超对称场论与 $SU(5)$ 大统一模型

中山大学理工学院

潘逸文　冯开喜　余钊焕　刘家兴　余华超　邬汉青

督导： 张宏浩　李志兵

目　录

Chapter 1

超对称代数

1.1 Lorentz 变换和 Dirac, Weyl, Majorana 旋量

在 Lorentz 变换下, 时空坐标 x^μ 和 4 分量 Dirac 旋量 $\Psi(x)$ 变换如下

$$x \to x' = \Lambda x, \quad \Psi(x) \to \Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x), \tag{1.1}$$

其中

$$\Lambda = \exp\left(\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right), \quad S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right), \tag{1.2}$$

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{1.3}$$

由 $S^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$, 可得 $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma^0$ 的变换关系

$$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}S^{-1}, \tag{1.4}$$

与 Ψ 的变换不同.

定义电荷共轭矩阵 C , 满足

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^{\mu}, \quad C^T = -C, \tag{1.5}$$

它对 Ψ 的作用记作

$$\Psi^c \equiv C\bar{\Psi}^T. \tag{1.6}$$

由 $CS^{-1T} = SC$, 可得 Ψ^c 的变换关系

$$\Psi^c \to \Psi'^c = S\Psi^c, \tag{1.7}$$

与 Ψ 的变换相同. 因此, Ψ^c 也是 Dirac 旋量. 假如 Ψ 描写一个粒子, 那么 Ψ^c 描写它的反粒子.

若一个自旋 1/2 的粒子是电中性的, 则它是自己的反粒子, 有

$$\Psi^c = \Psi, \tag{1.8}$$

满足上式的旋量 Ψ 称为 Majorana 旋量.

在 **Weyl（手征）表象**下（如无特别说明, 下文将一直使用 Weyl表象）,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

这里与通常的约定有一些符号上的差异. 记 $\sigma^0 \equiv \bar{\sigma}^0 \equiv -1$, $\bar{\sigma}^i = -\sigma^i$, 则

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

再定义 $\sigma^{\mu\nu} \equiv \sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}$, $\bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}$, $\Sigma^{\mu\nu}$ 可表示为

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] = i\begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

从而得到 $S(\Lambda)$ 的分块对角化形式

$$S\left(\Lambda\right)=\left(\begin{array}{cc}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) & 0\\ 0 & \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)\end{array}\right), \tag{1.12}$$

于是, 在 Lorentz 变换下, $\Psi(x)$ 的上面两个分量和下面两个分量是独立变换的.

若定义 $s\equiv\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)$, 则可以证明 $s^{-1\dagger}=\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)$, 于是 $S(\Lambda)$ 可以表示为

$$S\left(\Lambda\right)=\left(\begin{array}{cc}s & 0\\ 0 & s^{-1\dagger}\end{array}\right). \tag{1.13}$$

此外, 注意到

$$\sigma^2\sigma^{iT}\sigma^2=-\sigma^i, \tag{1.14}$$

可得

$$\begin{cases} s=\sigma^2 s^{-1T}\sigma^2,\\ s^{-1\dagger}=\sigma^2 s^*\sigma^2,\end{cases} \tag{1.15}$$

因此, 作为 Lorentz 群的线性表示, s 和 s^{-1T} 等价, s^* 和 $s^{-1\dagger}$ 等价, 但 s 和 $s^{-1\dagger}$ 不等价.

将 4 分量的 Dirac 旋量看成由两个 2 分量的 Weyl 旋量组成,

$$\Psi=\left(\begin{array}{c}\chi\\ \bar{\eta}\end{array}\right), \tag{1.16}$$

在 Lorentz 变换下, 它们的变换为

$$\begin{cases}\chi'=s\chi,\\ \bar{\eta}'=s^{-1\dagger}\bar{\eta}.\end{cases} \tag{1.17}$$

由公式 (1.15) 可推出, 在 Lorentz 变换下,

$$\begin{cases} \left(i\sigma^2\chi\right)^T \to \left(i\sigma^2\chi\right)^T s^{-1}, \\ \left(-i\sigma^2\bar{\eta}\right)^T \to \left(-i\sigma^2\bar{\eta}\right)^T s^{\dagger}, \end{cases} \tag{1.18}$$

结合公式 (1.17) 可知, $(i\sigma^2\chi)^T\chi$ 和 $(-i\sigma^2\bar{\eta})^T\bar{\eta}$ 均是 Lorentz 不变量.

采用下面的指标约定. 记

$$\chi \equiv \chi_\alpha = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} \equiv \bar{\eta}^{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}^{\bar{1}} \\ \bar{\eta}^{\bar{2}} \end{pmatrix}, \tag{1.19a}$$

$$\left(i\sigma^2\chi\right) \equiv \chi^\alpha = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix}, \quad \left(-i\sigma^2\bar{\eta}\right) \equiv \bar{\eta}_{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{\bar{1}} \\ \bar{\eta}_{\bar{2}} \end{pmatrix}, \tag{1.19b}$$

再设

$$i\sigma^2 \equiv \left(\varepsilon^{\alpha\beta}\right) \equiv \left(\varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.20a}$$

$$-i\sigma^2 \equiv \left(\varepsilon_{\alpha\beta}\right) \equiv \left(\varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.20b}$$

它们的分量

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1 = -\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \quad \text{其余为零.} \tag{1.21}$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}$ 和 $\varepsilon^{\alpha\beta}$ 还满足

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma, \tag{1.22}$$

现在, 公式 (1.19b) 可表示为

$$\begin{cases} \chi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \chi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta, \\ \bar{\eta}_{\bar{\alpha}} = \varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\bar{\eta}^{\bar{\beta}} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\eta}^{\bar{\alpha}} = \varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\bar{\eta}_{\bar{\beta}}, \end{cases} \tag{1.23}$$

从而,

$$\begin{cases} (\chi)^2 \equiv \chi^\alpha\chi_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta\chi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\chi^\alpha\chi^\beta = -\chi_\alpha\chi^\alpha, \\ (\bar{\eta})^2 \equiv \bar{\eta}^{\bar{\alpha}}\bar{\eta}_{\bar{\alpha}} = \varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\bar{\eta}_{\bar{\beta}}\bar{\eta}_{\bar{\alpha}} = \varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\bar{\eta}^{\bar{\alpha}}\bar{\eta}^{\bar{\beta}} = -\bar{\eta}_{\bar{\alpha}}\bar{\eta}^{\bar{\alpha}}, \end{cases} \tag{1.24}$$

利用 Grassmann 变量的性质, 还可以得到

$$\chi\eta \equiv \chi^\alpha\eta_\alpha = -\eta_\alpha\chi^\alpha = \eta^\alpha\chi_\alpha = \eta\chi. \tag{1.25}$$

可以看出, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 和 $\varepsilon^{\alpha\beta}$ 类似于“度规张量”, 可以用来给 Weyl 旋量升降指标. 但它们是反对称的, 这样才能适应 Weyl 旋量分量的 Grassmann 性质.

现在, 可以利用公式 (1.15) 和 (1.17), 将 Lorentz 变换表示为

$$\begin{cases} \chi_\alpha \to \chi'_\alpha = s_\alpha{}^\beta\chi_\beta, \quad \chi^\alpha \to \chi'^\alpha = \left(s^{-1T}\right)^\alpha{}_\beta\chi^\beta, \\ \bar{\eta}_{\bar{\alpha}} \to \bar{\eta}'_{\bar{\alpha}} = (s^*)_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}}\bar{\eta}_{\bar{\beta}}, \quad \bar{\eta}^{\bar{\alpha}} \to \bar{\eta}'^{\alpha} = \left(s^{-1\dagger}\right)^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}}\bar{\eta}^{\bar{\beta}}, \end{cases} \tag{1.26}$$

比较上面两行式子, 可以看出, 带 bar 的量的变换实际上相当于不带 bar 的量的变换的复共轭, 亦即 χ_α 和 $\bar{\eta}_{\bar{\alpha}}$ 分属两个互为复共轭的二维旋量表示的表示空间. 从而, 复共轭操作 * 可以作为这两个表示空间的同构映射, 定义

$$\bar{\chi}_{\bar{\alpha}} \equiv (\chi_\alpha)^*, \quad \bar{\chi}^{\bar{\alpha}} \equiv (\chi^\alpha)^*, \tag{1.27}$$

则 $\bar{\chi}^{\bar{\alpha}}$ 和 $\bar{\eta}^{\bar{\alpha}}$ 属于同一个表示空间, χ_α 和 η_α 也是如此.

电荷共轭矩阵 C 可以取为

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = i\begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = i\begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \tag{1.28}$$

从而得到

$$\Psi^c = C\bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\eta^\alpha \\ i\sigma^2\bar{\chi}_{\bar{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\chi}^{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

因此, 对于 Majorana 旋量 $\Psi = \Psi^c$, 有

$$\chi = \eta, \tag{1.30}$$

从而, 可将 Majorana 旋量记为

$$\Psi = \Psi^c = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

以下是一些有用的关系.

Dirac 方程 $i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = m\Psi$ 的 Lorentz 协变性要求

$$\gamma^\rho = \Lambda^\rho{}_\mu S\left(\Lambda\right) \gamma^\mu S^{-1}\left(\Lambda\right), \tag{1.32}$$

在 Weyl 表象下, 上式等价于

$$\begin{cases} \sigma^\rho = \Lambda^\rho{}_\mu s \sigma^\mu s^\dagger, \\ \bar{\sigma}^\rho = \Lambda^\rho{}_\mu s^{-1\dagger} \bar{\sigma}^\mu s^{-1}, \end{cases} \tag{1.33}$$

注意到 s 与 s^{-1}、$s^\dagger$ 与 $s^{-1\dagger}$ 分别持有指标 α 和 $\bar{\alpha}$, 则由上式可以判断出 σ^μ 和 $\bar{\sigma}^\mu$ 的带指标形式应表达为

$$\sigma^\mu = \sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\beta}}, \quad \bar{\sigma}^\mu = \bar{\sigma}^{\mu\bar{\alpha}\beta}. \tag{1.34}$$

定义

$$\sigma^{\mu\alpha\bar{\beta}} \equiv \varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\bar{\beta}\bar{\delta}}\sigma^\mu{}_{\gamma\bar{\delta}}, \quad \bar{\sigma}^\mu_{\bar{\alpha}\beta} \equiv \varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}\varepsilon_{\beta\delta}\bar{\sigma}^{\mu\bar{\gamma}\delta}, \tag{1.35}$$

利用恒等式

$$\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = \sigma^{\mu T}, \tag{1.36}$$

可以得到

$$\bar{\sigma}^{\mu}_{\bar{\alpha}\beta} = \sigma^{\mu}{}_{\beta\bar{\alpha}}, \quad \bar{\sigma}^{\mu\bar{\alpha}\alpha} = \sigma^{\mu\alpha\bar{\alpha}}. \tag{1.37}$$

此外, σ^μ 和 $\bar{\sigma}^\mu$ 还满足以下两个完备性关系

$$\mathrm{Tr}\left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right) = \sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\bar{\sigma}^{\nu\bar{\beta}\alpha} = 2\eta^{\mu\nu}, \tag{1.38a}$$

$$\sigma_{\mu\rho\bar{\sigma}}\bar{\sigma}^{\mu\bar{\alpha}\beta} = 2\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\sigma}}, \tag{1.38b}$$

其中第二个公式的证明用到了对任意 2×2 矩阵 A 成立的如下公式,

$$A = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}A\right)1 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma^{i}A\right)\sigma^{i}. \tag{1.39}$$

1.2 简单拉氏量模型

超对称是关于玻色子和费米子之间的对称性, 因此, 首先我们要写出一个拉氏量, 包含玻色子和费米子, 然后考虑引入联系二者的对称变换.

首先, 写出拉氏密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial^\mu\phi^\dagger\right) + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_\mu}\Psi, \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_\mu}\Psi, \end{aligned} \tag{1.40}$$

其中 $\overleftrightarrow{\partial_\mu} = \overrightarrow{\partial_\mu} - \overleftarrow{\partial_\mu}$, $\phi = (A+iB)\big/\sqrt{2}$ 是复标量场, Ψ 是 Majorana 旋量. 这是简化的 Wess-Zumino 模型.

接着, 要引入一个混合 ϕ 和 Ψ 的对称变换. 可以引入以 Majorana 旋量 ε 作为无穷小变换参数的 global 超对称变换

$$\begin{cases} \delta A = \bar{\varepsilon}\Psi, \\ \delta B = i\bar{\varepsilon}\gamma^{5}\Psi, \\ \delta\Psi = -i\gamma^{\mu}\varepsilon\partial_{\mu}A + \gamma^{\mu}\gamma^{5}\varepsilon\partial_{\mu}B, \\ \delta\bar{\Psi} = i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}A - \bar{\varepsilon}\gamma^{5}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}B, \end{cases} \tag{1.41}$$

或者, 直接用复标量场表达,

$$
\begin{cases}
\delta\phi = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_L\Psi, \\
\delta\phi^\dagger = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_R\Psi, \\
\delta\Psi = -\sqrt{2}i\gamma^\mu\left(P_R\varepsilon\partial_\mu\phi + P_L\varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger\right),
\end{cases}
\tag{1.42}
$$

其中手征投影算符 $P_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$, $P_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)$.

由于我们考虑的是 global 超对称变换, 有关系

$$
\delta\left(a\overleftrightarrow{\partial}b\right) = 2\left(\delta a\partial b - \partial a\delta b\right) + \text{total divergence}, \tag{1.43}
$$

对于任何 Majorana 旋量（有 Grassmann 性质） ξ, η, 有

$$
\bar{\xi}\gamma^\mu\eta = -\bar{\eta}\gamma^\mu\xi, \tag{1.44}
$$

从而, $\delta\mathcal{L}$ 的标量部分

$$
\begin{aligned}
\delta\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2\right] &= (\partial_\mu A)(\partial^\mu\delta A) + (\partial_\mu B)(\partial^\mu\delta B) \\
&= \bar{\varepsilon}(\partial_\mu A)(\partial^\mu\psi) + i\bar{\varepsilon}\gamma^5(\partial_\mu B)(\partial^\mu\psi),
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

旋量部分

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}\Psi\right) &= \frac{2i}{4}\left(\delta\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\delta\Psi\right) + \text{total div} \\
&= i\delta\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \text{total div} \\
&= -\bar{\varepsilon}\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu A)\partial_\mu\Psi - i\bar{\varepsilon}\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu B)\partial_\mu\Psi + \text{total div},
\end{aligned}
$$

而其中

$$
\begin{aligned}
\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu A)\partial_\mu\Psi &= \gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu(A\partial_\mu\Psi) - A\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu\Psi \\
&= -A\partial_\mu\partial^\mu\Psi + \text{total div} \\
&= \partial_\mu A\partial^\mu\Psi + \text{total div},
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

于是得到

$$\delta\left(\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\Psi\right)=\bar{\varepsilon}\left(-\partial^{\mu}A-i\gamma^{5}\partial^{\mu}B\right)\partial_{\mu}\Psi+\text{total div.} \tag{1.47}$$

因此, 拉氏密度 $\mathcal{L}$ 的变分

$$\delta\mathcal{L}=\delta\left[\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A)^{2}+\frac{1}{2}(\partial_{\mu}B)^{2}\right]+\delta\left(\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\Psi\right)=\text{total div}, \tag{1.48}$$

则作用量变分 $\delta S=\int d^{4}x\delta\mathcal{L}=0$. 即在超对称变换下, 作用量 S 保持不变.

现在, 考虑在 Weyl 表象下, 用 2 分量 Weyl 旋量表示拉氏密度 (1.40). 将 Majorana 旋量 Ψ 分解为

$$\Psi=\begin{pmatrix}\psi_{\alpha}\\ \bar{\psi}^{\bar{\alpha}}\end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

由具体的表示有

$$\Psi^{\dagger}=\left(\bar{\psi}_{\bar{\alpha}},\psi^{\alpha}\right),\quad \bar{\Psi}=-\Psi^{\dagger}\gamma^{0}=\left(\psi^{\alpha},\bar{\psi}_{\bar{\alpha}}\right), \tag{1.50}$$

则

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi&=\psi^{\alpha}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\partial_{\mu}\bar{\psi}^{\bar{\beta}}+\bar{\psi}_{\bar{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\bar{\alpha}\beta}\partial_{\mu}\psi_{\beta}=\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\left(\psi^{\alpha}\partial_{\mu}\bar{\psi}^{\bar{\beta}}+\bar{\psi}^{\bar{\beta}}\partial_{\mu}\psi^{\alpha}\right),\\ \left(\partial_{\mu}\bar{\Psi}\right)\gamma^{\mu}\Psi&=\partial_{\mu}\psi^{\alpha}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\bar{\psi}^{\bar{\beta}}+\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\bar{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\bar{\alpha}\beta}\psi_{\beta}=\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\left[\left(\partial_{\mu}\psi^{\alpha}\right)\bar{\psi}^{\bar{\beta}}+\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}^{\bar{\beta}}\right)\psi^{\alpha}\right],\end{aligned}$$

于是

$$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\Psi=2\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\left[\bar{\psi}^{\bar{\beta}}\partial_{\mu}\psi^{\alpha}-\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}^{\bar{\beta}}\right)\psi^{\alpha}\right]=2\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\bar{\psi}^{\bar{\beta}}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\psi^{\alpha}, \tag{1.51}$$

从而, 拉氏密度 (1.40) 可表示为

$$\mathcal{L}=\left(\partial_{\mu}\phi\right)\left(\partial^{\mu}\phi^{\dagger}\right)+\frac{i}{2}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\psi^{\alpha}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\bar{\psi}^{\bar{\beta}}. \tag{1.52}$$

至此, 超对称的第一步已经完成, 我们获得了一个拉氏密度 $\mathcal{L}$, 以及一个能把玻色子和费米子联系在一起的超对称变换, 更重要的是, 这个超对称变换保持作用量 S 不变.

下一步, 我们将考察全体超对称变换操作的结构, 并把它与 Poincaré 群结合起来.

1.3 简单拉氏量模型续: 对易关系的封闭性

本节中我们将考察超对称变换的变分 δ 的对易关系. 如果两次变分的对易子对各种场量的作用具有相同的形式, 我们就可以引入超对称变换的生成元, 并可能获得一个李代数, 继而获得群结构; 但如果不行, 那么我们必须对模型进行修改, 并且扩充群的概念.

考虑接连两次超对称变换, 其变分的对易关系

$$\begin{cases} [\delta_1, \delta_2]\,\phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\phi, \\ [\delta_1, \delta_2]\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi + i\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\varepsilon_1\gamma^\nu\partial_\nu\Psi, \end{cases} \tag{1.53}$$

我们可以看到, 对于标量场 ϕ, 超对称变换变分的对易子是时空平移 (生成元是 ∂_μ) 操作 $-2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu$; 但是, 对于旋量场 Ψ, 对易子除了时空平移操作部分, 还多出一项 $i\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\varepsilon_1\gamma^\nu\partial_\nu\psi$, 导致超对称变换变分的对易子对旋量场 Ψ 的作用与对标量场 ϕ 的作用具有不同的形式.

下面证明对易关系 (1.53).

证明:

对于 Dirac 旋量 ε_1, ε_2, 基于 Clifford 代数, 可以证明 Fierz 重排公式,

$$\begin{aligned} \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1 = -\frac{1}{4}\big(&\bar{\varepsilon}_1\varepsilon_2 + \bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\varepsilon_2\gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2\gamma_\mu\gamma^5 \\ &+ 2\bar{\varepsilon}_1\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_2\Sigma_{\mu\nu} + \bar{\varepsilon}_1\gamma^5\varepsilon_2\gamma^5\big). \end{aligned} \tag{1.54}$$

对于 Majorana 旋量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 有如下的二次型对称性,

$$\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1 = -\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\varepsilon_2, \tag{1.55a}$$
$$\bar{\varepsilon}_2\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1\varepsilon_2, \tag{1.55b}$$
$$\bar{\varepsilon}_2\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_1 = -\bar{\varepsilon}_1\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_2, \tag{1.55c}$$
$$\bar{\varepsilon}_2\gamma^5\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1\gamma^5\varepsilon_2, \tag{1.55d}$$
$$\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\gamma^5\varepsilon_2, \tag{1.55e}$$
$$\bar{\varepsilon}_2 P_L\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 P_L\varepsilon_2, \tag{1.55f}$$
$$\bar{\varepsilon}_2 P_R\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 P_R\varepsilon_2, \tag{1.55g}$$
$$\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu P_R\varepsilon_1 = -\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu P_L\varepsilon_2, \tag{1.55h}$$

再利用 Fierz 重排公式 (1.54), 可得

$$\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\varepsilon_2\gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_1\Sigma^{\mu\nu}\varepsilon_2\Sigma_{\mu\nu}. \tag{1.56}$$

此外, 还将会用到手征投影算符的如下关系,

$$\gamma^\mu P_L = P_R\gamma^\mu, \quad \gamma^\mu P_R = P_L\gamma^\mu \tag{1.57a}$$
$$\Sigma^{\mu\nu}P_L = P_L\Sigma^{\mu\nu}, \quad \Sigma^{\mu\nu}P_R = P_R\Sigma^{\mu\nu} \tag{1.57b}$$
$$P_R P_L = P_L P_R = 0, \tag{1.57c}$$
$$P_L P_L = P_L, \quad P_R P_R = P_R, \tag{1.57d}$$
$$P_R + P_L = 1, \tag{1.57e}$$

考虑两次超对称变换的连续作用. 对于标量场 ϕ, 由超对称变换 (1.42), 利用式 (1.57a), (1.57c) 和 (1.57d) 有

$$\delta_1\delta_2\phi = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_2 P_L\delta_1\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu P_R\varepsilon_1\partial_\mu\phi,$$
$$\delta_2\delta_1\phi = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_1 P_L\delta_2\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu P_R\varepsilon_2\partial_\mu\phi,$$

两式相减, 并利用式 (1.55h) 和 (1.57e), 可得

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\,\phi &= -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu P_R\varepsilon_1\partial_\mu\phi + 2i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu P_R\varepsilon_2\partial_\mu\phi \\
&= -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\left(P_R + P_L\right)\varepsilon_1\partial_\mu\phi \\
&= -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\phi. \qquad (1.58)
\end{aligned}$$

对于旋量场 Ψ, 由超对称变换(1.42), 有

$$\begin{aligned}
\delta_1\delta_2\Psi &= -2i\gamma^\mu\left(P_R\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1P_L\partial_\mu\Psi + P_L\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1P_R\partial_\mu\Psi\right), \\
\delta_2\delta_1\Psi &= -2i\gamma^\mu\left(P_R\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2P_L\partial_\mu\Psi + P_L\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2P_R\partial_\mu\Psi\right),
\end{aligned}$$

两式相减, 注意到旋量二次型 (如 $\bar{\varepsilon}_2\gamma_\nu\varepsilon_1$) 是 c 数, 与任意算符对易, 并利用式 (1.56) 和式 (1.57a) $\sim$ (1.57e), 可得

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\,\Psi &= -2i\gamma^\mu\left(P_R\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1P_L + P_L\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1P_R\right)\partial_\mu\Psi \\
&\qquad +2i\gamma^\mu\left(P_R\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2P_L + P_L\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2P_R\right)\partial_\mu\Psi \\
&= 2i\gamma^\mu\left[P_R\left(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1\right)P_L + P_L\left(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1\right)P_R\right]\partial_\mu\Psi \\
&= -2i\gamma^\mu\Bigg[P_R\left(\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_2\gamma^\nu\varepsilon_1\gamma_\nu - \bar{\varepsilon}_2\Sigma^{\rho\sigma}\varepsilon_1\Sigma_{\rho\sigma}\right)P_L \\
&\qquad\qquad +P_L\left(\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_2\gamma^\nu\varepsilon_1\gamma_\nu - \bar{\varepsilon}_2\Sigma^{\rho\sigma}\varepsilon_1\Sigma_{\rho\sigma}\right)P_R\Bigg]\partial_\mu\Psi \\
&= -i\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_2\gamma^\nu\varepsilon_1\gamma_\nu\left(P_L + P_R\right)\partial_\mu\Psi \\
&= -i\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_2\gamma^\nu\varepsilon_1\gamma_\nu\partial_\mu\Psi \\
&= -i\gamma^\mu\gamma^\nu\bar{\varepsilon}_2\gamma_\nu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi, \qquad (1.59)
\end{aligned}$$

将 Dirac 矩阵的定义式 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv 2\eta^{\mu\nu}$ 改写成

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu, \qquad (1.60)$$

代入式 (1.59), 便得到

$$[\delta_1, \delta_2]\,\Psi = -i\gamma^\mu\gamma^\nu\bar{\varepsilon}_2\gamma_\nu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi + i\gamma^\nu\bar{\varepsilon}_2\gamma_\nu\varepsilon_1\gamma^\mu\partial_\mu\Psi. \quad (1.61)$$

式 (1.58) 和 (1.61) 即是要证的超对称变换变分对易关系 (1.53).
证毕.

为了消除令人不悦的 $i\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\varepsilon_1\gamma^\nu\partial_\nu\psi$, 而使超对称变换变分的对易子对旋量场 Ψ 的作用与对标量场 ϕ 的作用形式相同, 我们对旋量场 Ψ 的超对称无穷小变换进行如下修改,

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= -\sqrt{2}i\gamma^\mu\left(P_R\varepsilon\partial_\mu\phi + P_L\varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger\right) - \sqrt{2}\left(P_R\varepsilon\Phi + P_L\varepsilon\Phi^\dagger\right)\\ &= -i\gamma^\mu\varepsilon\partial_\mu A + \gamma^\mu\gamma^5\varepsilon\partial_\mu B - \varepsilon F - i\gamma^5\varepsilon G,\end{aligned} \tag{1.62}$$

其中引入了辅助复标量场 $\Phi \equiv (F+iG)/\sqrt{2}$, 它也有自己的超对称变换

$$\begin{cases}\delta\Phi = \sqrt{2}i\bar{\varepsilon}P_L\gamma^\mu\partial_\mu\Psi,\\ \delta\Phi^\dagger = \sqrt{2}i\bar{\varepsilon}P_R\gamma^\mu\partial_\mu\Psi,\end{cases} \tag{1.63}$$

或

$$\begin{cases}\delta F = i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi,\\ \delta G = -\bar{\varepsilon}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi,\end{cases} \tag{1.64}$$

在这种引入了辅助场的新的超对称变换下,

$$\begin{cases}[\delta_1,\delta_2]\,\phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\phi,\\ [\delta_1,\delta_2]\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi,\\ [\delta_1,\delta_2]\,\Phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Phi,\end{cases} \tag{1.65}$$

三者具有相同的形式, 都是时空平移操作.

下面证明对易关系 (1.65).
证明: 在修改后的超对称变换 (1.62) 下, 对于标量场 ϕ, 有

$$\begin{aligned}\delta_1\delta_2\phi &= \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_2P_L\delta_1\Psi = -2\left(i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu P_R\varepsilon_1\partial_\mu\phi + \bar{\varepsilon}_2P_L\varepsilon_1\Phi^\dagger\right),\\ \delta_2\delta_1\phi &= \sqrt{2}\bar{\varepsilon}_1P_L\delta_2\Psi = -2\left(i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu P_R\varepsilon_2\partial_\mu\phi + \bar{\varepsilon}_1P_L\varepsilon_2\Phi^\dagger\right),\end{aligned}$$

两式相减, 利用式 (1.55h), (1.55f) 和 (1.57e), 得

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2]\,\phi &= 2\left[i\left(\bar\varepsilon_1\gamma^\mu P_R\varepsilon_2-\bar\varepsilon_2\gamma^\mu P_R\varepsilon_1\right)\partial_\mu\phi+\left(\bar\varepsilon_1 P_L\varepsilon_2-\bar\varepsilon_2 P_L\varepsilon_1\right)\Phi^\dagger\right]\\
&= -2i\bar\varepsilon_2\gamma^\mu\left(P_L+P_R\right)\varepsilon_1\partial_\mu\phi\\
&= -2i\bar\varepsilon_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\phi, \qquad (1.66)
\end{aligned}$$

与式 (1.53) 结果相同.

对于旋量场 Ψ, 有

$$\begin{aligned}
\delta_1\delta_2\Psi = -2i\gamma^\mu\left(P_R\varepsilon_2\bar\varepsilon_1 P_L+P_L\varepsilon_2\bar\varepsilon_1 P_R\right)\partial_\mu\Psi\\
-2i\left[P_R\varepsilon_2\bar\varepsilon_1 P_L+P_L\varepsilon_2\bar\varepsilon_1 P_R\right]\gamma^\mu\partial_\mu\Psi,\\
\delta_2\delta_1\Psi = -2i\gamma^\mu\left(P_R\varepsilon_1\bar\varepsilon_2 P_L+P_L\varepsilon_1\bar\varepsilon_2 P_R\right)\partial_\mu\Psi\\
-2i\left[P_R\varepsilon_1\bar\varepsilon_2 P_L+P_L\varepsilon_1\bar\varepsilon_2 P_R\right]\gamma^\mu\partial_\mu\Psi,
\end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2]\,\Psi &= 2i\gamma^\mu\left[P_R\left(\varepsilon_1\bar\varepsilon_2-\varepsilon_2\bar\varepsilon_1\right)P_L+P_L\left(\varepsilon_1\bar\varepsilon_2-\varepsilon_2\bar\varepsilon_1\right)P_R\right]\partial_\mu\Psi\\
&\quad +2i\left[P_R\left(\varepsilon_1\bar\varepsilon_2-\varepsilon_2\bar\varepsilon_1\right)P_L+P_L\left(\varepsilon_1\bar\varepsilon_2-\varepsilon_2\bar\varepsilon_1\right)P_R\right]\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\\
&= 2i\gamma^\mu\Bigg[P_R\left(\frac{1}{2}\bar\varepsilon_1\gamma^\nu\varepsilon_2\gamma_\nu+\bar\varepsilon_1\Sigma^{\nu\lambda}\varepsilon_2\Sigma_{\nu\lambda}\right)P_L\\
&\qquad +P_L\left(\frac{1}{2}\bar\varepsilon_1\gamma^\nu\varepsilon_2\gamma_\nu+\bar\varepsilon_1\Sigma^{\nu\lambda}\varepsilon_2\Sigma_{\nu\lambda}\right)P_R\Bigg]\partial_\mu\Psi\\
&\quad +2i\Bigg[P_R\left(\frac{1}{2}\bar\varepsilon_1\gamma^\nu\varepsilon_2\gamma_\nu+\bar\varepsilon_1\Sigma^{\nu\lambda}\varepsilon_2\Sigma_{\nu\lambda}\right)P_L\\
&\qquad +P_L\left(\frac{1}{2}\bar\varepsilon_1\gamma^\nu\varepsilon_2\gamma_\nu+\bar\varepsilon_1\Sigma^{\nu\lambda}\varepsilon_2\Sigma_{\nu\lambda}\right)P_R\Bigg]\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\\
&= i\gamma^\mu\bar\varepsilon_1\gamma^\nu\varepsilon_2\gamma_\nu\left(P_L+P_R\right)\partial_\mu\Psi+i\bar\varepsilon_1\gamma^\nu\varepsilon_2\gamma_\nu\left(P_L+P_R\right)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\\
&= i\left\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\right\}\bar\varepsilon_1\gamma_\nu\varepsilon_2\partial_\mu\Psi\\
&= -2i\bar\varepsilon_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi. \qquad (1.67)
\end{aligned}$$

对于辅助场 Φ, 有

$$\begin{aligned}
\delta_1\delta_2\Phi &= \sqrt{2}i\bar{\varepsilon}_2 P_L\gamma^\mu\partial_\mu\delta_1\Psi \\
&= -2i\bar{\varepsilon}_2 P_L\gamma^\mu\partial_\mu\left[i\gamma^\nu\left(P_R\varepsilon_1\partial_\nu\phi + P_L\varepsilon_1\partial_\nu\phi^\dagger\right) + \left(P_R\varepsilon_1\Phi + P_L\varepsilon_1\Phi^\dagger\right)\right] \\
&= -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\partial_\mu\left(i\gamma^\nu P_L\varepsilon_1\partial_\nu\phi^\dagger + P_R\varepsilon_1\Phi\right), \\
\delta_2\delta_1\Phi &= -2i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\partial_\mu\left(i\gamma^\nu P_L\varepsilon_2\partial_\nu\phi^\dagger + P_R\varepsilon_2\Phi\right),
\end{aligned}$$

利用如下恒等式,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu(...)\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}(...)\partial_\mu\partial_\nu = \eta^{\mu\nu}(...)\partial_\mu\partial_\nu = (...)\partial^2, \tag{1.68}$$

可得

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2]\Phi &= -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\partial_\mu\left(i\gamma^\nu P_L\varepsilon_1\partial_\nu\phi^\dagger + P_R\varepsilon_1\Phi\right) \\
&\quad +2i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\partial_\mu\left(i\gamma^\nu P_L\varepsilon_2\partial_\nu\phi^\dagger + P_R\varepsilon_2\Phi\right) \\
&= 2\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\gamma^\nu P_L\varepsilon_1\partial_\mu\partial_\nu\phi^\dagger - 2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu P_R\varepsilon_1\partial_\mu\Phi \\
&\quad -2\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\gamma^\nu P_L\varepsilon_2\partial_\mu\partial_\nu\phi^\dagger + 2i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu P_R\varepsilon_2\partial_\mu\Phi \\
&= 2\bar{\varepsilon}_2 P_L\varepsilon_1\partial^2\phi^\dagger - 2\bar{\varepsilon}_1 P_L\varepsilon_2\partial^2\phi^\dagger \\
&\quad -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu P_R\varepsilon_1\partial_\mu\Phi + 2i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu P_R\varepsilon_2\partial_\mu\Phi \\
&= -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\left(P_R + P_L\right)\varepsilon_1\partial_\mu\Phi \\
&= -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Phi.
\end{aligned} \tag{1.69}$$

式 (1.66), (1.67) 和 (1.69) 即是要证的超对称变换变分对易关系 (1.65). **证毕**.

至此, 我们考察了一个更新版的超对称变换, 它的无穷小变换 δ 对易作用到场量 ϕ, Ψ, Φ 上都是时空平移操作. 但是, 新的超对称变换是否保持作用量 S 不变, 并非显而易见的. 下面我们来考察作用量 S 的不变性.

对式 (1.62) 取 Dirac 共轭, 得

$$\delta\bar{\Psi} = \sqrt{2}i\left(\bar{\varepsilon}P_L\partial_\mu\phi^\dagger + \bar{\varepsilon}P_R\partial_\mu\phi\right)\gamma^\mu - \sqrt{2}\left(\Phi^\dagger\bar{\varepsilon}P_L + \Phi\bar{\varepsilon}P_R\right), \tag{1.70}$$

从而, 利用式 (1.55a) 和 (1.68), 可得

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\Psi\right) &= \frac{i}{4}\left[\delta\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi+\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\delta\Psi-\partial_{\mu}\left(\delta\bar{\Psi}\right)\gamma^{\mu}\Psi-\partial_{\mu}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\delta\Psi\right] \\
&= \frac{i}{4}\left(2\delta\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi-2\partial_{\mu}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\delta\Psi\right)+\text{total div} \\
&= i\delta\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi+\text{total div} \\
&= -\sqrt{2}\bar{\varepsilon}\left(P_{L}\partial^{\mu}\phi^{\dagger}+P_{R}\partial^{\mu}\phi+iP_{L}\gamma^{\mu}\Phi^{\dagger}+iP_{R}\gamma^{\mu}\Phi\right)\partial_{\mu}\Psi \\
&\quad\quad +\text{total div.} \qquad (1.71)
\end{aligned}$$

另一方面, 标量场的超对称变分仍是式 (1.42) 中的形式, 因而

$$\begin{aligned}
\delta\left(\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^{\dagger}\right) &= \partial_{\mu}\left(\delta\phi\right)\partial^{\mu}\phi^{\dagger}+\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\left(\delta\phi^{\dagger}\right) \\
&= \sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_{L}\partial^{\mu}\phi^{\dagger}\partial_{\mu}\Psi+\sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_{R}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\Psi. \qquad (1.72)
\end{aligned}$$

式 (1.71) 和 (1.72) 相加, 即得

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\Psi\right)+\delta\left(\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^{\dagger}\right) &= -\Phi^{\dagger}\left(\sqrt{2}i\bar{\varepsilon}P_{L}\partial\!\!\!/\Psi\right)-\left(\sqrt{2}i\bar{\varepsilon}P_{R}\partial\!\!\!/\Psi\right)\Phi \\
&\quad\quad +\text{total div} \\
&= -\Phi^{\dagger}\delta\Phi-\delta\Phi^{\dagger}\Phi+\text{total div} \\
&= -\delta\left(\Phi^{\dagger}\Phi\right)+\text{total div}, \qquad (1.73)
\end{aligned}$$

从而,

$$\delta\left(\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\Psi+\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^{\dagger}+\Phi^{\dagger}\Phi\right)=\text{total div}, \qquad (1.74)$$

所以, 我们可以看到, 倘若把辅助的复标量场 Φ 加入到拉氏密度中, 作用量 S 将是超对称变换下的不变量. 于是, 修改拉氏密度为

$$\mathcal{L}=\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\Psi+\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^{\dagger}+\Phi^{\dagger}\Phi, \qquad (1.75)$$

即可保证作用量 S 在更新版的超对称变换下不变. 注意到, Φ 没有动能项, 因此, 它仅仅是一种辅助场, 在未来将通过运动方程消除. 利用

式 (1.51), 可将式 (1.75)改写成

$$\mathcal{L}=\frac{i}{2}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\alpha}}\left(\bar{\psi}^{\bar{\alpha}}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\psi^{\alpha}\right)+\partial_{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi^{\dagger}+\Phi^{\dagger}\Phi. \tag{1.76}$$

以上拉氏密度 $\mathcal{L}$ 中所有的场都没有质量项, 我们尝试给它添上质量项

$$\mathcal{L}_m=m\left(\frac{1}{2}\bar{\Psi}\Psi+\phi^{\dagger}\Phi+\Phi^{\dagger}\phi\right)=m\left(\frac{1}{2}\bar{\Psi}\Psi+AF+BG\right), \tag{1.77}$$

由

$$\begin{aligned}
\delta\left(\bar{\Psi}\Psi\right) &= \delta\bar{\Psi}\Psi+\bar{\Psi}\delta\Psi \\
&= \sqrt{2}\left(i\bar{\varepsilon}P_L\partial_{\mu}\phi^{\dagger}\gamma^{\mu}\Psi+i\bar{\varepsilon}P_R\partial_{\mu}\phi\gamma^{\mu}\Psi-\bar{\varepsilon}P_L\Psi\Phi^{\dagger}-\bar{\varepsilon}P_R\Psi\Phi\right) \\
&\quad -\sqrt{2}\left(i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}P_R\varepsilon\partial_{\mu}\phi+i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}P_L\varepsilon\partial_{\mu}\phi^{\dagger}+\bar{\Psi}P_R\varepsilon\Phi+\bar{\Psi}P_L\varepsilon\Phi^{\dagger}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\left(i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}P_R\Psi\partial_{\mu}\phi^{\dagger}+i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}P_L\Psi\partial_{\mu}\phi-\bar{\varepsilon}P_L\Psi\Phi^{\dagger}-\bar{\varepsilon}P_R\Psi\Phi\right) \\
&= -2\Bigg[\left(\sqrt{2}i\bar{\varepsilon}P_R\partial\!\!\!/\Psi\right)\phi+\left(\sqrt{2}i\bar{\varepsilon}P_L\partial\!\!\!/\Psi\right)\phi^{\dagger} \\
&\qquad +\left(\sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_R\Psi\right)\Phi+\left(\sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_L\Psi\right)\Phi^{\dagger}\Bigg]+\text{total div} \\
&= -2\left(\delta\Phi^{\dagger}\phi+\phi^{\dagger}\delta\Phi+\delta\phi^{\dagger}\Phi+\Phi^{\dagger}\delta\phi\right)+\text{total div} \\
&= -2\delta\left(\phi^{\dagger}\Phi+\Phi^{\dagger}\phi\right)+\text{total div},
\end{aligned} \tag{1.78}$$

可得

$$\delta\mathcal{L}_m=m\left[\frac{1}{2}\delta\left(\bar{\Psi}\Psi\right)+\delta\left(\phi^{\dagger}\Phi+\Phi^{\dagger}\phi\right)\right]=\text{total div}. \tag{1.79}$$

因此, 为拉氏密度添上质量项 $\mathcal{L}_m$ 之后, 作用量 S 仍保持不变.

现在, 总的拉氏密度 $\mathcal{L}$ 为

$$\mathcal{L}=\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\Psi+\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^{\dagger}+\Phi^{\dagger}\Phi+\frac{1}{2}m\bar{\Psi}\Psi+m\left(\phi^{\dagger}\Phi+\Phi^{\dagger}\phi\right), \tag{1.80}$$

我们用 Euler-Lagrange 方程来计算场的运动方程,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}=0 \qquad \Rightarrow \qquad m\Phi^\dagger=\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger, \tag{1.81}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi^\dagger=-m\phi^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad \Phi=-m\phi, \tag{1.82}$$

将式 (1.82) 代入式 (1.80) , 即可把辅助场 Φ 消去:

$$\mathcal{L}=\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}\Psi+\frac{1}{2}m\bar{\Psi}\Psi+\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^\dagger-m^2\phi^\dagger\phi. \tag{1.83}$$

现在完整的 global 超对称变换是

$$\begin{cases} \delta\phi=\sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_L\psi, \\ \delta\phi^\dagger=\sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_R\psi, \\ \delta\Psi=-\sqrt{2}i\gamma^\mu\left(P_R\varepsilon\partial_\mu\phi+P_L\varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger\right)+\sqrt{2}m\left(P_R\varepsilon\phi+P_L\varepsilon\phi^\dagger\right), \\ \delta\bar{\Psi}=-\sqrt{2}i\left(\bar{\varepsilon}P_R\partial_\mu\phi+\bar{\varepsilon}P_L\partial_\mu\phi^\dagger\right)\gamma^\mu+\sqrt{2}m\left(\bar{\varepsilon}P_R\phi+\bar{\varepsilon}P_L\phi^\dagger\right), \\ \delta\Phi=\sqrt{2}i\bar{\varepsilon}P_L\partial\!\!\!/\Psi=-m\delta\phi, \\ \delta\Phi^\dagger=\sqrt{2}i\bar{\varepsilon}P_R\partial\!\!\!/\Psi=-m\delta\phi^\dagger. \end{cases} \tag{1.84}$$

在此超对称变换下, 拉氏密度 (1.80) 对应的作用量 S 保持不变, 并且它的无穷小变换 δ 对易作用到场量 ϕ, Ψ, Φ 上都是时空平移操作, 如式 (1.65) 所示.

将式 (1.82) 代入式 (1.81), 可得标量场 ϕ 的运动方程

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi+m^2\phi=0; \tag{1.85}$$

由超对称变换 (1.84) 可以看出

$$\delta\Phi=-m\delta\phi=-m\sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_L\Psi=\sqrt{2}i\bar{\varepsilon}P_L\partial\!\!\!/\Psi, \tag{1.86}$$

即

$$\left(i\partial\!\!\!/ + m\right)\Psi = 0, \tag{1.87}$$

这是旋量场 Ψ 的运动方程.

1.4 超 Poincaré 代数

在上一节, 我们得到了一个拉氏密度 (1.83), 它描述两个场, 复标量场 ϕ 和旋量场 Ψ, 两者具有相同的质量 m. 但应注意, 这个拉氏密度的导出需要经过运动方程. 因为, 场必须首先承受运动方程的约束, 所以超对称并没有真正实现, 我们得到的只是约束在质壳上的超对称.

超对称变换 (1.84) 形成了一个"广义的群", 即这些无穷小变换形成一个封闭的代数, 一个扩展意义上的李代数.

自旋为 s 的场 ψ 张成的线性空间构成 SU(2) 的 $(2s+1)$ 维表示空间. 在经受转动 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ 后, 场 ψ 作如下变换

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\theta_n J_n}\psi(x), \tag{1.88}$$

其中, 生成元 J_n 满足对易关系

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k. \tag{1.89}$$

倘若做的是无穷小的转动, 则场 ψ 进行变化

$$\delta\psi = i\theta_n J_n \psi. \tag{1.90}$$

场 ψ 分别做两次无穷小转动的变化为

$$\delta_1\psi = i\theta_n^1 J_n\psi, \quad \delta_2\psi = i\theta_n^2 J_n\psi, \tag{1.91}$$

因此, 利用式 (1.89), 有

$$[\delta_1, \delta_2] \psi = -i\varepsilon_{ijk}\theta_i^1\theta_j^2 J_k\psi, \tag{1.92}$$

亦即算符方程

$$[\delta_1, \delta_2] = -i\varepsilon_{ijk}\theta_i^1\theta_j^2 J_k \tag{1.93}$$

成立, 它包含变换参数 θ 的二次因子和生成元 J_k.

前面算得超对称变分对易子

$$[\delta_1, \delta_2] = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu = 2\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1 P_\mu, \tag{1.94}$$

其中 $P_\mu \equiv -i\partial_\mu$ 是时空平移的生成元, 也就是 Poincaré 群的生成元.

上式与式 (1.93) 具有相同的形式. 于是, 我们可以考虑, 把超对称变换全体添加到 Poincaré 群上, 形成一个扩展的Poincaré 群, 称为*超 Poincaré 群*.

现在, 我们要研究超对称变换真正的生成元. 考虑超对称无穷小变换

$$\delta\,(\text{field}) = i\left(\varepsilon^A Q_A\right)(\text{field}), \tag{1.95}$$

其中 Majorana 旋量 ε^A 是参数, Majorana 旋量算符 Q_A 是超对称变换的生成元, 它们都自然地具有 Grassmann 性质. 我们在 Weyl 表象下把它们写成分量形式

$$\varepsilon^A = \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \bar{\eta}_{\bar{\beta}} \end{pmatrix}, \quad Q_A = \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}, \tag{1.96}$$

其中 η^α, Q_α, $\bar{\eta}_{\bar{\beta}}$, $\bar{Q}^{\bar{\beta}}$ 是 2 分量 Weyl 旋量. 于是, 超对称变换又可以写成

$$\delta = i\left(\eta^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_{\bar{\alpha}}\bar{Q}^{\bar{\alpha}}\right) = i\left(\eta Q + \bar{\eta}\bar{Q}\right), \tag{1.97}$$

因此, 利用 Grassmann 性质 $\eta^\alpha Q_\beta = -Q_\beta \eta^\alpha$, 有

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2] &= -\left[{\eta_1}^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_{1\bar{\alpha}} \bar{Q}^{\bar{\alpha}},\ {\eta_2}^\beta Q_\beta + \bar{\eta}_{2\bar{\beta}} \bar{Q}^{\bar{\beta}}\right] \\
&= -\left({\eta_1}^\alpha Q_\alpha {\eta_2}^\beta Q_\beta - {\eta_2}^\beta Q_\beta {\eta_1}^\alpha Q_\alpha\right) - \left({\eta_1}^\alpha Q_\alpha \bar{\eta}_{2\bar{\beta}} \bar{Q}^{\bar{\beta}} - \bar{\eta}_{2\bar{\beta}} \bar{Q}^{\bar{\beta}} {\eta_1}^\alpha Q_\alpha\right) \\
&\quad - \left(\bar{\eta}_{1\bar{\alpha}} \bar{Q}^{\bar{\alpha}} {\eta_2}^\beta Q_\beta - {\eta_2}^\beta Q_\beta \bar{\eta}_{1\bar{\alpha}} \bar{Q}^{\bar{\alpha}}\right) - \left(\bar{\eta}_{1\bar{\alpha}} \bar{Q}^{\bar{\alpha}} \bar{\eta}_{2\bar{\beta}} \bar{Q}^{\bar{\beta}} - \bar{\eta}_{2\bar{\beta}} \bar{Q}^{\bar{\beta}} \bar{\eta}_{1\bar{\alpha}} \bar{Q}^{\bar{\alpha}}\right) \\
&= -{\eta_2}^\beta \left(Q_\alpha Q_\beta + Q_\beta Q_\alpha\right) {\eta_1}^\alpha - \bar{\eta}_{2\bar{\beta}} \left(\bar{Q}^{\bar{\alpha}} \bar{Q}^{\bar{\beta}} + \bar{Q}^{\bar{\beta}} \bar{Q}^{\bar{\alpha}}\right) \bar{\eta}_{1\bar{\alpha}} \\
&\quad - {\eta_2}^\beta \left(\bar{Q}^{\bar{\alpha}} Q_\beta + Q_\beta \bar{Q}^{\bar{\alpha}}\right) \bar{\eta}_{1\bar{\alpha}} + {\eta_1}^\alpha \left(Q_\alpha \bar{Q}^{\bar{\beta}} + \bar{Q}^{\bar{\beta}} Q_\alpha\right) \bar{\eta}_{2\bar{\beta}}.
\end{aligned} \tag{1.98}$$

另一方面, 由

$$\varepsilon^A = \varepsilon = \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \bar{\eta}_{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\eta}^{\bar{\alpha}} & \eta_\alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \eta_\alpha & \bar{\eta}^{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}, \tag{1.99}$$

得

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 &= \begin{pmatrix} \eta_{2\alpha} & \bar{\eta}_2^{\bar{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu\alpha\bar{\beta}} \\ \bar{\sigma}^\mu_{\bar{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^\beta \\ \bar{\eta}_{1\bar{\beta}} \end{pmatrix} \\
&= -\eta_2^\alpha {\sigma^\mu}_\alpha{}^{\bar{\beta}} \bar{\eta}_{1\bar{\beta}} + \eta_1^\alpha {\sigma^\mu}_\alpha{}^{\bar{\beta}} \bar{\eta}_{2\bar{\beta}},
\end{aligned} \tag{1.100}$$

于是可以把超对称变换的对易子 (1.94)分解成 2 分量旋量

$$[\delta_1, \delta_2] = 2\left(-\eta_2^\alpha {\sigma^\mu}_\alpha{}^{\bar{\beta}} \bar{\eta}_{1\bar{\beta}} + \eta_1^\alpha {\sigma^\mu}_\alpha{}^{\bar{\beta}} \bar{\eta}_{2\bar{\beta}}\right) P_\mu, \tag{1.101}$$

与式 (1.98) 比较, 得出超对称生成元间的关系为

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad \left\{\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\right\} = 1, \quad \left\{Q_\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\right\} = 2{\sigma^\mu}_\alpha{}^{\bar{\beta}} P_\mu, \tag{1.102}$$

这些关系是*反对易关系*, 源自超对称生成元的 Grassmann 性质. 为了方便, 我们把对上述反对易关系最后一式的指标进行升降, 得

$$\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\bar{\beta}}\right\} = 2{\sigma^\mu}_{\alpha\bar{\beta}} P_\mu, \quad \left\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\right\} = 2\sigma^{\mu\alpha\bar{\beta}} P_\mu = 2\bar{\sigma}^{\mu\bar{\beta}\alpha} P_\mu. \tag{1.103}$$

为了完成超 Poincaré 代数, 我们还需要知道 Poincaré 代数的生成元 $J_{\mu\nu}$, P_μ 与超对称的生成元 Q_α, $\bar{Q}^{\bar{\alpha}}$ 之间的对易关系.

对于 Weyl 旋量 ψ_α 和 $\bar{\psi}_{\bar{\alpha}}$, 有

$$[J_{\mu\nu}, \psi_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \psi_\beta, \tag{1.104}$$

$$\left[J_{\mu\nu}, \bar{\psi}_{\bar{\alpha}}\right] = -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}} \bar{\psi}_{\bar{\beta}}, \tag{1.105}$$

其中

$$\begin{cases} (\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta = \dfrac{1}{4}\left(\sigma_{\mu\alpha}{}^{\bar{\alpha}} \bar{\sigma}^\beta_{\nu\bar{\alpha}} - \sigma_{\nu\alpha}{}^{\bar{\alpha}} \bar{\sigma}^\beta_{\mu\bar{\alpha}}\right), \\ (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}} = \dfrac{1}{4}\left(\bar{\sigma}^\alpha_{\mu\bar{\alpha}} \sigma_{\nu\alpha}{}^{\bar{\beta}} - \bar{\sigma}^\alpha_{\nu\bar{\alpha}} \sigma_{\mu\alpha}{}^{\bar{\beta}}\right). \end{cases} \tag{1.106}$$

超对称生成元 Q_α 和 $\bar{Q}_{\bar{\alpha}}$ 也是 Weyl 旋量, 因而满足式 (1.104) 和 (1.105), 即

$$[J_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \tag{1.107}$$

$$\left[J_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\bar{\alpha}}\right] = -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}} \bar{Q}_{\bar{\beta}}. \tag{1.108}$$

另一方面, 假设

$$[Q_\alpha, P_\mu] = e(\sigma_\mu)_{\alpha\bar{\beta}} \bar{Q}^{\bar{\beta}}, \tag{1.109}$$

注意到 $\bar{Q}_{\bar{\alpha}} = (Q_\alpha)^*$ 和 $\sigma^\dagger_\mu = \sigma_\mu$, 可得上式的复共轭为

$$\left[\bar{Q}_{\bar{\alpha}}, P_\mu\right] = e^*\left(\sigma^T_\mu\right)_{\bar{\alpha}\beta} Q^\beta = e^*(\sigma_\mu)_{\beta\bar{\alpha}} Q^\beta, \tag{1.110}$$

两式一同代入 Jacobi 恒等式

$$[[Q_\alpha, P_\mu], P_\nu] + [[P_\mu, P_\nu], Q_\alpha] + [[P_\nu, Q_\alpha], P_\mu] = 0, \tag{1.111}$$

并利用式 (1.106), 得到

$$\begin{aligned} 0 &= e\sigma_{\mu\alpha\bar{\beta}}\left[\bar{Q}^{\bar{\beta}}, P_\nu\right] - e\sigma_{\nu\alpha\bar{\beta}}\left[\bar{Q}^{\bar{\beta}}, P_\mu\right] \\ &= |e|^2\left(\sigma_{\mu\alpha\bar{\beta}}\sigma_\nu{}^{\beta\bar{\beta}} - \sigma_{\nu\alpha\bar{\beta}}\sigma_\mu{}^{\beta\bar{\beta}}\right)Q_\beta \\ &= |e|^2\left(\sigma_{\mu\alpha\bar{\beta}}\bar{\sigma}_\nu^{\bar{\beta}\beta} - \sigma_{\nu\alpha\bar{\beta}}\bar{\sigma}_\mu^{\bar{\beta}\beta}\right)Q_\beta \\ &= 4|e|^2(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \end{aligned} \tag{1.112}$$

必有

$$|e| = 0, \tag{1.113}$$

故

$$[Q_\alpha, P_\mu] = \left[\bar{Q}_{\bar{\alpha}}, P_\mu\right] = 0. \tag{1.114}$$

现在, 结合 Poincaré 代数生成元的对易关系, 我们得到了超 Poincaré 代数的结构:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i\left(\eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}\right), \tag{1.115a}$$

$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i\left(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho\right), \tag{1.115b}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{1.115c}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 = \left\{\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\right\}, \tag{1.115d}$$

$$\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\bar{\beta}}\right\} = 2\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\beta}}P_\mu, \tag{1.115e}$$

$$\left\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\right\} = 2\sigma^{\mu\bar{\beta}\alpha}P_\mu, \tag{1.115f}$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 = \left[\bar{Q}_{\bar{\alpha}}, P_\mu\right], \tag{1.115g}$$

$$[J_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \tag{1.115h}$$

$$\left[J_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\bar{\alpha}}\right] = -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}} Q_\beta, \tag{1.115i}$$

这是一种阶化 (graded) 李代数.

作为阶化李代数, 应有如下形式的 Jacobi 恒等式,

$$\left[\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\bar{\beta}}\right\}, J_{\mu\nu}\right] = \left\{Q_\alpha, \left[\bar{Q}_{\bar{\beta}}, J_{\mu\nu}\right]\right\} + \left\{\bar{Q}_{\bar{\beta}}, [Q_\alpha, J_{\mu\nu}]\right\}. \tag{1.116}$$

下面证明超 Poincaré 代数的生成元满足这一恒等式.

证明: 由式 (1.10) 和 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\equiv 2\eta^{\mu\nu}$ 可得

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu+\sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu=\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu+\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu=2\eta_{\mu\nu}1, \tag{1.117}$$

从而

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\sigma_\rho+\sigma_\mu\bar{\sigma}_\rho\sigma_\nu=2\eta_{\nu\rho}\sigma_\mu, \tag{1.118a}$$
$$\sigma_\rho\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu+\sigma_\rho\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu=2\eta_{\mu\nu}\sigma_\rho, \tag{1.118b}$$
$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\rho\sigma_\nu+\sigma_\rho\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu=2\eta_{\mu\rho}\sigma_\nu, \tag{1.118c}$$

$(1.118a)+(1.118b)-(1.118c)$, 得

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\sigma_\rho+\sigma_\rho\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu=2\left(\eta_{\nu\rho}\sigma_\mu+\eta_{\mu\nu}\sigma_\rho-\eta_{\mu\rho}\sigma_\nu\right). \tag{1.119}$$

此外, 由式 (1.37) 可得

$$(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\rho)_{\bar{\beta}\alpha}=(\bar{\sigma}_\mu)_{\bar{\beta}}{}^{\gamma}(\sigma_\nu)_{\gamma}{}^{\bar{\delta}}(\bar{\sigma}_\rho)_{\bar{\delta}\alpha}=(\sigma_\mu)^{\gamma}{}_{\bar{\beta}}(\bar{\sigma}_\nu)^{\bar{\delta}}{}_{\gamma}(\sigma_\rho)_{\alpha\bar{\delta}}=(\sigma_\rho\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu)_{\alpha\bar{\beta}}. \tag{1.120}$$

从而, 欲证的 Jacobi 恒等式(1.116)的右边

$$\begin{aligned}
&\left\{Q_\alpha,\left[\bar{Q}_{\bar{\beta}},J_{\mu\nu}\right]\right\}+\left\{\bar{Q}_{\bar{\beta}},\left[Q_\alpha,J_{\mu\nu}\right]\right\}\\
=\;&2i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}}\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\gamma}}P_\mu+2i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\gamma(\sigma^\mu)_{\gamma\bar{\beta}}P_\mu\\
=\;&2i(\bar{\sigma}_{\mu\nu}\bar{\sigma}^\rho)_{\bar{\beta}\alpha}P_\rho+2i(\sigma_{\mu\nu}\sigma^\rho)_{\alpha\bar{\beta}}P_\rho\\
=\;&2\frac{1}{4}i\left[(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\rho-\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu\bar{\sigma}_\rho)_{\bar{\beta}\alpha}+(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\sigma_\rho-\sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu\sigma_\rho)_{\alpha\bar{\beta}}\right]P^\rho\\
=\;&\frac{i}{2}[(\sigma_\rho\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu+\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\sigma_\rho)-(\sigma_\rho\bar{\sigma}_\mu\sigma_v+\sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu\sigma_\rho)]_{\alpha\bar{\beta}}P^\rho\\
=\;&\frac{i}{2}4(\eta_{\nu\rho}\sigma_\mu-\eta_{\mu\rho}\sigma_\nu)_{\alpha\bar{\beta}}P^\rho\\
=\;&2i(\sigma_\mu P_\nu-\sigma_\nu P_\mu)_{\alpha\bar{\beta}};
\end{aligned} \tag{1.121}$$

而其左边

$$\begin{aligned}\left[\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\bar{\beta}}\right\}, J_{\mu\nu}\right] &= \left[2\sigma^\rho{}_{\alpha\bar{\beta}} P_\rho, J_{\mu\nu}\right] = 2i\sigma^\rho{}_{\alpha\bar{\beta}} \left(\eta_{\rho\mu} P_\nu - \eta_{\rho\nu} P_\mu\right) \\ &= 2i(\sigma_\mu P_\nu - \sigma_\nu P_\mu)_{\alpha\bar{\beta}},\end{aligned} \tag{1.122}$$

与右边相等. 因此 Jacobi 恒等式(1.116)成立. **证毕**.

我们可以对超对称进行扩展. 若有 N 个生成元 $Q_\alpha{}^A$, $A = 1, 2, ..., N$, 满足

$$\left\{Q_\alpha{}^A, \bar{Q}_{\bar{\beta}B}\right\} = 2\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\beta}} P_\mu \delta^A_B, \tag{1.123}$$

则在 $N = 1$ 时将这种代数称为超对称代数, 在 $N > 1$ 时将这种代数称为扩展的 (extended) 超对称代数.

1.5 超空间

上一节中, 我们已经得到了 P_μ, $J_{\mu\nu}$, Q_α 和 $\bar{Q}_{\bar{\alpha}}$ 彼此之间的对易或反对易关系, 即超 Poincaré 代数的结构. 我们知道, $P_\mu = -i\partial/\partial x_\mu$ 是时空平移的生成元, 那么是否能够找到"坐标" θ^α 和 $\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}$ 使得

$$Q_\alpha \sim \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \bar{Q}^{\bar{\alpha}} \sim \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}}\ ? \tag{1.124}$$

由于 Q_α 和 $\bar{Q}_{\bar{\alpha}}$ 是 Grassmann 量, "坐标" θ^α 和 $\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}$ 也应该是 Grassmann 量.

下面, 我们将引入超空间的概念, 它紧密地联系着超场, 并且能够把整个超对称理论简洁地表达出来.

现在, 我们扩充时空, 通过增加 Grassmann 坐标, 使得超空间中任意一点能够表达成

$$z^m = \left(x^\mu,\ \theta^\alpha,\ \bar{\theta}_{\bar{\alpha}}\right), \tag{1.125}$$

一共由 8 个坐标描述.

我们知道, 任意 Poincaré 变换可以表达成齐次 Lorentz 变换和时空平

移的乘积

$$S\left(a\right)L\left(\omega\right)=\exp\left(ia_{\mu}P^{\mu}\right)L\left(\omega\right). \tag{1.126}$$

类似的, 我们把超 Poincaré 变换分解为齐次 Lorentz 变换和超空间平移的乘积

$$g_{L}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=S\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)L\left(\omega\right), \tag{1.127}$$

其中下标 L 表示此算符从左方作用到超空间上, 而

$$S\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)=\exp\left(ix^{\mu}P_{\mu}+i\theta^{\alpha}Q_{\alpha}+i\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}\bar{Q}^{\bar{\alpha}}\right). \tag{1.128}$$

于是, Q_{α} 和 $\bar{Q}^{\bar{\alpha}}$ 可以称为超平移的生成元.

对于时空平移, 由于 $[P_{\mu},P_{\nu}]=0$, 我们有结合律

$$\exp\left(ix'\cdot P\right)\equiv\exp\left(ix\cdot P\right)\exp\left(iy\cdot P\right)=\exp\left[i\left(x+y\right)\cdot P\right], \tag{1.129}$$

可见, $x'=x+y$, 两次时空平移的结果表现为时空坐标直接叠加.

但对于超平移, 情况就不这么简单了, 我们会得到

$$\begin{aligned}&\exp\left(ix'\cdot P+i\theta'Q+i\bar{\theta}'\bar{Q}\right)\\ \equiv&\exp\left(ia\cdot P+i\xi Q+i\bar{\xi}\bar{Q}\right)\exp\left(ix\cdot P+i\theta Q+i\bar{\theta}\bar{Q}\right)\\ =&\exp\left[i\left(a\cdot P+x\cdot P+i\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta}P_{\mu}-i\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}P_{\mu}\right)+i\left(\xi+\theta\right)Q+i\left(\bar{\xi}+\bar{\theta}\right)\bar{Q}\right],\end{aligned} \tag{1.130}$$

其中 $\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta}=\xi^{\alpha}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\bar{\theta}^{\bar{\beta}}$. 于是,

$$\begin{cases}x'^{\mu}=x^{\mu}+a^{\mu}+i\left(\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta}-\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}\right),\\ \theta'=\theta+\xi,\\ \bar{\theta}'=\bar{\theta}+\bar{\xi},\end{cases} \tag{1.131}$$

坐标 θ^{α} 和 $\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}$ 与通常的时空坐标表现一样, 但现在的时空坐标 x^{μ} 却有不同的表现. 下面证明式 (1.130).

证明: 利用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式

$$e^A e^B = e^{\left(A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\cdots\right)}, \tag{1.132}$$

并注意到由于 Q 与 $\bar{Q}$ 的对易子（因为 Grassmann 性质的关系, 要化成反对易关系）最多能够构造出 P_μ , 而 P_μ 与任何平移算符对易，使得上式中 $[A,[A,B]]$, $[B,[B,A]]$ 及更高阶的项必然为零, 从而

$$\begin{aligned} &\exp\left(ia\cdot P+i\xi Q+i\bar{\xi}\bar{Q}\right)\exp\left(ix\cdot P+i\theta Q+i\bar{\theta}\bar{Q}\right)\\ =&\exp\left(i\left(a+x\right)\cdot P+i\left(\xi+\theta\right)Q+i\left(\bar{\xi}+\bar{\theta}\right)\bar{Q}+\frac{i^2}{2}\left[\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q},\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}\right]\right). \end{aligned} \tag{1.133}$$

利用 (1.24), 有

$$\begin{aligned} \left[\xi Q,\bar{\theta}\bar{Q}\right] &= \xi^\alpha Q_\alpha\bar{\theta}_{\bar{\beta}}\bar{Q}^{\bar{\beta}}-\bar{\theta}_{\bar{\beta}}\bar{Q}^{\bar{\beta}}\xi^\alpha Q_\alpha=-\xi^\alpha Q_\alpha\bar{Q}^{\bar{\beta}}\bar{\theta}_{\bar{\beta}}-\xi^\alpha\bar{Q}^{\bar{\beta}}Q_\alpha\bar{\theta}_{\bar{\beta}}\\ &= \xi^\alpha\left\{Q_\alpha,\bar{Q}_{\bar{\beta}}\right\}\bar{\theta}^{\bar{\beta}}=2\left(\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\right)P_\mu, \end{aligned} \tag{1.134}$$

类似地, $\left[\bar{\xi}\bar{Q},\theta Q\right]=-2\left(\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)P_\mu$. 另一方面, 由于 Q 与自身、$\bar{Q}$ 与自身的反对易关系均为 0, 导致 $[\xi Q,\theta Q]=\left[\bar{\xi}\bar{Q},\bar{\theta}\bar{Q}\right]=0$. 因此

$$\begin{aligned} \left[\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q},\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}\right] &= [\xi Q,\theta Q]+\left[\xi Q,\bar{\theta}\bar{Q}\right]+\left[\bar{\xi}\bar{Q},\theta Q\right]+\left[\bar{\xi}\bar{Q},\bar{\theta}\bar{Q}\right]\\ &= 2\left(\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\right)P_\mu-2\left(\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\right)P_\mu, \end{aligned} \tag{1.135}$$

代入式 (1.133) 便得到式 (1.130). **证毕**.

从 (1.131) 式我们看到, 两次超空间的平移会使时空坐标加上 Grassmann 坐标项, 这源于 Q 与 $\bar{Q}$ 构成的代数不封闭, 与与 Poincaré 群的时空平移部分耦合在一起了, 因此, Q_α 不会简单地等于 $\partial/\partial\theta^\alpha$, 还包含 $-i\partial_\mu$ 项.

实际上, Q_α 和 $\bar{Q}^{\bar{\alpha}}$ 应该采取如下表达式:

$$iQ_\alpha=\partial_\alpha-i\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\beta}}\bar{\theta}^{\bar{\beta}}\partial_\mu,\quad i\bar{Q}^{\bar{\alpha}}=\bar{\partial}^{\bar{\alpha}}+i\theta^\beta\sigma^\mu{}_\beta{}^{\bar{\alpha}}\partial_\mu, \tag{1.136}$$

其中 $\partial_\alpha=\partial/\partial\theta^\alpha$, $\bar{\partial}^{\bar{\alpha}}=\partial/\partial\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}$, 它们都是从左方作用的导数算符.

这样, 利用 Grassmann 左导数和变量的性质 $\left\{\partial_\alpha, \bar{\partial}^{\bar{\beta}}\right\} = 0$, $\left\{\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\bar{\beta}}\right\} = 0$, $\left\{\partial_\alpha, \theta^\beta\right\} = \delta_\alpha^\beta$ 和 $\left\{\bar{\partial}^{\bar{\beta}}, \bar{\theta}_{\bar{\alpha}}\right\} = \delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}$, 便可以得到

$$\begin{aligned} i^2 \left\{Q_\alpha, Q^{\bar{\beta}}\right\} &= \left\{\partial_\alpha - i\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\gamma}}\bar{\theta}^{\bar{\gamma}}\partial_\mu, \bar{\partial}^{\bar{\beta}} + i\theta^\beta\sigma^\mu{}_\beta{}^{\bar{\beta}}\partial_\mu\right\} \\ &= \left\{\partial_\alpha, \bar{\partial}^{\bar{\beta}}\right\} + \left\{-i\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\gamma}}\bar{\theta}^{\bar{\gamma}}\partial_\mu, i\theta^\beta\sigma^\mu{}_\beta{}^{\bar{\beta}}\partial_\mu\right\} \\ &\quad + \left\{-i\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\gamma}}\bar{\theta}^{\bar{\gamma}}\partial_\mu, \bar{\partial}^{\bar{\beta}}\right\} + \left\{\partial_\alpha, i\theta^\beta\sigma^\mu{}_\beta{}^{\bar{\beta}}\partial_\mu\right\} \\ &= -i\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\gamma}}\left\{\bar{\theta}^{\bar{\gamma}}, \bar{\partial}^{\bar{\beta}}\right\}\partial_\mu + i\sigma^\mu{}_\beta{}^{\bar{\beta}}\partial_\mu\left\{\partial_\alpha, \theta^\beta\right\} \\ &= i\sigma^\mu{}_\alpha{}^{\bar{\gamma}}\left\{\bar{\theta}_{\bar{\gamma}}, \bar{\partial}^{\bar{\beta}}\right\}\partial_\mu + i\sigma^\mu{}_\beta{}^{\bar{\beta}}\partial_\mu\left\{\partial_\alpha, \theta^\beta\right\} \\ &= 2i\sigma^\mu{}_\alpha{}^{\bar{\beta}}\partial_\mu, \end{aligned} \tag{1.137}$$

于是 $\left\{Q_\alpha, Q^{\bar{\beta}}\right\} = -2i\sigma^\mu{}_\alpha{}^{\bar{\beta}}\partial_\mu = 2\sigma^\mu{}_\alpha{}^{\bar{\beta}}P_\mu$, 与超 Poincaré 代数一致.

现在, 我们有了超空间的概念, 接下来, 将介绍定义在此超空间上的场, 称为*超场*. 我们的目标是找到一个特殊的超场, 能够与前面介绍的简化版 Wess-Zumino 模型一致, 从而完成这一简单的超对称理论的最后一步.

1.6 超场

考虑一个超空间的标量函数 $\Phi\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$, 对Fermi坐标进行Taylor展开，由于反对易关系，最高次项将是 $\theta^2\bar{\theta}^2$. 在不致于混淆的情况下可用 θ^2 代替 $\bar{\theta}^2$, 这里简化的符号意义为

$$(\theta)^2 = \theta^2 = \theta^\alpha\theta_\alpha = -\theta_\alpha\theta^\alpha = \theta^2\theta^1 - \theta^1\theta^2 = -2\theta^1\theta^2, \tag{1.138}$$

$$\left(\bar{\theta}\right)^2 = \bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_{\bar{1}}\bar{\theta}^{\bar{1}} + \bar{\theta}_{\bar{2}}\bar{\theta}^{\bar{2}} = -\bar{\theta}^{\bar{2}}\bar{\theta}^{\bar{1}} + \bar{\theta}^{\bar{1}}\bar{\theta}^{\bar{2}} = 2\bar{\theta}^{\bar{1}}\bar{\theta}^{\bar{2}}, \tag{1.139}$$

$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta^2,\ \bar{\theta}^{\bar{\alpha}}\bar{\theta}^{\bar{\beta}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\bar{\theta}^2. \tag{1.140}$$

将 $\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ Taylor展开为

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= C(x)+\theta^{\alpha}\chi_{\alpha}(x)+\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}\bar{\eta}^{\bar{\alpha}}(x)\\
&\quad+\theta^{2}M(x)+\bar{\theta}^{2}N(x)+\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\bar{\theta}^{\bar{\beta}}A_{\mu}(x)\\
&\quad+\bar{\theta}^{2}\theta^{\alpha}\lambda_{\alpha}(x)+\theta^{2}\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}\xi^{\bar{\alpha}}(x)+\theta^{2}\bar{\theta}^{2}\Delta(x),
\end{aligned}
\tag{1.141}
$$

这就是一个*超场*. 其中, 第一行是 0 次项和 1 次项, 第二行为 2 次项, 第三行为 3 次项和 4 次项. 从而, 我们获得了 9 个函数, 其中包括 4 个标量函数、4 个旋量函数 (带旋量指标) 和 1 个矢量函数 (带时空协变下标):

$$
\begin{cases}
4\ \text{个标量}:\ C(x),\ M(x),\ N(x),\ \Delta(x),\\
4\ \text{个旋量}:\ \chi_{\alpha}(x),\ \bar{\eta}^{\bar{\alpha}}(x),\ \lambda_{\alpha}(x),\ \xi^{\bar{\alpha}}(x),\\
1\ \text{个矢量}:\ A_{\mu}(x).
\end{cases}
\tag{1.142}
$$

观察它们的自由度, 我们可以看到, Bose子有 8 个自由度, Fermi子有 8 个自由度, 二者相等.

由于我们考虑的超场 $\Phi(z)$ 是超空间中的标量场, 它在超平移 $z\to z'$ 下不变:

$$
\Phi'(z')=\Phi(z),
\tag{1.143}
$$

即

$$
\Phi'\left(x+a+i\left(\theta\sigma\bar{\xi}-\xi\sigma\bar{\theta}\right),\theta+\xi,\bar{\theta}+\bar{\xi}\right)=\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right).
\tag{1.144}
$$

定义“有效变换”

$$
\delta\Phi(z)=\Phi'(z)-\Phi(z),
\tag{1.145}
$$

可得标量超场的变换法则为

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi(z) &= \Phi\left(x-a-i\left(\theta\sigma\bar{\xi}-\xi\sigma\bar{\theta}\right),\theta-\xi,\bar{\theta}-\bar{\xi}\right)-\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)\\
&= \left[-\left(a^{\mu}+i\left(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi}-\xi\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right)\right)\partial_{\mu}-\xi^{\alpha}\partial_{\alpha}-\bar{\xi}_{\bar{\alpha}}\bar{\partial}^{\bar{\alpha}}\right]\Phi(z)\\
&= \left[-a^{\mu}\partial_{\mu}-\bar{\xi}_{\bar{\alpha}}\left(\bar{\partial}^{\bar{\alpha}}+i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\bar{\alpha}}\partial_{\mu}\right)-\xi^{\alpha}\left(\partial_{\alpha}-i\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}}\bar{\theta}^{\bar{\beta}}\partial_{\mu}\right)\right]\Phi(z)\\
&= -i\left[a^{\mu}P_{\mu}+\bar{\xi}_{\bar{\alpha}}\bar{Q}^{\bar{\alpha}}+\xi^{\alpha}Q_{\alpha}\right]\Phi(z).
\end{aligned}
\tag{1.146}
$$

假如 Φ 是一个超场, 则 $\partial_\mu\Phi$ 也是一个超场, 这是因为

$$\begin{aligned}\delta\partial_\mu\Phi &= \partial_\mu\delta\Phi \\ &= -i\partial_\mu\left[a^\mu P_\mu+\bar{\xi}_{\bar{\alpha}}\bar{Q}^{\bar{\alpha}}+\xi^\alpha Q_\alpha\right]\Phi \\ &= -i\left[a^\mu P_\mu+\bar{\xi}_{\bar{\alpha}}\bar{Q}^{\bar{\alpha}}+\xi^\alpha Q_\alpha\right]\partial_\mu\Phi, \end{aligned} \tag{1.147}$$

这里用到超 Poincaré 代数对易关系 $[Q_\alpha,P_\mu]=0=[\bar{Q}_{\bar{\alpha}},P_\mu]$ 和 $[P_\mu,P_\nu]=0$.

下面再考察, $\partial_\alpha\Phi$ 的变换情况. 虽然

$$\partial_\alpha\left(iQ_\beta\right)=\partial_\alpha\left(\partial_\beta-i\sigma^\mu_{\beta\bar{\beta}}\bar{\theta}^{\bar{\beta}}\partial_\mu\right)=-\left(iQ_\beta\right)\partial_\alpha, \tag{1.148}$$

但由于

$$\partial_\alpha\left(i\bar{Q}^{\bar{\beta}}\right)=\partial_\alpha\left(\partial^{\bar{\beta}}-i\theta^\beta\sigma^\mu{}_\beta{}^{\bar{\beta}}\partial_\mu\right)=-\left(i\bar{Q}^{\bar{\beta}}\right)\partial_\alpha+i\sigma^{\mu\bar{\beta}}{}_\alpha\partial_\mu, \tag{1.149}$$

导致

$$\partial_\alpha\left(\bar{\xi}_{\bar{\beta}}\bar{Q}^{\bar{\beta}}\right)\Phi\neq\left(\bar{\xi}_{\bar{\beta}}\bar{Q}^{\bar{\beta}}\right)\partial_\alpha\Phi. \tag{1.150}$$

因此, $\partial_\alpha\Phi$ 不是超场. 同理, $\bar{D}_{\bar{\alpha}}\Phi$ 也不是超场.

与研究规范场的做法一样, 我们需要找到 ∂_α 和 $\bar{\partial}_{\bar{\alpha}}$ 分别对应的协变导数推广 D_α 和 $\bar{D}_{\bar{\alpha}}$, 使得 $D_\alpha\Phi$ 和 $\bar{D}_{\bar{\alpha}}\Phi$ 均为超场. 这样的协变导数需满足

$$D_\alpha\bar{Q}^{\bar{\beta}}=-\bar{Q}^{\bar{\beta}}D_\alpha,\ \bar{D}_{\bar{\alpha}}Q_\beta=-Q_\beta\bar{D}_{\bar{\alpha}}. \tag{1.151}$$

容易证明

$$\begin{cases} D_\alpha=\partial_\alpha+i\sigma^\mu_{\alpha\bar{\alpha}}\bar{\theta}^{\bar{\alpha}}\partial_\mu \\ \bar{D}_{\bar{\alpha}}=-\bar{\partial}_{\bar{\alpha}}-i\sigma^\mu_{\alpha\bar{\alpha}}\theta^\alpha\partial_\mu \end{cases} \tag{1.152}$$

满足这个要求. 它们还满足如下反对易关系

$$\left\{D_\alpha,\bar{D}_{\bar{\beta}}\right\}=-2i\sigma^\mu_{\alpha\bar{\beta}}\partial_\mu,\ \left\{D_\alpha,D_\beta\right\}=0,\ \left\{\bar{D}_{\bar{\alpha}},\bar{D}_{\bar{\beta}}\right\}=0. \tag{1.153}$$

1.7 手征超场与 Wess-Zumino 模型的重现

所谓手征超场, 是指满足方程

$$\bar{D}_{\bar{\alpha}}\Phi = 0 \tag{1.154}$$

的场 Φ. 上述方程不是一个运动方程, 而仅仅是一个约束方程.

引入算符

$$U = \exp\left[i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\bar{\alpha}}\bar{\theta}^{\bar{\alpha}}\partial_\mu\right] = \exp\left[\theta^\alpha D_\alpha - \theta^\alpha \partial_\alpha\right], \tag{1.155}$$

将它作用在超场 Φ 上, 产生 x^μ 的平移

$$U\Phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = \Phi\left(x + i\theta\sigma\bar{\theta},\theta,\bar{\theta}\right). \tag{1.156}$$

利用 $i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\partial_\mu i\left(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\right)\partial_\nu = -\frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2$, 我们可以将算符 U 展开为

$$U = 1 + i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\bar{\alpha}}\bar{\theta}^{\bar{\alpha}}\partial_\mu - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2, \tag{1.157}$$

$$U^{-1} = 1 - i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\bar{\alpha}}\bar{\theta}^{\bar{\alpha}}\partial_\mu - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2. \tag{1.158}$$

利用

$$\begin{cases} \left\{\bar{\partial}_{\bar{\alpha}},\ \bar{\theta}^{\bar{\beta}}\right\} = \delta^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}}, \bar{\partial}_{\bar{\alpha}}\bar{\theta}^2 = -2\bar{\theta}_{\bar{\alpha}},\ \theta_\alpha\bar{\theta}^2\theta^2 = \bar{\theta}_{\bar{\alpha}}\bar{\theta}^2\theta^2, \\ i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\partial_\mu i\left(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\right)\partial_\nu = -\dfrac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2, \\ i(\theta\sigma^\mu)_{\bar{\alpha}} i\left(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\right)\partial_\mu\partial_\nu = \dfrac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}\partial^2, \end{cases} \tag{1.159}$$

可以证明, 算符 U具有如下性质:

$$U^{-1}\bar{D}_{\bar{\alpha}}U = -\bar{\partial}_{\bar{\alpha}}. \tag{1.160}$$

现在, 讨论受方程 $\bar{D}_{\bar{\alpha}}T = 0$ 约束的手征超场 $T\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$. 利用性质 (1.160), 可得

$$\bar{D}_{\bar{\alpha}}T = -U\bar{\partial}_{\bar{\alpha}}\left(U^{-1}T\right) = 0. \tag{1.161}$$

令 $T\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)\equiv UT^1\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$, 则 $U\bar{\partial}_{\bar{\alpha}}T^1=0$, 亦即

$$\bar{\partial}_{\bar{\alpha}}T^1=0. \tag{1.162}$$

换句话说, $T^1=T^1(x,\theta)$ 只是 x^μ 和 θ^α 的函数. 从而, 我们能够将 T^1 写成

$$T^1=\phi(x)+\sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+\theta^2\Phi(x), \tag{1.163}$$

T^1 由 2 个标量和 1 个旋量组成.

因此, 手征超场

$$\begin{aligned} T\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &\equiv UT^1(x,\theta) \\ &= \left[1+i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\alpha}\right)\partial_\mu-\frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2\right]\left[\phi(x)+\sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+\theta^2\Phi(x)\right] \\ &= \phi(x)+\sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+\theta^2\Phi(x)+i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x) \\ &\quad +i\sqrt{2}\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\theta^\alpha\partial_\mu\psi_\alpha(x)-\frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2\phi(x), \end{aligned} \tag{1.164}$$

再注意到

$$i\sqrt{2}\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\theta^\alpha\partial_\mu\psi_\alpha(x)=\frac{-i}{\sqrt{2}}\theta^2\sigma^{\mu\alpha}{}_{\bar{\alpha}}\bar{\theta}^{\bar{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha(x), \tag{1.165}$$

我们便可以得到手征超场 $T\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ 的分解式

$$\begin{aligned} T\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= \phi(x)+\sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+\theta^2\Phi(x)+i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\partial_\mu\phi(x) \\ &\quad -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\sigma^{\mu\alpha}{}_{\bar{\alpha}}\bar{\theta}^{\bar{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha(x)-\frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2\phi. \end{aligned} \tag{1.166}$$

我们将手征超场作用量 S 定义为

$$S=\int d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}\;T^*\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)T\left(x,\theta,\bar{\theta}\right), \tag{1.167}$$

下面将会看到, 这个用手征超场定义的长得很特别的作用量, 能够自然地恒等变化为我们曾经得到过的简单超对称模型作用量.

为了计算作用量 (1.167), 我们需要对 Grassmann 变量进行积分. 按 Grassmann 变量的性质, 有

$$\int d\theta^1 = \int d\theta^2 = \int d\bar{\theta}^{\bar{1}} = \int d\bar{\theta}^{\bar{2}} = 0, \tag{1.168}$$

$$\int d\theta^1\theta^1 = \int d\theta^2\theta^2 = \int d\bar{\theta}^{\bar{1}}\bar{\theta}^{\bar{1}} = \int d\bar{\theta}^{\bar{2}}\bar{\theta}^{\bar{2}} = 1, \tag{1.169}$$

且 $(\theta)^2 = -2\theta^1\theta^2$. 我们希望通过定义测度, 使得

$$\int d^2\theta(\theta)^2 = \int d^2\bar{\theta}\left(\bar{\theta}\right)^2 = 1. \tag{1.170}$$

这就意味着, 我们实际上将测度定义为

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}d\theta^\alpha d\theta^\beta,\ d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}d\bar{\theta}^{\bar{\alpha}}d\bar{\theta}^{\bar{\beta}}. \tag{1.171}$$

对于二次式

$$f\left(\theta\right) = a + \theta^\alpha b_\alpha + (\theta)^2 c \tag{1.172}$$

的积分, 由式 (1.168), (1.169) 和 (1.170) 可得

$$\int d^2\theta f\left(\theta\right) = \int d^2\theta\left(a + \theta^\alpha b_\alpha + (\theta)^2 c\right) = c. \tag{1.173}$$

由此可见, 作用量 (1.167) 的积分项 T^*T 中只有正比于 $(\theta)^2\left(\bar{\theta}\right)^2$ 的项在积分之后不为零.

对式 (1.166) 取复共轭, 得

$$\begin{aligned} T^*\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) \ &= \ \phi^\dagger\left(x\right) + \sqrt{2}\bar{\theta}^{\bar{\alpha}}\bar{\psi}_{\bar{\alpha}}\left(x\right) + \bar{\theta}^2\Phi^\dagger\left(x\right) - i\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\partial_\mu\phi^\dagger\left(x\right) \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\partial_\mu\bar{\psi}^{\bar{\alpha}}\left(x\right)\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\alpha}}\theta^\alpha - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2\phi^\dagger\left(x\right), \end{aligned} \tag{1.174}$$

T^*T 中正比于 $(\theta)^2\left(\bar{\theta}\right)^2$ 的项为

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\left(\phi\partial^2\phi^\dagger+\phi^\dagger\partial^2\phi\right)\theta^2\bar{\theta}^2+\Phi^\dagger\Phi\theta^2\bar{\theta}^2+\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right)\left(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\right)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^\dagger\\
&\quad+i\left(\theta^\alpha\psi_\alpha\bar{\theta}^2\partial_\mu\bar{\psi}^{\bar{\alpha}}\sigma^\mu{}_{\beta\bar{\alpha}}\theta^\beta+\theta^2\bar{\theta}^{\bar{\alpha}}\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\alpha}}\partial_\mu\psi^\alpha\bar{\theta}^{\bar{\beta}}\psi_{\bar{\beta}}\right)\\
=&\left[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^\dagger+\frac{i}{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\alpha}}\left(\bar{\psi}^{\bar{\alpha}}\overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi^\alpha\right)+\Phi^\dagger\Phi+\text{total div}\right]\theta^2\bar{\theta}^2. \qquad (1.175)
\end{aligned}$$

于是, 作用量 (1.167) 等价为

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}T^*\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)T\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)\\
&= \int d^4x\left[\frac{i}{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\alpha}}\left(\bar{\psi}^{\bar{\alpha}}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^\alpha\right)+\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi^\dagger+\Phi^\dagger\Phi\right], \qquad (1.176)
\end{aligned}$$

与式 (1.76)比较, 可以发现, 这恰好与原先研究的 Wess-Zumino 作用量是一样的, 我们重现了 Wess-Zumino 模型. 也就是说, 用手征超场定义的作用量完全等价于原来为了迎合超对称变换而构造出来的作用量.

Chapter 2

$SU(5)$ 大统一规范场论

2.1 对称群 $SU(5)$

对称群 $SU(n)$ 的定义为

$$SU(n) = \left\{ U \mid UU^\dagger = I,\ \det U = 1 \right\}, \tag{2.1}$$

其中 U 是 n 维复矩阵. 一般复线性群的维数 $\dim GL\left(n, \mathbb{C}\right) = 2n^2$, $UU^\dagger = I$ 给出 n^2 条实约束方程, 外加 $\det U = 1$ 再给出 1 个实约束方程, 因此, $SU(n)$ 群的维数 $\dim SU(n) = n^2 - 1$.

$SU(n)$ 群的 Lie 代数 $\mathfrak{su}(n)$ 应满足 $SU(n) = \exp\left[i\mathfrak{su}(n)\right]$, 由此可得

$$\mathfrak{su}(n) = \left\{ h \mid h = h^\dagger,\ \mathrm{tr}h = 0 \right\}, \tag{2.2}$$

即 $\mathfrak{su}(n)$ 的基底 ($SU(n)$ 群生成元) 都是 n 维无迹 Hermite 矩阵.

$U(n)$ 群 Lie 代数 $\mathfrak{u}(n)$ 的一组最简单的基底可由满足

$$\left(C_{\alpha\beta}\right)_{ik} = \delta_{\alpha i}\delta_{\beta k} \tag{2.3}$$

的 n^2 个矩阵 $\{C_{\alpha\beta}\}$ 组成 (对于矩阵 $C_{\alpha\beta}$, 第 α 行第 β 列的元素为 1, 其余元素均为 0). 这些矩阵中的非对角矩阵无迹但非 Hermite, 对角矩阵 Hermite 但迹为 1. 为了构造 $\mathfrak{su}(n)$ 的一组基底, 我们先用 $\{C_{\alpha\beta}\}$ 中 $(n^2 - n)$ 个

非对角矩阵构造 (n^2-n) 个无迹 Hermite 矩阵:

$$C_{\alpha\beta}+C_{\beta\alpha},\ \frac{1}{i}\left(C_{\alpha\beta}-C_{\beta\alpha}\right), \quad \alpha\neq\beta. \tag{2.4}$$

再用剩余 n 个对角矩阵构造其余的无迹 Hermite 矩阵:

$$C'_{\alpha\alpha}=C_{\alpha\alpha}-\frac{1}{n}I. \tag{2.5}$$

注意到 $\sum\limits_{\alpha=1}^{n}C'_{\alpha\alpha}=0$, 因而 $\{C'_{\alpha\alpha}\}$ 是线性相关的, 最大线性无关组的维数为 $(n-1)$. 进一步, 我们可以从中构造 $(n-1)$ 个线性无关的对角无迹 Hermite 矩阵:

$$C'_{11}-C'_{22},\ C'_{11}+C'_{22},\ C'_{33}-C'_{44},\ C'_{33}+C'_{44},\ \cdots \tag{2.6}$$

这样, (2.4) 和 (2.6) 中总共 (n^2-1) 个矩阵就构成了 Lie 代数 $\mathfrak{su}(n)$ 的一组基底.

$SU(n)$ 群有 $(n-1)$ 个对角的生成元, 因此, 我们称 $SU(n)$ 群的秩 (rank) 为$(n-1)$. 一个统一强、弱和电磁相互作用的规范理论, 必须能将这三种相互作用一同包容进去. 因而, 它所对应的规范变换群必须足够大, 以致能包含标准模型中的规范群 $SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ 作为其子群. 因为群 $SU(3)$, $SU(2)$ 和 $U(1)$ 的秩分别为 2, 1 和 1, 所以大统一规范变换群的秩至少应为 4. 群 $SU(5)$ 的秩为 4, 是在不引入新的 Fermi子情况下能够包含 $SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ 的最简单的群. 下面, 我们就以 $SU(5)$ 作为规范群来讨论大统一理论.

我们可以利用 Young 图 (Young tableaux 或 Young diagrams) 来代表 $SU(n)$ 群的不可约表示, 也可以通过对 Young 图的运算来对 $SU(n)$ 群的直积表示进行约化. Young 图由一系列相邻的盒子组成. 一个 $SU(5)$ 群的不可约表示由一个盒子行数不超过 4 的 Young 图代表, 每一行盒子的长度

不能超过上一行的长度, 每行盒子的左边对齐. 典型 Young 图的样子如下:

$$\ydiagram{1}\ ,\quad \ydiagram{2}\ ,\quad \ydiagram{1,1}\ ,\quad \ydiagram{2,1}\ ,\quad \ydiagram{2,1,1}\ ,\quad \ydiagram{4,3,3,1}\ . \tag{2.7}$$

$SU(5)$ 群不可约表示的维数按下面的方法计算: 首先, 画两个对应的 Young 图, 一个放在另一个的上面; 其次, 在上面的图中填充数字, 第一行由 5 开始填, 从左到右依次填上 5, 6, 7, $\cdots$, 第二行则从左到右依次填上 4, 5, 6, $\cdots$, 如此逐行递减; 然后, 在下面的图中填充数字, 每一个盒子中填充的数字应为此盒子右边和下边盒子数的总和再加 1 ; 最后, 用上面的图中所有数字的乘积除以下面的图中所有数字的乘积, 即得此不可约表示的维数. 这一过程如下所示.

$$\text{不可约表示维数} = \frac{\begin{ytableau} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 \\ 3 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 \end{ytableau}} = \frac{5\times 6\times 7\times 4\times 5\times 3}{5\times 3\times 1\times 3\times 1\times 1} = 280. \tag{2.8}$$

给定一个 Young 图, 将它填满为 5 行的图, 再把刚填充的那部分旋转 180°, 就得到一个新的 Young 图. 这个新图与原图的维数相等, 我们用新图来代表原图对应表示的复共轭表示. 例如:

$$\ydiagram{1}\ \text{与}\ \ydiagram{1,1,1,1}\ \text{、}\ \ydiagram{2,1}\ \text{与}\ \ydiagram{2,2,2,1}\ \text{互为复共轭表示.} \tag{2.9}$$

在此规定下, “ ” (空白, 或记为“ 1 ”) 与维度为 1 的 $\ydiagram{1,1,1,1,1}$ 互为复共轭表示, 两者均代表 $SU(5)$ 的平庸表示.

我们用 $[m]$ 来代表 $SU(5)$ 群的 m 维不可约表示, 用 $[\overline{m}]$ 表示 $[m]$ 的复共轭表示. (在下文中, 我们也用 $[m]$ 和 $[\overline{m}]$ 代表它们对应的表示空间.) 因

而, [5] 和 $[\overline{5}]$ 都是 $SU(5)$ 的基本表示, [24] 是$SU(5)$ 的正规表示 (伴随表示) . 通过维数的计算, 可以辨认出

$$[5]=\ydiagram{1}\,,\quad [\overline{5}]=\ydiagram{1,1,1,1}\,,\quad [10]=\ydiagram{1,1}\,,\quad [15]=\ydiagram{2}\,,\quad [24]=\ydiagram{2,1,1,1}\,. \tag{2.10}$$

高维表示可以通过基本表示 $\ydiagram{1}$ 的直积构造出来. 实际上, Young 图中处于同一行的两个盒子表示关于相应因子对称的群表示, 而不同行中的盒子则表明此群表示关于相应因子反称. 例如, 表示 $\ydiagram{2}$ 是两个基本表示 $\ydiagram{1}$ 的对称积, 表示 $\ydiagram{1,1}$ 是两个基本表示 $\ydiagram{1}$ 的反称积.

任何两个 $SU(5)$ 群表示的直积, 可以通过对它们相应的两个Young 图中的盒子进行所有可能的组合, 而分解为几个不可约表示的直和; 此过程中任何包含 5 个或以上盒子的列被认为没有意义而舍弃. 例如:

$$\ydiagram{1}\times\ydiagram{1}=\ydiagram{2}+\ydiagram{1,1}\,, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\left(\ydiagram{1}\times\ydiagram{1}\right)\times\ydiagram{1}&=\left(\ydiagram{2}\times\ydiagram{1}\right)+\left(\ydiagram{1,1}\times\ydiagram{1}\right)\\&=\left(\ydiagram{3}+\ydiagram{2,1}\right)+\left(\ydiagram{2,1}+\ydiagram{1,1,1}\right),\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\ydiagram{1,1,1,1}\times\ydiagram{1}=\ydiagram{1,1,1,1,1}+\ydiagram{2,1,1,1}=1+\ydiagram{2,1,1,1}\,. \tag{2.13}$$

以上 3 个方程也可以直接用记号“ $[m]$ ”表示为:

$$\begin{aligned}[5]\times[5]&=[15]+[10]\,, &(2.14)\\ [5]\times[5]\times[5]&=[35]+[40]+[40]+[\overline{10}]\,, &(2.15)\\ [\overline{5}]\times[5]&=[1]+[24]\,. &(2.16)\end{aligned}$$

2.2 将 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 嵌入 $SU(5)$

在标准模型中, $SU(3)_C$ 是色规范群, $SU(2)_L$ 是左旋粒子的弱同位旋规范群, $U(1)_Y$ 是弱超荷规范群. 电荷 Q、弱同位旋第 3 分量 T_3、弱超荷 Y_W 之间的联系由 Gell-Mann-Nishijima 关系描述:

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y_W. \tag{2.17}$$

各代 Fermi 子的量子数如 Tab. 2.1 所示.

	代			量子数				
	1	2	3	Q	T_3	Y_W	B	L
左	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	0 -1	$1/2$ $-1/2$	-1 -1	0 0	1 1
旋	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$	$2/3$ $-1/3$	$1/2$ $-1/2$	$1/3$ $1/3$	$1/3$ $1/3$	0 0
右	e_R	μ_R	τ_R	-1	0	-2	0	1
旋	u_R d_R	c_R s_R	t_R b_R	$2/3$ $-1/3$	0 0	$4/3$ $-2/3$	$1/3$ $1/3$	0 0

Table 2.1: 各代 Fermi 子的量子数. (其中, Q, T_3, Y_W, B 和 L 分别为电荷、弱同位旋第 3 分量、弱超荷、重子数和轻子数. 左旋夸克 d', s' 和 b' 的撇号表示它们是电弱理论中的相互作用本征态, 即通过 Cabibbo-Kobayshi-Maskawa 矩阵混合质量本征态的结果. 对于左旋二重态, 有 $Y_W = B - L$; 对于右旋单态, 有 $Y_W = 2Q$.)

实验事实是, 色群 $SU(3)_C$ 对 Glashow-Salam-Weinberg 群 $SU(2)_L \times$

$U(1)_Y$ 视而不见 (不同颜色的同味夸克带有相同的电荷和弱荷). 因此, 当两者一同嵌入到 $SU(5)$ 时, 应该彼此对易. 从而, 在 $SU(3)$ 的 3 维子空间中, 对于 $SU(3)$ 的生成元来说, $SU(2)\times U(1)$ 的生成元应该表现得像单位矩阵或零矩阵. 另一方面, 由于所有的轻子都是色单态, $SU(3)$ 的生成元作用在这些分量上必须具有零本征值.

基于上述事实, 在将 $SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ 嵌入到 $SU(5)$ 时, 我们把 $SU(5)$ 生成元在 5 维表示中的矩阵形式的前 3 行 3 列分配给色群 $SU(3)$, 将后 2 行 2 列分配给弱群 $SU(2)$. 这一安排指定了 $SU(5)$ 的结构, 并且确定了 $U(1)$ 并入 $SU(5)$ 的途径. 下面我们将会看到, 这一做法使我们能够计算 $SU(5)$ 规范理论的 Weinberg 角, 并且显示出 $SU(5)$ 大统一规范理论不只是一种数学上的重新排列, 而且是一种具有能被实验检验的新物理预言的理论.

群 $SU(3)\subset SU(5)$ 的对角生成元由在对角线第 4 列和第 5 列上为零的对角矩阵 C_{11}, C_{22} 和 C_{33} 组合而成. 由于 $SU(3)$ 的生成元必须无迹, 我们先作如下组合:

$$C''_{11}=C_{11}-\frac{1}{3}\left(C_{11}+C_{22}+C_{33}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&&&&\\&-1&&&\\&&-1&&\\&&&0&\\&&&&0\end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

$$C''_{22}=C_{22}-\frac{1}{3}\left(C_{11}+C_{22}+C_{33}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&&&&\\&2&&&\\&&-1&&\\&&&0&\\&&&&0\end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

再将它们组合成平常所见的形式:

$$\lambda_3 = C''_{11} - C''_{22} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

$$\lambda_8 = \sqrt{3}\,(C''_{11} + C''_{22}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

类似地, 群 $SU(2) \subset SU(5)$ 的对角生成元由对角生成元 C_{44} 和 C_{55} 构造而成:

$$\lambda_{23} \equiv \tau_3 = C''_{44} - C''_{55} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

最后, 群 $U(1) \subset SU(5)$ 的对角生成元对应于弱超荷, 因而它对于 $SU(3)$ 和 $SU(2)$ 都必须表现得像单位矩阵, 再加上无迹的要求, 它的唯一形式是

$$\lambda_{24} \equiv Y = \sqrt{\frac{5}{3}}\,(C'_{44} + C'_{55}) = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

现在, 我们把 $SU(5)$的所有生成元都写出来.

$SU(3)$ 部分 ($\lambda_1 \sim \lambda_8$):

$$\lambda_1 = C_{12} + C_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{i}\left(C_{12} - C_{21}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & & \\ i & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = C''_{11} - C''_{22} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = C_{13} + C_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{i}\left(C_{13} - C_{31}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ i & 0 & 0 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = C_{23} + C_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{i}\left(C_{23} - C_{32}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -i & & \\ 0 & i & 0 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda_8 = \sqrt{3}\left(C''_{11} + C''_{22}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

交叉部分 ($\lambda_9 \sim \lambda_{20}$):

$$\lambda_9 = C_{14}+C_{41} = \begin{pmatrix} & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_{10} = \frac{1}{i}\left(C_{14} - C_{41}\right) = \begin{pmatrix} & & & -i & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{11} = C_{24}+C_{42} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \frac{1}{i}\left(C_{24} - C_{42}\right) = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & -i & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{13} = C_{34}+C_{43} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \frac{1}{i}\left(C_{34} - C_{43}\right) = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{15} = C_{15}+C_{51} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_{16} = \frac{1}{i}\left(C_{15} - C_{51}\right) = \begin{pmatrix} & & & 0 & -i \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ i & 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{17} = C_{25}+C_{52} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{pmatrix},\ \lambda_{18} = \frac{1}{i}\left(C_{25} - C_{52}\right) = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & -i \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & i & 0 & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{19} = C_{35}+C_{53} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{pmatrix},\ \lambda_{20} = \frac{1}{i}\left(C_{35} - C_{53}\right) = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & i & & \end{pmatrix}.$$

这一部分的生成元描述分属于子群 $SU(3)$ 和 $SU(2)\times U(1)$ 的多重态之间的相互转换. 下面将会看到, 这种转换由规范 Bose 子 X 和 Y 作为中介.

剩下的 $SU(2)\times U(1)$ 部分 ($\lambda_{21}\sim\lambda_{24}$):

$$\lambda_{21} \equiv \tau_1 = C_{45} + C_{54} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{22} \equiv \tau_2 = \frac{1}{i}\left(C_{45} - C_{54}\right) = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & 0 & -i \\ & & & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{23} \equiv \tau_3 = C''_{44} - C''_{55} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \lambda_{24} \equiv Y = \sqrt{\frac{5}{3}}\left(C'_{44} + C'_{55}\right) &= \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{3}{5}} \begin{pmatrix} -2/3 & & & & \\ & -2/3 & & & \\ & & -2/3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\lambda_1\sim\lambda_{24}$ 是 $SU(5)$ 的一套生成元, 它们符合我们在上面提出的要求, 并满足归一化

$$\operatorname{tr}\left(\lambda_a\lambda_b\right) = 2\delta_{ab}. \tag{2.24}$$

另一方面, $\lambda_1\sim\lambda_8$ 和 $\lambda_{21}\sim\lambda_{24}$ 构成了 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 的一套生成

元. 从而, 我们已将 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 嵌入到 $SU(5)$ 之中:

$$SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y\subset SU(5). \tag{2.25}$$

生成元 λ_{24} 对应于 Glashow-Salam-Weinberg (GWS) 模型中作用在轻子二重态的弱超荷算符. 由于轻子二重态 $\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L$ 的弱超荷为 -1, 为了方便与标准模型的对应, 我们将生成元 λ_{24} 重新归一化, 得出 $SU(5)$ 理论中基本表示 [5] 的弱超荷算符

$$Y_W=\sqrt{\frac{5}{3}}Y=\sqrt{\frac{5}{3}}\lambda_{24}=\begin{pmatrix}-2/3&&&&\\&-2/3&&&\\&&-2/3&&\\&&&1&\\&&&&1\end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

由上式可以得出, $SU(5)$ 基本表示空间 [5] 中前 3 个分量的弱超荷为 $-2/3$, 后 2 个分量的弱超荷为 1. 由于

$$[\exp{(i\alpha Y_W)}]^*=\exp{(-i\alpha Y_W)}=\exp{[i\alpha\,(-Y_W)]}, \tag{2.27}$$

对 [5] 的复共轭表示 $[\bar{5}]$ 来说, 弱超荷算符应为 $-Y_W$. 因此, 值得注意的是, 左旋轻子二重态 $\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L$ 属于表示 $[\bar{5}]$.

现在, 参考标准模型中的式 (2.17), 我们推广出表示 [5] 中的电荷算符

$$Q=T_3+\frac{1}{2}Y_W=\frac{1}{2}\tau_3+\sqrt{\frac{5}{12}}Y=\begin{pmatrix}-1/3&&&&\\&-1/3&&&\\&&-1/3&&\\&&&1&\\&&&&0\end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

同样, $[\bar{5}]$ 中的电荷算符是 $-Q$.

2.3 $SU(5)$ 各种表示对应的 Fermi 子

在式 (1.5) 中已经定义了电荷共轭算符, 我们将它取为式 (1.28) 的形式 $C = i\gamma^2\gamma^0$, 则

$$\begin{aligned}(\psi_L)^c &\equiv C\big(\bar{\psi}_L\big)^T = C\gamma^0(\psi_L)^* = i\gamma^2\frac{1}{2}\left(1-\gamma_5\right)\psi^* = i\frac{1}{2}\left(1+\gamma_5\right)\gamma^2\psi^* \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\gamma_5\right)C\gamma^0\psi^* = \frac{1}{2}\left(1+\gamma_5\right)\psi^c = (\psi^c)_R. \end{aligned} \tag{2.29}$$

同理, $(\psi_R)^c = (\psi^c)_L$. 这表明, 一个右旋电子的电荷共轭态是左旋正电子.

然而, 对于左旋轻子二重态 $L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$, 它的电荷共轭并不是 $L' = \begin{pmatrix} \nu_e^c \\ e^+ \end{pmatrix}_R$ 那么简单. 这是因为, L' 上下分量的同位旋第 3 分量 T_3 分别为 $-1/2$ 为 $+1/2$, 不符合同位旋二重态上下分量的 T_3 上正下负的要求. 为了满足这一要求, 我们对 L' 进行同位旋空间中的旋转. 利用

$$e^{i\frac{\pi}{2}\tau_2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\tau_2\sin\frac{\pi}{2} = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

可得

$$e^{i\pi T_2}T_3e^{-i\pi T_2} = e^{i\frac{\pi}{2}\tau_2}\frac{\tau_3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}\tau_2} = i\tau_2\frac{\tau_3}{2}\left(-i\tau_2\right) = -\frac{1}{2}\tau_3 = -T_3. \tag{2.31}$$

也就是说, 在同位旋空间中绕第 2 轴旋转 180° 之后, 同位旋二重态分量的 T_3 变号. 因此, 我们可以将 L' 绕第 2 轴旋转 180° 后, 得到

$$L^c = e^{i\pi T_2}L' = i\tau_2\begin{pmatrix} \nu_e^c \\ e^+ \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} e^+ \\ -\nu_e^c \end{pmatrix}_R, \tag{2.32}$$

以它作为 L 的电荷共轭.

我们先考虑第 1 代 Fermi 子的情况. 为了迎合弱超荷算符 (2.26) 和电

荷算符 (2.28), 我们将 $SU(5)$ 表示 [5] 对应的五重态取为

$$[5]=(\psi_i)_R=\begin{pmatrix} d_r \\ d_b \\ d_g \\ e^+ \\ -\nu_e^c \end{pmatrix}_R, \qquad i=1,\ \cdots,\ 5. \tag{2.33}$$

同理, 将表示 $[\overline{5}]$ 对应的五重态取为

$$[\overline{5}]=(\psi_i^c)_R=\begin{pmatrix} d_r^c \\ d_b^c \\ d_g^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L, \qquad i=1,\ \cdots,\ 5. \tag{2.34}$$

接下来, 我们要将其它的标准模型 Fermi 子填入到 $SU(5)$ 群更高维表示的表示空间之中.

$SU(5)$ 的基本表示 [5] 可以平庸地分解为

$$[5]\equiv\square_5=\big(\square_3,\ 1_2\big)+\big(1_3,\ \square_2\big)\equiv(3,1)+(1,2)\,, \tag{2.35}$$

其中, 下标 5, 3 和 2 表明其对应表示分别属于 $SU(5)$, $SU(3)$ 和 $SU(2)$. 然后, 我们计算两个 $SU(5)$ 基本表示 [5] 直积的分解.

$$\begin{aligned}
\square_5\times\square_5 &= [(\square_3,\ 1_2)+(1_3,\ \square_2)]\times[(\square_3,\ 1_2)+(1_3,\ \square_2)] \\
&= (\square_3\times\square_3,\ 1_2)+(\square_3,\ \square_2)+(\square_3,\ \square_2)+(1_3,\ \square_2\times\square_2) \\
&= (\square\square_3,\ 1_2)+\big(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}_3,\ 1_2\big)+2\,(\square_3,\ \square_2)+(1_3,\ \square\square_2)+(1_3,\ 1_2) \\
&\equiv (6,1)+\big(\overline{3},1\big)+2\,(3,2)+(1,3)+(1,1)\,,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

另一方面,

$$[5]\times[5]\equiv \Box_{\,5}\times\Box_{\,5}=\Box\!\Box_{\,5}+\begin{array}{c}\Box\\[-4pt]\Box\end{array}_{\,5}=[15]+[10]\,. \tag{2.37}$$

注意到 [10] 是反称的, [15] 是对称的, 我们可以通过辨认式 (2.36) 中反称和对称的部分, 将它们分别归入到 [10] 和 [15] 之中. 结果是

$$[10] \;=\; \left(\overline{3},\ 1\right)+(3,\ 2)_{\rm anti}+(1,\ 1)\,, \tag{2.38}$$

$$[15] \;=\; (6,\ 1)+(3,\ 2)_{\rm sym}+(1,\ 3)\,. \tag{2.39}$$

按式 (2.38), 我们把表示 [10] 的分解显明表达为

$$[10]=\begin{pmatrix} \left(\overline{3},\ 1\right) & | & (3,\ 2) \\ ---\ & + & ---\ \\ (3,\ 2) & | & (1,\ 1) \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

将基本表示 [5] 的表示空间基底取为

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ e_5=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

从而, [10] 表示空间的基底可取为

$$\psi_{ij}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i\right),\quad \psi_{ij}=-\psi_{ji}. \tag{2.42}$$

设 $U^{[5]}$ 是表示 [5] 中的群变换算符, 可以诱导出它在表示 [10] 中对应的

群变换算符

$$\begin{aligned}\left(U^{[10]}\psi\right)_{ij} &= U^{[10]}_{ij,mn}\psi_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2}}U^{[5]}_{im}e_m \otimes U^{[5]}_{jn}e_n - \frac{1}{\sqrt{2}}U^{[5]}_{jm}e_m \otimes U^{[5]}_{in}e_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(U^{[5]}_{im}U^{[5]}_{jn} - U^{[5]}_{jm}U^{[5]}_{in}\right) e_m \otimes e_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}U^{[5]}_{im}U^{[5]}_{jn}\left(e_m \otimes e_n - e_n \otimes e_m\right) = U^{[5]}_{im}U^{[5]}_{jn}\psi_{mn}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

因此,

$$U^{[10]}_{ij,mn} = U^{[5]}_{im}U^{[5]}_{jn}. \tag{2.44}$$

对于由式 (2.28) 中的电荷算符 $Q^{[5]}$ 所生成的群转动 $U^{[5]} = \exp\left(iQ^{[5]}\right)$, 有 (不求和)

$$e^{iQ^{[10]}_{ij}}\delta_{im}\delta_{jn} = U^{[10]}_{ij,mn} = U^{[5]}_{im}U^{[5]}_{jn} = e^{iQ^{[5]}_i}\delta_{im}e^{iQ^{[5]}_j}\delta_{jn} = e^{i\left(Q^{[5]}_i + Q^{[5]}_j\right)}\delta_{im}\delta_{jn}, \tag{2.45}$$

可见,

$$\left(Q^{[10]}_{ij}\right) = \left(Q^{[5]}_i + Q^{[5]}_j\right) = \begin{pmatrix} * & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & * & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & * & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & * & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & * \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

注意, 当 $i = j$ 时, $\psi_{ij} = 0$, $Q^{[10]}$ 没有相应标号的本征值.

现在, 参考 Tab. 2.1 和式 (2.46), 我们将符合要求的 Fermi 子填入到矩阵 (2.40) 之中, 得到 $SU(5)$ 十重态

$$[10] = \left(\psi^{[10]}_{ij}\right)_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & u^c_3 & -u^c_2 & -u_1 & -d_1 \\ -u^c_3 & 0 & u^c_1 & -u_2 & -d_2 \\ u^c_2 & -u^c_1 & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^+ \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L, \tag{2.47}$$

它对应的复共轭表示形式为

$$\left[\overline{10}\right] = \left(\psi_{ij}^{c[10]}\right)_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 & -u_1^c & -d_1^c \\ -u_3 & 0 & u_1 & -u_2^c & -d_2^c \\ u_2 & -u_1 & 0 & -u_3^c & -d_3^c \\ u_1^c & u_2^c & u_3^c & 0 & -e^- \\ d_1^c & d_2^c & d_3^c & e^- & 0 \end{pmatrix}_R, \tag{2.48}$$

此处, 我们改用 1, 2, 3 来代替色指标 r, b, g.

这样, 通过五重态 (2.33), (2.34)和十重态 (2.47), (2.48), 我们穷尽了标准模型中的第 1 代 Fermi 子. 如果要得到第 2 代或第 3 代 Fermi 子的表达形式, 只需对相应的味道进行替换. 例如, 要得到第 2 代的表达形式, 只需作替换

$$\mu^{\pm} \leftrightarrow e^{\pm}, \quad \nu_\mu \leftrightarrow \nu_e, \quad c \leftrightarrow u, \quad s \leftrightarrow d. \tag{2.49}$$

2.4 $SU(5)$ 规范理论

由于 $SU(2)$ 群的表示 $[2]_2$ 和 $\left[\overline{2}\right]_2$ 是等价的, $SU(5)$ 群的表示 $\left[\overline{5}\right]$ 可以分解为

$$\left[\overline{5}\right] = \left(\overline{3}, 1\right) + \left(1, \overline{2}\right) = \left(\overline{3}, 1\right) + (1, 2), \tag{2.50}$$

从而,

$$\begin{aligned} \left[\overline{5}\right] \times [5] &= \left[\left(\overline{3}, 1\right) + (1, 2)\right] \times [(3, 1) + (1, 2)] \\ &= \left[\left(\yng(1,1)_3, 1_2\right) + (1_3, \yng(1)_2)\right] \times [(\yng(1)_3, 1_2) + (1_3, \yng(1)_2)] \\ &= \left(\yng(1,1)_3 \times \yng(1)_3, 1_2\right) + \left(\yng(1,1)_3, \yng(1)_2\right) + (\yng(1)_3, \yng(1)_2) + (1_3, \yng(1)_2 \times \yng(1)_2) \\ &= \left(\yng(2,1)_3, 1_2\right) + (1_3, 1_2) + \left(\yng(1,1)_3, \yng(1)_2\right) + (\yng(1)_3, \yng(1)_2) + (1_3, \yng(2)_2) + (1_3, 1_2) \\ &= (8, 1) + \left(\overline{3}, 2\right) + (3, 2) + (1, 3) + 2\,(1, 1), \end{aligned} \tag{2.51}$$

与式 (2.16) 比较, 便得到 $SU(5)$ 伴随表示的分解

$$[24] = (8, 1) + \left(\overline{3}, 2\right) + (3, 2) + (1, 3) + (1, 1). \tag{2.52}$$

$SU(5)$ 的规范 Bose 子属于其伴随表示 [24]. 我们已将 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 嵌入到 $SU(5)$ 之中, 因此, 标准模型里的全部 Bose 子都应该在 [24] 的分解 (2.52) 中找得到它们的位置. 实际上, 可以这样分配: 将 $SU(3)$ 的胶子八重态 G_μ^a $(a = 1, \cdots, 8)$ 分配给 $(8, 1)$, 中间玻色子同位旋矢量 W_μ^i $(i = 1, 2, 3)$ 分配给 $(1, 3)$, 同位旋标量 (带弱超荷的 Bose 子) B_μ 分配给 $(1, 1)$. 此外, 还剩下 12 个标准模型中没有的规范 Bose 子, 它们属于表示 $(3, 2)$ 和 $(\overline{3}, 2)$. 这些规范 Bose 子构成两个带色的同位旋二重态. 一般采用如下记号:

$$(3, 2) = \begin{pmatrix} X_r & X_g & X_b \\ Y_r & Y_g & Y_b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

在 $SU(5)$ 规范理论中, 记其 24 个规范 Bose 子为 A_μ^i $(i = 1, \cdots, 24)$, 再定义规范 Bose 子算符

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{24} A_\mu^a \lambda_a = \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{8} G_\mu^a \lambda_a + \sum_{a=9}^{20} A_\mu^a \lambda_a + \sum_{a=21}^{23} A_\mu^a \lambda_a + B_\mu \lambda_{24}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{G_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{G_\mu^8}{\sqrt{6}} - \frac{2B_\mu}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(G_\mu^1 - iG_\mu^2\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(G_\mu^4 - iG_\mu^5\right) & X_{1\mu}^C & Y_{1\mu}^C \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(G_\mu^1 + iG_\mu^2\right) & -\frac{G_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{G_\mu^8}{\sqrt{6}} - \frac{2B_\mu}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(G_\mu^6 - iG_\mu^7\right) & X_{2\mu}^C & Y_{2\mu}^C \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(G_\mu^4 + iG_\mu^5\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(G_\mu^6 + iG_\mu^7\right) & -\sqrt{\frac{2}{3}} G_\mu^8 - \frac{2B_\mu}{\sqrt{30}} & X_{3\mu}^C & Y_{3\mu}^C \\ X_{1\mu} & X_{2\mu} & X_{3\mu} & \frac{W_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B_\mu}{\sqrt{30}} & W_\mu^+ \\ Y_{1\mu} & Y_{2\mu} & Y_{3\mu} & W_\mu^- & -\frac{W_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B_\mu}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.54}$$

其中

$$G_\mu^a = A_\mu^a, \quad a = 1, \cdots, 8, \tag{2.55}$$

$$W_\mu^3 = A_\mu^{23}, \quad W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{21} \mp iA_\mu^{22}\right), \quad B_\mu = A_\mu^{24}, \tag{2.56}$$

$$X_{1\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^9 + iA_\mu^{10}\right), \quad X_{1\mu}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^9 - iA_\mu^{10}\right), \tag{2.57}$$

$$X_{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{11} + iA_\mu^{12}\right), \quad X_{2\mu}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{11} - iA_\mu^{12}\right), \tag{2.58}$$

$$X_{3\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{13} + iA_\mu^{14}\right), \quad X_{3\mu}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{13} - iA_\mu^{14}\right), \tag{2.59}$$

$$Y_{1\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{15} + iA_\mu^{16}\right), \quad Y_{1\mu}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{15} - iA_\mu^{16}\right), \tag{2.60}$$

$$Y_{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{17} + iA_\mu^{18}\right), \quad Y_{2\mu}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{17} - iA_\mu^{18}\right), \tag{2.61}$$

$$Y_{3\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{19} + iA_\mu^{20}\right), \quad Y_{3\mu}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{19} - iA_\mu^{20}\right). \tag{2.62}$$

由于表示 [24] 被包含于表示 $[\bar{5}] \times [5]$ 之中, 类似于式 (2.46), 其电荷矩阵

$$\left(Q_{ij}^{[24]}\right) = \left(Q_j^{[\bar{5}]} + Q_i^{[5]}\right) = \left(Q_i^{[5]} - Q_j^{[5]}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.63}$$

可见, X 和 Y Bose 子分别带电 4/3 和 1/3. 因此, X 和 Y Bose 子既带色又带电, 被称为 *leptoquark*.

$SU(5)$ 规范场论中基本表示 [5] 对应的协变导数

$$iD_\mu = i\partial_\mu + \frac{g_5}{2}A_\mu^a\lambda_a = i\partial_\mu + g_5 A_\mu, \tag{2.64}$$

只包含唯一一个耦合常数 g_5. 现在, 让我们来分析 Fermi 场与规范 Bose 场的耦合, 相应的拉氏量项

$$\mathcal{L}_{\psi A} = \bar{\psi}\gamma^\mu iD_\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu i\partial_\mu\psi + g_5\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi, \tag{2.65}$$

其中与 W 和 B Bose 子耦合的部分为

$$\mathcal{L}_{\psi BW} = \bar{\psi}\gamma^\mu\left(g_5\sum_{a=1}^{3} W_\mu^i T_i + \frac{g_5}{2}B_\mu\sqrt{\frac{3}{5}}Y_W\right)\psi, \tag{2.66}$$

它在 GSW 理论中的形式为

$$\mathcal{L}_{\psi BW}^{\mathrm{GWS}} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(g\sum_{a=1}^{3} W_{\mu}^{i}T_{i} + \frac{g'}{2}B_{\mu}T\right)\psi, \tag{2.67}$$

对两者进行比较, 发现

$$g = g_5, \quad g' = \sqrt{\frac{3}{5}}g_5. \tag{2.68}$$

由此得出, $SU(5)$ 规范场论对 Weinberg 角的预言

$$\sin^2\theta_W = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{3}{8} = 0.375. \tag{2.69}$$

这一结果是在 $SU(5)$ 对称性尚未破缺时得出的, 它与实验结果 $\sin^2\theta_W^{\mathrm{exp}} = 0.23$ 相差甚远. 实际上, 在实验中从未见过 X 与 Y Bose 子的影响, 因而若它们存在, 必定具有非常大的对称性破缺后的质量. 为了不与现知的质子衰变时间下限矛盾, $SU(5)$ 对称性破缺应该在能量大约为 10^{15} GeV 处发生. 在下一节中我们将会看到, 在电弱相互作用的能标上, $SU(5)$ 规范场论预言的 Weinberg 角与实验结果比较相近.

接下来, 我们开始构造 $SU(5)$ 规范场论的拉氏量. 在局域规范变换

$$U(x) = e^{ig_5\theta_a(x)\lambda^a/2} \tag{2.70}$$

下,

$$\psi'^{[5]} = U(x)\psi^{[5]}, \tag{2.71}$$

按照式 (2.64) 定义的协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_5A_\mu, \tag{2.72}$$

如果要求 $D_\mu\psi^{[5]}$ 满足

$$D'_\mu\psi'^{[5]} = U\left(D_\mu\psi^{[5]}\right), \tag{2.73}$$

由

$$D'_\mu \psi'^{[5]} = \left(\partial_\mu - ig_5 A'_\mu\right) U\psi^{[5]} = U\left(\partial_\mu + U^{-1}\partial_\mu U - ig_5 U^{-1} A'_\mu U\right)\psi^{[5]}, \tag{2.74}$$

和

$$U\left(D_\mu \psi^{[5]}\right) = U\left(\partial_\mu - ig_5 A_\mu\right)\psi^{[5]}, \tag{2.75}$$

就可以得出规范场的变换律为

$$A'^\mu = U(x) A^\mu U^{-1}(x) + \frac{i}{g_5} U(x)\partial^\mu U^{-1}(x), \tag{2.76}$$

亦即,

$$A'^{\mu a}\frac{\lambda_a}{2} = U(x)\left(A^{\mu b}\frac{\lambda_b}{2} + \frac{i}{g_5}\partial^\mu\right) U^{-1}(x). \tag{2.77}$$

若将 $\psi^{[5]}$ 对应的拉氏量动能项定义为

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}^{[5]} = \bar{\psi}^{[5]} i\gamma^\mu D_\mu \psi^{[5]} = \bar{\psi}^{[5]} i \not{D}\psi^{[5]}, \tag{2.78}$$

则它在局域规范变换 (2.70) 下不变:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'^{[5]}_{\text{kin}} &= \bar{\psi}'^{[5]} \not{D}' \psi'^{[5]} = \left(U\psi^{[5]}\right)^\dagger \gamma^0 U \not{D}\psi^{[5]} \\ &= \psi^{[5]\dagger} U^{-1}\gamma^0 U \not{D}\psi^{[5]} = \bar{\psi}^{[5]} \not{D}\psi^{[5]} = \mathcal{L}^{[5]}_{\text{kin}}.\end{aligned} \tag{2.79}$$

注意到表示 [10] 是在表示 [5] 上诱导出来的:

$$\psi^{[10]} = \left(\psi^{[5]} \otimes \psi^{[5]}\right)_{\text{anti}}. \tag{2.80}$$

当表示 [5] 进行变换 $\psi'^{[5]} = U(x)\psi^{[5]}$ 时, $\psi^{[10]}$ 的变换为

$$\begin{aligned}\psi'^{[10]}_{ik} &= \psi'^{[5]}_i \psi'^{[5]}_k - \psi'^{[5]}_k \psi'^{[5]}_i = U_{ij}(x)\psi^{[5]}_j U_{kl}(x)\psi^{[5]}_l - U_{kl}(x)\psi^{[5]}_l U_{ij}(x)\psi^{[5]}_j \\ &= U_{ij}(x)\left(\psi^{[5]}_j \otimes \psi^{[5]}_l\right)_{\text{anti}} U_{kl}(x) = U_{ij}(x)\psi^{[10]}_{jl} U^T_{lk}(x),\end{aligned} \tag{2.81}$$

即

$$\psi'^{[10]} = U(x)\,\psi^{[10]} U^T(x)\,. \tag{2.82}$$

$\psi^{[10]}$ 的普通导数变换为

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \psi'^{[10]} &= \partial_\mu\left(U\psi^{[10]}U^T\right) \\
&= \left(\partial_\mu U\right)\psi^{[10]}U^T + U\left(\partial_\mu \psi^{[10]}\right)U^T + U\psi^{[10]}\left(\partial_\mu U^T\right) \\
&= U\left(\partial_\mu \psi^{[10]}\right)U^T + ig_5 U\left[\left(\partial_\mu\theta_a\right)\frac{\lambda^a}{2}\psi^{[10]} + \psi^{[10]}\left(\partial_\mu\theta_a\right)\frac{\left(\lambda^a\right)^T}{2}\right]U^T.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

再由 $D_\mu\psi^{[5]} = \left(\partial_\mu - ig_5 A_\mu\right)\psi^{[5]}$, 可以诱导出

$$\begin{aligned}
D_\mu\psi^{[10]}_{ik} &= \left(D_\mu\psi^{[5]}_i\right)\psi^{[5]}_k + \psi^{[5]}_i\left(D_\mu\psi^{[5]}_k\right) - \left(D_\mu\psi^{[5]}_k\right)\psi^{[5]}_i - \psi^{[5]}_k\left(D_\mu\psi^{[5]}_i\right) \\
&= \partial_\mu\psi^{[10]}_{ik} - ig_5\Big(A_{\mu i}{}^j\psi^{[5]}_j\psi^{[5]}_k + \psi^{[5]}_i A_{\mu k}{}^j\psi^{[5]}_j \\
&\qquad -A_{\mu k}{}^j\psi^{[5]}_j\psi^{[5]}_i - \psi^{[5]}_k A_{\mu i}{}^j\psi^{[5]}_j\Big) \\
&= \partial_\mu\psi^{[10]}_{ik} - ig_5\left[A_{\mu i}{}^j\psi^{[10]}_{jk} + \psi^{[10]}_{ij}\left(A^T_\mu\right)^j{}_k\right],
\end{aligned} \tag{2.84}$$

亦即, 表示 [10] 对应的协变导数形式为

$$D_\mu\psi^{[10]} = \partial_\mu\psi^{[10]} - ig_5\left(A^a_\mu\frac{\lambda_a}{2}\psi^{[10]} + \psi^{[10]}A^a_\mu\frac{\lambda^T_a}{2}\right). \tag{2.85}$$

从而, $\psi^{[10]}$ 的协变导数变换为

$$
\begin{aligned}
D'_\mu \psi'^{[10]} &= \partial_\mu \psi'^{[10]} - ig_5 \left(A'^a_\mu \frac{\lambda_a}{2} \psi'^{[10]} + \psi'^{[10]} A'^a_\mu \frac{\lambda_a^T}{2} \right) \\
&= U \left(\partial_\mu \psi^{[10]} \right) U^T + ig_5 U \left[(\partial_\mu \theta_a) \frac{\lambda^a}{2} \psi^{[10]} + \psi^{[10]} (\partial_\mu \theta_a) \frac{(\lambda^a)^T}{2} \right] U^T \\
&\quad - ig_5 \Bigg\{ U \left[A^b_\mu \frac{\lambda_b}{2} + \left(\partial_\mu \theta^b \right) \frac{\lambda_b}{2} \right] U^{-1} U \psi^{[10]} U^T \\
&\qquad + U \psi^{[10]} U^T U^{-1T} \left[A^b_\mu \frac{\lambda_b^T}{2} + \left(\partial_\mu \theta^b \right) \frac{\lambda_b^T}{2} \right] U^T \Bigg\} \\
&= U \left\{ \partial_\mu \psi^{[10]} - ig_5 \left(A^a_\mu \frac{\lambda_a}{2} \psi^{[10]} + \psi^{[10]} A^a_\mu \frac{\lambda_a^T}{2} \right) \right\} U^T \\
&= U D_\mu \psi^{[10]} U^T,
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

这一变换与 $\psi^{[10]}$ 的变换 (2.82) 一致.

若将 $\psi^{[10]}$ 对应的拉氏量动能项定义为

$$
\mathcal{L}_{\text{kin}}^{[10]} = \text{Tr} \left\{ \bar{\psi}^{[10]} i \gamma^\mu D_\mu \psi^{[10]} \right\} = \text{Tr} \left\{ \bar{\psi}^{[10]} i \not{D} \psi^{[10]} \right\},
\tag{2.87}
$$

则它在局域规范变换 (2.70) 下不变:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'^{[10]}_{\text{kin}} &= \text{Tr} \left\{ \bar{\psi}'^{[10]} i \not{D}' \psi'^{[10]} \right\} = \text{Tr} \left\{ \left(U \psi^{[10]} U^T \right)^\dagger \gamma^0 U i \not{D} \psi^{[10]} U^T \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ U^{-1T} \psi^{[10]\dagger} \gamma^0 U^{-1} U i \not{D} \psi^{[10]} U^T \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \bar{\psi}^{[10]} i \not{D} \psi^{[10]} \right\} = L^{[10]}_{\text{kin}}.
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

所以, $SU(5)$ 规范场论的拉氏量中的动能项

$$
\mathcal{L}_{\text{kin}} = \text{Tr} \left\{ \bar{\psi}^{[10]} i \not{D} \psi^{[10]} \right\} + \bar{\psi}^{[5]} i \not{D} \psi^{[5]},
\tag{2.89}
$$

其中, 相互作用项

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_5 \text{Tr}\left\{ \bar{\psi}^{[10]} \gamma_\mu A_a^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi^{[10]} + \bar{\psi}^{[10]} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi^{[10]} \frac{\lambda_a^T}{2} A^{\mu a} \right\} + g_5 \bar{\psi}^{[5]} \gamma_\mu A_a^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi^{[5]}, \tag{2.90}$$

通过一系列的计算, 可将上式改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{g_5}{\sqrt{2}} \big(\varepsilon_{ijk} \bar{u}_{iL} \not{X}_k u_{jL}^c + \bar{e}_L^c \not{X}_j d_{jL} - \bar{e}_R^c \not{X}_j d_{jR} \\ &\qquad + \varepsilon_{ijk} \bar{d}_{iL} \not{Y}_k u_{jL}^c - \bar{e}_L^c \not{Y}_j u_{jL} + \bar{\nu}_{eR}^c \not{Y}_j d_{jR} + \text{h.c.} \big). \end{aligned} \tag{2.91}$$

由上述拉氏量可以看出, X 和 Y Bose 子可以将夸克转换为轻子, 从而导致重子数和轻子数不再守恒. 也正是因为这样, 在 $SU(5)$ 大统一规范场论中, 质子可以衰变. 这是 $SU(5)$ 理论的一个非常重要的预言. 通过一些模型依赖的计算, $SU(5)$ 理论给出一个对质子寿命的预言:

$$\tau_p \sim 6 \times 10^{27} \left(\frac{M_X}{10^{14}\ \text{GeV}} \right)^4 \text{years}. \tag{2.92}$$

进行双圈近似计算, 可以得出 $M_X = (6 \pm 3) \times 10^{14}$ GeV, 因此质子寿命应该短于 4×10^{31} 年.

2.5 $SU(5)$ 自发对称性破缺

由于夸克和轻子在正常条件下是完全不同的粒子, 若 $SU(5)$ 对称性存在, 它必定被破缺着相当厉害. 也就是说,比起弱规范 Bose 子 $W^\pm$ 和 Z^0, X 和 Y Bose 子必定具有极大的质量.

$SU(5)$ 的自发对称性破缺分为两步. 第一步, 从 $SU(5)$ 破缺到 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, 这被称为大统一理论 (GUT) 的自发对称性破缺, 可以通过引入 $SU(5)$ 伴随表示 [24] 中的一个 Higgs 24 重态 $\phi = \sum_{i=1}^{24} \phi_i \lambda_i$ 来完成; 第二步是 GSW 理论的对称性破缺, 从 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 破缺到电磁规范群 $U(1)_{EM}$, 可以通过引入 $SU(5)$ 基本表示 [5] 中的一个 Higgs 5 重态 H 来完成. 最后, 只有 $SU(3)_C$ 和 $U(1)_{EM}$ 保持不破缺的状态, 因而胶子和光子

都没有质量.

在第一步自发对称性破缺中, 为了不破坏 $SU(5)$ 的拉氏量对称性 (而只是"自发地"破缺), Higgs 势必须由 $SU(5)$ 不变函数组成. 利用 $\mathrm{Tr}\,(AB)=\mathrm{Tr}\,(BA)$, 可得

$$\mathrm{Tr}\left(\phi'^{n}\right)=\mathrm{Tr}\left[\left(U\phi U^{-1}\right)^{n}\right]=\mathrm{Tr}\left(U\phi^{n}U^{-1}\right)=\mathrm{Tr}\left(U^{-1}U\phi^{n}\right)=\mathrm{Tr}\left(\phi^{n}\right) \tag{2.93}$$

对任意 $SU(5)$ 群变换算符 U 成立. 假设 Higgs 势 $V(\phi)$ 不依赖于 ϕ 的符号, 且由 ϕ 的 4 阶幂以下的项构造, 则 $V(\phi)$ 的一般形式为

$$V\left(\phi\right)=-\frac{1}{2}\mu^{2}\mathrm{Tr}\left(\phi^{2}\right)+\frac{a}{4}\left[\mathrm{Tr}\left(\phi^{2}\right)\right]^{2}+\frac{b}{2}\mathrm{Tr}\left(\phi^{4}\right). \tag{2.94}$$

为了使 $V\left(\phi\right)$ 的极小值不出现在 $\phi=0$ 处 (从而对称性才能自发破缺), 在这里我们将二次项的系数选为负值.

接下来, 我们将求出使 Higgs 势 $V(\phi)$ 取得极小值的场构形. 由于 $V(\phi)$ 是规范不变的, 我们可以为 Higgs 场选择一个确定的规范. 根据群理论, 任何 $\mathfrak{su}(5)$ 元素均可通过一个适当的 $SU(5)$ 转动转到相应的 Cartan 子代数 (由 $SU(5)$ 的所有对角生成元张成) 里面. 而由于 Higgs 场 $\phi\in\mathfrak{su}(5)$, 我们可以选用一个对角的 5×5 矩阵来表示它, 一般形式为

$$\begin{aligned}\phi &= \alpha\lambda_{3}+\beta\sqrt{3}\lambda_{8}+\gamma\lambda_{23}+\frac{\sqrt{15}}{2}\delta\lambda_{24}\\ &= \begin{pmatrix}\alpha+\beta-\delta &&&&\\ & -\alpha+\beta-\delta &&&\\ && -2\beta-\delta &&\\ &&& \gamma+\frac{3}{2}\delta &\\ &&&& -\gamma+\frac{3}{2}\delta\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.95}$$

现在, 可以得到精确形式

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\phi^2\right) &= 2\alpha^2+6\beta^2+2\gamma^2+\frac{15}{2}\delta^2, && (2.96)\\ \mathrm{Tr}\left(\phi^4\right) &= 2\alpha^4+18\beta^4+2\gamma^4+\frac{105}{8}\delta^4+12\alpha^2(\beta-\delta)^2 \\ &\quad +27\gamma^2\delta^2+24\beta^3\delta+36\beta^2\delta^2, && (2.97)\end{aligned}$$

代入 Higgs 势 (2.94), 再由极值条件

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha}=\frac{\partial V}{\partial\beta}=\frac{\partial V}{\partial\gamma}=\frac{\partial V}{\partial\delta}=0, \tag{2.98}$$

可求得, 当

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0,\ \delta^2=\delta_0^2\equiv\frac{2\mu^2}{15a+7b},\ \text{且}\ a>-\frac{7}{15}b,\ b>0 \tag{2.99}$$

时, Higgs 势 $V(\phi)$ 取得其极小值:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\delta^2}\right|_{\alpha=\beta=\gamma=0,\ \delta=\delta_0}=15\mu^2>0,\quad V\left(\phi_0\right)=-\frac{15\mu^4}{4\left(15a+7b\right)}<0=V\left(0\right). \tag{2.100}$$

此时, 场构形为

$$\phi_0=\frac{3}{2}vY_W=\begin{pmatrix} -v &&&& \\ & -v &&& \\ && -v && \\ &&& \frac{3}{2}v & \\ &&&& \frac{3}{2}v \end{pmatrix},\quad v\equiv\sqrt{\frac{2\mu^2}{15a+7b}}. \tag{2.101}$$

当然, 任意规范等价的 Higgs 场 $\phi=U\phi_0U^{-1}$ 也给出同样的 $V(\phi)$ 极小值 $V_{\min}=-\frac{15\mu^4}{4(15a+7b)}=-\frac{15}{8}\mu^2v^2<0$.

Higgs 场 ϕ 对应的拉氏量动能项

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi^{\mathrm{kin}} &= \left(D_\mu \phi_i\right)^\dagger \left(D^\mu \phi_i\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\left(\partial_\mu \phi + i g_5 \left[A_\mu, \phi\right]\right)^\dagger \left(\partial^\mu \phi + i g_5 \left[A^\mu, \phi\right]\right)\right\}, \end{aligned} \tag{2.102}$$

注意到 Higgs 场 ϕ 和规范 Bose 场 A_μ 均属于 $SU(5)$ 的伴随表示 [24], $[A_\mu, \phi]$ 是有确切的矩阵对易子含义的. 发生自发对称性破缺时, 取 $\phi = \phi_0$, 式 (2.102) 中规范场的质量项

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi^{\mathrm{mass}} &= \frac{1}{2} g_5^2 \mathrm{Tr}\left\{\left[A_\mu, \phi_0\right]^\dagger \left[A^\mu, \phi_0\right]\right\} = \frac{9}{8} g_5^2 v^2 \mathrm{Tr}\left\{\left[A_\mu, Y_W\right]^\dagger \left[A^\mu, Y_W\right]\right\} \\ &= \frac{25}{4} g_5^2 v^2 \left(\left|A_{14}^\mu\right|^2 + \left|A_{24}^\mu\right|^2 + \left|A_{34}^\mu\right|^2 + \left|A_{15}^\mu\right|^2 + \left|A_{25}^\mu\right|^2 + \left|A_{35}^\mu\right|^2\right) \\ &= M_X^2 \sum_{i=r,\ g,\ b} \left|X_i^\mu\right|^2 + M_Y^2 \sum_{i=r,\ g,\ b} \left|Y_i^\mu\right|^2, \end{aligned} \tag{2.103}$$

其中,

$$M_X = M_Y = \frac{5}{2\sqrt{2}} g_5 v. \tag{2.104}$$

因此, 通过 GUT 的自发对称性破缺, 规范 Bose 子 X 和 Y 获得了相同的质量 $\frac{5}{2\sqrt{2}} g_5 v$.

现在, 考虑第二步自发对称性破缺, 我们要将 GSW 理论中的 Higgs 机制转换到 $SU(5)$ 理论中. 设此 Higgs 场 $H = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ 是表示 [5] 的五重态, 如果我们选择与标准模型 GSW 理论中一样的 Higgs 势

$$V_{\mathrm{GSW}}(H) = -\frac{1}{2}\nu^2 \left(H^\dagger H\right) + \frac{\lambda}{4}\left(H^\dagger H\right)^2, \tag{2.105}$$

则当它处于极小值时, 场构形 H_0 可以在任何方向上取

$$h_0^{\mathrm{GSW}} = \sqrt{\left(H_0^\dagger H_0\right)} = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda}}. \tag{2.106}$$

此时, 所有选择

$$H_0^{(1)} = h_0^{\text{GSW}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; H_0^{(2)} = h_0^{\text{GSW}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \; H_0^{(5)} = h_0^{\text{GSW}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.107}$$

都是等价的. 如果选择 $H_0 = H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$, 或 $H_0^{(3)}$, 就会破缺 $SU(3)$ 对称性, 这并不是我们想要的. 为了避免出现这一情况, 我们在 Higgs 势中添加一项 $V_{\phi H} = \beta H^\dagger \phi^2 H$. 由于 ϕ 的对称性破缺尺度比 H 的大得多, 我们直接用 ϕ 的真空期待值 ϕ_0 进行第二步对称性破缺的计算. 现在, 有效的 Higgs 势

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(H) &= V_{\text{GSW}}(H) + V_{\phi H}(H, \phi_0) \\ &= H^\dagger \left(-\frac{\nu^2}{2} + \frac{9}{4} \beta v^2 Y_W^2 \right) H + \frac{\lambda}{4} \left(H^\dagger H \right)^2. \end{aligned} \tag{2.108}$$

上式二次项中的矩阵是

$$-\frac{\nu^2}{2} + \frac{9}{4} \beta v^2 Y_W^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\nu^2 + 2\beta v^2 & & & & \\ & -\nu^2 + 2\beta v^2 & & & \\ & & -\nu^2 + 2\beta v^2 & & \\ & & & -\nu^2 + \frac{9}{2}\beta v^2 & \\ & & & & -\nu^2 + \frac{9}{2}\beta v^2 \end{pmatrix}, \tag{2.109}$$

设真空期待值

$$H_0^{(1)} = h_0^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \cdots, \; H_0^{(5)} = h_0^{(5)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.110}$$

用式 (2.108), (2.109) 与式 (2.105), (2.106) 比较, 可以发现, 让 $V_{\text{eff}}(H)$ 取极

小值的解为

$$h_0^{(i)} = \sqrt{\left(\nu^2 - 2\beta v^2\right)/\lambda}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2.111}$$

$$h_0^{(i)} = \sqrt{\left(\nu^2 - \frac{9}{2}\beta v^2\right)/\lambda}, \quad i = 4, 5. \tag{2.112}$$

对应的 Higgs 势极小值为

$$V_{\text{eff}}\left(H_0^{(i)}\right) = \begin{cases} -\left(\nu^2 - 2\beta v^2\right)^2/4\lambda, & i = 1, 2, 3, \\ -\left(\nu^2 - \dfrac{9}{2}\beta v^2\right)^2/4\lambda, & i = 4, 5. \end{cases} \tag{2.113}$$

对于 $\beta < 0$, 方向 $i = 4, 5$ 对应的 Higgs 势极小值 $V_{\text{eff}}\left(H_0^{(i)}\right)$ 比其余 3 个方向对应的更低, 因而对称性自发破缺时, 将会自动选择这两个方向. 这样一来, $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性破缺了, $SU(3)_C$ 的对称性依然存在, 正是我们想要的结果.

因此, 我们选择 $\beta < 0$, 并在习惯上选取

$$H_0 = H_0^{(5)} = h_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_0 = \sqrt{\left(\nu^2 - \frac{9}{2}\beta v^2\right)/\lambda}. \tag{2.114}$$

Higgs 场 H 的对应的拉氏量动能项

$$\mathcal{L}_H^{\text{kin}} = \frac{1}{2}(D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) = \frac{1}{2}(\partial_\mu H - ig_5 A_\mu H)^\dagger (\partial^\mu H - ig_5 A^\mu H), \tag{2.115}$$

发生自发对称性破缺时, 取 $H=H_0$, 上式中的质量项为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_H^{\text{mass}} &= \frac{1}{2}g_5^2\left(H_0^\dagger A_\mu^\dagger A^\mu H_0\right) \\
&= \frac{1}{4}g_5^2h_0^2\left\{\sum_i Y_{i\mu}Y_i^{*\mu}+W_\mu^+W^{\mu-}+\frac{1}{2}\left(W_3^\mu-\sqrt{\frac{3}{5}}B^\mu\right)^2\right\},
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

这里用到 $Y_i^{c\mu}=Y_i^{*\mu}$. 由于 $v\gg h_0$, 与式 (2.103) 相比, 此处对规范 Bose 子 Y 质量 M_Y 的贡献是可以忽略的. 然而, 这一贡献还是破坏了 M_X 和 M_Y 的简并! 现在, 我们感兴趣的项是

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_H^{\text{mass}} &= \frac{1}{4}g_5^2h_0^2W_\mu^+W^{\mu-}+\frac{1}{5}g_5^2h_0^2\left(\sqrt{\frac{5}{8}}W_3^\mu-\sqrt{\frac{3}{8}}B^\mu\right)^2 \\
&\equiv M_W^2W_\mu^+W^{\mu-}+\frac{1}{2}M_Z^2Z^\mu Z_\mu,
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

由此, 规范 Bose 子 $W^\pm$ 和 Z^0 获得了质量,

$$
M_W^2=\frac{1}{4}g_5^2h_0^2,\quad M_Z^2=\frac{2}{5}g_5^2h_0^2,\quad \frac{M_W^2}{M_Z^2}=\frac{5}{8}=1-\sin^2\theta_W=\cos^2\theta_W. \tag{2.118}
$$

值得注意的是, 这里有一个概念上的困难. 由于 $V(\phi_0)$ 非常大, 大约是 10^{15} GeV, 参数 β 应该被选择得非常小, 只有这样才能得到 GSW 理论中所需要的 h_0 值. 这一选择是极不自然的, 通常, 此问题被称为规范等级问题 (gauge hierarchy problem), 目前还没有很好的解决办法.

从式 (2.68) 已经看出, $SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ 的耦合常数 g_C, g_L 和 g', 是由 $SU(5)$ 大统一规范场论中的耦合常数 g_5 决定的:

$$
g_C=g_L=g_5,\quad g'=\sqrt{\frac{3}{5}}g_5. \tag{2.119}
$$

然而, 实验测得的值

$$g_c \sim 1.5, \quad g_L = e/\sin\theta_W \sim 0.65, \quad g' = e/\cos\theta_W \sim 0.34, \tag{2.120}$$

与此并不相符. 实际上, 根据规范场的量子理论, 计及真空极化的效应, 对理论进行重整化之后, 实验测定的耦合常数值依赖于测量过程中 4 动量的转移的平方 q^2. 当能量高于 GUT 对称性破缺的临界值时, $SU(5)$ 规范场论保证所有场的耦合强度随 q^2 的变化规律是相同的. 另一方面, 当能量低于 GUT 破缺尺度时, X 和 Y Bose 子具有了质量, 不再从虚动量中创造出来. 从而, 无质量胶子的耦合常数与 W 和 B Bose 子的耦合常数具有不同的 q^2 依赖性.

对于某一耦合常数 g_i^2, 定义其对应的精确结构常数

$$\alpha_i \equiv \frac{g_i^2}{4\pi}, \tag{2.121}$$

一般地, 它对 q^2 的依赖性表达为

$$\frac{1}{\alpha_i\left(q^2\right)} = \frac{1}{\alpha_i\left(m^2\right)} + b_i \ln\frac{q^2}{m^2}, \tag{2.122}$$

其中 m 是能量标度上任意一个参考点, b_i 是依赖于所考虑规范群和耦合 Fermi 子数的常数.

设轻子和夸克双重态的代数为 n_g, 则对于非 Abel 规范群 $SU(n)$,

$$b_i = \frac{11n - 4n_g}{12\pi}, \quad n \geq 2. \tag{2.123}$$

因此, 对于色规范群 $SU(3)$ 来说,

$$b_C = \frac{33 - 4n_g}{12\pi}; \tag{2.124}$$

对于同位旋规范群 $SU(3)$ 来说,

$$b_L = \frac{11 - 2n_g}{6\pi}. \tag{2.125}$$

对于 Abel 规范群 $U(1)$,

$$b_{U(1)} = -\frac{1}{3\pi} n_g. \tag{2.126}$$

但对于超荷的 $U(1)$ 规范群, b_i 的形式应作些微改变:

$$b' = \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3\pi} n_g\right) = -\frac{5}{9\pi} n_g. \tag{2.127}$$

现在, 我们选择能标参考点为 $M \approx M_X \approx M_Y$, 亦即 $SU(5)$ 对称性自发破缺的地方. 在此处, $q^2 = M^2$, $SU(5)$ 对称性处于破缺的临界点上, 式 (2.119) 依然成立, 故

$$\alpha_C\left(M^2\right) = \alpha_L\left(M^2\right) = \frac{5}{3}\alpha'\left(M^2\right). \tag{2.128}$$

接下来, 我们将通过比较电磁相互作用中的耦合常数来决定 M 的大小. 利用

$$1 = \sin^2\theta_W + \cos^2\theta_W = \frac{e^2}{g_L^2} + \frac{e^2}{g'^2}, \tag{2.129}$$

可得

$$\frac{1}{\alpha} \equiv \frac{4\pi}{e^2} = 4\pi\left(\frac{1}{g_L^2} + \frac{1}{g'^2}\right) = \frac{1}{\alpha_L} + \frac{1}{\alpha'}. \tag{2.130}$$

从而, 可以推出 α 的 q^2 依赖性为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha\left(q^2\right)} &= \frac{1}{\alpha_L\left(q^2\right)} + \frac{1}{\alpha'\left(q^2\right)} = \frac{1}{\alpha_L\left(M^2\right)} + \frac{1}{\alpha'\left(M^2\right)} + \left(b_L + b'\right)\ln\frac{q^2}{M^2} \\ &\equiv \frac{1}{\alpha\left(M^2\right)} + b\ln\frac{q^2}{M^2}, \end{aligned} \tag{2.131}$$

其中

$$b = b_L + b' = \frac{33 - 16n_g}{18\pi}, \quad \frac{1}{\alpha\left(M^2\right)} = \frac{1}{\alpha_L\left(M^2\right)} + \frac{1}{\alpha'\left(M^2\right)}. \tag{2.132}$$

而另一方面, 式 (2.128) 要求

$$\frac{1}{\alpha\left(M^2\right)}=\frac{1}{\alpha_L\left(M^2\right)}+\frac{1}{\alpha'\left(M^2\right)}=\frac{8}{3}\frac{1}{\alpha_C\left(M^2\right)}, \tag{2.133}$$

因此,

$$\frac{1}{\alpha\left(q^2\right)}-\frac{8}{3}\frac{1}{\alpha_C\left(q^2\right)}=\left(b-\frac{8}{3}b_C\right)\ln\frac{q^2}{M^2}=-\frac{11}{2\pi}\ln\frac{q^2}{M^2} \tag{2.134}$$

与 Fermi 子代数 n_g 无关. 我们并不知道在当前加速器能量与大统一理论能标之间存在多少代 Fermi 子, 因而这一性质非常有用.

在 $q^2\approx(5\text{ GeV})^2$ 处, α_C的值是熟知的:

$$\alpha_C\left((5\text{ GeV})^2\right)\approx 0.175\pm 0.01. \tag{2.135}$$

利用式 (2.122), 我们可以将它转换到电弱理论能标 $q^2\approx(100\text{ GeV})^2\approx M_W^2$ 上. 取 $n_g=3$, 则由

$$\frac{1}{\alpha_C\left((5\text{ GeV})^2\right)}=\frac{1}{\alpha_C\left(M^2\right)}+b_C\ln\frac{(5\text{ GeV})^2}{M^2} \tag{2.136}$$

可推出

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_C\left(M_W^2\right)} &= \frac{1}{\alpha_C\left(M^2\right)}+b_C\ln\frac{M_W^2}{M^2}\\ &= \left[\frac{1}{\alpha_C\left((5\text{ GeV})^2\right)}-b_C\ln\frac{(5\text{ GeV})^2}{M^2}\right]+b_C\ln\frac{M_W^2}{M^2}\\ &= \frac{1}{0.175}+b_C\ln\frac{(100\text{ GeV})^2}{(5\text{ GeV})^2}\approx\frac{1}{0.11}.\end{aligned} \tag{2.137}$$

此外, 在 QED 中, 电磁耦合常数满足

$$\frac{1}{\alpha\left(q^2\right)}=\frac{1}{\alpha\left(m_0\right)}-\frac{1}{3\pi}\sum_k e_k^2\ln\frac{q^2}{m_0^2}, \tag{2.138}$$

因而,

$$\frac{1}{\alpha\left(M_W^2\right)} \approx \frac{1}{\alpha(0)} - \frac{1}{3\pi}\sum_k e_k^2 \ln\frac{M_W^2}{m_0^2}, \tag{2.139}$$

其中, e_k 表示单位电子电荷的电量, m_0是一个符合重整化点的轻 Fermi 子的质量, 而 $1/\alpha(m_0) \approx 1/\alpha(0) = 137.036$ 是 Sommerfeld 常数. 再计入夸克的 3 个色自由度之后, 我们得到

$$\frac{1}{\alpha\left(M_W^2\right)} \approx 128. \tag{2.140}$$

将式 (2.137) 和 (2.140) 代入式 (2.134), 就可以算出大统一理论的质量尺度

$$M = M_W \exp\left[\frac{\pi}{11}\left(\frac{1}{\alpha\left(M_W^2\right)} - \frac{8/3}{\alpha_C\left(M_W^2\right)}\right)\right] \approx 7.4\times10^{14}\ \text{GeV}. \tag{2.141}$$

这一巨大的 M 不是 $SU(5)$ 理论特有的, 而是在任何大统一规范场论中都会出现的.

现在, 让我们考察一下 Weinberg 角 θ_W 的 q^2 依赖性. 我们感兴趣的是它在 W-Z Bose 子质量尺度上的值 $\theta_W\left(M_W^2\right)$, 这个值可以和实验测定值进行比较.

按定义,

$$\sin^2\theta_W\left(q^2\right) = \frac{e^2\left(q^2\right)}{g_L^2\left(q^2\right)} = \frac{\alpha\left(q^2\right)}{\alpha_L\left(q^2\right)}. \tag{2.142}$$

由式 (2.130), 有

$$\frac{1}{\alpha_L\left(q^2\right)} = \frac{1}{\alpha\left(q^2\right)} - \frac{1}{\alpha'\left(q^2\right)}, \tag{2.143}$$

因此,

$$\frac{1}{\alpha_L\left(q^2\right)} = \frac{5}{8}\frac{1}{\alpha_L\left(q^2\right)} + \frac{3}{8}\frac{1}{\alpha_L\left(q^2\right)} = \frac{5}{8}\frac{1}{\alpha_L\left(q^2\right)} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{\alpha\left(q^2\right)} - \frac{1}{\alpha'\left(q^2\right)}\right), \tag{2.144}$$

将上式代入式 (2.142), 得到

$$\sin^2\theta_W\left(q^2\right)=\frac{3}{8}+\frac{\alpha\left(q^2\right)}{8}\left(\frac{5}{\alpha_L\left(q^2\right)}-\frac{3}{\alpha'\left(q^2\right)}\right). \tag{2.145}$$

易见, 当 $q^2=M^2$ 时, 由式 (2.128) 可知, $\sin^2\theta_W\left(M^2\right)=\frac{3}{8}$, 正如前面所得到的. 具体地将 $\alpha_L\left(q^2\right)$ 和 $\alpha'\left(q^2\right)$ 的 q^2 依赖性写出来, 并取 $n_g=3$, 得到

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_W\left(q^2\right) &= \frac{3}{8}+\frac{\alpha\left(q^2\right)}{8}\left[\left(\frac{5}{\alpha_L\left(M^2\right)}-\frac{3}{\alpha'\left(M^2\right)}\right)+\left(5b_L-3b'\right)\ln\frac{q^2}{M^2}\right]\\ &= \frac{3}{8}+\frac{\alpha\left(q^2\right)}{8}\left(5b_L-3b'\right)\ln\frac{q^2}{M^2}\\ &= \frac{3}{8}+\frac{55}{48\pi}\alpha\left(q^2\right)\ln\frac{q^2}{M^2}.\end{aligned} \tag{2.146}$$

在电弱相互作用能标处, $q^2\approx M_W^2$, 代入式 (2.140), 得出

$$\sin^2\theta_W\left(M_W^2\right)\approx 0.206. \tag{2.147}$$

这一结果就与实验测定值

$$\sin^2\theta_W^{\exp}\approx 0.2325\pm 0.0008 \tag{2.148}$$

相差无几了.

当 $q^2>\left(10^{15}\ \mathrm{GeV}\right)^2$ 时, X 和 Y Bose 子的圈图为真空极化提供了可观的贡献, 相当于使得 $SU(5)$ 对称性没有破缺. 因此, 当 $q^2\gg M_X^2, M_Y^2$ 时, 所有的耦合常数按相同的方式跑动, 也可以说, 此时只存在唯一一个跑动耦合常数 $\alpha_5\left(q^2\right)$, 它满足

$$\frac{1}{\alpha_5\left(q^2\right)}=\frac{1}{\alpha_5\left(m^2\right)}+b_5\ln\frac{q^2}{m^2},\quad q^2\gg M_X^2, M_Y^2, \tag{2.149}$$

其中

$$b_5=\frac{55-4n_g}{12\pi}. \tag{2.150}$$

Bibliography

[1] Ryder, L. H., *Quantum Field Theory* (second edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] Georgi, H. and Glashow, S. L., (1974), *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438

[3] Greiner, W. and Müller, B., *Gauge Theory of Weak Interactions* (third edition), Springer, 2000.

[4] Cheng, T. P. and Li, L. F., *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, 科学出版社, 北京, 2008.