

数学物理方法作业集

潘逸文*, 余钊焕†

中国广州中山大学物理学院

September 25, 2018

简介

2018 年秋季数学物理方法 (面向 17 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布, 本文
件也会每周更新, 可在 余钊焕教学主页 <http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html> 找到。

*Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

†Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 11 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a) \frac{i}{\pi}, \quad (b) 1 + \sqrt{3}i, \quad (c) 1 + e^{\frac{9\pi i}{14}} e^{\frac{-\pi i}{7}}, \quad (1.1)$$

2. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, 其中 $R > 0$. 求解最大的 $N \in \mathbb{N}$, 使得对于任意 S 的内点 z , z^N 都还是内点。写明推理。

3. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$, 其中 $R > 0$. S 是否区域? 是否单连通?

2 第二周 (9 月 18 日课上交)

1. 用代数式 (即 $x + iy$ 的形式) 表达以下复数, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, i 是虚数单位,

$$(a) a^i, \text{ 其中 } a > 0, \quad (b) i^{a+bi}, \quad (c) \sin(a + ib). \quad (2.1)$$

2. 设 $u(x, y) = e^x \sin y$, 而且令 $w = u(x, y) + iv(x, y)$ 为一个解析函数。求 w 关于 $z = x + iy$ 的表达式。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数, 同时, 其值域是 \mathbb{R} 的子集。求证 f 是常数函数。

3 第三周 (9 月 25 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z} dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z} dz$, 其中 C_1 和 C_2 分别是上半单位圆 (逆时针方向) 和下半单位圆 (顺时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (3.1)$$

3. 设复变函数 f 在区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续, $G \subset D$ 是其子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$. 证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) d\bar{z} dz, \quad (3.2)$$

其中面积元 $d\bar{z} dz = 2i dx dy$ 。

4 第四周 (10 月 2 日交)

1. 计算围道积分

$$\oint_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.1)$$

2. 计算围道积分, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.2)$$

3. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$, 其中 $r_k = (-1)^{k^2}$, $c_k = (-1)^k \frac{e^{ik\theta}}{k}$ 。分情况 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 讨论级数是否收敛, 是否绝对收敛, 给出简要说明。