第六节 电弱规范理论

余钊焕

中山大学物理学院

http://yzhxxzxy.github.io

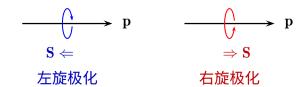


2020年8月



费米子螺旋度

- \square 旋量场 $\psi(x)$ 描述的费米子具有左旋和右旋两种极化态
- 🜒 **左旋**费米子的螺旋度为**负**,即自旋 S 在动量 p 方向上的投影为负
- **右旋**费米子的螺旋度为**正**,即自旋 S 在动量 p 方向上的投影为正
- 🌔 对于<mark>有质量</mark>的费米子,洛伦兹变换可以把动量方向反过来,**翻转**螺旋度
- 对于无质量的费米子,螺旋度在任意惯性系中都相同。



旋量场手征性与宇称不守恒

- \bigcirc 引入左手投影算符 $P_{\rm L} \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ 和右手投影算符 $P_{\rm R} \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)$
- 溶 将旋量场 $\psi(x)$ 分解为左手旋量场 $\psi_L \equiv P_L \psi$ 和右手旋量场 $\psi_R \equiv P_R \psi$
- 🍅 质量项 $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_{\rm R}\psi_{\rm L} + \bar{\psi}_{\rm L}\psi_{\rm R})$ 相当于左右手旋量场的耦合项
- 🥊 在**空间反射变换**下,动量方向反转,自旋方向不变,因而螺旋度**符号翻转**
- ☆ 对于**宇称守恒**的理论,如量子电动力学和量子色动力学,存在空间反射对称性,左右手旋量场具有相同的相互作用
- ☆ 在弱相互作用中,**宇称不守恒**,不存在空间反射对称性,其根源在于左右 手旋量场参与**不同**的规范相互作用

- 帰 电弱规范理论是 SU(2), × U(1), 规范理论
- lacksquare SU(2) $_{
 m L}$ 的生成元称为<mark>弱同位旋 T^a </mark>,U(1) $_{
 m Y}$ 的生成元称为<mark>弱超荷 Y</mark>
- **电荷** $Q = T^3 + Y$,类似于盖尔曼-西岛关系
- (○) 左手旋量场构成 SU(2), 二重态,右手旋量场则是 SU(2), 单态

igotimes 规范本征态 d_i' 通过 CKM 矩阵 $oldsymbol{v}_{ij}$ 与质量本征态 d_i 联系起来: $d_i' = oldsymbol{V}_{ij}d_j$

→ 三代费米子的电弱规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{L}_{i\text{L}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} L_{i\text{L}} + \bar{Q}_{i\text{L}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} Q_{i\text{L}} + \bar{\ell}_{i\text{R}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} \ell_{i\text{R}} + \bar{u}_{i\text{R}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} u_{i\text{R}} + \bar{d}'_{i\text{R}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} d'_{i\text{R}}$$

- \bigcirc SU(2)_L 二重态 Q_{iL} 和 L_{iL} 的协变导数为 $D_{\mu} = \partial_{\mu} ig W_{iI}^a T^a ig' Y_{B_{\mu}}^a$,其 中 $T^a = \sigma^a/2$; SU(2), 单态 ℓ_{iR} 、 u_{iR} 和 d'_{iR} 的协变导数为 $D_\mu = \partial_\mu - ig'Y_{B_\mu}$
- 这里没有质量项:质量项耦合左右手旋量场,从而破坏规范对称性
- \P 规范场 W_{ii}^{a} (a = 1, 2, 3) 和 B_{ii} 跟**左手**旋量场的耦合与**右手**旋量场**不同**, 而电磁场却相同 \longrightarrow 为了得到电磁相互作用,需要把 W_{μ}^{3} 和 B_{μ} 混合起来

$$\begin{pmatrix} A_{\mu} \\ Z_{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\rm W} & s_{\rm W} \\ -s_{\rm W} & c_{\rm W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\mu} \\ W_{\mu}^3 \end{pmatrix}, \quad s_{\rm W} \equiv \sin\theta_{\rm W} = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad c_{\rm W} \equiv \sqrt{1 - s_{\rm W}^2}$$

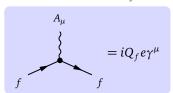
- \bigcirc 转动角 $\theta_{\rm W}$ 称为温伯格角
- A_{μ} 对应于光子,传递电磁相互作用,电磁耦合常数 $e = g s_{\rm W} = g' c_{\rm W}$
- Z_{μ} 和 $W_{\mu}^{\pm} \equiv (W_{\mu}^{1} \mp iW_{\mu}^{2})/\sqrt{2}$ 对应于 Z^{0} 和 W^{\pm} 玻色子,传递弱相互作用

费米子的电弱规范相互作用

 \P 费米子电弱规范相互作用拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset eA_{\mu}J_{\text{EM}}^{\mu} + gZ_{\mu}J_{Z}^{\mu} + g(W_{\mu}^{+}J_{W}^{+,\mu} + \text{h.c.})$

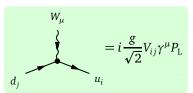
电磁流
$$J_{\rm EM}^{\mu} \equiv \sum_f Q_f \bar{f} \gamma^{\mu} f$$
, 弱带电流 $J_W^{+,\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{i{\rm L}} \gamma^{\mu} V_{ij} d_{j{\rm L}} + \bar{\nu}_{i{\rm L}} \gamma^{\mu} \ell_{i{\rm L}})$

弱中性流
$$J_Z^{\mu} \equiv \frac{1}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^{\mu} (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f$$
, $g_V^f \equiv T_f^3 - 2Q_f s_W^2$, $g_A^f \equiv T_f^3$



$$=i\frac{g}{\sqrt{2}}\gamma^{\mu}P_{\rm L}$$

$$=v_i$$



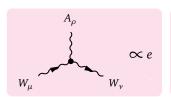
$$= i \frac{g}{2c_{W}} \gamma^{\mu} (g_{V}^{f} - g_{A}^{f} \gamma_{5})$$

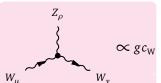
电弱规范玻色子的自相互作用

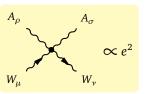
电弱规范场自身的规范不变拉氏量为

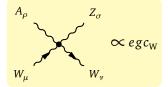
$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

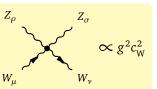
场强张量 $W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_{\mu}W_{\nu}^a - \partial_{\nu}W_{\mu}^a + g\epsilon^{abc}W_{\mu}^bW_{\nu}^c$, $B_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}B_{\nu} - \partial_{\nu}B_{\mu}$

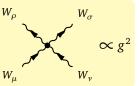












布劳特-恩格勒-希格斯机制

! 夸克、带电轻子、 Z^0 和 W^\pm 都具有质量,但上述 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范理 论的拉氏量还没有任何质量项

- 规范对称性使规范理论具有非常良好的性质,特别是可重整性
- 在规范理论中直接放入规范场的质量项,会破坏规范对称性
- $\overline{ \mathbf{Q} }$ 直接引入旋量场的质量项会破坏 $\mathbf{SU(2)_L} \times \mathbf{U(1)_Y}$ 规范对称性
- \bigcirc 为了在保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的质量,需要引入布劳特-恩格勒-希格斯 (BEH) 机制,使 $\mathrm{SU}(2)_{L} \times \mathrm{U}(1)_{Y}$ 对称性自发破缺
- \P 引进希格斯标量场 $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$, ϕ^+ 和 ϕ^0 都是复标量场; Φ 是 SU(2)_L 二

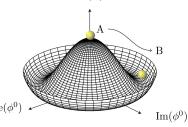
重态,具有弱超荷 Y = 1/2,电弱规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{H}} = (D^{\mu}\Phi)^{\dagger}(D_{\mu}\Phi) - V_{\mathrm{H}}(\Phi), \quad V_{\mathrm{H}}(\Phi) = -\mu^{2}\Phi^{\dagger}\Phi + \lambda(\Phi^{\dagger}\Phi)^{2}$$

- \blacksquare 协变导数为 $D_{\mu} = \partial_{\mu} igW_{\mu}^{a}T^{a} ig'YB_{\mu}$, $T^{a} = \sigma^{a}/2$
- $igcup V_{
 m H}(oldsymbol{\Phi})$ 是希格斯标量场的<mark>势能项</mark>,依赖于 $oldsymbol{\Phi}^\dagger oldsymbol{\Phi} = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2$

自发对称性破缺

- ho 希格斯场势能的行为由二次项系数 μ^2 和四次项系数 λ 决定;假设 $\lambda>0$
- \blacksquare 若 $\mu^2 < 0$,势能项 $V_{\rm H}(\Phi)$ 的最小值对应 $\Phi^{\dagger}\Phi = 0$;希格斯场真空期待值 为 $\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,它在电弱规范变换下**不变**,故规范对称性未受到破坏
- **一 若** $\mu^2 > 0$, $\Phi^{\dagger}\Phi = 0$ 处变成 $V_{\rm H}(\Phi)$ 的极大值,而最小值位于 $\Phi^{\dagger}\Phi = v^2/2$ 对应的 3 维球面上,其中 $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ $V_{\rm H}(\Phi)$
- 一 若压缩掉 ϕ^+ 的实部和虚部两个维度,则 $V_{\rm H}(\Phi)$ 在 ϕ^0 的实部和虚部坐标上呈现右图所示<mark>墨西哥草帽状</mark>的形式;希格斯场的真空期待值位于上述 3 维球面上的某一点,不失一般性,可取为 $\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}$ ${\rm Re}(\phi^0)$



→ 电弱规范变换会改变这个期待值,故真空态不满足电弱规范对称性;这种拉氏量满足对称性、真空态却不满足的现象称为对称性自发破缺

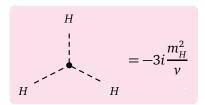
以上述真空期待值 $\langle \Phi \rangle$ 为基础,考虑沿 ϕ^0 实轴扰动的实标量场 H(x)

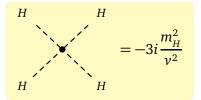
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi^{\dagger} \Phi \to \frac{1}{2} (v + H)^2$$

这种参数化方法称为**幺正规范**,其它规范可由 SU(2), 规范变换得到

$$= -V_{H}(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^{2}(\nu + H)^{2} - \frac{1}{4}\lambda(\nu + H)^{4} = \frac{1}{4}\mu^{2}\nu^{2} - \frac{1}{2}m_{H}^{2}H^{2} - \frac{m_{H}^{2}}{2\nu}H^{3} - \frac{m_{H}^{2}}{8\nu^{2}}H^{4}$$

 $m_H \equiv \sqrt{2\mu} = \sqrt{2\lambda}v$,实标量场 H 对应于一个**质量为** m_H 的中性标量粒 子 H^0 , 称为**希格斯玻色子**, 具有三线性和四线性自相互作用





规范玻色子质量

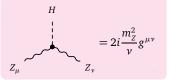
🮈 在幺正规范下,希格斯场的协变动能项化为

$$(D^{\mu}\Phi)^{\dagger}(D_{\mu}\Phi) = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}H)(\partial_{\mu}H) + m_{W}^{2}W_{\mu}^{+}W^{-,\mu}$$

$$+ \frac{1}{2}m_{Z}^{2}Z_{\mu}Z^{\mu} + \frac{2m_{W}^{2}}{v}HW_{\mu}^{+}W^{-,\mu} + \frac{m_{Z}^{2}}{v}HZ_{\mu}Z^{\mu}$$

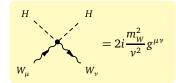
$$+ \frac{m_{W}^{2}}{v^{2}}H^{2}W_{\mu}^{+}W^{-,\mu} + \frac{m_{Z}^{2}}{2v^{2}}H^{2}Z_{\mu}Z^{\mu}$$

$$H = 2i \frac{m_W^2}{v} g^{\mu \nu}$$



$$) m_W \equiv \frac{1}{2} g \nu , \ m_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \nu$$

子获得质量 m_W 和 m_Z ,有 3 个希格斯场自由度变成它们的**纵向极化分量**



$$H = 2i \frac{m_Z^2}{v^2} g^{\mu \nu}$$

$$Z_{\nu}$$

费米子质量

♥ 希格斯场与旋量场之间能够发生电弱规范不变的汤川相互作用

$$\mathcal{L}_{\rm Y} = -\tilde{y}_d^{ij} \bar{Q}_{i{\rm L}} d_{i{\rm R}}' \Phi - y_u d_i \bar{Q}_{i{\rm L}} u_{i{\rm R}} \tilde{\Phi} - y_{\ell_i} \bar{L}_{i{\rm L}} \ell_{i{\rm R}} \Phi + {\rm h.c.} \,, \quad \tilde{\Phi} \equiv i \sigma^2 \Phi^*$$

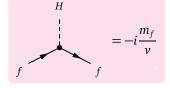
Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵 V 将 \tilde{y}_{d}^{ij} 对角化,满足

$$V_{li}^{\dagger} \tilde{y}_d^{ij} V_{jk} = y_{d_k} \delta_{lk}$$

፟፟፟፟፟፟፟ 対称性自发破缺之后,汤川耦合项化为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} = -\mathbf{m}_{d_i} \bar{d}_i \mathbf{d}_i - \mathbf{m}_{u_i} \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{m}_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{\mathbf{m}_{d_i}}{\nu} H \bar{d}_i d_i - \frac{\mathbf{m}_{u_i}}{\nu} H \bar{u}_i \mathbf{u}_i - \frac{\mathbf{m}_{\ell_i}}{\nu} H \bar{\ell}_i \ell_i$$

- $m_{d_i} \equiv \frac{y_{d_i} v}{\sqrt{2}}$, $m_{u_i} \equiv \frac{y_{u_i} v}{\sqrt{2}}$, $m_{\ell_i} \equiv \frac{y_{\ell_i} v}{\sqrt{2}}$
- 🙀 可见,费米子获得了质量
- 费米子与希格斯玻色子发生汤川相互作用, 耦合常数正比干费米子质量



000

夸克味混合

在标准模型中,可以将上型夸克的规范态就取为质量态,而下型夸克的规 范态与质量态通过 CKM 矩阵 V 联系:

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

概率守恒要求 V 是 Δ 正矩阵,标准参数化形式为

$$\begin{split} V &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & & s_{13}e^{-i\delta} \\ & & 1 \\ & -s_{13}e^{i\delta} & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad s_{ij} \equiv \sin\theta_{ij} \\ c_{ij} \equiv \cos\theta_{ij} \end{split}$$

 $^{\blacktriangleright}$ V 包含 3 个转动角 $heta_{12}\simeq 13^\circ$, $heta_{23}\simeq 2.4^\circ$, $heta_{13}\simeq 0.20^\circ$, 1 个引起 *CP* 破坏的复相角 $\delta \simeq 71^{\circ}$

CKM 矩阵元



🚫 拟合实验数据得到 CKM 矩阵元的模为

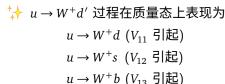
$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} 0.97446 \pm 0.00010 & 0.22452 \pm 0.00044 & 0.00365 \pm 0.00012 \\ 0.22438 \pm 0.00044 & 0.97359^{+0.00010}_{-0.00011} & 0.04214 \pm 0.00076 \\ 0.00896^{+0.00024}_{-0.00023} & 0.04133 \pm 0.00074 & 0.999105 \pm 0.000032 \end{pmatrix}$$

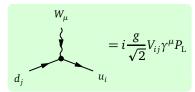
🔪 如果忽略第三代夸克的混合,CKM 矩阵可近似为

$$V_{ij} \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta_{\rm C} & \sin \theta_{\rm C} \\ -\sin \theta_{\rm C} & \cos \theta_{\rm C} \end{pmatrix}$$
, $\theta_{\rm C}$ 称为 Cabibbo 角,满足 $\sin \theta_{\rm C} = |V_{12}|$



CKM 矩阵的非对角元非零 👉 弱带电流可以耦合不同代的夸克





超出标准模型:中微子味混合

💥 中微子振荡实验表明,中微子具有微小质量,而且存在味混合

狄拉克中微子的味道本征态(即规范本征态)与质量本征态通过 Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) 矩阵 U 联系:

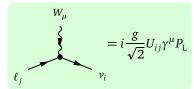
$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \bar{c}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{12}\bar{c}_{13} & \bar{s}_{13}e^{-i\bar{\delta}} \\ -\bar{s}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{12}\bar{c}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{s}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{s}_{23}\bar{c}_{13} \\ \bar{s}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & -\bar{c}_{12}\bar{s}_{23} - \bar{s}_{12}\bar{c}_{23}\bar{s}_{13}e^{i\bar{\delta}} & \bar{c}_{23}\bar{c}_{13} \end{pmatrix}$$

- $\theta_{12} \sim 33^{\circ}$, $\theta_{23} \sim 41^{\circ}$ (质量正序)或 $\theta_{23} \sim 50^{\circ}$ (质量逆序), $\theta_{13} \sim 8.4^{\circ}$
- lacksquare 如果中微子是马约拉纳费米子,则额外存在 2 个 CP 破坏相角 ho 和 σ ,

PMNS 矩阵应该再右乘 diag $(1, e^{i\rho}, e^{i\sigma})$

- $\stackrel{\longleftarrow}{\mathcal{L}}$ 太阳中微子振荡 $\stackrel{\longleftarrow}{\mathcal{L}}$ $= \bar{\theta}_1$

- 菜 反应堆中微子振荡 ← θ₁₂



e⁺e⁻ 湮灭

※ 通过电磁流和弱中性流相互作用,

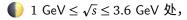
 e^+e^- 可湮灭成一对正反费米子 $f\bar{f}$

ightharpoonup $\sqrt{s} \sim m_Z$ 处出现 Z 的共振峰

₩ 受共振态和弱中性流影响较小时,

截面比
$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to q_i\bar{q}_i)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$$
 体现夸

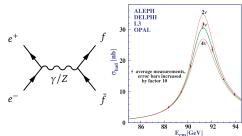
克味数、电荷跟 μ 子的相对差异

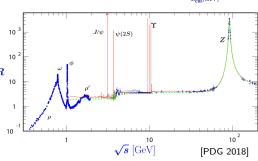


$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = 2$$

3.7 GeV ≤ √s ≤ 10 GeV 处,

$$R \simeq 3 \left[2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{10}{3}$$





3 衰变

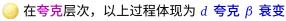
業 弱相互作用引起原子核 β 衰变

● 质量数为 A = Z + N 的原子核具有 Z 个质子和 N 个中子,通过 β 衰变会变成具有 Z + 1 个质子和 N - 1 个中子的原子核 A',即

$$A(Z,N) \to A'(Z+1,N-1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

 \bigcirc 在核子层次,以上过程体现为中子 β 衰变,

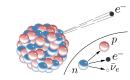
$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

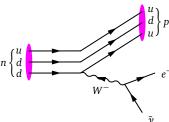


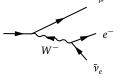
$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

- ₩ 此过程来自 W 按色子传递的弱带电流相互作用
- → 在轻子方面,类似的过程有 μ 子衰变

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$







介子弱衰变

💥 弱带电流相互作用也会引起介子衰变

 $\bigcirc D^+(c\bar{d})$ 衰变到 \bar{K}^0 和轻子或夸克 ($\bigcirc \cap \cap$ 介子)

$$D^+ \to \bar{K}^0 + \nu_e / \nu_\mu / u + e^+ / \mu^+ / \bar{d}$$

 $ightharpoonup D^+$ 中 \bar{d} 夸克实际没参与衰变,称为**旁观者**

 $\pi^{-}(\bar{u}d)$ 衰变到带电轻子和反中微子

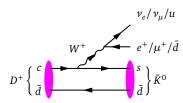
$$\pi^- \rightarrow e^-/\mu^- + \bar{\nu}_e/\bar{\nu}_\mu$$

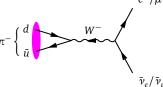
→ π⁻ 静止系中,角动量守恒要求末态轻子和 反轻子的螺旋度相同,但弱带电流只耦合左旋费

米子和右旋反费米子,需要由<mark>质量翻转螺旋度</mark> $\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu)} \sim \frac{m_e^2}{m_{...}^2} \simeq 2 \times 10^{-5} \qquad \bar{\nu}_\ell \leftarrow$



 $\sigma^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$ 分支比为 99.9877%, $\pi^- \to e^- \bar{\nu}_e$ 分支比为 0.0123%





余钊焕 (中山大学)