

# 数学物理方法作业集

潘逸文\*, 余钊焕†

中国广州中山大学物理学院

September 25, 2018

## 简介

2018 年秋季数学物理方法 (面向 17 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布, 本文  
件也会每周更新, 可在 余钊焕教学主页 <http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html> 找到。

---

\*Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

†Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

## 1 第一周 (9 月 11 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a) \frac{i}{\pi}, \quad (b) 1 + \sqrt{3}i, \quad (c) 1 + e^{\frac{9\pi i}{14}} e^{\frac{-\pi i}{7}}, \quad (1.1)$$

2. 设点集  $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ , 其中  $R > 0$ . 求解最大的  $N \in \mathbb{N}$ , 使得对于任意  $S$  的内点  $z$ ,  $z^N$  都还是内点。写明推理。

3. 考虑点集  $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$ , 其中  $R > 0$ .  $S$  是否区域? 是否单连通?

## 2 第二周 (9 月 18 日课上交)

1. 用代数式 (即  $x + iy$  的形式) 表达以下复数, 其中  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i$  是虚数单位,

$$(a) a^i, \text{ 其中 } a > 0, \quad (b) i^{a+bi}, \quad (c) \sin(a + ib). \quad (2.1)$$

2. 设  $u(x, y) = e^x \sin y$ , 而且令  $w = u(x, y) + iv(x, y)$  为一个解析函数。求  $w$  关于  $z = x + iy$  的表达式。

3. 设  $f$  为区域  $D$  内解析函数, 同时, 其值域是  $\mathbb{R}$  的子集。求证  $f$  是常数函数。

## 3 第三周 (9 月 25 日课上交)

1. 计算  $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z} dz$  和  $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z} dz$ , 其中  $C_1$  和  $C_2$  分别是上半单位圆 (逆时针方向) 和下半单位圆 (顺时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (3.1)$$

3. 设复变函数  $f$  在区域  $D$  内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续,  $G \subset D$  是其子区域并有  $G \cup \partial G \subset D$ . 证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) d\bar{z} dz, \quad (3.2)$$

其中面积元  $d\bar{z} dz = 2i dx dy$ 。

## 4 第四周 (10 月 9 日交)

1. 计算围道积分

$$\oint_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.1)$$

2. 计算围道积分,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.2)$$

3. 考虑级数  $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$ , 其中  $r_k = (-1)^{k^2}$ ,  $c_k = (-1)^k \frac{e^{ik\theta}}{k}$ 。分情况  $\theta = 0$  和  $\theta = \pi$  讨论级数是否收敛, 是否绝对收敛, 给出简要说明。

4. 讨论下面幂级数是否收敛, 若收敛, 给出收敛半径

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n. \quad (4.3)$$