

宇宙线相关粒子物理知识

第二节 粒子物理标准模型

余钊焕

中山大学物理学院

<http://yzhxxzxy.github.io>



2019 年 LHAASO 暑期学校
山东大学青岛校区
8 月 18 日至 26 日



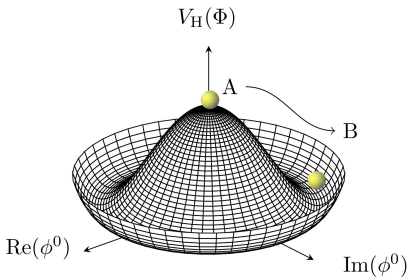
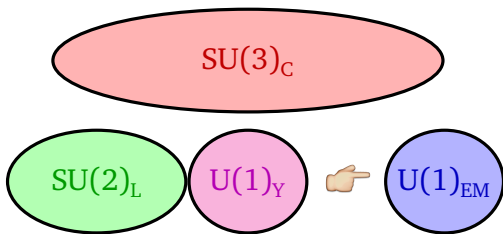
粒子物理标准模型

💡 粒子物理**标准模型**是一个 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论

✎ 模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子，规范玻色子传递费米子间相互作用

🟡 $SU(3)_C$ 部分描述**强相互作用**，称为**量子色动力学**，规范玻色子是**胶子**

🟡 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 部分统一描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱统一理论**；理论中有一个希格斯二重态，引起规范群的**自发对称性破缺**，使 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群破缺为 $U(1)_{EM}$ 群



质量起源

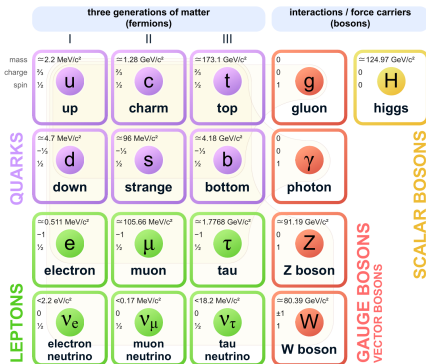
☀ 破缺前，理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个希格斯自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数

☁ 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个希格斯自由度结合，从而获得质量，成为 W^\pm 和 Z^0 玻色子，传递弱相互作用；剩下的 1 个无质量规范玻色子是光子，即是 $U(1)_{EM}$ 群的规范玻色子，传递电磁相互作用；与希格斯二重态的汤川耦合导致左手费米子和右手费米子获得质量，组合成狄拉克费米子

✎ 在标准模型中，中微子没有右手分量，因而没有获得质量

✎ 1998 年实验发现中微子振荡，证明中微子具有质量，因此需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理

Standard Model of Elementary Particles



同位旋

实验表明，质子和中子**质量相近，强相互作用性质相似**；在强相互作用中互换质子和中子，系统性质不会改变； π 介子也有类似性质

粒子	质子 p	中子 n	π^+ 介子	π^0 介子	π^- 介子
质量 (MeV)	938.27	939.57	139.57	134.98	139.57
电荷 Q	+1	0	+1	0	-1



W. Heisenberg
(1901-1976)

类比于**自旋**，海森堡在 1932 年提出**同位旋**的概念

同位旋 I 由 $SU(2)$ 群描述，生成元记为 I^a , $a = 1, 2, 3$

质子和中子的同位旋为 $I = \frac{1}{2}$ ，构成**二重态** $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ ， $I^3(p) = +\frac{1}{2}$ ， $I^3(n) = -\frac{1}{2}$

π 介子的同位旋为 $I = 1$ ，构成**三重态** $\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$ ， $I^3(\pi^\pm) = \pm 1$ ， $I^3(\pi^0) = 0$

同位旋守恒

💡 在**强相互作用**中，**同位旋守恒**，初态与末态的 (I, I^3) 相同， $\Delta I = \Delta I^3 = 0$

✎ 对于 π 介子与核子的弹性散射，电荷守恒定律允许存在以下过程

弹性散射	截面	弹性散射	截面	弹性散射	截面	准弹性散射	截面
$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$	σ_1	$\pi^0 p \rightarrow \pi^0 p$	σ_3	$\pi^- p \rightarrow \pi^- p$	σ_5	$\pi^+ n \leftrightarrow \pi^0 p$	σ_7
$\pi^+ n \rightarrow \pi^+ n$	σ_2	$\pi^0 n \rightarrow \pi^0 n$	σ_4	$\pi^- n \rightarrow \pi^- n$	σ_6	$\pi^- p \leftrightarrow \pi^0 n$	σ_8

☀ 强相互作用具有同位旋 $SU(2)$ 不变性，在同位旋空间绕第 2 个轴转 180° ，使得 $p \leftrightarrow n$ ， $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$ ， $\pi^0 \leftrightarrow \pi^0$ ，得到的散射截面不变：

$$\sigma_1 = \sigma_6, \quad \sigma_2 = \sigma_5, \quad \sigma_3 = \sigma_4, \quad \sigma_7 = \sigma_8$$

🌙 同位旋多重态各分量的质量有微小差异 🖐 上述截面关系略有破坏

✨ 在**电磁和弱相互作用**中，**同位旋不守恒**

夸克

💡 强子的同位旋对称性源自 u 夸克和 d 夸克的同位旋对称性

✎ 迄今发现 6 种味道不同的夸克 (d, u, s, c, b, t), 量子数和质量列于下表

夸克	I	I^3	S	C	B	T	B	Q	质量 (GeV)	组分质量
d	1/2	-1/2	0	0	0	0	+1/3	-1/3	~ 0.3	
u	1/2	+1/2	0	0	0	0	+1/3	+2/3	~ 0.3	
s	0	0	-1	0	0	0	+1/3	-1/3	~ 0.5	
c	0	0	0	+1	0	0	+1/3	+2/3	~ 1.6	
b	0	0	0	0	-1	0	+1/3	-1/3	~ 4.6	
t	0	0	0	0	0	+1	+1/3	+2/3	173 (极点质量)	

🟡 S 是奇异数, C 是粲数, B 是底数, T 是顶数, 它们都在强和电磁相互作用中守恒, 在弱相互作用中不守恒

🟡 B 是重子数, 介子的重子数为 0, 重子的重子数为 ± 1 , 重子数守恒

🟡 强子的相加性量子数是价夸克相应量子数之和, 满足盖尔曼-西岛关系

$$\text{电荷 } Q = I^3 + Y/2, \text{ 其中超荷 } Y = B + S + C + B + T$$

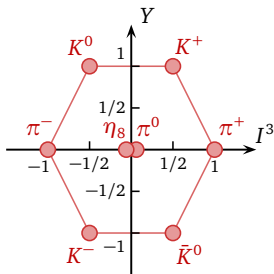
夸克模型

💥 1964 年，盖尔曼和茨威格分别提出**夸克模型**，当时认为存在 3 种**味道**的夸克， u 、 d 和 s ，属于 $SU(3)_F$ 群的基础表示，强子具有 $SU(3)_F$ **味对称性**

🟡 介子由一对正反夸克组成，构成**单态**和**八重态**

🟡 重子由三个夸克组成，构成**八重态**和**十重态**

🖋️ u 和 d 的味对称性就是 $SU(2)$ **同位旋**对称性， $SU(3)_F$ 味对称性是它的进一步推广。根据**群表示论**， $J^P = 0^-$ 的赝标量介子是 $SU(3)_F$ 八重态，成分为



$SU(3)_F$ 八重态的权图

$$\pi^+ = u\bar{d}, \quad \pi^0 = \frac{1}{2}(u\bar{u} - d\bar{d}), \quad \pi^- = d\bar{u}, \quad \eta_8 = \frac{1}{6}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}),$$

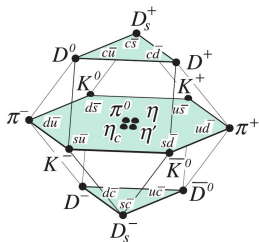
$$K^+ = u\bar{s}, \quad K^0 = d\bar{s}, \quad \bar{K}^0 = s\bar{d}, \quad K^- = s\bar{u}$$

✨ 由于 s 夸克的质量大于 u 和 d 夸克的质量， $SU(3)_F$ 味对称性不是严格成立的，同个多重态中的粒子存在不小的**质量差异**

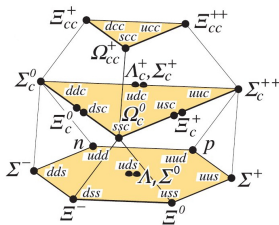
SU(4)_F 味对称性

💡 把 c 夸克也加入进来，上述对称性可以进一步推广为 **SU(4)_F 味对称性**

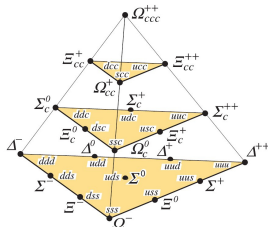
✨ 由于 c 夸克很重，同个多重态中粒子的**质量差异更大**



$J^P = 0^-$ 介子 15 重态及单态



$J^P = \frac{1}{2}^+$ 重子 20 重态



$J^P = \frac{3}{2}^+$ 重子 20 重态

上述自旋为 $3/2$ 的重子多重态中存在 $\Delta^{++} \sim uuu$ 、 $\Delta^- \sim ddd$ 、 $\Omega^- \sim sss$ 和 $\Omega_{ccc}^{++} \sim ccc$ 这样的重子。它们是 3 个全同夸克组成的 $L=0$ 的态，因而 3 个夸克的自旋取向必须相同才能得到 $J=3/2$ 。根据**泡利不相容原理**，全同费米子不能处于相同的状态，这预示着新的内部自由度——**颜色**——的存在。

颜色自由度

✎ 从实验上确立的强子态基本都可以用一对正反夸克（介子）、三个正夸克（正重子）和三个反夸克（反重子）组成的体系来描述

❓ 为什么两个正夸克或四个正夸克构成的强子态不存在呢？

❗ **颜色自由度**的引入解决了这个问题

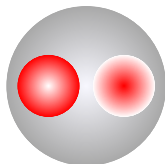
● 夸克具有 $SU(3)_C$ **色对称性**，每味夸克具有 3 种颜色，构成 $SU(3)_C$ 群的基础表示，可记为

$$q^i \quad (i = 1, 2, 3; q = d, u, s, c, b, t)$$

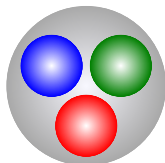
● 强子都是**色单态**；介子中两个夸克的颜色必须相反，以组成色单态；重子中三个夸克的颜色各不相同，组成全反对称的色单态

● 两个正夸克或四个正夸克不能组成颜色单态，因而不构成强子态

● 用 $SU(3)_C$ 色对称性构建规范理论，得到**量子色动力学**



介子



重子

量子色动力学

💡 **量子色动力学** (Quantum Chromodynamics) 简称 **QCD**, 是 **$SU(3)_c$ 非阿贝尔规范理论**, 规范场记作 G_μ^a , 规范玻色子为 8 种胶子

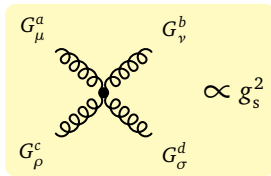
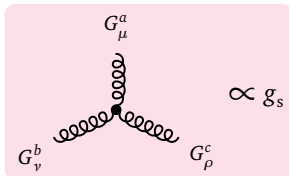
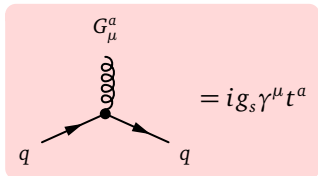
🖋️ QCD 的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8$$

🌑 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a t^a$, 场强张量 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$

🌑 g_s 是**强耦合常数**, t^a 是 $SU(3)$ 基础表示生成元, f^{abc} 是结构常数

🌑 QCD 耦合包括**夸克强相互作用顶点**和**胶子自相互作用顶点**

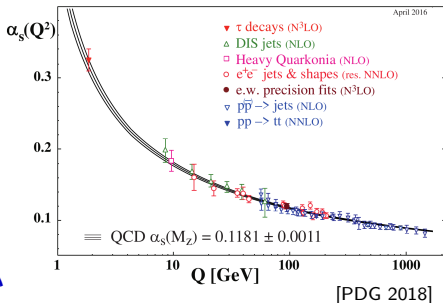


渐近自由和夸克禁闭

☀ 受高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值依赖于能标 Q

🌙 在量子电动力学中，电磁耦合常数 $\alpha = e^2/(4\pi)$ 随能标升高而增大

☀ 然而，QCD 的情况相反，强耦合常数 $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ 随能标升高而减小



💡 由于高能标意味着短距离，这个特性被称为 **QCD 的渐近自由**

🖋 随着能标下降， α_s 越来越大，夸克间相互作用变得越来越强

👉 夸克在低能区被强相互作用紧紧束缚在强子中，这个现象称为**夸克禁闭**

💡 实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现色多重态

✨ 由于质量太大，**顶夸克**会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中

轻子

💡 电子、 μ 子、 τ 子及相应中微子统称为**轻子**，它们**不参与强相互作用**

✎ 1962 年，L. Lederman、M. Schwartz 和 J. Steinberger 在中微子束流实验中发现，能够在中微子与原子核 N 的散射中**探测到反应** $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X$ (X 代表不包含带电轻子的其它所有粒子)，但**没有探测到反应** $\nu_\mu + N \rightarrow e^- + X$

👉 中微子具有不同**味道**，存在 μ 子型中微子 ν_μ ，与电子型中微子 ν_e 不同

👉 不同代轻子在反应过程中不会混合起来，以下表方式指定三种**轻子数** L_e 、 L_μ 和 L_τ ，则它们分别在**电磁和弱相互作用中守恒**

轻子	L_e	L_μ	L_τ	Q	质量	寿命
e^-	+1	0	0	-1	0.511 MeV	稳定
μ^-	0	+1	0	-1	105.7 MeV	2.2×10^{-6} s
τ^-	0	0	+1	-1	1.777 GeV	2.9×10^{-13} s
ν_e	+1	0	0	0	$\sum_{i=1}^3 m_{\nu_i} \lesssim 0.2$ eV	稳定
ν_μ	0	+1	0	0		稳定
ν_τ	0	0	+1	0		稳定

轻子数守恒允许：

$$\begin{aligned}
 n &\rightarrow p e^- \bar{\nu}_e \\
 \mu^- &\rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \\
 \tau^- &\rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau \\
 \pi^- &\rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu
 \end{aligned}$$

轻子数守恒禁戒：

$$\begin{aligned}
 e^- e^- &\leftrightarrow \pi^- \pi^- \\
 \mu^- &\leftrightarrow e^- \gamma \\
 \pi^- &\leftrightarrow \mu^- \bar{\nu}_e
 \end{aligned}$$

电弱统一理论

💥 电弱统一理论是 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 非阿贝尔规范理论

● $SU(2)_L$ 的生成元称为**弱同位旋** T^a , $U(1)_Y$ 的生成元称为**弱超荷** Y


● **电荷** $Q = T^3 + Y$, 类似于盖尔曼-西岛关系

● 左手费米子场构成 $SU(2)_L$ **二重态**, 右手费米子场则是 $SU(2)_L$ **单态**


统一记号	第 1 代	第 2 代	第 3 代	T^3	Y	Q
$L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ \ell_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$-1/2$ $-1/2$	0 -1
$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}$	$1/2$ $-1/2$	$1/6$ $1/6$	$2/3$ $-1/3$
ℓ_{iR}	e_R	μ_R	τ_R	0	-1	-1
u_{iR}	u_R	c_R	t_R	0	$2/3$	$2/3$
d'_{iR}	d'_R	s'_R	b'_R	0	$-1/3$	$-1/3$


● 规范本征态 d'_i 通过 **CKM 矩阵** V_{ij} 与**质量本征态** d_i 联系起来: $d'_i = V_{ij} d_j$



费米子的电弱规范不变拉氏量

 三代费米子的电弱规范不变拉氏量为


$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{L}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu L_{iL} + \bar{Q}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu Q_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{iR} + \bar{u}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu u_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\gamma^\mu D_\mu d'_{iR}$$


 $SU(2)_L$ 二重态 Q_{iL} 和 L_{iL} 的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - ig W_\mu^a T^a - ig' Y B_\mu$ ，其中 $T^a = \sigma^a/2$ ； $SU(2)_L$ 单态 ℓ_{iR} 、 u_{iR} 和 d'_{iR} 的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - ig' Y B_\mu$


 这里**没有质量项**：质量项耦合左右手费米子场，从而破坏规范对称性

 规范场 W_μ^a ($a = 1, 2, 3$) 和 B_μ 跟**左手**费米子的耦合与**右手**费米子**不同**，而电磁场却**相同**  为了得到电磁相互作用，需要把 W_μ^3 和 B_μ **混合**起来

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad s_W \equiv \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad c_W \equiv \sqrt{1 - s_W^2}$$

 转动角 θ_W 称为**温伯格角**

 A_μ 对应于**光子**，传递电磁相互作用，**电磁耦合常数** $e = g s_W = g' c_W$

 Z_μ 和 $W_\mu^\pm \equiv (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$ 对应于 Z^0 和 W^\pm **玻色子**，传递弱相互作用

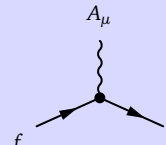
费米子的电弱规范相互作用



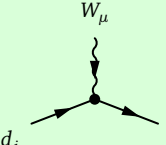
费米子电弱规范相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset e A_\mu J_{\text{EM}}^\mu + g Z_\mu J_Z^\mu + g(W_\mu^+ J_W^{+,\mu} + \text{h.c.})$

电磁流 $J_{\text{EM}}^\mu \equiv \sum_f Q_f \bar{f} \gamma^\mu f$, 弱带电流 $J_W^{+,\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL} + \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \ell_{iL})$

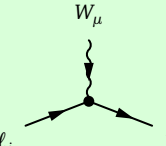
弱中性流 $J_Z^\mu \equiv \frac{1}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f$, $g_V^f \equiv T_f^3 - 2Q_f s_W^2$, $g_A^f \equiv T_f^3$



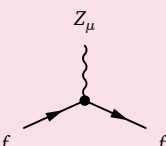
$$= iQ_f e \gamma^\mu$$



$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_L$$



$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$



$$= i \frac{g}{2c_W} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5)$$

电弱规范玻色子的自相互作用

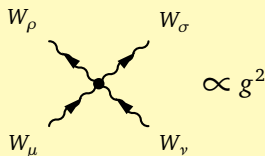
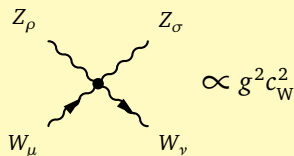
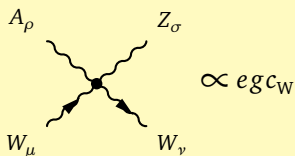
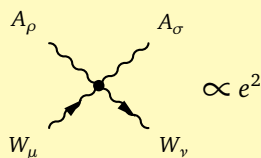
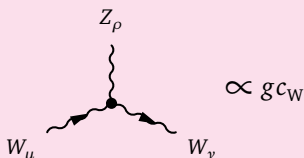
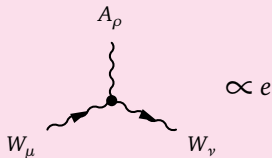


电弱规范场自身的规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$



场强张量 $W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$, $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$



布劳特—恩格勒—希格斯机制

！夸克、带电轻子、 Z^0 和 W^\pm 都具有质量，但上述 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理论的拉氏量**还没有任何质量项**

😊 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质，特别是**可重整性**

😬 在规范理论中直接放入**规范场的质量项**，会破坏规范对称性

😬 直接引入**费米子场的质量项**会破坏 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范对称性

💡 为了保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的质量，需要引入**布劳特—恩格勒—希格斯 (BEH) 机制**，使 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性自发破缺


🖋 引进**希格斯标量场** $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ ， ϕ^+ 和 ϕ^0 都是复标量场； Φ 是 $SU(2)_L$ 二重态，具有超荷 $Y = 1/2$ ，电弱规范不变的拉氏量为


$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V_H(\Phi), \quad V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$


🌑 协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - ig W_\mu^a T^a - ig' Y B_\mu$ ， $T^a = \sigma^a / 2$


🌑 $V_H(\Phi)$ 是希格斯标量场的**势能项**，依赖于 $\Phi^\dagger \Phi = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2$

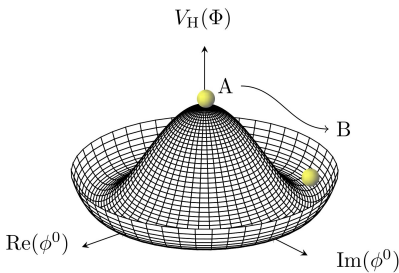
自发对称性破缺


 希格斯场**势能**的行为由二次项系数 μ^2 和四次项系数 λ 决定；假设 $\lambda > 0$

 若 $\mu^2 < 0$ ，势能项 $V_H(\Phi)$ 的最小值对应 $\Phi^\dagger \Phi = 0$ ；希格斯场真空期待值为 $\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下**不变**，故**规范对称性未受到破坏**

 若 $\mu^2 > 0$ ， $\Phi^\dagger \Phi = 0$ 处变成 $V_H(\Phi)$ 的极大值，而最小值位于 $\Phi^\dagger \Phi = v^2/2$ 对应的 3 维球面上，其中 $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$

 若压缩掉 ϕ^+ 的实部和虚部两个维度，则 $V_H(\Phi)$ 在 ϕ^0 的实部和虚部坐标上呈现右图所示**墨西哥草帽状**的形式；希格斯场的真空期待值位于上述 3 维球面上的某一点，不失一般性，可取为 $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$





 电弱规范变换会**改变**这个期待值，故真空态不满足电弱规范对称性；这种拉氏量满足对称性、真空态却不满足的现象称为**对称性自发破缺**

希格斯玻色子

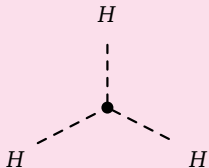
 以上述真空期待值 $\langle \Phi \rangle$ 为基础，考虑沿 ϕ^0 实轴扰动的实标量场 $H(x)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger \Phi \rightarrow \frac{1}{2}(v + H)^2$$

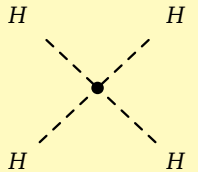
 这种参数化方法称为**么正规范**，其它规范可由 $SU(2)_L$ 规范变换得到

 $-V_H(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^2(v + H)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + H)^4 = \frac{1}{4}\mu^2 v^2 - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \frac{m_H^2}{2v}H^3 - \frac{m_H^2}{8v^2}H^4$

✨ $m_H \equiv \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$ ，实标量场 H 对应于一个**质量为 m_H** 的中性标量粒子 H^0 ，称为**希格斯玻色子**，具有**三线性和四线性**自相互作用




$$= -3i \frac{m_H^2}{v}$$




$$= -3i \frac{m_H^2}{v^2}$$

规范玻色子质量

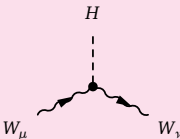
 在么正规范下，希格斯场的协变动能项化为

$$\begin{aligned} (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &= \frac{1}{2} (\partial^\mu H) (\partial_\mu H) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} \\ &+ \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{2m_W^2}{v} H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{v} H Z_\mu Z^\mu \\ &+ \frac{m_W^2}{v^2} H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{2v^2} H^2 Z_\mu Z^\mu \end{aligned}$$

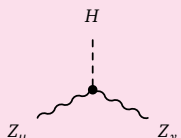
 $m_W \equiv \frac{1}{2} g v$, $m_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v$

✨ 对称性自发破缺之后， W^\pm 和 Z^0 规范玻色子

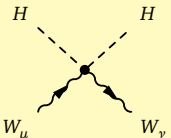
获得质量 m_W 和 m_Z ，有 3 个希格斯场自由度变成它们的纵向极化分量



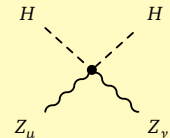
$$= 2i \frac{m_W^2}{v} g^{\mu\nu}$$



$$= 2i \frac{m_Z^2}{v} g^{\mu\nu}$$



$$= 2i \frac{m_W^2}{v^2} g^{\mu\nu}$$



$$= 2i \frac{m_Z^2}{v^2} g^{\mu\nu}$$

费米子质量



希格斯场与费米子场之间能够发生电弱规范不变的**汤川相互作用**

$$\mathcal{L}_Y = -\tilde{y}_d^{ij} \bar{Q}_{iL} d'_{jR} \Phi - y_u d_i \bar{Q}_{iL} u_{iR} \tilde{\Phi} - y_{\ell_i} \bar{L}_{iL} \ell_{iR} \Phi + \text{h.c.}, \quad \tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2 \Phi^*$$



Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵 V 将 \tilde{y}_d^{ij} 对角化, 满足

$$V_{li}^\dagger \tilde{y}_d^{ij} V_{jk} = y_{d_k} \delta_{lk}$$



对称性自发破缺之后, 汤川耦合项化为

$$\mathcal{L}_Y = -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i$$



$$m_{d_i} \equiv \frac{y_{d_i} v}{\sqrt{2}}, \quad m_{u_i} \equiv \frac{y_{u_i} v}{\sqrt{2}}, \quad m_{\ell_i} \equiv \frac{y_{\ell_i} v}{\sqrt{2}}$$

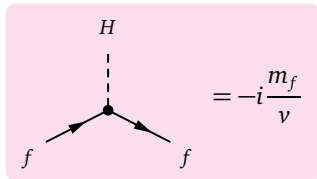


可见, **费米子获得了质量**




费米子与希格斯玻色子发生汤川相互作用,

耦合常数正比于费米子质量



夸克混合


 在标准模型中，可以将上型夸克的规范态就取为质量态，而下型夸克的规范态与质量态通过 **CKM 矩阵** V 联系：

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

 **概率守恒**要求 V 是**么正**矩阵，标准参数化形式为

$$V = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} & \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta} & & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} s_{ij} &\equiv \sin \theta_{ij} \\ c_{ij} &\equiv \cos \theta_{ij} \end{aligned}$$

 V 包含 3 个转动角 $\theta_{12} \simeq 13^\circ$, $\theta_{23} \simeq 2.4^\circ$, $\theta_{13} \simeq 0.20^\circ$,
1 个引起 **CP 破坏**的复相角 $\delta \simeq 71^\circ$

CKM 矩阵元



拟合实验数据得到 **CKM 矩阵元的模**为

$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} 0.97446 \pm 0.00010 & 0.22452 \pm 0.00044 & 0.00365 \pm 0.00012 \\ 0.22438 \pm 0.00044 & 0.97359^{+0.00010}_{-0.00011} & 0.04214 \pm 0.00076 \\ 0.00896^{+0.00024}_{-0.00023} & 0.04133 \pm 0.00074 & 0.999105 \pm 0.000032 \end{pmatrix}$$



如果忽略第三代夸克的混合，CKM 矩阵可近似为

$$V_{ij} \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C & \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_C \text{ 称为 } \mathbf{Cabibbo \text{ 角}}, \text{ 满足 } \sin \theta_C = |V_{12}|$$



CKM 矩阵的**非对角元**非零，因此，**弱带电流**过程可以**改变夸克味道**

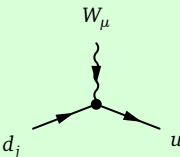


$u \rightarrow W^+ d'$ 过程在质量态上表现为

$$u \rightarrow W^+ d \quad (V_{11} \text{ 引起})$$

$$u \rightarrow W^+ s \quad (V_{12} \text{ 引起})$$

$$u \rightarrow W^+ b \quad (V_{13} \text{ 引起})$$



$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_L$$

超出标准模型：中微子混合

💥 中微子振荡实验表明，中微子具有微小质量，而且存在味混合

🖋️ 狄拉克中微子的味道本征态（即规范本征态）与质量本征态通过 Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) 矩阵 U 联系：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \bar{c}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{13}e^{-i\bar{\delta}} \\ -\bar{s}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{s}_{23}\bar{c}_{13} \\ \bar{s}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & -\bar{c}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{23}\bar{c}_{13} \end{pmatrix}$$

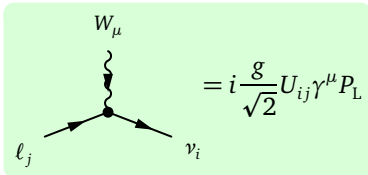
✨ $\bar{\theta}_{12} \sim 33^\circ$, $\bar{\theta}_{23} \sim 41^\circ$ (质量正序) 或 $\bar{\theta}_{23} \sim 50^\circ$ (质量逆序), $\bar{\theta}_{13} \sim 8.4^\circ$

🐟 如果中微子是马约拉纳费米子，则额外存在 2 个 CP 破坏相角 ρ 和 σ ，PMNS 矩阵应该再右乘 $\text{diag}(1, e^{i\rho}, e^{i\sigma})$

☀️ 太阳中微子振荡 🖐️ $\bar{\theta}_{12}$

☁️ 大气中微子振荡 🖐️ $\bar{\theta}_{23}$

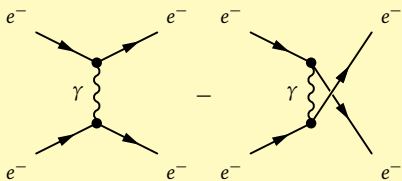
💥 反应堆中微子振荡 🖐️ $\bar{\theta}_{13}$



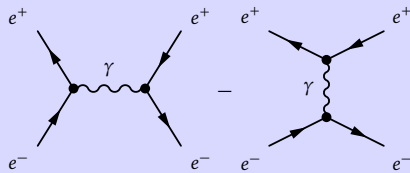
$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} U_{ij} \gamma^\mu P_L$$

典型 QED 过程

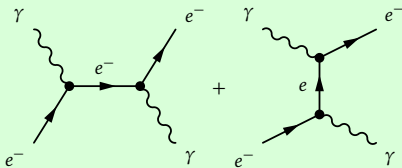
💥 电磁流相互作用对应于量子电动力学 (Quantum Electrodynamics, QED)



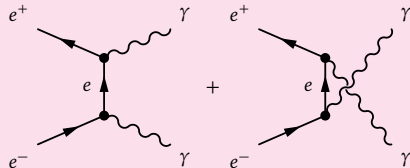
Møller 散射 $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$



Bhabha 散射 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



Compton 散射 $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$



e^+e^- 湮灭到双光子 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$

✨ 初末态相同的过程可以具有多个费曼图，它们对应的振幅之间相互干涉

e^+e^- 湮灭

💥 通过**电磁流**和**弱中性流**相互作用，

e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$

✨ $\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的共振峰

💡 受共振态和弱中性流影响较小时，

截面比 $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ 体现夸

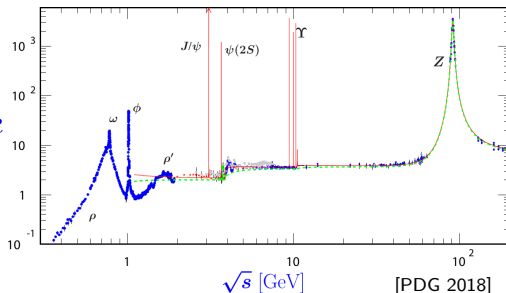
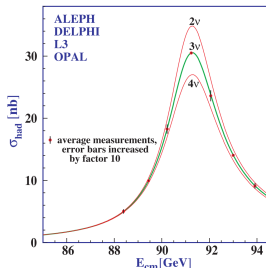
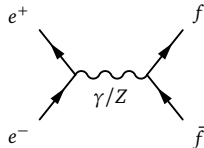
克味数、电荷跟 μ 子的相对差异

🌑 $1 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 3.6 \text{ GeV}$ 处，

$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = 2 \quad R$$

🌑 $3.7 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 10 \text{ GeV}$ 处，

$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{10}{3}$$



β 衰变

💥 弱相互作用引起**原子核 β 衰变**

● 质量数为 $A = Z + N$ 的原子核具有 Z 个质子和 N 个中子，通过 β 衰变会变成具有 $Z + 1$ 个质子和 $N - 1$ 个中子的原子核 A' ，即

$$A(Z, N) \rightarrow A'(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

● 在**核子**层次，以上过程体现为**中子 β 衰变**，

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

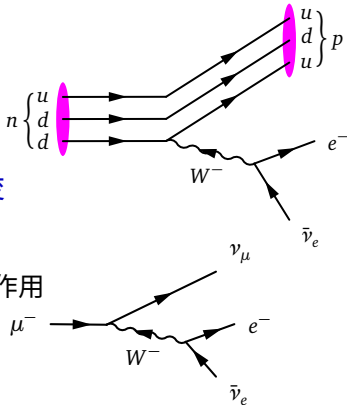
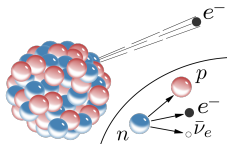
● 在**夸克**层次，以上过程体现为 **d 夸克 β 衰变**

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

💡 此过程来自 W^- 玻色子传递的**弱带电流**相互作用

✨ 在**轻子**方面，类似的过程有 **μ 子衰变**

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$



介子弱衰变

💥 **弱带电流**相互作用也会引起介子衰变

🟡 $D^+(c\bar{d})$ 衰变到 \bar{K}^0 和轻子或夸克 (👉 介子)

$$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \nu_e/\nu_\mu/u + e^+/\mu^+/\bar{d}$$

💡 D^+ 中 \bar{d} 夸克实际没参与衰变, 称为**旁观者**

🟡 $\pi^-(\bar{u}d)$ 衰变到带电轻子和反中微子

$$\pi^- \rightarrow e^-/\mu^- + \bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$$

💡 π^- 静止系中, **角动量守恒**要求末态轻子和反轻子的螺旋度相同, 但弱带电流只耦合左手费米子和右手反费米子, 需要由**质量翻转螺旋度**

👉
$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} \sim \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \simeq 2 \times 10^{-5}$$

👉 $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ 分支比为 99.9877%, $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ 分支比为 0.0123%

