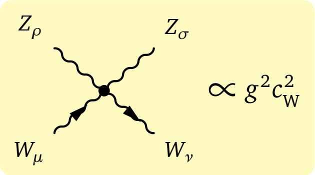
- 场强张量 $W^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g\epsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu$，$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

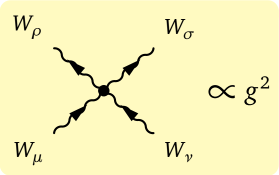












布劳特–恩格勒–希格斯机制

❗ 夸克、带电轻子、Z^0 和 $W^\pm$ 都具有质量，但上述 $\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 规范理论的拉氏量**还没有任何质量项**

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是**可重整性**

😨 在规范理论中直接放入**规范场的质量项**，会破坏规范对称性

😨 直接引入**费米子场的质量项**会破坏 $\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 规范对称性

💡 为了在保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的质量，需要引入**布劳特–恩格勒–希格斯 (BEH) 机制**，使 $\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 对称性自发破缺

✏️ 引进**希格斯标量场** $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$，$\phi^+$ 和 ϕ^0 都是复标量场；Φ 是 $\mathrm{SU(2)_L}$ 二重态，具有弱超荷 $Y = 1/2$，电弱规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_\mathrm{H} = (D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) - V_\mathrm{H}(\Phi), \quad V_\mathrm{H}(\Phi) = -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$$

🌗 协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig'YB_\mu$，$T^a = \sigma^a/2$

🌓 $V_\mathrm{H}(\Phi)$ 是希格斯标量场的**势能项**，依赖于 $\Phi^\dagger\Phi = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2$

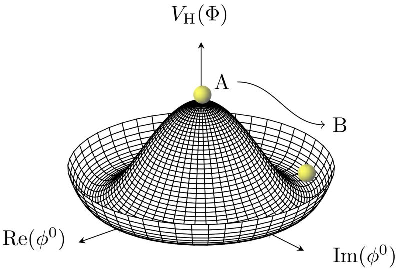
自发对称性破缺

✏️ 希格斯场**势能**的行为由二次项系数 μ^2 和四次项系数 λ 决定；**假设** $\lambda > 0$

🌗 若 $\mu^2 < 0$，势能项 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 的最小值对应 $\Phi^\dagger\Phi = 0$；希格斯场真空期待值为 $\langle\Phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，它在电弱规范变换下**不变**，故规范对称性未受到破坏

🌓 若 $\mu^2 > 0$，$\Phi^\dagger\Phi = 0$ 处变成 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 的极大值，而最小值位于 $\Phi^\dagger\Phi = v^2/2$ 对应的 3 维球面上，其中 $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$

👉 若压缩掉 ϕ^+ 的实部和虚部两个维度，则 $V_{\mathrm{H}}(\Phi)$ 在 ϕ^0 的实部和虚部坐标上呈现右图所示墨西哥草帽状的形式；希格斯场的真空期待值位于上述 3 维球面上的某一点，不失一般性，可取为 $\langle\Phi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$



✨ 电弱规范变换会**改变**这个期待值，故真空态不满足电弱规范对称性；这种拉氏量满足对称性、真空态却不满足的现象称为对称性自发破缺

希格斯玻色子

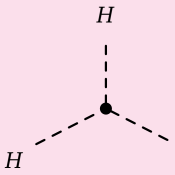
✏️ 以上述真空期待值 $\langle\Phi\rangle$ 为基础，考虑沿 ϕ^0 实轴扰动的实标量场 $H(x)$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+H(x)\end{pmatrix},\qquad \Phi^\dagger\Phi\to\frac{1}{2}(v+H)^2$$

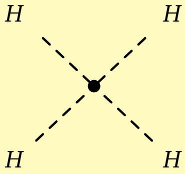
🌙 这种参数化方法称为**幺正规范**，其它规范可由 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 规范变换得到

✏️ $$-V_\mathrm{H}(\Phi)=\frac{1}{2}\mu^2(v+H)^2-\frac{1}{4}\lambda(v+H)^4=\frac{1}{4}\mu^2v^2-\frac{1}{2}m_H^2H^2-\frac{m_H^2}{2v}H^3-\frac{m_H^2}{8v^2}H^4$$

✨ $m_H\equiv\sqrt{2}\mu=\sqrt{2\lambda}v$，实标量场 H 对应于一个**质量为** m_H 的中性标量粒子 H^0，称为**希格斯玻色子**，具有**三线性**和**四线性**自相互作用



$$=-3i\frac{m_H^2}{v}$$



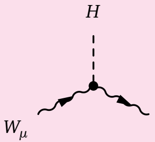
$$=-3i\frac{m_H^2}{v^2}$$

规范玻色子质量

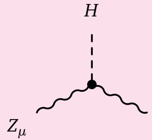
在幺正规范下，希格斯场的协变动能项化为

$$(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) = \frac{1}{2}(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu}$$
$$+\frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{2m_W^2}{v}HW_\mu^+W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{v}HZ_\mu Z^\mu$$
$$+\frac{m_W^2}{v^2}H^2W_\mu^+W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{2v^2}H^2 Z_\mu Z^\mu$$

$m_W \equiv \frac{1}{2}gv$，$m_Z \equiv \frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\,v$

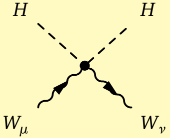


$$= 2i\frac{m_W^2}{v}g^{\mu\nu}$$

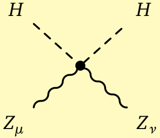


$$= 2i\frac{m_Z^2}{v}g^{\mu\nu}$$

对称性自发破缺之后，$W^\pm$ **和** Z^0 **规范玻色子获得质量** m_W **和** m_Z，有 3 个希格斯场自由度变成它们的**纵向极化分量**



$$= 2i\frac{m_W^2}{v^2}g^{\mu\nu}$$



$$= 2i\frac{m_Z^2}{v^2}g^{\mu\nu}$$

费米子质量

- 希格斯场与费米子场之间能够发生电弱规范不变的**汤川相互作用**

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} = -\tilde{y}_d^{ij}\bar{Q}_{i\mathrm{L}}d'_{j\mathrm{R}}\Phi - y_u d_i \bar{Q}_{i\mathrm{L}}u_{i\mathrm{R}}\tilde{\Phi} - y_{\ell_i}\bar{L}_{i\mathrm{L}}\ell_{i\mathrm{R}}\Phi + \mathrm{h.c.}, \quad \tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2\Phi^*$$

- **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵** V 将 $\tilde{y}_d^{ij}$ 对角化，满足

$$V_{li}^{\dagger}\tilde{y}_d^{ij}V_{jk} = y_{d_k}\delta_{lk}$$

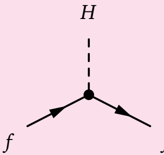
- 对称性自发破缺之后，汤川耦合项化为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} = -m_{d_i}\bar{d}_i d_i - m_{u_i}\bar{u}_i u_i - m_{\ell_i}\bar{\ell}_i\ell_i - \frac{m_{d_i}}{v}H\bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v}H\bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v}H\bar{\ell}_i\ell_i$$

- $m_{d_i} \equiv \dfrac{y_{d_i}v}{\sqrt{2}}$, $m_{u_i} \equiv \dfrac{y_{u_i}v}{\sqrt{2}}$, $m_{\ell_i} \equiv \dfrac{y_{\ell_i}v}{\sqrt{2}}$

- 可见，**费米子获得了质量**

- 费米子与希格斯玻色子发生汤川相互作用，耦合常数正比于费米子质量



$$= -i\frac{m_f}{v}$$

夸克混合

在标准模型中，可以将上型夸克的规范态就取为质量态，而下型夸克的规范态与质量态通过 **CKM 矩阵** V 联系：

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

概率守恒要求 V 是**幺正**矩阵，标准参数化形式为

$$V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & & s_{13}e^{-i\delta} \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta} & & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} s_{ij} &\equiv \sin\theta_{ij} \\ c_{ij} &\equiv \cos\theta_{ij} \end{aligned}$$

V 包含 3 个转动角 $\theta_{12} \simeq 13^\circ$，$\theta_{23} \simeq 2.4^\circ$，$\theta_{13} \simeq 0.20^\circ$，
1 个引起 CP **破坏**的复相角 $\delta \simeq 71^\circ$

CKM 矩阵元

拟合实验数据得到 **CKM 矩阵元的模**为

$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} 0.97446 \pm 0.00010 & 0.22452 \pm 0.00044 & 0.00365 \pm 0.00012 \\ 0.22438 \pm 0.00044 & 0.97359^{+0.00010}_{-0.00011} & 0.04214 \pm 0.00076 \\ 0.00896^{+0.00024}_{-0.00023} & 0.04133 \pm 0.00074 & 0.999105 \pm 0.000032 \end{pmatrix}$$

如果忽略第三代夸克的混合，CKM 矩阵可近似为

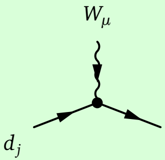
$$V_{ij} \simeq \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathrm{C}} & \sin\theta_{\mathrm{C}} & \\ -\sin\theta_{\mathrm{C}} & \cos\theta_{\mathrm{C}} & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

θ_{C} 称为 **Cabibbo 角**，满足 $\sin\theta_{\mathrm{C}} = |V_{12}|$

CKM 矩阵的**非对角元**非零 ☞ **弱带电流**可以耦合**不同代的夸克**

$u \to W^+ d'$ 过程在质量态上表现为

$$u \to W^+ d \ \ (V_{11}\ \text{引起})$$
$$u \to W^+ s \ \ (V_{12}\ \text{引起})$$
$$u \to W^+ b \ \ (V_{13}\ \text{引起})$$



$$= i\frac{g}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_{\mathrm{L}}$$

超出标准模型：中微子混合

中微子振荡实验表明，中微子具有**微小质量**，而且存在**味混合**

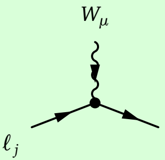
狄拉克中微子的味道本征态（即规范本征态）与质量本征态通过 **Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) 矩阵** U 联系：

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}\bar{c}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{13}e^{-i\bar{\delta}}\\ -\bar{s}_{12}\bar{c}_{23}-\bar{c}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{12}\bar{c}_{23}-\bar{s}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{s}_{23}\bar{c}_{13}\\ \bar{s}_{12}\bar{s}_{23}-\bar{c}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & -\bar{c}_{12}\bar{s}_{23}-\bar{s}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{23}\bar{c}_{13}\end{pmatrix}$$

$\bar{\theta}_{12}\sim 33^\circ$，$\bar{\theta}_{23}\sim 41^\circ$（质量正序）或 $\bar{\theta}_{23}\sim 50^\circ$（质量逆序），$\bar{\theta}_{13}\sim 8.4^\circ$

如果中微子是马约拉纳费米子，则额外存在 2 个 CP 破坏相角 ρ 和 σ，PMNS 矩阵应该再右乘 $\mathrm{diag}(1,e^{i\rho},e^{i\sigma})$

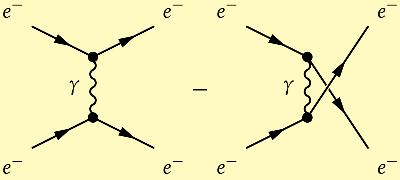
- 太阳中微子振荡 ☞ $\bar{\theta}_{12}$
- 大气中微子振荡 ☞ $\bar{\theta}_{23}$
- 反应堆中微子振荡 ☞ $\bar{\theta}_{13}$



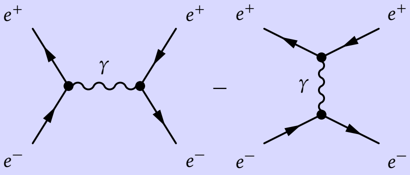
$$= i\frac{g}{\sqrt{2}}U_{ij}\gamma^\mu P_{\mathrm{L}}$$

典型 QED 过程

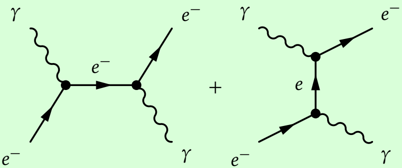
💥 **电磁流**相互作用对应于**量子电动力学** (Quantum Electrodynamics，**QED**)



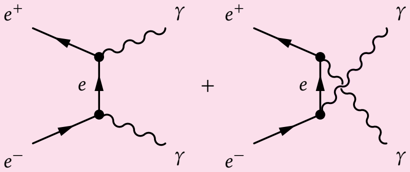
Møller 散射 $e^-e^- \to e^-e^-$



Bhabha 散射 $e^+e^- \to e^+e^-$



Compton 散射 $e^-\gamma \to e^-\gamma$

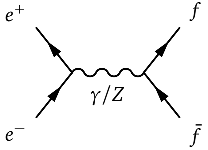


e^+e^- **湮灭到双光子** $e^+e^- \to \gamma\gamma$

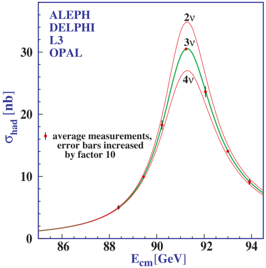
✨ 初末态相同的过程可以具有多个费曼图，它们对应的振幅之间**相互干涉**

e^+e^- 湮灭

💥 通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$



✨ $\sqrt{s}\sim m_Z$ 处出现 Z 的共振峰



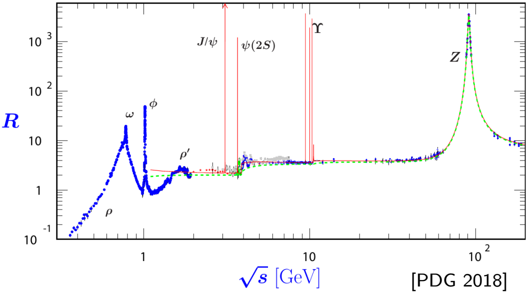
💡 受共振态和弱中性流影响较小时，截面比 $R=\dfrac{\sigma(e^+e^-\to q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)}$ 体现夸克味数、电荷跟 μ 子的相对差异

🌓 $1\text{ GeV}\le\sqrt{s}\le 3.6\text{ GeV}$ 处，

$$R\simeq 3\left[2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]=2$$

🌗 $3.7\text{ GeV}\le\sqrt{s}\le 10\text{ GeV}$ 处，

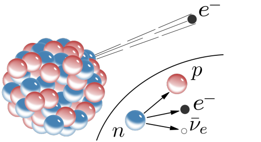
$$R\simeq 3\left[2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]=\frac{10}{3}$$



[PDG 2018]

β 衰变

弱相互作用引起**原子核 β 衰变**

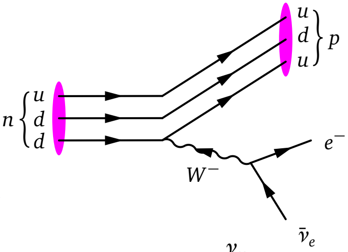


质量数为 $A = Z + N$ 的原子核具有 Z 个质子和 N 个中子，通过 β 衰变会变成具有 $Z+1$ 个质子和 $N-1$ 个中子的原子核 A'，即

$$A(Z,N) \to A'(Z+1, N-1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

在**核子**层次，以上过程体现为**中子 β 衰变**，

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

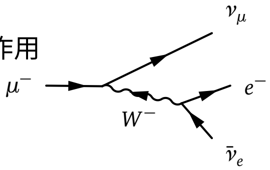


在**夸克**层次，以上过程体现为 **d 夸克 β 衰变**

$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$$

此过程来自 W^- 玻色子传递的**弱带电流**相互作用

在**轻子**方面，类似的过程有 **μ 子衰变**



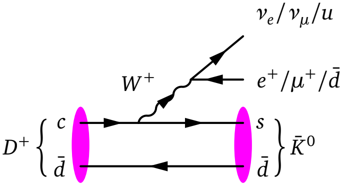
$$\mu^- \to \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$

介子弱衰变

弱带电流相互作用也会引起介子衰变

$D^+(c\bar{d})$ 衰变到 $\bar{K}^0$ 和轻子或夸克（介子）

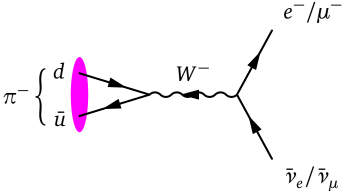
$$D^+ \to \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$



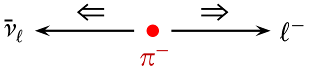
D^+ 中 $\bar{d}$ 夸克实际没参与衰变，称为**旁观者**

$\pi^-(\bar{u}d)$ 衰变到带电轻子和反中微子

$$\pi^+ \to e^-/\mu^- + \bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$$



π^- 静止系中，**角动量守恒**要求末态轻子和反轻子的螺旋度相同，但弱带电流只耦合左手费米子和右手反费米子，需要由**质量翻转螺旋度**



$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu)} \sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \simeq 2 \times 10^{-5}$$

$\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$ 分支比为 99.9877%，$\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$ 分支比为 0.0123%