数学物理方法作业集

潘逸文[*], 余钊焕[†]

中国广州中山大学物理学院

December 21, 2018

简介

2018 年秋季数学物理方法 (面向 17 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布，本文件也会每周更新，可在 **余钊焕教学主页** `http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html` 找到。

[*]Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

[†]Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 11 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a)\ \frac{i}{\pi}, \qquad (b)\ 1+\sqrt{3}i\ , \qquad (c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}}, \tag{1.1}$$

2. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$，其中 $R > 0$。求解最大的 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 S 的内点 z，z^N 都还是内点。写明推理。

3. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$，其中 $R > 0$。S 是否区域？是否单连通？

2 第二周 (9 月 18 日课上交)

1. 用代数式 (即 $x+iy$ 的形式) 表达以下复数，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，i 是虚数单位，

$$(a)\ a^i, \text{其中 } a>0, \qquad (b)\ i^{a+bi}, \qquad (c)\ \sin(a+ib)\ . \tag{2.1}$$

2. 设 $u(x,y) = e^x \sin y$，而且令 $w = u(x,y) + iv(x,y)$ 为一个解析函数。求 w 关于 $z = x+iy$ 的表达式。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数，同时，其值域是 $\mathbb{R}$ 的子集。求证 f 是常数函数。

3 第三周 (9 月 25 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z} dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z} dz$，其中 C_1 和 C_2 分别是上半单位圆 (逆时针方向) 和下半单位圆 (顺时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz\ . \tag{3.1}$$

3. 设复变函数 f 在区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续，$G \subset D$ 是其子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z,\bar{z}) d\bar{z} dz\ , \tag{3.2}$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$。

4 第五周 (10 月 9 日交)

1. 计算围道积分

$$\oint_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \qquad C=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\ \}. \tag{4.1}$$

2. 计算围道积分, $n=1,2,3,\ldots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n}\frac{dz}{z}\ , \qquad C=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\ \}\ . \tag{4.2}$$

3. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$, 其中 $r_k=(-1)^{k^2}$, $c_k=(-1)^k\frac{e^{ik\theta}}{k}$。分情况 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 讨论级数是否收敛，是否绝对收敛，给出简要说明。

4. 讨论下面幂级数是否收敛，若收敛，给出收敛半径

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}z^n\ , \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n z^n\ . \tag{4.3}$$

5 第六周 (10 月 16 日交)

1. 考虑二元实函数 $u(x,y)$

$$u(x,y)\equiv\frac{x^2-y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}\ . \tag{5.1}$$

设 $u(x,y)$ 是在某区域内解析的复变函数 $f(z=x+iy)$ 的实部。

(1) 用共轭调和函数方法求 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$，并写出函数 $f(z)$ 关于 $z=x+iy$ 的表达式；

(2) 指出 $f(z)$ 的奇点以及所属分类；

(3) 分别以 $z=0$, $z=1$, $z=-1$ 为展开中心，作 Laurent 或 Taylor 展开。指出所得级数的收敛区域或收敛半径。

2. 考虑复变函数

$$f(z)\equiv\frac{z^n}{z-1}\ , \qquad n\in\mathbb{N}\ . \tag{5.2}$$

(1) 列举 $f(z)$ 以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域；

(2) 以原点为展开中心，在上述每一个解析区域内写出 $f(z)$ 的 Laurent 或 Taylor 展开 $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k z^k$，并比较展开系数 $\lambda_{k\geq 0}$ 与 $f^{(k)}(0)/k!$ 是否相等 (可为一般 n 和 k 计算通项然后比较，也可取 $n=2$，$k=1,2,3$)。

6 第七周 (10 月 23 日交)

1. 计算下面函数在 $z=0$ 的留数

$$(a)\ \frac{\cos z}{z^3}\ , \qquad (b)\ \frac{e^z}{z^3}\ . \tag{6.1}$$

2. 计算下面函数在指定奇点的留数

$$(a)\ \frac{1}{\sinh \pi z}, \quad z=ni,\ n\in\mathbb{Z}\ , \qquad (b)\ \frac{e^z}{z^2-1}, \quad z=1\ . \tag{6.2}$$

3. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \oint_{|z|=\rho>1}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz\ , \qquad (b)\ \oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^{2n}}dz\ , n=1,2,\ldots\ . \tag{6.3}$$

4. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx,\ a>0\ , \qquad (b)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2}dx\ . \tag{6.4}$$

7 第八周 (10 月 30 日交)

1. 弦在阻尼介质中振动，t 时刻 x 处单位长度所受阻力为

$$F(x,t)=-R\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{7.1}$$

其中 R 称为阻力系数。试推导弦在该阻尼介质中的波动方程。

2. 弹性均匀细杆，$x=0$ 端固定，$x=l$ 端被拉长至 $x=l+d$ 并保持静止（d 不超过弹性限度），$t=0$ 时突然放开 $x=l$ 端，写出杆作纵振动的定解问题。

3. 混凝土浇灌后逐渐放出水化热，放热速率正比于当时尚储存着的水化热密度 Q，即

$$\frac{dQ}{dt}=-\beta Q. \tag{7.2}$$

假设混凝土的热导率 k 是常数，试推导浇灌后混凝土内的热传导方程。

8 第九周（11 月 6 日交）

1. 考虑以下定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad 0<x<5, \quad t>0 \tag{8.1}$$

$$u(0,t)=0, \qquad u(5,t)=0, \qquad t\geq 0 \tag{8.2}$$

$$u\Big|_{t=0} = 4\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) - 3\sin(5\pi x)\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \le x \le 5\ . \tag{8.3}$$

(1a) 考虑变量分离的特殊解 $u = X(x)T(t)$，写出相应 X，T 的本征问题，并结合边界条件求解 X 的本征问题。

(1b) 求解 T，并写下一般解。

(1c) 利用初始条件确定一般解的系数。

2. 考虑以下定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ , \qquad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \tag{8.4}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0, \qquad t \ge 0 \tag{8.5}$$

$$u\Big|_{t=0} = \frac{u_0 x}{\ell}\ , \qquad 0 \le x \le \ell\ . \tag{8.6}$$

(2a) 考虑变量分离的特殊解 $u = X(x)T(t)$，写出相应 X，T 的本征问题，并结合边界条件求解 X 的本征问题。

(2b) 求解 T，并写下一般解。

(2c) 利用初始条件确定一般解的系数。(可利用公式 $(\sin x - x\cos x)' = x\sin x$)

9 第十周（11 月 13 日交)

1. 求解下面定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{u_0}{a}\ , \quad u(a, y) = u_1 + u_2\cos\frac{\pi}{b}y \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0\ . \tag{9.3}$$

2. 求解下面定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)_{x=\ell} = 0 \tag{9.5}$$

$$u(x, t=0) = u_0\ . \tag{9.6}$$

10 第十一周（11 月 20 日交)

1. 扇形薄板，半径为 a，圆心角为 β，用坐标描述即 $\rho \le a, 0 \le \phi \le \beta$。板面绝热，两条直边保持温度为 0 度，弧边温度为 $f(\phi) = u_0\phi(\beta - \phi)$，其中 u_0 为常数，求板面上的温度分布。

2. 用 Fourier 变换法求解下列定解问题，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (-\infty<x<+\infty,\quad y>0), \tag{10.1}$$

$$u|_{y=0}=\varphi(x), \quad u|_{y=+\infty}=0, \tag{10.2}$$

$$u|_{x=\pm\infty}=0. \tag{10.3}$$

提示：可能会用到积分公式

$$\int_0^\infty e^{-bx}\cos ax\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}, \quad b>0. \tag{10.4}$$

11 第十二周（11 月 27 日交)

1. 阶跃函数 $\theta(x)$ 定义为

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{11.1}$$

求证

$$\theta'(x)=\delta(x). \tag{11.2}$$

2. 用 Fourier 变换法求解下列定解问题，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (-\infty<x<+\infty,\quad t>0), \tag{11.3}$$

$$u|_{t=0}=e^{-|x|} \quad (-\infty<x<+\infty), \tag{11.4}$$

$$u|_{x=\pm\infty}=0. \tag{11.5}$$

并尝试画出求得的解 $u(x,t)$ 在 $t=0,1,2$ 三个时刻随 x 变化的函数图象草图。

3. 微观粒子在中心力场 $V(r)$ 中的定态 Schrödinger 方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 u+V(r)u=Eu, \tag{11.6}$$

其中 $u(r,\theta,\phi)$ 是波函数，μ 是粒子质量，E 是能量，$\hbar$ 是约化 Planck 常数。试在球坐标系中对该方程分离变量。

12 第十三周（12 月 4 日交)

1. 根据 Legendre 多项式的级数表达式

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(-)^k(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}, \quad l\in\mathbb{N}, \tag{12.1}$$

写出 $\mathrm{P}_0(x)$、$\mathrm{P}_1(x)$、$\mathrm{P}_2(x)$、$\mathrm{P}_3(x)$、$\mathrm{P}_4(x)$ 的具体形式。

2. 设 ν 不等于整数或半整数，从头推导 Bessel 方程的第二解 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$。

3. 根据递推关系

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2}-\frac{(-)^k\beta}{2^{2k}(k!)^2k},\quad k\in\mathbb{N}^+, \tag{12.2}$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k}=\frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2}-\frac{(-)^k\beta}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r},\quad k\in\mathbb{N}^+. \tag{12.3}$$

13 第十四周（12 月 11 日交)

1. 设 $m\in\mathbb{N}^+$，根据递推关系

$$a_{2k+2m}=-\frac{a_{2k+2m-2}}{2^2k(k+m)}-\frac{(-)^k\beta}{2^{2k+m+1}k!(k+m)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+m}\right),\quad k\in\mathbb{N}^+, \tag{13.1}$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k+2m}=\frac{(-)^k m!a_{2m}}{2^{2k}k!(k+m)!}-\frac{(-)^k\beta}{2^{2k+m+1}k!(k+m)!}[\psi(k+m+1)+\psi(k+1)-\psi(m+1)-\psi(1)],\quad k\in\mathbb{N}^+, \tag{13.2}$$

其中 ψ 函数满足

$$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}. \tag{13.3}$$

2. 合流超几何方程的标准形式是

$$xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0, \tag{13.4}$$

求出将它化为 Sturm-Liouville 型方程

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy(x)}{dx}\right]-q(x)y(x)+\alpha\rho(x)y(x)=0 \tag{13.5}$$

时 $k(x)$、$q(x)$ 和 $\rho(x)$ 的具体形式。

3. 长为 l 的均匀细杆，侧面绝热，左端保持恒定温度零度，右端按 Newton 冷却定律与温度为零度的介质交换热量，即右端边界条件为

$$\left.\left(u+h\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=0,\quad h>0. \tag{13.6}$$

已知 $u|_{t=0}=\varphi(x)$，求杆上温度的变化规律。

14　第十五周（12 月 18 日交)

1. 记

$$I_{2l+1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta\,d\theta,\quad l\in\mathbb{N}. \tag{14.1}$$

利用分部积分，证明递推关系

$$I_{2l+1}=\frac{2l}{2l+1}I_{2l-1},\quad l\geq 1. \tag{14.2}$$

再根据这个递推关系和

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta=1, \tag{14.3}$$

证明

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta\,d\theta=\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}. \tag{14.4}$$

2. 两个同心的球面，内球面半径为 r_1，具有电势 u_0，外球面半径为 r_2，具有电势 $u_1\cos^2\theta$，其中 u_0 和 u_1 均为常数，区域 $r_1<r<r_2$ 之中无电荷，求该区域中的电势分布。

15　第十六周（12 月 25 日交)

1. 根据连带 Legendre 函数的定义

$$\mathrm{P}_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x), \tag{15.1}$$

以及

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=(-)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x), \tag{15.2}$$

和

$$\mathrm{P}_0(x)=1,\quad \mathrm{P}_1(x)=x,\quad \mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), \tag{15.3}$$

写出 $\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_1^{-1}(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_2^{-1}(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_2^{-2}(\cos\theta)$ 的具体形式，请用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 表示出来，其中 $0\leq\theta\leq\pi$。

2. 根据球谐函数的定义

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)=(-)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \tag{15.4}$$

写出 $\mathrm{Y}_{0,0}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{1,0}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{1,1}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{1,-1}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,0}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,1}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,-1}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,2}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,-2}(\theta,\phi)$ 的具体形式。

3. 在 $r>a$ 的球外区域求解以下定解问题：

$$\begin{aligned}&\nabla^2u=0\quad(r>a),\\&\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=\frac{u_0}{a}\left(\sin^2\theta\sin^2\phi-\frac{1}{3}\right),\quad u|_{r=\infty}=0.\end{aligned} \tag{15.5}$$

16　第十七周（1 月 3 日交)

1. 考虑 Poisson 方程第三边值问题

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D, \tag{16.1}$$

$$\left.\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\mathbf{r}\in S} = \varphi(\mathbf{r}), \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0. \tag{16.2}$$

其中 S 是区域 D 的边界面。定义相应的 Green 函数，并给出解的积分公式。

2. 考虑三维半无界空间的定解问题

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty, \tag{16.3}$$

$$u(\mathbf{r})\big|_{z=0} = \varphi(x, y). \tag{16.4}$$

(1) 写出相应的 Green 函数的定解问题。

(2) 求出这一 Green 函数。

(3) 求出 $u(\mathbf{r})$ 的积分公式，即用 Green 函数和定解条件表示出 $u(\mathbf{r})$。