

数学物理方法作业集

潘逸文^{*}, 余钊焕[†]

中国广州中山大学物理学院

December 9, 2019

简介

2019 年秋季数学物理方法 (面向 18 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布, 本文件也会每周更新, 可在 QQ 群文件, 或 <https://panyw5.github.io/courses/mmp.html> 以及 <http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html> 找到。

^{*}Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

[†]Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a) \frac{i}{e}, \quad (b) 2 + \sqrt{2}i, \quad (c) 1 + e^{\frac{9\pi i}{14}} e^{\frac{-\pi i}{7}}, \quad (d) \sqrt{3} + i \text{ 的所有 } 7 \text{ 次方根} \quad (1.1)$$

2. 定义点集 $S_N \equiv \{z^N | z \in N(0, R)\}$, 其中 $R > 0, N = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}_{>0}$. 讨论 S_N 与 S_{N+1} 之间谁是谁的子集, 是否真子集, 写明推理。

3. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, 其中 $R > 0$. 求解最大的 $N \in \mathbb{N}$, 使得对于任意 S 的内点 z , z^N 都还是内点。写明推理。

4. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$, 其中 $R > 0$. S 是否区域? 是否单连通? 写明推理。

2 第二周 (9 月 10 日课上交)

0. (若上周没做这道题) 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$, 其中 $R > 0$. S 是否区域? 是否单连通? 写明推理。

1. 用代数式 (即 $x + iy$ 的形式) 表达以下复数, 其中 $a, b \in \mathbb{R}, i$ 是虚数单位,

$$(a) a^i, \text{ 其中 } a > 0, \quad (b) i^{a+bi}, \quad (c) \sin(a + ib). \quad (2.1)$$

2. 设 $u(x, y) = e^x \sin y, v(x, y) = -e^x \cos y$, 并考虑复变函数 $w = u(x, y) + iv(x, y)$. 验证 w 是 \mathbb{C} 上解析函数。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数, 同时, 其值域是 \mathbb{R} 的子集。求证 f 是常数函数。

4. 设解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$, 求其虚部, 并把 f 的表达式改写为只含 z 的表达式。

3 第三周 (9 月 17 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z} dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z} dz$, 其中 C_1 和 C_2 分别是上半圆周 (半径 $R > 0$, 逆时针方向) 和下半圆周 (半径 $R > 0$, 逆时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (3.1)$$

3. 设复变函数 f 在单连通区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续, $G \subset D$ 是其单连通子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$. 证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) d\bar{z} dz, \quad (3.2)$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$ 。

4 第四周 (9 月 24 日交)

0. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (4.1)$$

1. 计算围道积分, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\oint_C \left(z + \frac{\lambda}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.2)$$

2. 计算围道积分, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} dz, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.3)$$

5 第五周 (10 月 8 日交; 作为一次考察)

1. 设函数 $f(z)$ 在 $\overline{N(0, R)}$ 上解析。计算积分

$$\oint_C f(z) \bar{z}^{n+1} dz, \quad C = \partial N(0, R). \quad (5.1)$$

其中 $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$ 。

2. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$, 其中 $r_k = (-1)^{k^2}$, $c_k = (-1)^k \frac{e^{ik\theta}}{k}$ 。分情况 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 讨论级数是否收敛, 是否绝对收敛, 给出简要说明。

3. 计算下面幂级数的收敛半径

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n. \quad (5.2)$$

4. 设 $f(z)$ 是 $N(0, 1)$ 内的解析函数。计算 $(1-z)^{-1}f(z)$ 以原点 $a = 0$ 为中心的泰勒展开 (给出泰勒级数通项, 用 f 的各阶导数表达)。

5. 考虑 3 个互异复数 $a_i, i = 1, 2, 3$ 。计算积分

$$\oint_C \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} dz, \quad (5.3)$$

其中 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3|\}$ 。化简最后结果。

6 第七周 (10 月 15 日交)

$$u(x, y) \equiv \frac{x^2 - y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} . \quad (6.1)$$

设 $u(x, y)$ 是在某区域内解析的复变函数 $f(z = x + iy)$ 的实部。

- (1) 用共轭调和函数方法求 $f(z)$ 的虚部 $v(x, y)$, 并写出函数 $f(z)$ 关于 $z = x + iy$ 的表达式;
- (2) 指出 $f(z)$ 的奇点以及所属分类;
- (3) 分别以 $z = 0, z = 1, z = -1$ 为展开中心, 作 Laurent 或 Taylor 展开。指出所得级数的收敛区域或收敛半径。

2. 考虑复变函数

$$f(z) \equiv \frac{z^n}{z-1}, \quad n \in \mathbb{N} . \quad (6.2)$$

- (1) 列举 $f(z)$ 以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域;
- (2) 以原点为展开中心, 在上述每一个解析区域内写出 $f(z)$ 的 Laurent 或 Taylor 展开 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k z^k$, 并比较展开系数 $\lambda_{k \geq 0}$ 与 $f^{(k)}(0)/k!$ 是否相等 (可为一般 n 和 k 计算通项然后比较, 也可取 $n = 2, k = 1, 2, 3$ 然后比较)。

7 第八周 (10 月 22 日交)

1. 计算下面函数在 $z = 0$ 的留数

$$(a) \frac{\cos z}{z^3}, \quad (b) \frac{e^z}{z^3} . \quad (7.1)$$

2. 计算下面函数在指定奇点的留数

$$(a) \frac{1}{\sinh \pi z}, \quad z = ni, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (b) \frac{e^z}{z^2 - 1}, \quad z = 1 . \quad (7.2)$$

3. 利用留数定理计算积分

$$(a) \oint_{|z|=\rho>1} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz, \quad (b) \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2n}} dz, \quad n = 1, 2, \dots . \quad (7.3)$$

4. 利用留数定理计算积分

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0, \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)} dx, \quad m \in \mathbb{Z}_+, a > 0 \quad (7.4)$$

8 第九周 (11 月 5 日交; 作为期中考察)

1. 列出以下函数的 (除无穷远点外) 的所有孤立奇点及其类型。

$$(a) \frac{z}{(\sin z)^3}, \quad (b) \frac{1}{z^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (c) \cosh \frac{1}{z}. \quad (8.1)$$

2. 考虑互异有限复数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$, 且 $m > n$, 定义函数

$$f(z) \equiv \frac{(z - a_1) \dots (z - a_n)}{(z - b_1) \dots (z - b_m)}. \quad (8.2)$$

(a) 记 D 为 $f(z)$ 的解析区。则 b_j 和 a_i 为 D 的什么点 (内点、聚点、边界点)? D 是单连通还是复连通?

(b) 说明 a_i 和 b_j 分别是 $f(z)$ 的什么特殊点, 指出分类。

(c) 求 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$, 指出 ∞ 的奇点分类, 并计算 $\text{Res}_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 。

3. 考虑双边幂级数

$$\Theta(\zeta; q) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n^2}{2}} \zeta^n, \quad |q| < 1. \quad (8.3)$$

(a) 求该 ζ -双边级数的收敛环。

(b) 求积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\Theta(\zeta; q)}{\zeta^n} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.4)$$

(c) 定义 $\vartheta(z|\tau) \equiv \Theta(e^{2\pi i z}; e^{2\pi i \tau})$, $\text{Im } \tau > 0$ 。证明 $\vartheta(x|it)$ 是某热扩散方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0 \quad (8.5)$$

的一个解, 并确定参数 a^2 的值。

4. 深受广大人民群众喜爱的 Γ 函数是自然数的阶乘函数的一种解析延拓。当 $\text{Re } z > 0$, 定义

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx. \quad (8.6)$$

(a) 证明当 $\text{Re } z > 0$, 有 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 。

(b) 求 $\Gamma(1)$, 并推出 $\Gamma(n+1) = n!$ 。

(c) $\Gamma(z)$ 可以解析延拓到几乎整个复平面。证明 $0, -1, -2, \dots$ 等非正整数为延拓后 $\Gamma(z)$ 的单极点。

(d) 求 $\text{Res}_{z \rightarrow -n} \Gamma(z)$ 。

5. 弦在阻尼介质中横向振动, t 时刻 x 处单位长度所受阻力 (与振动方向相反) 为

$$F(x, t) = -R \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad (8.7)$$

其中 R 称为阻力系数。试推导弦在该阻尼介质中的波动方程。

9 第十一周 (11 月 12 日交)

1. 长为 l 的均匀导热细杆, 热导率为 k , 侧面绝热。 $x = 0$ 端的温度保持为 0 度, $x = l$ 端有恒定热流进入, 强度为 q 。已知杆的初始温度分布为 $x(l - x)$, 写出杆内任意时刻温度分布的定解问题。

2. 长为 l 的弹性细杆, 上端固定在电梯天花板, 杆身竖直, 下端自由。杆随电梯匀速下降, 速度为 v_0 , 杆上各点处于平衡位置。 $t = 0$ 时电梯突然停止, 求解 $t > 0$ 时杆的纵振动。不考虑重力作用。

(1) 写出关于位移 $u(x, t)$ 的定解问题。

(2) 利用分离变量法, 寻找 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 形式的特解, 推出 $T(t)$ 满足的常微分方程和 $X(x)$ 满足的本征值问题。

(3) 求解关于 $X(x)$ 的本征值问题, 得出相应的本征值和本征函数。

(4) 求解 $T(t)$, 写出一组解 $u(x, t)$ 。

(5) 根据初始条件求出一组解的系数, 写下定解问题的解。

10 第十二周 (11 月 19 日交)

1. 矩形薄板, 板面绝热, $x = 0, l$ 两边保持恒定温度零度, $y = 0, d$ 两边绝热, 初始温度分布为 $f(x, y) = u_0 x/l$, 其中 u_0 为常数, 求以后的温度分布, 并讨论 $t \rightarrow \infty$ 的极限。

2. 长为 l 的柱形管, $x = 0$ 端开放, $x = l$ 端封闭。管外空气中含有某种杂质气体, 浓度为 $u_0 e^{-\alpha^2 t}$, 其中 $\alpha > 0$, $\alpha \neq \mu_n a$, 而 $\mu_n = (2n - 1)\pi/2l$, $n \in \mathbb{N}^+$ 。杂质向管内扩散。设初始时管内没有该种杂质, 求以后时刻该杂质在管内的浓度分布 $u(x, t)$ 。

11 第十三周 (11 月 26 日交)

1. 半圆形薄板, 半径为 a , 用坐标描述即 $\rho \leq a$, $0 \leq \phi \leq \pi$ 。板面绝热, 直边保持温度为 0 度, 弧边保持温度为常数 u_0 , 求稳定状态下板面上的温度分布。

2. 计算下列函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(k)$ 。

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{l}, & |x| < l, \\ 0, & |x| > l. \end{cases} \quad (2) f(x) = e^{-a|x|}, \text{ 其中 } a > 0.$$

12 第十四周 (12 月 3 日交)

1. 用 Fourier 变换法求解如下定解问题,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad y > 0), \quad (12.1)$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=+\infty} = 0, \quad (12.2)$$

$$u|_{x=\pm\infty} = 0. \quad (12.3)$$

并在下列两种情形下计算解 $u(x, y)$ 的具体形式。

$$(1) \varphi(x) = \delta(x). \quad (2) \varphi(x) = \theta(x), \text{ 其中阶跃函数 } \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

提示：可能会用到积分公式

$$\int_0^\infty e^{-bx} \cos ax \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad b > 0. \quad (12.4)$$

$$2. \text{ 证明 } \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \text{ 其中 } a \neq 0.$$

$$3. \text{ 计算函数 } f(x) = \cos ax \text{ 的 Fourier 变换 } F(k).$$

13 第十五周 (12 月 10 日交)

1. 试在平面极坐标系中对二维齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0 \quad (13.1)$$

分离变量, 写出分离变量后的常微分方程。

2. 在量子力学中, 氢原子定态问题的 Schrödinger 方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 u - \frac{e^2}{r} u = Eu, \quad (13.2)$$

其中 $u(r, \theta, \phi)$ 是波函数, μ 是电子质量, e 是单位电荷量, E 是能量, \hbar 是约化 Planck 常数。试在球坐标系中对方程分离变量, 写出分离变量后的常微分方程。

14 第十六周 (12 月 17 日交)

1. 根据递推关系

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k}(k!)^2 k}, \quad k \in \mathbb{N}^+, \quad (14.1)$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k} = \frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k}(k!)^2} \sum_{r=1}^k \frac{1}{r}, \quad k \in \mathbb{N}^+. \quad (14.2)$$

2. 在 $x_0 = 0$ 的邻域上求解 Hermite 方程

$$y'' - 2xy' + (\lambda - 1)y = 0. \quad (14.3)$$

(1) 当 λ 取何值时可以使级数解退化为多项式?

(2) 适当选取级数解中的任意常数, 可以使多项式解的最高次幂项具有 $(2x)^n$ 形式, 这些多项式称为 Hermite 多项式, 记作 $H_n(x)$ 。求出 Hermite 多项式的显式。

(3) 写出前 6 个 Hermite 多项式的具体形式。