

# 数学物理方法补充讲义

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzy.github.io/cn/teaching.html>

2022 年 9 月 27 日

## 目 录

1	$X'' + \lambda X = 0$ 本征值问题	2
2	Fourier 变换例题	4
3	球坐标系和柱坐标系示意图	5
4	Legendre 多项式函数图像	7
5	连带 Legendre 函数的应用	7
6	柱函数图像	10

# 1 $X'' + \lambda X = 0$ 本征值问题

考虑常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (1.1)$$

其中  $\lambda$  为常数, 分别结合下面几种边界条件组成本征值问题。

(1) 结合边界条件  $X(0) = 0$  和  $X(l) = 0$  时, 本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \quad (1.2)$$

本征函数图象如图 1(a) 所示。

(2) 结合边界条件  $X'(0) = 0$  和  $X'(l) = 0$  时, 本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

本征函数图象如图 1(b) 所示。

(3) 结合边界条件  $X(0) = 0$  和  $X'(l) = 0$  时, 本征值和本征函数为

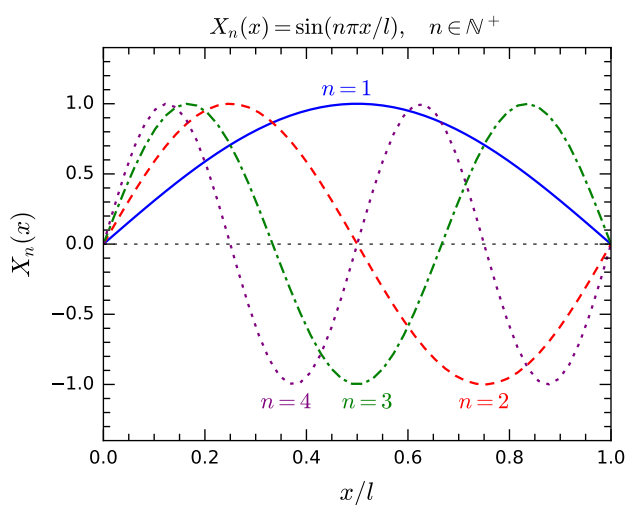
$$\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \quad (1.4)$$

本征函数图象如图 2(a) 所示。

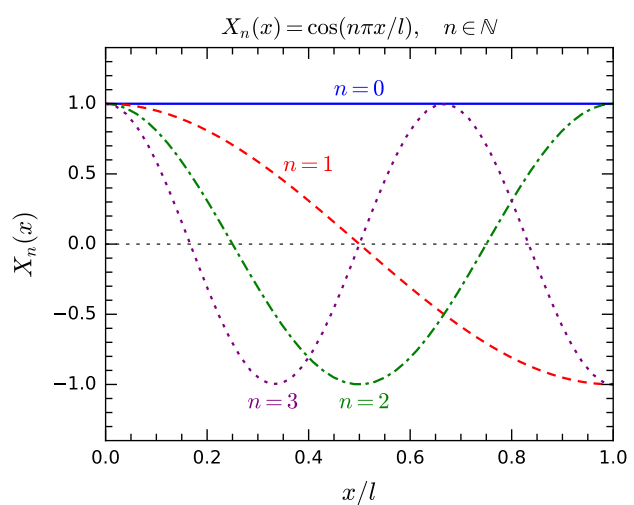
(4) 结合边界条件  $X'(0) = 0$  和  $X(l) = 0$  时, 设  $\lambda > 0$  对应的解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$ , 其中  $\mu = \sqrt{\lambda}$ , 则  $X'(x) = -C\mu \sin \mu x + D\mu \cos \mu x$ , 而

$$X'(0) = 0 \Rightarrow D = 0, \quad (1.5)$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow \cos \mu l = 0 \Rightarrow \mu = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (1.6)$$



(a) 本征函数  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$



(b) 本征函数  $X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}$

图 1: 本征函数  $X_n(x) = \sin(n\pi x/l)$  和  $X_n(x) = \cos(n\pi x/l)$  的图像。

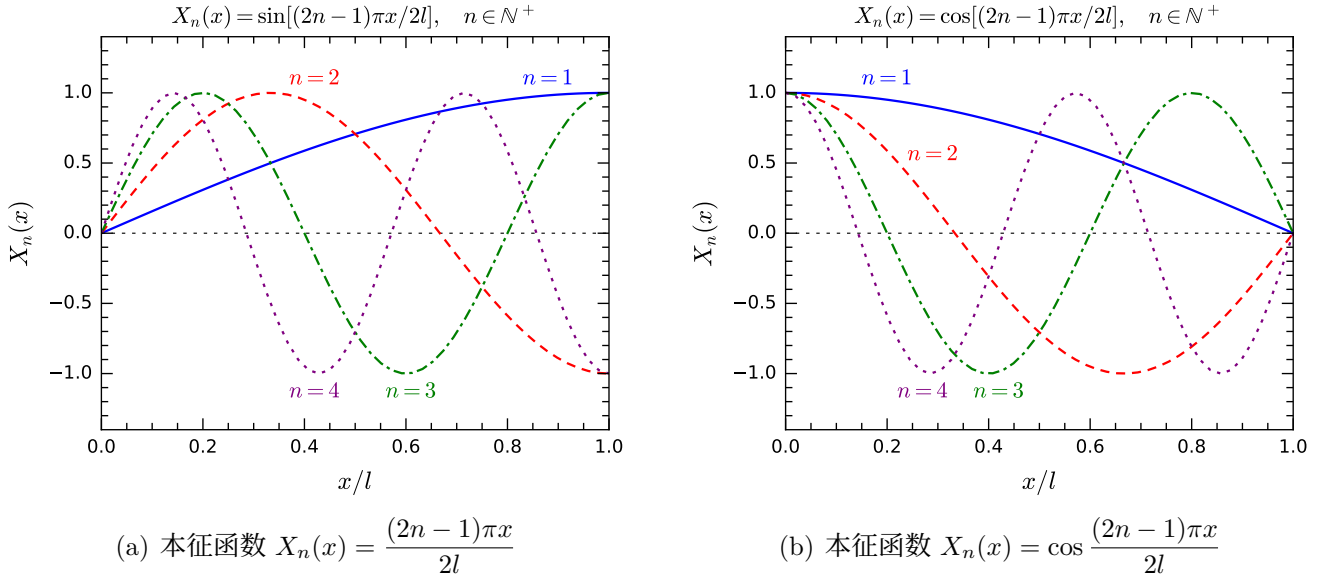


图 2: 本征函数  $X_n(x) = \sin[(2n-1)\pi x/2l]$  和  $X_n(x) = \cos[(2n-1)\pi x/2l]$  的图像。

本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \quad (1.7)$$

本征函数图象如图 2(b) 所示。

(5) 结合边界条件  $X(0) = 0$  和  $X(l) + hX'(l) = 0$  时, 设  $\lambda > 0$  对应的解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$ , 其中  $\mu = \sqrt{\lambda}$ , 则

$$X(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \quad (1.8)$$

$$X(l) + hX'(l) = 0 \Rightarrow D \sin \mu l + Dh\mu \cos \mu l = 0 \Rightarrow \tan \mu l = -\mu h, \quad (1.9)$$

本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (1.10)$$

其中  $\mu_n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) 是超越方程  $\tan \mu l = -\mu h$  的正根, 满足  $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$ 。当  $l = h = 1$  时, 图 3(a) 展示了方程  $\tan \mu l = -\mu h$  的根  $\mu_n$ , 相应本征函数  $X_n(x)$  的图象如图 3(b) 所示。

(6) 结合边界条件  $X'(0) = 0$  和  $X(l) + hX'(l) = 0$  时, 设  $\lambda > 0$  对应的解为  $X(x) = C \cos \mu x + D \sin \mu x$ , 其中  $\mu = \sqrt{\lambda}$ , 则

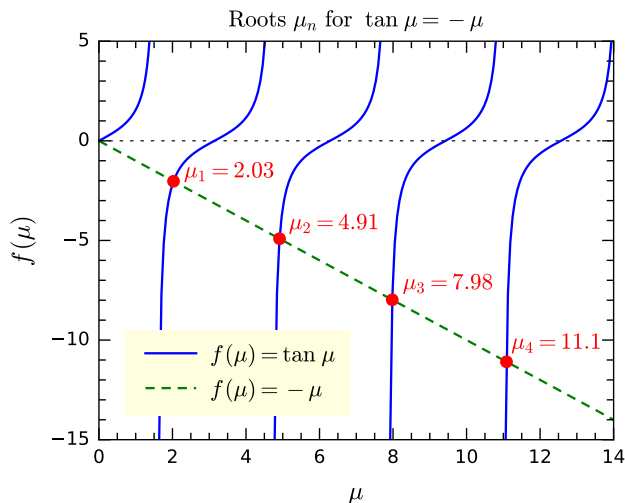
$$X'(0) = 0 \Rightarrow D = 0 \quad (1.11)$$

$$X(l) + hX'(l) = 0 \Rightarrow C \cos \mu l - Ch\mu \sin \mu l = 0 \Rightarrow \cot \mu l = \mu h \quad (1.12)$$

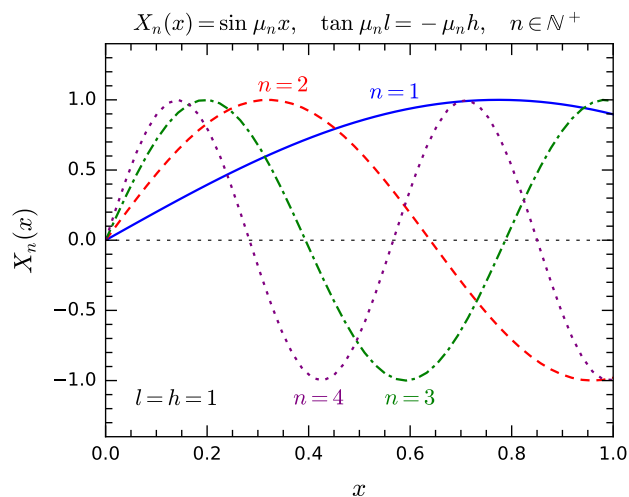
本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \cos \mu_n x, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (1.13)$$

其中  $\mu_n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) 是超越方程  $\cot \mu l = \mu h$  的正根, 满足  $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$ 。当  $l = h = 1$  时, 图 4(a) 展示了方程  $\cot \mu l = \mu h$  的根  $\mu_n$ , 相应本征函数  $X_n(x)$  的图象如图 4(b) 所示。

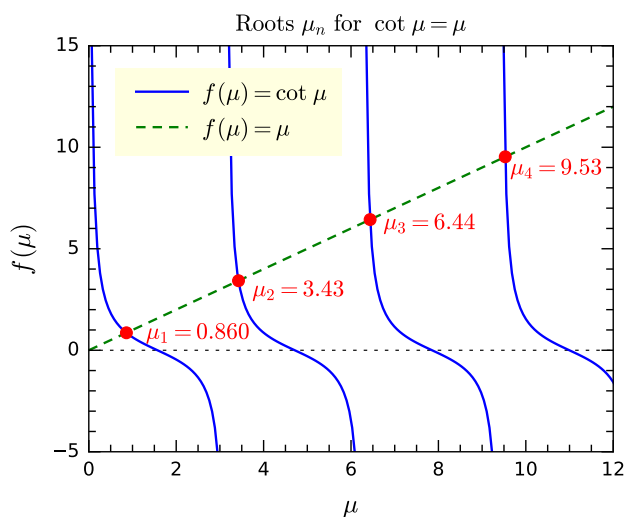


(a)  $\tan \mu = -\mu$  的根  $\mu_n$

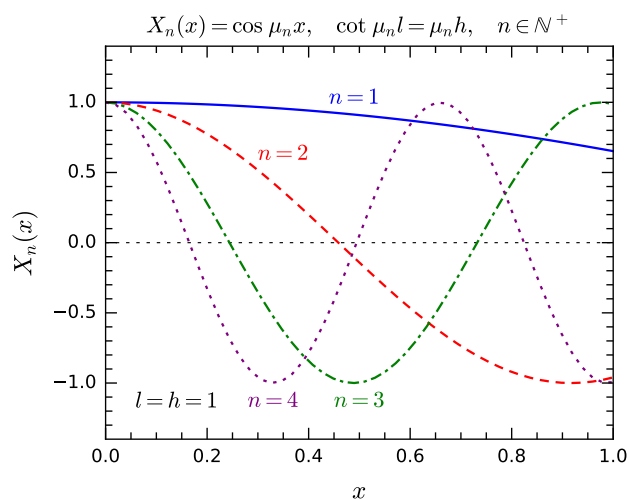


(b) 本征函数  $X_n(x) = \sin \mu_n x$

图 3: 方程  $\tan \mu = -\mu$  的根  $\mu_n$  和  $l = h = 1$  时本征函数  $X_n(x) = \sin \mu_n x$  的图像。



(a)  $\cot \mu = \mu$  的根  $\mu_n$



(b) 本征函数  $X_n(x) = \cos \mu_n x$

图 4: 方程  $\tan \mu = -\mu$  的根  $\mu_n$  和  $l = h = 1$  时本征函数  $X_n(x) = \cos \mu_n x$  的图像。

## 2 Fourier 变换例题

例 1 计算矩形函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

的 Fourier 变换  $F(k)$ 。

解  $f(x)$  的 Fourier 变换为

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \cos kx dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-1}^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k}. \quad (2.2)$$

原函数和像函数的图像见图 5。

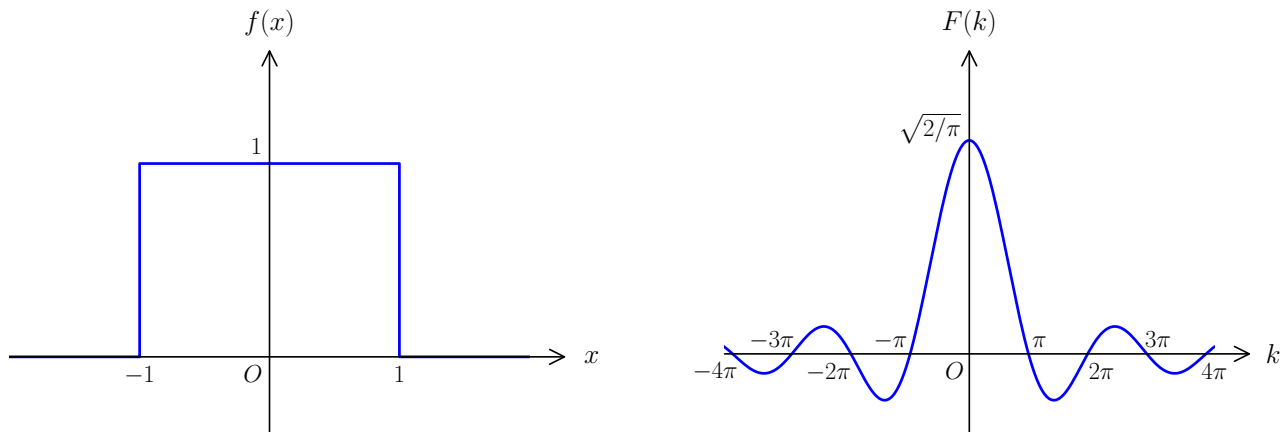


图 5: 矩形函数  $f(x)$  和它的 Fourier 变换  $F(k)$ 。

**例 2** 计算函数  $f(x) = e^{-a|x|}$  的 Fourier 变换  $F(k)$ , 其中  $a > 0$ 。

**解** Fourier 变换

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos kx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} I. \quad (2.3)$$

这里, 积分

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos kx dx = -\frac{1}{a} \int_0^{\infty} \cos kx de^{-ax} = -\frac{1}{a} e^{-ax} \cos kx \Big|_0^{\infty} - \frac{k}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin kx dx \\ &= \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2} \int_0^{\infty} \sin kx de^{-ax} = \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2} e^{-ax} \sin kx \Big|_0^{\infty} - \frac{k^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos kx dx = \frac{1}{a} - \frac{k^2}{a^2} I, \end{aligned} \quad (2.4)$$

故

$$I = \frac{a}{a^2 + k^2}. \quad (2.5)$$

从而得到

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}. \quad (2.6)$$

原函数和像函数的图像见图 6。

### 3 球坐标系和柱坐标系示意图

球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  的定义如图 7(a) 所示, 图中还标出相互正交的单位矢量  $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$  和  $\mathbf{e}_\phi$ 。球坐标系的三族坐标线处处相互正交, 如图 7(b) 所示。

柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  的定义如图 7(c) 所示, 图中还标出相互正交的单位矢量  $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$  和  $\mathbf{e}_z$ 。柱坐标系的三族坐标线处处相互正交, 如图 7(d) 所示。

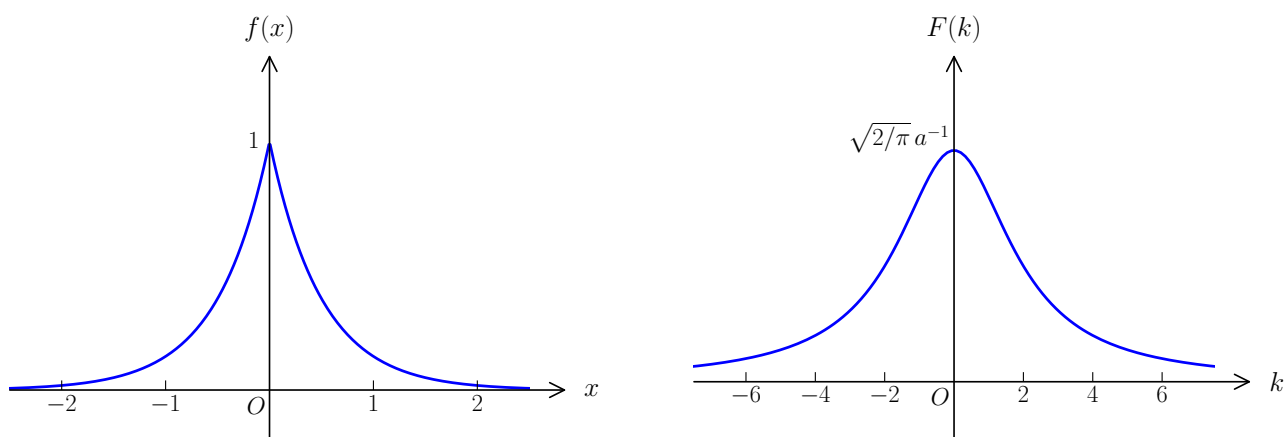


图 6:  $a = 2$  时的函数  $f(x) = e^{-a|x|}$  和它的 Fourier 变换  $F(k)$ 。

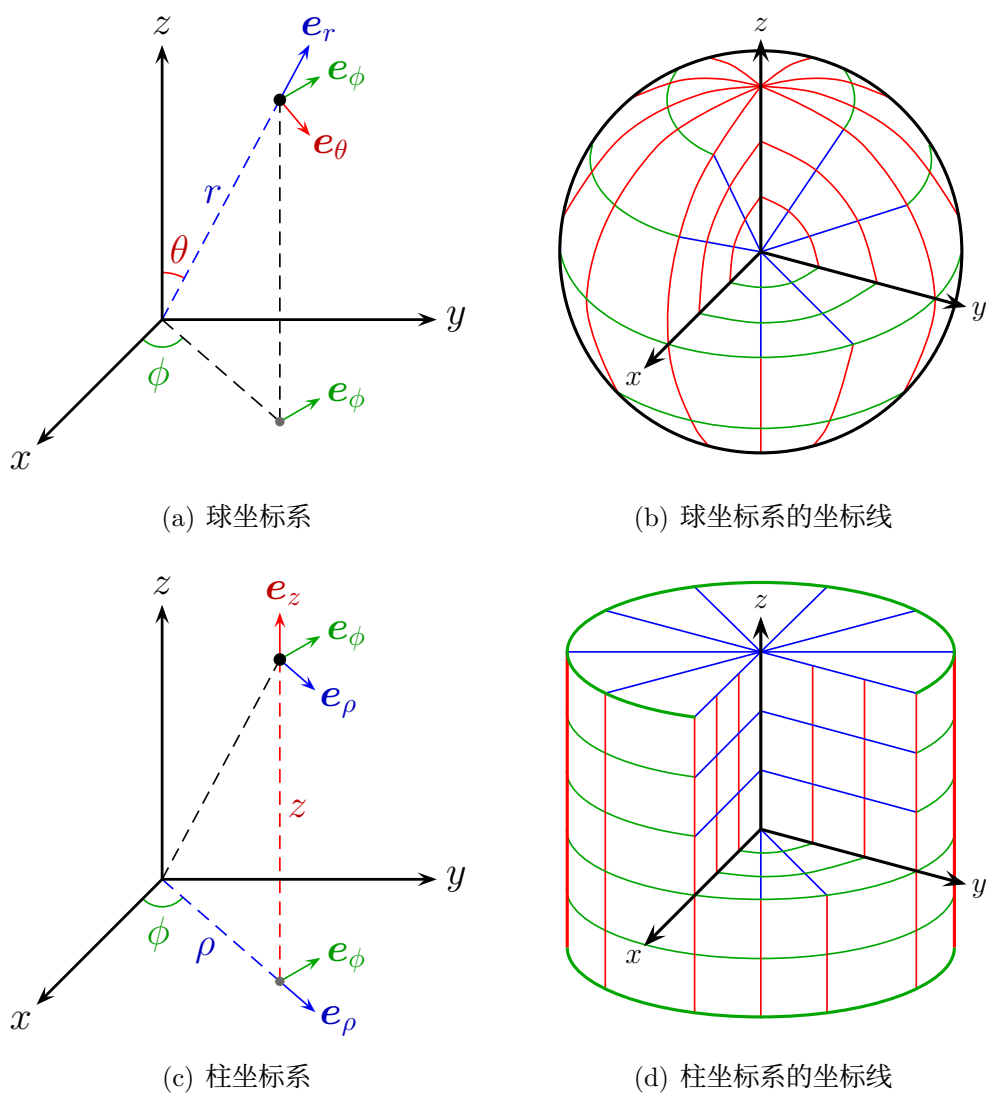


图 7: 球坐标系和柱坐标系示意图。

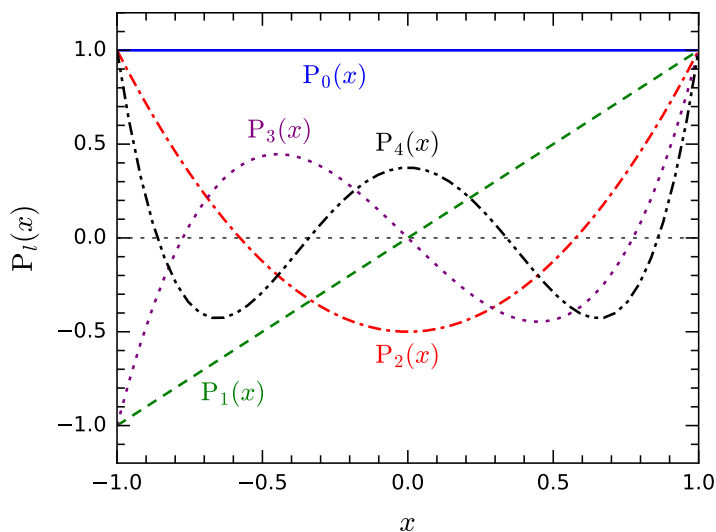


图 8: Legendre 多项式  $P_l(x)$  ( $l = 0, 1, 2, 3, 4$ ) 的函数图像。

## 4 Legendre 多项式函数图像

头五个 Legendre 多项式的具体形式为

$$P_0(x) = 1, \quad (4.1)$$

$$P_1(x) = x, \quad (4.2)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad (4.3)$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad (4.4)$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}. \quad (4.5)$$

它们的函数图像如图 8 所示。

## 5 连带 Legendre 函数的应用

在球坐标系下对 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.1)$$

分离变量, 寻找形如

$$u(\mathbf{r}) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi) \quad (5.2)$$

的解。考虑到关于  $\phi$  的周期性边界条件, 可得

$$\Phi(\phi) = \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

或者,

$$\Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

令  $\cos \theta = x$ ,  $H(\theta) = P(x)$ , 考虑到  $\theta = 0, \pi$  处的自然边界条件,  $P(x)$  应该满足本征值问题

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0, \quad (5.5)$$

$$P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad \text{或} \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0). \quad (5.6)$$

$m = 0$  时对应于 Legendre 方程的本征值问题,  $m \neq 0$  时对应于连带 Legendre 方程的本征值问题。两种情况的本征值和本征函数可以统一写作

$$\lambda_l = l(l+1), \quad P_l(x) = \{P_l^m(x)\}, \quad l = m, m+1, \dots \quad (5.7)$$

这里  $P_l^m(x)$  是连带 Legendre 函数。将本征值代回径向方程

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) - \lambda_l R(r) = 0, \quad (5.8)$$

可以解出

$$R(r) = \{r^l, r^{-(l+1)}\}. \quad (5.9)$$

因此, 一般解为

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[ r^l (A_{lm} e^{im\phi} + B_{lm} e^{-im\phi}) + \frac{1}{r^{l+1}} (C_{lm} e^{im\phi} + D_{lm} e^{-im\phi}) \right] P_l^m(\cos \theta), \quad (5.10)$$

也可以写成

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[ r^l (\tilde{A}_{lm} \cos m\phi + \tilde{B}_{lm} \sin m\phi) + \frac{1}{r^{l+1}} (\tilde{C}_{lm} \cos m\phi + \tilde{D}_{lm} \sin m\phi) \right] P_l^m(\cos \theta). \quad (5.11)$$

例 已知半径为  $a$  的球面上的电势分布为  $u_0 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi$ , 球内外无电荷, 电势零点取在无穷远处, 求空间各处的电势。

由于球内外无电荷, 故电势在球内外均满足 Laplace 方程, 定解问题为

$$\nabla^2 u = 0 \quad (r < a, r > a), \quad (5.12)$$

$$u|_{r=a} = u_0 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi, \quad u|_{r=\infty} = 0. \quad (5.13)$$

由  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$  可得  $P_2''(x) = (3x)' = 3$ , 因而

$$P_2^2(x) = (1-x^2)P_2''(x) = 3(1-x^2), \quad P_2^2(\cos \theta) = 3(1-\cos^2 \theta) = 3\sin^2 \theta. \quad (5.14)$$

因此,  $r = a$  处的边界条件可以改写为

$$u|_{r=a} = u_0 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi = \frac{u_0}{6} 3 \sin^2 \theta \sin 2\phi = \frac{u_0}{6} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.15)$$

首先, 求解球内 ( $r < a$ ) 的电势, 为了计算方便, 将一般解写作

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^l (A_{lm} \cos m\phi + B_{lm} \sin m\phi) \right]$$



$$+ \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} (C_{lm} \cos m\phi + D_{lm} \sin m\phi) \Big] P_l^m(\cos \theta). \quad (5.16)$$

由于球内没有电荷，球心 ( $r = 0$ ) 处电势应该有限，故对所有  $l$  和  $m$  均有  $C_{lm} = D_{lm} = 0$ 。从而，球内的解应为

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l (A_{lm} \cos m\phi + B_{lm} \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta). \quad (5.17)$$

代入  $r = a$  处的边界条件，得

$$u_1(a, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (A_{lm} \cos m\phi + B_{lm} \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta) = \frac{u_0}{6} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.18)$$

可见，非零系数只有

$$B_{2,2} = \frac{u_0}{6}, \quad (5.19)$$

其它系数均为零。于是得到球内的解为

$$u_1(r, \theta, \phi) = \frac{u_0}{6} \left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.20)$$

其次，求解球外 ( $r > a$ ) 的电势，将一般解写作

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^l (\tilde{A}_{lm} \cos m\phi + \tilde{B}_{lm} \sin m\phi) + \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} (\tilde{C}_{lm} \cos m\phi + \tilde{D}_{lm} \sin m\phi) \right] P_l^m(\cos \theta). \quad (5.21)$$

由于无穷远 ( $r = \infty$ ) 处的电势已取为零，故对所有  $l$  和  $m$  均有  $\tilde{A}_{lm} = \tilde{B}_{lm} = 0$ 。从而，球外的解应为

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} (\tilde{C}_{lm} \cos m\phi + \tilde{D}_{lm} \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta). \quad (5.22)$$

代入  $r = a$  处的边界条件，得

$$u_2(a, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (\tilde{C}_{lm} \cos m\phi + \tilde{D}_{lm} \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta) = \frac{u_0}{6} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.23)$$

可见，非零系数只有

$$\tilde{D}_{2,2} = \frac{u_0}{6}, \quad (5.24)$$

其它系数均为零。于是得到球外的解为

$$u_2(r, \theta, \phi) = \frac{u_0}{6} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi. \quad (5.25)$$

## 6 柱函数图像

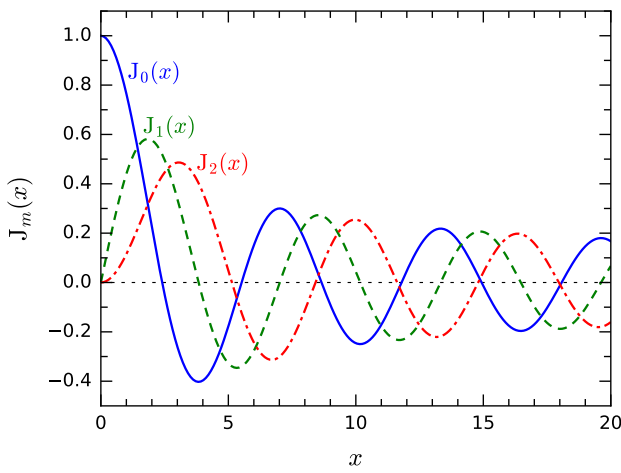
头三个 Bessel 函数  $J_m(x)$  和头三个 Neumann 函数  $N_m(x)$  的图像如图 9 所示。

头三个虚宗量 Bessel 函数  $I_m(x)$  和头三个虚宗量 Hankel 函数  $K_m(x)$  的图像如图 10 所示。

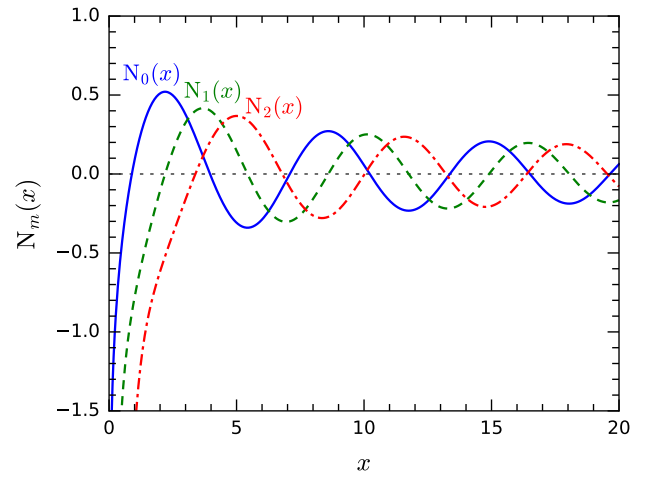
当  $x \rightarrow \infty$  且  $-\pi < \arg x < \pi$  时, Bessel 函数  $J_\nu(x)$  和 Neumann 函数  $N_\nu(x)$  的渐近形式为

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (6.1)$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (6.2)$$

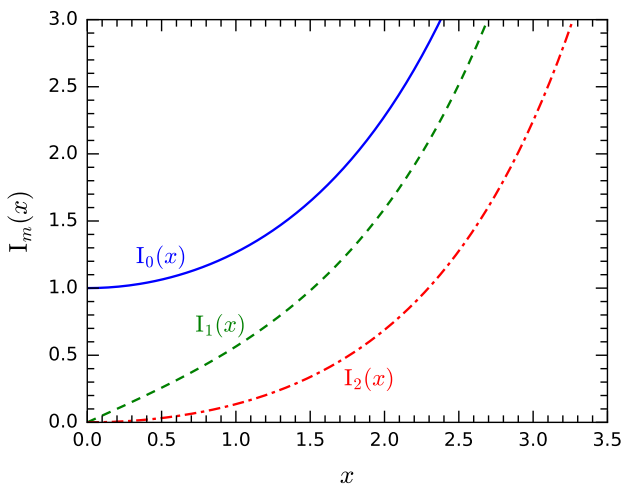


(a) Bessel 函数  $J_m(x)$

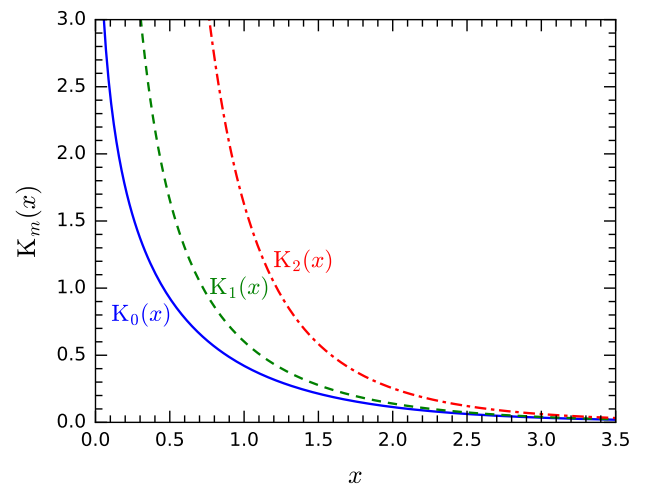


(b) Neumann 函数  $N_m(x)$

图 9: Bessel 函数  $J_0(x)$ 、 $J_1(x)$ 、 $J_2(x)$  和 Neumann 函数  $N_0(x)$ 、 $N_1(x)$ 、 $N_2(x)$  的图像。



(a) 虚宗量 Bessel 函数  $I_m(x)$



(b) 虚宗量 Hankel 函数  $K_m(x)$

图 10: 虚宗量 Bessel 函数  $I_0(x)$ 、 $I_1(x)$ 、 $I_2(x)$  和虚宗量 Hankel 函数  $K_0(x)$ 、 $K_1(x)$ 、 $K_2(x)$  的图像。

$J_0(x)$  和  $N_0(x)$  的渐近行为如图 11(a) 所示。

当  $x \rightarrow \infty$  时, 虚宗量 Bessel 函数  $I_\nu(x)$ 、虚宗量 Hankel 函数  $K_\nu(x)$  的渐近形式为

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2} \quad (6.3)$$

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad -\pi < \arg x < \pi. \quad (6.4)$$

$I_0(x)$  和  $K_0(x)$  的渐近行为如图 11(b) 所示。

头三个球 Bessel 函数  $j_l(x)$  的具体形式为

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (6.5)$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad (6.6)$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \frac{\sin x}{x} - \frac{3 \cos x}{x^2}. \quad (6.7)$$

它们的图像如图 12(a) 所示。

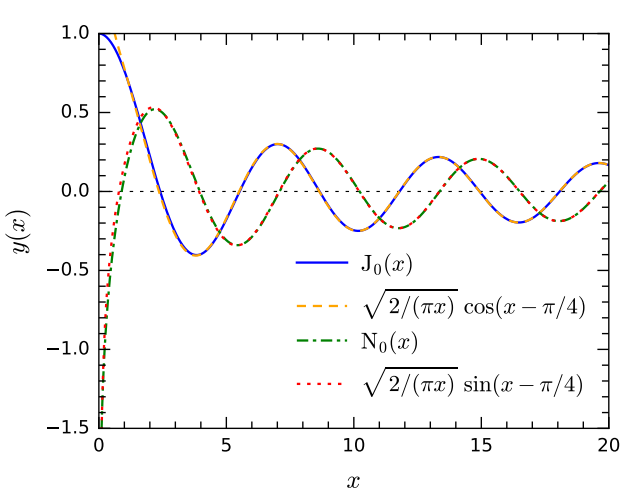
头三个球 Neumann 函数  $n_l(x)$  的具体形式为

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad (6.8)$$

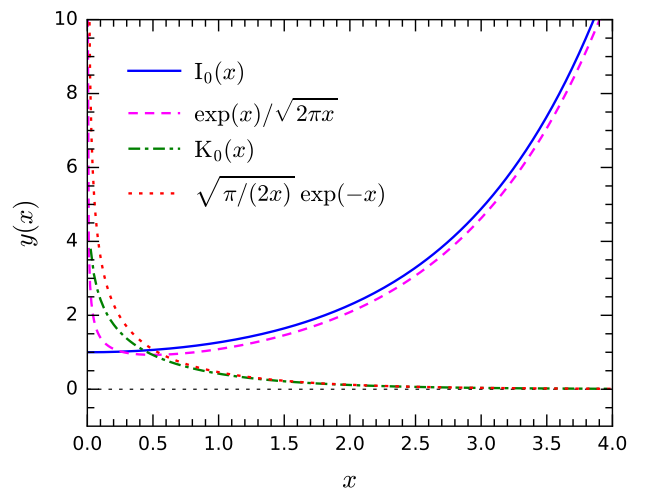
$$n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}, \quad (6.9)$$

$$n_2(x) = \left(-\frac{3}{x^2} + 1\right) \frac{\cos x}{x} - \frac{3 \sin x}{x^2}. \quad (6.10)$$

它们的图像如图 12(b) 所示。

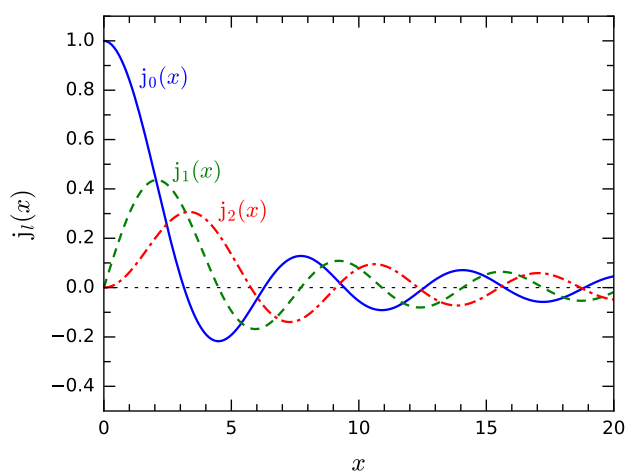


(a)  $J_0(x)$  和  $N_0(x)$  的渐近行为

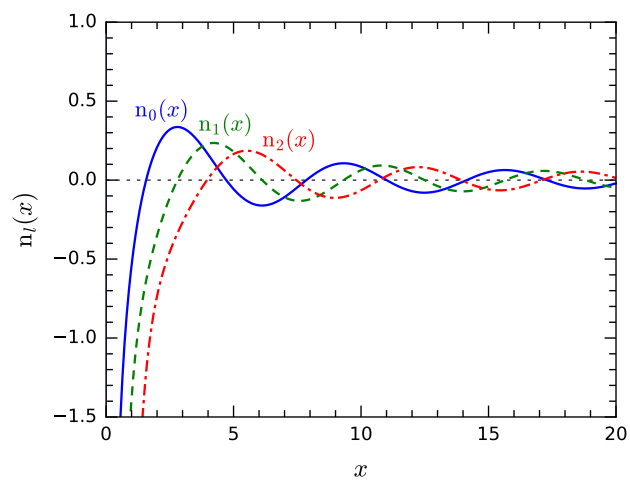


(b)  $I_0(x)$  和  $K_0(x)$  的渐近行为

图 11: Bessel 函数  $J_0(x)$ 、Neumann 函数  $N_0(x)$ 、虚宗量 Bessel 函数  $I_0(x)$ 、虚宗量 Hankel 函数  $K_0(x)$  的渐近行为。



(a) 球 Bessel 函数  $j_l(x)$



(b) 球 Neumann 函数  $n_l(x)$

图 12: 球 Bessel 函数  $j_0(x)$ 、 $j_1(x)$ 、 $j_2(x)$  和球 Neumann 函数  $n_0(x)$ 、 $n_1(x)$ 、 $n_2(x)$  的图像。