

数学物理方法作业集

潘逸文^{*}, 余钊焕[†]

中国广州中山大学物理学院

December 10, 2018

简介

2018 年秋季数学物理方法 (面向 17 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布, 本文
件也会每周更新, 可在 余钊焕教学主页 <http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html> 找到。

^{*}Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

[†]Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 11 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a) \frac{i}{\pi}, \quad (b) 1 + \sqrt{3}i, \quad (c) 1 + e^{\frac{9\pi i}{14}} e^{\frac{-\pi i}{7}}, \quad (1.1)$$

2. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, 其中 $R > 0$. 求解最大的 $N \in \mathbb{N}$, 使得对于任意 S 的内点 z , z^N 都还是内点。写明推理。

3. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$, 其中 $R > 0$. S 是否区域? 是否单连通?

2 第二周 (9 月 18 日课上交)

1. 用代数式 (即 $x + iy$ 的形式) 表达以下复数, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, i 是虚数单位,

$$(a) a^i, \text{ 其中 } a > 0, \quad (b) i^{a+bi}, \quad (c) \sin(a + ib). \quad (2.1)$$

2. 设 $u(x, y) = e^x \sin y$, 而且令 $w = u(x, y) + iv(x, y)$ 为一个解析函数。求 w 关于 $z = x + iy$ 的表达式。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数, 同时, 其值域是 \mathbb{R} 的子集。求证 f 是常数函数。

3 第三周 (9 月 25 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z} dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z} dz$, 其中 C_1 和 C_2 分别是上半单位圆 (逆时针方向) 和下半单位圆 (顺时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (3.1)$$

3. 设复变函数 f 在区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续, $G \subset D$ 是其子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$. 证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) d\bar{z} dz, \quad (3.2)$$

其中面积元 $d\bar{z} dz = 2i dx dy$ 。

4 第五周 (10 月 9 日交)

1. 计算围道积分

$$\oint_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.1)$$

2. 计算围道积分, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.2)$$

3. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$, 其中 $r_k = (-1)^{k^2}$, $c_k = (-1)^k \frac{e^{ik\theta}}{k}$. 分情况 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 讨论级数是否收敛, 是否绝对收敛, 给出简要说明。

4. 讨论下面幂级数是否收敛, 若收敛, 给出收敛半径

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n. \quad (4.3)$$

5 第六周 (10 月 16 日交)

1. 考虑二元实函数 $u(x, y)$

$$u(x, y) \equiv \frac{x^2 - y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}. \quad (5.1)$$

设 $u(x, y)$ 是在某区域内解析的复变函数 $f(z = x + iy)$ 的实部。

- (1) 用共轭调和函数方法求 $f(z)$ 的虚部 $v(x, y)$, 并写出函数 $f(z)$ 关于 $z = x + iy$ 的表达式;
- (2) 指出 $f(z)$ 的奇点以及所属分类;
- (3) 分别以 $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$ 为展开中心, 作 Laurent 或 Taylor 展开。指出所得级数的收敛区域或收敛半径。

2. 考虑复变函数

$$f(z) \equiv \frac{z^n}{z-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

- (1) 列举 $f(z)$ 以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域;
- (2) 以原点为展开中心, 在上述每一个解析区域内写出 $f(z)$ 的 Laurent 或 Taylor 展开 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k z^k$, 并比较展开系数 $\lambda_{k \geq 0}$ 与 $f^{(k)}(0)/k!$ 是否相等 (可为一般 n 和 k 计算通项然后比较, 也可取 $n = 2$, $k = 1, 2, 3$)。

6 第七周 (10 月 23 日交)

1. 计算下面函数在 $z = 0$ 的留数

$$(a) \frac{\cos z}{z^3}, \quad (b) \frac{e^z}{z^3}. \quad (6.1)$$

2. 计算下面函数在指定奇点的留数

$$(a) \frac{1}{\sinh \pi z}, \quad z = ni, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (b) \frac{e^z}{z^2 - 1}, \quad z = 1. \quad (6.2)$$

3. 利用留数定理计算积分

$$(a) \oint_{|z|=\rho>1} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz, \quad (b) \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2n}} dz, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

4. 利用留数定理计算积分

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0, \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2} dx. \quad (6.4)$$

7 第八周 (10 月 30 日交)

1. 弦在阻尼介质中振动, t 时刻 x 处单位长度所受阻力为

$$F(x, t) = -R \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad (7.1)$$

其中 R 称为阻力系数。试推导弦在该阻尼介质中的波动方程。

2. 弹性均匀细杆, $x = 0$ 端固定, $x = l$ 端被拉长至 $x = l + d$ 并保持静止 (d 不超过弹性限度), $t = 0$ 时突然放开 $x = l$ 端, 写出杆作纵振动的定解问题。

3. 混凝土浇灌后逐渐放出水化热, 放热速率正比于当时尚储存着的水化热密度 Q , 即

$$\frac{dQ}{dt} = -\beta Q. \quad (7.2)$$

假设混凝土的热导率 k 是常数, 试推导浇灌后混凝土内的热传导方程。

8 第九周 (11 月 6 日交)

1. 考虑以下定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0 \quad (8.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(5, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.2)$$

$$u|_{t=0} = 4\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) - 3\sin(5\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 5. \quad (8.3)$$

(1a) 考虑变量分离的特殊解 $u = X(x)T(t)$, 写出相应 X, T 的本征问题, 并结合边界条件求解 X 的本征问题。

(1b) 求解 T , 并写下一般解。

(1c) 利用初始条件确定一般解的系数。

2. 考虑以下定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (8.4)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\ell} = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.5)$$

$$u|_{t=0} = \frac{u_0 x}{\ell}, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (8.6)$$

(2a) 考虑变量分离的特殊解 $u = X(x)T(t)$, 写出相应 X, T 的本征问题, 并结合边界条件求解 X 的本征问题。

(2b) 求解 T , 并写下一般解。

(2c) 利用初始条件确定一般解的系数。(可利用公式 $(\sin x - x \cos x)' = x \sin x$)

9 第十周 (11 月 13 日交)

1. 求解下面定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{u_0}{a}, \quad u(a, y) = u_1 + u_2 \cos \frac{\pi}{b} y \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=b} = 0. \quad (9.3)$$

2. 求解下面定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu \right)|_{x=\ell} = 0 \quad (9.5)$$

$$u(x, t=0) = u_0. \quad (9.6)$$

10 第十一周 (11 月 20 日交)

1. 扇形薄板, 半径为 a , 圆心角为 β , 用坐标描述即 $\rho \leq a, 0 \leq \phi \leq \beta$. 板面绝热, 两条直边保持温度为 0 度, 弧边温度为 $f(\phi) = u_0 \phi(\beta - \phi)$, 其中 u_0 为常数, 求板面上的温度分布。

2. 用 Fourier 变换法求解下列定解问题,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad y > 0), \quad (10.1)$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=+\infty} = 0, \quad (10.2)$$

$$u|_{x=\pm\infty} = 0. \quad (10.3)$$

提示：可能会用到积分公式

$$\int_0^\infty e^{-bx} \cos ax \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad b > 0. \quad (10.4)$$

11 第十二周 (11 月 27 日交)

1. 阶跃函数 $\theta(x)$ 定义为

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

求证

$$\theta'(x) = \delta(x). \quad (11.2)$$

2. 用 Fourier 变换法求解下列定解问题,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0), \quad (11.3)$$

$$u|_{t=0} = e^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (11.4)$$

$$u|_{x=\pm\infty} = 0. \quad (11.5)$$

并尝试画出求得的解 $u(x, t)$ 在 $t = 0, 1, 2$ 三个时刻随 x 变化的函数图象草图。

3. 微观粒子在中心力场 $V(r)$ 中的定态 Schrödinger 方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 u + V(r)u = Eu, \quad (11.6)$$

其中 $u(r, \theta, \phi)$ 是波函数, μ 是粒子质量, E 是能量, \hbar 是约化 Planck 常数。试在球坐标系中对该方程分离变量。

12 第十三周 (12 月 4 日交)

1. 根据 Legendre 多项式的级数表达式

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (12.1)$$

写出 $P_0(x)$ 、 $P_1(x)$ 、 $P_2(x)$ 、 $P_3(x)$ 、 $P_4(x)$ 的具体形式。

2. 设 ν 不等于整数或半整数，从头推导 Bessel 方程的第二解 $J_{-\nu}(x)$ 。

3. 根据递推关系

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k}(k!)^2 k}, \quad k \in \mathbb{N}^+, \quad (12.2)$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k} = \frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k}(k!)^2} \sum_{r=1}^k \frac{1}{r}, \quad k \in \mathbb{N}^+. \quad (12.3)$$

13 第十四周 (12 月 11 日交)

1. 设 $m \in \mathbb{N}^+$ ，根据递推关系

$$a_{2k+2m} = -\frac{a_{2k+2m-2}}{2^2 k(k+m)} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k+m+1} k!(k+m)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+m} \right), \quad k \in \mathbb{N}^+, \quad (13.1)$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k+2m} = \frac{(-)^k m! a_{2m}}{2^{2k} k!(k+m)!} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k+m+1} k!(k+m)!} [\psi(k+m+1) + \psi(k+1) - \psi(m+1) - \psi(1)], \quad k \in \mathbb{N}^+, \quad (13.2)$$

其中 ψ 函数满足

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}. \quad (13.3)$$

2. 合流超几何方程的标准形式是

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0, \quad (13.4)$$

求出将它化为 Sturm-Liouville 型方程

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] - q(x)y(x) + \alpha \rho(x)y(x) = 0 \quad (13.5)$$

时 $k(x)$ 、 $q(x)$ 和 $\rho(x)$ 的具体形式。

3. 长为 l 的均匀细杆，侧面绝热，左端保持恒定温度零度，右端按 Newton 冷却定律与温度为零度的介质交换热量，即右端边界条件为

$$\left(u + h \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad h > 0. \quad (13.6)$$

已知 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ ，求杆上温度的变化规律。

14 第十五周 (12 月 11 日交)

1. 记

$$I_{2l+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1} \theta \, dx, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (14.1)$$

利用分部积分，证明递推关系

$$I_{2l+1} = \frac{2l}{2l+1} I_{2l-1}, \quad l \geq 1. \quad (14.2)$$

再根据这个递推关系和

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, dx = 1, \quad (14.3)$$

证明

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1} \theta \, dx = \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}. \quad (14.4)$$

2. 两个同心的球面，内球面半径为 r_1 ，具有电势 u_0 ，外球面半径为 r_2 ，具有电势 $u_1 \cos^2 \theta$ ，其中 u_0 和 u_1 均为常数，区域 $r_1 < r < r_2$ 之中无电荷，求该区域中的电势分布。