2.3 节 粒子运动学、衰变和散射

袁 强

中国科学院紫金山天文台

2017年3月

能量、动量和质量

粒子物理学常常研究高速运动的粒子,需要在<mark>狭义相对论</mark>框架下描述粒子的运动。<mark>洛伦兹度规</mark>通常约定为

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

粒子的<mark>能量 E 和 **3** 维动量 p 构成 **4** 维动量 $p^{\mu} = (E, \mathbf{p})$ 。 p^{μ} 是一个洛伦兹逆变矢量,对应的协变矢量为 $p_{\mu} = g_{\mu\nu}p^{\nu} = (E, -\mathbf{p})$ 。 p^{μ} 的内积</mark>

$$p^2 \equiv p \cdot p \equiv p^{\mu} p_{\mu} = g_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} = g^{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

是一个洛伦兹不变量,即在洛伦兹变换下不变,在所有惯性系中有相同的值。

- $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$ 称为粒子的质壳条件,自由运动的粒子应满足这个条件。
- 粒子的 3 维速度定义为 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$ 。

衰变和散射 00000

洛伦兹变换

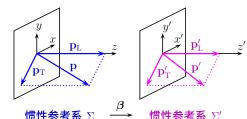
洛伦兹变换将一个洛伦兹矢量在一个惯性参考系 Σ 中的测量值变换成它在另一个惯性参考系 Σ' 中的测量值。

设 Σ' 系相对于 Σ 系的运动速度为 $\boldsymbol{\beta}$,粒子在 Σ 系中的能量和动量分别为 E 和 \mathbf{p} ,记 \mathbf{p} 在平行于 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的分量为 p_{L} ,在垂直于 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的分量为 \mathbf{p}_{L} ,则粒子在 Σ' 系中的能量和动量为

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma |\boldsymbol{\beta}| \\ -\gamma |\boldsymbol{\beta}| & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}'_{T} = \mathbf{p}_{T},$$

其中洛伦兹因子 $\gamma = (1 - |\beta|^2)^{-1/2}$ 。 可以验证, $p'^2 = p^2$,即 4 维动量 的内积在洛伦兹变换下不变。

粒子能量 E 与质量 m 的关系为 $E = \gamma m$,这里 $\gamma = (1 - |\mathbf{v}|^2)^{-1/2}$ 。



动尺缩短和动钟延缓

时空坐标 $x^{\mu} = (t, \mathbf{x})$ 也是洛伦兹矢量,同样服从洛伦兹变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'_{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma |\boldsymbol{\beta}| \\ -\gamma |\boldsymbol{\beta}| & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_{L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_{T} = \mathbf{x}_{T}.$$

从而引起两个相对论效应。

- **① 运动的尺子变短**: 从静止参考系 Σ 中观察固定在运动参考系 Σ' 中的一个物体,则它在平行于 β 方向上的长度 L' 变短为 $L = L'/\gamma < L'$ 。
- ② 运动的时钟变慢:运动参考系 Σ' 中的时间间隔 $\Delta t'$ 比静止参考系 Σ 中的时间间隔 Δt 长,满足 $\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t$ 。
- μ 子质量 m = 106 MeV,寿命 $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ s。对于能量 E = 106 GeV 的 μ 子, $\gamma = E/m = 10^3$,因而飞行衰变寿命会延长到 $\tau' = 2.2 \times 10^{-3}$ s。
- π^{\pm} 介子质量为 140 MeV,寿命为 2.6 × 10^{-8} s,能量为 1.4 GeV 时从产生 到衰变平均可以飞行七十多米,能量为 14 GeV 时则可达到七百多米。

质心参考系

对粒子能动量的实验测量是在实验室参考系中进行的。不过,对于多个粒子 组成的系统,在质心参考系中描述粒子运动状态通常要比实验室参考系容易 得多。质心系定义为使系统总动量为零的参考系,满足 $\mathbf{p}_{CM} \equiv \sum \mathbf{p}_{i}^{CM} = \mathbf{0}$ 。

系统的<mark>质心系能量(质心能) $E_{CM} \equiv \sum_i E_i^{CM}$ 是一个洛伦兹不变量:</mark>

$$p_{\text{CM}}^{\mu} \equiv (E_{\text{CM}}, \mathbf{p}_{\text{CM}}), \quad p_{\text{CM}}^2 = \left(\sum_i E_i^{\text{CM}}\right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i^{\text{CM}}\right)^2 = \left(\sum_i E_i^{\text{CM}}\right)^2 = E_{\text{CM}}^2.$$

- 系统的质心系总能量 E_{CM} 是激发粒子体系内部相互作用的有效能量。
- 几个粒子的总质心能也称为它们的不变质量, $m_{inv} = E_{CM}$ 。由于能动量守 恒,如果几个粒子是同一个母粒子的衰变产物, m_{inv} 就是母粒子的质量。
- 两个粒子碰撞时,质心系中两个入射粒子动量大小相同,方向相反。质心 系中出射粒子的角度分布是轴对称的,以任一入射粒子的动量方向为轴。
- 标量粒子衰变所产生的次级粒子在质心系中呈球对称分布。若母粒子自旋 不为零,次级粒子在质心系中则呈轴对称分布,以母粒子自旋方向为轴。

打靶实验和对撞实验

打靶实验用粒子束流轰击固定靶来发生相互作用。在实验室系中,记入射粒子 1 的动量为 $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$,静止靶粒子 2 的动量为 $p_2 = (m_2, \mathbf{0})$,则 $E_{CM}^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2.$

对于高能入射粒子, $m_1, m_2 \ll E_1$,质心能 $E_{CM} \simeq \sqrt{2E_1m_2}$ 。

对撞实验用两个粒子束流相撞来发生相互作用。目前已经设计出 e^+e^- 、pp、 $p\bar{p}$ 和 $e^\pm p$ 等束流类型不同的对撞机。设粒子 1 和 2 沿相反方向入射并对撞,若能量远高于质量,则 $|\mathbf{p}_1|\simeq E_1$, $|\mathbf{p}_2|\simeq E_2$, $p_1^2\simeq p_2^2\simeq 0$,在实验室系中可得 $E_{\mathrm{CM}}^2=p_1^2+p_2^2+2p_1\cdot p_2\simeq 2E_1E_2+2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|\simeq 4E_1E_2$.

因此,质心能 $E_{\text{CM}} \simeq \sqrt{4E_1E_2}$ 。

费米实验室的 Tevatron 是 $p\bar{p}$ 对撞机, $E_p=E_{\bar{p}}=1$ TeV, $E_{\rm CM}=2$ TeV。若 改为以 p 为靶的打靶实验,需要入射 \bar{p} 能量为 $E_{\bar{p}}\simeq 2000$ TeV 才能达到相 同的质心能。由此可见,对撞实验远比打靶实验更能有效地利用能量。

衰变和散射过程的末态可能包含多个粒子,末态粒子能动量可取运动学允许 的任意值。计算衰变宽度和散射总截面要对所有末态粒子的动量相空间积分。

单个粒子的<mark>洛伦兹不变动量相空间体积元</mark>为 $d^4p/(2\pi)^4 = dp^0d^3p/(2\pi)^4$ 。末态粒子应满足质壳条件且能量为正,考虑到这两个限制,体积元变成

$$\frac{dp^0d^3p}{(2\pi)^4}2\pi\delta((p^0)^2-|\mathbf{p}|^2-m^2)\theta(p^0).$$

对 p^0 积分,利用恒等式 $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} (x_i)$ 为 f(x) 的根),可得

$$\begin{split} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi} 2\pi \delta((p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2) \theta(p^0) &= \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int dp^0 \frac{\delta(p^0 - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2})}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} \\ &= \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}. \end{split}$$

因此,n 体末态相空间不变体积元为 $d\Pi_n = \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$ 。

衰变

不稳定粒子的<mark>衰变</mark>是一个泊松过程。在 静止参考系中,粒子在衰变之前存活的 时间 $\geq t$ 的概率由指数分布给出,

$$P(t) = e^{-t/\tau} = e^{-\Gamma t},$$

其中 τ 是粒子**寿**命, Γ 称为粒子宽度:

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\tau}.$$

不稳定粒子的质量并不是确定的值,而

Breit-Wigner distribution $p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} p/2} p/2$ $m - \Gamma m - \Gamma/2 m m + \Gamma/2 m + \Gamma$ m_{inv}

是一个分布,即是衰变产物不变质量
$$m_{inv}$$
 的分布,服从 $Breit-Wigner$ 分布

$$f(m_{\rm inv}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(m_{\rm inv} - m)^2 + \Gamma^2/4}.$$

分布的中心值 m 是通常所说的粒子<mark>质量</mark>,分布的半峰全宽是粒子宽度 Γ 。

分支比和分宽度

一个粒子可能有多种衰变过程。在一次衰变中,某个衰变过程 j 发生的概率称为它的分支比 BR(j)。定义衰变过程 j 的分宽度为 $\Gamma_j = \Gamma \cdot BR(j)$,则

$$\sum_{j} BR(j) = \frac{1}{\Gamma} \sum_{j} \Gamma_{j} = 1, \quad \text{IP } \Gamma = \sum_{j} \Gamma_{j}.$$

对于末态为 n 体的衰变过程 j,分宽度在理论计算中表达为

$$\Gamma_{j} = \frac{1}{2m} \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^{3}p_{i}}{(2\pi)^{3} 2E_{i}} (2\pi)^{4} \delta^{(4)} \left(p^{\mu} - \sum_{i} p_{i}^{\mu} \right) |\mathcal{M}_{j}|^{2}.$$

这里 m 和 p^{μ} 是母粒子的质量和 4 动量,4 维 δ 函数体现能动量守恒。衰变过程的<mark>不变振幅 \mathcal{M}_{j} </mark> 是发生 j 过程的概率振幅,在洛伦兹变换下不变。

一个粒子物理理论模型会定义粒子类型和拉格朗日密度量(<mark>拉氏量</mark>),由此给出一套<mark>费曼规则</mark>。利用这套规则可以画出<mark>费曼图</mark>来表示所有可能发生的衰变和散射过程。根据量子场论知识,可以通过费曼图计算不变振幅。

散射

散射是两个粒子通过碰撞发生反应的过程。

- 弹性散射:碰撞粒子之间只有动量交换,类型和内部状态没有发生改变。
- 非弹性散射: 粒子内部状态有所改变或转化为其它粒子。

描述散射过程本质的物理量是散射截面 σ ,它是粒子间相互作用的有效面积,表征相互作用的强弱。常用单位是靶,记作 b,1 b = 10^{-28} m²。

设两束粒子 A 和 B 发生散射,各自含有 N_A 和 N_B 个粒子,A 与 B 相互作用的散射截面为 σ ,粒子束相互投射的区域横截面积为 A,则相互作用发生的次数 $N=N_AN_B\sigma/A$ 。若两个粒子束的数密度分别为 n_A 和 n_B ,彼此间相对速度为 $v=|\mathbf{v}_A-\mathbf{v}_B|$,则在 t 时间内相互投射的区域体积 V=Avt,而 $N_A=n_AV$, $N_B=n_BV$ 。于是,单位时间单位体积内的相互作用率

$$R = \frac{N}{Vt} = \frac{n_{\mathcal{A}} V n_{\mathcal{B}} V \sigma}{AVt} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma v.$$

散射截面

对于末态为 n 体的散射过程,散射截面在理论计算中表达为

$$\sigma = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}2E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^{3}p_{i}}{(2\pi)^{3}2E_{i}} (2\pi)^{4} \delta^{(4)} \left(p_{\mathcal{A}}^{\mu} + p_{\mathcal{B}}^{\mu} - \sum_{i} p_{i}^{\mu}\right) |\mathcal{M}|^{2}.$$

与分宽度的计算公式类似,4 维 δ 函数体现能动量守恒,而 M 是散射过程的不变振幅,可以通过费曼图计算。

对于末态为两体的散射,质心系中截面表达式可以简化为

$$\sigma = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}2E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int d\Omega_1 \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{\mathrm{CM}}} |\mathcal{M}|^2.$$

其中 $d\Omega_1=\sin\theta_1d\theta_1d\phi_1$ 是第 1 个末态粒子的方位角积分元。假如初末态四个粒子的质量都相等,上式可以进一步简化为

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 E_{\rm CM}^2} \int d\Omega_1 |\mathcal{M}|^2.$$

Mandelstam 变量

在两体散射计算中常常使用如下洛伦兹不变的 Mandelstam 变量:

$$s = (p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad \mathbf{t} = (p_{\mathcal{A}} - p_1)^2 = (p_{\mathcal{B}} - p_2)^2,$$

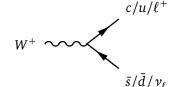
 $u = (p_{\mathcal{A}} - p_2)^2 = (p_{\mathcal{B}} - p_1)^2.$

它们满足 $s+t+u=m_{\mathcal{A}}^2+m_{\mathcal{B}}^2+m_1^2+m_{2}^2$ 。

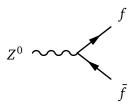
容易看出, $\sqrt{s} = E_{CM}$,而且 $s = (p_A + p_B)^2$ 的定义可以推广到任意 n 体末态,因此通常使用 \sqrt{s} 表示散射过程的<mark>质心能</mark>。

根据狭义相对性原理,物理定律在一切惯性参考系中具有相同形式。若一个过程能够在质心系中发生,则在其它惯性参考系中也能发生。利用质心系可以简便分析一个过程需要满足的运动学条件。衰变过程质心能为母粒子质量 m,根据能量守恒,发生衰变的运动学条件是 $m \ge \sum_i m_i$,即粒子只能向质量之和比它轻的其它粒子衰变。对于散射过程,能量守恒要求的运动学条件是 $\sqrt{s} \ge \sum_i m_i$,即散射过程质心能应大于末态粒子质量之和。

- W[±] 规范玻色子,质量 80.4 GeV,宽度 2.1 GeV
 - 弱衰变 $W^+ \rightarrow c\bar{s}/u\bar{d}$,分支比 67.4%
 - 弱衰变 $W^+ \rightarrow \tau^+ \nu_{\tau}$,分支比 11.4%
 - 弱衰变 $W^+ \rightarrow e^+ \nu_e$,分支比 10.7%
 - 弱衰变 $W^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$,分支比 10.6%

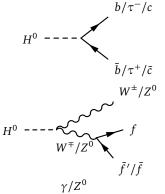


- ② Z⁰ 规范玻色子,质量 91.2 GeV,宽度 2.5 GeV
 - 弱衰变 $Z^0 \rightarrow u\bar{u}/d\bar{d}/c\bar{c}/s\bar{s}/b\bar{b}$,分支比 69.9%
 - 弱衰变 $Z^0 \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e / \nu_\mu \bar{\nu}_\mu / \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$,分支比 20%
 - 弱衰变 $Z^0 \rightarrow \tau^+ \tau^-$,分支比 3.37%
 - 弱衰变 $Z^0 \to \mu^+ \mu^-$,分支比 3.37%
 - 弱衰变 $Z^0 \to e^+e^-$, 分支比 3.36%



● Higgs 玻色子 H⁰, 质量 125 GeV, 预期宽度 4 MeV

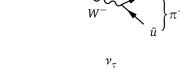
- $H^0 \rightarrow b\bar{b}$,预期分支比 58%
- $H^0 \to W^{\pm}W^{\mp *} (\to f\bar{f}')$, 预期分支比 21%
- $H^0 \rightarrow gg$,预期分支比 8.2%
- $H^0 \rightarrow \tau^+ \tau^-$,预期分支比 6.3%
- $H^0 \rightarrow c\bar{c}$,预期分支比 2.9%
- $H^0 \rightarrow Z^0 Z^{0*} (\rightarrow f\bar{f})$,预期分支比 2.6%
- $H^0 \rightarrow \gamma \gamma$, 预期分支比 0.23%
- $H^0 \rightarrow Z^0 \gamma$,预期分支比 0.15%

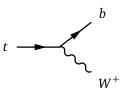


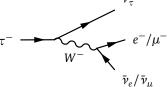
$$H^0 - - - t$$
 t
 t
 t
 t
 g

$$W = - - \leftarrow W \qquad W \qquad Y$$

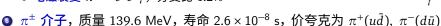
- **④** μ 子,质量 105.66 MeV,寿命 2.2 × 10⁻⁶ s
 - 弱衰变 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$,分支比 $\simeq 100\%$
- **⑤** τ 子,质量 1.777 GeV,寿命 2.9×10⁻¹³ s
 - 弱衰变 $\tau^- \rightarrow$ 强子 + ν_{τ} ,分支比 64.8%
 - BR($\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$) = 25.5%, BR($\tau^- \to \pi^- \nu_{\tau}$) = 10.8%
 - 弱衰变 $\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$,分支比 17.8%
 - 弱衰变 $\tau^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$,分支比 17.4%
- - 弱衰变 $t \rightarrow bW^+$,分支比 $\simeq 100\%$



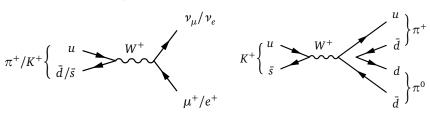




- σ 介子,质量 135.0 MeV,寿命 8.5 × 10^{-17} s,价夸克为 $(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$
 - 电磁衰变 $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$,分支比 98.8%
 - 电磁衰变 $\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma$,分支比 1.2%

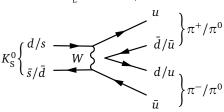


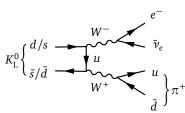
- 弱衰变 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$,分支比 99.9877%
- 弱衰变 $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$,分支比 0.0123%
- **②** K[±] 介子,质量 493.7 MeV,寿命 1.2 × 10⁻⁸ s,价夸克为 K⁺(us̄), K[−](sū)
 - 弱衰变 $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$,分支比 63.6%
 - 弱衰变 $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$,分支比 20.7%



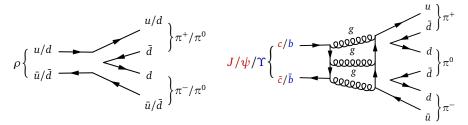
中性介子 $K^0(d\bar{s})$ 和 $\bar{K}^0(s\bar{d})$ 互为正反粒子,质量均为 497.6 MeV。在 CP 变换下, $K^0 \longleftrightarrow -\bar{K}^0$,它们可以混合成两个不同的态:CP 为偶的态 $K^0_S = (K^0 - \bar{K}^0)/\sqrt{2}$ 和 CP 为奇的态 $K^0_L = (K^0 + \bar{K}^0)/\sqrt{2}$ 。弱作用中的 CP 守恒允许 K_S 衰变成一对 π 介子,却禁止 K_L 衰变成一对 π 介子。这导致 K_S 比 K_L 衰变得更快,寿命更短。

- **②** K_S^0 介子,CP = +,质量 497.6 MeV,寿命 9.0×10^{-11} s
 - 弱衰变 $K_{\rm S}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$,分支比 69.2%
 - 弱衰变 $K_S^0 \to \pi^0 \pi^0$,分支比 30.7%
- **①** K_L^0 介子,CP = -,质量 497.6 MeV,寿命 5.1×10^{-8} s
 - 弱衰变 $K_L^0 \to \pi^{\pm} e^{\mp} \nu_e / \pi^{\pm} \mu^{\mp} \nu_\mu$,分支比 67.6%
 - 弱衰变 $K_{\rm I}^0 \to \pi^0 \pi^0 \pi^0 / \pi^+ \pi^- \pi^0$, 分支比 32.1%

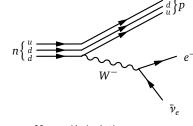




- - 强衰变 $\rho \rightarrow \pi^+\pi^-/\pi^0\pi^0$,分支比 $\simeq 100\%$
- **3.097** GeV,宽度 92.9 keV,价夸克为 $c\bar{c}$
 - 强衰变 $J/\psi \rightarrow ggg \rightarrow$ 强子,分支比 64.1%
 - 电磁衰变 $J/\psi \to \gamma^* \to 强子,分支比 13.5\%$
 - 电磁衰变 $J/\psi \to e^+e^-/\mu^+\mu^-$,分支比 11.9%
- - 强衰变 Y→ggg→强子,分支比81.7%
 - 电磁衰变 $\Upsilon \rightarrow e^+e^-/\mu^+\mu^-/\tau^+\tau^-$,分支比 7.46%



- **⑤** 中子 *n*,质量 939.6 MeV,寿命 880 s,价夸克为 *udd*
 - 弱衰变 $n \rightarrow pe^-\bar{\nu}_e$,分支比 $\simeq 100\%$
- Λ⁰ 重子, 质量 1.116 GeV, 寿命
 2.6 × 10⁻¹⁰ s, 价夸克为 uds
 - 弱衰变 $\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-$,分支比 63.9%
 - 弱衰变 $\Lambda^0 \rightarrow n\pi^0$,分支比 35.8%



- \bigcirc Σ^+ 重子,质量 1.189 GeV,寿命 8.0 × 10^{-11} s,价夸克为 uus
 - 弱衰变 $\Sigma^+ \to p\pi^0$,分支比 51.6%
 - 弱衰变 $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$,分支比 48.3%
- $oldsymbol{\omega}$ Σ^- 重子,质量 1.197 GeV,寿命 1.5 imes 10^{-10} s,价夸克为 dds
 - 弱衰变 $\Sigma^- \rightarrow n\pi^-$,分支比 99.85%
- - 电磁衰变 $\Sigma^0 \to \Lambda^0 \gamma$,分支比 $\simeq 100\%$
- 🚇 Δ⁰(1232) **重子**,质量 1.232 GeV,宽度 117 MeV,价夸克为 udd
 - 强衰变 $\Delta^0 \rightarrow n\pi^0/p\pi^-$,分支比 99.4%