Notas de Clase sobre Cho y Cooley (1994)

Jason Cruz
jj.cruza@up.edu.pe

Índice

1. Introducción

1.1. Cho y Cooley (1994)

- Estudian las implicaciones de su modelo para las elasticidades de la oferta laboral agregada y para la volatilidad de las horas, el empleo y la productividad en un modelo de economía simple.
- Amplían el marco del ciclo económico de los agentes representativos de manera que permita a los trabajadores ajustar su oferta laboral tanto en el margen intensivo como en el extensivo.
- Muestran que ignorar cualquiera de los márgenes de ajuste puede generar un sesgo significativo en la elasticidad implícita de la oferta laboral.

1.1.1. *Framework*

- Asumen un continuo de agentes con preferencias y conjuntos de oportunidades idénticos. La característica especial de su modelo es que suponen que los agentes tienen un **costo fijo** asociado con la oferta laboral que depende de la fracción de días en un período que estarán empleados.
- Describen una **versión estática** y analizan el problema de decisión que enfrenta el trabajador representativo.
- Muestran que ignorar cualquiera de los márgenes de ajuste puede generar un sesgo significativo en la elasticidad implícita de la oferta laboral.
- Extienden el modelo a un **entorno dinámico** y analizan la calibración y la simulación en esta versión.
- Presentan algunos **ejemplos** que ilustran cómo lo que los economistas laborales llaman elasticidad de la oferta de trabajo depende de ambos márgenes de ajuste.

1.2. Antecedentes

- Rogerson (1984) construyó un modelo de economía en el que la oferta laboral es indivisible, es decir, los individuos trabajan un número determinado de horas o no trabajan ninguna. En este contexto, todas las fluctuaciones en las horas de trabajo agregadas se deben a fluctuaciones en el empleo.
- Hansen (1985) amplió el modelo de Rogerson a un entorno de crecimiento y luego lo calibró utilizando los métodos de Kydland y Prescott (1982). Sus resultados demostraron que dicho modelo era capaz de explicar la alta variabilidad en el total de horas trabajadas incluso aunque los individuos no sustituyeran a lo largo del tiempo[*].
- Cho y Rogerson (1988) desarrollaron un modelo con ajuste a lo largo de ambos márgenes. Lograron esta característica introduciendo heterogeneidad en los conjuntos de oportunidades de quienes toman las decisiones en los hogares. Encuentran que, en equilibrio, el costo de participar en la fuerza laboral resulta ser una función creciente de la tasa de empleo. Así que esta característica refleja los costos de reemplazar la producción interna.
- Kydland y Prescott (1991) lograron esencialmente lo mismo al suponer que existe un costo asociado con el traslado de personas entre el sector doméstico y el sector productivo.
- Card (1989) describe un modelo en el que ambos márgenes de ajuste surgen del lado de la demanda debido a características de la tecnología.

[*] Vea las **Notas de Clase sobre Hansen 1985**

Cualquiera que sea la abstracción que se utilice para capturar estas características del mercado laboral, los resultados sugieren que **es importante representar ambos márgenes**.

2. Motivación del paper

2.1. Cho y Cooley (1994) y la importancia de representar ambos márgenes: intensivo y extensivo

- La evidencia indica que gran parte de la fluctuación en las horas agregadas de trabajo a lo largo del ciclo económico toma la forma de fluctuaciones en el empleo (el margen extensivo), en lugar de cambios en las horas de los trabajadores empleados (el margen intensivo).
- Las teorías de RBC basadas en modelos de agentes representativos caracterizaron a los agentes como aquellos que ajustan continuamente sus horas de trabajo o que sólo toman decisiones de participación en el mercado laboral con horas indivisibles; sin embargo, es importante modelar ambos: los trabajadores deciden tanto sobre su participación como sobre las horas.

2.1.1. Consecuencias de esta simplificación (no considerar ambos márgenes)

- Estos modelos no han conseguido explicar del todo las fluctuaciones de las horas trabajadas en relación con la productividad del ciclo económico.
- Estos modelos también implican elasticidades de la oferta de mano de obra que no concuerdan con los datos microeconómicos disponibles.

3. Los tres ejemplos

Estos ejemplos ilustran las dramáticas diferencias en las elasticidades de la oferta agregada de trabajo que implican los diferentes modelos de economía. Destacan la importancia de usar ambos márgenes.

Ejemplo 1. **Ambos márgenes: los trabajadores ajustan a lo largo de las horas de trabajo y eligen los días de trabajo en un periodo.**

- Los parámetros están calibrados para coincidir con la observación en los datos agregados de que tres cuartas partes de las fluctuaciones en el total de horas de trabajo se deben a fluctuaciones en el empleo, mientras que una cuarta parte se debe a fluctuaciones en las horas promedio.
- Los resultados muestran que este modelo es capaz de replicar casi exactamente la variabilidad de horas en relación con la productividad que se encuentra en los datos de EE. UU.

Ejemplo 2. **Margen extensivo solamente: los trabajadores eligen si trabajan o no.**

- Calibran el modelo utilizando observaciones del Estudio de Panel sobre la Dinámica del Ingreso. Los resultados de esta economía muestran una variación considerablemente menor en las horas agregadas que los datos de la economía de Estados Unidos o del ejemplo anterior.

Ejemplo 3. **Margen intensivo solamente: los trabajadores ajustan a lo largo de las horas de trabajo.**

- Utilizaron una especificación logarítmica lineal de preferencias como la utilizada en Hansen (1985), pero agregaron un término de **costo fijo**. Esto les permite calcular los costos de bienestar de trasladar a los trabajadores del sector doméstico al sector del mercado que son consistentes con la producción observada en Estados Unidos.

4. El modelo estático

Dada la función de utilidad del agente representativo:

$$u(c_t, n_t, e_t) = \frac{1}{\sigma}c^{\sigma} - \frac{a}{\gamma+1}n^{\gamma+1}e - \frac{b}{\tau+1}e^{\tau+1}$$

Las dos variables de oferta de trabajo n y e aparecen en la función de utilidad para capturar las características esenciales del modelo asociados con los dos tipos de elecciones que toman los agentes: (i) elegir el número de días de cada periodo en el que trabajarán y (ii) elegir el número de horas en cualquier día que decidan trabajar. Así, n y e se denotan como:

n: número de horas que trabajan en un día determinado.

e: fracción de días que trabajan en cada período (por ejemplo: en un trimestre). Cuando se introduce costos fijos asociados a la producción en el hogar, como en este caso, se denomina también como tasa de empleo.

4.1. El rol de n y e dentro de la función de utilidad

$$\frac{1}{\sigma}c^{\sigma}\underbrace{\underbrace{-\left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{1+r}e}_{\text{margen intensivo}}\underbrace{-\frac{b}{1+\tau}e^{\tau+1}}_{\text{margen extensivo}}}_{\text{costo de oferta laboral}}$$

Analizamos el rol de estas variables como funciones:

1. $v(n) = \left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{1+\gamma}$, donde $\gamma > 0$. Especificación de preferencia.

$$\frac{1}{\sigma}c^{\sigma}-\left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{1+r}e-\frac{b}{1+\tau}e^{\tau+1}$$

Interpretación

- Depende del número de horas que un agente trabaja en cualquier día de un periodo.
- Es la función de (des)utilidad por ajustar horas de trabajo. Entonces, refleja las preferencias del agente por aquellas decisiones de empleo que son hechas sobre el margen intensivo.
- v es continua y dos veces diferenciable, y creciente en n. Asimismo, v es estrictamente convexa y $v(0) = 0$.
- $v'(n) = an^{\gamma} > 0\,(-v'(n) < 0)$.
  - Ante un incremento de una hora trabajada en cualquier día de trabajo del agente, la desutilidad por hacerlo aumenta. Esto es así porque el costo de oportunidad de trabajar es el ocio y este genera utilidad, así que ajustar más horas al trabajo significa ajustar menos horas al ocio y por ende el agente experimenta desutilidad.
- $v''(n) = \gamma a n^{\gamma-1} > 0\left(v''(n) = \gamma a n^{\gamma-1} > 0\right)$

- La segunda derivada nos indica el incremento o decremento producido tras el cambio en las horas. Ante un incremento de una hora de trabajo ajustada, la función de utilidad es decreciente. Es decir incrementar cada vez más horas adicionales de trabajo genera cada vez más mayor desutilidad. Esto queda claro con el signo negativo.

- $\lim_{n\to 0} v'(n) = 0$.
  - En el margen, los primeros ajustes de horas adicionales de trabajo no incrementan la utilidad de trabajar del agente. Pocas horas no es suficiente para obtener alguna utilidad.
- $\lim_{n\to 1} v'(n) = \infty$
  - En el margen, ajustes posteriores de horas adicionales de trabajar incrementan la utilidad de hacerlo. Es decir, el agente necesita ajustar muchas horas adicionales en cualquier día para experimentar utilidad por trabajar esas horas adicionales.

2. $\psi(e) = \frac{b}{1+\tau} e^{\tau+1}$, donde $\tau > 0$. $\boxed{\text{Especificación de tecnología.}}$

$$\frac{1}{\sigma}c^{\sigma} - \left(\frac{a}{1+\gamma}\right) n^{1+r} e - \frac{b}{1+\tau} e^{\tau+1}$$

Interpretación

- Depende de la fracción de días que participe un agente, ya que a mayor fracción, mayor producción del hogar que debe ser reemplazada.
- Por cada día que el agente participa en la fuerza de trabajo suponemos que hay alguna actividad productiva del hogar que debe ser reemplazada. Por ejemplo: reemplazo del cuidado de niños, servicios domésticos, etc. En Cho y Cooley (1994) este costo se refiere a costos de producción doméstica.
- Entonces $\psi(e)$ se interpreta como la función asociada a la participación en el mercado laboral. Refleja las decisiones de empleo que son hechas desde el margen extensivo, sin variar las horas de trabajo (lo que dejo de hacer por trabajar, en número de días).
- $be^{\tau} > 0$
  - Ante un incremento de un día más de participación en el mercado, el costo de hacerlo incrementa.
- $\tau b e^{\tau-1} > 0$
  - La segunda derivada nos indica el incremento o decremento producido tras el cambio de un día más de participación en el mercado laboral. Ante un incremento de un día más de trabajo en un periodo la función de corte es creciente. Es decir, incrementar cada vez más días adicionales de trabajo genera mayor costo por participar en el mercado laboral. Esto es así porque participando más días en el mercado laboral significa participar menos días en la actividad productiva doméstica.

Solo para complementar, la tercera función que aparece es la utilidad del consumo.

Nota: La utilidad del consumo con la (des)utilidad de trabajar del agente: $u(c), v(n)$ forman la utilidad por trabajar diaria en promedio de un agente en cualquier día que decida trabajar, como lo menciona Cho y Cooley (1994).

3. $u(c) = \frac{1}{1+\sigma} c^{\sigma}$, donde $0 < \sigma < 1$. $\boxed{\text{Especificación de preferencia.}}$

$$\frac{1}{\sigma}c^{\sigma}-\left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{1+r}e-\frac{b}{1+\tau}e^{\tau+1}$$

- u es continua y dos veces diferenciable, y creciente en c. Además u es estrictamente cóncava.
- $u'(c)=c^{-\sigma}>0$
- $u''(c)=-\sigma c^{-\sigma-1}<0$
- $\lim_{c\to 0}u'(c)=\infty \Rightarrow$ Las primeras unidades de consumo añadidas (más que) incrementan la utilidad del agente.
- $\lim_{c\to \infty}u'(c)=0 \Rightarrow$ En el margen las últimas unidades de consumo añadidas incrementan muy poco sobre la utilidad del agente.

Nota: si $\tau=0$, tendríamos costo fijo puro (asociado con el margen extensivo). Si $b=0$, tendríamos un contexto puramente convexo donde hay costo por ajuste de horas (asociado al margen intensivo). Por ello, en el ejemplo, se restringe a $\tau>0$ y $\gamma>0$, y $b>0$. De esa manera no hay extremos y ambos margenes operan.

4.2. Condiciones de primer orden

Para encontrar los Condiciones de Primer Orden (CPO) consideremos que se trata de un problema estático con una restricción de desigualdad. Por tanto, planteamos el lagrangiano:

$$\mathscr{L}=\left(\frac{1}{\sigma}\right)c^{\sigma}-\left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{1+\gamma}e-\frac{b}{1+\tau}e^{1+\tau}+\mu[wne-c]$$

CPO

$$\{c\}: c^{\sigma-1}=\mu \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\{n\}: \; -an^{\gamma}e+\mu we&=0 &(2)\\
an^{\gamma}e&=\mu we &(3)\\
\rightarrow \mu w&=an^{\gamma} &(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{e\}: \; -\left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{1+\gamma}-\frac{b}{(1+\tau)}(1+\tau)e^{\tau}+\mu wn&=0 &(5)\\
-\left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{1+\gamma}-be^{\tau}+\mu wn&=0 &(6)\\
\rightarrow \mu wn&=\left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{1+\gamma}+be^{\tau} &(7)
\end{aligned}$$

La siguiente restricción se cumple con igualdad:

$$c \leq wne \tag{8}$$

Eliminamos el multiplicador:

(1) en (4): $wc^{\sigma-1} = an^{\gamma}$.
(1) en (7): $wc^{\sigma-1}n - \left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{1+\gamma} - be^{\tau} = 0$

Reemplazamos la restricción (8):

$$w(wne)^{\sigma-1} - an^{\gamma} = 0 \tag{9}$$

$$w(wne)^{\sigma-1}n - (a/(\gamma+1))n^{\gamma+1} - be^{\tau} = 0 \tag{10}$$

Interpretación

Lo primero que debemos notar es que estas condiciones marginales (9) y (10) deben mantenerse simultáneamente cuando ambos márgenes de ajuste están operando.

- $\boxed{(9)}$
  - Representa la condición marginal intensiva. Es la condición para que el margen de ajuste por horas trabajadas esté operando.
  - Caracteriza el beneficio marginal de ajustar a lo largo del margen intensivo que debe ser igual al costo marginal de hacerlo.
- $\boxed{(10)}$
  - Representa la condición marginal extensiva. Es la condición para que el margen de ajuste por empleo esté operando.
  - Caracteriza el beneficio marginal de ajustar a lo largo del margen extensivo que debe ser igual al costo marginal de hacerlo.

Estas condiciones aseguran que la elasticidad de oferta laboral **no** se encuentre entre los **extremos**: sólo **intensivo**, solo **extensivo**.[2]

4.3. Hallamos los valores de n^* y e^*, así como la oferta laboral N^s en equilibrio

Hallamos simultáneamente el empleo y horas ofertadas en equilibrio por el agente representativo.

[2] También garantizan la insesgadez de la elasticidad en una estimación econométrica. Es decir, que una elasticidad de oferta laboral agregada no sea tan elevada como en el caso extensivo ni tan pequeña como en el caso intensivo.

- Reemplazamos (9) en (10).

$$an^{\gamma}n-\left(\frac{a}{1+\gamma}\right)n^{\gamma+1}-be^{\tau}=0 \tag{11}$$

$$\left(1-\frac{1}{1+r}\right)an^{1+r}-be^{\tau}=0 \tag{12}$$

$$\frac{\gamma}{1+r}an^{1+r}=be^{\tau} \tag{13}$$

$$e=\left[\frac{1}{b}\frac{\gamma}{1+\gamma}an^{1+\gamma}\right]^{\frac{1}{\tau}} \tag{14}$$

$$e=\left[\frac{a}{b}\frac{\gamma}{1+\gamma}\right]^{\frac{1}{\tau}}n^{(\gamma+1)/\tau} \tag{15}$$

$$e=Hn^{(\gamma+1)/\tau} \tag{16}$$

$$\text{donde, } H=\left[\frac{a}{b}\frac{\gamma}{1+\gamma}\right]^{\frac{1}{\tau}} \tag{17}$$

- Para hallar n^*, sustituímos (16) en (10).

$$w\left(wnHn^{(\gamma+1)/\tau}\right)^{\sigma-1}-an^{\gamma}=0 \tag{18}$$

$$H^{\sigma-1}ww^{\sigma-1}n^{\sigma-1}n^{(\gamma+1)(\sigma-1)/\tau}-an^{\gamma}=0 \tag{19}$$

$$H^{\sigma-1}w^{\sigma}n^{\frac{(\sigma-1)[\tau+\gamma+1]}{\tau}}=an^{\gamma} \tag{20}$$

$$H^{\sigma-1}w^{\sigma}n^{-\frac{(1-\sigma)[\tau+\gamma+1]}{\tau}}=an^{\gamma} \tag{21}$$

$$\frac{H^{\sigma-1}w^{\sigma}}{n^{\frac{(1-\sigma)(\tau+\gamma+1)}{\tau}}}=an^{\gamma} \tag{22}$$

$$\frac{H^{\sigma-1}}{a}w^{\sigma}=n^{\gamma+\frac{(1-\sigma)[\tau+\gamma+1]}{\tau}} \tag{23}$$

$$n=\left[\frac{H^{\sigma-1}}{a}w^{\sigma}\right]^{\underbrace{\left(\gamma+\frac{(1-\sigma)[\tau+\gamma+1]}{\tau}\right)}_{R}} \tag{24}$$

$$n^*=\underbrace{\left(\frac{H^{\sigma-1}}{a}\right)^{\frac{1}{R}}}_{J}w^{\sigma/R} \tag{25}$$

$$\boxed{\therefore \text{n}^*=Jw^{\sigma/R}} \text{ (horas de trabajo de equilibrio)} \tag{26}$$

- Para hallar e^*, sustituímos (26) en (16)

$$e=Hn^{(\gamma+1)/\tau} \tag{27}$$

$$e^*=H\left[Jw^{\sigma/R}\right]^{(\gamma+1)/\tau} \tag{28}$$

$$e^*=\underbrace{HJ^{(\gamma+1)/\tau}}_{L}w^{\frac{\sigma(\gamma+1)}{\tau R}} \tag{29}$$

$$\boxed{\therefore \text{e}^*=Lw^{\frac{\sigma(\gamma+1)}{\tau R}}} \text{ (tasa de empleo de equilibrio)} \tag{30}$$

- Finalmente, para hallar N^s (N^{s*}) en equilibrio, simplemente recordamos que:

$$N^{s*} = n^* e^* \tag{31}$$

$$N^{s*} = \left(Jw^{\sigma/R}\right)\left(Lw^{\frac{\sigma(\gamma+1)}{\tau R}}\right) \tag{32}$$

$$N^{s*} = JLw^{\frac{\sigma}{R}+\frac{\sigma(\gamma+1)}{\tau R}} \tag{33}$$

$$N^{s*} = JLw^{\frac{\sigma\tau+\sigma(\gamma+1)}{\tau R}} \tag{34}$$

$$\boxed{\therefore \mathrm{N}^{s*} = JLw^{\frac{\sigma(\tau+\gamma+1)}{\tau R}}} \tag{35}$$

Nota: La elasticidad agregada de la oferta laboral es la suma de elasticidad en horas de trabajo: $\frac{\sigma}{R}$ más la elasticidad de empleo (días que deciden trabajar), $\frac{\sigma(1+\gamma)}{\tau R}$.

$$\Rightarrow = \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma(\gamma+1)}{\tau R} = \frac{\tau\sigma + \sigma(\gamma+1)}{\tau R} = \frac{\sigma(\tau+\gamma+1)}{\tau R}$$

5. El modelo dinámico

El modelo estático del acápite anterior se puede extender a una versión dinámica incorporando la acumulación del capital y choque tecnológico. Con ello el problema a resolver queda de la siguiente manera:

$$\text{máx}\, E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left[\log c_t - \frac{a}{1+\gamma} n_t^{1+\gamma} e_t - \frac{b}{1+\tau} e_t^{1+\tau}\right]$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
c_t + i_t \leq \exp(\lambda_t)\, k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}, \\
N_t = e_t n_t \\
k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t, \\
\lambda_t, \lambda_t = \eta\lambda_{t-1} + \varepsilon_t \\
c_t \geq 0, 0 \leq n \leq 1, 0 \leq e \leq 1, k_t \geq 0
\end{aligned}$$

5.1. Condiciones de primer orden (planeador social)

Encontraremos las condiciones de primer orden que caracterizan el modelo mediante el problema del planificador social.

Planeador Social

El problema que enfrenta el planeador social es:

$$\text{máx}\, E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log c_t - \frac{a}{1+\gamma} n_t^{1+\gamma} e_t - \frac{b}{1+\tau} e_t^{1+\tau}\right]$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
c_t + i_t \leq \exp(\lambda_t)\, k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}, N_t = e_t n_t \\
k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t, \lambda_t, \lambda_t = \eta\lambda_{t-1} + \varepsilon_t \\
c_t \geq 0, 0 \leq n \leq 1, 0 \leq e \leq 1, k_t \geq 0
\end{aligned}
$$

Planteamos el lagrangiano:

$$
\mathscr{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log c_t - \frac{a}{1+\gamma} n_t^{1+\gamma} e_t - \frac{b}{1+\tau} e_t^{1+\tau} + \mu_t \left(\exp(\lambda_t)\, k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t \right) \right]
$$

$\boxed{\text{CPO}}$

$$
\begin{aligned}
\{c_t\} : c^{\sigma-1} = \mu\beta^t c_t^{-1} - \beta^t && (36) \\
\mu_t = 0 && (37) \\
\rightarrow \mu_t = c_t^{-1} && (38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{n_t\} : -\beta^t a n_t^{\gamma} e_t + \beta^t \mu_t \exp(\lambda_t)(1-\alpha) k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} e_t = 0 && (39) \\
\rightarrow a n_t^{\gamma} = \mu_t \exp(\lambda_t)(1-\alpha) k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} && (40)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{e_t\} : \beta^t \left[-\frac{a}{1+\gamma} n_t^{1+\gamma} - b e_t^{\tau} \right] + \beta^t \mu_t \exp(\lambda_t)(1-\alpha) k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} n_t = 0 && (41) \\
\rightarrow \frac{a}{1+\gamma} n_t^{1+\gamma} - b e_t^{\tau} = \mu_t \exp(\lambda_t)(1-\alpha) k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} n_t && (42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{k_{t+1}\} : -\beta^t \mu_t + E_t \beta^{t+1} \mu_{t+1} \left(\exp(\lambda_{t+1})\, \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta \right) = 0 && (43) \\
\rightarrow \mu_t = \beta E_t \mu_{t+1} \left(\exp(\lambda_{t+1})\, \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta \right) && (44)
\end{aligned}
$$

Dado que no existen fricciones en esta economía, no hay externalidades ni fallas de mercado, la solución hallada mediante el planificador social coincidirá óptimamente (en el sentido de Pareto) con la solución descentralizada donde hogares y firmas resuelven sus problemas de optimización por separado y luego se encuentran en el mercado.

Las condiciones de quilibrio que caracterizan esta economía se resumen en:

Ecuación	Descripción
(I) $\frac{1}{c_t} \exp(\lambda_t)(1-\alpha) k_t^{\alpha} (n_t e_t)_t^{-\alpha} = a n_t^{\gamma}$	Condición del margen intensivo
(II) $\frac{1}{c_t} \exp(\lambda_t)(1-\alpha) k_t^{\alpha} (n_t e_t)_t^{-\alpha} n_t = \frac{a}{1+\gamma} n_t^{1+\gamma} + b e_t^{\tau}$	Condición del margen extensivo
(III) $\frac{1}{c_t} = \beta E_t \frac{1}{c_{t+1}} \left(\exp(\lambda_{t+1})\, \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} (n_{t+1} e_{t+1})_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta \right)$	Ecuación de Euler
(IV) $Y_t = \exp(\lambda_t)\, k_t^{\alpha} (n_t e_t)_t^{1-\alpha}$	Función de producción
(V) $Y_t = c_t + i_t$	Restricción de recursos
(VI) $k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$	Ley de movimiento del capital
(VII) $\lambda_t = \eta_t \lambda_{t-1} + \varepsilon_t$	Comportamiento del choque

6. Estado Estacionario

Consideremos que así como la dimensión del tiempo deja de ser imprescindible en el largo plazo, el operador de expectativas desaparece, puesto que no hay más incertidumbre en el modelo.

De **(I)**: $\lambda = \eta_t \lambda_{t-1} + \varepsilon_t$. Sabemos que en estado estacionario: $\varepsilon_t = 0$, por tanto $\lambda_t = 0\ \forall t$ dado $(\eta_t < 1)$. Esto quiere decir que $\exp(\lambda_t) = 1$. Entonces podemos considerar en dynare que: $\lambda = 0$ es un valor inicial.

De **(III)**: $\frac{1}{c_t} = \beta E_t \frac{1}{c_{t+1}} \left(\exp(\lambda_{t+1}) \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} (n_{t+1} e_{t+1})_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta \right)$. En estado estacionario ocurre que:

$$\begin{aligned} 1 &= \beta \left(\exp(\lambda) \alpha k^{\alpha-1} (ne)^{1-\alpha} + 1 - \delta \right) \\ \tfrac{1}{\beta} &= \alpha \exp(\lambda) k^{-(1-\alpha)} (ne)^{1-\alpha} + 1 - \delta \\ \left(\tfrac{1}{\beta} - 1 \right) + \delta &= \alpha \exp(\lambda) k^{-(1-\alpha)} (ne)^{1-\alpha} \\ k^{1-\alpha} (\rho + \delta) &= \alpha \exp(\lambda) (ne)^{1-\alpha} \\ k &= \left[\tfrac{\alpha \exp(\lambda)}{\rho + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} ne \end{aligned}$$

Debemos notar que $exp(\lambda) = 1$. Además, si definimos $p = \left[\frac{\alpha}{\rho+\delta} \right]$, obtenemos:

$$\Rightarrow k = p^{\frac{1}{1-\alpha}} ne \cdots \textbf{(A)}$$

Reemplazamos **(A)** en las expresiones de estado estacionario de **(I)** y **(II)**:

$$\begin{aligned} \textbf{(I)}:\ \exp(\lambda)(1-\alpha) k^{\alpha} (ne)^{-\alpha} &= a n^{\gamma} c \\ \exp(\lambda)(1-\alpha) \left\{ p^{\frac{1}{1-\alpha}} ne \right\}^{\alpha} (ne)^{-\alpha} &= a n^{\gamma} c \\ n^{\gamma} c &= \tfrac{(1-\alpha)}{a} \left[p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right] \cdots \textbf{(B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{(II)}:\ -\exp(\lambda_t)(1-\alpha) k_t (n_t e_t)^{-\alpha} n_t &= \left[\left(\frac{a}{1+\gamma} \right) n_t^{1+\gamma} + b e^{\tau} \right] c \\ \exp(\lambda)(1-\alpha) k^{-\alpha} n &= \left[\left(\frac{a}{1+\gamma} \right) n_t^{1+\gamma} + b e^{\tau} \right] c \cdots \textbf{(C)} \end{aligned}$$

Juntamos **(IV)**, **(V)** y **(VI)**, y despejamos **(C)** (por supuesto en la expresión de estado estacionario).

$$\begin{aligned} \textbf{(II)}\ \exp(\lambda) k^{\alpha} (ne)^{1-\alpha} &= c + k - (1-\delta) k \\ (ne)^{1-\alpha} k^{\alpha} - \delta k &= c \cdots \textbf{(D)} \end{aligned}$$

Reemplazamos **(A)** en **(D)**:

$$\begin{aligned} (ne)^{1-\alpha} \left\{ p^{\frac{1}{1-\alpha}} (ne) \right\}^{\alpha} - \delta \left\{ p^{\frac{1}{1-\alpha}} (ne) \right\} &= c \\ (ne) p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (ne) &= c \\ c = (ne) \left[p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta p^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] &\cdots \textbf{(E)} \end{aligned}$$

Reemplazamos **(E)** en **(B)** y **(C)**:

▹ En **(B)**:

$$n^{\gamma}c = \frac{(1-\alpha)}{a}\left[p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$$
$$an^{1+\gamma}e\left[p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta p^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] = (1-\alpha)\left[p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$$
$$e = \frac{(1-\alpha)p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{an^{1+\gamma}\left[p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta p^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]} \cdots \textbf{(F)}$$
$$e = \frac{1}{an^{1+\gamma}}M$$
$$\text{donde } M = \frac{(1-\alpha)\left[p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]}{\left[p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta p^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]}$$

▹En **(C)** :

$$(1-\alpha)p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = n^{1+\gamma}e\left[\frac{a}{1+\gamma}\left(p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta p^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)\right] + e^{1+\tau}\left[b\left(p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta p^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)\right]$$
$$(1-\alpha)p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left[p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta p^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]\left\{\frac{a}{1+\gamma}n^{1+\gamma}e + be^{1+\tau}\right\}$$
$$\frac{a}{1+\gamma}n^{1+\gamma}e + be^{1+\tau} = M \cdots \textbf{(G)}$$

▹**(F)** en **(G)** :

$$\frac{1}{1+\gamma}M + b\left(\frac{1}{an^{1+\gamma}}M^{1+\tau}\right) = M$$
$$\rightarrow \frac{1}{1+\gamma} + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right)M^{\tau} = 1$$
$$n = \left[\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\frac{b}{a}\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}\{M\}^{\frac{\tau}{1+\gamma}} \cdots \textbf{(H)}$$

▹En **(F)** :

$$e = \frac{1}{an^{1+\gamma}}(M)$$
$$e\left[\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\frac{b}{a}\right]^{\frac{1}{1+\gamma}} = \frac{1}{a}\{M\}^{\frac{1+\gamma-\tau}{1+\gamma}}$$
$$\text{Sea: } q = \left[\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\frac{b}{a}\right]$$
$$\rightarrow e = \frac{M^{\left(\frac{1+\gamma-\tau}{1+\gamma}\right)}}{aq^{(1/(1+\gamma))}} \cdots \textbf{(I)}$$

Reducimos M: $M = \frac{(1-\alpha)p^{\alpha/(1-\alpha)}p^{-(\alpha/(1-\alpha))}}{(1-\delta p)}$;

$$\Rightarrow M = \left(\frac{1-\alpha}{1-\delta p}\right)$$

Si reemplazamos esto en **(H)** e **(I)** obtendremos los valores de estado estacionario para n y e. Estos quedan de la siguiente manera:

$$\therefore \mathrm{n} = \mathrm{q}^{(1/(1+\gamma))}\left[\frac{r}{1-\delta p}\right]^{(\tau/(1+\gamma))}$$
$$\therefore \mathrm{e} = \left[\left(\frac{r}{1-\delta p}\right)\right]^{((1+\gamma-\tau))/(1+\gamma)}\frac{}{aq^{(1/(1+\gamma))}}$$
$$\text{donde } : r = 1-\alpha$$

Hasta aquí, los valores de estado estacionario para k, e y n. Los valores de estado estacionario de las demás variables se obtendrán más directamente tras estos hallazgos.

Es directo notar que los demás valores de estado estacinario serán:

En (IV):

$$Y_{ss} = \exp(\lambda) k_{ss}^{\alpha} (n_{ss} e_{ss})^{1-\alpha}$$

En (VI):

$$i_{ss} = \delta k_{ss}$$

En (V):

$$c_{ss} = Y_{ss} - i_{ss}$$

Con todo este trabajo podemos implementar el modelo en dynare, ya que contamos con los valores de los parámetros y también podemos hacer uso de los valores de estado estacionario hallados como valores iniciales a fin de que dynare solucione nuestro modelo. En caso todo esté correcto, implícitamente significaría que nuestra solución a mano y la del computo duro en dynare ha cumplido con las condiciones típicas de este como las condiciones de rango de Blanchard y Khan[3], entre otros.

7. Calibración

Vea la **PD#9** (ahí se detalla los valores de ciertos parámetros solicitados). Por supuesto, también debería revisar la calibración que siguen Cho y Cooley (1994) en su *paper*.

8. *Coding*

8.1. *Dynare*

Encuentre el *script* `cho_cooley_1994.mod` de dynare en el BB[4] del curso.

[Pending] Pronto estará disponible el código justo aquí.

9. Simulación del choque (en Dynare)

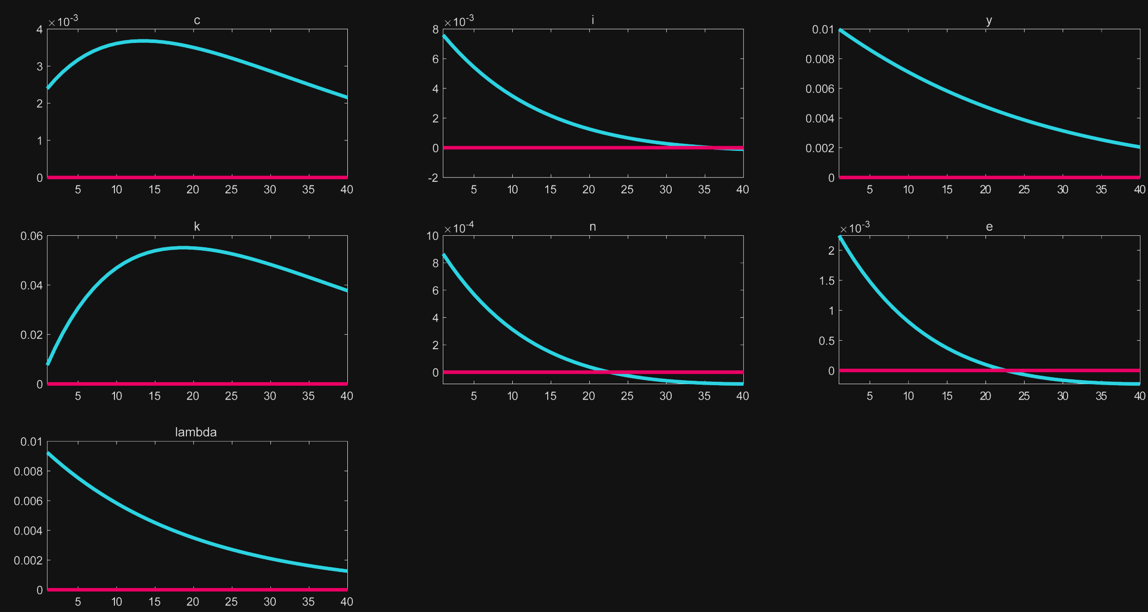
9.1. IRF's

Las siguientes figuras muestran las IRFs del producto, consumo, inversión, capital, horas de trabajo y tasa de empleo ante un choque tecnológico.

La primera figura corresponde a nuestro modelo (el más completo) implementado desde el ejercicio con todos los parámetros y variables tal y como fue solicitado. Cabe resaltar que corresponde a un choque de mayor persistencia en comparación con la segunda figura, esto medido por el parámetro η que en nuestro modelo (no necesariamente en Cho y Cooley (1994)) es de 0,95.

[3]Vea estos apuntes interesantes sobre métodos numéricos.
[4]...PD/Coding Tasks/Matlab/'Employment and hours over the business cycle'

Figura 1: IRFs (alta persistencia



Interpretación

En general, el choque tencológico se puede pensar desde los agentes económicos como: "llegó la maquinaria, hay que ponernos a 'chambear'". Es por ello que las IRF's mostrarán saltos en las horas de trabajo y días (tasa de empleo), principalmente.

- Debido a que los agentes trabajan más horas al día, experimentarán mayores ingresos salariales (en realidad los ingresos agregados aumentan) los cuales serán trasladados a mayores niveles de consumo. Sin embargo, este efecto se ve atenuado por el deseo de suavizar de los consumidores.
- Por otro lado, ahora el capital es más productivo por lo que los agentes estarán dispuestos a posponer consumo presente por futro debido al mayor rendimiento del capital. Este efecto sustitución reflejado por la ecuación de Euler es notorio, esto a su vez explica la forma de la curva del consumo que si bien aumenta, se va suavizando. En esa línea, el deseo por invertir más ante la bonanza tecnológica se refleja en la IRF de la inversión. Aunque su mayor volatilidad en comparación con las otras hace que retorne más rápido a su nivel de estado estacionario, esto se puede explicar debido a que las tasas de interés aumentan ante el incremento en la productividad marginal del capital por lo que el consumo futuro se hace relativamente más caro que el del presente.
- Por supuesto, el efecto directo del choque se da sobre el producto, lo cual explica la IRF de esta variable, el producto salta por encima de su estado estacionario debido a que ahora hay más y mejores recursos en la economía. Sin embargo, es tan volatil como la inversión que su comportamiento es parecido.
- La IRF del capital refleja lo productivo que ahora es el capital en la economía. Sin embargo, su productividad disminuirá con el tiempo hasta volver al quilibrio.
- Sin duda, lo más interesante acontece con los margenes. En el caso del margen intensivo, los agentes ajustan más horas de trabajo ante el choque tecnológico, hay más (y mejor) maquinaria con la cual se puede trabajar, además los salarios ofertados son mayores para un mismo nivel de horas laborales.
- Por otro lado, los agentes no solo ajustan intensivamente, sino también extensivamente, ellos están

dispuestos a ofertar más días (participan más en el mercado laboral), pero esto claramente no es sostenido debido a que el trabajo es en sí mismo desutilidad para los agentes. Algo interesante que acontece con estos margenes es que luego de alcanzar su nivel de estado estacionario, llegan a niveles por debajo de este. Una explicación para eso es que dado que el capital es muy productivo y esto es persistente, la economía no requerirá de mano de obra sino de más capital eficiente. Acontece salidas del mercado laboral por esta sustitución, pero además porque los salarios dejan de ser alentadores, justamente debido a la mayor productividad del capital por lo que los agentes ajustan menos horas y días.

La segunda figura muestra un choque menos persistente, se simuló el modelo para un $\eta = 0{,}51$. Asimismo, se ha considerado algunos cambios en los valores para la desviación del choque sigma_v y para el valor del parámetro gamma. Para ambos casos el cambio se realizó siguiendo el paper de Cho y Cooley (1994), en el que se muestran ciertos valores de los parámetros calibrados. Estos cambios se hacen con fines de comparar los extremos de los margenes: solo intensivo y solo extensivo vs ambos márgenes operando como es el caso de Cho y Cooley (1994).

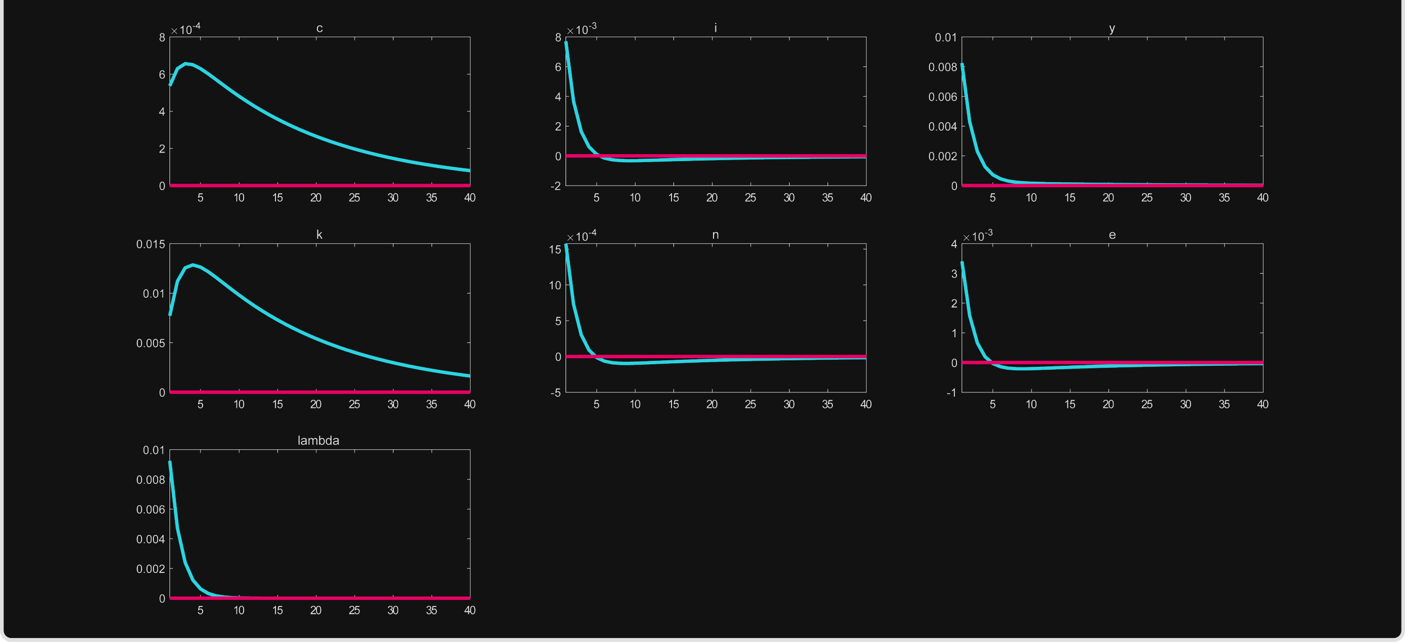


Figura 2: IRFs (baja persistencia)

Interpretación

Con baja persistencia, el salto en las horas de trabajo y en los días de participación en el mercado laboral se da al inicio del choque, pero luego llega hasta por debajo de sus niveles de estado estacionarios. Es decir, los agentes ajustan intensivamente y extensivamente menos horas y menos días en el mercado laboral. Esto se puede explicar como un salto en la productividad del capital muy grande y muy breve, tanto que luego se requeriría tanta mano de obra como sea posible por lo que los salarios caerían y los agentes no estarían dispuestos a participar en el mercado laboral con más horas ni días (a esos menores salarios).

10. Resultados

10.1. La data vs el modelo

- Las estadísticas resumidas generadas por la economía modelo presentadas se parecen a las estadísticas de la economía estadounidense, con algunas excepciones notables.
    - La más importante, desde el punto de vista de los objetivos de Cho y Cooley (1994), es que la economía modelo muestra menos fluctuación que la economía estadounidense a juzgar por las desviaciones estándar de la *tabla 2* del *paper*.
    - Las correlaciones de las variables simuladas con la producción de la economía modelo son muy cercanas a las de la economía modelo (la economía estadounidense), excepto que las horas, el empleo y la productividad están más correlacionados en la economía modelo. Esto se debe en parte al hecho de que las series temporales en la economía modelo fueron creadas por un solo *shock*.
    - Para crear series temporales que tengan correlaciones más parecidas a las de la economía estadounidense necesitaríamos introducir más *shocks* o errores de medición. Este problema de singularidad estocástica es común a los modelos de ciclos económicos reales.
- A pesar de las discrepancias antes mencionadas, los resultados muestran que el modelo económico captura algunas características importantes de la economía estadounidense.

10.2. Resultados sobre el modelo dinámico

- Los resultados de sus simulaciones revelan que la especificación usada produce una relación entre la variabilidad horaria agregada en relación con la variabilidad de la productividad en la economía modelo de aproximadamente 1,4, que está bastante cerca de la relación implícita en los datos de Estados Unidos.
- Para la economía estadounidense, la relación es de aproximadamente 1,47 en unidades físicas pero 1,42 en unidades de eficiencia [véase Hansen (1985)].
- Que esta relación sea tan alta ha sido un problema para otros modelos de ciclo económico.
- Kydland y Prescott (1982), Hansen (1985), Prescott (1986) y Bencivenga (1987) centran su atención en este ratio clave.
    - Para el modelo de economía estudiado por Kydland y Prescott (1982) esta relación resulta ser 1,17, mientras que es 2,70 para la economía del trabajo indivisible estudiada por Hansen (1985), el empleo, el promedio de horas de trabajo, las horas de trabajo agregadas y la productividad fluctúan menos en la economía modelo que en los datos. Este modelo de economía no es tan exitoso a la hora de capturar la volatilidad de las horas agregadas como el modelo de trabajo puro e indivisible considerado por Hansen (1985). En su modelo de economía, la desviación estándar de las horas agregadas era 1,35.

Referencias

Cho, Jang-Ok y Thomas F Cooley (1994). “Employment and hours over the business cycle”. En: *Journal of Economic Dynamics and Control* 18.2, págs. 411-432.