

# 粒子物理简明教程

## 第四节 粒子物理标准模型

余钊焕 (Zhao-Huan Yu)

ARC Centre of Excellence for Particle Physics at the Terascale,  
School of Physics, the University of Melbourne



THE UNIVERSITY OF  
MELBOURNE

2017 年 3 月



**CoEPP**  
ARC Centre of Excellence for  
Particle Physics at the Terascale

# 粒子物理标准模型

粒子物理**标准模型**是一个  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范理论。模型中有三代费米子，每一代包含一种上型夸克、一种下型夸克、一种带电轻子和一种中微子。规范玻色子传递费米子间相互作用。

- 1  $SU(3)_C$  部分描述夸克的**强相互作用**，称为**量子色动力学**，相应的规范玻色子是**胶子**。
- 2  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  部分统一描述夸克和轻子的电磁和弱相互作用，称为**电弱统一理论**。理论中有一个希格斯二重态，引起规范群的**自发对称性破缺**，使  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  群破缺为  $U(1)_{EM}$  群。
  - 破缺前，理论中存在 4 个无质量的规范玻色子和 4 个希格斯自由度；左手费米子和右手费米子都没有质量，具有不同量子数。
  - 破缺后，3 个规范玻色子与 3 个希格斯自由度结合，从而获得质量，成为  $W^\pm$  和  $Z^0$  **玻色子**，传递**弱相互作用**；剩下的 1 个无质量规范玻色子是**光子**，即是  $U(1)_{EM}$  群的规范玻色子，传递**电磁相互作用**；与希格斯二重态的汤川耦合导致左手费米子和右手费米子获得质量，组合成狄拉克费米子。
  - 理论中的中微子没有右手分量，因而没有获得质量。1998 年实验发现中微子振荡，证明中微子具有质量，所以需要扩充标准模型才能正确描述中微子物理。

## U(1) 整体规范不变性

时空坐标的函数称为**场**。在**量子场论**中，场被量子化，而粒子是场的激发态，粒子间相互作用来源于各种场之间的相互作用。场的运动规律由**最小作用量原理**决定，作用量  $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ ，其中拉氏量  $\mathcal{L}(x)$  是用场表达出来的。

对于一个**不参与相互作用**的狄拉克费米子场  $\psi(x)$ ，运动规律可以用拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{free}}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

描述，其中狄拉克矩阵  $\gamma^\mu$  是满足  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  的  $4 \times 4$  常数矩阵，时空导数  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ ， $m$  为费米子质量， $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ 。对  $\psi$  作 **U(1) 整体规范变换**

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iQ\theta}\psi(x),$$

(整体意味着相位  $\theta$  不是时空坐标的函数)，则  $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-iQ\theta}$ ，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}}(x) &\rightarrow \mathcal{L}'_{\text{free}}(x) = \bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x)e^{-iQ\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{iQ\theta}\psi(x) = \mathcal{L}_{\text{free}}(x).\end{aligned}$$

可见，自由费米子场的拉氏量具有 **U(1) 整体规范不变性**。于是，根据**诺特定理**，U(1) 群的荷（生成元） $Q$  是**守恒**的。

## U(1) 定域规范不变性

若相位  $\theta$  是时空坐标的函数，则上述变换变成 **U(1) 定域规范变换**

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}\psi(x).$$

从而， $\partial_\mu \psi'(x) = e^{iQ\theta(x)}[\partial_\mu + iQ\partial_\mu \theta(x)]\psi(x)$  导致  $\mathcal{L}'_{\text{free}}(x) \neq \mathcal{L}_{\text{free}}(x)$ 。为了重新得到不变性，需要引入**规范场**  $A_\mu(x)$ ，令它的 **U(1) 定域规范变换**为

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x),$$

以此补偿相位  $\theta(x)$  的时空导数引起的差异。将拉氏量修改为

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x),$$

其中**协变导数**定义为  $D_\mu \equiv \partial_\mu - iQeA_\mu(x)$ ，则可得  $\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x)$ 。因此  $\mathcal{L}(x)$  具有 **U(1) 定域规范不变性**，描述 **U(1) 规范理论**。代价是拉氏量中多了一项

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}_{\text{free}}(x) = QeA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x),$$

它将费米子  $\psi(x)$  和规范场  $A_\mu(x)$  耦合起来，发生相互作用，**耦合常数**为  $e$ 。规范场  $A_\mu(x)$  带着时空指标  $\mu$ ，是一个洛伦兹矢量，对应的粒子称为**规范玻色子**，自旋为 1。 $\mathcal{L}_{\text{int}}$  导致费米子与规范玻色子发生**规范相互作用**。

# 量子电动力学

**量子电动力学** (Quantum Electrodynamics) 简称 **QED**, 是  $U(1)_{\text{EM}}$  **规范理论**, 规范玻色子为光子, 描述电磁相互作用。QED 的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \sum_f (\bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f - m_f \bar{f} f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \sum_f [\bar{f} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f + Q_f e A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

- 协变导数  $D_\mu = \partial_\mu - i Q_f e A_\mu$ , **电磁耦合常数**  $e$  就是单位电荷量。
- $f$  代表标准模型中各种带电的费米子场,  $Q_f$  为  $f$  所带**电荷**量子数,  $m_f$  是  $f$  的质量。 $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  中  $\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f$  **项**描述费米子场在时空中传播的过程。
- 光子场  $A_\mu$  的**场强张量**定义为  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 。可以验证,  $-F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/4$  **项**在  $U(1)_{\text{EM}}$  定域规范变换下不变。它描述光子场在时空中传播的过程。
- $Q_f e A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f$  **项**描述费米子场与光子场的电磁相互作用。

费米子 $f$	上型夸克 $u, c, t$	下型夸克 $d, s, b$	带电轻子 $e^-, \mu^-, \tau^-$
电荷 $Q_f$	+2/3	-1/3	-1

## 动量空间

$\mathcal{L}_{\text{QED}}$  中  $\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f$  项与自由费米子场的拉氏量  $\mathcal{L}_{\text{free}}$  形式相同, 描述远离相互作用顶点时的费米子。根据**最小作用量原理**, 此项对应于**狄拉克方程**

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f(x) = 0.$$

由傅立叶变换得方程在动量空间的**正费米子解**  $u(p, s)$  和**反费米子解**  $v(p, s)$ :

$$(\not{p} - m_f)u(p, s) = 0, \quad (\not{p} + m_f)v(p, s) = 0,$$

其中  $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ 。  $s = \pm 1$  称为**螺旋度**, 是自旋在动量方向上的投影被归一化后的值。 $s = +1$  ( $-1$ ) 对应于**右手 (左手) 费米子**。螺旋度求和关系为

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + m_f, \quad \sum_s v(p, s)\bar{v}(p, s) = \not{p} - m_f.$$

类似地,  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  中  $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$  项描述远离相互作用顶点时的光子。在动量空间中, 光子的运动行为可用**极化矢量**  $\varepsilon_\mu(p, \lambda)$  描写, 其中  $\lambda = \pm 1$  是光子的螺旋度。 $\lambda = +1$  ( $-1$ ) 对应于**右旋 (左旋) 极化的光子**。螺旋度求和关系为

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(p, \lambda)\varepsilon_\nu^*(p, \lambda) \rightarrow -g_{\mu\nu}.$$

# QED 费曼规则

$\bar{f}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f)f$  项和  $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$  项分别提供费米子与光子的初末态和传播子的费曼规则，而  $Q_f e A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f$  项提供电磁相互作用顶点的费曼规则：

$$\text{费米子初态} = u(p, s)$$

正费米子初态

$$\text{费米子末态} = \bar{u}(p, s)$$

正费米子末态

$$\text{反费米子初态} = \bar{v}(p, s)$$

反费米子初态

$$\text{反费米子末态} = v(p, s)$$

反费米子末态

$$\text{光子初态} = \epsilon_\mu(p, \lambda)$$

光子初态

$$\text{光子末态} = \epsilon_\mu^*(p, \lambda)$$

光子末态

$$\text{费米子传播子} = \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}$$

费米子传播子

$$\text{光子传播子} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

光子传播子

- 光子用波浪线表示。
- 费米子用带箭头的实线表示，线上的箭头方向是费米子数的方向。正粒子的动量方向与费米子数方向相同，反粒子则相反。

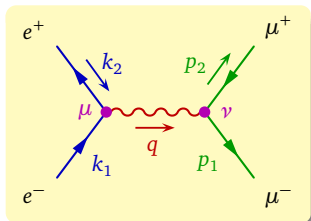
$$A_\mu \text{ 与费米子 } f \text{ 的相互作用顶点} = iQ_f e \gamma^\mu$$

电磁相互作用顶点

# $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射振幅

右图为 QED 散射过程  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  的最低阶费曼图，利用费曼规则将它表达成**不变振幅**：

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(k_2, s_2)(-ie\gamma^\mu)u(k_1, s_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \times \bar{u}(p_1, s'_1)(-ie\gamma^\nu)v(p_2, s'_2).$$



通常考虑没有特殊极化的初态，需对初态螺旋度**取平均**，即  $\frac{1}{2} \sum_{s_1} \frac{1}{2} \sum_{s_2}$ ；对末态螺旋度则通过**求和**包括所有情况，即  $\sum_{s'_1} \sum_{s'_2}$ 。因而截面表达式的被积项应为

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} \left[ \bar{v}(k_2, s_2) \gamma^\mu u(k_1, s_1) \bar{u}(k_1, s_1) \gamma^\rho v(k_2, s_2) \right. \\ &\quad \times \left. \bar{u}(p_1, s'_1) \gamma_\mu v(p_2, s'_2) \bar{v}(p_2, s'_2) \gamma_\rho u(p_1, s'_1) \right] \\ &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{k}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{k}_1 + m_e) \gamma^\rho] \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m_\mu) \gamma_\rho]. \end{aligned}$$

每个电磁相互作用顶点贡献一个耦合常数  $e$ ，故  $\mathcal{M} \propto e^2$ ， $|\mathcal{M}|^2 \propto e^4$ 。



# $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射截面

对狄拉克矩阵乘积作求迹运算，可得

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + m_e^2(p_1 \cdot p_2) + m_\mu^2(k_1 \cdot k_2) + 2m_e^2 m_\mu^2].$$

在**质心系**中，设  $\mathbf{p}_1$  与  $\mathbf{k}_1$  的夹角为  $\theta$ ，则  $\mathbf{p}_2$  与  $\mathbf{k}_2$  的夹角也为  $\theta$ ，有

$$q^2 = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = s, \quad k_1 \cdot k_2 = \frac{s}{2} - 2m_\mu^2, \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{s}{2} - 2m_e^2,$$

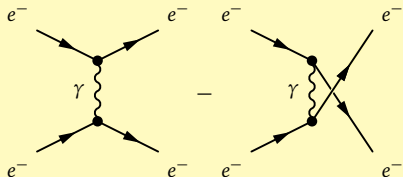
$$k_1 \cdot p_1 = k_2 \cdot p_2 = \frac{s}{4}(1 - \beta_e \beta_\mu \cos \theta), \quad k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1 = \frac{s}{4}(1 + \beta_e \beta_\mu \cos \theta),$$

其中  $\beta_e \equiv \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$ ,  $\beta_\mu \equiv \sqrt{1 - 4m_\mu^2/s}$ 。散射发生条件是  $\sqrt{s} \geq 2m_\mu \gg m_e$ ，因而可以**忽略电子质量**  $m_e$ ， $m_e \rightarrow 0$ ,  $\beta_e \rightarrow 1$ 。从而，**散射截面**为

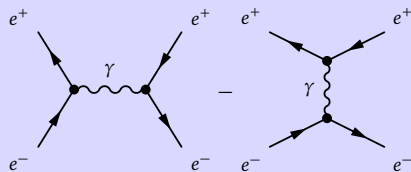
$$\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int d\Omega_1 \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{\text{CM}}} \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}|^2$$

$$= \frac{e^4 \beta_\mu}{64\pi^2 s} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left( 1 + \beta_\mu^2 \cos^2 \theta + \frac{4m_\mu^2}{s} \right) = \frac{4\pi \alpha^2 \beta_\mu}{3s} \left( 1 + \frac{2m_\mu^2}{s} \right).$$

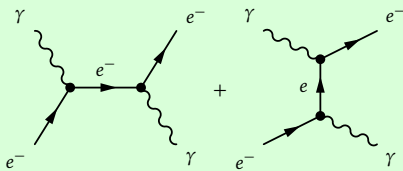
# 典型 QED 过程



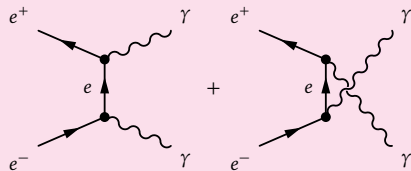
**Møller 散射**  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$



**Bhabha 散射**  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



**Compton 散射**  $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$



$e^+e^-$  湮灭到双光子  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$

初末态相同的过程可以具有多个费曼图，它们对应的振幅之间**相互干涉**。

# 夸克模型

1964 年，盖尔曼和茨威格分别独立提出**夸克模型**，当时认为存在 3 种味道的夸克， $u$ 、 $d$  和  $s$ ，属于  $SU(3)_F$  群的基础表示。强子具有  **$SU(3)_F$  味对称性**：

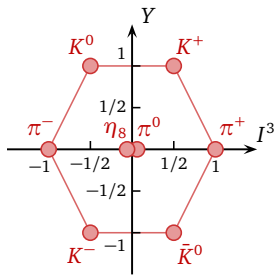
- 介子由一对正反夸克组成，构成**单态**和**八重态**；
- 重子由三个夸克组成，构成**八重态**和**十重态**。

同位旋  $SU(2)$  对称性实际上是  $u$  和  $d$  的味对称性， $SU(3)_F$  味对称性是它的进一步推广。根据**群表示论**， $J^P = 0^-$  的赝标量介子是  $SU(3)_F$  八重态，成分为

$$\begin{aligned}\pi^+ &= u\bar{d}, & \pi^0 &= \frac{1}{2}(u\bar{u} - d\bar{d}), & \pi^- &= d\bar{u}, & \eta_8 &= \frac{1}{6}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}), \\ K^+ &= u\bar{s}, & K^0 &= d\bar{s}, & \bar{K}^0 &= s\bar{d}, & K^- &= s\bar{u}.\end{aligned}$$

电荷满足**盖尔曼—西岛关系**  $Q = I^3 + Y/2$ ，其中**超荷**  $Y = B + S$ 。

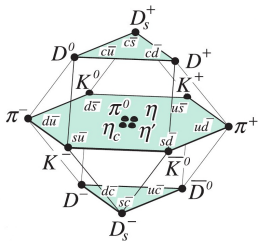
由于  $s$  夸克的质量大于  $u$  和  $d$  夸克的质量， $SU(3)_F$  味对称性不是严格成立的，这导致同个多重态中的粒子存在不小的**质量差异**。



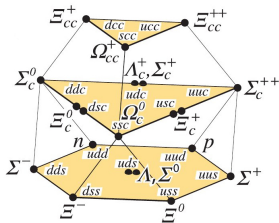
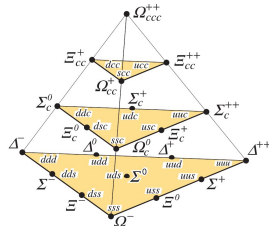
$SU(3)_F$  八重态的权图

## SU(4)<sub>F</sub> 味对称性

把  $c$  夸克也加入进来，上述对称性可以进一步推广为  $SU(4)_F$  味对称性。由于  $c$  夸克很重，多重态中粒子的质量差异更大。



### $J^P = 0^-$ 介子 15 重态及单态


$$J^P = \frac{1}{2}^+ \text{ 重子 } 20 \text{ 重态}$$

$$J^P = \frac{3}{2}^+ \text{ 重子 } 20 \text{ 重态}$$

上述自旋为  $3/2$  的重子多重态中存在  $\Delta^{++} \sim uuu$ 、 $\Delta^- \sim ddd$ 、 $\Omega^- \sim sss$  和  $\Omega_{ccc}^{++} \sim ccc$  这样的重子。它们是 3 个全同夸克组成的  $L=0$  的态，因而 3 个夸克的自旋取向必须相同才能得到  $J=3/2$ 。根据泡利不相容原理，全同费米子不能处于相同的状态，这预示着新的内部自由度——颜色——的存在。

## 颜色自由度

从实验上确立的强子态都可以用正反夸克对（介子）、三个正夸克（正重子）和三个反夸克（反重子）组成的体系来描述。为什么两个正夸克或四个正夸克构成的强子态不存在呢？**颜色自由度**的引入解决了这个问题。

- 夸克具有  $SU(3)_c$  **颜色对称性**。每味夸克都具有 3 种颜色，构成  $SU(3)_c$  群的基础表示，记为  $q^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $q = d, u, s, c, b, t$ )。
- 强子都是**颜色单态**。介子中两个夸克的颜色态必须互为复共轭，以组成颜色单态；重子中三个夸克的颜色各不相同，组成全反对称的颜色单态。
- 两个正夸克或四个正夸克不能组成颜色单态，因而不构成强子态。
- 用  $SU(3)_c$  颜色对称性构建规范理论，得到**量子色动力学**。

1960 年代末，在高能电子和中微子与核子散射的实验中，出现大动量转移过程的概率很高，常常发生**深度非弹性散射**。这意味着核子内部存在局域的散射中心。费曼由此提出**部分子模型**，假设强子由一些在深度非弹性散射中近似自由的**部分子**组成。进一步实验数据和理论分析表明，有些部分子与夸克具有相同的量子数，它们就是夸克；其它部分子是电中性的，后来证实是量子色动力学中的规范玻色子——**胶子**。

# 非阿贝尔规范理论

SU(3) 群是个非阿贝尔群，它的生成元彼此不对易，因而它的定域规范变换形式与 U(1) 群（阿贝尔群）不同。**非阿贝尔群的规范理论**由杨振宁和米尔斯于 1954 年提出，也称为**杨-米尔斯理论**，其规范场也称为**杨-米尔斯场**。

对于非阿贝尔的李群，生成元  $t^a$  满足  $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$ ，依赖时空坐标的群变换为  $U(x) = \exp[i\theta^a(x)t^a]$ 。费米子场  $\psi$  和规范场  $A_\mu^a$  的**定域规范变换**是

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x), \quad A_\mu^a(x)t^a \rightarrow U(x)A_\mu^a(x)t^a U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x).$$

定义协变导数  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$ ，则可得  $D_\mu \psi(x) \rightarrow U(x)D_\mu \psi(x)$ 。从而，具有**定域规范不变性**的拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu},$$

其中  $F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ 。

# 量子色动力学

**量子色动力学** (Quantum chromodynamics) 简称 **QCD**, 是  $SU(3)_c$  **非阿贝尔规范理论**, 规范场记作  $G_\mu^a$ , 规范玻色子为 8 种胶子。QCD 的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}, \quad q = d, u, s, c, b, t, \quad a = 1, \dots, 8,$$

其中协变导数  $D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a t^a$ ,  $G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + gf^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ .  $g_s$  称为 **强耦合常数**。结构常数  $f^{abc}$  关于 3 个指标是全反对称的, 独立分量为

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

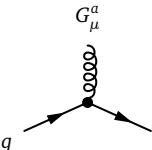
$t^a = \lambda^a/2$  是  $SU(3)_c$  基础表示的生成元, 其中  $\lambda^a$  是 8 个盖尔曼矩阵:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

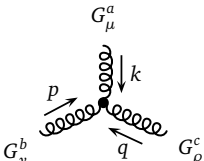
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

## QCD 相互作用顶点

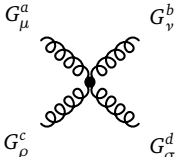
$\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  中  $g_s G_\mu^a \bar{q} \gamma^\mu t^a q$  项带来的相互作用顶点如右图所示。此外,  $-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$  项带来非阿贝尔规范理论特有的**规范玻色子自相互作用顶点**——胶子的三线性和四线性自相互作用顶点:



$$= i g_s \gamma^\mu t^a$$



$$= g_s f^{abc} [g^{\mu\nu} (k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (p-q)^\mu + g^{\rho\mu} (q-k)^\nu]$$



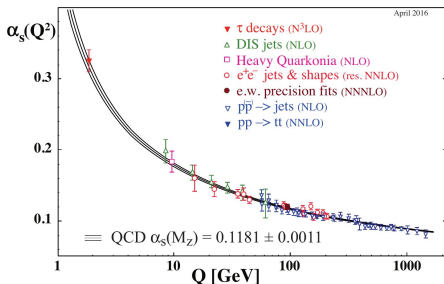
$$= -i g_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$$



## 渐近自由和夸克禁闭

受量子场论中高阶量子修正的影响，耦合常数不完全是“常数”，而是会“跑动”的，即数值随着能标  $Q$  的变化而变化。在 QED 中，电磁耦合常数  $\alpha \equiv e^2/(4\pi)$  随能标升高而变大。然而，QCD 的情况相反，强耦合常数  $\alpha_s \equiv g_s^2/(4\pi)$  随能标升高而变小。由于高能标意味着短距离，这个特性被称为 **QCD 的渐近自由**。1973 年，D. Gross、F. Wilczek 和 D. Politzer 通过计算发现这个特性，因而获得 2004 年的诺贝尔物理学奖。

随着能标下降， $\alpha_s$  越来越大，夸克间相互作用变得越来越强。因此，夸克在低能区被强相互作用紧紧地束缚在强子中，这个现象称为**夸克禁闭**。于是，实验上从来没有发现自由夸克和自由胶子的存在，也没有发现颜色多重态。由于质量太大，**顶夸克**会在禁闭之前先衰变，因而不会被束缚在强子中。



# 部分子

**强子深度散射**的相互作用能标  $Q$  很高, QCD 渐近自由特性意味着强子中的**部分子**几乎自由地参与散射。部分子包括胶子和两种来源的夸克:

- **价夸克**: 构成强子的组分夸克, 贡献强子的各种量子数。
- **海夸克**: 来自真空极化, 即由胶子分裂而来, 成对出现。

强子  $h_1$  与  $h_2$  深度散射过程  $h_1 h_2 \rightarrow X$  的截面可以表示为

$$\sigma(h_1 h_2 \rightarrow X) = \sum_{ij} \int dx_1 dx_2 f_{i/h_1}(x_1, Q^2) f_{j/h_2}(x_2, Q^2) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow X}(x_1 x_2 s, Q^2).$$

这里  $\hat{\sigma}_{ij \rightarrow X}$  为部分子  $i$  与  $j$  碰撞产生末态  $X$  的截面。  $f_{i/h}(x, Q^2)$  是部分子  $i$  在强子  $h$  中的**部分子分布函数**, 其中  $x \equiv p_i^\mu / p_h^\mu$  是  $i$  动量占  $h$  动量的比例。

质子的价夸克为  $uud$ , 反映在部分子分布函数上的关系为

$$\int_0^1 dx [f_{u/p}(x, Q^2) - f_{\bar{u}/p}(x, Q^2)] = 2, \quad \int_0^1 dx [f_{d/p}(x, Q^2) - f_{\bar{d}/p}(x, Q^2)] = 1.$$

能动量守恒体现为  $\int_0^1 dx \sum_i x f_{i/p}(x, Q^2) = 1, \quad i = g, d, u, s, c, b, \bar{d}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}.$

# 费米子手征性

费米子具有**手征性**。

- **左手**费米子的螺旋度为负，即自旋在动量方向上的投影为负。
- **右手**费米子的螺旋度为正，即自旋在动量方向上的投影为正。
- 对于**有质量**的费米子，洛伦兹变换可以把动量方向反过来，改变螺旋度。
- 对于**无质量**的费米子，螺旋度在任意惯性系中都相同，实际上可以把左手和右手费米子视作两种不同粒子，螺旋度成为相加性守恒量。左手正费米子的反粒子是右手反费米子，右手正费米子的反粒子是左手反费米子。

可以用左右手投影算符  $P_L \equiv (1 - \gamma^5)/2$  和  $P_R \equiv (1 + \gamma^5)/2$  分解费米子场  $\psi$ 。

- **左手费米子场**  $\psi_L \equiv P_L \psi$  描述左手正费米子和右手反费米子。
- **右手费米子场**  $\psi_R \equiv P_R \psi$  描述右手正费米子和左手反费米子。
- **质量项**  $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$  可视为左右手费米子场的相互作用项。

空间反射变换使螺旋度反号。**弱相互作用**没有空间反射不变性，导致宇称不守恒，其根源是**左手费米子与右手费米子参与不同的规范相互作用**。

# 电弱统一理论

电弱统一理论是  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  非阿贝尔规范理论。

- $SU(2)_L$  的生成元称为**弱同位旋**  $T^a$ ， $U(1)_Y$  的生成元称为**弱超荷**  $Y$ 。
- **电荷**  $Q = T^3 + Y$ ，这类似于盖尔曼-西岛关系。
- 左手费米子场构成  $SU(2)_L$  **二重态**，右手费米子场则是  $SU(2)_L$  **单态**。

统一记号	第 1 代	第 2 代	第 3 代	$T^3$	$Y$	$Q$
$L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_i \\ \ell_i \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$1/2$ $-1/2$	$-1/2$ $-1/2$	$0$ $-1$
$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$	$1/2$ $-1/2$	$1/6$ $1/6$	$2/3$ $-1/3$
$\ell_{iR}$	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$	$0$	$-1$	$-1$
$u_{iR}$	$u_R$	$c_R$	$t_R$	$0$	$2/3$	$2/3$
$d'_{iR}$	$d'_R$	$s'_R$	$b'_R$	$0$	$-1/3$	$-1/3$

表中的下型夸克场是**规范本征态**  $d'_i$ ，通过 **CKM 矩阵**  $V_{ij}$  与**质量本征态**  $d_i$  联系起来： $d'_i = V_{ij}d_j$ 。

# 费米子的电弱规范不变拉氏量

三代费米子的电弱规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} = \bar{L}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu L_{iL} + \bar{Q}_{iL} i\gamma^\mu D_\mu Q_{iL} + \bar{\ell}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu \ell_{iR} + \bar{u}_{iR} i\gamma^\mu D_\mu u_{iR} + \bar{d}'_{iR} i\gamma^\mu D_\mu d'_{iR}.$$

$SU(2)_L$  二重态  $Q_{iL}$  和  $L_{iL}$  的协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig'YB_\mu$ , 其中  $T^a = \sigma^a/2$ 。  $SU(2)_L$  单态  $\ell_{iR}$ 、 $u_{iR}$  和  $d'_{iR}$  的协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu - ig'YB_\mu$ 。这里**没有质量项**, 因为质量项耦合左右手费米子场, 会破坏规范不变性。

规范场  $W_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) 和  $B_\mu$  跟左手费米子的相互作用与右手费米子不同, 而 QED 中的光子场却相同。为了得到 QED, 需要把  $W_\mu^3$  和  $B_\mu$  混合起来:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad s_W \equiv \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad c_W \equiv \sqrt{1 - s_W^2},$$

其中转动角  $\theta_W$  称为**温伯格角**。

- $A_\mu$  对应于**光子**, 传递电磁相互作用, **电磁耦合常数**  $e = gs_W = g'c_W$ 。
- $Z_\mu$  和  $W_\mu^\pm \equiv (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$  对应于  **$Z^0$  和  $W^\pm$  玻色子**, 传递弱相互作用。

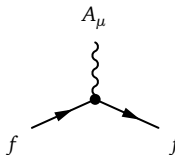
# 费米子的电弱规范相互作用

整理一下，得到费米子的电弱规范相互作用项

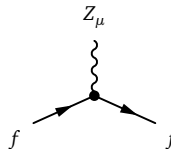
$$\mathcal{L}_{\text{EWF}} \supset e A_\mu J_{\text{EM}}^\mu + g Z_\mu J_Z^\mu + g(W_\mu^+ J_W^{+, \mu} + \text{h.c.}),$$

**弱中性流**  $J_Z^\mu \equiv \frac{1}{2c_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f$ ,  $g_V^f \equiv T_f^3 - 2Q_f s_W^2$ ,  $g_A^f \equiv T_f^3$ ,

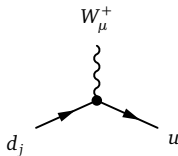
**电磁流**  $J_{\text{EM}}^\mu \equiv \sum_f Q_f \bar{f} \gamma^\mu f$ , **弱带电流**  $J_W^{+, \mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{iL} \gamma^\mu V_{ij} d_{jL} + \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \ell_{iL})$ .



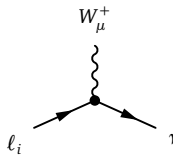
$$= iQ_f e \gamma^\mu$$



$$= i \frac{g}{2c_W} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5)$$



$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu P_L$$



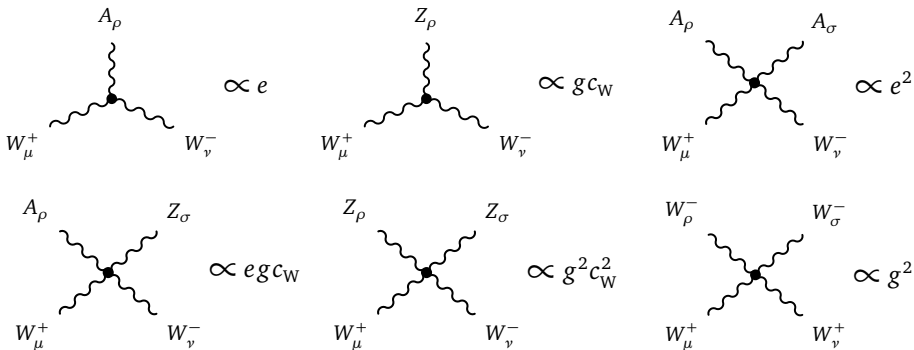
$$= i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L$$

# 电弱规范玻色子的自相互作用

电弱规范场自身的规范不变拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EWG}} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu},$$

其中  $W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$ ,  $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ 。



## 布绕特—恩格勒—希格斯机制

夸克、带电轻子、 $Z^0$  和  $W^\pm$  都具有质量，但上述  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  规范理论的拉氏量还没有任何质量项。

- 定域规范不变性使规范理论具有非常良好的性质，特别是可重整性。
- 在规范理论中直接放入规范场的质量项，会破坏定域规范不变性。
- 直接引入费米子场的质量项会破坏  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  定域规范不变性。

为了保证可重整性的同时提供规范玻色子和费米子的质量，需要引入布绕特—恩格勒—希格斯机制，使  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  对称性自发破缺。

首先，加入希格斯标量场  $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ ， $\phi^+$  和  $\phi^0$  都是复标量场。 $\Phi$  是  $SU(2)_L$  二重态，具有超荷  $Y = 1/2$ ，电弱规范不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V_H(\Phi), \quad V_H(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2,$$

其中协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu - ig W_\mu^a T^a - ig' Y B_\mu$ ， $T^a = \sigma^a/2$ 。而  $V_H(\Phi)$  是希格斯标量场的势能项。

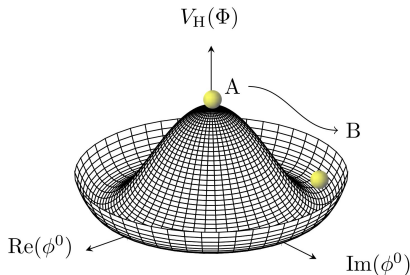


## 自发对称性破缺

假设  $\lambda > 0$ 。若  $\mu^2 < 0$ ，势能项  $V_H(\Phi)$  的最小值对应  $\Phi^\dagger \Phi = 0$ 。希格斯场真空期待值为  $\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，它在电弱规范变换下不变，故规范不变性未受到破坏。

若  $\mu^2 > 0$ ， $V_H(\Phi)$  呈现出右图所示墨西哥草帽状的形式， $|\phi^0| = 0$  处是势能的局域极大值，势能最小值位于  $|\phi^0| = v/\sqrt{2}$  的圆环上，其中  $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ 。希格斯场的真空期待值位于这个圆环上的某一点，不失一般性，可取为

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$



由于这个期待值会在电弱规范变换下改变，真空态不满足电弱规范不变性。这种拉氏量满足对称性、真空态却不满足的现象称为**自发对称性破缺**。

# 希格斯玻色子

以真空期待值  $\langle \Phi \rangle$  为基础, 考虑沿  $\phi^0$  实数轴的实扰动场  $H(x)$ , 即

$$\Phi(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger \Phi \rightarrow \frac{1}{2}(v + H)^2.$$

这种取法称为**么正规范** (其它任意扰动可由  $SU(2)_L$  规范变换得到)。由此,

$$-V_H(\Phi) \rightarrow \frac{1}{2}\mu^2(v + H)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + H)^4 = \frac{1}{4}\mu^2 v^2 - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \frac{m_H^2}{2v}H^3 - \frac{m_H^2}{8v^2}H^4,$$

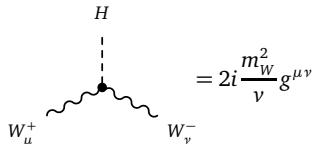
其中  $m_H \equiv \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$ 。实标量场  $H$  对应于一个质量为  $m_H$  的中性标量粒子  $H^0$ , 称为**希格斯玻色子**, 具有三线性和四线性自相互作用。

$$\begin{array}{c} H \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ H \quad H \end{array} = -3i \frac{m_H^2}{v} \qquad \begin{array}{c} H \quad H \\ \backslash \quad / \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ H \quad H \end{array} = -3i \frac{m_H^2}{v^2}$$

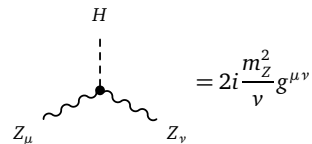
# 规范玻色子质量

在么正规范下，希格斯场的协变动能项化为

$$\begin{aligned}
 (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) \rightarrow & \frac{1}{2} (\partial^\mu H) (\partial_\mu H) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} \\
 & + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{2m_W^2}{v} H W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{v} H Z_\mu Z^\mu \\
 & + \frac{m_W^2}{v^2} H^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{2v^2} H^2 Z_\mu Z^\mu,
 \end{aligned}$$



$$= 2i \frac{m_W^2}{v} g^{\mu\nu}$$

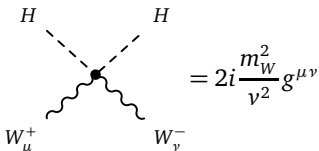


$$= 2i \frac{m_Z^2}{v} g^{\mu\nu}$$

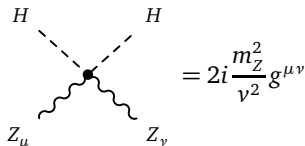
其中  $m_W \equiv \frac{1}{2} g v$  和  $m_Z \equiv \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v$ 。可见，

自发对称性破缺之后， $W^\pm$  和  $Z^0$  规范玻色子

获得了质量  $m_W$  和  $m_Z$ ，有 3 个希格斯场自由度变成它们的纵向分量。



$$= 2i \frac{m_W^2}{v^2} g^{\mu\nu}$$



$$= 2i \frac{m_Z^2}{v^2} g^{\mu\nu}$$

# 费米子质量

希格斯场与费米子场之间能够发生电弱规范不变的**汤川相互作用**：

$$\mathcal{L}_Y = -y_{d_i} \bar{Q}_{iL} d'_{iR} \Phi - y_{u_i} d_i \bar{Q}_{iL} u_{iR} \tilde{\Phi} - y_{\ell_i} \bar{L}_{iL} \ell_{iR} \Phi + \text{h.c.},$$

其中  $\tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2 \Phi^*$ 。自发对称性破缺之后，汤川耦合项化为

$$\mathcal{L}_Y \rightarrow -m_{d_i} \bar{d}_i d_i - m_{u_i} \bar{u}_i u_i - m_{\ell_i} \bar{\ell}_i \ell_i - \frac{m_{d_i}}{v} H \bar{d}_i d_i - \frac{m_{u_i}}{v} H \bar{u}_i u_i - \frac{m_{\ell_i}}{v} H \bar{\ell}_i \ell_i.$$

其中  $m_{d_i} \equiv y_{d_i} v / \sqrt{2}$ ,  $m_{u_i} \equiv y_{u_i} v / \sqrt{2}$ ,  $m_{\ell_i} \equiv y_{\ell_i} v / \sqrt{2}$ 。可见，**费米子获得了质量**，并与希格斯玻色子发生汤川相互作用，其耦合常数正比于费米子质量。

