



有限脉冲响应数字滤波器设计 (FIR DF)

数字滤波器基本概念与技术指标介绍

FIR DF的条件和特点

窗函数法设计FIR滤波器



一、 数字滤波器基本概念与技术指标介绍



1.数字滤波器的基本概念

数字滤波器，是指输入、输出均为数字信号，通过数值运算处理改变输入信号所含频率成分的相对比例，或者滤除某些频率成分的数字器件或程序。

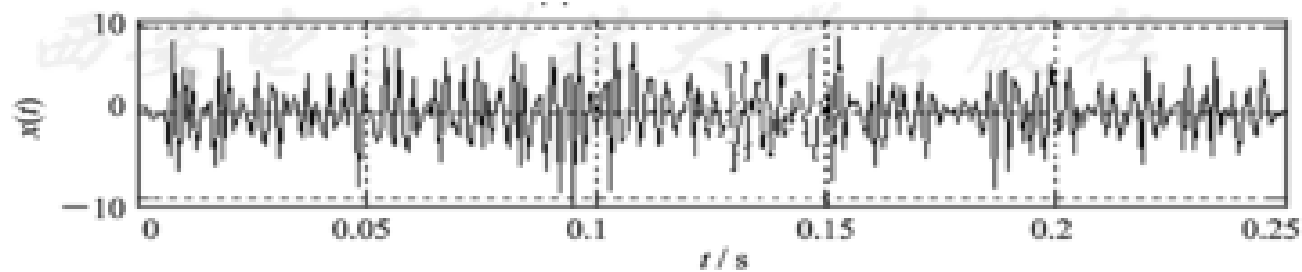
数字滤波通过数值运算实现滤波，所以数字滤波器处理精度高、稳定、体积小、重量轻、灵活、不存在阻抗匹配问题，可以实现模拟滤波器无法实现的特殊滤波功能。如果要处理的是模拟信号，可通过A/DC和D/AC，在信号形式上进行匹配转换，同样可以使用数字滤波器对模拟信号进行滤波。



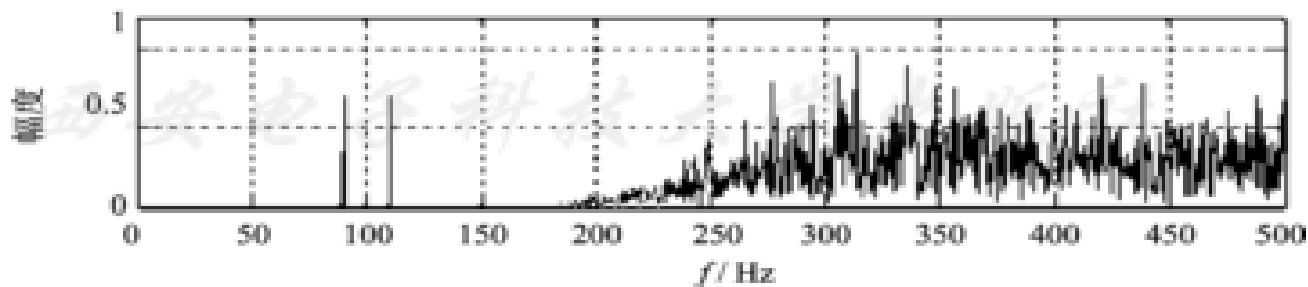
2. 数字滤波器的分类

数字滤波器有许多种类，但总起来可以分成两大类：
经典滤波器和现代滤波器。

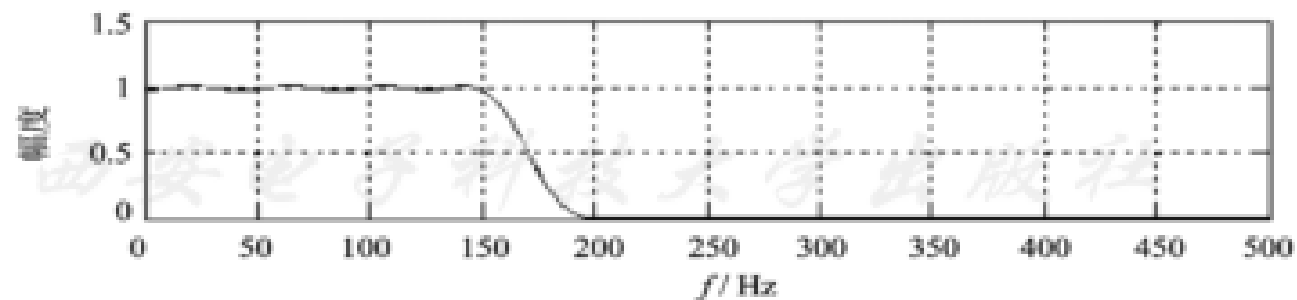
经典滤波器的特点是其信号中有用频率成分和噪声频率成分占有不同频段，通过一个合适的
(LP,HP,BP,BS) 滤波器滤除噪声。



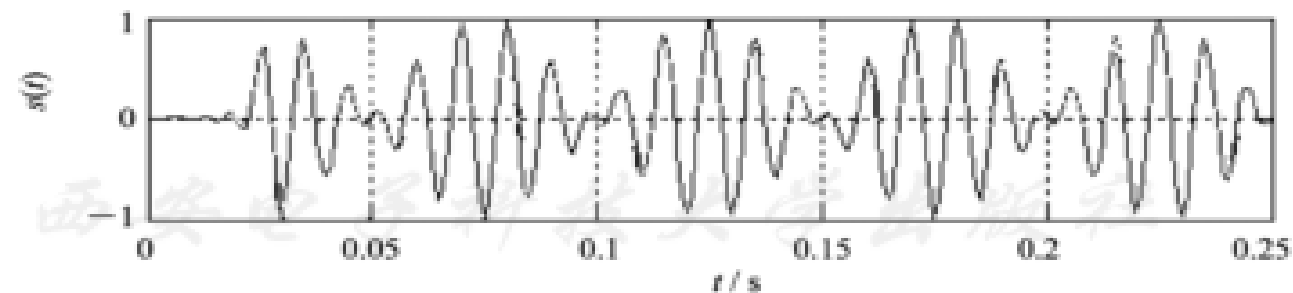
(a) 信号加噪声波形



(b) 信号加噪声的频谱



(c) 低通滤波器幅频特性



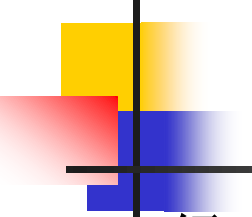
(d) 滤除噪声后的信号波形



But,

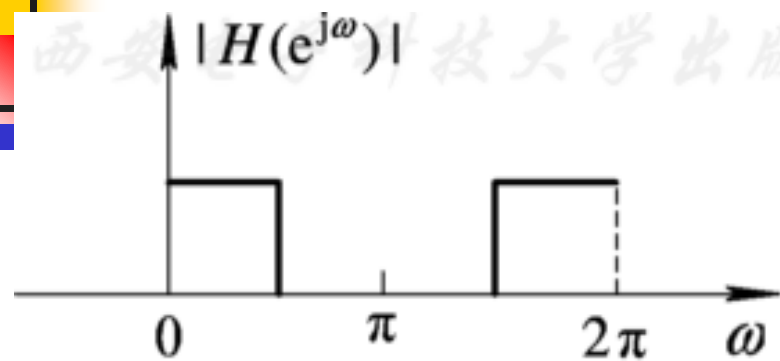
如果信号和干扰的频谱相互重叠，这时就需要现代滤波器，例如维纳滤波器、卡尔曼滤波器、自适应滤波器等。

现代滤波器是根据随机信号的一些统计特性，在某种最佳准则下，最大限度地抑制干扰，同时最大限度地恢复信号，从而达到最佳滤波的目的。

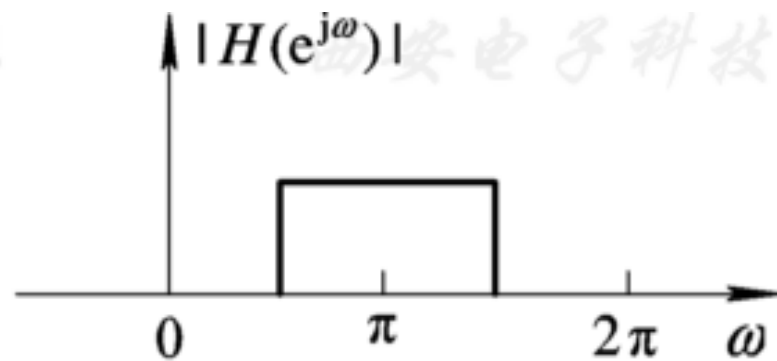


经典数字滤波器从滤波特性上分类，可以分成低通、高通、带通和带阻等滤波器，其频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期的。如低通滤波器的通频带中心位于 2π 的整数倍处，而高通滤波器的通频带中心位于 π 的奇数倍处，这一点和模拟滤波器是有区别的。

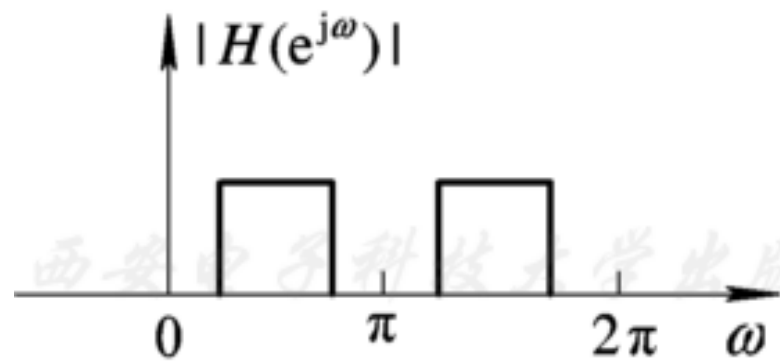
一般在数字频率的主值区 $[0, 2\pi]$ 描述数字滤波器的频率响应特性。



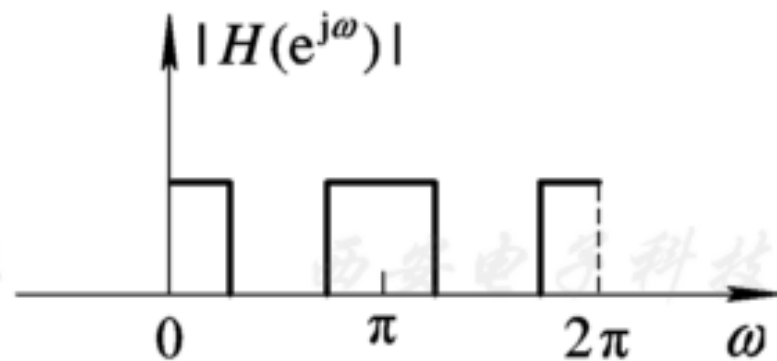
(a) 低通



(b) 高通



(c) 带通



(d) 带阻

数字滤波器从实现的网络结构或者从单位脉冲响应长度分类，可以分成无限长单位脉冲响应(IIR)滤波器和有限长单位脉冲响应(FIR)滤波器。它们的系统函数分别为：

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (6.1.1)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (6.1.2)$$

(6.1.1)式中的 $H(z)$ 称为 N 阶IIR数字滤波器系统函数; (6.1.2)式中的 $H(z)$ 称为 $N-1$ 阶FIR数字滤波器系统函数。

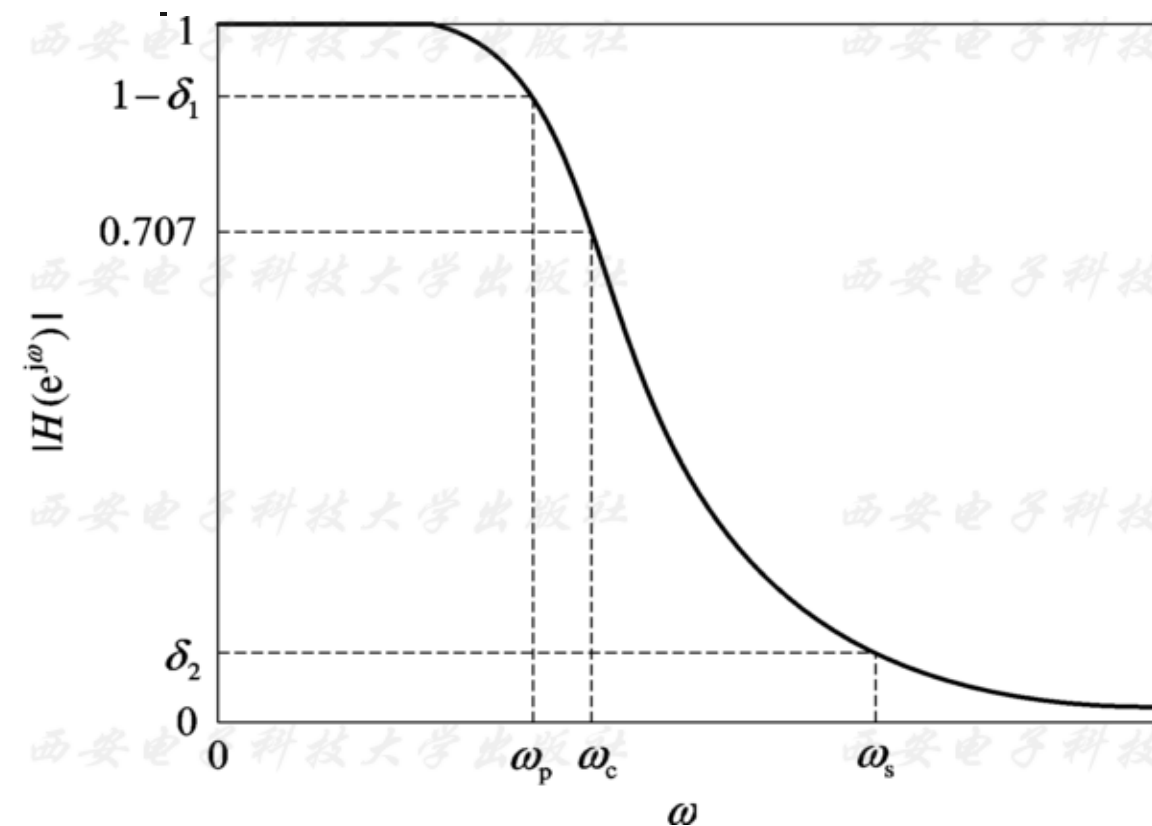


3. 数字滤波器的技术指标

数字滤波器的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 用下式表示：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$ 称为幅频特性函数； $\theta(\omega)$ 称为相频特性函数。幅频特性表示信号通过该滤波器后各频率成分振幅衰减情况，而相频特性反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况。



低通滤波器的幅频特性技术指标示意图

ω_p 和 ω_s 分别称为通带截止频率和阻带截止频率。

通带频率范围：

$0 \leq |\omega| \leq \omega_p$ ，在通带中 $(1 - \delta_1) < |H(e^{j\omega})| \leq 1$ ，

阻带频率范围：

$\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$ ，在阻带中，
 $|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2$ 。

ω_p 到 ω_s 称为过渡带。

通带内和阻带内允许的衰减一般用分贝数表示，通带内允许的最大衰减用 α_p 表示，阻带内允许的最小衰减用 α_s 表示。对低通滤波器， 定义为：

$$\alpha_p = 20 \lg \frac{\max |H(e^{j\omega})|}{\min |H(e^{j\omega})|} \text{dB} \quad , \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{\text{通带中} \max |H(e^{j\omega})|}{\text{阻带中} \max |H(e^{j\omega})|} \text{dB}$$

α_p 越小，通带波纹越小，通带逼近误差就越小； α_s 越大，阻带波纹越小，阻带逼近误差就越小； ω_p 与 ω_s 间距越小，过渡带就越窄。

低通滤波器的设计指标由通带截止频率 ω_p 、通带最大衰减 α_p 、阻带截止频率 ω_s 和阻带最小衰减 α_s 确定。



对于单调下降的幅频特性， α_p 和 α_s 别可以表示为

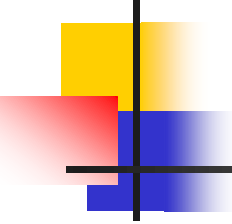
$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} \text{ dB} \quad (6.1.3b)$$

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} \text{ dB} \quad (6.1.4b)$$

如果将 $|H(e^{j0})|$ 归一化为1，(6.1.3b)和(6.1.4b)式则表示为：

$$\alpha_p = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| \text{ dB} \quad (6.1.5)$$

$$\alpha_s = -20 \lg |H(e^{j\omega_s})| \text{ dB} \quad (6.1.6)$$



当幅度下降到 $1/\sqrt{2}$ 时，标记 $\omega=\omega_c$ ，此时 $\alpha_p=3$ dB，称 ω_c 为 3 dB 截止频率。 ω_p 、 ω_c 和 ω_s 分别代表不同的截止频率，它们是滤波器设计中所涉及到的很重要的参数。对其他类型的滤波器，(6.1.3b)式和(6.1.4b)式中的 $H(e^{j0})$ 应为 $H(e^{j\omega_0})$ ， ω_0 为滤波器通带中心频率。



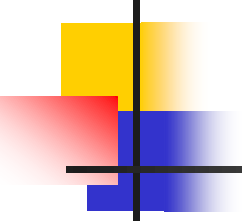
4. 数字滤波器设计方法概述

IIR滤波器和FIR滤波器的设计方法完全不同。

IIR滤波器设计一般采用间接法，借助模拟滤波器的设计方法进行的。

其设计步骤是：先设计模拟滤波器得到系统函数 $H_a(s)$ ，然后将 $H_a(s)$ 按某种方法转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

模拟高通、带通和带阻滤波器的设计过程是：先将希望设计的各种滤波器的技术指标转换为低通滤波器技术指标，然后设计相应的低通滤波器，最后采用频率转换法将低通滤波器转换成各种滤波器。



FIR滤波器不能采用间接法，常用的设计方法有窗函数法、频率采样法和切比雪夫等波纹逼近法。

FIR滤波器的单位脉冲响应满足一定条件时，其相位特性在整个频带是严格线性的，这是模拟滤波器无法达到的。

FIR 与 IIR 的区别:

$$N-1 \text{ 阶 FIR } H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n}$$

$$N \text{ 阶 IIR } H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

FIR

IIR

系统函数 $H(z)$

无分母

有分母

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

单位脉冲响应 $h[n]$

有限长

无限长

差分方程

非递归

递归

FIR 与 IIR 的性能对比：

FIR 滤波器的系统函数的极点固定在原点 ($N-1$ 重极点)，是不能动的，它只能靠改变零点位置来改变它的性能。所以，要达到高的频率选择性，必须用较高的阶数来实现。相比而言，IIR 滤波器可以随意设定极点位置，所以有更好的频率选择性，对于同样的滤波器设计指标，IIR 的阶数要远小于 FIR。

FIR 滤波器能够在保证幅度特性满足技术要求的同时，实现严格的线性相位特性，且一定是稳定的，而且 FIR 滤波器的单位脉冲响应是有限长的，滤波过程可以用快速傅里叶算法实现，大大提高运算效率。



二、 FIR数字滤波器的条件与特点



关于线性相位

满足线性相位的系统，
通带内信号只发生延迟，
不产生不同频率的相位畸变。

设某离散时间滤波系统的频率响应为： $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$

由于此系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 为实函数，

$$\text{故 } |H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})| \text{ 且 } \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

则当输入信号若为： $\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$ 时，

$$\text{输出信号为： } \frac{1}{2} |H(e^{j\omega_0})| \left\{ e^{j[\omega_0 n + \varphi(\omega_0)]} + e^{-j[\omega_0 n + \varphi(\omega_0)]} \right\} = |H(e^{j\omega_0})| \cos[\omega_0 n + \varphi(\omega_0)]$$

假设 $\cos(\omega_0 n)$ 在通带内，且通带幅度增益为 1，则输出信号为 $\cos[\omega_0 n + \varphi(\omega_0)]$

现在假设输入信号为： $x[n] = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$ ，且假设 ω_1 和 ω_2 都位于通带内，则

输出为： $y[n] = \cos[\omega_1 n + \varphi(\omega_1)] + \cos[\omega_2 n + \varphi(\omega_2)]$ ，此时若 $\varphi(\omega) = -\omega\tau$ (线性相位)，

$$\text{则： } y[n] = \cos[\omega_1 n - \omega_1 \tau] + \cos[\omega_2 n - \omega_2 \tau] = \cos[\omega_1 (n - \tau)] + \cos[\omega_2 (n - \tau)] = x[n - \tau]$$




1. 线性相位FIR数字滤波器

对于长度为 N 的 $h(n)$ ，频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (7.1.1)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad (7.1.2)$$

式中， $H_g(\omega)$ 称为幅度特性； $\theta(\omega)$ 称为相位特性。注意，这里 $H_g(\omega)$ 不同于 $|H(e^{j\omega})|$ ， $H_g(\omega)$ 为 ω 的实函数，可能取负值，而 $|H(e^{j\omega})|$ 总是正值。线性相位FIR滤波器是指 $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数，即


$$\theta(\omega) = -\tau\omega, \quad \tau \text{ 为常数} \quad (7.1.3)$$

如果 $\theta(\omega)$ 满足下式：

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega, \quad \theta_0 \text{ 是起始相位} \quad (7.1.4)$$

严格地说，此时 $\theta(\omega)$ 不具有线性相位特性，但以上两种情况都满足群时延是一个常数，即

$$-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \tau$$

也称这种情况为线性相位。一般称满足（7.1.3）式是第一类线性相位；满足（7.1.4）式为第二类线性相位。 $\theta_0 = -\pi/2$ 是第二类线性相位特性常用的情况，所以本章仅介绍这种情况。



2. 线性相位FIR的时域约束条件

线性相位FIR滤波器的时域约束条件是指满足
线性相位时，对 $h(n)$ 的约束条件。

1) 第一类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

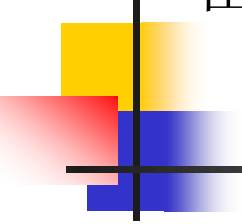
第一类线性相位FIR数字滤波器的相位函数

$\theta(\omega)=-\omega\tau$ ，由式（7.1.1）和（7.1.2）得到：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)(\cos \omega n - j\sin \omega n) = H_g(\omega)(\cos \omega\tau - j\sin \omega\tau) \quad (7.1.5)$$

由式 (7.1.5) 得到:


$$\begin{cases} H_g(\omega) \cos \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \\ H_g(\omega) \sin \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \end{cases} \quad (7.1.6)$$

将 (7.1.6) 式中两式相除得到:

$$\frac{\cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}$$

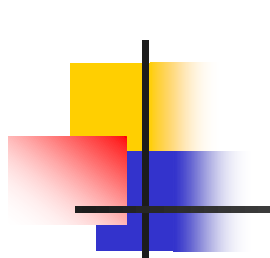
即

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \sin \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \cos \omega \tau$$

移项并用三角公式化简得到:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n-\tau)] = 0 \quad (7.1.7)$$

函数 $h(n)\sin\omega(n-\tau)$ 关于求和区间的中心 $(N-1)/2$ 奇对称，是满足（7.1.7）式的一组解。因为 $\sin\omega(n-\tau)$ 关于 $n=\tau$ 奇对称，如果取 $\tau=(N-1)/2$ ，则要求 $h(n)$ 关于 $(N-1)/2$ 偶对称，所以要求 τ 和 $h(n)$ 满足如下条件:


$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (7.1.8)$$

由以上推导结论可知，如果要求单位脉冲响应为 $h(n)$ 、长度为 N 的FIR数字滤波器具有第一类线性相位特性（严格线性相位特性），则 $h(n)$ 应当关于 $n=(N-1)/2$ 点偶对称。当 N 确定时，FIR数字滤波器的相位特性是一个确知的线性函数，即 $\theta(\omega) = -\omega(N-1)/2$ 。 N 为奇数和偶数时， $h(n)$ 的对称情况分别如表7.1.1中的情况1和情况2所示。

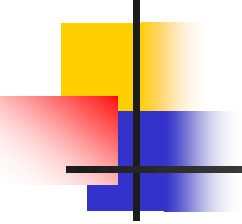
2) 第二类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

第二类线性相位FIR数字滤波器的相位函数

$\theta(\omega)=-\pi/2-\omega\tau$ ，由式（7.1.1）和（7.1.2），经过同样的推导过程可得到：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j(\pi/2+\omega\tau)}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos[\omega(n-\tau)] = 0 \quad (7.1.9)$$

函数 $h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$ 关于求和区间的中心 $(N-1)/2$ 奇对称，是满足式（7.1.9）的一组解，因为 $\cos[\omega(n-\tau)]$ 关于 $n=\tau$ 偶对称，所以要求 τ 和 $h(n)$ 满足如下条件：


$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, & \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (7.1.10)$$


由以上推导结论可知，如果要求单位脉冲响应为 $h(n)$ 、长度为 N 的 FIR 数字滤波器具有第二类线性相位特性，则 $h(n)$ 应当关于 $n=(N-1)/2$ 点奇对称。 N 为奇数和偶数时 $h(n)$ 的对称情况分别如表 7.1.1 中情况 3 和情况 4 所示。



2. 线性相位FIR滤波器幅度特性 $H_g(\omega)$ 的特点

实质上，幅度特性的特点就是线性相位FIR滤波器的频域约束条件。将时域约束条件 $h(n)=\pm h(N-n-1)$ 代入式（7.1.1），设 $h(n)$ 为实序列，即可推导出线性相位条件对FIR数字滤波器的幅度特性 $H_g(\omega)$ 的约束条件。当 N 取奇数和偶数时对 $H_g(\omega)$ 的约束不同，因此，对于两类线性相位特性，下面分四种情况讨论其幅度特性的特点。这些特点对正确设计线性相位FIR数字滤波器具有重要的指导作用。为了推导方便，引入两个参数符号：

$$\tau = \frac{N-1}{2}, \quad M = \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil$$



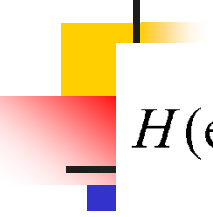
式中, $\lceil (N-1)/2 \rceil$ 表示取不大于 $(N-1)/2$ 的最大整数。

~~显然, 仅当 N 为奇数时, $M=\tau=(N-1)/2$ 。~~

情况1: $h(n)=h(N-n-1)$, N 为奇数。

将时域约束条件 $h(n)=h(N-n-1)$ 和 $\theta(\omega)=-\omega\tau$ 代入式

(7.1.1) 和 (7.1.2), 得到:



$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)} \right]$$

$$= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} + h(n)e^{-j\omega(N-n-1)} \right]$$

$$= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[e^{-j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + e^{j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} \right] \right\}$$

$$= e^{-j\omega\tau} \left\{ h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)] \right\}$$



所以

$$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \tau)] \quad (7.1.11)$$

因为 $\cos[\omega(n-\tau)]$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称，所以由式（7.1.11）可以看出， $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称。因此情况1可以实现各种（低通、高通、带通、带阻）滤波器。对于 $N=13$ 的低通情况， $H_g(\omega)$ 的一种例图如表7.1.1中情况1所示。


情况2: $h(n)=h(N-n-1)$, N 为偶数。

仿照情况1的推导方法得到:

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^M 2h(n)\cos(\omega(n-\tau))$$
$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n)\cos[\omega(n-\tau)] \quad (7.1.12)$$

式中, $\tau = (N-1)/2 = N/2 - 1/2$ 。因为 N 是偶数,
所以当 $\omega = \pi$ 时

$$\cos[\omega(n-\tau)] = \cos\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right)\right] = 0$$

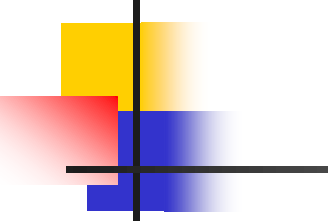


而且 $\cos[\omega(n-\tau)]$ 关于过零点奇对称，关于 $\omega=0$ 和 2π 偶对称。所以 $H_g(\pi)=0$ ， $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 奇对称，关于 $\omega=0$ 和 2π 偶对称。因此，**情况2不能实现高通和带阻滤波器**。对 $N=12$ 的低通情况， $H_g(\omega)$ 如表7.1.1中情况2所示。

情况3： $h(n)=-h(N-n-1)$ ， N 为奇数。

将时域约束条件 $h(n)=-h(N-n-1)$ 和 $\theta(\omega)=-\pi/2-\omega\tau$ 代入

式（7.1.1）和（7.1.2），并考虑 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$ ，得到：



$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)} \right]$$


$$= \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} - h(n)e^{-j\omega(N-n-1)} \right]$$

$$= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[e^{-j\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} - e^{j\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} \right]$$

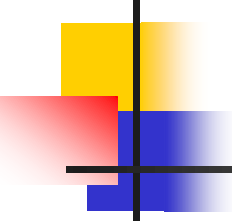
$$= -je^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

$$= e^{-j(\pi/2 + \omega\tau)} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$



式中， N 是奇数， $\tau=(N-1)/2$ 是整数。所以，当 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 时， $\sin[\omega(n-\tau)]=0$ ，而且 $\sin[\omega(n-\tau)]$ 关于过零点奇对称。因此 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点奇对称。由此可见，**情况3只能实现带通滤波器**。对 $N=13$ 的带通滤波器举例， $H_g(\omega)$ 如表7.1.1中情况3所示。




情况4: $h(n)=-h(N-n-1)$, N 为偶数。

用情况3的推导过程可以得到:

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)] \quad (7.1.13)$$

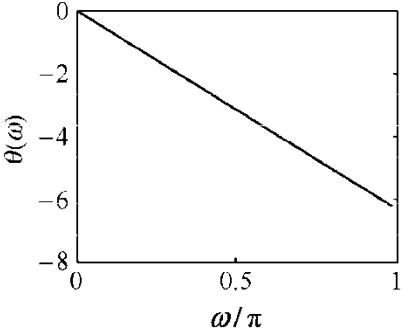
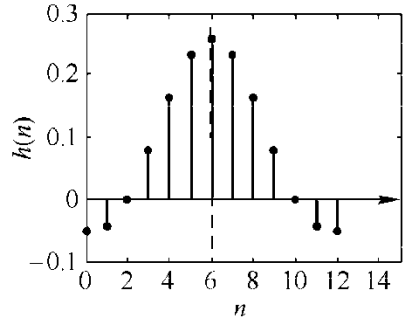
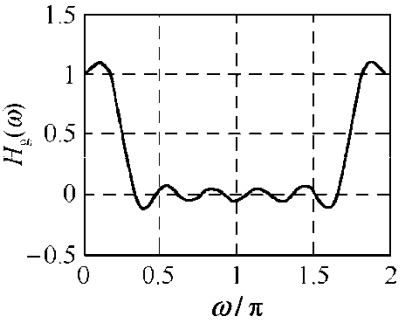
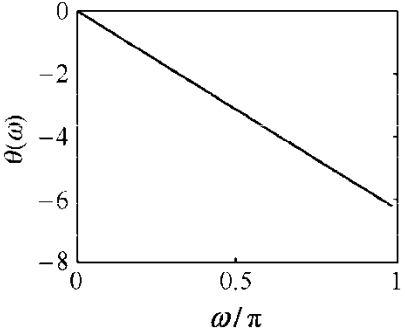
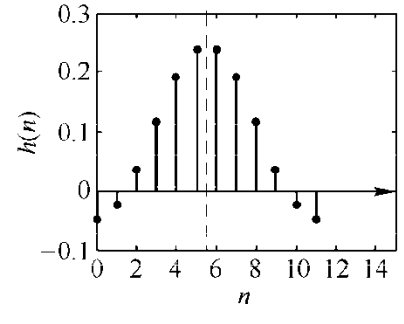
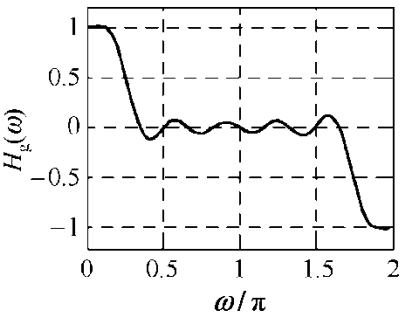
式中, N 是偶数, $\tau=(N-1)/2=N/2-1/2$ 。所以, 当 $\omega=0, 2\pi$ 时, $\sin[\omega(n-\tau)]=0$; 当 $\omega=\pi$ 时, $\sin[\omega(n-\tau)]=(-1)^{n-N/2}$, 为峰值点。而且 $\sin[\omega(n-\tau)]$ 关于过零点 $\omega=0$ 和 2π 两点奇对称, 关于峰值点 $\omega=\pi$ 偶对称。因此 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 和 2π 两点奇对称, 关于 $\omega=\pi$ 偶对称。由此可见, **情况4不能实现低通和带阻滤波器**。对 $N=12$ 的高通滤波器举例, $H_g(\omega)$ 如表7.1.1中情况4所示。



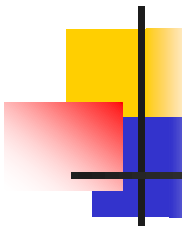
为了便于比较，将上面四种情况的 $h(n)$ 及其幅度特性需要满足的条件列于表7.1.1中。应当注意，对每一种情况仅画出满足幅度特性要求的一种例图。

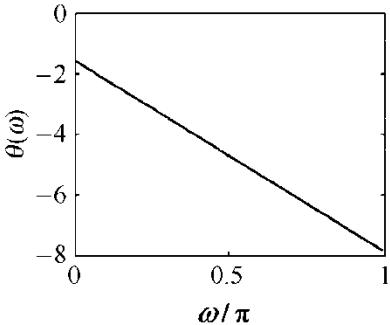
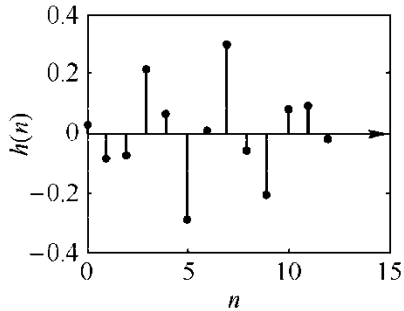
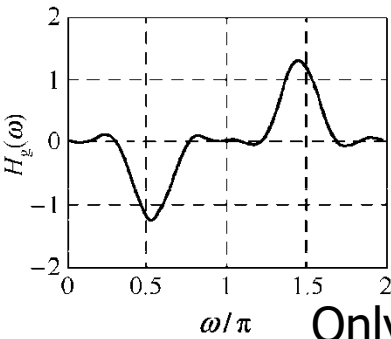
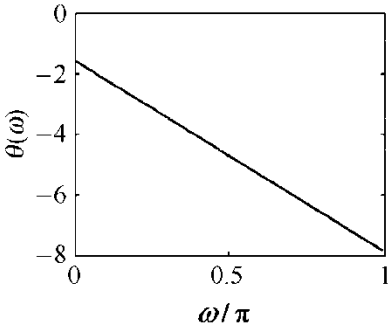
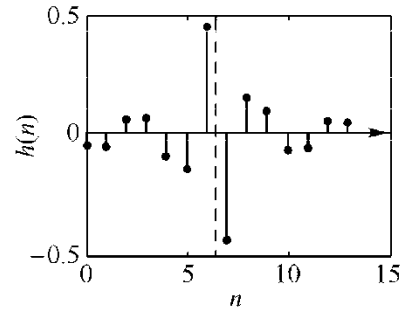
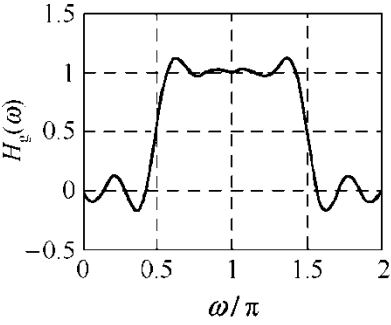
例如，情况1仅以低通的幅度特性曲线为例。当然也可以画出满足情况1的幅度约束条件（ $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称）的高通、带通和带阻滤波器的幅度特性曲线。所以，仅从表7.1.1就认为情况1只能设计低通滤波器是错误的。

表7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性一览

第一类线性相位特性		$h(n) = h(N-1-n)$	
情况 1	<p>$\theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ (以 $N=5$ 为例画图)</p> 	<p>N 为奇数 ($N=13$)</p> 	$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$ 
情况 2		<p>N 为偶数 ($N=12$)</p> 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$ 

Not for HP,BS

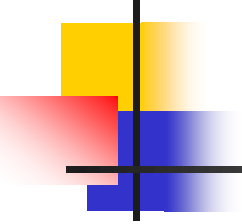


第二类线性相位特性		$h(n) = -h(N-1-n)$	
情况 3	$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ <p>(以 $N=5$ 为例画图)</p> 	N 为奇数 ($N=13$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 
情况 4		N 为偶数 ($N=14$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 

Only for BP


Not for LP,BS

3. 线性相位FIR数字滤波器的零点分布特点


$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

将 $h(n)=\pm h(N-1-n)$ 代入上式, 得到:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n} \\ &= \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned} \quad (7.1.14)$$



由 (7.1.14) 式可以看出, 如 $z=z_i$ 是 $H(z)$ 的零点, 其倒数 z_i^{-1} 也必然是其零点; 又因为 $h(n)$ 是实序列, $H(z)$ 的零点必定共轭成对, 因此 z_i^* 和 $(z_i^{-1})^*$ 也是其零点。这样, 线性相位FIR滤波器零点必定是互为倒数的共轭对, 确定其中一个, 另外三个零点也就确定了, 如图7.1.1中 z_3 、 z_3^{-1} 、 z_3^* 和 $(z_3^*)^{-1}$ 。当然, 也有一些特殊情况, 如图7.1.1中 z_1 、 z_2 和 z_4 情况。

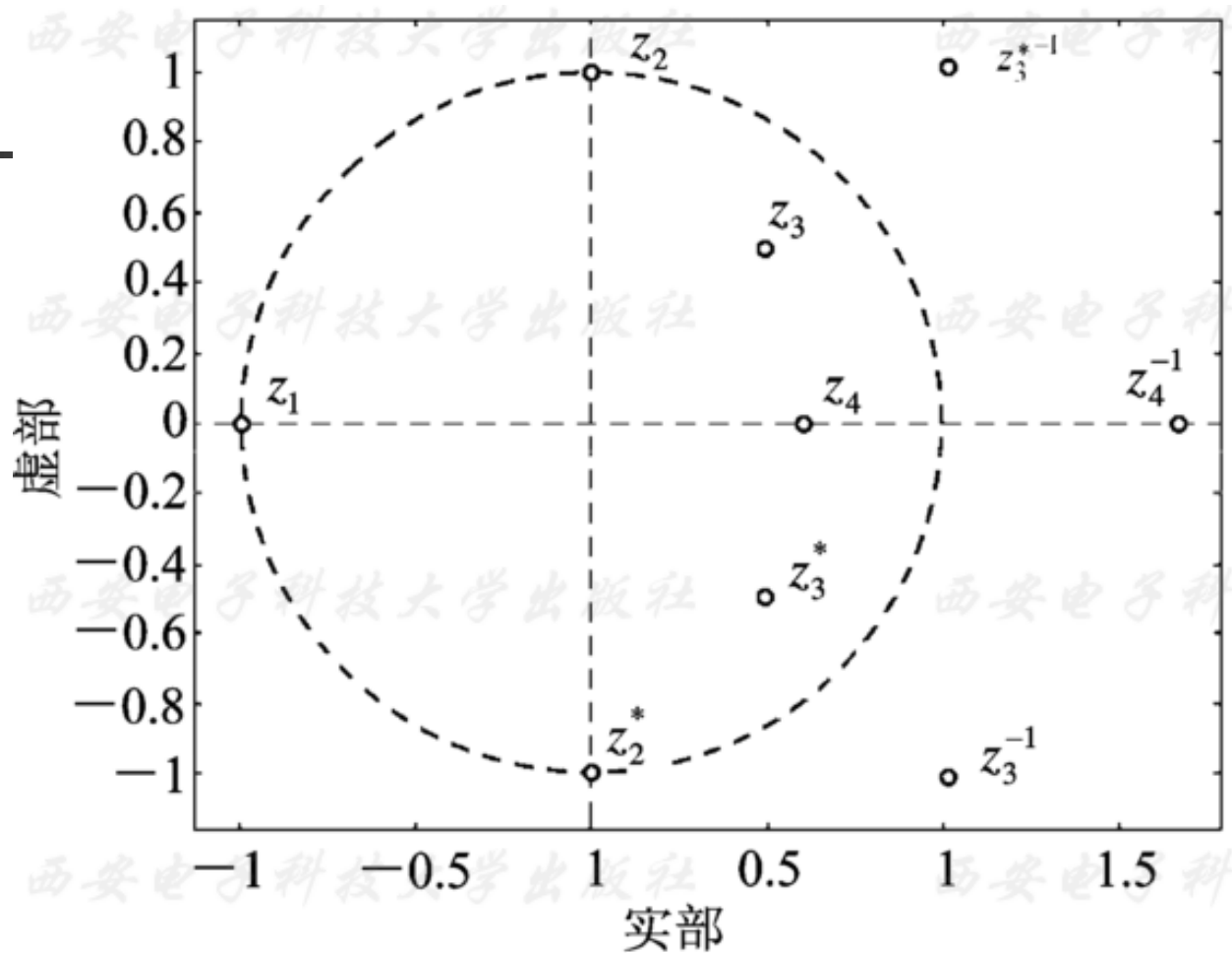


图7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的零点分布



三、窗函数法设计**FIR**滤波器



1. 窗函数法设计原理

设希望逼近的滤波器频率响应函数为 $H_d(e^{j\omega})$,
其单位脉冲响应是 $h_d(n)$ 。

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$


$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

如果能够由已知的 $H_d(e^{j\omega})$ 求出 $h_d(n)$ ，经过Z变换可得到滤波器的系统函数。但通常以理想滤波器作为 $H_d(e^{j\omega})$ ，其幅度特性逐段恒定，在边界频率处有不连续点，因而 $h_d(n)$ 是无限时宽的，且是非因果序列。例如，线性相位理想低通滤波器的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \quad (7.2.1)$$

其单位脉冲响应 $h_d(n)$ 为

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \quad (7.2.2)$$

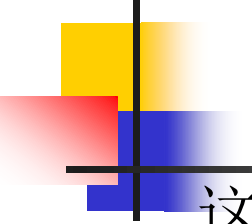


由上式看到，理想低通滤波器的单位脉冲响应 $h_d(n)$ 是无限长，且是非因果序列。 $h_d(n)$ 的波形如图7.2.1(a)所示。为了构造一个长度为 N 的第一类线性相位FIR滤波器，只有将 $h_d(n)$ 截取一段，并保证截取的一段关于 $n=(N-1)/2$ 偶对称。设截取的一段用 $h(n)$ 表示，即

$$h(n) = h_d(n)R_N(n) \quad (7.2.3)$$

式中， $R_N(n)$ 是一个矩形序列，长度为 N ，波形如图7.2.1(b)所示。由该图可知，当 α 取值为 $(N-1)/2$ 时，截取的一段 $h(n)$ 关于 $n=(N-1)/2$ 偶对称，保证所设计的滤波器具有线性相位。

我们实际设计的滤波器的单位脉冲响应为 $h(n)$ ，长度为 N ，其系统函数为 $H(z)$ ，


$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

这样用一个有限长的序列 $h(n)$ 去代替 $h_d(n)$ ，肯定会引起误差，表现在频域就是通常所说的吉布斯

（Gibbs）效应。该效应引起过渡带加宽以及通带和阻带内的波动，尤其使阻带的衰减减小，从而满足不了技术上的要求，如图7.2.2所示。这种吉布斯效应是由于将 $h_d(n)$ 直接截断引起的，因此，也称为截断效应。下面讨论这种截断效应的产生，以及如何构造窗函数 $w(n)$ ，用来减少截断效应，设计一个能满足技术要求的FIR线性相位滤波器。

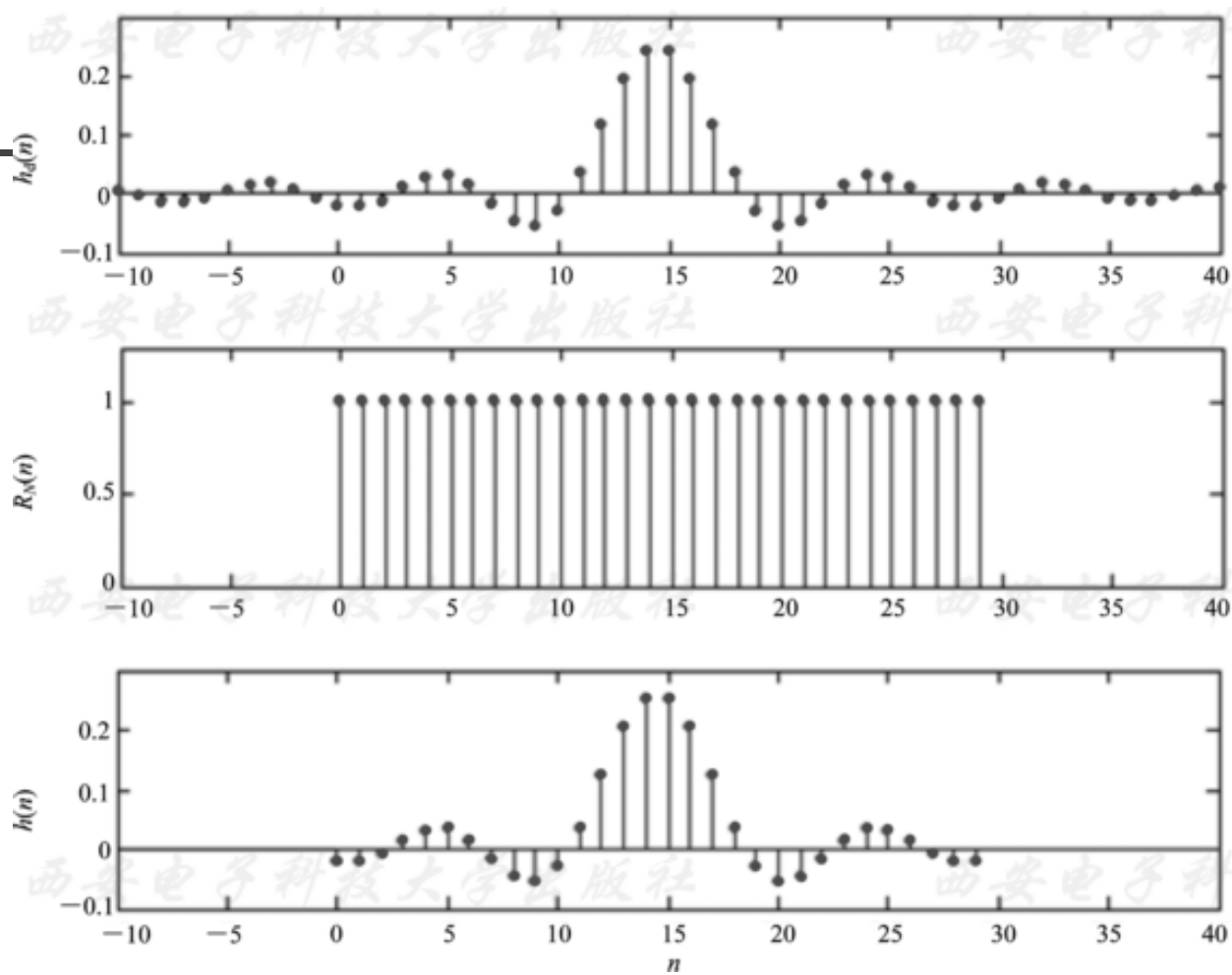
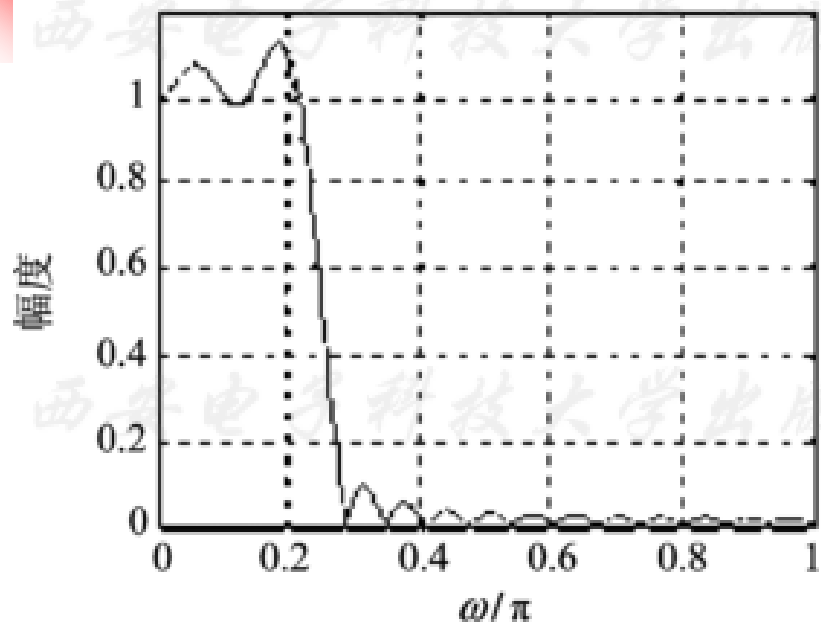
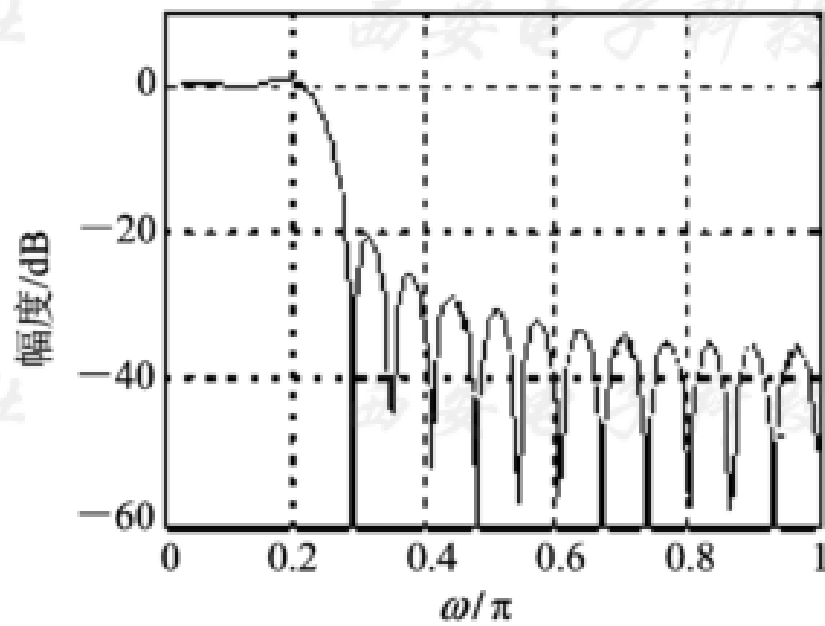


图7.2.1 窗函数设计法的时域波形（矩形窗， $N=30$ ）



(a) 幅频响应函数曲线



(b) 损耗函数曲线

图7.2.2 吉普斯效应

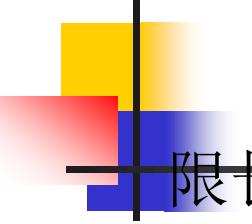


$H_d(e^{j\omega})$ 是一个以 2π 为周期的函数，可以展为傅里叶级数，


即

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$

傅里叶级数的系数为 $h_d(n)$ ，当然就是 $H_d(e^{j\omega})$ 对应的单位脉冲响应。设计 FIR 滤波器就是根据要求找到 N 个傅里叶级数系数 $h(n)$ ， $n=1, 2, \dots, N-1$ ，以 N 项傅氏级数去近似代替无限项傅氏级数，这样在一些频率不连续点附近会引起较大误差，这种误差就是前面说的截断效应，如图 7.2.2 所示。



在（7.2.3）式中， $R_N(n)$ （矩形序列）就是起对无限长序列的截断作用，可以形象地把 $R_N(n)$ 看做一个窗口， $h(n)$ 则是从窗口看到的一段 $h_d(n)$ 序列，所以称 $h(n)=h_d(n)R_N(n)$ 为用矩形窗对 $h_d(n)$ 进行加窗处理。下面分析用矩形窗截断的影响和改进的措施。为了叙述方便，用 $w(n)$ 表示窗函数，用下标表示窗函数类型，矩形窗记为 $w_R(n)$ 。用 N 表示窗函数长度。



根据傅里叶变换的时域卷积定理，得到 (7.2.3) 式的傅里叶变换：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (7.2.4)$$

式中， $H_d(e^{j\omega})$ 和 $W_R(e^{j\omega})$ 分别是 $h_d(n)$ 和 $R_N(n)$ 的傅里叶变换，即

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_R(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$

$$= W_{Rg}(\omega) e^{-j\alpha\omega} \quad (7.2.5)$$

$$w_R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} W_R(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

式中

$$W_{\text{Rg}}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}, \quad \alpha = \frac{N - 1}{2}$$

$W_{\text{Rg}}(\omega)$ 称为矩形窗的幅度函数，如图7.2.3（b）所示，将图中 $[-2\pi/N, 2\pi/N]$ 区间上的一段波形称为 $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 的主瓣，其余较小的波动称为旁瓣。将 $H_d(e^{j\omega})$ 写成 $H_d(e^{j\omega}) = H_{\text{dg}}(\omega)e^{-j\omega\alpha}$ ，则按照（7.2.1）式，理想低通滤波器的幅度特性函数（如图7.2.3（a）所示）为

$$H_{\text{dg}}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

说明：下标 d 代表理想滤波器；
下标 g 代表没有发生时移的
原始状态（关于纵坐标轴偶对称）

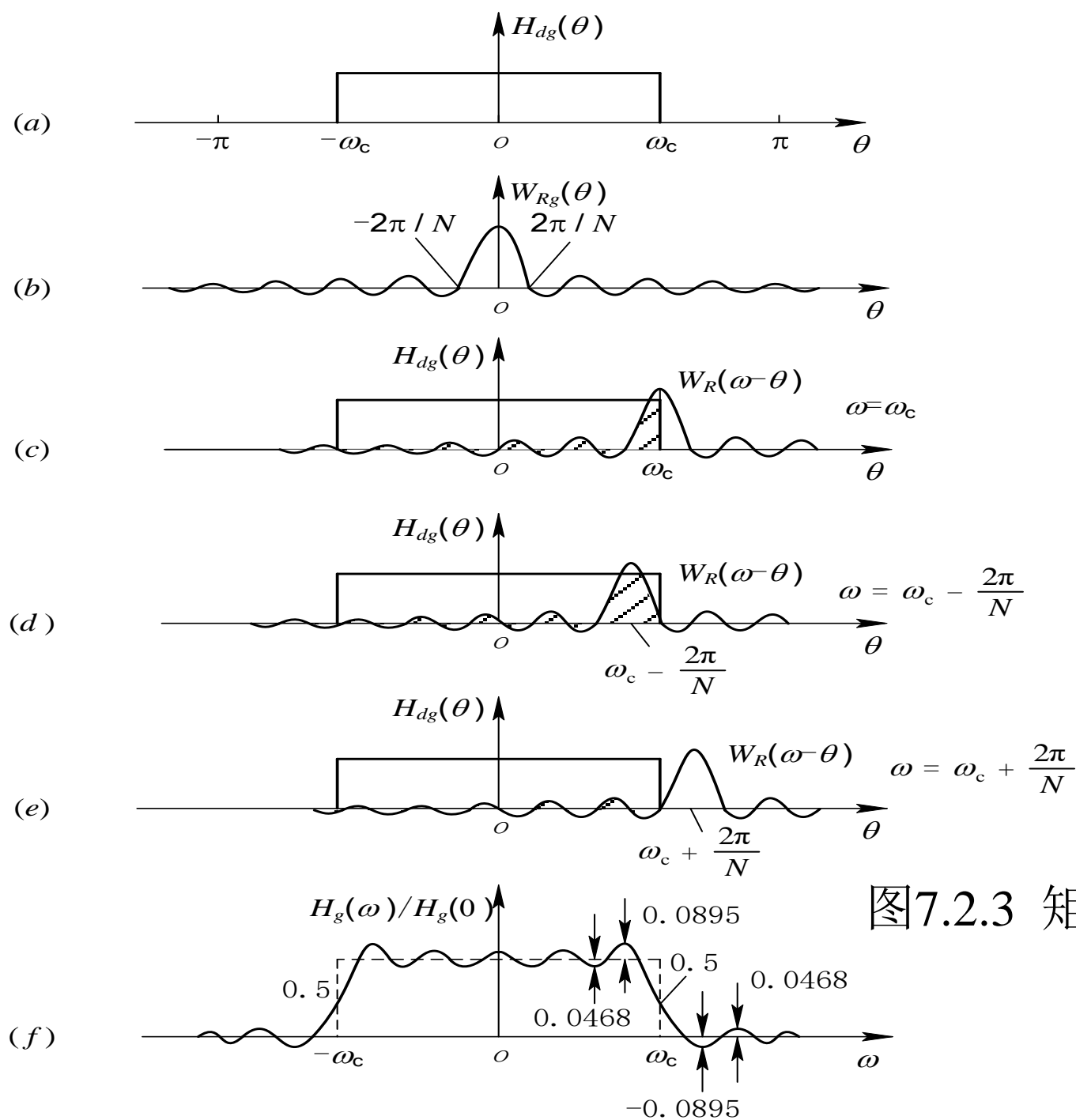


图7.2.3 矩形窗加窗效应

将 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $W_R(e^{j\omega})$ 代入 (7.2.4) 式, 得到:


$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) e^{-j\theta\alpha} W_{Rg}(\omega - \theta) e^{-j(\omega - \theta)\alpha} d\theta \\ &= e^{-j\omega\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$

将 $H(e^{j\omega})$ 写成 $H(e^{j\omega}) = H_g(\omega) e^{-j\omega\alpha}$, 则

$$H_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta \quad (7.2.6)$$

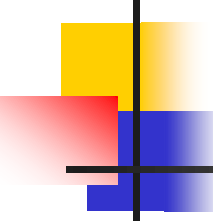
$$H_g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(-\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\theta) d\theta \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_{Rg}(\theta) d\theta$$

$$w_{Rg}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} W_{Rg}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad w_{Rg}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} W_{Rg}(e^{j\omega}) d\omega \approx H_g(0)$$

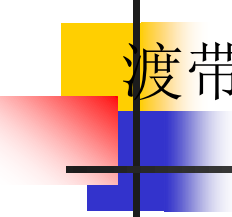


式中 $H_g(\omega)$ 是 $H(e^{j\omega})$ 的幅度特性。该式说明加窗后的滤波器的幅度特性等于理想低通滤波器的幅度特性 $H_{dg}(\omega)$ 与矩形窗幅度特性 $W_{Rg}(\omega)$ 的卷积。

图7.2.3(f)表示 $H_{dg}(\omega)$ 与 $W_{Rg}(\omega)$ 卷积形成的 $H_g(\omega)$ 波形。当 $\omega=0$ 时， $H_g(0)$ 等于图7.2.3(a)与(b)两波形乘积的积分，相当于对 $W_{Rg}(\omega)$ 在 $\pm\omega_c$ 之间一段波形的积分，当 $\omega_c \gg 2\pi/N$ 时，近似为 $\pm\pi$ 之间波形的积分。将 $H(0)$ 值归一化到1。当 $\omega=\omega_c$ 时，情况如图7.2.3(c)所示，当 $\omega_c \gg 2\pi/N$ 时，积分近似为 $W_{Rg}(\theta)$ 一半波形的积分，对 $H_g(0)$ 归一化后的值近似为1/2。




当 $\omega = \omega_c - 2\pi/N$ 时，情况如图7.2.3(d)所示， $W_R(\omega)$ 主瓣完全在区间 $[-\omega_c, \omega_c]$ 之内，而最大的一个负旁瓣移到区间 $[-\omega_c, \omega_c]$ 之外，因此 $H_g(\omega_c - 2\pi/N)$ 有一个最大的正峰。当 $\omega = \omega_c + 2\pi/N$ 时，情况如图7.2.3(e)所示， $W_{Rg}(\omega)$ 主瓣完全移到积分区间外边，由于最大的一个负旁瓣完全在区间 $[-\omega_c, \omega_c]$ 内，因此 $H_g(\omega_c + 2\pi/N)$ 形成最大的负峰。图7.2.3表明， $H_g(\omega)$ 最大的正峰与最大的负峰对应的频率相距 $4\pi/N$ 。通过以上分析可知，对 $h_d(n)$ 加矩形窗处理后， $H_g(\omega)$ 与原理想低通 $H_{dg}(\omega)$ 的差别有以下两点：



(1) 在理想特性不连续点 $\omega=\omega_c$ 附近形成过渡带。过渡带的宽度近似等于 $W_{Rg}(\omega)$ 主瓣宽度 $4\pi/N$ 。

(2) 通带内产生了波纹，最大的峰值在 $\omega_c-2\pi/N$ 处。阻带内产生了余振，最大的负峰在 $\omega_c+2\pi/N$ 处。通带与阻带中波纹的情况与窗函数的幅度谱有关， $W_{Rg}(\omega)$ 旁瓣幅度的大小直接影响 $H_g(\omega)$ 波纹幅度的大小。

以上两点就是对 $h_d(n)$ 用矩形窗截断后，在频域的反映，称为吉布斯效应。这种效应直接影响滤波器的性能。通带内的波纹影响滤波器通带的平稳性，阻带内的波纹影响阻带内的衰减，可能使最小衰减不满足技术指标要求。当然，一般滤波器都要求过渡带愈窄愈好。下面研究如何减少吉布斯效应的影响，设计一个满足要求的FIR滤波器。



直观上，好像增加矩形窗的长度，即加大 N ，就可以减少吉布斯效应的影响。只要分析一下 N 加大时 $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 的变化，就可以看到这一结论不是完全正确。我们讨论在主瓣附近的情况。在主瓣附近，按照式（7.2.5）， $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 可近似为

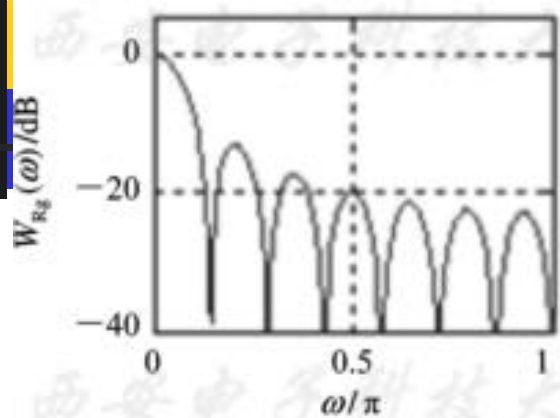
$$W_{\text{Rg}}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\omega / 2} \approx N \frac{\sin x}{x}$$

该函数的性质是随 x 加大（ N 加大），主瓣幅度加高，同时旁瓣也加高，保持主瓣和旁瓣幅度相对值不变；另一方面， N 加大时， $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 的主瓣和旁瓣宽度变窄，波动的频率加快。三种不同长度的矩形窗函数的幅度特性 $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 曲线如图7.2.4(a)、(b)、(c)所示。

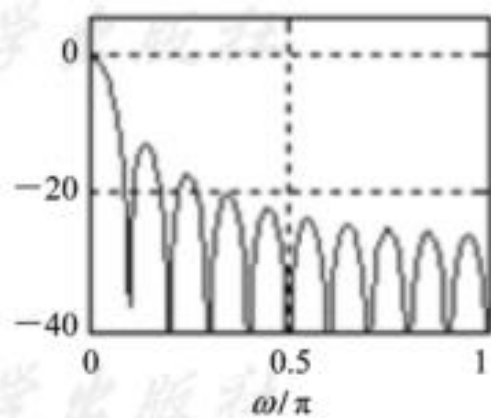


用这三种窗函数设计的FIR滤波器的幅度特性

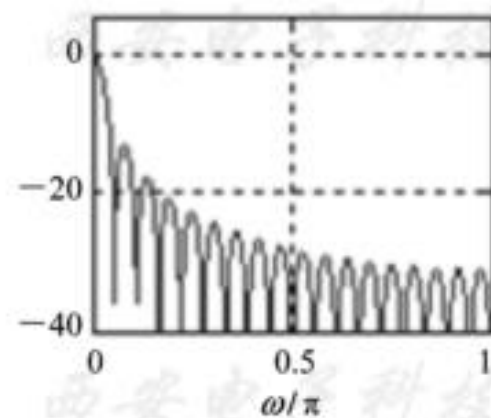
$H_g(\omega)$ 曲线如图7.2.4(d)、(e)、(f) 所示。因此，当 N 加大时， $H_g(\omega)$ 的波动幅度没有多大改善，带内最大肩峰比 $H(0)$ 高8.95%，阻带最大负峰值为 $H(0)$ 的8.95%，使阻带最小衰减只有21 dB。加大 N 只能使 $H_g(\omega)$ 过渡带变窄（过渡带近似为主瓣宽度 $4\pi/N$ ）。因此加大 N ，并不是减小吉布斯效应的有效方法。



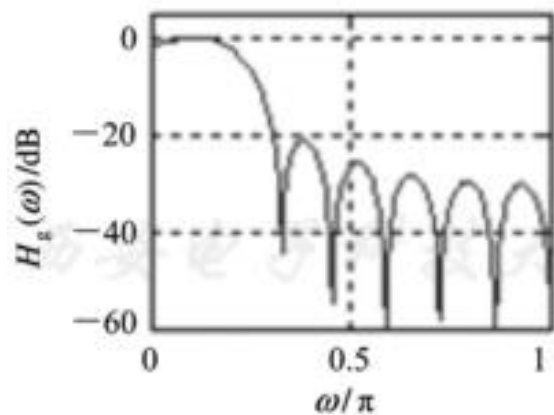
(a) $N=14$



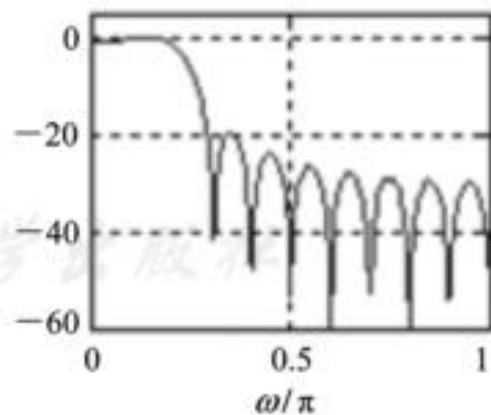
(b) $N=20$



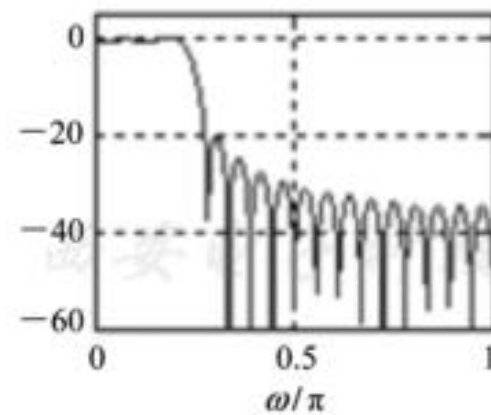
(c) $N=36$



(d) $N=14$

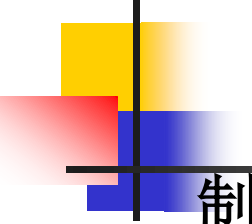


(e) $N=20$



(f) $N=36$

图7.2.4 矩形窗函数长度的影响



以上分析说明，调整窗口长度 N 只能有效地控制过渡带的宽度，而要减少带内波动以及增大阻带衰减，只能从窗函数的形状上找解决问题的方法。构造新的窗函数形状，使其谱函数的主瓣包含更多的能量，相应旁瓣幅度更小。旁瓣的减小可使通带、阻带波动减小，从而加大阻带衰减。但这样总是以加宽过渡带为代价的。下面介绍几种常用的窗函数。



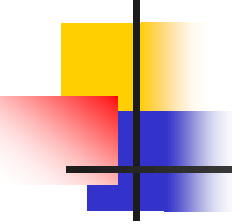
2 典型窗函数介绍

本节主要介绍几种常用窗函数的时域表达式、时域波形、幅度特性函数（衰减用dB计量）曲线，以及用各种窗函数设计的FIR数字滤波器的单位脉冲响应和损耗函数曲线。为了叙述简单，我们把这组波形图简称为“四种波形”。下面均以低通为例， $H_d(e^{j\omega})$ 取理想低通， $\omega_c=\pi/2$ ，窗函数长度 $N=31$ 。

1) 矩形窗（Rectangle Window）

$$w_R(n)=R_N(n)$$

前面已分析过，按照（7.2.5）式，其幅度函数为


$$W_{\text{Rg}}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} \quad (7.2.7)$$

为了描述方便，定义窗函数的几个参数：

旁瓣峰值 α_n ——窗函数的幅频函数 $|W_g(\omega)|$ 的最大旁瓣的最大值相对主瓣最大值的衰减值(dB)；

过渡带宽度 B_g ——用该窗函数设计的FIR数字滤波器（FIRDF）的过渡带宽度；

阻带最小衰减 α_s ——用该窗函数设计的FIRDF的阻带最小衰减。

图7.2.4所示的矩形窗的参数为： $\alpha_n = -13 \text{ dB}$ ； $B_g = 4\pi/N$ ； $\alpha_s = -21 \text{ dB}$ 。



2) 三角形窗 (Bartlett Window)

$$\omega_B(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, 0 \leq n \leq \frac{1}{2}(N-1) \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, \frac{1}{2}(N-1) < n \leq N-1 \end{cases} \quad (7.2.8)$$

其频谱函数为

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\omega N / 4)}{\sin(\omega / 2)} \right]^2 e^{-j \frac{N-1}{2} \omega}$$



其幅度函数为

$$W_{B_g}(\omega) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\omega N / 4)}{\sin(\omega / 2)} \right]^2 \quad (7.2.10)$$

三角窗的四种波形如图7.2.5所示，参数为： $\alpha_n = -25$ dB；

$B_g = 8\pi/N$ ； $\alpha_s = -25$ dB。

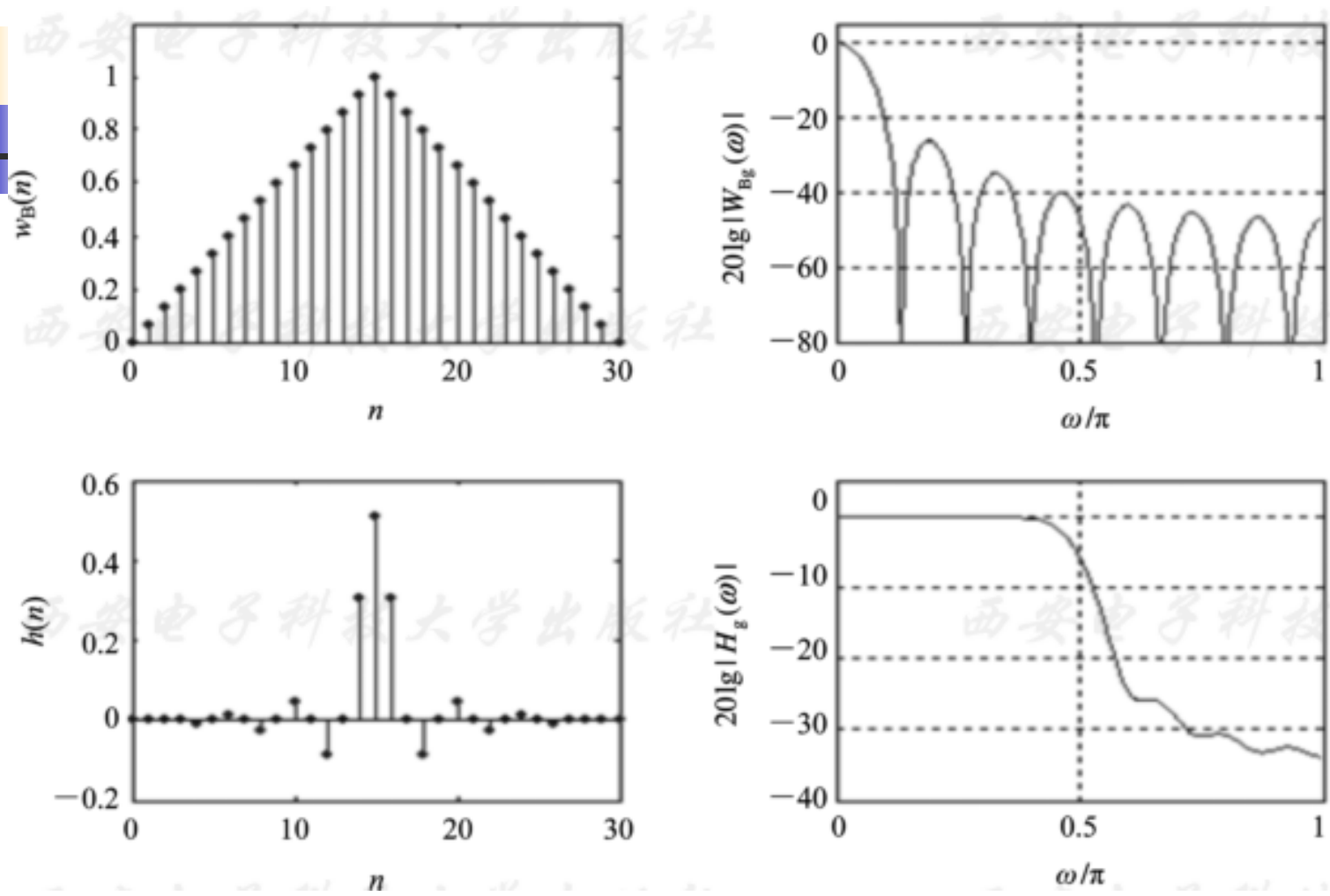



图7.2.5 三角窗的四种波形



3) 汉宁 (Hanning) 窗——升余弦窗

$$w_{\text{Hn}}(n) = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

$$W_{\text{R}}(e^{j\omega}) = FT[R_N(n)] = W_{\text{Rg}}(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \quad (7.2.11)$$

$$\begin{aligned} W_{\text{Hn}}(e^{j\omega}) &= FT[W_{\text{Hn}}(n)] \\ &= \left\{ 0.5W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.25 \left[W_{\text{Rg}} \left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) + W_{\text{Rg}} \left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) \right] \right\} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \\ &= W_{\text{Hng}}(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \end{aligned}$$



当 $N \gg 1$ 时, $N-1 \approx N$

$$W_{\text{Hng}}(\omega) = 0.5W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.25 \left[W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) + W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) \right]$$

汉宁窗的幅度函数 $W_{\text{Hng}}(\omega)$ 由三部分相加, 旁瓣互相对消, 使能量更集中在主瓣中。汉宁窗的四种波形如图7.2.6所示, 参数为: $\alpha_n = -31 \text{ dB}$; $B_g = 8\pi/N$; $\alpha_s = -44 \text{ dB}$ 。

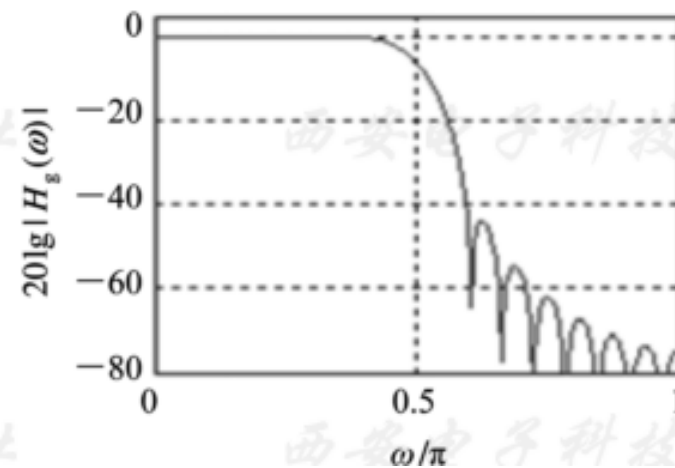
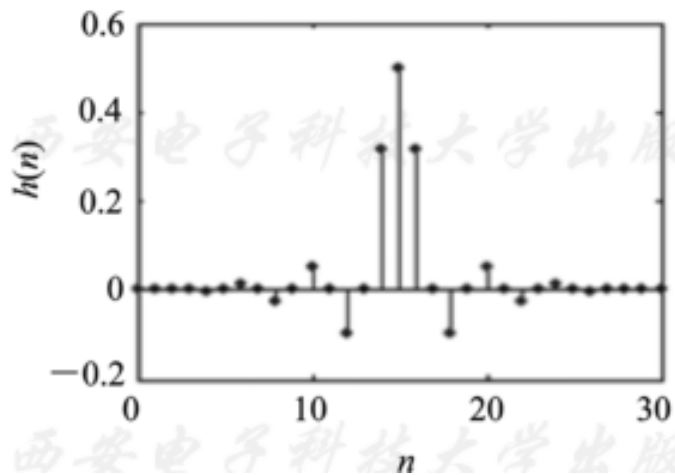
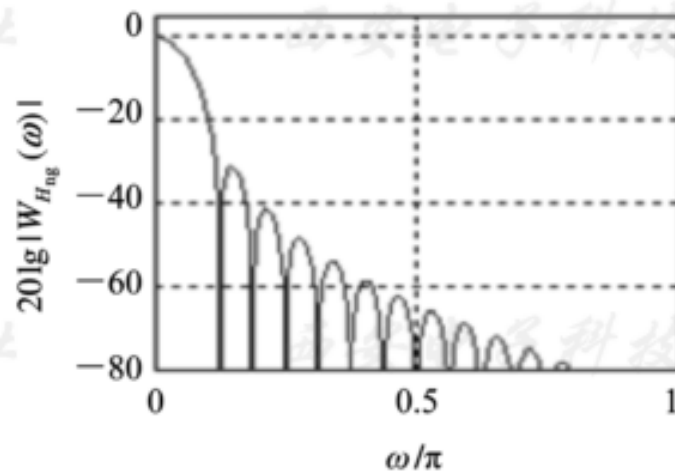
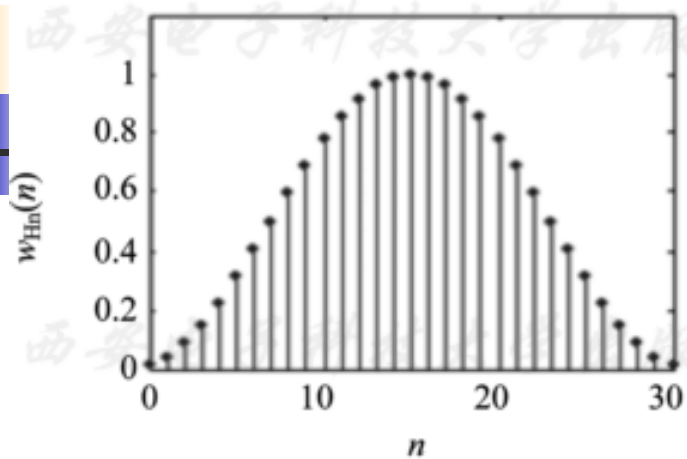


图7.2.6 汉宁窗的四种波形




4) 哈明（Hamming）窗——改进的升余弦窗

$$w_{\text{Hm}}(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n) \quad (7.2.12)$$

其频谱函数 $W_{\text{Hm}}(e^{j\omega})$ 为


$$W_{\text{Hm}}(e^{j\omega}) = 0.54W_{\text{R}}(e^{j\omega}) - 0.23W_{\text{R}}\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right) - 0.23W_{\text{R}}\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right)$$

其幅度函数 $W_{\text{Hmg}}(\omega)$ 为


$$W_{\text{Hmg}}(\omega) = 0.54W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)$$

当 $N \gg 1$ 时，其可近似表示为

$$W_{\text{Hmg}}(\omega) \approx 0.54W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)$$



这种改进的升余弦窗，能量更加集中在主瓣中，主瓣的能量约占99.96%，瓣峰值幅度为40 dB，但其主瓣宽度和汉宁窗的相同，仍为 $8\pi/N$ 。可见哈明窗是一种高效窗函数，所以MATLAB窗函数设计函数的默认窗函数就是哈明窗。哈明窗的四种波形如图7.2.7所示，参数为： $\alpha_n = -41$ dB； $B_g = 8\pi/N$ ； $\alpha_s = -53$ dB。

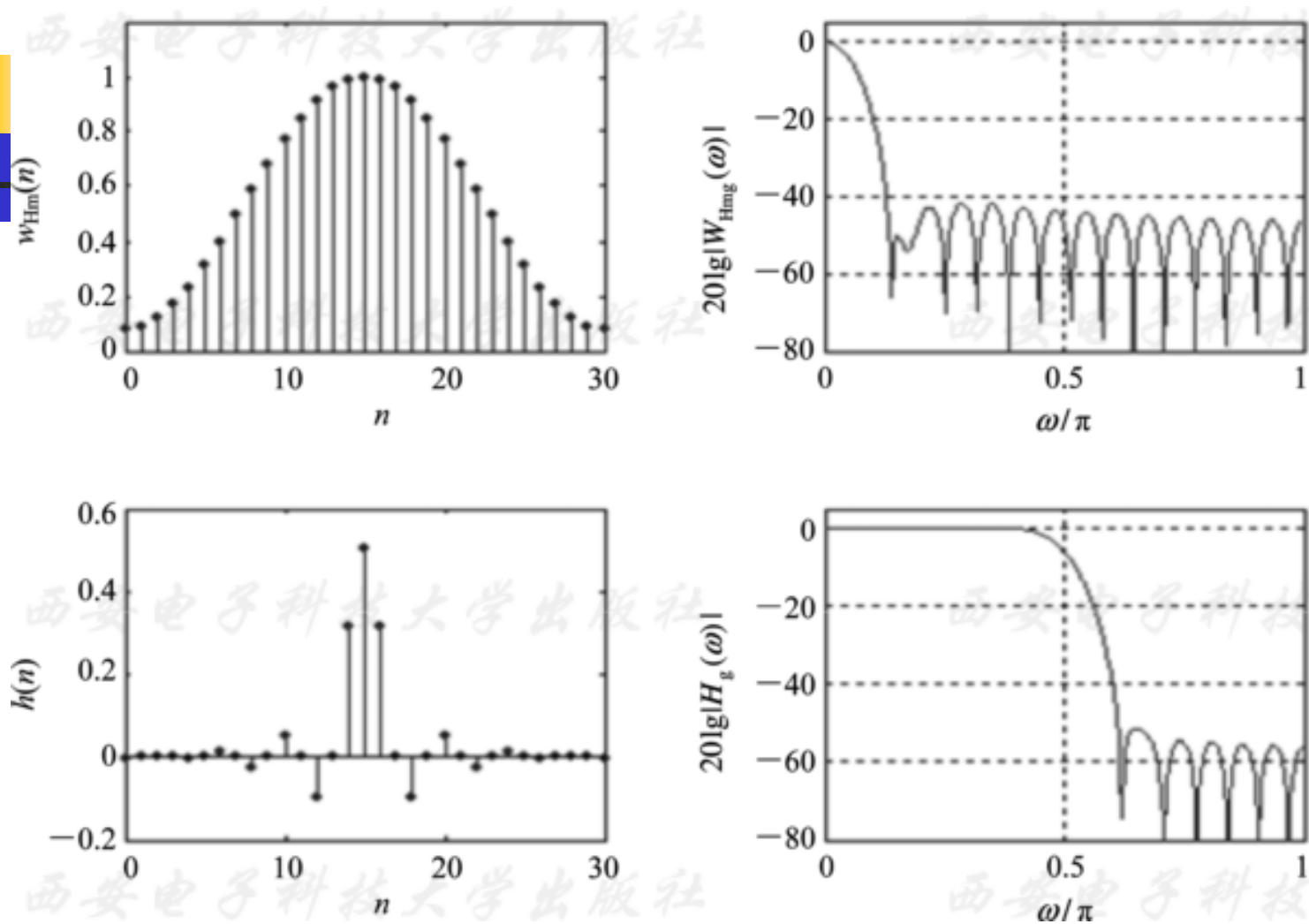
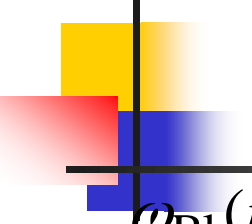


图7.2.7 哈明窗的四种波形

5) 布莱克曼 (Blackman) 窗


$$w_{\text{Bl}}(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1} \right] R_N(n) \quad (7.2.13)$$

其频谱函数为

$$W_{\text{Bl}}(e^{j\omega}) = 0.42W_{\text{R}}(e^{j\omega}) - 0.25 \left[W_{\text{R}}(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)}) + W_{\text{R}}(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)}) \right] \\ + 0.04 \left[W_{\text{R}}(e^{j\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right)}) + W_{\text{R}}(e^{j\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right)}) \right]$$



其幅度函数为

$$W_{\text{Blg}}(\omega) = 0.42W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.25 \left[W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \\ + 0.04 \left[W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right) \right] \quad (7.2.14)$$

这样其幅度函数由五部分组成，它们都是移位不同，且幅度也不同的 $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 函数，使旁瓣再进一步抵消。旁瓣峰值幅度进一步增加，其幅度谱主瓣宽度是矩形窗的3倍。布莱克曼窗的四种波形如图7.2.8所示，参数为： $\alpha_n = -57 \text{ dB}$ ； $\Delta B = 12\pi/N$ ； $\alpha_s = -74 \text{ dB}$ 。

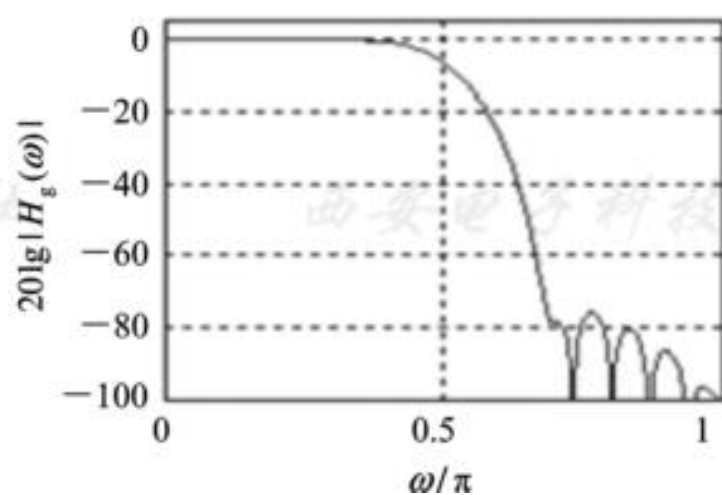
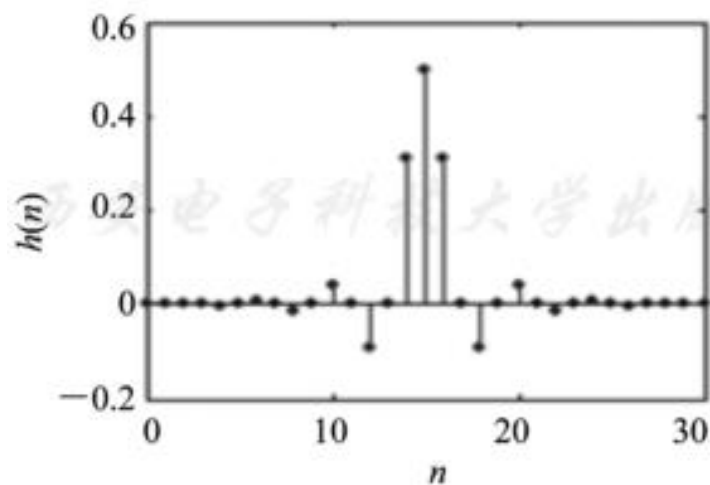
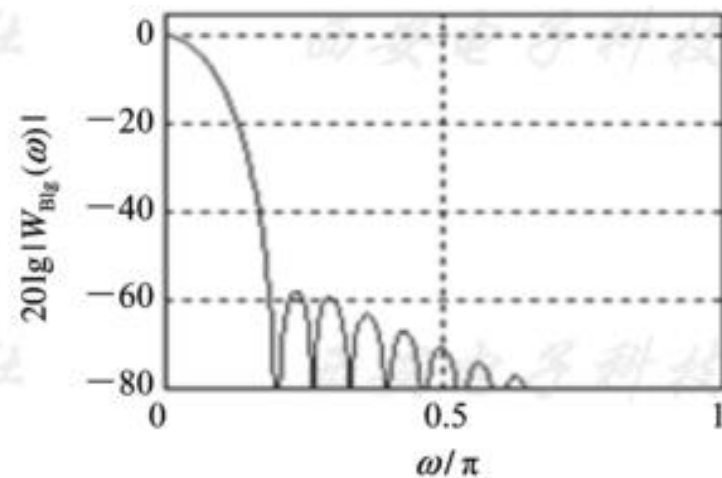
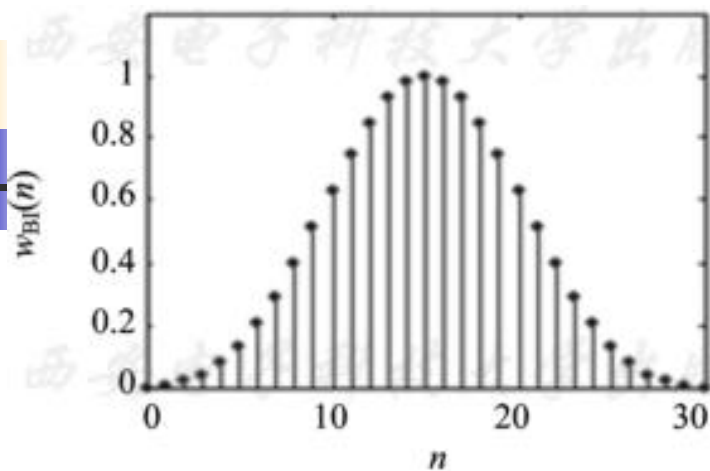


图7.2.8 布莱克曼窗的四种波形



6) 凯塞—贝塞尔窗 (Kaiser-Bessel Window)

以上五种窗函数都称为参数固定窗函数，每种窗函数的旁瓣幅度都是固定的。凯塞—贝塞尔窗是一种参数可调的窗函数，是一种最优窗函数。

$$\omega_k(n) = \frac{I_0(\beta)}{I_0(\alpha)}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.2.15)$$

式中

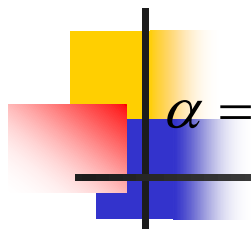
$$\beta = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2}$$



$I_0(\beta)$ 是零阶第一类修正贝塞尔函数，可用下面级数计算：

$$I_0(\beta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^k \right)^2$$

一般 $I_0(\beta)$ 取15~25项，便可以满足精度要求。 α 参数可以控制窗的形状。一般 α 加大，主瓣加宽，旁瓣幅度减小，典型数据为 $4 < \alpha < 9$ 。当 $\alpha = 5.44$ 时，窗函数接近哈明窗。 $\alpha = 7.865$ 时，窗函数接近布莱克曼窗。在设计指标给定时，可以调整 α 值，使滤波器阶数最低，所以其性能最优。凯塞（Kaiser）给出的估算 β 和滤波器阶数 N 的公式如下：



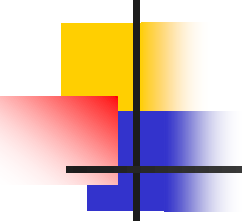
$$\alpha = \begin{cases} 0.112(\alpha_s - 8.7), & \alpha_s > 50 \text{ dB} \\ 0.5842(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_s - 21), & 21 < \alpha_s < 50 \text{ dB} \\ 0, & \alpha_s < 21 \end{cases}$$

(7.2.16)

$$N = \frac{\alpha_s - 8}{2.285B_t}$$

(7.2.17)

式中， $B_t=|\omega_s-\omega_p|$ ，是数字滤波器过渡带宽度。应当注意，因为式（7.2.17）为阶数估算，所以必须对设计结果进行检验。另外，凯塞窗函数没有独立控制通带波纹幅度，实际中通带波纹幅度近似等于阻带波纹幅度。凯塞窗的幅度函数为


$$W_{kg}(\omega) = w_k(0) + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} w_k(n) \cos \omega n$$

(7.2.18)

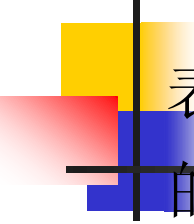
对 α 的8种典型值，将凯塞窗函数的性能列于表7.2.1中，供设计者参考。由表可见，当 $\alpha=5.568$ 时，各项指标都好于哈明窗。6种典型窗函数基本参数归纳在表7.2.2中，可供设计时参考。

表7.2.1 凯塞窗参数对滤波器的性能影

α	过渡带宽	通带波纹/dB	阻带最小衰减/dB
2.120	$3.00\pi/N$	± 0.27	-30
3.384	$4.46\pi/N$	± 0.0864	-40
4.538	$5.86\pi/N$	± 0.0274	-50
5.568	$7.24\pi/N$	$\pm 0.008\ 68$	-60
6.764	$8.64\pi/N$	$\pm 0.002\ 75$	-70
7.865	$10.0\pi/N$	$\pm 0.000\ 868$	-80
8.960	$11.4\pi/N$	$\pm 0.000\ 275$	-90
10.056	$10.8\pi/N$	$\pm 0.000\ 087$	-100

表7.2.2 6种窗函数的基本参数

窗函数类型	旁瓣峰值 α_n /dB	过渡带宽度 B_t		阻带最小衰减 α_s /dB
		近似值	精确值	
矩形窗	-13	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	-21
三角窗	-25	$8\pi/N$	$6.1\pi/N$	-25
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	-44
哈明窗	-41	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	$11\pi/N$	-74
凯塞窗($\beta = 7.865$)	-57		$10\pi/N$	-80



表中过渡带宽和阻带最小衰减是用对应的窗函数设计的FIR数字滤波器的频率响应指标。随着数字信号处理的不断发展，学者们提出的窗函数已多达几十种，除了上述6种窗函数外，比较有名的还有Chebyshev窗、Gaussian窗^[5,6]。MATLAB信号处理工具箱提供了14种窗函数的产生函数，下面列出上述6种窗函数的产生函数及其调用格式：



`wn=rectwin (N)`

%列向量`wn`中返回长度为`N`的矩形窗函数`w(n)`

`wn=bartlett(N)`

%列向量`wn`中返回长度为`N`的三角窗函数`w(n)`

`wn=hanning(N)`

%列向量`wn`中返回长度为`N`的汉宁窗函数`w(n)`

`wn=hamming(N)`

%列向量`wn`中返回长度为`N`的哈明窗函数`w(n)`

`wn=blackman(N)`

%列向量`wn`中返回长度为`N`的布莱克曼窗函数`w(n)`

`wn=kaiser(N, beta)`

%列向量`wn`中返回长度为`N`的凯塞—贝塞尔窗函数`w(n)`



3 用窗函数法设计FIR滤波器的步骤

用窗函数法设计FIR滤波器的步骤如下：

(1) 根据对过渡带及阻带衰减的指标要求，选择窗函数的类型，并估计窗口长度 N 。先按照阻带衰减选择窗函数类型。原则是在保证阻带衰减满足要求的情况下，尽量选择主瓣窄的窗函数。然后根据过渡带宽度估计窗口长度 N 。待求滤波器的过渡带宽度 B_t 近似等于窗函数主瓣宽度，且近似与窗口长度 N 成反比， $N \approx A/B_t$ ， A 取决于窗口类型，例如，矩形窗的 $A=4\pi$ ，哈明窗的 $A=8\pi$ 等，参数 A 的近似和精确取值参考表7.2.2。



(2) 构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ ，即

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$$

对所谓的“标准窗函数法”，就是选择 $H_d(e^{j\omega})$ 为线性相位理想滤波器（理想低通、理想高通、理想带通、理想带阻）。以低通滤波器为例， $H_{dg}(\omega)$ 应满足：

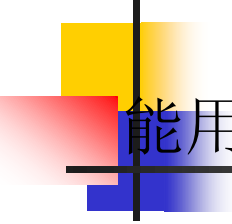
$$H_{dg}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (7.2.19)$$

由图7.2.2知道，理想滤波器的截止频率 ω_c 近似位于最终设计的 FIRDF 的过渡带的中心频率点，幅度函数衰减一半（约-6 dB）。所以如果设计指标给定通带边界频率和阻带边界频率 ω_p 和 ω_s ，一般取

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} \quad (7.2.20)$$

(3) 计算 $h_d(n)$ 。如果给出待求滤波器的频响应函数为 $H_d(e^{j\omega})$ ，那么单位脉冲响应应用下式求出：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (7.2.21)$$



如果 $H_d(e^{j\omega})$ 较复杂，或者不能用封闭公式表示，则不能用上式求出 $h_d(n)$ 。我们可以对 $H_d(e^{j\omega})$ 从 $\omega=0$ 到 $\omega=2\pi$

采样 M 点，采样值为 $H_{dM}(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$ ， $k=0, 1, 2, \dots, M-$ 进行 M 点IDFT(IFFT)，得到：

$$h_{dM}(n) = \text{IDFT}[H_{dM}(k)]_M \quad (7.2.22)$$

根据频域采样理论， $h_{dM}(n)$ 与 $h_d(n)$ 应满足如下关系：

$$h_{dM}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n + rM) R_M(n)$$



因此，如果 M 选得较大，可以保证在窗口内 $h_{dM}(n)$ 有效逼近 $h_d(n)$ 。

对（7.2.19）式给出的线性相位理想低通滤波器作为 $H_d(e^{j\omega})$ ，由（7.2.2）式求出单位脉冲响应 $h_d(n)$ ：

$$h_d(n) = \frac{\sin(\omega_c(n - \alpha))}{\pi(n - \alpha)}$$

为保证线性相位特性， $\alpha = (N - 1)/2$ 。

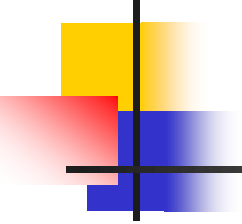
4) 加窗得到设计结果： $h(n) = h_d(n)w(n)$ 。



【例7.2.1】 用窗函数法设计线性相位高通FIRDF,

要求通带截止频率 $\omega_p=\pi/2$ rad, 阻带截止频率 $\omega_s=\pi/4$ rad, 通带最大衰减 $\alpha_p=1$ dB, 阻带最小衰减 $\alpha_s=40$ dB。

解 (1) 选择窗函数 $w(n)$, 计算窗函数长度 N 。已知阻带最小衰减 $\alpha_s=40$ dB, 由表(7.2.2)可知汉宁窗和哈明窗均满足要求, 我们选择汉宁窗。本例中过渡带宽度 $B_t \leq \omega_p - \omega_s = \pi/4$, 汉宁窗的精确过渡带宽度 $B_t = 6.2\pi/N$, 所以要求 $B_t = 6.2\pi/N \leq \pi/4$, 解之得 $N \geq 24.8$ 。对高通滤波器 N 必须取奇数, 取 $N=25$ 。由式(7.2.11), 有



$$w(n) = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi n}{12} \right) \right] R_{25}(n)$$

(2) 构造 $H_d(e^{j\omega})$:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

式中

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 12, \quad \omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = \frac{3\pi}{8}$$




(3) 求出 $h_d(n)$:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \right) \\ &= \frac{\sin \pi(n - \tau)}{\pi(n - \tau)} - \frac{\sin \omega_c(n - \tau)}{\pi(n - \tau)} \end{aligned}$$

将 $\tau=12$ 代入得

$$h_d(n) = \delta(n - 12) - \frac{\sin[3\pi(n - 12)/8]}{\pi(n - 12)}$$



$\delta(n-12)$ 对应全通滤波器, $\frac{\sin[3\pi(n-12)/8]}{\pi(n-12)}$ 是截止频率为

$3\pi/8$ 的理想低通滤波器的单位脉冲响应, 二者之差就是理想高通滤波器的单位脉冲响应。这就是求理想高通滤波器的单位脉冲响应的另一个公式。

(4) 加窗:

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \left\{ \delta(n-12) - \frac{\sin[3\pi(n-12)/8]}{\pi(n-12)} \right\} \left[0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{12}\right) \right] R_{25}(n)$$

4 窗函数法的MATLAB设计函数简介

实际设计时一般用MATLAB工具箱函数。可调用工具箱函数fir1实现窗函数法设计步骤（2）～（4）的解题过程。

（1）**fir1**是用窗函数法设计线性相位FIR数字滤波器的工具箱函数，以实现线性相位FIR数字滤波器的标准窗函数法设计。这里的所谓“标准”，是指在设计低通、高通、带通和带阻FIR滤波器时， $H_d(e^{j\omega})$ 分别表示相应的线性相位理想低通、高通、带通和带阻滤波器的频率响应函数。因而将所设计的滤波器的频率响应称为标准频率响应。




Fir1的调用格式及功能:

· $hn=fir1(M, wc)$, 返回6 dB截止频率为 wc 的 M 阶
(单位脉冲响应 $h(n)$ 长度 $N=M+1$) FIR低通 (wc 为标
量) 滤波器系数向量 hn , 默认选用哈明窗。滤波器单
位脉冲响应 $h(n)$ 与向量 hn 的关系为

$$h(n)=hn(n+1) \quad n=0, 1, 2, \cdots, M$$

而且满足线性相位条件: $h(n)=h(N-1-n)$ 。 其中
 wc 为对 π 归一化的数字频率, $0 \leq wc \leq 1$ 。

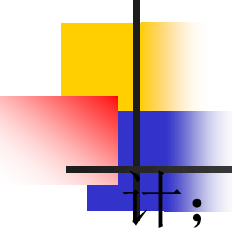
当 $wc=[wcl, wcu]$ 时, 得到的是带通滤波器, 其
-6 dB通带为 $wcl \leq \omega \leq wcu$ 。



· $h_n = \text{fir1}(M, w_c, \text{'ftype'})$, 可设计高通和带阻FIR滤波器。当 $\text{ftype} = \text{high}$ 时, 设计高通FIR滤波器; 当 $\text{ftype} = \text{stop}$, 且 $w_c = [w_{cl}, w_{cu}]$ 时, 设计带阻FIR滤波器。

应当注意, 在设计高通和带阻FIR滤波器时, 阶数 M 只能取偶数 ($h(n)$ 长度 $N = M + 1$ 为奇数)。不过, 当用户将 M 设置为奇数时, fir1 会自动对 M 加1。

· $h_n = \text{fir1}(M, w_c, \text{window})$, 可以指定窗函数向量 window 。如果缺省 window 参数, 则 fir1 默认为哈明窗。
例如:



`hn=fir1(M, wc, bartlett(M+1))`，使用Bartlett窗设计；

`hn =fir1(M, wc, blackman(M+1))`，使用blackman窗设计；

`hn=fir1(M, wc, 'ftype', window)`，通过选择wc、ftype和window参数（含义同上），可以设计各种加窗滤波器。

(2) `fir2`为任意形状幅度特性的窗函数法设计函数，用`fir2`设计时，可以指定任意形状的 $H_d(e^{j\omega})$ ，它实质是一种频率采样法与窗函数法的综合设计函数。主要用于设计幅度特性形状特殊的滤波器（如数字微分器和多带滤波器等）。用`help`命令查阅其调用格式及调用参数的含义。

例7.2.1 的设计程序ep721.m如下:

%ep721.m: 例7.2.1 用窗函数法设计线性相位高通

FIR数字滤波器

wp=pi/2; ws=pi/4;

Bt=wp-ws; %计算过渡带宽度

N0=ceil(6.2*pi/Bt); %根据表7.2.2汉宁窗计算所需h(n)长度N0, ceil(x)取大于等于x的最小整数

N=N0+mod(N0+1, 2); %确保h(n)长度N是奇数

wc=(wp+ws)/2/pi; %计算理想高通滤波器6dB截止频率(关于 π 归一化)

hn=fir1(N-1, wc, 'high', hanning(N));

%调用fir1计算高通FIR数字滤波器的h(n)

%略去绘图部分



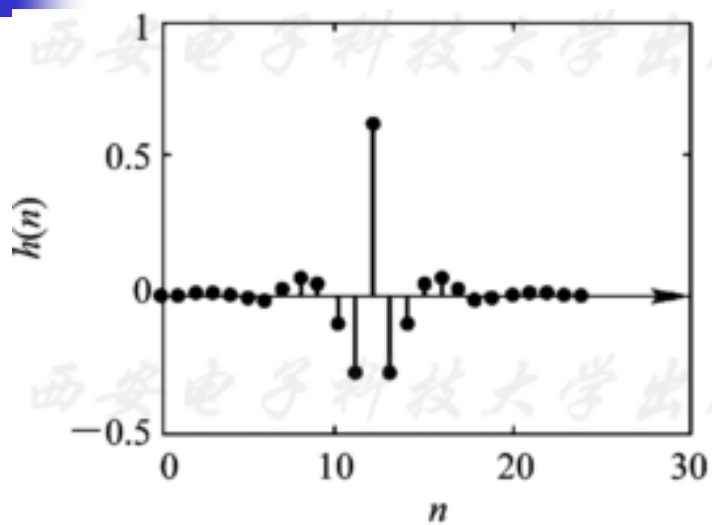
运行程序得到 $h(n)$ 的25个值:

$h(n) = [$

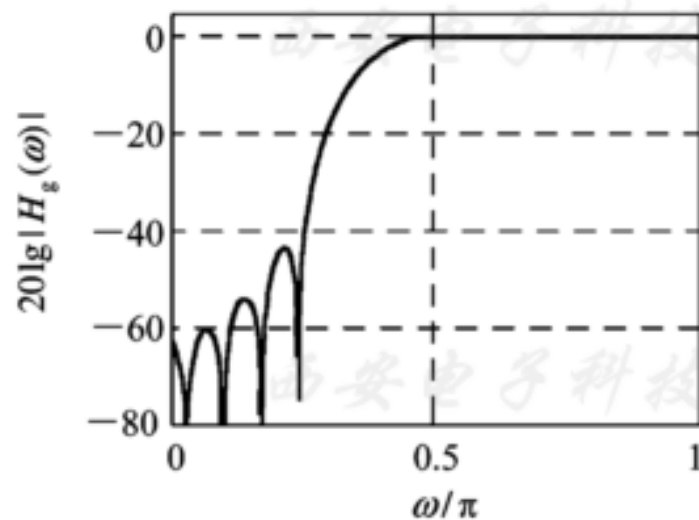
-0.0004	-0.0006	0.0028	0.0071
-0.0000	-0.0185	-0.0210	
	0.0165	0.0624	0.0355
		0.1061	
-0.2898	0.6249	-0.2898	
	-0.1061	0.0355	0.0624
	0.0165		
-0.0210	0.0185	-0.0000	
	0.0071	0.0028	-0.0006
		-0.0004	

$]$

高通FIR数字滤波器的 $h(n)$ 及损耗函数如图7.2.9所示。

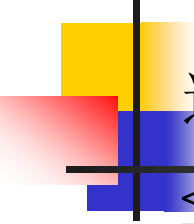


(a) $h(n)$ 波形



(b) 损耗函数曲线

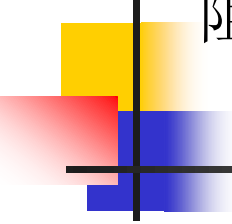
图7.2.9 高通FIR数字滤波器的 $h(n)$ 波形及损耗函数曲线



【例7.2.2】 对模拟信号进行低通滤波处理，要求通带 $0 \leq f \leq 1.5$ kHz内衰减小于1 dB，阻带 2.5 kHz $\leq f \leq \infty$ 上衰减大于40 dB。希望对模拟信号采样后用线性相位FIR数字滤波器实现上述滤波，采样频率 $F_s = 10$ kHz。用窗函数法设计满足要求的FIR数字低通滤波器，求出 $h(n)$ ，并画出损耗函数曲线。为了降低运算量，希望滤波器阶数尽量低。

解 （1）确定相应的数字滤波器指标：
通带截止频率为

$$\omega_p = \frac{2\pi f_p}{F_s} = 2\pi \times \frac{1500}{10000} = 0.3\pi$$



阻带截止频率为


$$\omega_s = \frac{2\pi f_s}{F_s} = 2\pi \times \frac{2500}{10000} = 0.5\pi$$

阻带最小衰减为

$$\alpha_s = 40 \text{ dB}$$

(2) 用窗函数法设计FIR数字低通滤波器，为了降低阶数选择凯塞窗。根据式（7.2.16）计算凯塞窗的控制参数为

$$\alpha = 0.5842(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_s - 21) = 3.3953$$



指标要求过渡带宽度 $B_t=\omega_s-\omega_p=0.2\pi$ ，根据式（7.2.17）计算滤波器阶数为

$$M = \frac{\alpha_s - 8}{2.285 B_t} = \frac{40 - 8}{2.285 \times 0.2\pi} = 22.2887$$

取满足要求的最小整数 $M=23$ 。所以 $h(n)$ 长度为 $N=M+1=24$ 。但是，如果用汉宁窗， $h(n)$ 长度为 $N=40$ 。理想低通滤波器的通带截止频率 $\omega_c=(\omega_s+\omega_p)/2=0.4\pi$ ，所以由式（7.2.2）和式（7.2.3），得到：

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \frac{\sin[0.4\pi(n - \tau)]}{\pi(n - \tau)} w(n) \quad , \quad \tau = \frac{N-1}{2} = 11.5$$

式中， $w(n)$ 是长度为24（ $\alpha=3.395$ ）的凯塞窗函数。



实现本例设计的MATLAB程序为ep722.m。

%ep722.m: 例7.2.2 用凯塞窗函数设计线性相位低通

FIR数字滤波器

$f_p=1500; f_s=2500; r_s=40;$

$w_p=2*\pi*f_p/F_s; w_s=2*\pi*f_s/F_s;$

$B_t=w_s-w_p;$ % 计算过渡带宽度

$\alpha=0.5842*(r_s-21)^{0.4}+0.07886*(r_s-21);$ % 根据
(7.2.16)式计算kaiser窗的控制参数 α

$N=\text{ceil}((r_s-8)/2.285/B_t);$ % 根据(7.2.17)式计算kaiser窗
所需阶数N

$wc=(wp+ws)/2/\pi$; % 计算理想高通滤波器通带截止
频率(关于 π 归一化)

$hn=fir1(N,wc,kaiser(N+1,alph))$; % 调用kaiser计算低通
FIRDF的 $h(n)$ % 以下绘图部分省去

运行程序得到 $h(n)$ 的24个值:

$h(n)=$ [0.0039 0.0041 -0.0062 -0.0147
0.0000 0.0286 0.0242
-0.0332 -0.0755 0.0000 0.1966
0.3724 0.3724 0.1966
-0.0000 -0.0755 -0.0332 0.0242
0.0286 0.0000 -0.0147
-0.0062 0.0041 0.0039]

低通FIR数字滤波器的 $h(n)$ 波形和损耗函数曲线

如图7.2.10所示。

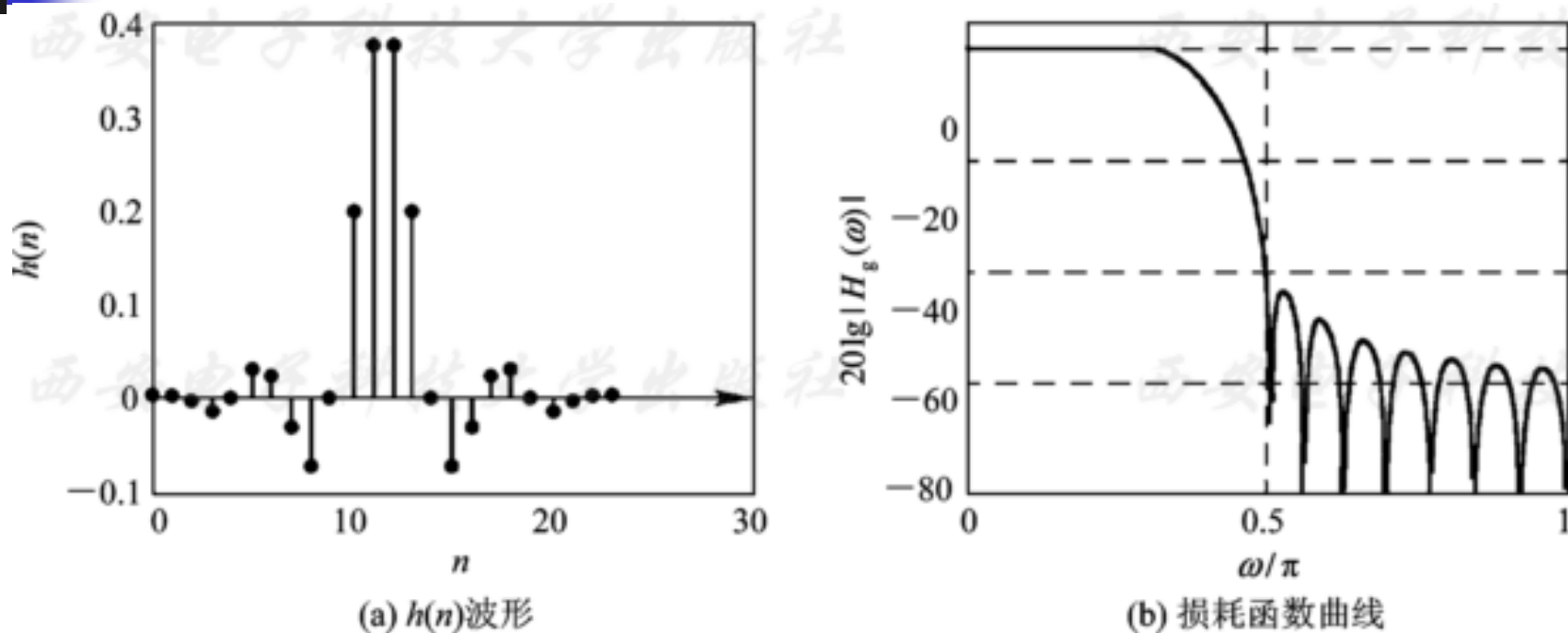


图7.2.10 低通FIR数字滤波器的 $h(n)$ 波形及损耗函数曲线

设计FIR滤波器并滤波的主要步骤：

(1) 确定指标： ω_s 、 ω_p 、 α_s 需要将模拟频率对 F_s 归一化，

$$\omega_s = \frac{f_s}{F_s} \times 2\pi \quad \omega_p = \frac{f_p}{F_s} \times 2\pi, \quad F_s \text{ 为采样率。}$$

(2) 确定过度带宽度： $Bt = |\omega_s - \omega_p|$

(3) 选窗，根据 α_s

(4) 求窗长度： $N0 = \text{ceil}(6.2 * \pi / Bt)$ 这里以汉宁窗为例

$$N1 = N0 + \text{mod}(N0 + 1, 2)$$

(5) 求6dB截止频率： $\omega_c = (\omega_s + \omega_p) / 2$

(6) 计算FIR滤波器系数向量： $hn = \text{fir1}(N1 - 1, \omega_c / \pi, \text{'high / low'}, \text{hanning}(N1))$

(7) 绘制滤波器频率特性波特图： $\text{freqz}(hn, 1)$

(8) 滤波： $y = \text{filter}(hn, 1, x)$ x 为输入时域信号， y 为滤波后时域信号