数学物理方法作业集

潘逸文[*], 余钊焕[†]
中国广州中山大学物理学院

October 8, 2018

简介

2018 年秋季数学物理方法 (面向 17 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布，本文件也会每周更新，可在 **余钊焕教学主页** `http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html` 找到。

[*]Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn
[†]Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 11 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a)\ \frac{i}{\pi}, \qquad (b)\ 1+\sqrt{3}i\ , \qquad (c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}}, \tag{1.1}$$

2. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$，其中 $R > 0$。求解最大的 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 S 的内点 z，z^N 都还是内点。写明推理。

3. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$，其中 $R > 0$。S 是否区域？是否单连通？

2 第二周 (9 月 18 日课上交)

1. 用代数式 (即 $x+iy$ 的形式) 表达以下复数，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，i 是虚数单位，

$$(a)\ a^i, \text{其中 } a > 0, \qquad (b)\ i^{a+bi}, \qquad (c)\ \sin(a+ib)\ . \tag{2.1}$$

2. 设 $u(x, y) = e^x \sin y$，而且令 $w = u(x, y) + iv(x, y)$ 为一个解析函数。求 w 关于 $z = x + iy$ 的表达式。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数，同时，其值域是 $\mathbb{R}$ 的子集。求证 f 是常数函数。

3 第三周 (9 月 25 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z}dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z}dz$，其中 C_1 和 C_2 分别是上半单位圆 (逆时针方向) 和下半单位圆 (顺时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz\ . \tag{3.1}$$

3. 设复变函数 f 在区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续，$G \subset D$ 是其子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) d\bar{z} dz\ , \tag{3.2}$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$。

4 第四周 (10 月 9 日交)

1. 计算围道积分

$$\oint_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \qquad C=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\ \}. \tag{4.1}$$

2. 计算围道积分, $n=1,2,3,\ldots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n}\frac{dz}{z}\ , \qquad C=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\ \}\ . \tag{4.2}$$

3. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$, 其中 $r_k=(-1)^{k^2}$, $c_k=(-1)^k\frac{e^{ik\theta}}{k}$。分情况 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 讨论级数是否收敛，是否绝对收敛，给出简要说明。

4. 讨论下面幂级数是否收敛，若收敛，给出收敛半径

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}z^n\ , \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n z^n\ . \tag{4.3}$$

5 第五周 (10 月 16 日交)

1. 考虑二元实函数 $u(x,y)$

$$u(x,y)\equiv\frac{x^2-y^2}{x^4+2x^2y^2+y^2}\ . \tag{5.1}$$

设 $u(x,y)$ 是在某区域内解析的复变函数 $f(z=x+iy)$ 的实部。

(1) 用共轭调和函数方法求 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$，并写出函数 $f(z)$ 关于 $z=x+iy$ 的表达式；

(2) 指出 $f(z)$ 的奇点以及所属分类；

(3) 分别以 $z=0$, $z=1$, $z=-1$ 为展开中心，作 Laurent 或 Taylor 展开。指出所得级数的收敛区域或收敛半径。

2. 考虑复变函数

$$f(z)\equiv\frac{z^n}{z-1}\ , \qquad n\in\mathbb{N}\ . \tag{5.2}$$

(1) 列举 $f(z)$ 以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域；

(2) 以原点为展开中心，在上述每一个解析区域内写出 $f(z)$ 的 Laurent 或 Taylor 展开 $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k z^k$，并比较展开系数 $\lambda_{k\geq 0}$ 与 $f^{(k)}(0)/k!$ 是否相等 (可为一般 n 和 k 计算通项然后比较，也可取 $n=2$，$k=1,2,3$)。