粒子物理简介

第四节　量子电动力学

余钊焕

中山大学物理学院

https://yzhxxzxy.github.io

2021 年 9 月

U(1) 整体对称性

时空坐标的函数称为**场**。在**量子场论**中，场被量子化，而**粒子**是场的激发态，粒子间相互作用来源于各种场之间的相互作用。场的运动规律由**最小作用量原理**决定，作用量 $S=\int d^4x\,\mathcal{L}(x)$，其中拉氏量 $\mathcal{L}(x)$ 是用场表达出来的。

对于**不参与相互作用**的**狄拉克旋量场** $\psi(x)$，运动规律可以用拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{free}}(x)=\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)-m\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

描述，其中狄拉克矩阵 γ^μ 是满足 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$ 的 4×4 常数矩阵，时空导数 $\partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu$，$m$ 为相应**费米子**的质量，$\bar{\psi}\equiv\psi^\dagger\gamma^0$。对 ψ 作 **U(1) 整体变换**

$$\psi(x)\to\psi'(x)=e^{iQ\theta}\psi(x),$$

(**整体**指变换参数 θ **不是**时空坐标的函数)，则 $\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{-iQ\theta}$，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}}(x)\to\mathcal{L}'_{\text{free}}(x) &= \bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi'(x)\\ &= \bar{\psi}(x)e^{-iQ\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)e^{iQ\theta}\psi(x)=\mathcal{L}_{\text{free}}(x)\end{aligned}$$

可见，自由狄拉克旋量场的拉氏量具有 **U(1) 整体对称性**

根据**诺特定理**，U(1) 群的荷（生成元）Q 是**守恒**的

U(1) 规范对称性

🐨 若变换参数 θ 是**时空坐标的函数**，则上述变换变成局域的 U(1) **规范变换**

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}\psi(x)$$

👉 从而 $\partial_\mu\psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}[\partial_\mu + iQ\partial_\mu\theta(x)]\psi(x)$ 导致 $\mathcal{L}'_{\text{free}}(x) \neq \mathcal{L}_{\text{free}}(x)$

🦑 为了重新得到对称性，引入**规范场** $A_\mu(x)$，令它的 U(1) **规范变换**为

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x),$$

以此补偿变换参数 $\theta(x)$ 的时空导数引起的差异

🦀 将拉氏量修改为 $\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x)$，其中**协变导数**的定义是 $D_\mu \equiv \partial_\mu - iQeA_\mu(x)$，就可以得到 $\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x)$

🦐 因此 $\mathcal{L}(x)$ 具有 U(1) **规范对称性**，描述 U(1) **规范理论**

🦞 代价是拉氏量中多了一项 $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}_{\text{free}}(x) = QeA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$

🍈 此项将旋量场 $\psi(x)$ 和规范场 $A_\mu(x)$ 耦合起来，**耦合常数**为 e

🍑 规范场 $A_\mu(x)$ 是洛伦兹矢量，对应的粒子称为**规范玻色子**，自旋为 1

🍒 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ 导致费米子与规范玻色子发生**规范相互作用**

量子电动力学

- **量子电动力学**（Quantum Electrodynamics）简称 **QED**，是 $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{EM}}$ **规范理论**，规范玻色子为**光子**，描述**电磁相互作用**，相应拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} &= \sum_f (\bar{f}i\gamma^\mu D_\mu f - m_f\bar{f}f) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \sum_f [\bar{f}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f + Q_f eA_\mu\bar{f}\gamma^\mu f] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

- 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - iQ_f eA_\mu$，**电磁耦合常数** e 就是单位电荷量
- f 代表标准模型中各种带电的旋量场，Q_f 为 f 所带**电荷**量子数，m_f 是 f 的质量，$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 中 $\bar{f}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f$ **项**描述旋量场在时空中传播的过程
- **电磁场** A_μ 的**场强张量**定义为 $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$；可以验证，$-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ **项**在 $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{EM}}$ 规范变换下不变，它描述电磁场在时空中传播的过程
- $Q_f eA_\mu\bar{f}\gamma^\mu f$ **项**描述旋量场与电磁场的电磁相互作用

费米子 f	上型夸克 u, c, t	下型夸克 d, s, b	带电轻子 e^-, μ^-, τ^-
电荷 Q_f	$+2/3$	$-1/3$	-1

旋量系数和极化矢量

- $\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 中 $\bar{f}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f$ **项**与自由旋量场拉氏量 $\mathcal{L}_{\mathrm{free}}$ 形式相同，描述远离相互作用顶点的费米子；根据**最小作用量原理**，此项对应于**狄拉克方程**

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f(x) = 0$$

- 经过傅立叶变换之后，动量空间中的旋量系数 $u(p,s)$ 和 $v(p,s)$ 满足

$$(\not{p} - m_f)u(p,s) = 0, \quad (\not{p} + m_f)v(p,s) = 0, \quad \not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$$

- $s = \pm 1$ 称为**螺旋度**，是自旋在动量方向上的投影被归一化后的值
- $s = +1\ (-1)$ **对应于右旋（左旋）极化的费米子**，螺旋度求和关系为

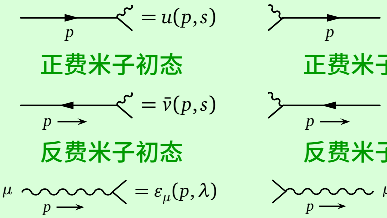
$$\sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s) = \not{p} + m_f, \quad \sum_s v(p,s)\bar{v}(p,s) = \not{p} - m_f$$

- $\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ 中 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ **项**描述远离相互作用顶点时的光子
- 在动量空间中用**极化矢量** $\varepsilon_\mu(p,\lambda)$ 描写光子的运动行为，$\lambda = \pm 1$ 是光子的螺旋度
- $\lambda = +1\ (-1)$ **对应于右旋（左旋）极化的光子**，螺旋度求和关系为

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(p,\lambda)\varepsilon_\nu^*(p,\lambda) \to -g_{\mu\nu}$$

QED 费曼规则

🐄 $\bar{f}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)f$ 项和 $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ 项分别提供费米子与光子的初末态和传播子的费曼规则，而 $Q_f eA_\mu\bar{f}\gamma^\mu f$ 项提供电磁相互作用顶点的费曼规则



$= u(p,s)$ 正费米子初态

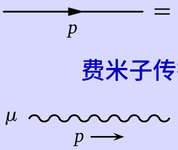
$= \bar{u}(p,s)$ 正费米子末态

$= \bar{v}(p,s)$ 反费米子初态

$= v(p,s)$ 反费米子末态

$= \varepsilon_\mu(p,\lambda)$ 光子初态

$= \varepsilon^*_\mu(p,\lambda)$ 光子末态

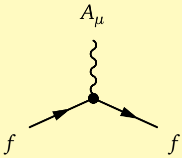


$$= \frac{i(\not{p}+m_f)}{p^2-m_f^2+i\epsilon}$$

费米子传播子

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon}$$

光子传播子



$$= iQ_f e\gamma^\mu$$

电磁相互作用顶点

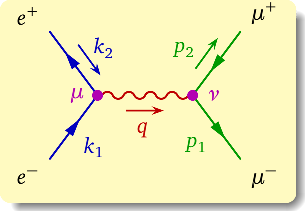
🌊 光子用**波浪线**表示

⛲ 费米子用**带箭头的实线**表示，线上的箭头方向是费米子数的方向；正粒子的动量方向与费米子数方向**相同**，反粒子则**相反**

$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 散射振幅

右图为 QED 散射过程 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 的领头阶费曼图，利用费曼规则将它表达成**不变振幅**

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} = {} & \bar{v}(k_2,s_2)(-ie\gamma^\mu)u(k_1,s_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \\
& \times\bar{u}(p_1,s_1')(-ie\gamma^\nu)v(p_2,s_2')
\end{aligned}
$$



通常考虑没有极化的初态，需对初态螺旋度**取平均**，即 $\frac{1}{2}\sum_{s_1}\frac{1}{2}\sum_{s_2}$；对末态螺旋度则通过**求和**包括所有情况，即 $\sum_{s_1'}\sum_{s_2'}$。因而**非极化振幅模方**为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{s_1s_2s_1's_2'}|\mathcal{M}|^2 = {} & \frac{e^4}{4q^4}\sum_{s_1s_2s_1's_2'}\Big[\bar{v}(k_2,s_2)\gamma^\mu u(k_1,s_1)\bar{u}(k_1,s_1)\gamma^\rho v(k_2,s_2) \\
& \times\bar{u}(p_1,s_1')\gamma_\mu v(p_2,s_2')\bar{v}(p_2,s_2')\gamma_\rho u(p_1,s_1')\Big] \\
= {} & \frac{e^4}{4q^4}\mathrm{Tr}\big[(\not{k}_2-m_e)\gamma^\mu(\not{k}_1+m_e)\gamma^\rho\big]\,\mathrm{Tr}\big[(\not{p}_1+m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2-m_\mu)\gamma_\rho\big]
\end{aligned}
$$

每个电磁相互作用顶点贡献一个耦合常数 e，故 $\mathcal{M}\propto e^2$，$|\mathcal{M}|^2\propto e^4$

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射截面

- 对狄拉克矩阵乘积作求迹运算，得

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1s_2s_1's_2'}|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4}[(k_1\cdot p_1)(k_2\cdot p_2)+(k_1\cdot p_2)(k_2\cdot p_1)+m_e^2(p_1\cdot p_2)+m_\mu^2(k_1\cdot k_2)+2m_e^2m_\mu^2]$$

- 在**质心系**中，设 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{k}_1$ 的夹角为 θ，则 $\mathbf{p}_2$ 与 $\mathbf{k}_2$ 的夹角也为 θ，有

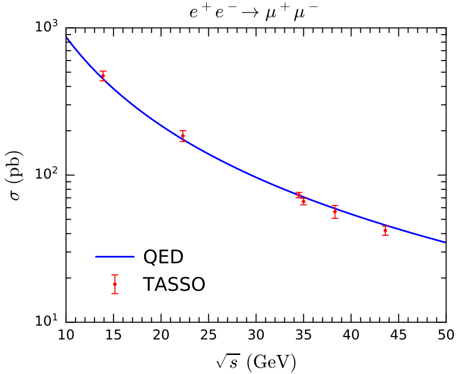
$$q^2=(k_1+k_2)^2=(p_1+p_2)^2=s,\quad k_1\cdot k_2=\frac{s}{2}-2m_e^2,\quad p_1\cdot p_2=\frac{s}{2}-2m_\mu^2,$$
$$k_1\cdot p_1=k_2\cdot p_2=\frac{s}{4}(1-\beta_e\beta_\mu\cos\theta),\quad k_1\cdot p_2=k_2\cdot p_1=\frac{s}{4}(1+\beta_e\beta_\mu\cos\theta),$$

其中 $\beta_e\equiv\sqrt{1-4m_e^2/s}$，$\beta_\mu\equiv\sqrt{1-4m_\mu^2/s}$。从而，**散射截面**为

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{1}{2E_\mathcal{A}2E_\mathcal{B}|\mathbf{v}_\mathcal{A}-\mathbf{v}_\mathcal{B}|}\int d\Omega_1\frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_\mathrm{CM}}\frac{1}{4}\sum_{s_1s_2s_1's_2'}|\mathcal{M}|^2\\
&= \frac{\alpha^2\beta_\mu}{4s\beta_e}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\left[1+\beta_e^2\beta_\mu^2\cos^2\theta+\frac{4(m_e^2+m_\mu^2)}{s}\right]\\
&= \frac{4\pi\alpha^2\beta_\mu}{3s\beta_e}\left(1+\frac{2m_e^2}{s}\right)\left(1+\frac{2m_\mu^2}{s}\right)
\end{aligned}$$

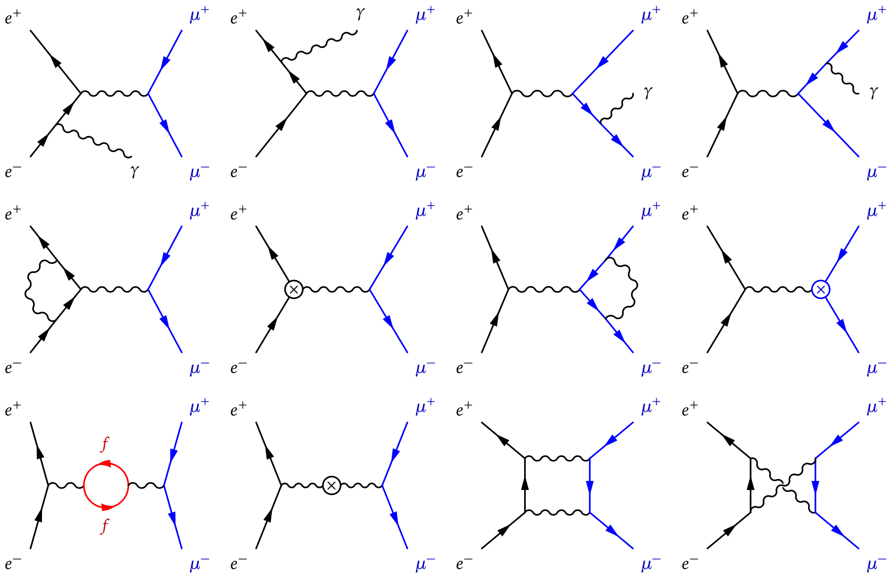
与实验数据对比

将 $\alpha = 1/137.036$、$m_\mu = 105.658$ MeV、$m_e = 0.510999$ MeV 代入以上公式，得到 **QED 领头阶**预言的 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射截面



1988 年，德国 DESY 研究中心 PETRA 对撞机上的 **TASSO 探测器**测量了多个**质心能** $\sqrt{s}$ 处的 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射截面数据，与 QED 预言比较**符合**

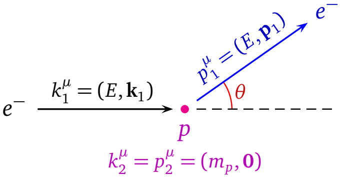
$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 过程 QED 次领头阶费曼图



ep 库仑散射

在**非相对论性**的**经典物理学**中，假设质子在散射前后都是**静止**的，则初末态电子的运动速率相同，记为 v，运动方向相差**散射角** θ，那么，库仑力引起的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$$ **(Rutherford 公式)**

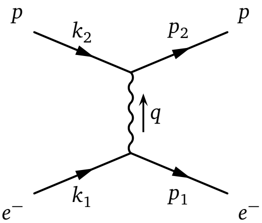


质子静止系

QED 理论会修正这条公式

当能标远小于 m_p 时，质子在相互作用过程中就像没有结构的**点粒子**一样，此时可以用旋量场描述质子，并使用 $Q_p = +1$ 的 QED 相互作用顶点

QED 领头阶给出的非极化振幅模方为



$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(q^2)^2}[(k_1\cdot p_2)(p_1\cdot k_2)+(k_1\cdot k_2)(p_1\cdot p_2)-m_p^2(k_1\cdot p_1)-m_e^2(p_2\cdot k_2)+2m_e^2m_p^2]$$

Mott 公式

- 在**质子静止系**中，初末态电子的能量相等，记为 E，初末态电子的动量大小也相等，记为 $Q\equiv|\mathbf{k}_1|=|\mathbf{p}_1|=\sqrt{E^2-m_e^2}$，初末态电子的运动速率为 $v=Q/E=\sqrt{1-m_e^2/E^2}$

- 故 $k_1\cdot p_1=E^2(1-v^2\cos\theta)$， $k_2\cdot p_2=m_p^2$

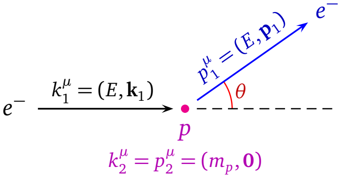
$$k_1\cdot p_2=p_1\cdot k_2=k_1\cdot k_2=p_1\cdot p_2=m_pE$$

$$q^2=-2Q^2(1-\cos\theta)$$

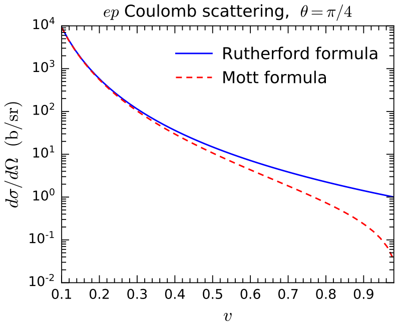
- 由此得到 **QED 领头阶**微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2[1-v^2\sin^2(\theta/2)]}{4v^2Q^2\sin^4(\theta/2)}\quad\textbf{(Mott 公式)}$$

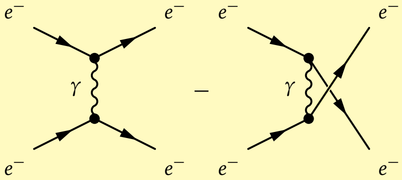
- 在**非相对论极限**下，$v\ll1$，$Q\simeq m_ev$，Mott 公式退化为 Rutherford 公式



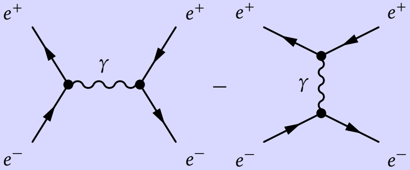
质子静止系



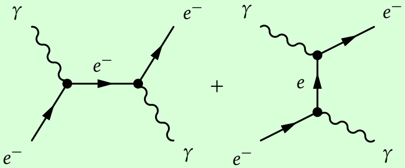
其它 QED 两体散射过程



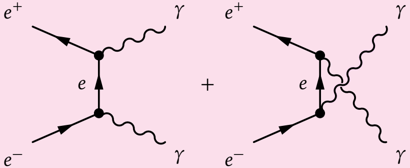
Møller 散射 $e^-e^- \to e^-e^-$



Bhabha 散射 $e^+e^- \to e^+e^-$



Compton 散射 $e^-\gamma \to e^-\gamma$



e^+e^- 湮灭到双光子 $e^+e^- \to \gamma\gamma$

- 初末态相同的过程可以具有多个费曼图，它们对应的振幅之间**相互干涉**

Compton 散射

🐮 电子与光子的散射过程 $e^-\gamma\to e^-\gamma$ 称为 **Compton 散射**

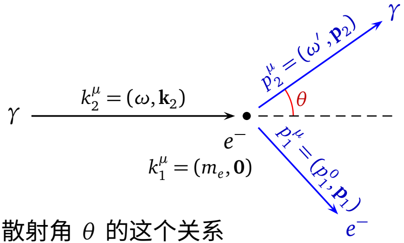
✨ 1923 年，A. H. Compton 发现 X 射线照射核外电子之后波长变长；他用的 X 射线光子能量约为 17 keV，远大于原子结合能，核外电子可看作**自由**的

⭐ 在**实验室系**中，初态电子静止，初态光子通过散射将能动量传递给末态电子；在自然单位制下，光子的能量 E 等于它的**圆频率** ω，即 $E=\hbar\omega=\omega$，而波长 λ 与圆频率的关系为 $\lambda=2\pi c/\omega=2\pi/\omega$

🌙
$$\begin{aligned} m_e^2 = p_1^2 &= (k_1+k_2-p_2)^2 \\ &= m_e^2+2m_e(\omega-\omega')-2\omega\omega'(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

👉 $m_e(\omega-\omega')=\omega\omega'(1-\cos\theta)$

👉 $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\dfrac{2\pi}{\omega'}-\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{m_e}(1-\cos\theta)$



☀️ Compton 在实验中证实了波长变化 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的这个关系

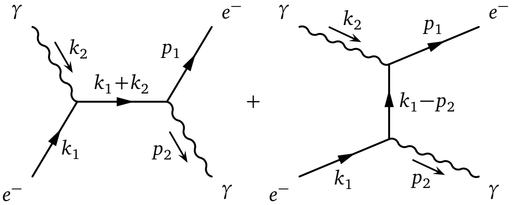
👉 为**光的粒子性**提供了强有力的支持

Compton 散射截面

🐷 对于低能电磁辐射与电子散射的过程，J. J. Thomson 根据**经典电磁学**推导出微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}=\frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}(1+\cos^2\theta)$$

(Thomson 公式)

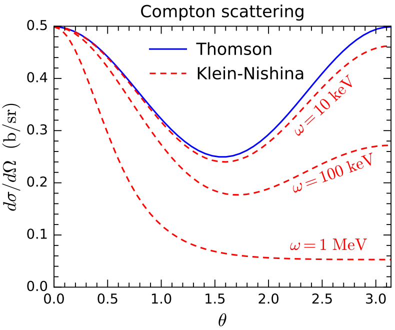


🐻 **QED 领头阶**给出的非极化振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_2}{k_1\cdot k_2}+\frac{k_1\cdot k_2}{k_1\cdot p_2}+2m_e^2\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2}-\frac{1}{k_1\cdot p_2}\right)+m_e^4\left(\frac{1}{k_1\cdot k_2}-\frac{1}{k_1\cdot p_2}\right)^2\right]$$

👉 $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}=\frac{\pi\alpha^2\omega'^2}{m_e^2\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right)$$

(Klein-Nishina 公式)



e^+e^- 湮灭到双光子

🐼 对于 $e^+e^-\to\gamma\gamma$，设质心系中某个末态光子与初态电子运动方向的夹角为 θ，**QED 领头阶**给出的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{s\beta_e}\left[\frac{1+\beta_e^2\cos^2\theta}{1-\beta_e^2\cos^2\theta}+\frac{8m_e^2}{s(1-\beta_e^2\cos^2\theta)}-\frac{32m_e^4}{s^2(1-\beta_e^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

💥 1983 年，PETRA 对撞机上的 **JADE 探测器**测量了 $e^+e^-\to\gamma\gamma$ 微分散射截面，与 QED 符合得比较好