

粒子物理简介

第四节 量子电动力学

余钊焕

中山大学物理学院

<https://yzhxxzxy.github.io>



2021 年 9 月



U(1) 整体对称性

时空坐标的函数称为**场**。在**量子场论**中，场被量子化，而**粒子**是场的激发态，粒子间相互作用来源于各种场之间的相互作用。场的运动规律由**最小作用量原理**决定，作用量 $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ ，其中拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是用场表达出来的。



对于**不参与相互作用的狄拉克旋量场** $\psi(x)$ ，运动规律可以用拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{free}}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

描述，其中狄拉克矩阵 γ^μ 是满足 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ 的 4×4 常数矩阵，时空导数 $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ ， m 为相应**费米子**的质量， $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ 。对 ψ 作 **U(1) 整体变换**

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iQ\theta}\psi(x),$$

(**整体**指变换参数 θ **不是**时空坐标的函数)，则 $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-iQ\theta}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}}(x) &\rightarrow \mathcal{L}'_{\text{free}}(x) = \bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x)e^{-iQ\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{iQ\theta}\psi(x) = \mathcal{L}_{\text{free}}(x)\end{aligned}$$



可见，自由狄拉克旋量场的拉氏量具有 **U(1) 整体对称性**



根据**诺特定理**，U(1) 群的荷 (生成元) Q 是**守恒的**

U(1) 规范对称性

🐼 若变换参数 θ 是时空坐标的函数，则上述变换变成局域的 U(1) 规范变换

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}\psi(x)$$

👉 从而 $\partial_\mu \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}[\partial_\mu + iQ\partial_\mu \theta(x)]\psi(x)$ 导致 $\mathcal{L}'_{\text{free}}(x) \neq \mathcal{L}_{\text{free}}(x)$

🦀 为了重新得到对称性，引入规范场 $A_\mu(x)$ ，令它的 U(1) 规范变换为

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x),$$

以此补偿变换参数 $\theta(x)$ 的时空导数引起的差异

🦀 将拉氏量修改为 $\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x)$ ，其中协变导数的定义是

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - iQeA_\mu(x), \text{ 就可以得到 } \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x)$$

🦀 因此 $\mathcal{L}(x)$ 具有 U(1) 规范对称性，描述 U(1) 规范理论


🦀 代价是拉氏量中多了一项 $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}_{\text{free}}(x) = QeA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$

🍏 此项将旋量场 $\psi(x)$ 和规范场 $A_\mu(x)$ 耦合起来，耦合常数为 e

🍏 规范场 $A_\mu(x)$ 是洛伦兹矢量，对应的粒子称为规范玻色子，自旋为 1


🍒 \mathcal{L}_{int} 导致费米子与规范玻色子发生规范相互作用


量子电动力学

 **量子电动力学** (Quantum Electrodynamics) 简称 **QED**, 是 $U(1)_{\text{EM}}$ **规范理论**, 规范玻色子为**光子**, 描述**电磁相互作用**, 相应拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \sum_f (\bar{f} i\gamma^\mu D_\mu f - m_f \bar{f} f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \sum_f [\bar{f} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f + Q_f e A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - iQ_f e A_\mu$, **电磁耦合常数** e 就是单位电荷量


 f 代表标准模型中各种带电的旋量场, Q_f 为 f 所带**电荷**量子数, m_f 是 f 的质量, \mathcal{L}_{QED} 中 $\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f$ **项**描述旋量场在时空中传播的过程

 **电磁场** A_μ 的**场强张量**定义为 $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; 可以验证, $-F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/4$ **项**在 $U(1)_{\text{EM}}$ 规范变换下不变, 它描述电磁场在时空中传播的过程

 $Q_f e A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f$ **项**描述旋量场与电磁场的电磁相互作用

费米子 f	上型夸克 u, c, t	下型夸克 d, s, b	带电轻子 e^-, μ^-, τ^-
电荷 Q_f	+2/3	-1/3	-1


旋量系数和极化矢量

 \mathcal{L}_{QED} 中 $\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f$ 项与自由旋量场拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{free}}$ 形式相同, 描述远离相互作用顶点的费米子; 根据**最小作用量原理**, 此项对应于**狄拉克方程**

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f(x) = 0$$


 经过傅立叶变换之后, 动量空间中的旋量系数 $u(p, s)$ 和 $v(p, s)$ 满足


$$(\not{p} - m_f)u(p, s) = 0, \quad (\not{p} + m_f)v(p, s) = 0, \quad \not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$$

 $s = \pm 1$ 称为**螺旋度**, 是自旋在动量方向上的投影被归一化后的值

 $s = +1$ (-1) 对应于**右旋 (左旋) 极化的费米子**, 螺旋度求和关系为

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + m_f, \quad \sum_s v(p, s)\bar{v}(p, s) = \not{p} - m_f$$


 \mathcal{L}_{QED} 中 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 项描述远离相互作用顶点时的光子

 在动量空间中用**极化矢量** $\varepsilon_\mu(p, \lambda)$ 描写光子的运动行为, $\lambda = \pm 1$ 是光子的螺旋度

 $\lambda = +1$ (-1) 对应于**右旋 (左旋) 极化的光子**, 螺旋度求和关系为

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(p, \lambda)\varepsilon_\nu^*(p, \lambda) \rightarrow -g_{\mu\nu}$$

QED 费曼规则

 $\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f$ 项和 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 项分别提供费米子与光子的初末态和传播子的费曼规则，而 $Q_f e A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f$ 项提供电磁相互作用顶点的费曼规则

$$\text{---}\xrightarrow{p}\text{---}\text{---}\text{---} = u(p, s)$$

正费米子初态

$$\text{---}\xrightarrow{p}\text{---}\text{---}\text{---} = \bar{u}(p, s)$$

正费米子末态

$$\text{---}\xleftarrow{p}\text{---}\text{---}\text{---} = \bar{v}(p, s)$$

反费米子初态

$$\text{---}\xleftarrow{p}\text{---}\text{---}\text{---} = v(p, s)$$

反费米子末态

$$\mu \text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} = \varepsilon_\mu(p, \lambda)$$

光子初态

$$\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} \mu = \varepsilon_\mu^*(p, \lambda)$$


光子末态


$$\text{---}\xrightarrow{p}\text{---} = \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}$$

费米子传播子

$$\mu \text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} \nu = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

光子传播子

 光子用波浪线表示

 费米子用带箭头的实线表示，线上的箭头方向是费米子数的方向；正粒子的动量方向与费米子数方向相同，反粒子则相反

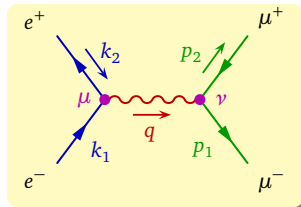
$$\begin{array}{c} A_\mu \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ f \quad \quad f \end{array} = iQ_f e \gamma^\mu$$

电磁相互作用顶点

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射振幅

🐎 右图为 QED 散射过程 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的领头阶费曼图，利用费曼规则将它表达成**不变振幅**

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(k_2, s_2)(-ie\gamma^\mu)u(k_1, s_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \times \bar{u}(p_1, s'_1)(-ie\gamma^\nu)v(p_2, s'_2)$$




🐎 通常考虑没有极化的初态，需对初态螺旋度**取平均**，即 $\frac{1}{2} \sum_{s_1} \frac{1}{2} \sum_{s_2}$ ；对末态螺旋度则通过**求和**包括所有情况，即 $\sum_{s'_1} \sum_{s'_2}$ 。因而**非极化振幅模方**为


$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} \left[\bar{v}(k_2, s_2) \gamma^\mu u(k_1, s_1) \bar{u}(k_1, s_1) \gamma^\rho v(k_2, s_2) \right. \\ &\quad \times \left. \bar{u}(p_1, s'_1) \gamma_\mu v(p_2, s'_2) \bar{v}(p_2, s'_2) \gamma_\rho u(p_1, s'_1) \right] \\ &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{k}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{k}_1 + m_e) \gamma^\rho] \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m_\mu) \gamma_\rho] \end{aligned}$$

🍀 每个电磁相互作用顶点贡献一个耦合常数 e ，故 $\mathcal{M} \propto e^2$ ， $|\mathcal{M}|^2 \propto e^4$

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射截面

 对狄拉克矩阵乘积作求迹运算，得

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + 2m_e^2 m_\mu^2]$$

 在**质心系**中，设 \mathbf{p}_1 与 \mathbf{k}_1 的夹角为 θ ，则 \mathbf{p}_2 与 \mathbf{k}_2 的夹角也为 θ ，有

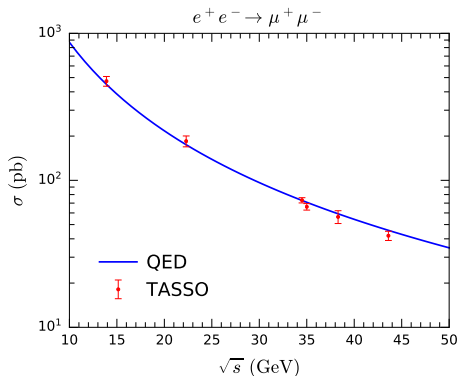
$$q^2 = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = s, \quad k_1 \cdot k_2 = \frac{s}{2} - 2m_e^2, \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{s}{2} - 2m_\mu^2,$$
$$k_1 \cdot p_1 = k_2 \cdot p_2 = \frac{s}{4}(1 - \beta_e \beta_\mu \cos \theta), \quad k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = \frac{s}{4}(1 + \beta_e \beta_\mu \cos \theta),$$

其中 $\beta_e \equiv \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$ ， $\beta_\mu \equiv \sqrt{1 - 4m_\mu^2/s}$ 。从而，**散射截面**为

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Omega_1 \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{\text{CM}}} \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{\alpha^2 \beta_\mu}{4s \beta_e} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[1 + \beta_e^2 \beta_\mu^2 \cos^2 \theta + \frac{4(m_e^2 + m_\mu^2)}{s} \right] \\ &= \frac{4\pi \alpha^2 \beta_\mu}{3s \beta_e} \left(1 + \frac{2m_e^2}{s} \right) \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s} \right) \end{aligned}$$

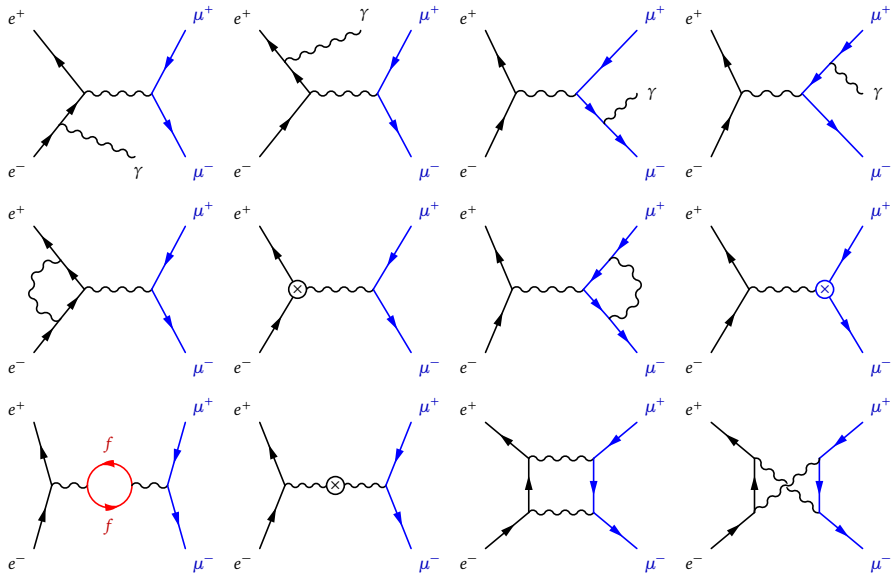
与实验数据对比

将 $\alpha = 1/137.036$ 、 $m_\mu = 105.658$ MeV、 $m_e = 0.510999$ MeV 代入以上公式，得到**QED 领头阶**预言的 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射截面



1988 年，德国 DESY 研究中心 PETRA 对撞机上的 **TASSO 探测器**测量了多个质心能 \sqrt{s} 处的 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射截面数据，与 QED 预言比较**符合**

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 过程 QED 次领头阶费曼图



ep 库仑散射

🐼 在**非相对论性的经典物理学**中，假设质子在散射前后都是**静止**的，则初末态电子的运动速率相同，记为 v ，运动方向相差**散射角** θ ，那么，库仑力引起的微分散射截面为

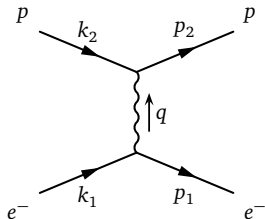
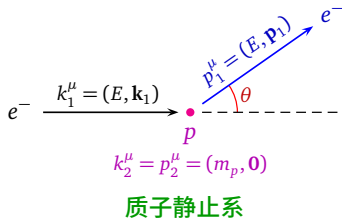
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (\text{Rutherford 公式})$$

🐱 **QED 理论**会修正这条公式

● 当能标远小于 m_p 时，质子在相互作用过程中就像没有结构的**点粒子**一样，此时可以用旋量场描述质子，并使用 $Q_p = +1$ 的 QED 相互作用顶点

● QED 领头阶给出的非极化振幅模方为

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(k_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot k_2) + (k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2) - m_p^2(k_1 \cdot p_1) - m_e^2(p_2 \cdot k_2) + 2m_e^2 m_p^2]$$



Mott 公式

在质子静止系中，初末态电子的能量相等，记为 E ，初末态电子的动量大小也相等，记为 $Q \equiv |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_e^2}$ ，初末态电子的运动速率为 $v = Q/E = \sqrt{1 - m_e^2/E^2}$

故 $k_1 \cdot p_1 = E^2(1 - v^2 \cos \theta)$, $k_2 \cdot p_2 = m_p^2$

$$k_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot k_2 = k_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot p_2 = m_p E$$

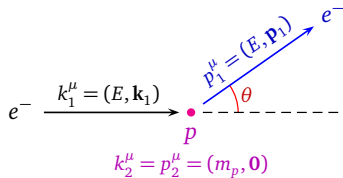
$$q^2 = -2Q^2(1 - \cos \theta)$$

由此得到 **QED 领头阶**微分散射截面

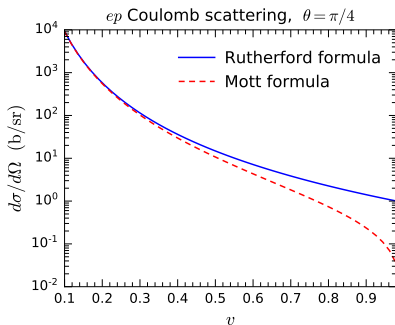
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 [1 - v^2 \sin^2(\theta/2)]}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (\text{Mott 公式})$$

在**非相对论极限**下， $v \ll 1$, $Q \simeq m_e v$,

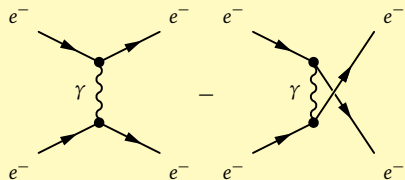
Mott 公式退化为 Rutherford 公式



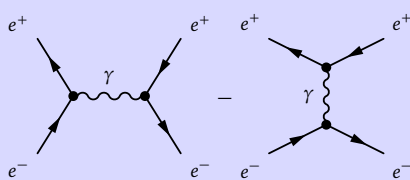
质子静止系



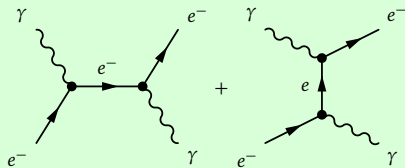
其它 QED 两体散射过程



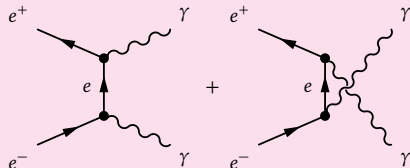
Møller 散射 $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$



Bhabha 散射 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



Compton 散射 $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$



e^+e^- 湮灭到双光子 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$

📌 初末态相同的过程可以具有多个费曼图，它们对应的振幅之间**相互干涉**

Compton 散射

🐼 电子与光子的散射过程 $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$ 称为 **Compton 散射**

✨ 1923 年, A. H. Compton 发现 X 射线照射核外电子之后波长变长; 他用的 X 射线光子能量约为 17 keV, 远大于原子结合能, 核外电子可看作自由的

★ 在**实验室系**中, 初态电子静止, 初态光子通过散射将能动量传递给末态电子; 在自然单位制下, 光子的能量 E 等于它的**圆频率** ω , 即 $E = \hbar\omega = \omega$, 而波长 λ 与圆频率的关系为 $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/\omega$

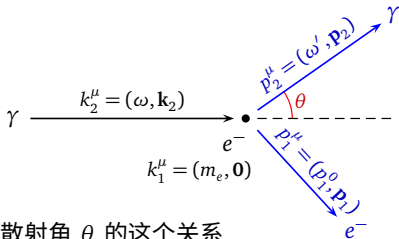
$$\begin{aligned} \text{🌙 } m_e^2 &= p_1^2 = (k_1 + k_2 - p_2)^2 \\ &= m_e^2 + 2m_e(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

$$\text{👉 } m_e(\omega - \omega') = \omega\omega'(1 - \cos\theta)$$

$$\text{👉 } \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2\pi}{\omega'} - \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{m_e}(1 - \cos\theta)$$

☀️ Compton 在实验中证实了波长变化 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的这个关系

👉 为**光的粒子性**提供了强有力的支持



Compton 散射截面

🐻 对于低能电磁辐射与电子散射的过程, J. J. Thomson 根据**经典电磁学**推导出微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} (1 + \cos^2\theta)$$

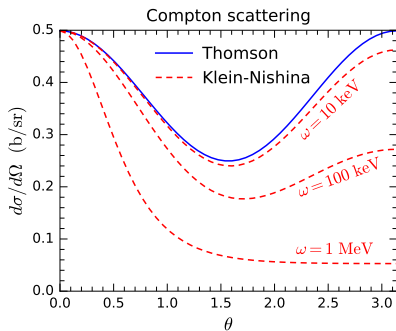
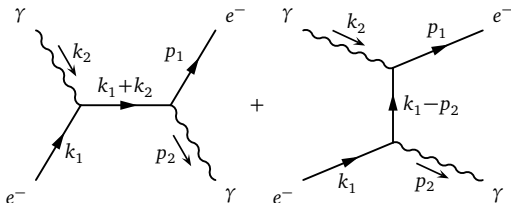
(Thomson 公式)

🐻 **QED 领头阶**给出的非极化振幅模方为

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left[\frac{k_1 \cdot p_2}{k_1 \cdot k_2} + \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 \cdot p_2} + 2m_e^2 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right) + m_e^4 \left(\frac{1}{k_1 \cdot k_2} - \frac{1}{k_1 \cdot p_2} \right)^2 \right]$$

👉
$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2\omega'^2}{m_e^2\omega^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right)$$

(Klein-Nishina 公式)



e^+e^- 湮灭到双光子

🐼 对于 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ ，设质心系中某个末态光子与初态电子运动方向的夹角为 θ ，

QED 领头阶给出的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s\beta_e} \left[\frac{1 + \beta_e^2 \cos^2 \theta}{1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta} + \frac{8m_e^2}{s(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)} - \frac{32m_e^4}{s^2(1 - \beta_e^2 \cos^2 \theta)^2} \right]$$

💥 1983 年，PETRA 对撞机上的 **JADE** 探测器测量了 $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ 微分散射截面，与 QED 符合得比较好

