核衰变统计规律

实验者：余钊焕　　合作者：朱　可

（中山大学理工学院，物理学专业 2006 级，学号 06324043）

2009 年 4 月 10 日

【实验目的】

1. 了解并验证原子核衰变及放射性计数的统计性。
2. 了解统计误差的意义，掌握计算统计误差的方法。
3. 学习检验测量数据的分布类型的方法。

【实验内容】

1. 在相同条件下，对某放射源进行重复测量，画出放射性计数的频率直方图，并与理论分布曲线作比较。

2. 在相同条件下，对本底进行重复测量，画出本底计数的频率分布图，并与理论分布图作比较。

3. 用 χ^2 检验法检验放射性计数的统计分布类型。

【实验原理】

在重复的放射性测量中，即使保持完全相同的实验条件（例如放射源的半衰期足够长，在实验时间内可以认为其活度基本上没有变化；源与计数管的相对位置始终保持不变；每次测量时间不变；测量仪器足够精确，不会产生其它的附加误差等等），每次的测量结果并不完全相同，而是围绕着其平均值上下涨落，有时甚至有很大的差别。这种现象就叫做放射性计数的统计性。放射性计数的这种统计性反映了放射性原子核衰变本身固有的特性，与使用的测量仪器及技术无关。

1. 核衰变的统计规律

放射性原子核衰变的统计分布可以根据数理统计分布的理论来推导。放射性原子核衰变的过程是一个相互独立彼此无关的过程，即每一个原子核的衰变是完全独立的，和别的原子核是否衰变没有关系，而且哪一个原子核先衰变，哪一个原子核后衰变也是纯属偶然的，并无一定的次序，因此放射性原子核的衰变可以看成是一种伯努里试验问题。设在 $t = 0$ 时，放射性原子核的总数是 N_0，在 t 时间内将有一部分核发生了衰变。已知任何一个核在 t 时间内衰变的概率为

$p=\left(1-e^{-\lambda t}\right)$，不衰变的概率为 $q=1-p=e^{-\lambda t}$，其中 λ 是该放射性原子核的衰变常数。利用二项式分布可以得到在 t 时间内有 n 个核发生衰变的概率 $P(n)$为

$$P(n)=\frac{N_0!}{(N_0-n)!n!}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^n\left(e^{-\lambda t}\right)^{N_0-n}，\tag{1}$$

在 t 时间内，衰变掉的粒子平均数为

$$m=N_0p=N_0\left(1-e^{-\lambda t}\right)，\tag{2}$$

其相应的均方根差为

$$\sigma=\sqrt{N_0pq}=\sqrt{m(1-p)}=\sqrt{me^{-\lambda t}}\ 。\tag{3}$$

假如 $\lambda t << 1$，即时间 t 远比半衰期小，这时 σ 可简化为

$$\sigma=\sqrt{m}\ 。\tag{4}$$

N_0 总是一个很大的数目，而且如果满足 $\lambda t << 1$，则二项式分布可以简化为泊松分布。因为，在二项式分布中，若 N_0 不小于 100，且 p 不大于 0.01，则泊松分布能很好地近似于二项式分布，此时

$$P(n)=\frac{m^n}{n!}e^{-m}\ 。\tag{5}$$

在泊松分布中，n 的取值范围为所有正整数（0, 1, 2, 3, …），并且在 $n=m$ 附近时，$P(n)$有一极大值，当 m 较小时，分布是不对称的，m 较大时，分布渐趋近于对称。当 $m\geqslant 20$ 时，泊松分布一般就可用正态（高斯）分布来代替，

$$P(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}}，\tag{6}$$

式中 $\sigma^2=m$，$P(n)$ 是在 n 处的概率密度值。

现在我们分析在放射性测量中，计数值的统计分布。原子核衰变的统计现象服从的泊松分布和正态分布也适用于计数的统计分布，因此，只需将分布公式中的放射性核的衰变数 n 改换成计数 N，将衰变掉粒子的平均数 m 改换成计数的平均值 M 就可以了，

$$P(N)=\frac{M^N}{N!}e^{-M}，\tag{7}$$

$$P(N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(N-M)^2}{2\sigma^2}}，\tag{8}$$

式中 $\sigma^2=M$，当 M 值较大时，由于 N 值出现在 M 值附近的概率较大，σ^2 可用某

一次计数值 N 来近似，所以$\sigma^2 \approx N$。

由于核衰变的统计性，我们在相同条件下作重复测量时，每次测量结果并不相同，有大有小，围绕着平均计数值 M 有一个涨落，其涨落大小可以用均方根差$\sigma = \sqrt{M} \approx \sqrt{N}$ 来表示。

由（8）式可以看出，正态分布决定于平均值 M 及均方根差σ这两个参数，它对称于 $N = M$，见图 1。对于 $M = 0$，$\sigma = 1$，这种分布称为标准正态分布。

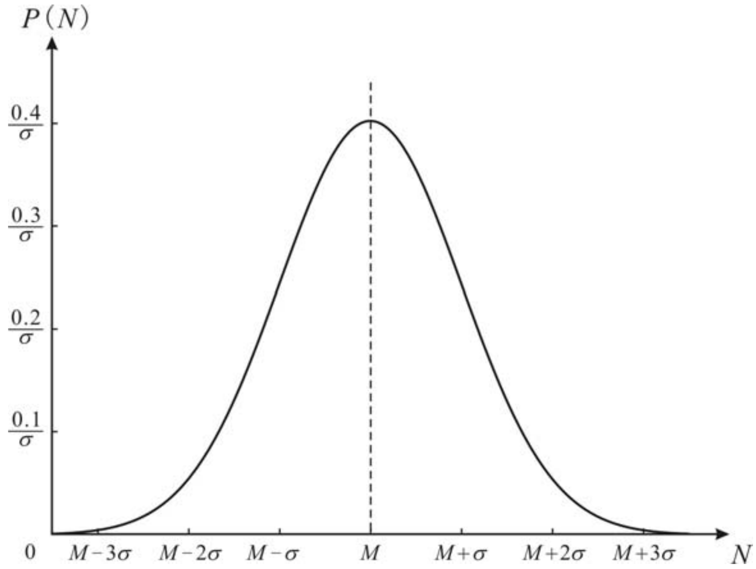

图 1　正态分布图

计数值处于 $N \sim N + dN$ 内的概率为

$$P(N)dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(N-M)^2}{2\sigma^2}} dN, \tag{9}$$

为了计算方便，需作如下的变量代换（称为标准化），令

$$z = \frac{N-M}{\sigma} = \frac{\Delta}{\sigma}, \tag{10}$$

则

$$P(N)dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} d\Delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \tag{11}$$

而$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$称为正态分布概率积分。

如果我们对某一放射源进行多次重复测量，得到一组数据，其平均值为 $\bar{N}$，那么计数值 N 落在 $\bar{N} \pm \sigma$（即 $\bar{N} \pm \sqrt{\bar{N}}$）范围内的概率为

$$\int_{\bar{N}-\sigma}^{\bar{N}+\sigma} P(N)dN = \int_{\bar{N}-\sigma}^{\bar{N}+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(N-\bar{N})^2}{2\sigma^2}} dN, \tag{12}$$

用变量 $z=\dfrac{N-\bar{N}}{\sigma}$ 代换，上式化为

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz=0.683\text{。}$$

这就是说，在某实验条件下进行单次测量，如果来自一个正态分布总体的计数值为 N_1，那么我们可以说 N_1 落在 $\bar{N}\pm\sqrt{\bar{N}}$（即 $\bar{N}\pm\sigma$）范围内的概率为 68.3 %；或者这样说，在 $\bar{N}\pm\sqrt{\bar{N}}$ 范围内包含真值的概率是 68.3 %。实质上，从正态分布的特点来看，由于出现概率较大的计数值与平均值 $\bar{N}$ 的偏差较小，所以我们可以用 $\sqrt{N_1}$ 来代替 $\sqrt{\bar{N}}$。对于单次测量值 N_1，可以近似地说，在 $N_1\pm\sqrt{N_1}$ 范围内包含真值的概率是 68.3 %，这样用单次测量值就大体上确定了真值所在的范围，这种由于放射性衰变的统计性而引起的误差，叫做*统计误差*。放射性统计统落服从正态分布，所以用均方根差（也称标准误差）$\sigma=\sqrt{\bar{N}}$ 来表示。当采用标准误差表示放射性的单次测量值 N_1 时，则可以表示为 $N_1\pm\sigma=N_1\pm\sqrt{\bar{N}}\approx N_1\pm\sqrt{N_1}$。用数理统计的术语来说，将 68.3 %称为“置信概率”（或“置信度”），相应的“置信区间”即为 $\bar{N}\pm\sigma$。当置信区间取为 $\bar{N}\pm2\sigma$ 和 $\bar{N}\pm3\sigma$ 时，相应的置信概率分别为 95.5 %和 99.7 %。

2. χ^2 检验法

放射性衰变是否符合正态分布或泊松分布，由一组数据的频率直方图或频率分布图与理论正态分布或泊松分布作比较，可以得到一个感性的认识，而 χ^2 检验法则提供一种较精确的判别准则。它的基本思想是比较被测对象应有的一种理论分布和实测数据分布之间的差异，然后从某种概率意义上说明这种差异是否显著。如果差异显著，则说明测量数据有问题，反之，如果认为差异不显著，则说明测量数据正常。

设对某一放射源进行重复测量得到了 K 个数值，对他们进行分组，分组序号用 j 表示，j = 1, 2, 3, … , h, 令

$$\chi^2=\sum_{j=1}^{h}\frac{\left(f_j-f_j'\right)^2}{f_j'}\text{，}\qquad(13)$$

其中，h 表示分组数，f_j 为各组的实际观测次数，f_j' 为根据理论分布计算得到

的各组理论次数。求理论次数的方法是，从正态分布概率积分数值表上查出各区间的概率，再将它乘以总次数。

可以证明，χ^2统计量近似地服从 χ^2分布，其自由度是 $h-l-1$，这里 l 是在计算理论次数时所用的参数个数。对于正态分布，自由度为 $h-3$；对于泊松分布，自由度为 $h-2$。

统计量 χ^2可以用来衡量实测分布与理论分布之间有无明显的差异。在使用χ^2检验法时，要求总次数不少于 50 以及任一组的理论次数不少于 5（最好在 10 以上），否则可以将组适当地合并以增加 f_j'。比较的方法是先选取一个任意给定的小概率α，称为显著性水平，查出对应的χ_α^2值，比较计算量χ^2和χ_α^2的大小来判断拒绝或接受理论分布。这种判断是在某一显著性水平α上得出来的。

【实验装置】

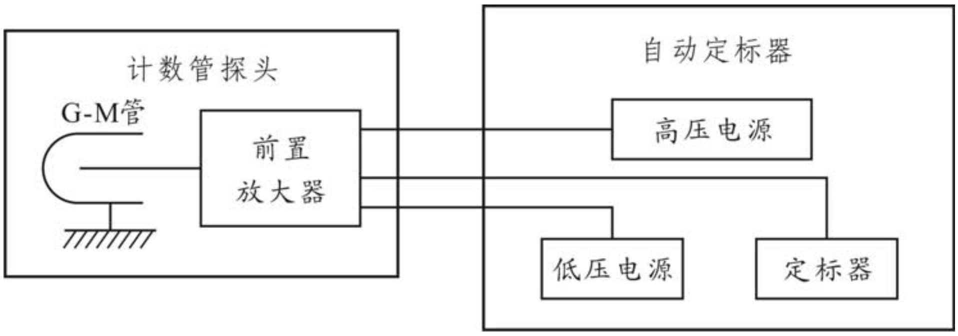

图 2　实验方框图

计数管探头，FJ-365，1 个;

G-M 计数管，J-104，1 支;

自动定标器，FH-408，1 台;

γ 放射源，^{60}Co 或 ^{137}Cs，1 个。

【实验步骤】

1. 按方框图连接各仪器设备，并用自动定标器的自检信号检验仪器是否处于正常工作状态。

2. 测量计数管坪曲线，选择计数管的合适工作电压、合适的计数率等实验条件，重复进行至少 100 次以上的独立测量，并算出这组数据的平均值。

3. 在合适的工作点下验证泊松分布。

4. 在合适的工作点下验证高斯分布。

【测量数据和数据处理】

1. 测量 G-M 计数管的坪曲线（放射源标号 A2）

工作点：放大器极性为负，放大倍数 5.10，甄别阈（threshold）：300 ~ 5000 mV，测量数据如表 1 所示。

表 1 测量坪曲线

高压（V）	1458	1470	1480	1496	1516	1536	1556	1575	1595	1616
计数率（次/s）	3.72	13.87	21.86	22.71	22.87	22.16	23.34	22.64	21.7	23.2
高压（V）	1635	1656	1676	1696	1715	1735	1755	1776	1795	1815
计数率（次/s）	22.97	23.2	21.64	22.51	22.49	23.17	24.03	24.7	27.13	28.57

描绘坪曲线，得到图 3。

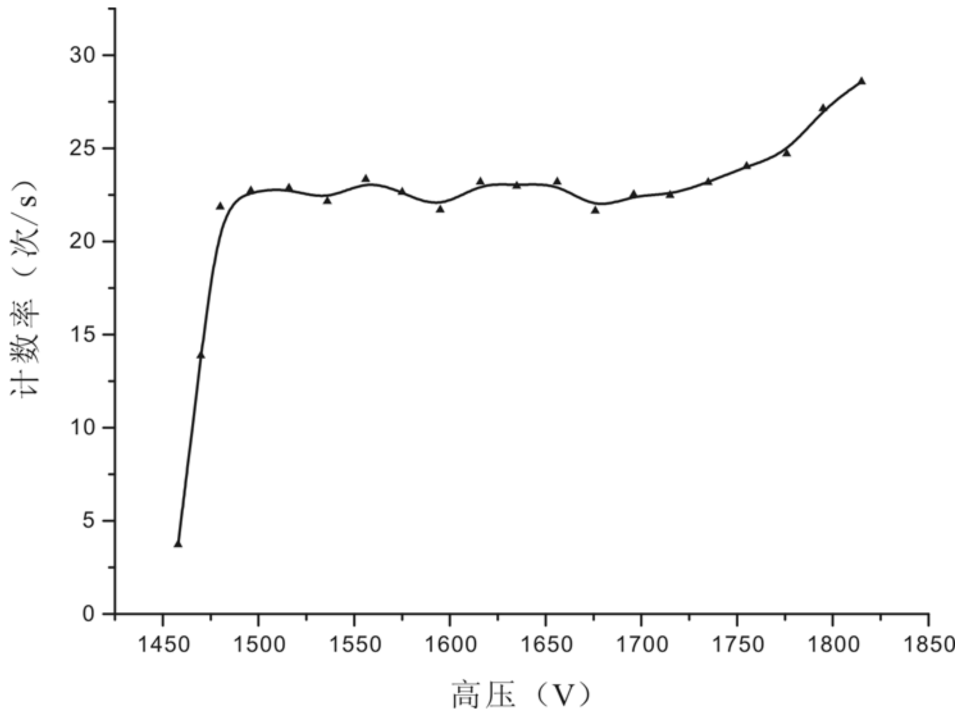

图 3　G-M 计数管的坪曲线

2. 验证泊松分布

工作点：高压 1580 V（坪曲线上），保证每秒平均计数小于 10 次，放大器极性为负，放大倍数 5.10，甄别阈：300 ~ 5000 mV，duration = 1 s，periods = 1000。

实验实测分布的计数率平均值 $\bar{N}$ = 5.873 次/s，标准误差 σ = 2.426 次/s，定组距为 1 次/s，绘制频率直方图，并配制相应的泊松分布理论直方图，如图 4 所示。

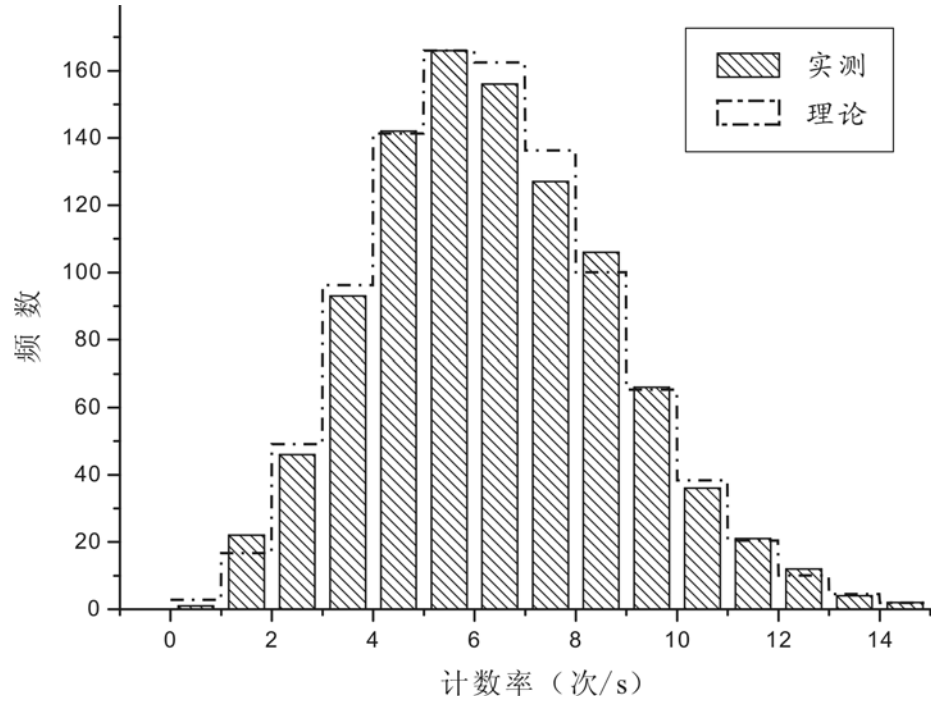

图 4　泊松分布实测的和理论的频率直方图

根据 χ^2 检验法，分 $h = 15$ 组，将各组的实际观测次数 f_j 和根据泊松分布式（7）计算得到的各组理论次数 f_j' 列于下表。

表 2　泊松分布实测次数和理论次数

计数率(次/s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f_j	1	22	46	93	142	166	156	127	106	66	36	21	12	4	2
f_j'	3	16	48	95	140	164	160	134	99	64	38	20	10	4	2

利用式（13）计算，

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{15} \frac{\left(f_j - f_j'\right)^2}{f_j'} = 4.961,$$

泊松分布自由度 $n = h - 2 = 13$，取显著性水平 $\alpha = 0.05$，查表得到

$$\chi^2_{0.05} = 22.362 > 4.961,$$

因此，此组数据服从泊松分布。

实测数据落在各置信区间的频率分别为

$\bar{N} \pm \sigma$：69.7 %，　　$\bar{N} \pm 2\sigma$：93.8 %，　　$\bar{N} \pm 3\sigma$：99.8 %；

泊松分布理论上落在在各置信区间的概率分别为

$\bar{N} \pm \sigma$：69.7 %，　　　$\bar{N} \pm 2\sigma$：94.3 %，　　　$\bar{N} \pm 3\sigma$：99.7 %。

3. 验证高斯分布

工作点：高压 1580 V（坪曲线上），保证每秒平均计数大于 20 次，放大器极性为负，放大倍数 5.10，甄别阈：300 ~ 5000 mV，duration = 1 s，periods = 1000。

实验实测分布的计数率平均值 $\bar{N}$ = 31.165 次/s，标准误差 σ = 5.936 次/s，定组距为 3 次/s，绘制频率直方图，并配制相应的高斯分布理论曲线，如图 5 所示。

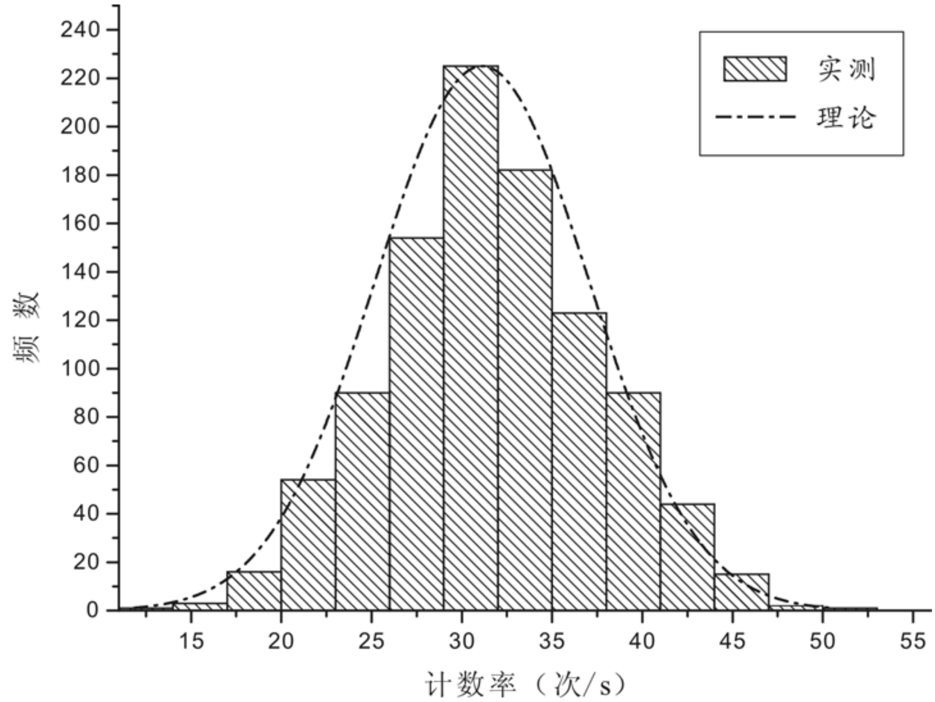

图 5　高斯分布实测的频率直方图和理论的曲线

根据 χ^2 检验法，分 h = 14 组，将各组的实际观测次数 f_j 和根据高斯分布式（9）积分计算得到的各组理论次数 f_j' 列于下表。

表 3　高斯分布实测次数和理论次数

计数率(次/s)	11 ~ 14	14 ~ 17	17 ~ 20	20 ~ 23	23 ~ 26	26 ~ 29	29 ~ 32
f_j	1	3	16	54	90	154	225
f_j'	1.58	6.60	21.49	54.50	107.63	165.53	198.26

计数率(次/s)	32 ~ 35	35 ~ 38	38 ~ 41	41 ~ 44	44 ~ 47	47 ~ 50	50 ~ 53
f_j	182	123	90	44	15	2	1
f_j'	184.93	134.34	76.00	33.48	11.48	3.07	0.64

利用式（13）计算，

$$\chi^2=\sum_{j=1}^{14}\frac{\left(f_j-f_j'\right)^2}{f_j'}=19.424,$$

高斯分布自由度 $n = h - 3 = 11$，取显著性水平$\alpha = 0.05$，查表得到

$$\chi_{0.05}^2=19.675>19.424,$$

因此，此组数据服从高斯分布。

实测数据落在各置信区间的频率分别为

$\bar{N}\pm\sigma$：68.4 %，　　$\bar{N}\pm2\sigma$：96.2 %，　　$\bar{N}\pm3\sigma$：99.8 %；

高斯分布理论上落在在各置信区间的概率分别为

$\bar{N}\pm\sigma$：68.3 %，　　$\bar{N}\pm2\sigma$：95.5 %，　　$\bar{N}\pm3\sigma$：99.7 %。

【思考题】

1. 什么是放射性原子核衰变的统计性？它服从什么规律？

答：即使保持完全相同的实验条件，在重复的放射性测量中，每次的测量结果也并不完全相同，而是围绕其平均值上下涨落，有时甚至出现较大的差别，这种现象就叫做放射性计数的统计性。

放射性原子核衰变的过程是一个相互独立彼此无关的过程，可以看成是一种伯努里试验问题，因此服从二项式分布。当测量时间远比放射性原子核的半衰期小（$\lambda t << 1$）时，这种二项式分布可以简化为泊松分布。当泊松分布的参数 m≥20 时，可以近似看作正态（高斯）分布。

2. σ 的物理意义是什么？以单次测量值 N 来表示放射性测量值时，为什么是 $N\pm\sqrt{N}$，其物理意义是什么？

答：σ 是均方根差，亦即标准误差，表征一组测量值的离散程度，也即对平均值的偏离程度。

放射性原子核的衰变过程服从正态分布时，由于出现概率较大的计数值与平均值 $\bar{N}$ 的偏差较小，所以可以用单次测量值的 $\sqrt{N}$ 来代替理论标准误差 $\sqrt{\bar{N}}$ 。对

于单次测量值 N，可以近似地说，在 $N \pm \sqrt{N}$ 范围内包含真值的概率就几乎等于在 $\bar{N} \pm \sqrt{\bar{N}}$ 范围内包含真值的概率，这样，用单次测量值 N 就大体上确定了真值所在的范围。

3. 为什么说以多次测量结果的平均值来表示放射性测量值时，其精确度要比单次测量值高?

答：首先，放射性测量值服从的是每次测量值围绕其平均值上下涨落的统计规律，几乎每一次的测量值都不相同，因此用每次测量值来表征真实情况肯定不是够精确的。其次，任何测量都会由于各种各样的因素而存在偶然误差，以多次测量结果的平均值来表示放射性测量值会在一定程度上减少偶然误差的影响，所以比单次测量值的精确度高。