粒子物理简介

第二节　粒子运动学、衰变和散射

余钊焕

中山大学物理学院

https://yuzhaohuan.gitee.io

吉林大学

2021 年 5 月

能量、动量和质量

粒子物理学常常研究高速运动的粒子，需要在**狭义相对论**框架下描述粒子的运动。平直时空中的**闵可夫斯基度规**通常约定为

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

爱因斯坦求和约定

省略求和符号

对重复的指标求和

粒子的**能量** E 和 **3 维动量 $\mathbf{p}$** 构成 **4 维动量** $p^\mu = (E, \mathbf{p})$。p^μ 是一个洛伦兹逆变矢量，对应的协变矢量为 $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = (E, -\mathbf{p})$。$p^\mu$ 的内积

$$p^2 \equiv p \cdot p \equiv p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$$

是一个**洛伦兹不变量**，即在洛伦兹变换下不变，在所有惯性系中有相同的值。

- m 是粒子的**（静止）质量**
- 自由运动的粒子满足**质壳条件** $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$，即 $E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$
- 粒子的 **3 维速度**定义为 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$

洛伦兹变换

💡 **洛伦兹变换**将一个洛伦兹矢量在一个**惯性参考系** Σ 中的测量值变换成它在另一个**惯性参考系** Σ' 中的测量值

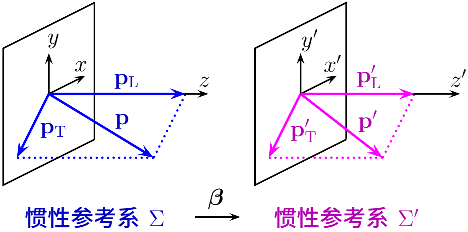
✏️ 设 Σ' 系相对于 Σ 系的运动速度为 $\boldsymbol{\beta}$，粒子在 Σ 系中的能量和动量分别为 E 和 $\mathbf{p}$，记 $\mathbf{p}$ 在平行于 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的分量为 p_L，在垂直于 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的分量为 $\mathbf{p}_\mathrm{T}$，则粒子在 Σ' 系中的能量和动量为

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_\mathrm{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma|\boldsymbol{\beta}| \\ -\gamma|\boldsymbol{\beta}| & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_\mathrm{L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}'_\mathrm{T} = \mathbf{p}_\mathrm{T},$$

其中洛伦兹因子 $\gamma = (1 - |\boldsymbol{\beta}|^2)^{-1/2}$

✨ 可以验证，$p'^2 = p^2$，即 4 维动量的内积在洛伦兹变换下不变

粒子能量 E 与质量 m 的关系为 $E = \gamma m$，这里 $\gamma = (1 - |\mathbf{v}|^2)^{-1/2}$。



动尺缩短和动钟延缓

时空坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 是洛伦兹矢量，服从洛伦兹变换

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma|\boldsymbol{\beta}| \\ -\gamma|\boldsymbol{\beta}| & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_{\mathrm{T}}.$$

引起两个相对论效应

1. **运动的尺子变短**：从静止参考系 Σ 中观察固定在运动参考系 Σ' 中的一个物体，则它在平行于 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的长度 L' 变短为 $L = L'/\gamma < L'$
2. **运动的时钟变慢**：运动参考系 Σ' 中的时间间隔 $\Delta t'$ 比静止参考系 Σ 中的时间间隔 Δt 长，满足 $\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t$

μ 子质量 $m = 106$ MeV，寿命 $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ s；对于能量 $E = 106$ GeV 的 μ 子，$\gamma = E/m = 10^3$，因而飞行寿命会延长到 $\tau' = 2.2 \times 10^{-3}$ s

$\pi^\pm$ 介子质量为 140 MeV，寿命为 2.6×10^{-8} s，能量为 1.4 GeV 时从产生到衰变平均可以飞行七十多米，能量为 14 GeV 时则可达到七百多米

质心系

对粒子能动量的实验测量是在实验室参考系中进行的；不过，对于多粒子系统，在质心参考系中描述粒子运动状态通常会更加简单

质心系定义为使系统总动量为零的参考系，满足 $\mathbf{p}_{\mathrm{CM}} \equiv \sum_i \mathbf{p}_i^{\mathrm{CM}} = \mathbf{0}$

系统的质心系能量（质心能）$E_{\mathrm{CM}} \equiv \sum_i E_i^{\mathrm{CM}}$ 是一个洛伦兹不变量：

$$p_{\mathrm{CM}}^\mu \equiv (E_{\mathrm{CM}}, \mathbf{p}_{\mathrm{CM}}), \quad p_{\mathrm{CM}}^2 = \Big(\sum_i E_i^{\mathrm{CM}}\Big)^2 - \Big(\sum_i \mathbf{p}_i^{\mathrm{CM}}\Big)^2 = \Big(\sum_i E_i^{\mathrm{CM}}\Big)^2 = E_{\mathrm{CM}}^2$$

- 系统的质心系总能量 E_{CM} 是激发粒子体系内部相互作用的有效能量
- 几个粒子的总质心能也称为它们的不变质量，$m_{\mathrm{inv}} = E_{\mathrm{CM}}$；由于能动量守恒，如果几个粒子是同一个母粒子的衰变产物，m_{inv} 就是母粒子的质量
- 两个粒子碰撞时，质心系中两个入射粒子动量大小相同，方向相反；质心系中出射粒子的角度分布是轴对称的，以任一入射粒子的动量方向为轴
- 标量粒子衰变所产生的次级粒子在质心系中呈球对称分布；若母粒子自旋不为零，次级粒子在质心系中则呈轴对称分布，以母粒子自旋方向为轴

固定靶实验和对撞实验

🎯 **固定靶实验**用粒子束流轰击固定靶来发生相互作用。实验室系中，记静止靶粒子 $\mathcal{A}$ 的动量为 $p^\mu_{\mathcal{A}} = (m_{\mathcal{A}}, \mathbf{0})$，入射粒子 $\mathcal{B}$ 的动量为 $p^\mu_{\mathcal{B}} = (E_{\mathcal{B}}, \mathbf{p}_{\mathcal{B}})$，则

$$E^2_{\mathrm{CM}} = (p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = p^2_{\mathcal{A}} + p^2_{\mathcal{B}} + 2p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}} = m^2_{\mathcal{A}} + m^2_{\mathcal{B}} + 2m_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}$$

👉 对于高能入射粒子，$m_{\mathcal{A}}, m_{\mathcal{B}} \ll E_{\mathcal{B}}$，质心能 $E_{\mathrm{CM}} \simeq \sqrt{2m_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}}$

💥 **对撞实验**用两个粒子束流相撞来发生相互作用。目前已有 e^+e^-、pp、$p\bar{p}$ 和 $e^\pm p$ 等束流不同的对撞机。设粒子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 沿相反方向入射并对撞，若能量远高于质量，则 $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| \simeq E_{\mathcal{A}}$，$|\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| \simeq E_{\mathcal{B}}$，$p^2_{\mathcal{A}} \simeq p^2_{\mathcal{B}} \simeq 0$，在实验室系中可得

$$E^2_{\mathrm{CM}} = p^2_{\mathcal{A}} + p^2_{\mathcal{B}} + 2p_{\mathcal{A}} \cdot p_{\mathcal{B}} \simeq 2E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} + 2|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}||\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| \simeq 4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}$$

👉 质心能 $E_{\mathrm{CM}} \simeq \sqrt{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}}}$

费米实验室的 Tevatron 是 $p\bar{p}$ 对撞机，$E_p = E_{\bar{p}} \simeq 1$ TeV，$E_{\mathrm{CM}} \simeq 2$ TeV。若改为以 p 为靶的打靶实验，需要入射 $\bar{p}$ 能量为 $E_{\bar{p}} \simeq 2000$ TeV 才能达到相同的质心能。由此可见，**对撞实验远比固定靶实验更能有效地利用能量。**

末态相空间

- 衰变和散射过程可包含多个末态粒子，其能动量可取运动学允许的任意值
- 计算衰变宽度和散射总截面要**对所有末态粒子的动量相空间积分**
- 单个粒子的**洛伦兹不变动量相空间体积元**为 $d^4p/(2\pi)^4 = dp^0 d^3p/(2\pi)^4$
- 末态粒子应满足**质壳条件**且**能量为正**
- 考虑到这两个限制，体积元变成 $\dfrac{dp^0 d^3p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta((p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2)\theta(p^0)$
- 对 p^0 积分，利用恒等式 $\delta(f(x)) = \sum_i \dfrac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ (x_i 为 $f(x)$ 的根)，可得

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{dp^0}{2\pi} 2\pi\delta((p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2)\theta(p^0) = \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int dp^0 \frac{\delta(p^0 - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2})}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}$$

$$= \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}$$

- 因此，n **体末态相空间不变体积元**为 $d\Pi_n = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$

衰变

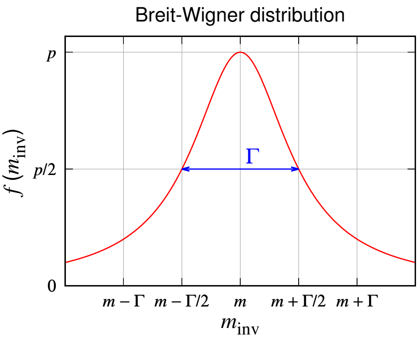
💥 不稳定粒子的**衰变**是一个泊松过程

✏️ 在静止参考系中，粒子衰变前存活的时间 $\geq t$ 的概率由**指数分布**给出，

$$P(t) = e^{-t/\tau} = e^{-\Gamma t},$$

✨ τ 是粒子**寿命**，Γ 是粒子**衰变宽度**

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\tau}$$



🌗 不稳定粒子的质量并不是确定的值，而是一个分布，即衰变产物不变质量 m_{inv} 的分布，服从 **Breit–Wigner 分布**

$$f(m_{\text{inv}}) = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(m_{\text{inv}}-m)^2+\Gamma^2/4}$$

🌓 分布的中心值 m 是通常所说的粒子**质量**，分布的半峰全宽是粒子宽度 Γ

分支比和分宽度

一个粒子可能有多种衰变过程。在一次衰变中，某个衰变过程 j 发生的概率称为它的**分支比** $\mathcal{B}_j$。定义衰变过程 j 的**分宽度**为 $\Gamma_j = \Gamma\mathcal{B}_j$，则

$$\sum_j \mathcal{B}_j = \frac{1}{\Gamma}\sum_j \Gamma_j = 1, \quad \text{即}\ \Gamma = \sum_j \Gamma_j$$

对于末态为 n 体的衰变过程 j，分宽度在理论计算中表达为

$$\Gamma_j = \frac{1}{2m}\int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p^\mu - \sum_i p_i^\mu\Big)\,|\mathcal{M}_j|^2$$

这里 m 和 p^μ 是母粒子的质量和 4 动量，4 维 δ 函数体现能动量守恒

不变振幅 $\mathcal{M}_j$ 是发生 j 过程的概率振幅，在洛伦兹变换下不变

一个粒子物理理论模型会定义粒子类型和拉格朗日密度量（**拉氏量**），由此给出一套**费曼规则** 👉 利用这套规则画出**费曼图**来表示所有可能发生的衰变和散射过程 👉 根据**量子场论**知识，通过费曼图计算不变振幅

寿命和衰变长度

寿命长于 10^{-10} s 的粒子

- $\mu^\pm$，$\pi^\pm$ 介子，$K^\pm$ 介子，中子 n，Λ^0 重子，K_L^0 介子，……
  - 相对稳定，产生后能够飞行较长距离

寿命在 $10^{-12} - 10^{-10}$ s 之间的粒子

- $\tau^\pm$，K_S^0 介子，D^0 介子，$D^\pm$ 介子，B^0 介子，$B^\pm$ 介子，……
  - 产生后能够飞行一段探测器可分辨的距离

寿命短于 10^{-12} s 的粒子

- $W^\pm$，Z^0，t，H^0，π^0 介子，ρ^0 介子，$\rho^\pm$ 介子，……

- **平均衰变长度** $d = \beta\gamma\tau \simeq \gamma\left(\dfrac{\tau}{10^{-12}\ \mathrm{s}}\right) 300\ \mu\mathrm{m}$，　$\gamma = \dfrac{E}{m} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

> $\pi^\pm$ 介子质量 $m = 140$ MeV，寿命 $\tau = 2.6\times 10^{-8}$ s，能量 $E = 1.4$ GeV 时 $\gamma = 10$，平均衰变长度 $d \simeq 10\times(2.6\times10^4)\times(3\times10^{-4}\ \mathrm{m}) = 78$ m

散射

💥 **散射**是两个粒子通过碰撞发生反应的过程

🌓 **弹性散射**：碰撞粒子之间只有动量交换，类型和内部状态没有发生改变

🌗 **非弹性散射**：粒子内部状态有所改变或转化为其它粒子

🌙 描述散射过程本质的物理量是**散射截面** σ，它是粒子间相互作用的有效面积，表征相互作用的强弱；常用单位是**靶**，记作 b，$1\ \mathrm{b} = 10^{-28}\ \mathrm{m}^2$

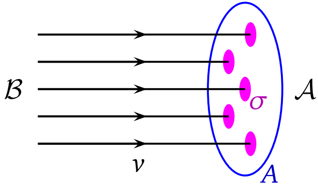
🍡 $1\ \mathrm{pb} = 10^{-36}\ \mathrm{cm}^2 = 2.568 \times 10^{-9}\ \mathrm{GeV}^{-2}, \quad 1\ \mathrm{GeV}^{-2} = 3.894 \times 10^{8}\ \mathrm{pb}$

✏️ 对于末态为 n 体的散射过程，散射截面在理论计算中表达为

$$\sigma = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}2E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(p_{\mathcal{A}}^{\mu} + p_{\mathcal{B}}^{\mu} - \sum_i p_i^{\mu}\Big) |\mathcal{M}|^2$$

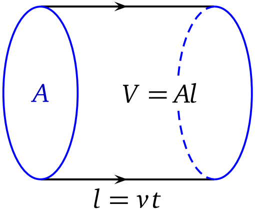
✨ 与分宽度的计算公式类似，**4 维 δ 函数**体现能动量守恒，而 $\mathcal{M}$ 是散射过程的**不变振幅**，可以通过费曼图计算

散射截面与相互作用率



- 设两束粒子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 发生散射，各自含有 $N_{\mathcal{A}}$ 和 $N_{\mathcal{B}}$ 个粒子，$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 相互作用的**散射截面**为 σ，粒子束相互投射的区域横截面积为 A，则相互作用发生的次数为

$$N = N_{\mathcal{A}} N_{\mathcal{B}} \frac{\sigma}{A}$$



- 若两个粒子束的数密度为 $n_{\mathcal{A}}$ 和 $n_{\mathcal{B}}$，彼此间相对速度为 $v = |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$，则在 t 时间内相互投射的区域体积为 $V = Avt$

- 由于 $N_{\mathcal{A}} = n_{\mathcal{A}} V$，$N_{\mathcal{B}} = n_{\mathcal{B}} V$，单位时间单位体积内的**相互作用率**为

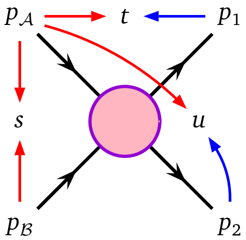
$$R = \frac{N}{Vt} = \frac{1}{Vt} \frac{n_{\mathcal{A}} V n_{\mathcal{B}} V \sigma}{A} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma \frac{V}{At} = n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \sigma v$$

Mandelstam 变量

两体散射常用到洛伦兹不变的 **Mandelstam 变量**

$s \equiv (p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}})^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad t \equiv (p_{\mathcal{A}} - p_1)^2 = (p_{\mathcal{B}} - p_2)^2$

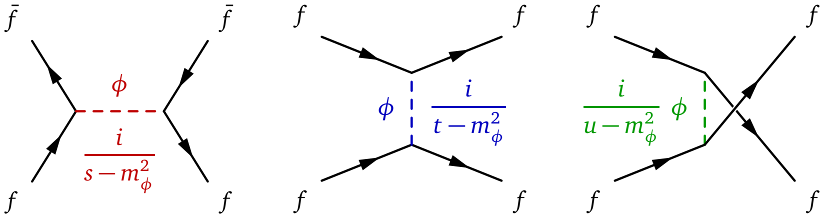
$u \equiv (p_{\mathcal{A}} - p_2)^2 = (p_{\mathcal{B}} - p_1)^2, \quad s + t + u = \sum_{i=\mathcal{A},\mathcal{B},1,2} m_i^2$



s 的定义可推广到任意 n 体末态，且 $\sqrt{s} = E_{\text{CM}}$

习惯上使用 $\sqrt{s}$ 表示散射过程的**质心能**

当两体散射费曼图只包含一条内线时，内线传播子的动量对应于 s、t 或 u，相应地称之为 s **通道**、t **通道**或 u **通道**的费曼图

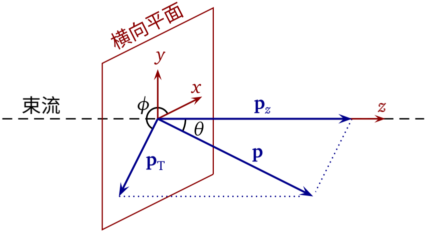


运动学条件

- 根据狭义相对性原理，物理定律在一切惯性参考系中具有相同形式
- 利用质心系可以方便地分析一个过程需要满足的运动学条件
- 衰变过程质心能为母粒子质量 m
- 根据能量守恒，发生衰变的运动学条件是 $m > \sum_i m_i$
- 粒子只能衰变成质量之和比它轻的末态粒子
- $m_e = 0.511\ \text{MeV}$，$m_\mu = 106\ \text{MeV}$，$m_{\nu_e} \simeq m_{\nu_\mu} \simeq 0$
  - $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ 可以发生，$e^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_e$ 不能发生
    - μ 子是**不稳定**粒子，电子是**稳定**粒子
- 对于散射过程，能量守恒要求的运动学条件是 $\sqrt{s} > \sum_i m_i$
- 散射过程质心能应大于末态粒子质量之和
- 当 $\sqrt{s} > 2m_\mu$ 时，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程才能发生

对撞机实验坐标系

- 以束流方向为 z 轴，视作**纵向**
- 将粒子的三维动量 $\mathbf{p}$ 分解为**纵向动量** $p_z \equiv |\mathbf{p}_z|$ 和**横向动量** $p_\mathrm{T} \equiv |\mathbf{p}_\mathrm{T}|$
- $\mathbf{p}$ 的方向由**极角** $\theta \in [0, \pi]$ 和**方位角** $\phi \in [0, 2\pi)$ 描述
- 通常用**赝快度** $\eta \in (-\infty, \infty)$ 代替 θ



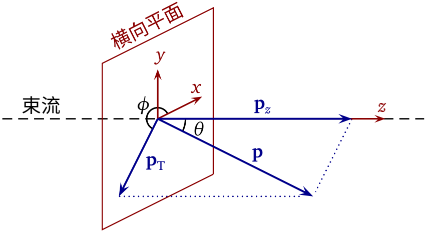
$$\eta \equiv -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right), \quad \theta = 2\tan^{-1} e^{-\eta}, \quad -\eta = -\ln\left(\tan\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

η	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5	10
θ	90°	62.5°	40.4°	25.2°	15.4°	9.4°	5.7°	2.1°	0.77°	0.005°

- 在壳粒子的四维动量 $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$ 可以用变量集 $\{m, p_\mathrm{T}, \eta, \phi\}$ 表达
- 两个粒子动量之间的**角间距**用 $\Delta R = \sqrt{(\phi_1 - \phi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}$ 描述
- p_T 较大的粒子更可能来自**硬散射** ☞ 以 p_T 大小为粒子或喷注 (jet) **排序**

快度

引入**快度** $\xi \equiv \tanh^{-1}\dfrac{p_z}{E}$，它是将 p_z 变换为零的洛伦兹变换的速度参数



质量 $m=0$ $E=|\mathbf{p}|$

$$\cos\theta = \frac{p_z}{|\mathbf{p}|} = \frac{p_z}{E} = \tanh\xi$$

$$\eta = -\ln\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\tanh\xi}{1-\tanh\xi} = \frac{1}{2}\ln\frac{\cosh\xi+\sinh\xi}{\cosh\xi-\sinh\xi} = \frac{1}{2}\ln e^{2\xi} = \xi$$

对于**相对论性**粒子，赝快度 η 是快度 ξ 的**良好近似**

引入**横向能量** $E_{\mathrm{T}} \equiv \sqrt{m^2+p_{\mathrm{T}}^2}$ $E = E_{\mathrm{T}}\cosh\xi,\quad p_z = E_{\mathrm{T}}\sinh\xi$

若一个粒子衰变为粒子 1 和粒子 2，则它的质量 m 可以表达为

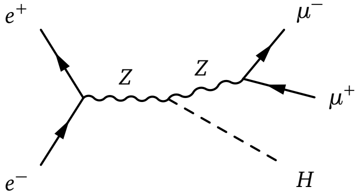
$$m = \sqrt{m_1^2+m_2^2+2[E_{1\mathrm{T}}E_{2\mathrm{T}}\cosh(\xi_1-\xi_2)-\mathbf{p}_{1\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}_{2\mathrm{T}}]}$$

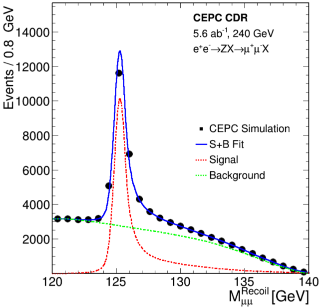
运动学变量：不变质量、反冲质量

- 在对撞机实验中，经常有多个过程贡献到**相同**的末态
- 通过构造多种各具特色的运动学变量，可以在数据分析中区分不同过程
- 不变质量 $m_{\mathrm{inv}} \equiv \sqrt{(p_1+p_2+\cdots+p_i)^2}$ 用于从衰变产物重建母粒子质量
- 在 e^+e^- 对撞机上，入射粒子的四维动量是确定的，可以定义反冲质量
- 对于 $e^+ + e^- \to 1+2+\cdots+n$ 过程，粒子 1 的反冲质量定义为

$$m_{1,\mathrm{rec}} \equiv \sqrt{[p_{e^+}+p_{e^-}-(p_2+\cdots+p_n)]^2}$$

- 在 e^+e^- 对撞机上可以利用伴随产生的粒子来测量粒子质量和产生截面

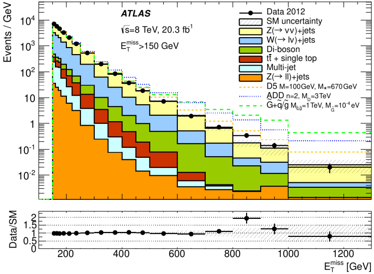




[CEPC CDR Vol. 2, arXiv:1811.10545]

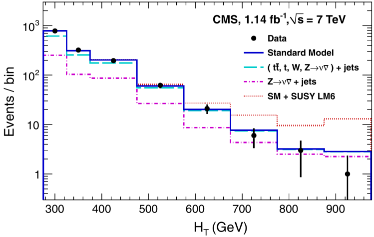
运动学变量：$\not{E}_{\mathrm{T}}$，H_{T}，m_{eff}

- 对撞机上的探测器**不能**测量**中微子**和假想的**暗物质粒子**，它们的存在会导致测量到的横向总动量非零，可用所有可见粒子 i 的横向动量定义**横向丢失动量** $\not{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}} \equiv -\sum_i \mathbf{p}_{\mathrm{T}}^i$ 和**横向丢失能量** $\not{E}_{\mathrm{T}} \equiv |\not{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}}|$（亦记为 $E_{\mathrm{T}}^{\mathrm{miss}}$），以表征**不可见粒子**的能量标度



[ATLAS Coll., arXiv:1502.01518, EPJC]

- 喷注 j_i 的横向动量的**标量和** $H_{\mathrm{T}} \equiv \sum_i p_{\mathrm{T}}^{j_i}$ 表征硬散射过程中喷注的能量标度



[CMS Coll., arXiv:1109.2352, PRL]

- **有效质量** $m_{\mathrm{eff}} \equiv \not{E}_{\mathrm{T}} + H_{\mathrm{T}}$ 表征硬散射过程中喷注加不可见粒子的能量标度

运动学变量：m_{T}

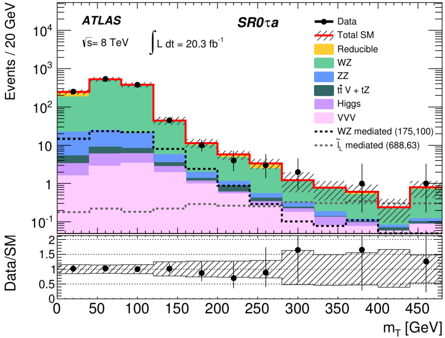
- 考虑像 $W \to \ell\nu_\ell$ 这样的**半不可见衰变**过程 $P \to v + i$，其中 v 是可见粒子，i 是不可见粒子，定义**横向质量** $m_{\mathrm{T}} \equiv \sqrt{m_v^2 + m_i^2 + 2(E_{\mathrm{T}}^v E_{\mathrm{T}}^i - \mathbf{p}_{\mathrm{T}}^v \cdot \mathbf{p}_{\mathrm{T}}^i)}$，其中 $E_{\mathrm{T}}^{v,i} \equiv \sqrt{m_{v,i}^2 + (p_{\mathrm{T}}^{v,i})^2}$，$\mathbf{p}_{\mathrm{T}}^i = \not{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}}$，则由 $\cosh x \geq 1$ 得

$$m_{\mathrm{T}} \leq \sqrt{m_v^2 + m_i^2 + 2[E_{\mathrm{T}}^v E_{\mathrm{T}}^i \cosh(\xi_v - \xi_i) - \mathbf{p}_{\mathrm{T}}^v \cdot \mathbf{p}_{\mathrm{T}}^i]} = m_P$$

- P 的质量 m_P **约束了** m_{T} 的值

- 在实践中，m_v 通常很小，m_i 要么为零要么未知，因此经常采用**近似**定义 $m_{\mathrm{T}} = \sqrt{2(p_{\mathrm{T}}^v \not{E}_{\mathrm{T}} - \mathbf{p}_{\mathrm{T}}^v \cdot \not{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}})}$

- 对于只包含一个不可见粒子的**三体衰变**过程（如 $t \to b\ell^+\nu_\ell$），可以先将两个可见粒子的横向动量叠加起来，然后再定义 m_{T}



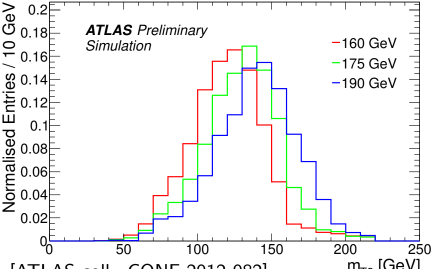
[ATLAS Coll., arXiv:1402.7029, JHEP]

运动学变量：m_{T2}

- 对于**双重半不可见衰变**过程，可以利用 m_{T2} **变量**
- 考虑一对正反粒子 $P\bar{P}$ 的衰变过程 $P(\to v_1 i) + \bar{P}(\to v_2 \bar{i})$，其中 v_1 和 v_2 是可见粒子，i 和 $\bar{i}$ 是不可见粒子，定义 [Lester & Summers, arXiv:hep-ph/9906349, PLB]

$$m_{\mathrm{T2}}(\mu_i) = \min_{\mathbf{p}_{\mathrm{T}}^1 + \mathbf{p}_{\mathrm{T}}^2 = \not{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}}} \left\{ \max\left[m_{\mathrm{T}}(\mathbf{p}_{\mathrm{T}}^{v_1}, \mathbf{p}_{\mathrm{T}}^1; m_{v_1}, \mu_i), m_{\mathrm{T}}(\mathbf{p}_{\mathrm{T}}^{v_2}, \mathbf{p}_{\mathrm{T}}^2; m_{v_2}, \mu_i) \right] \right\}$$

- μ_i 是 i 粒子的测试质量，经常设为零
- 如果 μ_i 等于 i 粒子的真实质量 m_i，就可以推出 $m_{\mathrm{T2}} \leq m_P$



[ATLAS coll., CONF-2012-082]