数学物理方法补充讲义

余钊焕

中山大学物理学院

http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html

2018 年 12 月 17 日

1 连带 Legendre 函数的应用

在球坐标系下对 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0 \tag{1}$$

分离变量，寻找形如

$$u(\mathbf{r}) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi) \tag{2}$$

的解。考虑到关于 ϕ 的周期性边界条件，可得

$$\Phi(\phi) = \{e^{im\phi}, e^{-im\phi}\}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

或者，

$$\Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

令 $\cos\theta = x$，$H(\theta) = P(x)$，考虑到 $\theta = 0, \pi$ 处的自然边界条件，$P(x)$ 应该满足本征值问题

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0, \tag{5}$$

$$P(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad 或 \quad |P(\pm 1)| < \infty \quad (m = 0). \tag{6}$$

$m = 0$ 时对应于 Legendre 方程的本征值问题，$m \neq 0$ 时对应于连带 Legendre 方程的本征值问题。两种情况的本征值和本征函数可以统一写作

$$\lambda_l = l(l+1), \quad P(x) = \{\mathrm{P}_l^m(x)\}, \quad l = m, m+1, \cdots \tag{7}$$

这里 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 是连带 Legendre 函数。将本征值代回径向方程

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda_l R(r) = 0, \tag{8}$$

可以解出

$$R(r) = \{r^l, r^{-(l+1)}\}. \tag{9}$$

因此，一般解为

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left[r^l(A_{lm}e^{im\phi}+B_{lm}e^{-im\phi})+\frac{1}{r^{l+1}}(C_{lm}e^{im\phi}+D_{lm}e^{-im\phi})\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta), \tag{10}$$

也可以写成

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left[r^l(\tilde{A}_{lm}\cos m\phi+\tilde{B}_{lm}\sin m\phi)+\frac{1}{r^{l+1}}(\tilde{C}_{lm}\cos m\phi+\tilde{D}_{lm}\sin m\phi)\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{11}$$

例　已知半径为 a 的球面上的电势分布为 $u_0\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi$，球内外无电荷，电势零点取在无穷远处，求空间各处的电势。

由于球内外无电荷，故电势在球内外均满足 Laplace 方程，定解问题为

$$\nabla^2 u = 0 \quad (r<a, r>a), \tag{12}$$

$$u|_{r=a} = u_0\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi, \quad u|_{r=\infty} = 0. \tag{13}$$

由 $\mathrm{P}_2(x) = (3x^2-1)/2$ 可得 $\mathrm{P}_2''(x) = (3x)' = 3$，因而

$$\mathrm{P}_2^2(x) = (1-x^2)\mathrm{P}_2''(x) = 3(1-x^2), \quad \mathrm{P}_2^2(\cos\theta) = 3(1-\cos^2\theta) = 3\sin^2\theta. \tag{14}$$

因此，$r=a$ 处的边界条件可以改写为

$$u|_{r=a} = u_0\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi = \frac{u_0}{6}3\sin^2\theta\sin 2\phi = \frac{u_0}{6}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{15}$$

首先，求解球内 $(r<a)$ 的电势，为了计算方便，将一般解写作

$$\begin{aligned} u_1(r,\theta,\phi) \;=\; &\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^l(A_{lm}\cos m\phi+B_{lm}\sin m\phi)\right.\\ &\left.+\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}(C_{lm}\cos m\phi+D_{lm}\sin m\phi)\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \end{aligned} \tag{16}$$

由于球内没有电荷，球心 $(r=0)$ 处电势应该有限，故对所有 l 和 m 均有 $C_{lm}=D_{lm}=0$。从而，球内的解应为

$$u_1(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l(A_{lm}\cos m\phi+B_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{17}$$

代入 $r=a$ 处的边界条件，得

$$u_1(a,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(A_{lm}\cos m\phi+B_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) = \frac{u_0}{6}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{18}$$

可见，非零系数只有

$$B_{2,2} = \frac{u_0}{6}, \tag{19}$$

其它系数均为零。于是得到球内的解为

$$u_1(r,\theta,\phi) = \frac{u_0}{6}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{20}$$

其次，求解球外 $(r > a)$ 的电势，将一般解写作

$$\begin{aligned} u_2(r,\theta,\phi) \ = \ & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^l (\tilde{A}_{lm}\cos m\phi + \tilde{B}_{lm}\sin m\phi)\right. \\ & \left. +\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}(\tilde{C}_{lm}\cos m\phi + \tilde{D}_{lm}\sin m\phi)\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \end{aligned} \tag{21}$$

由于无穷远 $(r = \infty)$ 处的电势已取为零，故对所有 l 和 m 均有 $\tilde{A}_{lm} = \tilde{B}_{lm} = 0$。从而，球外的解应为

$$u_2(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}(\tilde{C}_{lm}\cos m\phi + \tilde{D}_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{22}$$

代入 $r = a$ 处的边界条件，得

$$u_2(a,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(\tilde{C}_{lm}\cos m\phi + \tilde{D}_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) = \frac{u_0}{6}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{23}$$

可见，非零系数只有

$$\tilde{D}_{2,2} = \frac{u_0}{6}, \tag{24}$$

其它系数均为零。于是得到球外的解为

$$u_2(r,\theta,\phi) = \frac{u_0}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{25}$$