线 性 代 数

（第二版）

陆少华　主编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

书名:线性代数

作者:陆少华

出版社:上海交通大学出版社

ISBN:7-313-04064-4/0151.2

出版日期：2005

定价：18.00元

内 容 提 要

本书参照高等工业学校《工程数学教学大纲》编写。内容包括:行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间。每章配有例题和习题。

本书可供高等院校理工类与经济类各专业用作教材,也可供网络教学使用,并可供工科技术人员参考和自学者选用。

前　　言

线性代数是一门理工科院校学生必修的数学基础课程。随着科学技术的普及与发展,线性代数的概念和方法越来越广泛地得到应用。本书是在《线性代数》(1988 年上海交通大学出版社出版)的基础上,参照高等工业学校《工程数学教学大纲》,并根据教学中积累的经验及意见重新编写而成的。

本书的编写力求做到科学性与可读性相结合,由浅入深,循序渐进,其特点是观点新颖、选材先进、概念清晰、推理简捷、方法独创。本书内容包括:行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间。书中还配备了丰富的例题和习题,学生通过学习和练习,可掌握线性代数的基本概念和方法。

本书可供高等院校理工类与经济类各专业用作教材,也可供网络教学使用,并可供工科技术人员参考和自学者选用。

本书由陆少华主编。由于成书时间仓促,书中难免有疏忽和错误之处,恳请广大读者和使用本书的老师、同学批评指正。

编　者

2003 年 5 月

目　　录

第 1 章　行列式

本章主要介绍行列式的定义、性质与计算方法。

1.1　连加号 $\sum$

数学中,为了方便常把 n 个数连加的式子 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 简单地记成 $\sum_{i=1}^{n} a_i$。$\sum$ 称为连加号,a_i 表示一般项,i 的取值从 1 到 n。例如:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i;$$

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{i=0}^{n} a^i;$$

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i。$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 中的 i 称为求和指标,它与求和结果是没有关系的,也可用其他字母代替。例如:$\sum_{i=1}^{n} i$ 与 $\sum_{k=1}^{n} k$ 都表示同一连加式 $1 + 2 + \cdots + n$。

求和指标可以选用任意字母,但不能选用求和式中已出现过的其他字母。例如:

$k + 2k + \cdots + nk$ 可以写成 $\sum_{i=1}^{n}(ik)$,但不能写成 $\sum_{k=1}^{n}(kk)$,后

者代表 $1^2+2^2+\cdots+n^2$，与原式含义不同。

求和号有如下性质：

(1) $k\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(ka_i)$；

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$；

(3) $\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\right)$。

利用数的加、乘运算满足分配律，即推得(1)；再由数的加法运算满足交换律与结合律，即推得(2)；(3)的证明如下：

等式左边 $=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})$；

等式右边 $=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{sj})$。

略加观察，容易发现，左、右两边都表示下列阵式中 $s\times n$ 个数的总和，等式左边表示先按行求和，等式右边表示先按列求和，因而相等。

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}, & \cdots, & a_{1j}, & \cdots, & a_{1n} & ; \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & \\
a_{i1}, & \cdots, & a_{ij}, & \cdots, & a_{in} & ; \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & \\
a_{s1}, & \cdots, & a_{sj}, & \cdots, & a_{sn} & 。
\end{array}
$$

为了方便，可把连加式 $1+2+3+5+6+7+8$ 写成 $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 4}}^{8} i$。一般规则是把求和指标需满足的附加条件写在连加号下。例如：

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq 3}}^{5}\frac{1}{k-3}=\frac{1}{1-3}+\frac{1}{2-3}+\frac{1}{4-3}+\frac{1}{5-3}\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij};$$

$$\sum_{1\leq j<i\leq n}(a_i - a_j) = \sum_{i=2}^{n}(a_i - a_1) + \sum_{i=3}^{n}(a_i - a_2) + \cdots$$

$$+ \sum_{i=n}(a_i - a_{n-1})。$$

1.2 数

1.2.1 数集的概念

由复数组成的集合常称为数集。常见数集有:

(1) 正整数全体所成的集合,用 Z^+ 表示,即

$$\mathrm{Z}^+ = \{1,2,3,\cdots\};$$

(2) 整数全体所成的集合,用 Z 表示,即

$$\mathrm{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\};$$

(3) 有理数全体所成的集合,用 Q 表示,即

$$\mathrm{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a, b\in \mathrm{Z}, b \neq 0\right\};$$

(4) 实数全体所成的集合,用 R 表示;

(5) 复数全体所成的集合,用 C 表示,即

$$\mathrm{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b\in \mathrm{R}\}。$$

这些例子中,我们用了集合的两种常用表示法,即列举法((1)与(2))和特性法((3)与(5))。

1.2.2 数环

定义 1.1 非空数集 R 叫数环,如果对任意 $a, b\in R$, 必

$a+b, a-b, ab\in R$。即数环对数的加、减、乘 3 种运算封闭：数环包含了两个数的同时，包含了它们的和、差与积。

因为数环 R 非空，R 中有某个数 a，从而 $0=a-a\in R$，即数环包含数零。

单个数零成一数环。数集 Z, Q, R, C 都是数环。

由于 $1-2\notin Z^+$，因而 Z^+ 不是数环。

1.2.3 数域

定义 1.2 数环 P 称为数域，如果 $0,1\in P$，且对任意 $a,b\in P$，$b\neq 0$，必 $\frac{a}{b}\in P$，即数域对数的加、减、乘、除四种运算封闭。

例 1.1 Q, R, C 都是数域。

例 1.2 证明 $Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in \mathrm{Q}\}$是数域。

证 若 $a+b\sqrt{2}$ 与 $c+d\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2})$，则

$$
\begin{aligned}
&(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})\\
=&(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2}),\\
&(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\\
=&(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2}),
\end{aligned}
$$

当 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}&=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}\\
&=\frac{1}{c^2-2d^2}[(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}]\in Q(\sqrt{2}),
\end{aligned}
$$

故 $Q(\sqrt{2})$ 是数域。

命题 1.1 若 P 是数域，则

$$P \quad \mathrm{Q},$$

即任意数域都包含了有理数域。

证 $0, 1 \in P$,从而 $n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{个}} \in P$。

$$-n = 0 - n \in P,$$

故

$$P \quad Z。$$

任意 $a, b \in Z \quad P, b \neq 0$,必$\frac{a}{b} \in P$。由此,$P \quad Q$。

1.3 二阶与三阶行列式

1.3.1 二元线性方程组与二阶行列式

用消去法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2。 \end{cases}$$

为消去未知数 x_2,以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_1 = b_1 a_{22} - a_{12} b_2。$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_2 = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}。$$

当 $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$ 时,求得方程组的解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}。$$

未知量 x_1, x_2 表达式中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得。

为了方便,我们把由四个数 a, b, c, d 组成的算式 $(ad - bc)$ 记成

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

称为二阶行列式,运算的结果称为行列式的值。若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时,二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解可表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}。$$

注意:这里的分母 D 是由方程组未知量的系数所确定的二阶行列式;x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 代替 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式;x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 代替 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式。

例 1.3　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 8, \\ 5x_1 - 4x_2 = 6 \end{cases}$$

的解。

解　由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -32 - 12 = -44,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 40 = -22,$$

故 $$x_1 = \frac{-44}{-22} = 2,\quad x_2 = \frac{-22}{-22} = 1。$$

1.3.2 三阶行列式

为方便计，我们称由 9 个数$\{a_{ij} \mid i, j = 1, 2, 3\}$组成的运算式子

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

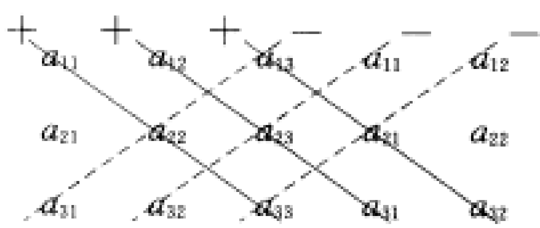
为三阶行列式，记成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32})。$$

三阶行列式含 6 个单项，每项均为不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循下图所示的对角线法则：图中有 3 条实线看作是平行于主对角线的连线，3 条虚线看作是平行于副对角线的连线，实线上 3 元素的乘积冠以正号，虚线上 3 元素的乘积冠以负号。



例 1.4 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}。$$

解　按对角线法则,有

$$\begin{aligned}D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4\\ &\quad -1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)\\ &= -4-6+32-4-8-24\\ &= -14。\end{aligned}$$

例 1.5　求解方程

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & x\\ 7 & 12 & x^2\end{vmatrix}=0。$$

解　方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned}D &= 3x^2+7x+48-42-12x-2x^2\\ &= x^2-5x+6,\end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$,解得 $x=2$ 或 $x=3$。

类似于二阶行列式与二元线性方程组的关系,我们有: 当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq0$$

时,三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D},\quad x_3 = \frac{D_3}{D}。$$

这里 D_1 是用常数项 b_1, b_2, b_3 替换系数行列式 D 中的 x_1 系数 a_{11}, a_{21}, a_{31} 而得的三阶行列式:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

类似地,有

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}。$$

例 1.6 **求解三元线性方程组**

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3, \\ 5x - 2y + 7z = 22, \\ 2x - 5y + 4z = 4。 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 50 + 14 - 8 - 20 + 35 = 63,$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 7 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 220 + 28 - 16 - 88 - 105 = 63,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 22 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 88 - 40 - 42 + 88 + 60 - 28 = 126,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 22 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 75 + 44 - 12 - 20 + 110 = 189,$$

故

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{63}{63} = 1, \\ y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{126}{63} = 2, \\ z = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{189}{63} = 3。 \end{cases}$$

1.4　n 阶行列式的归纳定义

为了把二元线性方程组与二阶行列式的关系推广到一般情形，我们引进 n 阶行列式的概念。

n 阶行列式是指由 n^2 个数 $\{a_{ij} \mid i, j = 1, 2, \cdots, n\}$ 组成的算式。它的运算结果为一个数。为方便计，常将此运算式记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

运算的结果称为行列式的值。

定义 1.3　若 T 是数环，$a_{ij} \in T$，归纳定义 T 上行列式如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} M\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - a_{12} M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_{13} M\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \cdots + (-1)^{1+n} M\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}。$$

这里 $M\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$ **表示原来的行列式中划去第** 1 **行和第** j **列后得到的** $(n-1)$ **阶行列式。按定义,** n **阶行列式是它的第一行的元素乘上相应的** $(n-1)$ **阶行列式加减而得。按定义,计算行列式的值是对它的元素作加、减、乘** 3 **种运算,故** T **上的行列式的值仍在** T **中。**

为了方便,常用 $M_A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ **表示阵列** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ **中划去第** $i_1, i_2, \cdots, i_k$ **行与第** $j_1, j_2, \cdots, j_k$ **列后所得** $(n-k)$ **阶行列式,在** A **明确的前提下,简记为** $M\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$。

显然 $M\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}$。

例如,设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$**,则**

$$M\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 18,$$

$$M\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+3\times\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix}=1\times(-3)-2\times2+3\times(-3)$$

$$=-16。$$

n阶行列式$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$可简记成$|a_{ij}|_n$, a_{ij}表示行列式中i行、j列的元素,右下标 n表示行列式的阶数。

例如

$$|i\cdot j|_3=\begin{vmatrix}1\cdot1 & 1\cdot2 & 1\cdot3\\ 2\cdot1 & 2\cdot2 & 2\cdot3\\ 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix}。$$

1.5 行列式的性质

引理 1.1 n阶行列式的值可由它的第一列的元素分别乘上相应$(n-1)$阶行列式加减而得,即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}M\binom{1}{1}-a_{21}M\binom{2}{1}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M\binom{n}{1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M\binom{i}{1}。$$

证 对行列式的阶数 n用归纳法。

$n=2$时,等式两端都等于$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,结论成立。

若行列式的阶数为$(n-1)$时等式成立,考虑n阶行列式的情形。

$i\geq2$时,$M\binom{i}{1}$是原行列式中划去第i行、第1列后得$(n-1)$阶行列式,它的j列是原行列式的$(j+1)$列。于是,按行列式的定义:

$$M\binom{i}{1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$= a_{12}\, M\binom{i}{1}\binom{1}{2} - a_{13}\, M\binom{i}{1}\binom{1}{3} + \cdots$$

$$= \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1j} M\binom{i}{1}\binom{1}{j}。$$

把 $M\binom{i}{1}\ (i \geq 2)$ **的表达式代入求证等式的右端得**

$$\text{右端} = a_{11}\, M\binom{1}{1} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1j} M\begin{pmatrix} i & 1\\ 1 & j\end{pmatrix}$$

$$= a_{11}\, M\binom{1}{1} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{i1}\, a_{1j} M\binom{1}{j}\binom{i}{1}。$$

交换求和号得

$$\text{右端} = a_{11}\, M\binom{1}{1} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i} a_{i1}\, M\binom{1}{j}\binom{i}{1}。$$

由归纳法假设, $(n-1)$ **阶行列式** $M\binom{1}{j}$ **的值可由它的第一列元素乘上相应** $(n-2)$ **阶行列式加减而得, 即**［**注意:** $M\binom{1}{j}$ **的第** i **行为原行列式的第** $(i+1)$ **行**］

$$M\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{21}\, M\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} - a_{31}\, M\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{i} a_{i1}\, M\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{n} a_{n1}\, M\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i} a_{i1}\, M\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix},$$

代入右端表达式得

$$\text{右端} = a_{11}\, M\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M\begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix} = \text{左端。}$$

由归纳法,本引理得证。

引理 1 2　**行列式相邻两列互换,其值改号。即若互换行列式**

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cc} i & i+1 \\ \text{列} & \text{列} \end{array} \end{array}$$

的相邻两列,如第 i **列与第** $(i+1)$ **列,得行列式**

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i+1} & a_{1\,i} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,i+1} & a_{2\,i} & \cdots & a_{2\,n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i+1} & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

i 列　$i+1$ 列

则
$$|B| = -|A|。$$

证　对行列式的阶数 n 用归纳法。

$n = 2$ 时, $|B| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_2 a_{21} - a_1 a_{22} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A|$,

结论成立。

若对 $(n-1)$ 阶行列式引理正确,我们考虑 n 阶行列式的情形。由行列式定义:

$$|B| = a_{11} M_B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{1+i} a_{1\,i+1} M_B\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$
$$+ (-1)^{1+(i+1)} a_{1\,i} M_B\begin{pmatrix}1\\i+1\end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1\,n} M_B\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix}。$$

当 $j \neq i, i+1$ 时, $M_B\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}$ 是行列式 $|B|$ 中划去第 1 行、第 j 列(保留 i 列、$(i+1)$ 列)后留下的 $(n-1)$ 阶行列式:

$$M_B\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i+1} & a_{1\,i} & \cdots & a_{1\,j} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,i+1} & a_{2\,i} & \cdots & a_{2\,j} & \cdots & a_{2\,n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3\,i+1} & a_{3\,i} & \cdots & a_{3\,j} & \cdots & a_{3\,n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i+1} & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

i 列　$i+1$ 列

它可由 $M_A\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}$ 互换第 i 列与第 $(i+1)$ 列得到,这里

$$M_A\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}=\begin{array}{|cccccccc|}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & \cdots & a_{2i} & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & & \cdots & \cdots & & & & \cdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\\
\multicolumn{1}{c}{} & & i & i+1 & & & & \multicolumn{1}{c}{}\\
\multicolumn{1}{c}{} & & \text{列} & \text{列} & & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}。$$

由于 $M_B\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}$, $M_A\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}$ **为** $(n-1)$ **阶行列式,由归纳法假设:**

$$M_B\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}=-M_A\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}。$$

而

$$M_B\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=\begin{array}{|cccccc|}
a_{11} & \cdots & a_{1\,i+1} & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & \cdots & a_{2\,i+1} & a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{n\,i+1} & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\\
\multicolumn{1}{c}{} & & i & & & \multicolumn{1}{c}{}\\
\multicolumn{1}{c}{} & & \text{列} & & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}$$

$$=\begin{array}{|cccccc|}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & \cdots & a_{2i} & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn}\\
\multicolumn{1}{c}{} & & & i+1 & & \multicolumn{1}{c}{}\\
\multicolumn{1}{c}{} & & & \text{列} & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}=M_A\begin{pmatrix}1\\i+1\end{pmatrix},$$

$$M_B\begin{pmatrix}1\\i+1\end{pmatrix}=\begin{array}{|cccccc|}
a_{11} & \cdots & a_{1\,i+1} & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & \cdots & a_{2\,i+1} & a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{n\,i+1} & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\\
\multicolumn{1}{c}{} & & & i+1 & & \multicolumn{1}{c}{}\\
\multicolumn{1}{c}{} & & & \text{列} & & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}$$

$$
= \begin{array}{c}\left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right| \\ \qquad\quad i \\ \qquad\quad \text{列} \end{array} = M_A\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},
$$

于是

$$
\begin{aligned}
|B| = & -a_{11}M_A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{1\,i+1}M_A\begin{pmatrix}1\\ i+1\end{pmatrix} \\
& + (-1)^{i+2}a_{1i}M_A\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{j+1}a_{1j}\left[-M_A\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}\right] + \cdots \\
& + (-1)^{n+1}a_{1n}\left[-M_A\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix}\right],
\end{aligned}
$$

交换和式中的第 i 项与第 $(i+1)$ 项,注意到 $(-1)^i = (-1)^{i+2}$,提取公因子(-1)得

$$
\begin{aligned}
|B| = & -\left[a_{11}M_A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \cdots + (-1)^{1+i}a_{1i}M_A\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right. \\
& \left. + (-1)^{i+2}a_{1\,i+1}M_A\begin{pmatrix}1\\ i+1\end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_A\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix}\right] \\
= & -|A|。
\end{aligned}
$$

即对 n 阶行列式,引理正确。由归纳法,本引理得证。

定理 1.1 任意两列互换,行列式的值改号,即 $|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\beta_1,\cdots,\beta_t,\alpha_j,\cdots,\alpha_n| = -|\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\beta_1,\cdots,\beta_t,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|$。这里,用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\beta_1,\cdots,\beta_t,\alpha_j,\cdots,\alpha_n$ 表示行列式的各个列。

证 左端行列式的 α_i 列可经 $(t+1)$ 次相邻两列互换到 α_j 的位置,即 α_i 列依次与 β_1 列,β_2 列,$\cdots$,β_t 列及 α_j 列互换,由引理 1.2 得

$$
\text{左端} = -|\alpha_1,\cdots,\beta_1,\alpha_i,\beta_2,\cdots,\beta_t,\alpha_j,\cdots,\alpha_n|
$$

$$= \cdots = (-1)^{t+1} |\alpha_1, \cdots, \beta_1, \cdots, \beta_t, \alpha_j, \alpha_i, \cdots, \alpha_n|,$$

α_j 列继续与 β_t 列,$\cdots$,β_1 列互换,即再经 t 次相邻两列互换得

$$\begin{aligned}\text{左端} &= (-1)^{t+1}(-1)|\alpha_1, \cdots, \beta_1, \cdots, \alpha_j, \beta_t, \alpha_i, \cdots, \alpha_n| \\ &= \cdots = (-1)^{t+1}(-1)^t |\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \beta_1, \cdots, \beta_t, \alpha_i, \cdots, \alpha_n| \\ &= (-1)^{2t+1} |\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \beta_1, \cdots, \beta_t, \alpha_i, \cdots, \alpha_n| = \text{右端}。\end{aligned}$$

推论　两列相等,行列式值为零。

证　设行列式的第 i 列与第 j 列相等,其值为 d。互换 i 列与 j 列后新的行列式值为 $-d$;但因为第 i 列与第 j 列相等,互换该两列后,行列式依旧,其值仍为 d。故 $-d = d$,于是必 $d = 0$。

若 A 表示由 $s \times n$ 个数组成的 s 行、n 列的阵列 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$,常称 A 为 s 行、n 列矩阵,且用 A' 表示由这 $s \times n$ 个数组成的 n 行、s 列矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$,称它为 A 的转置。

如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,则 $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$。一般规则是: A 的第 i 行、j 列的元素恰是 A' 的第 j 行、i 列元素。

性质 1

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A'|。$$ **即行列式转置,其值不变。**

证　对行列式的阶数 n 用归纳法。$n = 2$ 时,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |A'|。$$

若行列式的阶数为 $(n-1)$ 时，性质成立。考虑行列式阶数为 n 时的情形。此时

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & & & & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} M_{A'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - a_{21} M_{A'}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{A'}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}。$$

$(n-1)$ 阶行列式 $M_{A'}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 是 n 阶行列式 $|A'|$ 中划去第 1 行、第 i 列而得到的，恰是 n 阶行列式 $|A|$ 中划去第 i 行、第 1 列而得到的 $(n-1)$ 阶行列式的转置，即 $M_A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ 的转置：

$$M_{A'}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & & & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}' = \left[M_A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right]'。$$

按归纳法假设，$(n-1)$ 阶行列式 $M_{A'}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 的值等于其转置 $M_A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ 的值，即

$$M_{A'}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = M_A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$|A'| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} a_{i1} M_A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},$$

由引理 1 .1 得

$$|A'| = |A|,$$

由归纳法,结论成立。

推论 两行互换,行列式值改号。

证 设行列式$|A|$经第 i 行与第 j 行互换得$|B|$,则$|A'|$经 i 列与 j 列互换得$|B'|$,于是

$$|A| = |A'| = -|B'| = -|B|。$$

性质 2 $|A| = |a_{ij}|_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj} M\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix},$ (1 - 1)

$$|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+l}a_{il} M\begin{pmatrix} i \\ l \end{pmatrix}。 \quad (1-2)$$

式(1 - 1)称行列式按第 k 行的展开式,式(1 - 2)称按第 l 列的展开式。

证 若用 α 表行列式$|A|$的第 i 行。把行列式$|A|$的第 k 行 α_k 依次与 $\alpha_{k-1},\cdots,\alpha_1$ 互换,即经$(k-1)$次相邻两行互换,利用性质 1 的推论得

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha \\ \cdots \\ \alpha_{k-1} \\ \alpha_k \\ \cdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha \\ \cdots \\ \alpha_k \\ \alpha_{k-1} \\ \cdots \end{vmatrix} = \cdots = (-1)^{k-1}\begin{vmatrix} \alpha_k \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_{k-1} \\ \cdots \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1}\begin{vmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{kj}M\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}M\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}。$$

又：$|A| = |A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{1l} & a_{2l} & \cdots & a_{nl} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ （按 l 行展开）

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{l+i}a_{il}M_{A'}\begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{l+i}a_{il}M\begin{pmatrix} i \\ l \end{pmatrix}。$$

例 1.7 若 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & k \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$，求 k 的值。

解 按第二行展开行列式，得

$$(-1)^{2+1}0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot k\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2(7-10) - k(1-6) = -6 + 5k = 0$，

故
$$k = \frac{6}{5}。$$

性质 3　若 n 阶行列式

$$|A| = |a_{ij}|_n = |\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \cdots, \alpha_n|$$

的第 k 列 α_k 为两列之和:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \cdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \beta + \gamma,$$

则行列式 $|A|$ 为两个行列式之和

$$\begin{aligned} |A| &= |\alpha_1, \cdots, \beta + \gamma, \cdots, \alpha_n| \\ &= |\alpha_1, \cdots, \beta, \cdots, \alpha_n| + |\alpha_1, \cdots, \gamma, \cdots, \alpha_n|。 \end{aligned}$$

行的情形也正确,即若行列式的一行为两行之和,则行列式为两个行列式之和。

证　按第 k 列展开行列式 $|A|$:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} [b_i + c_i] M\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} b_i M\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} c_i M\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \\ &= |\alpha_1, \cdots, \beta, \cdots, \alpha_n| + |\alpha_1, \cdots, \gamma, \cdots, \alpha_n|。 \end{aligned}$$

行的情形:若用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \cdots, \alpha_n$ 分别表示行列式的各个行,$\alpha_k = \beta_k + \gamma_k$,则

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_k \\ \cdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \beta + \gamma \\ \cdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \beta + \gamma \\ \cdots \\ \alpha_n \end{vmatrix}' = |\alpha_1', \cdots, \beta' + \gamma', \cdots, \alpha_n'|$$

$$= |\alpha_1', \cdots, \beta', \cdots, \alpha_n'| + |\alpha_1', \cdots, \gamma', \cdots, \alpha_n'|$$

$$= |\alpha_1', \cdots, \beta', \cdots, \alpha_n'|' + |\alpha_1', \cdots, \gamma', \cdots, \alpha_n'|'$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \beta \\ \cdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \gamma \\ \cdots \\ \alpha_n \end{vmatrix}。$$

性质 3 **得证。**

性质 4　(1) **两列(或行)互换,行列式值改号;**

(2) **一列(或行)的每个数乘以** k, **则行列式的值是原行列式的值与** k **之积;**

(3) **一列(或行)的每个数的** k **倍加到另一列(行)上,行列式的值不变。**

证　我们仅证列的情形,行的情形可仿性质 3 **的证明同样处理。**

(1) **即定理** 1 .1。

$$(2)\ \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & ka_{1j}, & \cdots a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n1}, & \cdots, & ka_{nj}, & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } j \text{ 列展开}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} ka_{ij} M\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

$$= k \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = k|a_{ij}|_n。$$

$$(3)\ |\alpha_1, \cdots, \alpha_i + k\alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n|$$

$$= |\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n| + |\alpha_1, \cdots, k\alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n|$$

$$= |\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n| + k|\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots \alpha_n|$$

$$= |\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n|。$$

性质 4 **的** 3 **种情形对行列式所作的变动常称为初等变换。我们将在论述矩阵的那一章详细研究。**

1.6 行列式的计算

1.6.1 三角行列式

若 $1 \leq j < i \leq n$ 时，$a_{ij} = 0$，则称 n 阶行列式

$$|a_{ij}|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为上三角行列式，即其对角线以下的元素全为 0。这里我们把连接 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 的线称为行列式的主对角线或对角线。

若 $1 \leq i < j \leq n$ 时，$a_{ij} = 0$，则称 n 阶行列式

$$|a_{ij}|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为下三角行列式，其对角线以上的元素全为 0。

命题 1.2 上、下三角行列式 $|a_{ij}|_n$ 的值等于其对角线上元素的积，即 $|a_{ij}|_n = a_{11}\cdots a_{nn}$，后者常记成 $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$。

证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ a_{12} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

继续按第一行展开 $a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{3n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$。

又 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 1}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$。

命题 1 .3

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & & & & \iddots & \vdots \\ \vdots & & & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & & \iddots & \iddots & & \vdots \\ & \iddots & \iddots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \iddots & \\ \vdots & & \iddots & & 0 \\ \vdots & \iddots & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\,n+1-i}$,

这里 $\left[\frac{n}{2}\right]$ **表示不大于** $\frac{n}{2}$ **的最大整数,如** $\left[\frac{7}{2}\right]=3$, $\left[\frac{8}{2}\right]=4$ **等。**

证　把行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \vdots \\ & \iddots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **的第 1 列与第 n 列互**

换,第 2 列与第 $(n-1)$ 列互换,……,得

$$
\begin{vmatrix}
0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & & & \iddots & \vdots \\
\vdots & & & \iddots & & \vdots \\
0 & \iddots & \iddots & & & \vdots \\
& \iddots & & & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\xrightarrow[i=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]]{(i)\longleftrightarrow(n+1-i)}
$$

$$
(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}
\begin{vmatrix}
a_{1n} & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & \\
a_{nn} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n1}
\end{vmatrix}
= (1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i},
$$

类似可得另一等式。

注　为了方便与明了,对行列式的变换作如下记号上的规定:等号上方表示行变换,下方表示列变换。如 $\overset{(2)\longleftrightarrow(3)}{=}$ 表示第 2 行与第 3 行互换; $\underset{\frac{(2)}{4}}{=}$ 表示第 2 列除以 4; $\overset{(2)+4(3)}{=}$ 表示第 3 行的 4 倍加到第 2 行, $\underset{\frac{(2)+(3)}{4}}{=}$ 表示第 3 列加到第 2 列后再除以 4,等等。

1.6.2　二线行列式

两条线以外的元素全为零的行列式常称二线行列式,有如下结果。

命题 1.4

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & & \\ & a_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ b_1 & \cdots & \cdots & a_i & \cdots & & b_n \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & & & b_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_i & & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & b_n & & & a_n \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} a_j,$$

两个行列式中,线外的元素全为零。

证

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ b_1 & \cdots & a_i & \cdots & b_n \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } i \text{ 列展开}} a_i(-1)^{i+i} \begin{vmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_{i-1} & & & \\ & & & a_{i+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} a_j 。$$

类似可得另一等式及下述命题 1 .5。

命题 1 .5

$$\begin{vmatrix} & & & & & a_1 \\ & & & & \iddots & \\ & & & \iddots & & \\ b_1 & \cdots & a_i & \cdots & & b_n \\ & & \iddots & & & \\ & \iddots & & & & \\ a_n & & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & b_1 & & a_1 \\ & & & \vdots & \iddots & \\ & & & \iddots & & \\ & & & a_i & & \\ & & \iddots & \vdots & & \\ & \iddots & & & & \\ a_n & & & b_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{i=1}^{n} a_i 。$$

1 .6 .3 **例**

例 1 .8 $\begin{vmatrix} 3 & 36 & 79 \\ 6 & 73 & 99 \\ 9 & 108 & 238 \end{vmatrix} \xlongequal[(3)-3(1)]{(2)-2(1)} \begin{vmatrix} 3 & 36 & 79 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$。

例 1 .9

计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1-x & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+y & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1-y \end{vmatrix}。$$

解法 1 $D \ \substack{(2)-(1)\\(3)-(4)} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \ \substack{(1)-(2)\\(4)-(3)} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -y \end{vmatrix}$

$$\text{按(1)展开} \quad x\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 1 & -y \end{vmatrix} = x(-x)y(-y) = x^2y^2。$$

解法 2 $D \ \ (1)\backslash(4) \ \ (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-y \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1+x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\substack{(2)-(1)\\(3)-(1)\\(4)-(1+x)(1)} \ (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+y \\ 0 & -x & 0 & y \\ 0 & 0 & y & y \\ 0 & -x & -x & -x+y+xy \end{vmatrix}$$

$$(4)-(2) \ \ (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-y \\ 0 & -x & 0 & y \\ 0 & 0 & y & y \\ 0 & 0 & -x & -x+xy \end{vmatrix}$$

$$\underset{(4)+x(3)}{\overset{y(3)}{=}}\ (-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-y \\ 0 & -x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & xy \end{vmatrix}$$

$$=(-y)(-x)xy=x^2y^2。$$

解法 3

$$D=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+11\ \text{个至少有两列全是 1 的行列式}$$

$$=x^2y^2+xy^2-xy^2+x^2y-x^2y+\sum 0=x^2y^2。$$

例 1.10 **计算** n **阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & & & b & \\ \cdots & b & & \ddots & \\ b & & & & a \end{vmatrix}。$$

解 $D \xrightarrow[i=2,\cdots,n]{(i)-b(1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a-b & & & \\ & & a-b & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}$。

例 1.11　计算 n **阶行列式**

$$D = \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & 2 & 2 & \\ & & 3 & \\ & \ddots & 2 & \\ n & & & \end{vmatrix}。$$

解 $D \xrightarrow[i\neq 2]{(i)-(2)} \begin{vmatrix} & & & & -1 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & 2 \\ & & & & \\ & \ddots & & 2 & \\ (n-2) & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot (-2)(n-2)!$。

例 1.12　计算 n **阶行列式** $D = \begin{pmatrix} x & & a & \\ & x & & \\ a & & \ddots & \\ & & & x \end{pmatrix}$**，行列式中对角线上元素全为** x**，对角线外元素全为** a。

解法 1　$D \xrightarrow{(1)+(2)+\cdots+(n)}$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & \cdots & a \\ a & a & & & a \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ a & a & & & a \\ a & a & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & & 1 \\ a & x & a & \cdots\cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ \vdots & & & \ddots & \\ a & \cdots\cdots\cdots\cdots & & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{(i)-a(1)} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{二线行列式}} [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}。$$

解法 2　把 D 的第 i 列化成两列之和 $\begin{pmatrix} a \\ \cdots \\ a \\ x \\ a \\ \cdots \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \cdots \\ a \\ \cdots \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ x-a \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$，

由性质 3, D 是 2^n 个行列式之和, 其中有一个行列式不含$\begin{pmatrix} a \\ \cdots \\ a \end{pmatrix}$列,

有 n 个行列式仅含一列$\begin{pmatrix} a \\ \cdots \\ a \end{pmatrix}$, 余者至少含两列$\begin{pmatrix} a \\ \cdots \\ a \end{pmatrix}$, 故全为零。

从而 D 的值为

$$\begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x-a & & a & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & a & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & a & & x-a \end{vmatrix}$$

i列

$= (x-a)^n + na(x-a)^{n-1} = (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$。

例 1.13 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & & a_n \end{vmatrix}$ 按第 1 列展开

$$a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b_n \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} b_i。$$

例 1.14　求证：Vandermonde 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & & \cdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)。$$

证　对 n 用归纳法。

$n = 2$ **时**，$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$，**等式成立。**

若 $n-1$ 时等式成立。考虑 n 时情形：

(1) **如果 $a_1, \cdots, a_n$ 中有两个相等，则 D_n 中有两列相等，其值为零。又 $\prod (a_i - a_j)$ 有因子为零，其值也为零。**

(2) **如果 $a_1, \cdots, a_n$ 两两不等，设**

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & x \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix},$$

按第 n 列展开，可知 $f(x)$ 是首项系数为 D_{n-1} 的字母 x 的 $(n-1)$ 次多项式。由行列式的性质 4 可知，$f(x)$ 有 $(n-1)$ 个不同零点 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$，故 $f(x) = D_{n-1}(x - a_1)\cdots(x - a_{n-1})$，从而

$$D_n = f(a_n) = \left[\prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (a_i - a_j)\right](a_n - a_1)\cdots(a_n - a_{n-1})$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j),$$

即 n 时等式成立。由归纳法，本例得证。

例 1.15 若 $a_{ij}=1$ 或 -1, $i,j=1,2,\cdots,n$。令 $D=|a_{ij}|_n$,求证:$2^{n-1}\mid D$。

证 $$D\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{(i)+(1)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$b_{ij}=0,2$ 或 -2,故 $2\mid b_{ij}$, $i=2,\cdots,n$; $j=1,\cdots,n$。从而

$$D=2^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \dfrac{b_{ij}}{2} & \end{vmatrix},\text{即 } 2^{n-1}\mid D。$$

例 1.16 求证:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}=\begin{cases} 0, & \text{若矩阵 } A \text{ 的行数 } k<\text{ 列数 } t, \\ |A|\cdot|B|, & \text{若 } A \text{ 的行数 } k=\text{ 列数 } t, \end{cases}$$

这里 A 是 k 行、t 列矩阵,C 是 k 行、s 列矩阵,B 是 $(n-k)$ 行、s 列矩阵,0 是 $(n-k)$ 行、t 列的零矩阵,$n=t+s$。

证 对 k 用归纳法。

$k=1$ 时,按第一列展开即得结论。

若 $k-1$ 时,结论成立。$k-1$ 时,按第一列展开行列式:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}a_{j1}M\binom{j}{1},$$

$a_{11},a_{21},\cdots,a_{k1}$ 为 A 的第一列元素。$M\binom{j}{1}$ 是 $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$ 中划掉第 j 行、第 1 列后的行列式,仍有原行列式的形状,由归纳法假设:

$$M\binom{j}{1}=\begin{cases} 0, & \text{当 } k-1<t-1 \text{ 时}, \\ M_A\binom{j}{1}\cdot|B|, & \text{当 } k-1=t-1 \text{ 时}, \end{cases}$$

从而

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{cases} 0, & \text{当 } k < t \text{ 时}, \\ \sum (-1)^{j+1} a_{j1} M_{A}\begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \cdot |B| = |A| \cdot |B|, & \text{当 } k = t \text{ 时}, \end{cases}$$

即 k **时,结论也成立。**

由归纳法,本例得证。

例 1 .17　**求行列式值**: $D = \begin{vmatrix} t_1 & a & a & \cdots & a \\ b & t_2 & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \mathrm{W} & \cdots \\ b & b & b & \cdots & t_n \end{vmatrix} (a \neq b)$。

解　**构造多项式** $f(x) = \begin{vmatrix} t_1+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & t_2+x & \cdots & a+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+x & b+x & \cdots & t_n+x \end{vmatrix}$,

它的第 i **列为** $\begin{pmatrix} x \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ \cdots \\ a \\ \\ t_i \\ \\ b \\ \cdots \\ b \end{pmatrix}$。

由性质 3:

$$f(x)=D+\sum_{i=1}^{n}\begin{array}{c}\begin{vmatrix} t_1 & \cdots\cdots & x & \cdots\cdots & a \\ b & & x & & a \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ b & & x & & a \\ b & \cdots\cdots & x & \cdots\cdots & t_n \end{vmatrix} \\ i\text{列}\end{array}$$

$$=D+x\sum_{i=1}^{n}\begin{array}{c}\begin{vmatrix} t_1 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & a \\ b & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & a \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ b & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & a \\ b & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & t_n \end{vmatrix} \\ i\text{列}\end{array},$$

即 $f(x)$**是** x **的一次多项式。而**

$$f(-a)=\begin{vmatrix} t_1-a & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & \\ b-a & & & \ddots \\ & & & t_n-a \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(t_i-a),$$

同理

$$f(-b)=\prod_{i=1}^{n}(t_i-b),$$

故

$$D=f(0)=\frac{f(-a)-f(-b)}{(-a)-(-b)}[0-(-b)]+f(-b)$$

$$=\frac{bf(-a)-af(-b)}{b-a}。$$

1.6.4 三线行列式

三线行列式常可展开成两个低阶行列式的组合,由递推关系

求得其值。在一些特殊情形,更有简便方法。详见下面例子。

例 1 .18

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ -1 & b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & -1 & b \end{vmatrix}$$

(n) + $\sum_{i=1}^{n-1}$ bn - i (i)

或

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots \\ & & -1 & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & c \\ -1 & b & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & b & 0 \\ & & & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

这里 $c = \sum_{i=1}^{n} a_i b^{n-i}$。

按最后一列展开得

$$\text{原式} = (-1)^{n+1} c \begin{vmatrix} -1 & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ & & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} c \cdot (-1)^{n-1}$$

$$= c = \sum_{i=1}^{n} a_i b^{n-i}。$$

例 1.19　求证： $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ c_2 & b_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \\ c_n & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}$

$$= a_1 b_2 \cdots b_n - \sum_{i=2}^{n} b_2 \cdots b_{i-1} (a_i c_i) b_{i+1} \cdots b_n。$$

证　当 $b_2, \cdots, b_n$ **全不为 0 时**

$$D \xrightarrow{(1) - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{b_i}(i)} \begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{b_i} c_i & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & b_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ c_n & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{b_i} c_i \right) b_2 \cdots b_n = \text{右边}。$$

当 $b_2, \cdots, b_n$ **中有一个如** b_i **为 0 时**

$$D \xrightarrow{(1) \longleftrightarrow (i)} - \begin{vmatrix} a_i & a_2 \cdots a_{i-1} & a_1 & a_{i+1} \cdots a_n \\ & & \vdots & \\ 0 & b_2 & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & b_{i-1} & \vdots & \\ \vdots & & c_i & \\ 0 & & \vdots & \ddots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \\ & & & \ddots \\ 0 & & \vdots & b_n \end{vmatrix} \text{按第 1 列展开}$$

$$= -a_i\begin{vmatrix} b_2 & & & \vdots & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & b_{i-1} & \vdots & & \\ & & & c_i & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & \vdots & & b_n \end{vmatrix} = -b_2\cdots b_{i-1}(a_i c_i)\cdots b_n = \text{右端。}$$

命题 1.6 若 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & \ddots & \ddots \\ & & & c_n & a_n \end{vmatrix}$,**求证**:

数列 $D_1, D_2, D_3, \cdots$ **满足递推关系** $(D_1 = a_1)$:

$$D_n = a_n D_{n-1} - c_n b_{n-1} D_{n-2}\ (n \geq 3)。$$

证 按最后一行展开行列式:

$$D_n = (-1)^{n+n} a_n D_{n-1} + (-1)^{n+(n-1)} c_n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ c_2 & a_2 & & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & b_{n-3}, & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-2}, & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & c_{n-1}, & b_{n-1} \end{vmatrix},$$

按最后一列展开第二个行列式,得

$$D_n = a_n D_{n-1} - c_n b_{n-1} D_{n-1}。$$

例 1.20

求 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ c_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & c_n & b_n \end{vmatrix}$ 的递推关系。

解 按最后一列展开行列式 D_n，即得递推关系：

$$D_n = b_n D_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} c_2 & b_2 & & \\ & c_3 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & c_n \end{vmatrix}$$

$$= b_n D_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n c_2 c_3 \cdots c_n 。$$

命题 1.7 若 α, β 是方程 $x^2 - ax + bc = 0$ 的两个根，则 n 阶三线行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{vmatrix}$$

的值为 $\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} \beta^k$。即

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, & \text{当 } \alpha \neq \beta \text{ 时}, \\ (n+1)\alpha^n, & \text{当 } \alpha = \beta \text{ 时}。 \end{cases}$$

证 由命题 1.6 得递推关系：

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2} 。$$

又 $a = \alpha + \beta$，$bc = \alpha\beta$。我们对 n 用归纳法证明结论正确。

$n = 1$ 时，$D_1 = a = \alpha + \beta$。

若 $n = 1, 2, \cdots, m-1$ 时，结论正确，由递推关系

$$D_m = aD_{m-1} - bcD_{m-2}$$

$$= (\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{m-1}\alpha^{m-1-k}\beta^{k} - \alpha\beta\sum_{k=0}^{m-2}\alpha^{m-2-k}\beta^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\alpha^{m-k}\beta^{k} + \sum_{k=0}^{m-1}\alpha^{m-1-k}\beta^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-2}\alpha^{m-1-k}\beta^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\alpha^{m-k}\beta^{k} + \beta^{m}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\alpha^{m-k}\beta^{k}。$$

即结论正确。故由归纳法,本命题得证。

例 1.21 **求** n **阶行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n & 4n & & & \\ n & 4n & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 4n \\ & & & n & 4n \end{vmatrix}。$$

解 $D_n = n^n I_n$,**这里**

$$I_n = \begin{vmatrix} 4 & 4 & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 4 \\ & & & 1 & 4 \end{vmatrix}_n,$$

$x^2-4x+4=0$ **的两根为** 2,2(**等根**),**故由命题** 1.7 **得** $I_n=(n+1)2^n$。**从而** $D_n=(n+1)(2n)^n$。

1.6.5 行列式计算方法小结

方法 1 **用初等变换化行列式为三角行列式。**

方法 2 **展开成低阶行列式的组合,或得其值或得递推关系。**

方法 3 **化一行(或列)为两行(列)和,行列式化为同阶简易行列式(常为二线行列式)的和。**

常见形式为

$$|\beta_1 + k_1\alpha, \beta_2 + k_2\alpha, \cdots, \beta_n + k_n\alpha|$$

$$= |\beta_1, \cdots, \beta_n| + \sum_{i=1}^{n} k_i |\beta_1, \cdots, \beta_{i-1}, \alpha, \beta_{i+1}, \cdots, \beta_n|。$$

习　题　1

1. 若 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \\ -4 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$，求 $M\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。

2. 按定义证明：$\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$。

3. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$，求 k 的值。

4. 求下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} x-1 & x^2 \\ x & x^2+x+1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 46 & 75 \\ 4 & 93 & 134 \\ 6 & 138 & 226 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & 2 & \\ & 2 & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix}_4$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}_4$;

(6) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$;

(7) $|i+j|_4$。

5. **求证**: $\begin{vmatrix} a+x & x+u & u+a \\ b+y & y+v & v+b \\ c+z & z+w & w+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{vmatrix}$。

6. **若** α, β, γ **为方程** $x^3 + px + q = 0$ **的** 3 **个根,求行列式** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$。

7. **计算下列** n **阶行列式的值**:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & & & & n \\ 1 & \ddots & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & n-1 & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} & & & a_1 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & & \\ a_{n-1} & \cdots & & & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix}_n$;

(3) $\begin{vmatrix} & & & & b & a \\ & & & \cdots & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & \cdots & \cdots & & & \\ b & \cdots & & & & \\ a & & & & & b \end{vmatrix}_n$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_n & \\ b_2 & 1 & \\ \vdots & \ddots & \\ b_n & & 1 \end{vmatrix}$;

(5) $|a_i - b_j|_n \quad (n \geq 3)$;

(6) $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & 3 & 2 & \\ & & 3 & \\ & \iddots & 3 & \\ n & & & \end{vmatrix} \quad (n \geq 3)$;

(7) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ a_1 & x & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n-1} & & & & x \end{vmatrix}$;

(8) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & & a_n \\ a_1 & a_2+x & & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & a_n \\ a_1 & a_2 & & a_n+x \end{vmatrix}$;

(9) $\begin{vmatrix} x & & & & & \\ & \ddots & & & a & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & b & & & \ddots & \\ & & & & & x \end{vmatrix}$;

(10) $|a_i^{n-j} \cdot b_i^{j-1}|_n$;

(11) $|1+x_i^j|_n$;

(12) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & & & & & \cdots & \\ n & 1 & 2 & \cdots & \cdots & & n-1 \end{vmatrix}$;

(13) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ 1 & & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & & 1 \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$;

(14) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & & & \\ 2 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_n$;

(15) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_n$;

(16) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$

8. **若** $|a_{ij}|_n = d, c \neq 0$, **令** $b_{ij} = c^{i-j}a_{ij}$, **求证**: $|b_{ij}|_n = d$。

9. **若** A **是奇数阶方阵**, **且** $A' = -A$, **求证**: $|A| = 0$。

10. **求多项式** $f(x) = \begin{vmatrix} x - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & x - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & x - a_n^2 \end{vmatrix}$ **的根**。

第 2 章 矩 阵

数域 P 中 $s\times n$ 个元素 $\{a_{ij}\mid i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,n\}$ 排成的 s 行、n 列的阵式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix},$$

称为数域 P 上 s 行 n 列矩阵,简称 $s\times n$ 阵。常记成 $(a_{ij})_{s\times n}$。将 1×1 的矩阵就看成 P 的元素。

通常,我们用英文大写黑体字母表示矩阵。如

$$A=(a_{ij})_{s\times n},$$

用 $A_{(i)}$ 表示矩阵 A 的第 i 行,用 $A^{(j)}$ 表示矩阵 A 的第 j 列,用 $A(i,j)$ 表示矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素,即

$$A_{(i)}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),$$

$$A^{(j)}=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{sj} \end{bmatrix},$$

$$A(i,j)=a_{ij}。$$

例如,若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, **则**

$$A_{(2)} = (5, 6, 7, 8),$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A(2, 4) = 8。$$

两个矩阵的行数相同,列数也相同时,就称它们是同型矩阵。如果 $A = (a_{ij})_{s\times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{s\times n}$ 是同型矩阵,并且它们的对应元素相等,即

$$A(i, j) = a_{ij} = b_{ij} = B(i, j) \quad (i = 1, \cdots, s;\ j = 1, \cdots, n),$$

则称矩阵 A 与 B 相等,记作

$$A = B。$$

若矩阵 A 的行数等于列数,如同为 n,则称 A 为 n 阶方阵。

2.1 矩阵的运算

2.1.1 加法

若 A 与 B 为同型矩阵, $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$,则称 $(a_{ij} + b_{ij})_{s\times n}$ 为 A 与 B 的和,记成 $A + B$。

易验证,矩阵的加法满足如下规律:

(1) **交换律** $A + B = B + A$;

(2) **结合律** $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(3) **若用 0 表示所有元素为 0 的矩阵,则**

$$A + 0 = 0 + A = A;$$

(4) **若 $A = (a_{ij})_{s\times n}$,记 $-A = (-a_{ij})_{s\times n}$,则**

$$A + (-A) = 0。$$

2.1.2 数乘

若 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $k\in P$,则称$(ka_{ij})_{s\times n}$为数 k 与矩阵 A 的数乘,记成 kA。

易验证,矩阵的数乘运算有如下性质:

(1) $(kl)A = k(lA)$, $k, l\in P$;

(2) $(k+l)A = kA + lA$;

(3) $k(A+B) = kA + kB$;

(4) $1\cdot A = A$, $(-1)A = -A$。

例 2.1

$$3\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&-3&4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&6&9\\12&15&18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&0&2\\4&-6&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6&7\\8&21&10\end{pmatrix}。$$

2.1.3 乘法

若 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$,则称 $C=(c_{ij})_{s\times t}$ 为 A 与 B 的积,记成 $C=AB$。这里:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}。$$

注意:(1) 当且仅当 A 的列数等于 B 的行数时,A 与 B 才能相乘。

(2) 按乘法定义,积 $C=AB$ 的第 i 行第 j 列的元素本身是两个矩阵的积,即 $C(i,j)=c_{ij}=(a_{i1},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix}b_{1j}\\\cdots\\b_{nj}\end{pmatrix}=A_{(i)}\cdot B^{(j)}$。

例 2.2 $(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=(1\times4+2\times5+3\times6)=32$。

例 2.3 $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}(1\ 2\ 3)=\begin{pmatrix}4&8&12\\5&10&15\\6&12&18\end{pmatrix}$。

例 2.4　积 $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\5&1\end{pmatrix}$**是** 2×2 **阵**,

$$C(1,1)=(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}=16,$$

$$C(1,2)=(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=7,$$

$$C(2,1)=(4\ 5\ 6)\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}=34,$$

$$C(2,2)=(4\ 5\ 6)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=19。$$

例 2.5　积 $B=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&&\cdots\\a_{s1}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$**是**$s\times 1$ **阵**,

$$B(i,1)=(a_{i1}\cdots a_{in})\begin{pmatrix}x_1\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n,$$

$$i=1,\cdots,s。$$

例 2.6　用 E_n **表示对角线上元素全为** 1,**对角线外元素全为** 0 **的** n **阶方阵,即** $E_n=\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}_{n\times n}$。

若 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，则 AE_n 为 $s\times n$ 阵，且它的第 i 行第 j 列元素

为 $$A_{(i)}E_n^{(j)}=(a_{i1}\cdots a_{is}\cdots a_{in})\begin{pmatrix}0\\ \cdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix}j=a_{ij}$$，即矩阵 AE_n 与 A 同为 $s\times n$，且对应元素一一相等，故 $AE_n=A$。

同理可得 $E_sA=A$。

E_n，E_s 在乘法中起了单位元的作用，故常称它们为单位矩阵。

如果引进记号 δ_{ij}：$\delta_{ij}=\begin{cases}1, 当\ i=j\ 时,\\ 0, 当\ i\neq j\ 时,\end{cases}$ 则 $E_n=(\delta_{ij})_{n\times n}$。

例 2.7 在 n 阶方阵中，若用 E_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素全为 0 的矩阵。则 E_{ij} 中除 i 行外元素全为 0，E_{kl} 中除了 l 列外元素全为 0，从而 $E_{ij}\cdot E_{kl}$ 除了第 i 行第 l 列的元素外全为 0，而它的第 i 行第 l 列元素为

$$(E_{ij}\ 的\ i\ 行)\times\begin{pmatrix}E_{kl}\\ 的\\ l\\ 列\end{pmatrix}=(0\cdots0\ \underset{j位}{1}\ 0\cdots0)\begin{pmatrix}0\\ \cdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix}k\ 位=\delta_{jk},$$

故
$$E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}。$$

例 2.8 kE_n 常称数量矩阵，若 A 是 $s\times n$ 阵，易验证

$$A(kE_n)=kA,\ (kE_s)A=kA。$$

例 2.9　对角线外元素全为 0 的矩阵称为对角阵。

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}(a_{ij})_{s\times n}$ **的第 i 行第 j 列元素为**

$$(0\cdots0\ \lambda_i\ 0\cdots0)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdots \\ a_{ij} \\ \cdots \\ a_{sj} \end{pmatrix} = \lambda_i a_{ij}\text{,}$$ **即对角阵** $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$。

若左乘矩阵 A，则 A 的第 i 行元素均扩大了 λ_i 倍；若对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ **右乘 A，则 A 的第 j 列元素均扩大了 λ_j 倍，变成了 $\lambda_j a_{ij}$。**

例 2.10　若 n 阶方阵

$$H = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i-1,j})_{n\times n}\text{,}$$

则 $H^2 = HH$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$\underset{i-1\text{位}}{(0\cdots0\ 1\ \cdots0)}\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} j+1\text{位} = \delta_{i-2,j}\text{,}$$

故

$$H^2=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & 0 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

依次类推,可得

$$H^k=\begin{array}{l} k\text{个}\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & & \\ 0 & & \ddots & & & & \\ 1 & \ddots & & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \underbrace{0 & \cdots & 0}_{k\text{个}} \end{pmatrix}。$$

例 2 .11 n **阶方阵** $A=(a_{ij})_{n\times n}$**,若满足** $i>j$ **时**, $a_{ij}=0$**,则称** A **为上三角阵;若满足** $i<j$ **时**, $a_{ij}=0$**,则称** A **为下三角阵。**

若 A **和** $B=(b_{ij})_{n\times n}$ **都是上(下)三角阵,则** AB **也是上(下)三角阵。这是因为** $i>j$ **时**

$$\begin{aligned}(AB)(i,j)&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{i>k}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k\geq i>j}a_{ik}b_{kj}\\&=\sum_{i>k}0\cdot b_{kj}+\sum_{k\geq i>j}a_{ik}\cdot 0=0。\end{aligned}$$

性质 (1) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$;

(2) $A(B+C)=AB+AC$,

$(A+B)C=AC+BC$ (**加,乘分配律**);

(3) $(AB)C=A(BC)$ (**乘法结合律**)。

我们仅证(3)**于下**:

设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$, $C=(c_{ij})_{t\times l}$。**则** $(AB)C$ **与** $A(BC)$

都是 $s\times l$ 阵,且

$$\begin{aligned}[(AB)C](i,j) &= (AB)_{(i)}C^{(j)}\\ &= \sum_{u=1}^{t}\left(\sum_{v=1}^{n}a_{iv}b_{vu}\right)c_{uj}\\ &= \sum_{v=1}^{n}a_{iv}\cdot\left(\sum_{u=1}^{t}b_{vu}c_{uj}\right)\\ &= A_{(i)}(BC)^{(j)}\\ &= [A(BC)](i,j)。\end{aligned}$$

故(3)得证。

从(3)的证明,不难得出下面的推论。

推论 若矩阵 A, B, C 的元素 a, b, c 满足

$$(ab)c = a(bc) \in D,$$

且 D 中元素加法满足交换律与结合律,则

$$(AB)C = A(BC)。$$

由 $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 17\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。

可知,矩阵乘法不满足交换律与消去律,且非零矩阵的积可以是零阵。

2.1.4 方阵的幂与多项式

若 A 是 n 阶方阵,归纳定义 A 的各次幂为

$$\begin{aligned}A^1 &= A,\\ A^2 &= A\cdot A,\\ A^3 &= A^2\cdot A = (A\cdot A)A,\\ &\cdots\qquad\qquad \cdots\\ A^{t+1} &= A^t\cdot A = (A^{t-1}\cdot A)A = \cdots = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{(t+1)\text{个}}。\end{aligned}$$

由于乘法满足结合律,我们有

$$A^t \cdot A^s = A^{t+s},$$

$$(A^t)^s = A^{t \cdot s},$$

这里 t 与 s 为正整数。若

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_t x^t \in P[x],$$

记

$$f(A) = a_0 E_n + a_1 A + \cdots + a_t A^t,$$

称它为方阵 A 的一个多项式,且如果

$$f(x) + g(x) = h(x), \quad f(x) g(x) = l(x),$$

则

$$f(A) + g(A) = h(A), \quad f(A) \cdot g(A) = l(A)。$$

例 2.12 若 $f(x) = x^2 - x + 2$, 则

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

例 2.13 $(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{t-1}) = E - A^t$。这是因为 $(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{t-1}) = 1 - x^t$, 两边用 A 代 x,用 E 代 1,即得结果。

例 2.14 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求证:

(1) $A^n = 2^{n-1} A$;

(2) $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$。

证 对 n 用归纳法。

$n = 1$ 时,

$$A^1 = A = 2^{1-1} A,$$

$$B^1 = B = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 1 \cdot 2^0 & 2^1 \end{pmatrix},$$

结论正确。若 $n = k-1$ 时结论正确,即

$$A^{k-1} = 2^{k-2}A,\quad B^{k-1} = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 \\ (k-1)2^{k-2} & 2^{k-1} \end{pmatrix}。$$

$n = k$ 时,

$$A^{k} = A^{k-1}A = 2^{k-2}AA = 2^{k-2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2^{k-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{k-1}A,$$

$$B^{k} = B^{k-1}B = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 \\ (k-1)2^{k-2} & 2^{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k} & 0 \\ k2^{k-1} & 2^{k} \end{pmatrix},$$

结论正确。

故由归纳法,本例得证。

2.1.5 转置

定义 2.1 若 $A = (a_{ij})_{s\times n}$,记 $b_{ij} = a_{ji}$,则称 $(b_{ij})_{n\times s}$ 为 A 的转置,记成 A'。

如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,则 $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$。

矩阵的转置运算有如下性质:

(1) $(A')' = A$;

(2) $(kA)' = kA'$;

(3) $(A+B)' = A' + B'$;

(4) $(AB)' = B'A'$。

我们仅证(4)于下:

设 $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times t}$,则 $(AB)'$ 与 $B'A'$ 都是 $t\times s$ 矩阵,且

$$[(AB)'](i,j) = (AB)(j,i) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = (B')_{(i)}(A')^{(j)} = (B'A')(i,j)。$$

定义 2.2 若矩阵 A 满足 $A' = A$，则称 A 为对称阵。

若 $A = (a_{ij})_{s\times n}$ 为对称阵，则由 $A' = (a_{ji})_{n\times s} = A$ 得 $s = n$，且 $a_{ij} = a_{ji}$。

定义 2.3 如果 $A' = -A$，矩阵 A 称为反对称阵。

若 $A = (a_{ij})_{s\times n}$ 为反对称阵，由 $A' = -A$ 可得 $s = n$，且 $a_{ji} = -a_{ij}$，特别当 $i = j$ 时，有 $a_{ii} = 0$。

例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 为对称阵；矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 为反对称阵。

2.2 矩阵的初等变换、初等矩阵与矩阵的标准形

2.2.1 初等变换

定义 2.4 两行(或列)互换，非零常数乘某行(列)，一行(列)的若干倍加到另一行(列)分别称矩阵的第一、二、三类行(列)初等变换。

例如，互换矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的第一行与第三行得到矩阵 $A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$；用数 (-1) 乘 A 的第二列得到矩阵，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ 9 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$；把 A 的第一行的 2 倍加到第二行得到矩阵，$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \\ 9 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$。袭用计算行列式时采用的记号，

$A \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} A_1$, $A \xrightarrow{-1(2)} A_2$, $A \xrightarrow{(2)+2(1)} A_3$。

性质 (1) **初等变换是可逆的。即若矩阵** A **可经初等变换化为** B,**则** B **也可经初等变换化为** A;

(2) **初等变换不改变方阵行列式的零性。即方阵** A **经初等变换化为** B,**则**$|A|$**与**$|B|$**同时为** 0 **或同时不为** 0。

证 **因为若** $A \xrightarrow{(i)\leftrightarrow(j)} B$,**则** $B \xrightarrow{(i)\leftrightarrow(j)} A$,**且** $|B| = -|A|$,

若 $A \xrightarrow{c(i)} B$,**则** $B \xrightarrow{\frac{(i)}{c}} A$,**且** $|B| = c|A|$ $(c \neq 0)$,

若 $A \xrightarrow{(i)+k(j)} B$,**则** $B \xrightarrow{(i)-k(j)} A$,**且** $|B| = |A|$。

2.2.2 初等矩阵

定义 2.5 **对单位矩阵** E **分别作第一、二、三类初等变换所得的矩阵,分别称为第一、二、三类初等矩阵(我们用** E **泛指各阶单位阵)。**

用 I_{ij} **表示互换** E **的第** i **行与第** j **行所得的第一类初等矩阵**

$$I_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

, I_{ij} **也是互换** E **的第** i **列与第** j **列所得的矩阵,且** $|I_{ij}| = -1$。

用 $I_i(c)$ **表示用非零数** c **乘** E **的第** i **行所得的第二类初等矩阵**

$$I_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

, $I_i(c)$ **也是用** c **乘** E **的** i **列所得的矩阵,**

且 $|I_i(c)| = c \neq 0$。

用 $I_{ij}(k)$ 表示把 E 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行所得的第三类初等矩阵

$$I_{ij}(k)=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\cdots&\ddots&&&\\&&k&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)&\begin{array}{l}\\ \\ j\text{行}\\ \\ i\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccccc}\quad&\quad&\begin{array}{c}j\\ \text{列}\end{array}&\quad&\begin{array}{c}i\\ \text{列}\end{array}&\quad&\quad\end{array}&\end{array}$$

，$I_{ij}(k)$ 也是把 E 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列所得的矩阵，且 $|I_{ij}(k)| = 1$。

直接验证可得：

若 $A \xrightarrow{(i)\leftrightarrow(j)} A_1$，则 $A_1 = I_{ij}A$，

若 $A \xrightarrow{c(i)} A_2$，则 $A_2 = I_i(c)A$，

若 $A \xrightarrow{(i)+k(j)} A_3$，则 $A_3 = I_{ij}(k)A$。

故有：

命题 2.1 矩阵左乘初等阵相当于矩阵作相应的行初等变换。

类似可得：

命题 2.2 矩阵右乘初等阵相当于矩阵作相应的列初等变换。

如
$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&2a_{11}+a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&2a_{21}+a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&2a_{31}+a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}。$$

2.2.3　矩阵的各种标准形

A　阶梯形

若 $A=(a_{ij})_{s\times n}$ 是非零矩阵,设 A 的第一个非零列是第 j_1 列,经两行互换可把第 j_1 列的非 0 元素换到第一行,从而 A 变成

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & b_1 & \\ \cdots & & \cdots & b_2 & * \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & b_s & \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad j_1 \\ \qquad\qquad \text{列}\end{array} = B, b_1 \neq 0,$$

$$B \xrightarrow[\frac{1}{b_1}(1)]{(i)-\frac{b_i}{b_1}(1),\ i=2,\cdots,s} \begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & * \cdots * \\ \cdots & & \cdots & 0 & \\ \cdots & & \cdots & \cdots & A_1 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \end{bmatrix} = C,$$

即 A 经过若干次初等行变换化为 C。若 A_1 不是零矩阵,对 A_1 作类似的行初等变换(A_1 的行数 $\leq s-1$) 使

$$A_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & * \cdots * \\ \cdots & & \cdots & 0 & \\ \cdots & & \cdots & \cdots & A_2 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \end{bmatrix},$$

若 A_2 不是零阵,对 A_2 作类似的行初等变换,……。A_i 的行数 $\leq s-i$,故上述过程必经有限步后终止,即存在 $i<s$ 且 $A_i=0$ 或者 A_{s-1} 是仅有一行的非零矩阵。于是我们得到了下面的定理 2.1。

定理 2.1　任意非零矩阵可经有限次行初等变换化为阶梯形:

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & * & * & \cdots\cdots\cdots\cdots & * \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & 0 & 1 & * \quad \cdots\cdots & * \\ & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & 0 & 1 & * \cdot * \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}\right. \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r\text{个阶梯}(r \leq \text{矩阵行数}) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

。

注　有时不要求阶梯形中每个阶梯的第 1 个元素为 1,而仅要求它是非零数即可。

B　**标准阶梯形**

若可作列互换,则阶梯形可进一步化为

$$D = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \cdots\cdots & c_{1r} & \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & \ddots & c_{r-1,r} & \boldsymbol{B} \\ & & & 1 & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 0 \;\cdots\cdots\; 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 0 \;\cdots\cdots\; 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r\text{个阶梯} \\ \\ \\ \end{matrix},$$

把 D **的** r **行的**$(-c_{ir})$**倍加到** i **行** $(i = 1,\cdots,r-1)$,**得**

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \\ & 1 & * & \vdots & \\ & & \ddots & \vdots & \boldsymbol{B}_1 \\ & 0 & & \ddots \; 0 & \\ & & & 1 & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r\text{个阶梯} \\ \\ \\ \end{matrix}。$$

仿上把 D_1 的$(r-1)$行的若干倍分别加到第 $1,2,\cdots,(r-2)$行,得

$$D_2=\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & * & 0 & 0 & & & \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & \ddots & 0 & \vdots & & \boldsymbol{B}_2 & \\
 & & 1 & 0 & & & \\
 & & & 1 & & & \\
0 & \cdots\cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots\cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r\text{ 个阶梯}\\ \\ \\ \\ \end{array}\text{。}$$

继续这个过程,即得下面定理 2.2。

定理 2.2　任意非零矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times n}$ 可经有限次行初等变换与列互换化为标准阶梯形

$$\begin{pmatrix} E_r & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

X 是 r 行、$(n-r)$ 列矩阵,$r\leq s$。

C　**标准形**

若允许作列初等变换,则标准阶梯形

$$\begin{pmatrix} & x_{11}, & \cdots & x_{1t} \\ E_r & \cdots & & \cdots \\ & x_{r1}, & \cdots & x_{rt} \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix} \xrightarrow[j=1,\cdots,t]{(r+j)-\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}(i)} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

定理 2.3　任意非零矩阵可经有限次行、列初等变换化为标准形 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

例如　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 14 \\ 5 & 12 & 19 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(4)-(2)-(3) \\ [(3)-(1)-(2)]\times\frac{1}{3} \\ (2)-2(1)}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,\ B\text{ 为阶梯形。}$$

$$B \xrightarrow{(4)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)-4(3)]{(2)+(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C,\ C\text{ 为标准阶梯形。}$$

$$C \xrightarrow{(4)-3(1)-2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D,\ D\text{ 即为标准形。}$$

利用“初等变换相当于乘初等阵”,得到上述定理的乘积形式。

定理 2.4 **若** A **为** $s\times n$ **阵,则存在** s **阶初等阵** $P_1,\cdots,P_t,Q_1,\cdots,Q_l$ **与** n **阶初等阵** $R_1,\cdots,R_u$ **使** $P_1\cdots P_tA$ **为阶梯形,** $Q_1\cdots Q_lAR_1\cdots R_u$ **为标准形。**

注 **矩阵作初等变换,仅在它的元素间作加、减、乘、除运算,故各类标准形的元素与原矩阵的元素均在同一数域中。**

2.3 矩阵的秩

2.3.1 矩阵的子阵与子式

若 B **是** s **行、**n **列矩阵,** $B=(b_{ij})_{s\times n}$。**用** $B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_t \end{pmatrix}$ **表示,**

由 B 的第 i_1 行、…、第 i_k 行与第 j_1 列、…、第 j_t 列交叉点上 $k \cdot t$ 个元素组成的 $k \times t$ 矩阵，称为 B 的一个 $k \times t$ 子阵（$k \leq s, t \leq n$）。用 $D_B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 表示 k 阶子阵 $B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的行列式，称为 B 的一个 k 阶子式。$k = 1$ 时，$D_B\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ 表示数 b_{ij}。

如 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，则 $B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$，$D_B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -4$。$B$ 共有 C_4^3 个三阶子式，$C_4^2 \times C_3^2$ 个二阶子式。

2.3.2 矩阵的秩

定义 2.6 非零矩阵 A 的非零子式的最大阶数称为矩阵的秩，记作 $r(A)$。零矩阵的秩为 0。

例如，矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 的所有二阶子式全为 0，而 $D_A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$，所以 A 的秩为 1。矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 仅有一个三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$，其值为 0，而 $D_B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，故 B 的秩为 2。

定义 2.7 若 n 阶方阵 A 的秩为 n，即其惟一 n 阶子式 $|A| \neq 0$，则称 A 为满秩矩阵。

若矩阵的秩等于其行数，则称为行满秩矩阵。若矩阵的秩等于其列数，则称为列满秩矩阵。

性质 (1) $s\times n$ 阵 A 的秩 $\leq \min(s,n)$;

(2) $r(A)=r(A')$;

(3) 阶梯形 $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{2i_2} & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{ri_r} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 的秩等于阶梯个数 r,这里 $a_{ti_t}\neq 0,\ t=1,\cdots,r$;

(4) 矩阵经初等变换其秩不变。

证 按秩的定义,性质(1)与(2)是显然的,今证(3)与(4)于下:

(3) A 仅有 r 个非零行, $s>r$ 时, A 的任意 s 阶子式必有零行,故其值为 0。但

$$D_A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{1i_1} & & \\ & \ddots & * \\ 0 & \ddots & \\ & & a_{ri_r} \end{vmatrix}=a_{1i_1}\cdots a_{ri_r}\neq 0,$$

故 A 的秩为 r。

(4) 设 A 经一次初等变换化为 B,又设 $s>r(A)$。若 A 是经第一或第二类初等变换化为 B,则 B 的任意一个 s 阶子式等于某个非零数乘以 A 的某个 s 阶子式,因为 $s>r(A)$,所以 A 的 s 阶子式全为 0,从而 B 的 s 阶子式也全为 0,于是 $r(B)\leq r(A)$。

若 A 经第三类初等变换化为 B,如 $A\xrightarrow{(i)+k(j)}B$,有两种可能:① B 的一个 s 阶子式不含第 i 行或同时含第 i 行与第 j 行,则它等于 A 的一个 s 阶子式,即为 0;② B 的一个 s 阶子式含 i 行,但不含 j 行,则它等于 $D_1\pm kD_2$, D_1 是 A 的一个含第 i 行的 s 阶子式, D_2 是 A 的含第 j 行的一个 s 阶子式,故仍为 0。由此 $r(B)\leq r(A)$。

综上所述,A经一次初等变换得到 B 时, $r(B) \leq r(A)$。由初等变换的可逆性,B 也可经一次初等变换得到 A, 于是 $r(A) \leq r(B)$。从而 $r(A) = r(B)$。

矩阵经一次初等变换其秩不变,因而经有限次初等变换,其秩仍不变。

由性质(3)、(4)可得求秩方法:

用初等变换化矩阵为阶梯形,则阶梯个数就是矩阵的秩。

命题 2.3 矩阵的秩等于它的各类标准形中阶梯个数。

例 2.15 求下列矩阵的秩:

(1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$。

解 (1) A 的非 0 行仅有三行,故其秩≤3,又 A 的第 1,2,4 行与第 3,5,7 列组成的 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故 A的秩为 3。

(2) $A \xrightarrow{(s)+(1)+(2)+(3)+(4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,后者为有 4 个阶梯的阶梯形,故 A的秩为4。

例 2.16 求证:

(1) $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$;

(2) $r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$。

证 (1) 设 $r(A) = s$, $r(B) = t$, 则 A **可经初等变换化为** $\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, B **可经初等变换化为** $\begin{pmatrix} E_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

于是 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ **可经初等变换化为** $\begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **更进一步**,

可经初等变换化为 $\begin{pmatrix} E_s & & \\ & E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, **后者共有** $(s+t)$ **个阶梯**, **从而**

$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = s + t = r(A) + r(B)$。

(2) **由**(1), $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ **可经初等变换化为** $\left(\begin{array}{cc|cc} E_s & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C_1}} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & E_t & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)$, **后者有一个** $(s+t)$ **阶子式**

$$\begin{vmatrix} E_s & D \\ 0 & E_t \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

故

$$r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq (s+t) = r(A) + r(B)。$$

2.3.3 相抵矩阵

定义 2.8 **若** $s \times n$ **阵** A **可经有限次初等变换化为** $s \times n$ **阵** B,

则称 A 与 B 相抵, 记成 $A\wedge B$。

由于作初等变换相当于乘以初等阵, 故 $A \wedge B$ 　存在初等阵 $P_1, \cdots, P_t, Q_1, \cdots, Q_l$ 使 $B = P_t, \cdots, P_1 AQ_1, \cdots, Q_l$。

由初等变换性质易得:

(1) $A\wedge A$;

(2) 若 $A\wedge B$, 则 $B\wedge A$;

(3) 若 $A\wedge B$, $B\wedge C$, 则 $A\wedge C$。

即矩阵的相抵关系是一个等价关系。

命题 2.4 　$s\times n$ 阵 A 与 B 相抵 　$r(A) = r(B)$。

证 　　$A \wedge B$, A 可经有限次初等变换化为 B, 由于初等变换不改变矩阵的秩, 故 $r(A) = r(B)$;

若 $r(A) = r(B)$, 则 A 与 B 有相同标准形 D, $A \wedge D$, $B \wedge D$, 从而 $A \wedge B$。

命题 2.5 　满秩阵是初等阵的积。

证 　若 A 是满秩阵, 则 A 的标准形为 E, $E \wedge A$, 从而存在初等阵 $P_1, \cdots, P_t, Q_1, \cdots, Q_l$ 使

$$A = P_1 \cdots P_t EQ_1 \cdots Q_l = P_1 \cdots P_t \cdot Q_1 \cdots Q_l\text{。}$$

推论 　满秩阵可只经行初等变换或只经列初等变换化为单位阵。

证 　满秩阵 A 是初等阵 $P_1, \cdots, P_s$ 的积:

$$A = P_1 \cdots P_s = P_1 \cdots P_s E,$$

即 E 可经行初等变换化为 A, 从而 A 可只经行初等变换化为 E。

类似可证, A 可只经列初等变换化为 E。

命题 2.6 　列满秩阵可经行初等变换化为标准形。

证 　设 $s\times n$ 阵 A 为列满秩阵, 即其秩为 n, A 可经行初等变换化为阶梯形 B(共有 n 个阶梯):

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & & b_{1i_1} & * & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & * \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & b_{2i_2} & * & \cdots\cdots\cdots\cdots & * \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & b_{ni_n} & * \cdots * \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix},$$

B**是** $s\times n$ **阵,其列数** $=n=$ **阶梯数,于是**

$$1\leq i_1<i_2\cdots<i_n\leq n,$$

故必 $i_1=1, i_2=2,\cdots,i_n=n$,**即**

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & & & * \\ & \ddots & & \\ & & b_{22} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & b_{nn} \\ 0 & & \cdots\cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots\cdots & & 0 \end{pmatrix}。$$

仿照标准阶梯形化标准形的方法,可用行初等变换化 B**为标准形** $\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$。**本命题得证。**

类似地,可得命题 2.7 **的证明**:

命题 2.7 **行满秩矩阵可经列初等变换化为标准形**$(E \quad 0)$。

2.3.4 矩阵积的秩与行列式

命题 2.8 $r(AB)\leq r(A)$。

证 设 $r(A)=s$,**由定理** 2.4,**存在初等阵** $P_1,\cdots,P_t,Q_1,\cdots,Q_l$ **使**

$$A = P_1 \cdots P_t \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 \cdots Q_l,$$

$$AB = P_1 \cdots P_t \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 \cdots Q_l B = P_1 \cdots P_t \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C,$$

这里 $C = Q_1 \cdots Q_l B$。从而$\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C$可经初等变换化为 AB,所以 AB的秩等于$\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C$的秩,而后者的非零行最多有 s行,于是其秩 $\leq s$。故 $r(AB) \leq s = r(A)$。

推论 1　$r(AB) \leq r(B)$。

证　$r(AB) = r((AB)') = r(B'A') \leq r(B') = r(B)$。

推论 2　若 A, B均为 n阶方阵,且 $|A| = 0$或 $|B| = 0$,则 $|AB| = 0$。

证　由 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$ 得 $r(A) < n$或 $r(B) < n$,由命题 2. 6 或上述推论 1 可知 $r(AB) < n$,从而 AB 的 n 阶子式 $|AB| = 0$。

引理 2 .1　若 B 为 n 阶方阵, P 是 n 阶初等阵,则 $|PB| = |P||B|$。

证　(1) 若 $P = I_{ij}$, $|P| = -1$, $B \xrightarrow{(i)\backslash(j)} PB$,于是 $|PB| = -|B| = |P||B|$。

(2) 若 $P = I_i(c)$, $|P| = c$, $B \xrightarrow{c(i)} PB$,于是 $|PB| = c|B| = |P||B|$。

(3) 若 $P = I_{ij}(k)$, $|P| = 1$, $B \xrightarrow{(i)+k(j)} PB$,于是 $|PB| = |B| = |P||B|$。

定理 2 .5　若 A, B 同为 n 阶方阵,则

$$|AB| = |A||B|。$$

证　(1) 若 $r(A) < n$, $|A| = 0$,由命题 2. 8 的推论 2 得 $|AB| = 0$,故结论成立。

(2) 若 $r(A) = n$,则 A 为初等阵 $P_1, \cdots, P_t$ 的积,设为

$$A = P_1 \cdots P_t,$$

则 $|A| = |P_1| \cdot |P_2 \cdots P_t| = |P_1| \cdot |P_2| \cdot |P_3 \cdots P_t|$
$= \cdots = |P_1| \cdots |P_t|$。

$|AB| = |P_1 \cdots P_t B| = |P_1| \cdot |P_2 \cdots P_t B|$
$= |P_1| \cdots |P_t| \cdot |B| = |A| \cdot |B|$。

由(1)、(2),定理得证。

例 2.17 若方阵 A 满足 $A^2 - 4A + 3E = 0$。

求证:$|A - 2E| = \pm 1$。

证 $(A - 2E)^2 = A^2 - 4A + 4E = E$,

两边取行列式,得

$$|A - 2E|^2 = |E| = 1,$$

故 $|A - 2E| = \pm 1$。

例 2.18 若方阵 A 满足:$AA' = E$,且 $|A| \neq 1$。

求证:$|A + E| = 0$。

证 $|A + E| = |A + AA'| = |A(E + A')|$
$= |A(E + A)'| = |A| \cdot |(E + A)'|$
$= |A| \cdot |E + A|$。

于是 $(|A| - 1) \cdot |E + A| = 0$,

因 $|A| \neq 1$, $|A| - 1 \neq 1$,故必

$$|A + E| = 0。$$

例 2.19 若 n 阶方阵 A 的第 i 行第 j 列元素为 $\dfrac{a_i^n - b_j^n}{a_i - b_j}$,这里:$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ 是两两不同的数,求 A 的行列式值。

解 $\dfrac{a_i^n - b_j^n}{a_i - b_j} = a_i^{n-1} b_j^0 + a_i^{n-2} b_j^1 + \cdots + a_i^0 b_j^{n-1}$

$$= (a_i^{n-1}, a_i^{n-2}, \cdots, a_i^1, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ b_j \\ b_j^2 \\ \cdots \\ b_j^{n-1} \end{pmatrix}。$$

故 $A = BC$,这里 B 的 i 行为 $(a_i^{n-1}, a_i^{n-2}, \cdots, a_i, 1)$, C 的 j 列为 $\begin{pmatrix} 1 \\ b_j \\ \cdots \\ b_j^{n-1} \end{pmatrix}$。

于是

$$
\begin{aligned}
|A| &= |B| \cdot |C| \\
&= \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j) \cdot \prod_{1 \le j < i \le n} (b_i - b_j)。
\end{aligned}
$$

2.4 可逆矩阵

2.4.1 可逆矩阵

定义 2.9 n 阶方阵 A 称为可逆阵,如果存在 n 阶方阵 B 使 $AB = BA = E_n$。此时, B 称为 A 的逆。

例如 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,取 $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,则 $AB = BA = E_2$,故 A 可逆, B 是 A 的逆。

性质 (1) 若 A 可逆,则 A 的逆惟一,记为 A^{-1},且 A^{-1} 也可逆, $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) 若 A 可逆, $k \neq 0$,则 kA 也可逆,且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$;

(3) 若 A 可逆,则 A' 也可逆,且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

(4) 若 $A_1, \cdots, A_s$ 皆可逆,则 $A_1 \cdots A_s$ 也可逆,且 $(A_1 \cdots A_s)^{-1} =$

$A_s^{-1} \cdots A_1^{-1}$。

证 (1) **若** B **与** C **都是** A **的逆,则**

$B = BE = BAC = (BA)C = EC = C$, **即逆惟一。**

由 $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$ **可知**, $(A^{-1})^{-1} = A$。

(2) **由** $(kA) \cdot \left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) \cdot kA = E$, **知**

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}。$$

(3) $(A \cdot A^{-1})' = E' = E$, **故** $(A^{-1})' \cdot A' = E$,

又

$$A' \cdot (A^{-1})' = (A^{-1} \cdot A)' = E' = E,$$

所以

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'。$$

(4) **因为** $(A_1 \cdots A_s) \cdot (A_s^{-1} \cdots A_1^{-1})$

$$= (A_s^{-1} \cdots A_1^{-1})(A_1 \cdots A_s) = E,$$

所以

$$(A_1 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} \cdots A_1^{-1}。$$

命题 2.9 初等阵是可逆阵且

$$(I_{ij})^{-1} = I_{ij}, (I_i(c))^{-1} = I_i\left(\frac{1}{c}\right), (I_{ij}(k))^{-1} = I_{ij}(-k)。$$

定理 2.6 若 A **是** n **阶方阵,则下列命题是彼此等价的**:

(1) A **可逆**;

(2) **存在** n **阶方阵** B **使** $AB = E$ **或** $BA = E$;

(3) $|A| \neq 0$;

(4) A **满秩**;

(5) A **是有限个初等阵的积。**

证 (1)　　(2) **显然。**

(2)　　(3) **由** $AB = E$ **或** $BA = E$, **两边取行列式,由定理** 3.5

得 $|A|\cdot|B|=1$,从而 $|A|\neq 0$。

(3) ⇒ (4) 由 $|A|\neq 0$ 得 A 的秩为 n,即 A 是满秩阵。

(4) ⇒ (5) 见命题 3. 5。

(5) ⇒ (1) A 是有限个初等阵的积,而初等阵是可逆的,由性质(4),A 可逆。

例 2.20 若方阵 A 满足 $A^2=A$,但 $A\neq E$,求证:$|A|=0$。

证 (反证法)若 $|A|\neq 0$,则 A 可逆,有逆 A^{-1}。于是 $A^{-1}\cdot A^2=A^{-1}\cdot A=E$,即 $A=E$,与题设矛盾。故必

$$|A|=0。$$

例 2.21 若方阵 A 满足 $A^2-A=6E$,求证:方阵 $A-4E$ 可逆。

证 因为

$$\begin{aligned}(A-4E)(A+3E)&=A^2-A-12E\\&=6E-12E=-6E,\end{aligned}$$

于是

$$(A-4E)\left(\frac{A+3E}{-6}\right)=E,$$

故 $(A-4E)$ 可逆。

例 2.22 若同阶方阵 A,B 满足:$A+B=AB$,求证:$AB=BA$。

证 $(E-A)(E-B)=E-A-B+AB=E$,即 $E-A$ 是 $E-B$ 的逆,故

$$(E-B)(E-A)=E=(E-A)(E-B),$$

即得 $BA=AB$。

2.4.2 伴随矩阵

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,由行列式的性质(2)得

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}M\binom{i}{j}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}M\binom{i}{j}$$

若记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M\binom{i}{j}$,则

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}。$$

若 $i \neq k$，令 $|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ k\text{行} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$，即把 $|A|$ 中的 i 行用 k 行代替，$|A|$ 与 $|B|$ 除了第 i 行外全部相同，因而 $M_A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = M_B\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$，故可记成 $M\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$。由于 $|B|$ 中第 k 行与第 i 行相等，因而其值为 0，又 $|B|$ 按 i 行展开得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = 0 \quad (i \neq k)。$$

如果把 $i = k$ 的情形一起考虑，则得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = \delta_{ki} |A|。 \tag{2-1}$$

同理

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ij} = \delta_{kj} |A|。 \tag{2-2}$$

定义 2.10 设 A 为 n 阶方阵，称 n 阶方阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

为 A 的伴随矩阵。

由式(2-1)和式(2-2)可得

命题 2.10 $A \cdot A^{*} = A^{*} A = (\delta_{ij} \mid A \mid)_{n\times n} = \mid A \mid E_n$。

推论 若 A 可逆,则 $A^{-1} = \dfrac{A^{*}}{\mid A \mid}$。

例 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $\mid A \mid = -1$, $A_{11} = 7$, $A_{22} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -5$, $A^{*} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$,从而 $A^{-1} = -A^{*} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$。

2.4.3 实用求逆法

用求伴随阵的方法来求逆,计算量太大,不实用。下面我们利用初等变换与初等矩阵导出一个实用的求逆方法。

设 A 是可逆矩阵, $A^{-1} \cdot A = E$。A^{-1} 也是可逆阵,从而它可表为初等矩阵的积: $A^{-1} = P_t \cdots P_1$。于是 $P_t \cdots P_1 A = E$,即 A 经过 t 次行初等变换化为 E,则在同样的行初等变换下, E 化为 $P_t \cdots P_1 E = P_t \cdots P_1 = A^{-1}$。由此,得实用求逆法。

求逆方法 用行初等变换化 $n\times 2n$ 矩阵 (AE) 为 (EX)(即根据定理 2.4,用行初等变换化 A 为 E),则 X 为所求 A 的逆阵。

例 2.23 求 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的逆。

解 $(A\ E) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\times(2)]{(1)+2(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}。$$

例 2.24 $A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&\ddots&2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&n-1\\n&&&&0\end{pmatrix}$，**求** A^{-1}。

解 $(AE)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}0&1&&&&1&&&&\\&\ddots&2&&&&\ddots&&&\\&&\ddots&\ddots&&&&\ddots&&\\&&&\ddots&n-1&&&&\ddots&\\n&&&&0&&&&&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\cdots\\(n-1)\to(n)}]{\substack{(n)\to(1)\\(1)\to(2)}}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}n&&&&&0&\cdots&\cdots&0&1\\&1&&&&1&0&&&\\&&2&&&&\ddots&\ddots&&\\&&&\ddots&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&n-1&&&&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[i=2,\cdots,n-1]{\substack{\frac{1}{n}(1)\\\frac{1}{i-1}(i)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&&&&&0&&&&\frac{1}{n}\\&1&&&&1&0&&&\\&&1&&&&\frac{1}{2}&0&&\\&&&\ddots&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&1&&&&\frac{1}{n-1}&0\end{array}\right),$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & & & & \frac{1}{n} \\ 1 & \ddots & & & \\ & \frac{1}{2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$。

方法推广 1 若(A, B)经行初等变换化为(E, X)，则 $X = A^{-1}B$(A与B有相同行数，且A可逆)。

方法推广 2 若$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$经列初等变换化为$\begin{pmatrix} E \\ Y \end{pmatrix}$，则$Y = BA^{-1}$($A$与$B$有相同列数，且$A$可逆)。

证 A与B作相同的行初等变换，若A化为E(即$P_1\cdots P_tA = E$，从而$P_1\cdots P_t = A^{-1}$)，则B化为$P_1\cdots P_tB = A^{-1}B$。

若A与B作相同的列初等变换，A化为E，即$AP_1\cdots P_t = E$，B化为$BP_1\cdots P_t = BA^{-1}$。

例 2.25 求二阶方阵X与Y使

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}。$$

解 $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$，

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)\times(2)]{(1)+2(2),} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

故

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-2(1)]{(1)\backslash(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)\times(2)]{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

故
$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

例 2.26 若 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $A^{-1}BA = BA + 2E$, 求 B。

解 $A(A^{-1}BA)A^{-1} = A(BA+2E)A^{-1}$, 得

$$B = AB + 2E,$$

$$B = 2(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 13 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}。$$

例 2.27 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $B = (E - A)^{-1}(A + 3E)$, 求 $(B+E)^{-1}$。

解 $(E - A)B = A + 3E$, $(E - A)E = E - A$。

上面两式相加,得

$$(E - A)(B + E) = 4E,$$

故
$$(B+E)^{-1} = \frac{E-A}{4} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}。$$

2.5 分块矩阵

2.5.1 矩阵的分块

为了表示和运算的方便,可把矩阵分块,从而把原矩阵看成由

许多小矩阵排列而成的大矩阵。

设 A 为 $s\times n$ 阵，$A=(a_{ij})_{s\times n}$。给 s 与 n 一个划分，即

$$s=i_1+\cdots+i_t,\quad \text{这里 } i_1,\cdots,i_t\in Z^+,$$
$$n=j_1+\cdots+j_l,\quad \text{这里 } j_1,\cdots,j_l\in Z^+。$$

用 $A_{u,v}$ 表示由 A 的第 $s_{u-1}+1,\cdots$，第 $s_{u-1}+i_u$ 行与第 $n_{v-1}+1,\cdots$，第 $n_{v-1}+j_v$ 列所成 $i_u\times j_v$ 阵。这里 $s_{u-1}=i_1+\cdots+i_{u-1}$，$n_{v-1}=j_1+\cdots+j_{v-1}$。则得 A 的一个分块形式 $(A_{uv})_{t\times l}=\begin{pmatrix}A_{11}, & \cdots, & A_{1l}\\ \cdots & & \\ A_{t1}, & \cdots, & A_{tl}\end{pmatrix}$。

如 $A=\left(\begin{array}{cc|ccc|c}1&2&0&0&0&1\\3&4&0&0&0&2\\\hline 0&0&1&2&7&4\\0&0&2&1&0&3\\\hline 2&4&3&1&1&0\end{array}\right)$ 是 5×6 阵。$5=2+2+1$，$6=2+3+1$，从而对 A 作了分块，A 可看成由 9 个小矩阵为元素的大矩阵。

2.5.2 准对角矩阵

定义 2.11 若 A 为 n 阶方阵，给 n 一个划分，$n=i_1+\cdots+i_t$，如果 A 的分块形式为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \boldsymbol{0}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{A}_t\end{pmatrix}$，即对角线外的矩阵全是零矩阵，则称 A 为准对角阵。这里 A_k 为 i_k 阶方阵（$k=1,\cdots,t$）。

若 A,B 都是 n 阶方阵，给 n 一个划分 $n=i_1+\cdots+i_t$，A 与 B 的相应分块形式为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \boldsymbol{0}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{A}_t\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & \boldsymbol{0}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{B}_t\end{pmatrix}$。准对角矩阵 A,B 有如下运算法则：

(1) $A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_t+B_t \end{pmatrix}$;

(2) $AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_tB_t \end{pmatrix}$;

(3) $|A|=|A_1|\cdots|A_t|$;

(4) 若 A 可逆,则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_t^{-1} \end{pmatrix}$;

(5) 若 $f(x)$为数域 P 上的多项式,则

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(A_t) \end{pmatrix}。$$

运算法则(1)可直接由加法定义得到,(3)可由例 1.16 推出,(2)、(4)可由分块矩阵的乘法法则(见后)推出,(5)可由(1)、(2)直接推出。

2.5.3 分块矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times m}$,分别给 s, n, m 一个划分:

$$s=i_1+\cdots+i_t,$$
$$n=j_1+\cdots+j_l,$$
$$m=k_1+\cdots+k_r。$$

A 与 B 相应的分块形式为

$A=(A_{uv})_{t\times l}$, $B=(B_{uv})_{l\times r}$。则有

分块乘法法则 $AB=C=(C_{uv})_{t\times r}$,此处 $C_{uv}=\sum\limits_{w=1}^{l}A_{uw}B_{wv}$。

即与把 A_{uw}, B_{wv} 看成数时的乘法法则相同。

证 直接验证可知,矩阵 C 和 AB 都是 $s\times m$ 阵,又设

$$i = i_1 + \cdots + i_{u-1} + i',\ 1 \leq i' \leq i_u,$$
$$j = j_1 + \cdots + j_{v-1} + j',\ 1 \leq j' \leq i_v,$$

则 $C(i, j)$ 是 C_{uv} 中第 i' 行,第 j' 列的元素,即 $\sum_{w=1}^{l} A_{uw}B_{wv}$ 中第 i' 行,第 j' 列的元素。

$$C_{uv}(i', j') = \left[\sum_{w=1}^{l} A_{uw}B_{wv}\right](i', j')$$
$$= \left((A_{u1}, A_{u2}, \cdots, A_{ul})_{i'\text{行}} \underset{\substack{\uparrow \\ j'\text{列}}}{\begin{pmatrix} B_{1v} \\ B_{2v} \\ \cdots \\ B_{lv} \end{pmatrix}} \right)(i', j')$$
$$= A_{(i)}B^{(j)} = (AB)(i, j),$$

故 $$C = AB。$$

推论 1 $AB = A(B^{(1)}, \cdots, B^{(m)}) = (AB^{(1)}, \cdots, AB^{(m)})$。

证 给 s, n, m 如下划分:

$s = s, n = n, m = 1 + 1 + \cdots + 1$, 由分块矩阵乘法即得本推论。

推论 2 $$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{(1)} \\ \cdots \\ B_{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}B_{(i)} \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{si}B_{(i)} \end{pmatrix}。$$

证 给 s, n, m 如下划分:

$$s = 1 + 1 + \cdots + 1, n = 1 + \cdots + 1, m = m。$$

即得。

推论 3
$$AB=(A^{(1)}\ A^{(2)}\cdots A^{(n)})\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \cdots & & \cdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nm}\end{pmatrix}$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}b_{i1}A^{(i)},\cdots,\sum_{i=1}^{n}b_{im}A^{(i)}\right)。$$

推论 2 表明:矩阵 A 左乘 B,相当于 B 的行向量作了重新组合,即左乘等价于行变换。乘积 AB 的行向量是 B 的行向量的线性组合,从而再次证明了:B 的行秩大于等于 AB 的行秩,因此 $r(AB)\leq r(B)$。

推论 3 表明:矩阵 B 右乘 A,相当于 A 的列向作了重新组合,即右乘等价于列变换。乘积 AB 的列向量是 A 的列向量的线性组合,从而再次证明了:A 的列秩大于等于 AB 的列秩,因此 $r(AB)\leq r(A)$。

“左乘等价于行变换,右乘等价于列变换”为处理矩阵问题提供了一个极有用的技巧:用行列变换化矩阵为适当形式,然后用乘法记录这个结果,相应的结论就产生了。

命题 2.11 若 X 为 n 阶方阵,且
$$(X,E_n)\xrightarrow{\text{行变换}}(Y,D),$$
则
$$DX=Y。$$

证 因为行变换等价于左乘,X 与 E_n 作相同的行变换相当于左乘同一个矩阵(例如 P),于是
$$\begin{cases}PX=Y\\ PE_n=D\end{cases}\quad DX=Y。$$

命题 2.12 若 X 为 n 阶方阵,且
$$\begin{pmatrix}X\\E_n\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}Z\\D\end{pmatrix},$$
则
$$XD=Z。$$

证 因为列变换等价于右乘,X 与 E_n 作相同的列变换相当于右乘同一个矩阵(例如 Q),于是

$$\begin{cases} XQ = Z \\ E_n Q = D \end{cases} \quad XD = Z。$$

引理 若 A 为分块矩阵：$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1v} \\ \cdots & & \\ A_{k1} & \cdots & A_{kv} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{u1} & \cdots & A_{uv} \end{pmatrix}$，

则 $\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1v} \\ \cdots & & \\ CA_{k1} & \cdots & CA_{kv} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{u1} & \cdots & A_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E \end{pmatrix} A$。

即分块矩阵的第 k 个行块每个小矩阵分别左乘矩阵 C，等价于整个矩阵 A 左乘一个矩阵。

由引理，易得下面的命题。

命题 2.13 **把分块矩阵的每个小块看成一个元素，作行(列)初等变换，等于左(右)乘一个矩阵，即相当于原矩阵作行(列)变换。**

例 2.28 **求 $2n$ 阶行列式** $\begin{vmatrix} 2E_n & E_n \\ E_n & 2E_n \end{vmatrix}$。

解 **因为**

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2E_n & E_n & E_n & 0 \\ E_n & 2E_n & 0 & E_n \end{array}\right) \xrightarrow{(2) - \frac{1}{2}(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2E_n & E_n & E_n & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}E_n & -\frac{1}{2}E_n & E_n \end{array}\right)。$$

由命题 2.11(或直接由分块矩阵乘法法则验证)，得

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -\frac{1}{2}E_n & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2E_n & E_n \\ E_n & 2E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2E_n & E_n \\ 0 & \frac{3}{2}E_n \end{pmatrix}。$$

两边取行列式，得

$$\begin{vmatrix} 2E_n & E_n \\ E_n & 2E_n \end{vmatrix} = |2E_n| \cdot \left|\frac{3}{2}E_n\right| = 2^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = 3^n。$$

例 2.29 若 A, B 都是 n 阶方阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{vmatrix} = 4^n |A| \cdot |B|。$$

证 因为 $\left(\begin{array}{cc|cc} A+B & A-B & E_n & 0 \\ A-B & A+B & 0 & E_n \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 2A & 2A & E_n & E_n \\ A-B & A+B & 0 & E_n \end{pmatrix}$。

由命题 2.11(或直接验证), 得

$$\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & 2A \\ A-B & A+B \end{pmatrix}。$$

又 $\begin{pmatrix} 2A & 2A \\ A-B & A+B \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ A-B & 2B \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$。

由命题 2.12(或直接验证), 得

$$\begin{pmatrix} 2A & 2A \\ A-B & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ A-B & 2B \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ A-B & 2B \end{pmatrix}。$$

两边取行列式, 得

$$\begin{vmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{vmatrix} = |2A| \cdot |2B| = 2^n |A| \cdot 2^n |B| = 4^n |A| \cdot |B|。$$

例 2.30 设 A 是 n 阶方阵, D 为 s 阶方阵, B 为 $n \times s$ 阵, C 为 $s \times n$ 阵, 记

$$I = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}。$$

(1) 若 A 可逆,则 $I = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$;

(2) 若 D 可逆,则 $I = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|$;

(3) 若 A, D 都可逆,则 $|A - BD^{-1}C| = \dfrac{|A|}{|D|}|D - CA^{-1}B|$。

证 (1) 因 $\left[\begin{array}{cc|cc} A & B & E_n & 0 \\ C & D & 0 & E_s \end{array}\right] \xrightarrow{(2)-CA^{-1}(1)} \left[\begin{array}{cccc} A & B & E_n & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B & -CA^{-1} & E_s \end{array}\right]$,

由命题 2.11(或直接验证)得

$$\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

两边取行列式,即得

$$I = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|。$$

(2) 因 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ -D^{-1}C & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$,

两边取行列式,得

$$I = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|。$$

(3) 由(1),(2)即得

命题 2.14 若 A 为 n 阶可逆阵,β 与 γ 分别是 $n \times 1$ 阵与 $1 \times n$ 阵,则 $|A + \beta \cdot \gamma| = |A| \cdot (1 + \gamma A^{-1}\beta)$。

解 在例 2.30(3)中,令 $D = (-1)$, $B = \beta$, $C = \gamma$,即得证明。

若在命题 2.14 中,令 $A = \lambda E(\lambda \neq 0)$,则得下面推论。

推论 若 $\lambda \neq 0$, β, γ 分别为 $n \times 1$ 与 $1 \times n$ 阵,则

$$|\lambda E + \beta\gamma| = \lambda^{n-1}(\lambda + \gamma\beta)。$$

例 2.31 若 $A = (2\delta_{j} + ij)_{n \times n}$,求 A 的行列式值。

解 $A = 2E + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \cdots \\ n \end{pmatrix}(1, 2, \cdots, n)$。

由上述推论，$|A| = 2^{n-1}\left[2 + (1,2,\cdots,n)\begin{pmatrix}1\\2\\\cdots\\n\end{pmatrix}\right]$

$$= 2^{n-1}\left[2 + \sum_{k=1}^{n} k^2\right]。$$

习 题 2

1. 设 $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\0 & 7 & 4\end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\3 & 5 & 0\end{pmatrix}$，求 $AB - BA$。

2. 若 n 阶方阵 A 的行列式值 $|A| = d$，求 $|kA|$。

3. 计算：

(1) $(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\ 2\ 3)$；

(3) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}^2$；

(4) $(x\ y\ 1)\begin{pmatrix}a & b & d\\b & c & e\\d & e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^n$；

(6) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^n$；

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$;

(8) $\begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$;

(9) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n$;

(10) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n$。

4. **若** A, B **为同阶方阵,且** $AB = BA$, **试用归纳法证明**:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k,$$

由此求 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}^n$ **与** $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^n$。

5. **若** $f(x) = x^2 - 4x + 1$, **求** $f\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right)$。

6. **设** $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **两两不等。若** n**阶方阵** B **与** A **可交换,即** $AB = BA$, **求证**: B **也是对角矩阵。**

7. **若** n**阶方阵** A **与所有** n **阶方阵可交换,求证**: A **是数量矩阵,即存在数** k **使** $A = kE_n$。

8. **若** $A = \frac{1}{2}(B+E)$, **求证**: $A^2 = A \iff B^2 = E$。

9. **求证**:

(1) (反)对称矩阵的和、差与数乘仍是(反)对称矩阵;

(2) 对称矩阵的幂与多项式仍是对称矩阵;

(3) 若 A 为方阵,则 $A+A'$, $A'A$ 为对称矩阵, $A-A'$ 为反对称矩阵。

10. 若 a 是 $n\times 1$ 阵, $A=E_n-2aa'$, $a'a=1$, 求证: A 是对称阵,且 $A^2=E$。

11. 若实对称 A 满足 $A^2=0$, 求证: $A=0$。

12. 求证: 奇数阶反对称阵的行列式为 0。

13. 求证: 任意矩阵可表示为对称阵与反对称阵之和。

14. 求 n 阶行列式 $|(a_i+b_j)^k|_n$, $k=1,2,\cdots,n-1$。

15. 若 $A=(a_{ij})_{2n\times 2n}$, $B=(b_{ij})_{2n\times 2n}$, 且

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{i,2k-1} & a_{j,2k-1} \\ a_{i,2k} & a_{j,2k} \end{vmatrix},$$

求证: $|B|=|A|^2$。

16. 设 $s_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k$, $a_{ij}=s_{i+j-2}$, 求证:

$$|a_{ij}|_n=\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)^2。$$

*17. 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots\cdots & & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & \ddots & a_1 \end{vmatrix}$ 的值。

18. 求下列矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix}_n$。

19．**若** A **为方阵,多项式** $f(x)$**满足** $f(0) = 0$, **求证**:

$$r(f(A)) \leq r(A)。$$

20．**分别用行初等变换和行、列初等变换化下列矩阵为阶梯形与标准形**:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots \quad -1 & \vdots \\ -1 & & & 1 & a_n \end{pmatrix}$。

21．**若** $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (123)$, **求** A^{100}。

22．**若** A **是** $s \times n$ **阵**, B **是** $n \times s$ **阵,且** $r(B) = n$, $AB = 0$, **求证**: $A = 0$。

23. **若** $s\times n$ **阵** A **的秩为** r, **求证**: **存在** $s\times r$ **阵** L **与** $r\times n$ **阵** R, **两者的秩均为** r, **且** $A = LR$。

24. **若方阵** A **的秩为** 1, **求证**: **存在数** k **使** $A^2 = kA$。

25. **求下列矩阵的逆**:

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 0 & & & & & n \\ 1 & \ddots & & & & \\ & 2 & \ddots & & & \\ & & 3 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & n-1 & 0 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & 1 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$。

26. **若方阵** A **满足** $A^{100} = 0$, **求证**: $E - A$ **可逆**。

27. 若方阵 A 满足 $A^2 - 5A + 6E = 0$, 且 $A + kE$ 可逆, 求数 k 的范围。

28. 求矩阵 X,若

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $X\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$。

29 . 设 A 为五阶可逆矩阵:

(1) 交换 A 的第二行与第四行, 得矩阵 B, 求 AB^{-1};

(2) 把 A 的第五列加到第四列, 得矩阵 C, 求 $C^{-1}A$。

30. 设 α 为 $n\times1$ 阵, $A = E_n - \alpha\cdot\alpha'$, $\alpha'\alpha = 1$。求证: $|A| = 0$。

31. 求证: 1) 对称阵的逆仍是对称阵;

(2) 上(下)三角阵的逆仍是上(下)三角阵。

32. 若 A 是 n 阶方阵, $n \geq 2$, 求证:

$$|A^*| = |A|^{n-1}。$$

33. 若 A 是 n 阶方阵, $n \geq 2$, 求证:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } r(A) = n \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } r(A) = n-1 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } r(A) < n-1 \text{ 时}。 \end{cases}$$

34. 设 A, B, C, D 都是 n 阶方阵, A 可逆, $|A| = d, AC = CA$,

求证: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$, 并求 $2n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3A & A \\ A & 3A \end{vmatrix}$ 的值。

35. 若 A, B 都是 n 阶方阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B||A - B|。$$

36. 设 A 是 $s \times n$ 阵, B 是 $n \times s$ 阵, $s \geq n, \lambda \neq 0$, 求证: $|\lambda E_s - AB| = \lambda^{s-n}|\lambda E_n - BA|$。

37. 若 A 是 n 阶可逆阵, α, β 都是 $n \times 1$ 阵, 且 $\beta' A^{-1}\alpha + 1 \neq 0$, 求证: $A + \alpha\beta'$ 可逆。

38. 若 A 与 B 都是 n 阶方阵, 求证:

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n。$$

第 3 章　线性方程组

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad , \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sj}x_j + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{3 - 1}$$

称为 s 式 n 元线性方程组。这里 $x_1, \cdots, x_n$ 是未知量, $\{a_{ij} \mid i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, n\}$ 是未知量的系数, a_{ij} 是第 i 式中未知量 x_j 的系数, $b_1, \cdots, b_s$ 称为常数项。

记 $A = (a_{ij})_{s\times n}$, 称为式(3 - 1)的系数矩阵; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_s \end{pmatrix}$, 则式(3 - 1)的矩阵形式为

$$AX = \beta。\tag{3 - 2}$$

若记 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{si} \end{pmatrix}$, $i = 1, \cdots, n$, 则式(3 - 1) 又可表示成

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta。\tag{3 - 3}$$

常称式(3 - 3)为线性方程组(3 - 1)的向量形式。

一组数 $c_1, \cdots, c_n$ 称为上述线性方程组的解, 如果 $A\begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \beta$。

例如,三式四元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 1, \end{cases}$$

它的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

它的向量形式为

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

容易验证$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$为它的一组解。

本章中,我们以矩阵为工具导出线性方程组有解的条件,求解的方法;更以向量为工具探讨解的结构,完善求解的理论与方法。

3 .1 解的存在性与惟一性

3 .1 .1 同解线性方程组

定义 3 .1 称两个线性方程组 $AX = \beta$与$CX = \delta$为同解的,如果 $AX = \beta$的解都是 $CX = \delta$的解,并且 $CX = \delta$的解也都是 $AX = \beta$的解。这里 A是 $s\times n$阵,C是 $t\times n$阵,β是 $s\times 1$ 阵,δ是 $t\times 1$ 阵,X是由未知量组成的 $n\times 1$ 阵。

定理 3.1 若 $s\times(n+1)$ 阵 $(A\ \ \beta)$ 经行初等变换化为 $(C\ \ \delta)$，这里 A 与 C 是 $s\times n$ 阵，β 与 δ 是 $s\times 1$ 阵，则线性方程组 $AX=\beta$ 与 $CX=\delta$ 同解。

证 $CX=\delta$ 的各个方程式或者是 $AX=\beta$ 的一个方程式，或者是 $AX=\beta$ 的方程式经乘数相加而得，所以 $AX=\beta$ 的解一定是 $CX=\delta$ 的解。又行初等变换是可逆的，故 $CX=\delta$ 的解也是 $AX=\beta$ 的解。因而两个线性方程组同解。

由于变更未知量的次序不改变线性方程组的解，而变更未知量的次序意味着系数矩阵作列互换，故有

推论 若 $s\times(n+1)$ 阵 $(A\ \ \beta)$ 经行初等变换与前 n 列互换化为 $(C\ \ \delta)$，则线性方程组 $AX=\beta$ 与 $CY=\delta$ 同解。这里 A, C, β, δ 同定理 3.1。$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$，$y_1, \cdots, y_n$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个排列。

例如，线性方程组

$$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=15, \\ 7x+8y+9z=24 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

中，更换未知量 y 与 z 的次序得

$$\begin{cases} x+3z+2y=6, \\ 4x+6z+5y=15, \\ 7x+9z+8y=24 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}。$$

3.1.2 矩阵消元法

设 A 为线性方程组(3-2)的系数矩阵，我们称 $s\times(n+1)$ 阵 $(A\ \ \beta)$ 为式(3-2)的增广矩阵。由定理 2.2，我们对 $(A\ \ \beta)$ 作行初等变换及前 n 列互换使 A 化为标准阶梯形，此时 $(A\ \ \beta)$ 化为

$$\begin{bmatrix} E_r & C & \begin{matrix} d_1 \\ \cdots \\ d_r \end{matrix} \\ 0 & 0 & \begin{matrix} d_{r+1} \\ \cdots \\ d_s \end{matrix} \end{bmatrix} = B, C = \begin{bmatrix} c_{11} \cdots c_{1t} \\ \cdots \quad \cdots \\ c_{r1} \cdots c_{rt} \end{bmatrix}, r \text{是} A \text{的秩}, r + t = n。$$

$AX = \beta$与下述方程组

$$\begin{bmatrix} E_r & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \cdots \\ d_r \\ d_{r+1} \\ \cdots \\ d_s \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

同解。式(3 - 4)有两种可能:

(1) 存在 $i > r, d_i \neq 0$;

此时式(3 - 4)的第 i 个方程为 $0 = d_i (\neq 0)$,这是不可能的,故原方程组无解。

(2) $d_{r+1} = \cdots = d_s = 0$。

此时原方程组同解于方程组

$$\begin{cases} y_1 + c_{11} y_{r+1} + \cdots + c_{1t} y_n = d_1, \\ \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ y_r + c_{r1} y_{r+1} + \cdots + c_{rt} y_n = d_r, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = - c_{11} y_{r+1} - c_{12} y_{r+2} - \cdots - c_{1t} y_n + d_1, \\ \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ y_r = - c_{r1} y_{r+1} - c_{r2} y_{r+2} - \cdots - c_{rt} y_n + d_r, \end{cases} \tag{3-5}$$

这里 $y_{r+1}, \cdots, y_n$ 可取任意数值,称为自由未知量。一旦 $y_{r+1}, \cdots, y_n$

取定一组数值后,由式(3 - 5), $y_1,\cdots,y_r$ 的数值也确定,于是得到了原方程组的一组解。

当 $d_{r+1}=\cdots=d_s=0$ 时, B 是 $(A\ \beta)$ 的阶梯形,其前 r 行为

$$\begin{bmatrix} E_r & C & \begin{matrix} d_1 \\ \cdots \\ d_r \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & * \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix},$$

共有 r 个阶梯,后 $s-r$ 行全为 0,故

$$r(A\ \beta)=r(B)=r=r(A)。$$

当 $d_{r+1},d_{r+2},\cdots,d_s$ 中有一个不为 0 时, B 的阶梯数 $\geq r+1$,于是

$$r(A\ \beta)=r(B)\geq r+1>r=r(A)。$$

在方程组(3 - 1)有解时,若 $r<n$,则存在自由未知量 $y_{r+1},\cdots,y_n$,它们可取任意值,从而线性方程组有无穷组解。若 $r=n$,则没有自由未知量,式(3 - 5)变为 $y_i=d_i\ (i=1,\cdots,n)$,线性方程组有惟一解。

综上分析,我们得到下面的结论:

定理 3.2 (1) 线性方程组 $AX=\beta$ 有解 $r(A)=r(A\ \beta)$;

(2) 线性方程组 $AX=\beta$ 有惟一解 $r(A)=r(A\ \beta)=$ 未知量个数。

由于 $\begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的当然解。故有

定理 3.3 齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解(即解不惟一), $r(A)<$ 未知量个数。

推论 若 A 是 $s\times n$ 阵，$s<n$，则 $AX=0$ 必有非零解。

证 因为 $r(A)\leq A$ 的行数 $s<$ 未知量个数 n。

例 3.1 设线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \\ a \end{pmatrix}$ 有解，求 a 的值，并求所有解。

解 增广矩阵 $=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 14 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3)-(1)-(2)\\(2)-(1)}]{(4)-3(2)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-27 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-27 \end{pmatrix}$$ 有解，

必 $a-27=0$，故 $a=27$，且解为

$$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=4-x_3-x_4-x_5, \end{cases}$$

x_3, x_4, x_5 为自由未知量，可取任意数值。

例 3.2 讨论线性方程 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & a & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的解。

解 (1) 若 $a\neq 1$，则

$$\text{增广矩阵} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & b_1 \\ & a & & & & \vdots \\ & & \ddots & & 1 & \\ & 1 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a & b_n \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{(i)-a(1)} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & b_1 \\ & a-1 & & & & b_2-b_1 \\ & & \ddots & & 0 & \\ & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a-1 & b_n-b_1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{\frac{1}{a-1}\cdot(i)} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & b_1 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & 0 & & \dfrac{b_2-b_1}{a-1} \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & 0 & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \dfrac{b_n-b_1}{a-1} \end{bmatrix},$$

原方程组有惟一解:

$$x_1 = b_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{b_j - b_1}{a-1},$$

$$x_i = \frac{b_i - b_1}{a-1},\ i = 2, \cdots, n。$$

(2) 若 $a = 1$,则

$$\text{增广矩阵} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & b_1 \\ 1 & \cdots & 1 & b_2 \\ & \cdots & & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & b_n \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2,\cdots,n]{(i)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_2-b_1 \\ \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & b_n-b_1 \end{bmatrix},$$

于是原方程组有解 $b_i - b_1 = 0, i = 2, \cdots, n$。 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$。有解时，解为 $x_1 = b - x_2 - \cdots - x_n$，这里 $x_2, \cdots, x_n$ 为自由未知量。

3.2 Cramer 法则

若 A 是 n 阶可逆阵，则 $AX = \beta$ $X = A^{-1}\beta$。而 $A^{-1}\beta = \dfrac{A^*\beta}{|A|}$，它的第 i 行第 1 列元素为

$$\frac{1}{|A|}(A_{1i}, A_{2i}, \cdots, A_{ni})\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & b_1, & \cdots, & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}, & \cdots, & b_n, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \qquad\quad \uparrow \\ \qquad\quad i\text{列} \end{array}$$。

这样，我们得到了 Cramer 法则。

Cramer 法则　若矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 可逆，则线性方程组 $AX = \beta$ 有惟一解

$$x_i = \frac{|A^{(1)} \cdots A^{(i-1)} \beta A^{(i+1)} \cdots A^{(n)}|}{|A|}, i = 1, \cdots, n。$$

例 3.3　求线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的解。

解　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$，方程组有惟一解：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1,$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&4&1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{2}{-2}=-1。$$

例 3.4　设 a,b,c **两两不等,求** $\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\a^2+b^2+c^2\\a^3+b^3+c^3\end{pmatrix}$ **的解。**

解　**因为系数矩阵的行列式为 Vandermonde 行列式,其值不为零,故系数矩阵可逆。按 Cramer 法则方程组有惟一解。略加观察得解** $x=a,y=b,z=c$。

例 3.5　讨论线性方程组 $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ **的解。**

解　$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\xrightarrow{(1)+(2)+(3)}\begin{vmatrix}a+2&a+2&a+2\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}$

$=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)}(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}$

$=(a+2)(a-1)^2$。

(1) **若** $a\neq1,-2$。**系数矩阵可逆,方程组有惟一解。**

(2) **若** $a=1$,

增广矩阵 $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$,**方程组有解** $b_1 = b_2 = b_3$,**有解时有无穷组解**:$x_1 = b_1 - x_2 - x_3$。

(3) 若 $a = -2$,

增广矩阵 $= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & -2 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & -2 & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\backslash(3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & b_3 \\ 1 & -2 & 1 & b_2 \\ -2 & 1 & 1 & b_1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[(2)-(1)]{(3)+(2)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & b_3 \\ 0 & -3 & 3 & b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[(1)-(2)]{\frac{1}{-3}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \dfrac{2b_3 + b_2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{b_3 - b_2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix}$,

故方程组有解 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$。

有解时,有无穷组解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2b_3 + b_2}{3} + x_3, \\ x_2 = \dfrac{b_3 - b_2}{3} + x_3, \end{cases}$$ x_3 **是自由未知量。**

3.3 n维向量及其线性关系

3.3.1 向量的概念

定义 3.2 **称** $n \times 1$ **阵为** n **维列向量**,$1 \times n$ **阵为** n **维行向量。**

下面若不作特别声明,我们研究的向量都是数域 P 上的 $n \times 1$ 阵(即列向量),用字母 α, β, γ, ⋯ 来表示;它的元素,即 P 中的数用小写英文字母表示。$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$, a_1, ⋯, a_n 叫 α 的分量。

矩阵有加法与数乘运算,向量作为特殊类型的矩阵,有同样的运算,满足同样的运算规律。

3.3.2　向量的线性组合

定义 3.3　若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$ 是 $(s+1)$ 个向量, $k_1, \cdots, k_s \in P$, 且 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s$, 则称 β 是向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合,也称向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 能线性表出 β, 记成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$　β。

α, ⋯, α　β意味着线性方程组 $\sum_{i=1}^{s} x_i\alpha_i = \beta$ 有解。由定理 3.2 即得:

定理 3.4　$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$　β　$r(\alpha, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta)$。

例 3.6　因为 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a - b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 故

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}。$$

例 3.7　因为 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

若记

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

它们称为单位向量,则 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ **能线性表出任意一个** n **维向量。**

例 3.8　**因为** $0 = 0 \cdot \alpha_1 + \cdots + 0 \cdot \alpha_s$,**所以** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$　　0。

例 3.9　**若** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$,**求** x。

解　**矩阵** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **的秩为** 2,**由定理** 3.4,**矩阵** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & x \end{pmatrix}$ **的秩也为** 2,**故** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$,**得** $x = -10$。

3.3.3　线性相关与线性无关

定义 3.4　**向量组** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **称为线性相关,如果存在** P **中** s **个不全为零的数** $k_1, \cdots, k_s$ **使**

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_s \alpha_s = 0,$$

即线性方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + k_s \alpha_s = 0$$

在 P **中有非零解** $x_i = k_i (i = 1, 2, \cdots, s)$。

命题 3.1　**向量组** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **线性相关**　　**矩阵**$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$**的秩** $< s$。

证　**向量组** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **线性相关**　　**线性方程组**

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \alpha_i = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0。$$

有非零解　　系数矩阵$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$**的秩** $<$ **未知量个数** s。

推论　**一个向量** α **线性相关**　　$\alpha = 0$。

例 3.10　**因为** $1 \cdot 0 + 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_s = 0$，**所以向量组** $0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **线性相关，即含零向量的向量组必线性相关。**

例 3.11　**因为** $1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + (-1)(\alpha + \beta) = 0$，**所以向量组** $\alpha, \beta, (\alpha + \beta)$ **线性相关。**

例 3.12　**若** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **线性相关，即存在不全为零的数** $k_1, \cdots, k_s$ **使**

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0,$$

此时，$k_1, \cdots, k_s, 0, \cdots, 0$ **也不全为零，且**

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + 0\beta_1 + \cdots + 0\beta_t = 0,$$

所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ **也线性相关。即若部分线性相关，则整个向量组也线性相关。**

例 3.13　**若** $s > n$，**则** s **个** n **维向量必线性相关。**

证　**设** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **为** n **维向量，则** n **行矩阵**$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$**的秩** $\leq$ **行数** $n < s$。**由命题** 3.1，$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **线性相关。**

定义 3.5　**向量组** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **如果不线性相关，则称为线性无关。**

命题 3.2　**向量组** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **线性无关**　　**线性方程组**

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$$

仅有零解　　**矩阵**$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$**的秩为** s。

这是因为线性相关的否定就是线性无关，故由定义 3.4 **与命题**3.1**即得命题** 3.2。

例 3.14　**一个向量** α **线性无关**　　$\alpha \neq 0$。

例 3.15　**因为**$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = E_n$ **的秩为** n，**故** $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ **线性无关。**

例 3.16 n个n维向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关 $|\alpha_1,\cdots,\alpha_n| \neq 0$。

例 3.17 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,则向量组$\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_2+\alpha_3$,$\alpha_3+\alpha_1$也线性无关。

证 若$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$,得

$$(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0。$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,必

$$\begin{cases} x_1+x_3=0, \\ x_1+x_2=0, \\ x_2+x_3=0, \end{cases}$$

解之得

$$x_1=x_2=x_3=0,$$

故向量组$\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_2+\alpha_3$,$\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

例 3.18 若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$线性无关,则向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$也线性无关。

证 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关,由例3.12,向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$,$\beta_1,\cdots,\beta_t$也线性相关,矛盾于假设,故必$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关。

命题 3.3 若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关,而向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$,β线性相关,则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ β。

证 因为向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关,故

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s,$$

又$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关,故

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)<s+1。$$

但

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\leq r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta),$$

于是

$$s\leq r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)<s+1,$$

因而必有

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta) = s = r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),$$

由定理 3.4

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_s \qquad \beta。$$

命题 3.4 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s \quad \beta_i$, $i=1,\cdots,t$, 且 $t>s$, 则向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性相关。

证 由假设,存在数 $b_{1i},\cdots,b_{si}$ $(i=1,\cdots,t)$ 使

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}\alpha_k,\quad i=1,\cdots,t。$$

利用矩阵的分块乘法,有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots\cdots & b_{1t}\\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots\\ b_{s1} & \cdots\cdots & b_{st}\end{pmatrix}。$$

积矩阵$(\beta_1,\cdots,\beta_t)$秩 $\le$ 矩阵$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$秩 $\le s<t$,故向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性相关。

若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 s 个 n 维向量, $s>n$。因为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n \quad \alpha_1,\cdots,\alpha_s$。由命题 3.4,向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关,我们再次验证了例 3.13。

3.3.4 等价向量组

定义 3.6 设 Σ_1 与 Σ_2 都是向量组,若对任意 $\beta\in\Sigma_2$,均存在 Σ_1 中有限个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 使 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s \quad \beta$,则称向量组 Σ_1 能线性表出向量组 Σ_2,记成 $\Sigma_1 \quad \Sigma_2$。

推论 若 $\Sigma_1 \quad \Sigma_2$, $\Sigma_2 \quad \Sigma_3$,则 $\Sigma_1 \quad \Sigma_3$。

证 对任意 $\gamma\in\Sigma_3$,存在 $\beta_1,\cdots,\beta_t\in\Sigma_2$ 使

$$\gamma = \sum_{i=1}^{t} k_i\beta_i = (\beta_1,\cdots,\beta_t)\begin{pmatrix}k_1\\ \cdots\\ k_t\end{pmatrix},$$

又 Σ $\quad$ Σ_2 **,故存在** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \Sigma_1$ **使**

$$(\beta_1, \cdots, \beta_t) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{st} \end{pmatrix},$$

这里 $\beta_i = \sum_{j=1}^{s} b_{ji}\alpha_j,\ i = 1, \cdots, t$。

于是

$$\gamma = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{st} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_t \end{pmatrix},$$

若记 $s \times 1$ **阵**

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{st} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_t \end{pmatrix} \text{为} \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdots \\ d_s \end{pmatrix},$$

则 $\gamma = d_1\alpha_1 + \cdots + d_s\alpha_s$**,即** Σ $\quad$ Σ_s。

定义 3.7 **设** Σ **与** Σ **是两个向量组,若** Σ $\quad$ Σ_2 **且** Σ_2 $\quad$ Σ**,则称两个向量组等价,记成** $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$。

例 3.19 **若记** $\varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 第 i 行, $\eta_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} i$ 个 1 $\quad (i = 1, \cdots, n)$,

则$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\} \sim \{\eta_1, \cdots, \eta_n\}$。

证 **这是因为** $\varepsilon_1 = \eta_1,\ \eta_i = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i, \varepsilon_i = \eta_i - \eta_{i-1}$

$(i = 2, \cdots, n)$。

3.4 向量组的秩

3.4.1 极大线性无关组

定义 3.8 设 Σ 是一个向量组, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \Sigma$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 称为 Σ 的一个极大线性无关组, 如果

(1) $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) 对任意 $\alpha \in \Sigma$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha$ 线性相关。

例 3.20 设 $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, 则 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 与 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ 都是 Σ 的极大线性无关组。

例 3.21 若 Σ 是数域 P 上 n 维向量的全体(记成 P^n), 则 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 Σ 的一个极大线性无关组。

证 (1) 矩阵 $E_n = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 秩为 n, 故 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关;

(2) 对任意 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \Sigma$, 有 $(-a_1)\varepsilon_1 + \cdots + (-a_n)\varepsilon_n + 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$, 即 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 线性相关。

由定义, 即得结论。

命题 3.5 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \Sigma$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组 (1) $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关且(2′) $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ Σ, 即在 (1) 成立的前提下, 定义 3.8 中的(2) (2′)。

证 (2) (2′): 对任意 $\alpha \in \Sigma$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha$ 线性相关, 由命题 3.3, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ α, 即(2′)成立。

(2′) (2): 对任意 $\alpha \in \Sigma$, 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ α, 即存在数 $k_1, \cdots, k_r$ 使

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + \cdots + k_r \alpha_r,$$

故

$$k_1 \alpha_1 + \cdots + k_r \alpha_r + (-1) \alpha = 0,$$

即 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha$ 线性相关。

命题 3.6 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 是向量组 Σ 的两个极大线性无关组, 则 $r = t$。

证 若 $r \neq t$, 不妨一般地设 $r > t$, $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 是 Σ 的一个极大线性无关组, 由命题 3.5 得

$$\beta_1, \cdots, \beta_t \quad \Sigma,$$

因为

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \Sigma,$$

故

$$\beta_1, \cdots, \beta_t \quad \alpha_i, \ i = 1, 2, \cdots, r。$$

由命题 3.4 得 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性相关, 这与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 Σ 的极大线性无关组的假设矛盾, 故必 $r = t$。

3.4.2 向量组的秩

定义 3.9 由命题 3.6, 向量组 Σ 的任意两个极大线性无关向量组都含相同个数的向量, 称这个个数为向量组 Σ 的秩, 记作 $r(\Sigma)$。

例 3.22 向量组 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ 的秩为 2。

例 3.23 因为向量组 P^n 有极大线性无关组 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$, 故 P^n 的秩为 n。

例 3.24 若向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 与 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 有相同的秩, 又

α_1,α_2　β_1。这里

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}a\\2\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\b\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}。$$

求 a,b 的值。

解　因为矩阵 $(\alpha_1\ \alpha_2)=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\3&2\end{pmatrix}$ 有一个二阶子式 $\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3\neq0$,其秩为 2,故 α_1,α_2 线性无关;又 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$。所以 α_1,α_2 是向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$的一个极大线性无关组,从而向量组$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的秩为 2。

因为 α_1,α_2　β_1,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性相关,从而

$$|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1|=\begin{vmatrix}1&2&a\\2&1&2\\3&2&0\end{vmatrix}=0,$$

得 $a=-8$。

由$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的秩为 2,得

$$|\beta_1\ \beta_2\ \beta_3|=\begin{vmatrix}-8&-3&-5\\2&1&1\\0&b&2\end{vmatrix}=0,$$

得 $b=-2$。

例 3.25　若向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关,又向量组 Σ　$\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$。

求证:存在 $\alpha\in\Sigma$,使 $\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性无关。

证　(反证)若任意 $\alpha\in\Sigma$;$\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$ 线性相关,因 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性无关,由命题 3.3,$\beta_1,\cdots,\beta_t$　α,即

$$\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}\quad\Sigma。$$

但 Σ　$\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$,由定义 3.6 的推论,$\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$　$\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$,由命题 3.4 得 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性相关,这矛盾于题设,故必存在 $\alpha\in\Sigma$,

使 $\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关。

性质 (1) 向量组$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$的秩为 r $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) 若 Σ_1 Σ_2,则 $r(\Sigma_1) \geq r(\Sigma_2)$;

特别由例 3.23,如果 Σ是 n维向量组,即 Σ P^n,则 $r(\Sigma) \leq n$;

(3) 若 $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$,则 $r(\Sigma_1) = r(\Sigma_2)$。

证 (1) 是显然的。

(2) 若 $r(\Sigma_2) = t > r(\Sigma_1) = r$。设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 分别是 Σ_1 与 Σ_2 的极大线性无关组, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ Σ_1 Σ_2,从而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ β_i, $i = 1, \cdots, t$,由命题3.4得 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性相关,与 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 是 Σ_2 的极大线性无关组的假设矛盾,故必 $t \leq r$。

(3) 由(2), $r(\Sigma_1) \geq r(\Sigma_2)$,且 $r(\Sigma_2) \geq r(\Sigma_1)$,故 $r(\Sigma_1) = r(\Sigma_2)$。

推论 若

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_s \quad \beta_i, i = 1, \cdots, s,$$

即 $(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s) B$,这里 B是 $s \times s$ 可逆矩阵,则

$$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = r(\beta_1, \cdots, \beta_s)。$$

证 设 B^{-1}为 B的逆,则

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s) BB^{-1} = (\beta_1, \cdots, \beta_s) B^{-1},$$

即 $$\beta_1, \cdots, \beta_s \quad \alpha_i, i = 1, \cdots, s,$$

于是 $$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} \sim \{\beta_1, \cdots, \beta_s\},$$

由性质(3),两向量组秩相等。

例 3.26 若向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,又

$$(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \begin{pmatrix} 1 & & & & 2 \\ 2 & \ddots & & 0 & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关。

证 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 2 \\ 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{s+1}2^s \neq 0,$$

故矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 2 \\ 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

可逆,由推论得

$$r(\beta_1,\cdots,\beta_s) = r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s) = s,$$

故 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关。

命题 3.7 若 $r(\Sigma) = r$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 Σ 的一个线性无关组,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组。

证 由 $r(\Sigma) = r$,可设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组。对任意 $\alpha \in \Sigma$, $\beta_1,\cdots,\beta_r$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha$, $r+1 > r$,由命题 3.4, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha$ 线性相关。按定义, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组。

命题 3.8 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是向量组 Σ 的一个线性无关向量组, $r(\Sigma) > t$,则存在 $\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_r \in \Sigma$ 使 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\cdots,\alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组。

证 因 $r(\Sigma) = r$, Σ 的极大线性无关组含 r 个向量,故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 不是 Σ 的极大线性无关组,即存在 $\alpha_{t+1} \in \Sigma$ 使 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1}$ 线性无关,若 $t+1 < r$,仍存在 $\alpha_{t+1},\cdots$,于是存在 $\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_r$ 使 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_r$ 线性无关,由命题 3.7,它们是 Σ 的一个极大线性无关组。

3.4.3 矩阵的秩

我们在第 2 章给出了矩阵的秩的定义。下面讨论矩阵的秩与它的行向量组或列向量组的秩之间的关系。

定理 3.5 矩阵的秩 = 它的列向量组的秩(称为列秩) = 它的行向量组的秩(称为行秩)。

证 设矩阵 A 的秩为 r,它有一个 r 阶子式 $D_A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \neq 0$,而所有 $s(>r)$ 阶子式全为 0。

此时 r 列矩阵 $(A^{(j_1)}\cdots A^{(j_r)}) = B$ 也有一个 r 阶子式 $D_B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ 1 & 2\cdots & r \end{pmatrix} = D_A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \neq 0$,故其秩为 r,由命题 3.2,列向量组 $A^{(j_1)},\cdots,A^{(j_r)}$ 线性无关。

若 α 是 A 的任意一个列向量,则 $(r+1)$ 列矩阵 $(A^{(j_1)}\cdots A^{(j_r)}\alpha)$ 的所有$(r+1)$阶子式或者两列相等值为零,或者它是 A 的一个$(r+1)$阶子式乘(± 1),值也为零,即$(r+1)$列矩阵 $(A^{(j_1)}\cdots A^{(j_r)}\alpha)$ 的秩小于 $r+1$,由命题 3.1,列向量 $A^{(j_1)},\cdots,A^{(j_r)},\alpha$ 线性相关。

于是,$A^{(j_1)},\cdots,A^{(j_r)}$ 是 A 的列向量组的一个极大线性无关组,从而 A 的列秩 = r。

又 A 的行秩 = A' 的列秩 = A' 的秩 = A 的秩 r。

例 3.27 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$的秩为 1。$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$是列向量组的一个极大线性无关组。$(1,2,3,4,5)$是行向量组的一个极大线性无关组。列秩、行秩都为 1。

3.5 线性方程组解的结构

3.5.1 齐次线性方程组的解空间

我们用 $P^{s\times n}$ 表示数域 P 上 $s\times n$ 矩阵的全体,即

$$P^{s\times n}=\{(a_{ij})_{s\times n}\mid a_{ij}\in P,i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,n\},$$

特别用 P^n **表示** $P^{n\times 1}$,**即**

$$P^n=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}\middle|\, a_i\in P,i=1,\cdots,n\right\},$$

也就是用 P^n **表示** P **上** n **维向量全体所成集合。**

若 $A\in P^{s\times n}$,**记** $V=\{X\in P^n\mid AX=0\}$,**即** $AX=0$ **的解向量全体,称** V **为齐次线性方程组** $AX=0$ **的解空间。**

性质 (1) **若** $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V,k_1,\cdots,k_s\in P$,**则**

$$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\in V;$$

(2) **若** $\eta_1,\cdots,\eta_t$ **是** V **的一个极大线性无关组,则**

$$V=\left\{\sum_{i=1}^{t}k_i\eta_i\mid k_i\in P,i=1,\cdots,t\right\}。$$

证 (1) **因为** $A(\sum_{i=1}^{t}k_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{t}k_iA\alpha_i=0$。

(2) **由**(1),$\sum_{i=1}^{t}k_i\eta_i\in V$。**反之,对任意** $\alpha\in V$,**因为** $\eta_1,\cdots,\eta_t$ **是** V **的一个极大线性无关组,故** $\eta_1,\cdots,\eta_t$ α,**即存在** $k_1,\cdots,k_t\in P$,**使** $\alpha=\sum_{i=1}^{t}k_i\eta_i$。

定义 3.10 V **的一个极大线性无关组称为齐次线性方程组** $AX=0$ **的一个基础解系。**

由性质(2)**可知,若** $\eta_1,\cdots,\eta_t$ **是** $AX=0$ **的一个基础解系,则** $AX=0$ **的全部解(称通解)为**

$$\sum_{i=1}^{t}k_i\eta_t,\quad k_i\in P,i=1,\cdots,t。$$

3.5.2　基础解系的求法

一式二元齐次线性方程组 $x + y = 0$ 的解为 $x = - y$，向量形式为 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，这里 $k = y$ 为自由未知量，可取任意数值。

三式五元齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_1 x_4 + b_1 x_5 = 0, \\ \qquad x_2 \qquad + a_2 x_4 + b_2 x_5 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 + a_3 x_4 + b_3 x_5 = 0 \end{cases}$$

的解为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 x_4 - b_1 x_5 \\ -a_2 x_4 - b_2 x_5 \\ -a_3 x_4 - b_3 x_5 \\ x_4 + 0x_5 \\ 0x_4 + x_5 \end{pmatrix}$$

$$= (-x_4)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x_5)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

这里 $k_1 = - x_4$，$k_2 = - x_5$ 可取任意数值。

上述例子启发了我们用类似的方法来处理一般的线性方程组。

若给了 s 式 n 元齐次线性方程组

$$AX = 0,$$

我们用行初等变换(必要时改变未知量次序)化 $s \times n$ 阵 A 为标准阶梯形

$$\begin{pmatrix} E_r & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这里 r 是系数矩阵 A 的秩, E_r 是 r 阶单位阵, T 是 $r\times t$ 阵, $t = n - r$。

齐次线性方程组 $AX = 0$ 同解于 $\begin{pmatrix} E_r & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, 或 $\left[\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & -E_t \end{pmatrix}\right] X = 0$, 从而

$$X = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & -E_t \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} r列 & t列 \end{array} \end{array} (-X)。$$

若记 $n\times t$ 阵 $\begin{pmatrix} T \\ -E_t \end{pmatrix}$ 的第 i 列为 α_i, $i = 1, \cdots, t$。利用矩阵的分块记法与乘法得

$$\begin{aligned} X &= (\overbrace{0, \cdots, 0}^{r列}, \alpha_1, \cdots, \alpha_t) \begin{pmatrix} -x_1 \\ \cdots \\ -x_n \end{pmatrix} \\ &= (-x_{r+1})\alpha_1 + \cdots + (-x_n)\alpha_t \\ &= k_1\alpha_1 + \cdots + k_t\alpha_t, \end{aligned}$$

这里, $k_1 = -x_{r+1}, \cdots, k_t = -x_n$, 可取任意数值, 即通解为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 的线性组合。矩阵 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$ 的后 t 行组成的 t 阶子式 $\begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, 其秩为 t, 所以解向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 线性无关, 它们能线性表出任意一个解向量, 由命题 3.5, 它们是 $AX = 0$ 的一个基础解系。

基础解系的求法 用行初等变换化 $s\times n$ 阵 A 为标准阶梯形

$$\begin{pmatrix} E_r & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $AX = 0$ 有一个基础解系 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$。这里, $t = n - r$, r 为 A 的秩, α_i 为 $\begin{pmatrix} T \\ -E_t \end{pmatrix}$ 的 i 列, $i = 1, \cdots, t$。$AX = 0$ 的通解为

$$X = \sum_{i=1}^{t} k_i \alpha_i。$$

推论 $AX = 0$ 的解空间的秩为未知量个数减去 A 的秩。

例 3.28 求齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基础解系与通解。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-(1)]{(3)-(1)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{E_2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

故 $AX = 0$ 有基础解系

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

通解为

$$X = k_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}。$$

例 3.29 若 n 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 0$, A 有一代数余子式 $A_{st} \neq 0$。求证：齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解为 $X = k\alpha$，其中

$$\alpha = \begin{pmatrix}A_{s1}\\A_{s2}\\\cdots\\A_{sn}\end{pmatrix}。$$

证 A 的惟一 n 阶子式 $|A| = 0$，而 A 有一个 $(n-1)$ 阶子式 $(-1)^{s+t}A_{st} \neq 0$，故 A 的秩为 $n-1$。从而齐次线性方程组 $AX = 0$ 基础解系个数为

$$n-(n-1) = 1。$$

所以只须证 α 为 $AX = 0$ 的非零解，因为 $A_{st} \neq 0$，故 $\alpha \neq 0$。又

$$A\alpha = \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{s1}\\\cdots\\A_{sn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{sk}\\ \cdots\\ \sum_{k=1}^{n} a_{sk}A_{sk}\\ \cdots\\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{sk}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\cdots\\|A|\\\cdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\cdots\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix},$$

即 α 是 $AX = 0$ 的非零解。从而是基础解系，于是通解为 $X = k\alpha$。

3.5.3 非齐次线性方程组解的结构

设 $A \in P^{s\times n}$，$\beta \in P^s$，$\beta \neq 0$。记 $W = \{X \in P^n \mid AX = \beta\}$，即 W 为

$AX=\beta$的解向量全体组成的集合。设 V 为 $AX=0$ 的解空间,则有:

性质 (1) 若 $X_1, X_2 \in W$,则 $X_2 - X_1 \in V$;

(2) 若 $X_0 \in W$,则 $X \in W \quad X - X_0 \in V$;

(3) 若 $X_0 \in W, \alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系,则 $W = \{X_0 + \sum_{i=1}^{t} k_i \alpha_t \mid k_i \in P, i=1,\cdots,t\}$,即 $AX=\beta$ 的通解为 $X_0 + \sum_{i=1}^{t} k_i \alpha_i$。

证 (1) $AX_1 = \beta, AX_2 = \beta$,故 $A(X_2 - X_1) = AX_2 - AX_1 = \beta - \beta = 0$,即 $X_2 - X_1 \in V$。

(2) $X \in W$,则 $A(X - X_0) = AX - AX_0 = \beta - \beta = 0$,所以 $X - X_0 \in V$。反之 $X - X_0 \in V$,则 $AX = A(X - X_0 + X_0) = A(X - X_0) + AX_0 = 0 + \beta = \beta$,即 $X \in W$。

(3) 由(2)即得。

$AX=\beta$**的求解方法** 用行初等变换化增广矩阵 $(A\ \beta)$ 为标准阶梯形

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} E_r & T & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\,r\text{行} \\ \}\,s-r\text{行} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} r & t & 1 \\ \text{列} & \text{列} & \text{列} \end{array} \end{array}$$

,则 $\gamma = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 为 $AX=\beta$ 的一个解向量,$\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 是 $AX=0$ 的基础解系。这里 α_i 是 $\begin{pmatrix} T \\ -E_t \end{pmatrix}$ 的 i 列,$i=1,\cdots,t$。由性质(3),$AX=\beta$ 的通解为

$$X = \gamma + \sum_{i=1}^{t} k_i \alpha_i,$$

$\gamma = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 是解向量,这是因为在与 $AX=\beta$ 同解的线性方程组

$$\begin{bmatrix} E_r & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

中令自由未知量 $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$, **得**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_r \end{bmatrix} = \delta,$$ **从而** $\gamma = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$ **是** $AX = \beta$ **的一个解向量。**

例 3.30　求 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ 22 \end{bmatrix}$ **的通解。**

解　增广矩阵 $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 7 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2)-(1)]{(3)-(1)-(2)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_2 & \begin{matrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix},$$

通解为

$$X = k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\8\\0\\0\\0\end{pmatrix}。$$

例 3.31　**若** $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ **都是** $AX = \beta$ **的解向量。求证:** $\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)$ **也是** $AX = \beta$ **的解向量。**

证　**因为** $A\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}A\alpha_i = \frac{1}{m}(\underbrace{\beta + \cdots + \beta}_{m\text{个}}) = \beta$。

例 3.32　**若向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **线性无关,且**

$$\alpha_4 = 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3,\quad \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

记 $A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$。**求:线性方程组** $AX = \beta$ **的通解。**

解　**由题设,** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **是向量组** $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ **的一个极大线性无关部分组。故** $r(A) = 3$, **从而线性方程组** $AX = 0$ **基础解系所含向量个数为** $4 - 3 = 1$, **即** $AX = 0$ **的任意一个非** 0 **解都是基础解系。由题设**

$$A\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\-1\end{pmatrix} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\-1\end{pmatrix} = 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0,$$

故 $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ **是** $AX = 0$ **的一个基础解系。**

又由题设

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta,$$

即$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$是 $AX=\beta$的一个特解。故 $AX=\beta$的通解为

$$k\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}。$$

例 3.33 设 A 的秩为 3,α_1,α_2,α_3 都是线性方程组 $AX=\beta$的解向量,且

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2 + \alpha_3 = \begin{pmatrix}2\\5\\4\\9\end{pmatrix},$$

求 $AX=\beta$的通解。

解 $AX=0$ 基础解系所含向量个数为 $4-3=1$。又 $A(\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1) = A\alpha_2 + A\alpha_3 - 2A\alpha_1 = \beta+\beta-2\beta=0$。于是

$$\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1 = \begin{pmatrix}3\\5\\4\\9\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

是 $AX=0$ 的基础解系。从而 $AX=\beta$的通解为

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}。$$

例 3.34 设 A 为 $s\times n$ 阵，$\beta=(b_1,\cdots,b_n)$，若线性方程组 $AX=0$ 的解全是 $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i=0$ 的解，求证：$A_{(1)},\cdots,A_{(s)}$ β。

证 由假设可知，线性方程组 $AX=0$ 与 $\begin{pmatrix} A \\ \beta \end{pmatrix} X=0$ 同解，从而解空间的秩相同，即 $n-r(A)=n-r\begin{pmatrix} A \\ \beta \end{pmatrix}$，所以 $r(A)=r\begin{pmatrix} A \\ \beta \end{pmatrix}=t$。设 $\alpha,\cdots,\alpha$ 是 A 的行向量组的一个极大线性无关组，它也是 $\begin{pmatrix} A \\ \beta \end{pmatrix}$ 的行向量组的一个线性无关组，由命题 3.7，它是 $\begin{pmatrix} A \\ \beta \end{pmatrix}$ 的行向量组的一个极大线性无关组，由命题 3.5，$\alpha,\cdots,\alpha$ β，从而

$$A_{(1)},\cdots,A_{(s)} \quad \beta。$$

习 题 3

1．用矩阵消元法解下列线性方程组：

$$(1)\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3, \\ 3x_1+x_2-5x_3=0, \\ 4x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2-13x_3=-6; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3-5x_4=5; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3=0, \\ 3x_1-x_2+5x_3=0, \\ -2x_1+2x_2+3x_3=0; \end{cases}$$

(4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4。\end{cases}$

2. **将向量 β 表示为向量** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ **的线性组合**:

(1) $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

3. **求线性方程组** $x_1 - x_2 = a_1, x_2 - x_3 = a_2, x_3 - x_4 = a_3, x_4 - x_1 = a_4$ **有解的条件,在有解时求所有解。**

4. **讨论** a, b **为何值时下列线性方程组有解,并求解**:

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} ax + y + z = 4, \\ x + by + z = 3, \\ x + 2by + z = 4; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2。 \end{cases}$

5. **讨论** k **取何值时下列齐次线性方程组有非零解,并求解**:

(1) $\begin{cases} kx + y + z = 0, \\ x + ky - z = 0, \\ 2x - y + z = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} kx + 3y + 3z = 0, \\ 3x + ky + 3z = 0, \\ 3x + 3y + kz = 0。 \end{cases}$

6. **用** Cramer **法则解下列线性方程组**:

(1) $\begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ 3x + 7y = 2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y - 2z = -3, \\ 5x - 2y + 7z = 22, \\ 2x - 5y + 4z = 4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -bx + ay = 2ab, \\ -2cy + 3bz = bc, \\ cx + az = 0。 \end{cases}$

*7. **若** $\begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$ **是齐次线性方程组**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1^{n-2} & 2^{n-2} & \cdots & n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

的一个非零解,求 $c_1 : c_n$。

8. **若向量组** $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ **线性相关,求** a **的值。**

9. **若向量组** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **线性相关,求证:其中必有一个向量是其余向量的线性组合。**

10. **设** $t_1, \cdots, t_r$ **是两两不同的数** $(r \leq n)$,

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 \\ t_i \\ t_i^2 \\ \cdots \\ \cdots \\ t_i^n \end{pmatrix}, i = 1, \cdots, r,$$

求证:向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ **线性无关。**

11. **若向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **线性无关,则向量组** $\alpha_1 + k\alpha_2, \alpha_2 + k\alpha_3, \alpha_3 + k\alpha_1$ **也线性无关。这里** $k \in \mathbb{Z}^+$。

12. s **是奇数,若向量组** $\alpha, \cdots, \alpha_s$ **线性无关,则向量组** $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \alpha_{s-1} + \alpha_s, \alpha_s + \alpha$ **也线性无关。**

13. **求证:**(1) **向量组** $\{\alpha, \cdots, \alpha, \beta, \cdots, \beta\}$ **的秩** $\leq \{\alpha, \cdots, \alpha\}$ **的秩** $+ \{\beta, \cdots, \beta\}$ **的秩。**

(2) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$,**这里** A, B **为矩阵。**

14. **若向量组** Σ **的秩为** r, $\alpha, \cdots, \alpha_r \in \Sigma$, **且** $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ Σ, **求证:** $\alpha, \cdots, \alpha_r$ **是** Σ **的一个极大线性无关组。**

15. **设** A **为** n **阶方阵,若对任意** n **维向量** β, **线性方程组** $AX = \beta$

都有解,求证: $|A| \neq 0$。

16. 若向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ 与 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t\}$ 有相同的秩,求证: $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ β_i, $i = 1, \cdots, t$。

17. 若线性方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解,求证: A 的行向量组 $\sim$ B 的行向量组。

18. 若 $\beta_i = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j - \alpha_i$, $i = 1, \cdots, s$, 求证: $r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} = r\{\beta_1, \cdots, \beta_s\}$。

19. 若向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \alpha_k, \quad i = 1, \cdots, s,$$

求证: $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性无关 $|a_{ij}|_n \neq 0$。

20. 若向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r,则在其中任取 m 个向量组成的向量组的秩 $\geq r + m - s$。

21. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系:

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(3) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}。$$

22. **求下列线性方程组的通解**:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$。

23. **若** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **是线性方程组** $AX = \beta$ **的** s **个解向量**, $\sum_{i=1}^{s} k_i = 1$, **求证**: $\sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i$ **也是** $AX = \beta$ **的解向量**。

24. **若向量** α_1, α_2 **线性无关**, **且**

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2,$$
$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2,$$
$$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4,$$

记 $A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$, **求** $AX = \beta$ **的通解**。

25. **若** $A, B \in P^{n\times n}$, **且** $AB = 0$, **求证**:

$$r(A) + r(B) \leq n。$$

26. **若** $A \in P^{n\times n}$, **且** $A^2 = E$, **求证**:

$$r(A + E) + r(A - E) = n。$$

27. **若** $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ **是** $AX = 0$ **的一个基础解系**, $A\beta \neq 0$, **求证**: **向量组** $\beta, \beta + \alpha_1, \cdots, \beta + \alpha_t$ **线性无关。**

28. $A \in P^{(n-1) \times n}$, $r(A) = n - 1$, **求证**: $AX = 0$ **的通解为**

$$X = k\begin{pmatrix} M_1 \\ -M_2 \\ \cdots \\ (-1)^{n-1} M_n \end{pmatrix},$$

这里 M_i **是划去** A **的第** i **列后余下的**$(n-1)$**阶行列式的值。**

29. **若** A **为实矩阵**, **求证**: $r(A) = r(A'A)$。

30. **若** A **为实** $s \times n$ **阵**, β **为** s **维实向量**, **求证**: **线性方程组** $A'AX = A\beta$ **有解。**

31. **若向量组** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ **线性无关**,

$$\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1;$$

$$\beta_n = \alpha_n - \alpha_1,$$

记 $B = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)$, **求齐次线性方程组** $BX = 0$ **的通解。**

第 4 章　相似矩阵

如果两个 n 阶方阵 A 与 B 存在这样的关系：$B = T^{-1}AT$，这里 T 是 n 阶可逆阵，则 $B^k = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT) = T^{-1}A^kT$。更一般地，若 $f(x)$ 是一个多项式，那么 $f(B) = T^{-1}f(A)T$。如果 A 很简单，比如为对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，则

$$f(B) = T^{-1}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}T,$$

这样使 B 的多项式的计算大大简化。本章研究矩阵的这种关系(称相似关系)，并寻求一个方阵相似于对角阵的条件。

4.1　相似的概念

定义 4.1　两个 n 阶方阵 A 与 B 称为相似的，记成 $A\sim B$，如果存在 n 阶可逆阵 T 使 $B = T^{-1}AT$。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}。$$

性质 (1) $A \sim A$(**自反性**);

(2) **若** $A \sim B$,**则** $B \sim A$(**对称性**);

(3) **若** $A \sim B$, $B \sim C$,**则** $A \sim C$(**传递性**);

(4) **若** $A_i \sim B_i$, $i = 1, \cdots, t$,**则** $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t \end{pmatrix}$;

(5) **若** $A \sim B$, k **为正整数**,**则** $A^k \sim B^k$。**又进一步**,**若** $f(x)$ **为多项式**,**则** $f(A) \sim f(B)$。

证 (1) **因为** $A = E^{-1}AE$,**故** $A \sim A$。

(2) **若** $A \sim B$,**即存在可逆阵** T **使** $B = T^{-1}AT$,**此时**,$A = (T^{-1})^{-1}BT^{-1} = T_1^{-1}BT_1$,**这里** $T_1 = T^{-1}$ **是可逆阵**,**故** $B \sim A$。

(3) **若** $A \sim B$, $B \sim C$,**即存在可逆阵** T_1 **与** T_2 **使** $B = T_1^{-1}AT_1$,$C = T_2^{-1}BT_2$,**此时** $C = T_2^{-1}T_1^{-1}AT_1T_2 = T^{-1}AT$。**这里** $T = T_1T_2$ **是可逆阵的积**,**仍可逆**,**故** $A \sim C$。

(4) $B_i = T_i^{-1}AT_i$, $i = 1, \cdots, t$。**于是**

$$\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{-1}A_1T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_t^{-1}A_tT_t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_t \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t \end{pmatrix}。$$

(5) $B = T^{-1}AT$,

$$B^k = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT) = T^{-1}A^kT^{-1},$$

即 $A^k \sim B^k$。

又设 $f(x) = \sum\limits_k a_k x^k$,

则 $f(B) = \sum\limits_k a_k (T^{-1}AT)^k = \sum\limits_k a_k T^{-1}A^kT$

$$= T^{-1}\left(\sum_k a_k A^k\right)T = T^{-1}f(A)T,$$

即 $f(A) \sim f(B)$。证毕。

如果 $A\sim$对角阵 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$,即存在可逆阵 T 使

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

从而

$$AT = T\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

或

$$A(T^{(1)}, T^{(2)}, \cdots, T^{(n)}) = (T^{(1)}, T^{(2)}, \cdots, T^{(n)})\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}。$$

由分块乘法的法则得

$$(AT^{(1)}, \cdots, AT^{(n)}) = (\lambda_1 T^{(1)}, \cdots, \lambda_n T^{(n)}),$$

从而

$$AT^{(i)} = \lambda_i T^{(i)}, i = 1, \cdots, n。$$

反之,若存在 n **个线性无关的列向量** $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ **满足**

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, i = 1, \cdots, n,$$

则 $T = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ **可逆且**

$$AT = (A\alpha_1, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1 \alpha_1, \cdots, \lambda_n \alpha_n)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

从而 $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, **即** A～**对角阵。**

定理 4.1　n **阶方阵** A **相似于对角阵**　　**存在** n **个线性无关的向量** $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, **满足** $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$, $i = 1, \cdots, n$, **且此时与** A **相似的对角阵的对角线上元素为** $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$。

例 4.1　**设** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (a + b)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (a - b)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

由于 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **线性无关,**

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{有逆 } T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

从而

$$T^{-1}AT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+b & a+b\\a-b & b-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & 0\\0 & a-b\end{pmatrix},$$

故有

$$A = T\begin{pmatrix}a+b & 0\\0 & a-b\end{pmatrix}T^{-1},$$

更有

$$A^n = T\begin{pmatrix}a+b & 0\\0 & a-b\end{pmatrix}^n T^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(a+b)^n & 0\\0 & (a-b)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x & y\\y & x\end{pmatrix}。$$

这里 $x = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$, $y = \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$。

4.2 特征值与特征向量

4.2.1 定义

定义 4.2 **设** A **是数域** P **上** n **阶方阵,若存在** $\lambda \in P$, $\alpha \in P^n$, **且** $\alpha \neq 0$, **使** $A\alpha = \lambda\alpha$, **则称** λ **为** A **的特征值,** α **为** A **的对应于特征值** λ **的特征向量。**

例 4.2 $\begin{pmatrix}3 & 1\\5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, **故 4 是方阵** $\begin{pmatrix}3 & 1\\5 & -1\end{pmatrix}$ **的特征值,** $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ **是对应于特征值 4 的特征向量。又**

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，所以$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$不是$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$的特征向量。

利用特征值和特征向量的概念，定理 4.1 可表达为：

定理 4.2 n阶方阵 A 相似于对角阵 A有 n 个线性无关的特征向量。此时，相似于 A 的对角阵中对角线上元素都是 A 的特征值。

4.2.2 求法

设 A为 n 阶方阵，λ是 A 的特征值，α是对应于 λ 的特征向量。我们来寻找求 λ与 α 的方法。

由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 得$(\lambda E - A)\alpha = 0$，此时 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 是系数矩阵为 $(\lambda E - A)$ 的齐次线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 的非零解。由于齐次线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 有非零解，故必

$$|\lambda E - A| = 0。$$

这是以 λ为未知数的代数方程，由此求出特征值 $\lambda = \lambda_1, \cdots, \lambda_s$。

齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的非零解即 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量 $(i = 1, \cdots, s)$。

由此得到特征值与特征向量的求法：

(1) 由 $|\lambda E - A| = 0$ 求出特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$；

(2) 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的非零解，即求得对应于 λ_i 的特征向量 $(i = 1, \cdots, s)$。

例 4.3 求 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解 (1) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - 13)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & \lambda - 5 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 13)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 13)(\lambda - 1)^2,$$

由 $(\lambda - 13)(\lambda - 1)^2 = 0$ **得特征值** $\lambda = 13, 1$。

(2) $\lambda = 13$, $(13E - A) = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{(2)}{4}]{-\frac{(1)}{4}\backslash -\frac{(3)}{4}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{(2)-(1)}{3}]{(3)+(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-(2)]{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得非零解为 $k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(k \neq 0)$, **即对应于特征值** 13 **的特征向量为**

$l\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(l = -k \neq 0)$。

(3) $\lambda = 1, (1E - A) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

非零解为 $k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(k_1, k_2$ **不全为** $0)$, **此即对应于特征值** 1 **的特征向量**。

例 4.4 求 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ **的特征值与特征向量** $(b\neq 0)$。

解 (1) **由** $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -b & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a)^2-b^2=0$,**求得特征值** $\lambda=a+b, a-b$。

(2) $\lambda=a+b$, $(a+b)E-A=\begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **非零解(即对应于** $a+b$ **的特征向量)为** $k\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}=l\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(l=-k\neq 0)$。

(3) $\lambda=a-b$, $(a-b)E-A=\begin{bmatrix} -b & -b \\ -b & -b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, **对应于** $a-b$ **的特征向量为** $k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(k\neq 0)$。

例 4.5 **若三阶方阵** A **有三个特征值** 1, 2, 3, **对应的特征向量分别为** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$, **求** A。

解 **由题意**

$$A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 12 \\ 1 & 6 & 24 \end{bmatrix},$$

于是 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 4 & 12\\1 & 6 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 8\end{pmatrix}^{-1}$。**算法如下**:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 3 & 8\\1 & 2 & 3\\1 & 4 & 12\\1 & 6 & 24\end{pmatrix}\xrightarrow[(2)-(1)]{(3)-(2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 2\\1 & 2 & 5\\1 & 1 & 1\\1 & 3 & 8\\1 & 5 & 18\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)-2(2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & 3 & 2\\1 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)-2(3)]{(1)-(2)+(3)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 3 & -1\\0 & -1 & 2\\4 & -1 & 18\end{pmatrix}。$$

故

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\0 & -1 & 2\\4 & -1 & 18\end{pmatrix}。$$

例 4.6 **若** $n(\geq 2)$ **阶方阵** A **的** i **行**, j **列元素为** $i\cdot j$。**求** A **的特征值。**

解
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1\cdot 1 & 0-1\cdot 2 & \cdots & 0-1\cdot n\\0-2\cdot 1 & \lambda-2\cdot 2 & \cdots & 0-2\cdot n\\\cdots & \cdots & & \cdots\\0-n\cdot 1 & 0-n\cdot 2 & \cdots & \lambda-n\cdot n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{vmatrix}_{(n)}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} \lambda & & & -i\cdot i & & \\ & \lambda & & -2\cdot i & & \\ & & \ddots & \cdots & & \\ & & & -i\cdot i & & \\ & & & \cdots & \ddots & \\ & & & -n\cdot i & & \lambda \end{vmatrix}$$

第 i 列

$$=\lambda^{n}-\sum_{i=1}^{n} i^{2}\cdot\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\sum_{i=1}^{n} i^{2}\right)。$$

故 A **的特征值为** 0 **与** $\sum_{i=1}^{n} i^{2}$ 。

4.2.3　特征多项式

定义 4.3　**称未知量** λ **的多项式** $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ **为方阵** A **的特征多项式。**

若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, **则**

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

$$+(\text{次数不大于}(n-2)\text{ 的单项})$$

$$=\lambda^{n}-\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)\lambda^{n-1}+\cdots+f(0),$$

$f(\lambda)$ **的常数项为** $f(0)=|-A|=(-1)^{n}|A|$。

推论　**方阵** A **的特征值是它的特征多项式的零点。**

定理 4.3　**相似矩阵有相同的特征多项式,从而有相同的特征值。**

证 若 $B = T^{-1}AT$, 则

$$
\begin{aligned}
|\lambda E - B| &= |\lambda E - T^{-1}AT| = |T^{-1}(\lambda E - A)T| \\
&= |T^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |T| = |T^{-1}| \cdot |T| \cdot |\lambda E - A| \\
&= |E| \cdot |\lambda E - A| = |\lambda E - A|。
\end{aligned}
$$
定理得证。

命题 4.1 相似矩阵的秩相同。

证 $B = T^{-1}AT$, 故 $r(B) \leq r(A)$。又 $A = TBT^{-1}$, 所以 $r(A) \leq r(B)$。于是 $r(A) = r(B)$。

例 4.7 若 $A = (a_{ij})_{n\times n} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}。$$

证 由 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 比较两边 x^{n-1} 的系数, 可知 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = B$ 的对角线上元素之和 $= r(B) = r(A)$。

命题 4.2 若 $A \in P^{n\times n}$, $f(x) \in P[x]$, λ 是 A 的特征值, 则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值。

证 设 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 即 α 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_t x^t,$$

则

$$
\begin{aligned}
f(A)\alpha &= [a_0 E + a_1 A + \cdots + a_t A^t]\alpha \\
&= a_0\alpha + a_1 A\alpha + \cdots + a_t A^t\alpha \\
&= a_0\alpha + a_1\lambda\alpha + \cdots + a_t\lambda^t\alpha \\
&= [a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_t\lambda^t]\alpha \\
&= f(\lambda)\alpha,
\end{aligned}
$$

故 $f(\lambda)$是 $f(A)$的特征值。

例 4.8 求矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

的特征值。

解 令 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^3=E,$$

于是

$$B=aE+bA+cA^2=f(A), f(x)=a+bx+cx^2,$$

由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-1=0$$

得 A 的三个特征值:$1,\omega,\omega^2$;这里 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$。所以, $B=f(A)$ 的三个特征值为

$$f(1)=a+b+c,$$
$$f(\omega)=a+b\omega+c\omega^2,$$
$$f(\omega^2)=a+b\omega^2+c\omega。$$

4.2.4 特征向量的性质

命题 4.3 设 $A\in P^{n\times n}$, 记 $V_\lambda=\{\alpha\in P^n \mid A\alpha=\lambda\alpha\}$, 若 $\alpha_1,\cdots,$

$\alpha_t \in V_\lambda, k_1, \cdots, k_t \in P$,则 $\sum_{i=1}^{t} k_i\alpha_i \in V_\lambda$。

证 因为 $A(\sum k_i\alpha_i) = \sum k_i A\alpha_i = \sum k_i\lambda\alpha_i = \lambda(\sum k_i\alpha_i)$。所以 $\sum k_i\alpha_i \in V_\lambda$。

命题 4.4 方阵 A 的对应于不同特征值的特征向量线性无关。

证 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的两两不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$。

如果 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$,两边逐次左乘 A,利用 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$,可得

$$\begin{aligned}
\lambda_1 x_1\alpha_1 + \cdots\cdots + \lambda_s x_s\alpha_s &= 0,\\
\lambda_1^2 x_1\alpha_1 + \cdots\cdots + \lambda_s^2 x_s\alpha_s &= 0,\\
\cdots \qquad\qquad\qquad \cdots&\\
\lambda_1^{s-1} x_1\alpha_1 + \cdots\cdots + \lambda_s^{s-1} x_s\alpha_s &= 0,
\end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$(x_1\alpha_1, x_2\alpha_2, \cdots, x_s\alpha_s)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{s-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & \lambda_s & \lambda_s^2 & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix} = 0。$$

s 阶方阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{s-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{s-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & \lambda_s & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}$,它的行列式为 Vandermonde 行列式且其值不为零,故 B 可逆。上式两边右乘 B^{-1} 得

$$(x_1\alpha_1, \cdots, x_s\alpha_s) = 0,$$

即

$$x_i\alpha_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, s)。$$

因为 α 是特征向量，$\alpha \neq 0$，必 $x_i = 0\ (i = 1, \cdots, s)$。故向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。

推论 若 n 阶方阵有 n 个不同特征值，则相似于对角阵。

证 这是因为对应于每个特征值至少有一个特征向量，从而有 n 个特征向量，它们对应于不同特征值，因此线性无关，由定理 4.2，方阵相似于对角阵。

例 4.9 在例 4.2 中，$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，对应于特征值 13，$A$ 有特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应于特征值 1，$A$ 有线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$。根据命题 4.3 与 4.4，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 A 的三个线性无关的特征向量。

4.3 Jordan 标准形

给了方阵 A，不一定存在与 A 相似的对角阵。我们要问，与 A 相似的矩阵中哪一个最简单。在复矩阵的情形，答案是 Jordan 标准形。

定义 4.4 形如 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$ 的方阵称

为 n_i **阶** Jordan **块**, **其中** λ_i **为复数。由** Jordan **块组成的准对角矩阵**

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_s \end{bmatrix}$$

称为 Jordan **标准形。**

例如, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & \text{0} & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & \text{0} & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix}$, (λ) **都是** Jordan **块。特别**, **一阶方阵是当然的** Jordan **块。方阵**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & i & 0 & \\ & & & 1 & i & \\ & & & & & i \end{bmatrix}$$

是由 4 **个** Jordan **块组成的** Jordan **标准形。任意** n **阶对角阵是由** n **个** 1 **阶** Jordan **块组成的** Jordan **标准形。**

下面叙述复数域上方阵相似标准形理论的基本定理(证略)。

定理 4.4　**复方阵** A **必相似于一** Jordan **标准形。如果不考虑**Jordan**块的排列次序**, Jordan **标准形由** A **惟一确定。**

例 4.10　**求下列方阵的** Jordan **标准形。**

(1) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$;

(2) $B=\begin{pmatrix}3&0&0&&\\1&3&0&&\\0&1&3&&\\&&&5&3\\&&&2&4\end{pmatrix}$。

解 (1) **由** $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda-5 & -3\\ -2 & \lambda-4\end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda-2)(\lambda-7) = 0$ **得** A **的特征值为** 2,7。**因而二阶方阵** A **相似于对角阵** $\begin{pmatrix}2&0\\0&7\end{pmatrix}$,**此即** A **的** Jordan **标准形**。

(2) **因为** $\begin{pmatrix}5&3\\2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0\\0&7\end{pmatrix}$,**由矩阵相似的性质**(4)(**见** 4.1)**得**

$$B\sim\begin{pmatrix}3&0&0&&\\1&3&0&&\\0&1&3&&\\&&&2&0\\&&&0&7\end{pmatrix}$$

后者即为 B **的** Jordan **标准形**。

4.4 方阵的最小多项式

4.4.1 方阵的化零多项式

定义 4.5 A **是数域** P **上** n **阶方阵**,**数域** P **上多项式** $f(x)$ **称为** A **的化零多项式**,**如果** $f(A) = 0$。

例如,**因为** $\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix} - 8E_2 = 0$,**所以** $f(x) = x^2 - 2x - 8$ **是矩阵** $\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ **的化零多项式**。

命题 4.5　**任意方阵都有非零化零多项式。**

证　**设** A **为** n **阶方阵。若把** n **阶方阵的** n^2 **个元素排成一列,则可把** n **阶方阵看成** n^2 **维向量,加法与数乘运算如旧。于是,** n^2+1 **个** n^2 **维向量** $E_n, A, A^2, \cdots, A^{n^2}$ **必线性相关,即存在** n^2+1 **个不全为** 0 **的数** $k_0, k_1, \cdots, k_{n^2}$ **使**

$$k_0 E + k_1 A + \cdots + k_{n^2} A^{n^2} = 0。$$

从而非零多项式 $k_0 + k_1 x + \cdots + k_{n^2} x^{n^2}$ **是方阵** A **的非零化零多项式。**

4.4.2　方阵的最小多项式

定义 4.6　**方阵** A **的次数最低的首** 1 **化零多项式称为** A **的最小多项,记成** $m_A(x)$。

定理 4.5　**任意方阵** A **均有最小多项式。**

证　**由命题** 4.5, A **有非零化零多项式,从而有次数最小的非零化零多项式,首** 1 **化即得结论。**

命题 4.6　$f(x)$ **是方阵** A **的化零多项式**　　$m_A(x) \mid f(x)$。

证　　**若** $f(x) = m_A(x) g(x)$, **则** $f(A) = m_A(A) g(A) = 0$。

作带余除法, $f(x) = q(x) m_A(x) + r(x)$, $\deg r(x) < \deg m_A(x)$。**两边用** A **代** x, **得** $r(A) = 0$, **由** $m_A(x)$ **的定义,必** $r(x) = 0$, **即** $m_A(x) \mid f(x)$。

例 4.11　Jordan **块** $J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \lambda_0 \end{bmatrix}_{n_0 \times n_0}$ **的最小多项式为** $(x - \lambda_0)^{n_0}$, **即** J_0 **的特征多项式** $|xE - J_0|$。

证 $$(J_0-\lambda_0 E)^{n_0}=\left[\begin{array}{cccccc} 0 & & & & & \\ 1 & \ddots & & & \text{0} & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \text{0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{array}\right]^{n_0}_{n_0\times n_0}=0,$$

由命题 4.4，$m_{J_0}(x) \mid (x-\lambda_0)^{n_0}$，故 $m_{J_0}(x)=(x-\lambda_0)^k$，$k\leq n_0$，但 $k<n$ 时，$(J_0-\lambda_0 E)^k\neq 0$，故

$$m_{J_0}(x)=(x-\lambda_0)^{n_0}=|xE-J_0|。$$

命题 4.7　相似方阵有相同的最小多项式。

证　若 $B=T^{-1}AT$，则 $m_A(B)=T^{-1}m_A(A)T=0$，故 $m_B(x)\mid m_A(x)$。同理 $m_A(x)\mid m_B(x)$。故两个首 1 多项式 $m_A(x)$ 与 $m_B(x)$ 相等。

推论　方阵的最小多项式是惟一的。

命题 4.8　若 A 为准对角阵 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s\end{bmatrix}$，则

$$m_A(x)=[m_{A_1}(x),\cdots,m_{A_s}(x)]。$$

这里 $[m_{A_1}(x),\cdots,m_{A_s}(x)]$ 表示为 $m_{A_1}(x),\cdots,m_{A_s}(x)$ 的最小公倍式。

证　记 $[m_{A_1}(x),\cdots,m_{A_s}(x)]=f(x)$。

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(A_s)\end{bmatrix}。$$

因为 $m_{A_i}(x)\mid f(x)$，所以 $f(A_i)=0$，$i=1,\cdots,s$，故 $f(A)=0$，于是 $m_A(x)\mid f(x)$。

又

$$0 = m_A(A) = \begin{pmatrix} m_A(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & m_A(A_s) \end{pmatrix},$$

即 $m_A(A_i) = 0$，故 $m_{A_i}(x) \mid m_A(x)$，$i = 1, \cdots, s$，从而

$$f(x) \mid m_A(x)。$$

所以

$$f(x) = m_A(x)。$$

命题 4.9 Jordan 标准形 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$ 的最小多项式为 $[(x-\lambda_1)^{n_1}, \cdots, (x-\lambda_s)^{n_s}]$，这里

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & & \\ 1 & \ddots & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad i = 1, \cdots, s。$$

命题 4.10 方阵 A 的特征多项式 $f(x) = |xE - A|$ 是 A 的化零多项式。

证 在复数域内

$$A \sim J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix},$$

$$m_A(x) = m_J(x) = [(x-\lambda_1)^{n_1}, \cdots, (x-\lambda_s)^{n_s}],$$

而

$$|xE - A| = |xE - J| = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots\cdots (x-\lambda_s)^{n_s},$$

故得证明。

因为 $m_A(x)$ 是 $(x-\lambda_1)^{n_1},\cdots,(x-\lambda_s)^{n_s}$ 的最小公倍式，必

$$(x-\lambda_i)^{n_i} \mid m_A(x),$$

从而

$$m_A(\lambda_i) = 0,$$

即特征值是最小多项式的零点。故得下面推论。

推论　方阵 A 的特征值必是 $m_A(x)$ 的根。

4.4.3　相似于对角阵的矩阵

定理 4.6　数域 P 上方阵 A 相似于对角阵　　A 的最小多项式在 $P[x]$ 中能分解成不同一次因子的积。

证　　设 $A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$，则 A 的最小多项式 $= [\lambda-\lambda_1,\cdots,\lambda-\lambda_n]$，故是不同的一次因子之积。

A 的 Jordan 标准形 $J \in P^{n\times n}$：

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \ddots & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}。$$

由命题 4.8，J_i 的最小多项式 $(x-\lambda_i)^{n_i}$ 是 A 的最小多项式的因子，而后者是不同的一次因子之积，故必 $n_i = 1$，即 Jordan 块全是一阶的，从而 Jordan 标准形是 P 上的对角阵。因此 A 与对角阵 J 相似。

注　若 $B \sim A$，$B, A \in P^{n\times n}$，B 为对角阵，则存在 $T \in P^{n\times n}$ 使 $B = T^{-1}AT$。这是因为 T 的列向量是 A 的特征向量，是 P 上线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 的非零解。

例 4.12 若方阵 A 满足 $A^2 - 5A + 6E = 0$, 则

$$A \sim \begin{pmatrix} 2E_r & 0 \\ 0 & 3E_t \end{pmatrix}, r, t \geq 0。$$

证 由假设,多项式 $f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ 是 A 的化零多项式。由于 $f(x)$ 是不同一次因子的积, A 的最小多项式是 $f(x)$ 的因子,因此也是不同一次因子的积,所以 A 相似于某个对角阵。此对角阵的对角线上元素是 A 的特征值,故必是最小多项式的根,从而也是化零多项式 $f(x)$ 的根,即 2 或 3。于是有非负整数 r 与 t 使

$$A \sim \begin{pmatrix} 2E_r & 0 \\ 0 & 3E_t \end{pmatrix}。$$

例 4.13 若方阵 A 满足

$$A^2 - 5A + 6E = 0,$$

求 A^{100}。

解 用 $x^2 - 5x + 6$ 除 x^{100}, 得商 $q(x)$ 及余式 $ax + b$:

$$x^{100} = q(x)(x^2 - 5x + 6) + ax + b。$$

令 $x = 2$, 得

$$2^{100} = 2a + b,$$

令 $x = 3$, 得

$$3^{100} = 3a + b,$$

解之, 得

$$a = 3^{100} - 2^{100}, b = -2 \times 3^{100} + 3 \times 2^{100},$$

于是

$$\begin{aligned} A^{100} &= q(A)(A^2 - 5A + 6E) + aA + bE \\ &= (3^{100} - 2^{100})A + (3 \times 2^{100} - 2 \times 3^{100})E。\end{aligned}$$

例 4.14 若方阵 A 满足 $A^2 = A$, 求证:

$$r(A) = \sum_i A(i, i)。$$

证 A **有化零多项式** $x^2 - x = x(x-1)$。**由于** $x^2 - x$ **无重根，因而** A **相似于对角阵。因为** $x^2 - x$ **的根为** 0 **或** 1，**于是** A **的特征值为** 0 **或** 1，**从而** A **相似对角阵** $\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$，**这里** r **是** A **的秩。由例题** 4.5，**得**

$$r(A) = \sum_i A(i, i)。$$

例 4.15 **设** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，**求** A^{100}。

解 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -5 \\ 0 & \lambda + 2 & -3 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)[\lambda^2 - 4 + 3] = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$，**故** A **有化零多项式** $(x-1)^2(x+1) = f(x)$。

设用 $(x-1)^2(x+1)$ **除** x^{100} **得商** $q(x)$**与余式** $ax^2 + bx + c$：

$$x^{100} = q(x)(x-1)^2(x+1) + ax^2 + bx + c,$$

两边求导，得

$$100x^{99} = (x-1)p(x) + 2ax + b,$$

此处 $p(x)$ **为某个多项式。**

令 $x = 1$，**得**

$$1 = a + b + c,$$
$$100 = 2a + b。$$

令 $x = -1$，**得**

$$(-1)^{100} = a - b + c,$$

由

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ 2a+b=100, \\ a-b+c=1, \end{cases}$$

得

$$b=0, a=50, c=-49,$$

于是

$$\begin{aligned} A^{100} &= q(A)f(A)+aA^2+bA+cE \\ &= 50A^2-49E \\ &= 50\begin{pmatrix} 1 & -9 & 27 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 49\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -450 & 1350 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。\end{aligned}$$

例 4.16　设三阶方阵 A 有三个特征值 1,2,3,对应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$,**向量** $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$。**求**: $A^n\beta$。

解　记 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, B **可逆**。(B **的列向量为对应于** A **的不同特征值的特征向量,必线性无关,所以** B **可逆**。)

$$A^n\beta = A^nBB^{-1}\beta = \left(A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right) B^{-1}\beta$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix} B^{-1}\beta。$$

先计算 $B^{-1}\beta$**于下**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)-(1)]{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{(3)-2(2)}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)-2(3)]{(1)+(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)。$$

于是 $B^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

故

$$A^n\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1}+3^n \\ 2-2^{n+2}+3^{n+1} \\ 2-2^{n+3}+3^{n+2} \end{pmatrix}。$$

例 4.16 **解法的实质是表** β **为特征向量的线性组合。**$\beta = BB^{-1}\beta$, $B^{-1}\beta$**即为线性组合的系数。**

例 4.17　$a \neq 0$,**设** $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$,**求** A^{100}。

解

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix} = A + 2E,$$

即 A 有化 0 多项式 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$。

设 $x^{100}=q(x)(x-2)(x+1)+ax+b$,

$$\begin{cases}\text{令 } x=-1, \text{得}, & -a+b=1,\\ \text{令 } x=2, \text{得}, & 2a+b=2^{100},\end{cases}$$

解之,得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}(2^{100}-1),\\ b=\dfrac{1}{3}(2^{100}+2)。\end{cases}$

于是

$$A^{100}=\frac{1}{3}(2^{100}-1)A+\frac{1}{3}(2^{100}+2)E。$$

例 4.17 的解法对方阵的最小多项式是 2 次时,经常有效。

4.5 向量的内积

仿照平面几何与几何空间中向量的内积,本节引进 n 维向量的内积,从而导出向量的长度与正交化的概念。

4.5.1 共轭矩阵

定义 4.7 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$ 是复数域上的一个 $s\times n$ 阵,若用 $\overline{a}_{ij}$ 表示数 a_{ij} 的共轭复数,则称 $s\times n$ 阵 $(\overline{a}_{ij})_{s\times n}$ 为 A 的共轭矩阵,记成 $\overline{A}$。例如:

$$\overline{\begin{pmatrix}3 & 3+\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 2-\mathrm{i}\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}3 & 3-\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 2+\mathrm{i}\end{pmatrix}。$$

由复数运算的性质,易得:

性质 (1) $\overline{(\overline{A})}=A$;

(2) $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$;

(3) $\overline{A'}=(\overline{A})'$;

(4) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(5) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$;

(6) **若** A **可逆,则** $\overline{A^{-1}} = (\overline{A})^{-1}$。

4.5.2 向量的内积

定义 4.8 **设** $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$**是两个** n **维列向量,称数**$\overline{\alpha}'\cdot\beta=$ $(\overline{a_1},\cdots,\overline{a_n})\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}\,b_i$ **为向量** α **与** β **的内积,记成**$[\alpha,\beta]$。**例如**:

$$\left[\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -2 \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}\right] = (\overline{1+\mathrm{i}}, \overline{2}, \overline{2-\mathrm{i}})\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -2 \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= (1-\mathrm{i})\mathrm{i} + 2(-2) + (2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) = 2+\mathrm{i}。$$

性质 (1) $[\alpha,0] = [0,\beta] = 0$。

(2) $[\beta,\alpha] = \overline{[\alpha,\beta]}$。

(3) $[\alpha, l_1\beta_1 + l_2\beta_2] = l_1[\alpha,\beta_1] + l_2[\alpha,\beta_2]$,

$[k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2,\beta] = \overline{k_1}[\alpha_1,\beta] + \overline{k_2}[\alpha_2,\beta]$。

(4) $[\alpha,\alpha]$**是非负实数,且** $[\alpha,\alpha] = 0 \quad \alpha = 0$。

上述性质可直接由矩阵运算与复数的性质得出。如$[\alpha,\alpha] = \sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}a_i = \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2 \geq 0$,**且**$[\alpha,\alpha] = 0 \quad a_i$**的模**$|a_i| = 0$, $i=1,\cdots,n \quad a_i = 0$, $i=1,\cdots,n \quad \alpha = 0$。

4.5.3 向量的长度

定义 4.9 **称非负实数** $\sqrt{[\alpha,\alpha]}$**为向量** α **的长度,记成**$\|\alpha\|$。

例如,设 $\alpha=\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ 3 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$,则 $\|\alpha\| = \sqrt{5+9+4} = \sqrt{18} = 2\sqrt{3}$。

由内积的性质,易得向量长度的性质。

性质 (1) $\|\alpha\| \geq 0$,且 $\|\alpha\| = 0 \quad \alpha = 0$;

(2) $\|k\alpha\| = |k|\,\|\alpha\|$。

定义 4.10 长度为 1 的向量称为单位向量。若 $\alpha \neq 0$,用 $\dfrac{1}{\|\alpha\|}$ 乘非零向量 α 的运算称单位化运算。

例如,把向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 单位化,得单位向量 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$。

4.5.4 正交

定义 4.11 若 $[\alpha,\beta] = 0$,则称向量 α 与 β 正交。显然,零向量与任何向量正交。

定义 4.12 两两正交的非零向量组称为正交组,由单位向量组成的正交组称为标准正交组。

例 4.18 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} \\ +\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ +\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 是标准正交组。

例 4.19 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是标准正交组。

命题 4.11 **向量组** $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **是标准正交组** $\Leftrightarrow$ $[\alpha_i,\alpha_j]=\delta_{ij}$, $i,j=1,\cdots,s$ $\Leftrightarrow$ $([\alpha_i,\alpha_j])_{s\times s}=E_s$。

命题 4.12 **正交组单位化则成标准正交组。**

命题 4.13 **正交组必线性无关。**

证 **设** $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **为正交组,若**

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

则

$$0=[\alpha_i,0]=[\alpha_i,\sum_{j=1}^{s}k_j\alpha_j]=k_i[\alpha_i,\alpha_i],$$

因为 $\alpha_i\neq 0$,**故** $[\alpha_i,\alpha_i]\neq 0$,**必** $k_i=0$, $i=1,\cdots,s$。**所以** $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **线性无关。**

4.5.5 正交化方法

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **为线性无关向量组,我们寻求与向量组** $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **等价的正交组(称这个过程为正交化过程)。**

令 $\gamma_1=\alpha_1$, $\{\gamma_1\}\sim\{\alpha_1\}$。**若正交组** $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ **已求得**

$$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_t\}\sim\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t\},$$

可设

$$\gamma_{t+1}=\alpha_{t+1}+k_1\gamma_1+\cdots+k_t\gamma_t,$$

由 $[\gamma_i,\gamma_{t+1}]=0$, $i=1,\cdots,t$, **得**

$$[\gamma_i,\alpha_{t+1}]+k_i[\gamma_i,\gamma_i]=0,$$

于是

$$k_i=\frac{-[\gamma_i,\alpha_{t+1}]}{[\gamma_i,\gamma_i]},\qquad i=1,2,\cdots,t。$$

反之设

$$\gamma_{t+1}=\alpha_{t+1}-\sum_{i=1}^{t}\frac{[\gamma_i,\alpha_{t+1}]}{[\gamma_i,\gamma_i]}\gamma_i,$$

则满足

$$[\gamma_i, \gamma_{t+1}] = 0, \quad i = 1, \cdots, t。$$

从而 $\gamma_1, \cdots, \gamma_t, \gamma_{t+1}$ 也是正交组。

$$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_t, \gamma_{t+1}\} \sim \{\gamma_1, \cdots, \gamma_t, \alpha_{t+1}\} \sim \{\alpha_1, \cdots, \alpha_t, \alpha_{t+1}\}。$$

这样,我们得到了正交化的方法。

正交化方法 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是线性无关的向量组,令 $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{[\gamma_j, \alpha_i]}{[\gamma_j, \gamma_j]}\gamma_j$, $i = 2, \cdots, s$,则$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_t\}$是与$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$等价的正交组,$t = 1, \cdots, s$。

注意 (1) 因$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_t\} \sim \{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$,故两者的秩皆为 t,于是 $\gamma_1, \cdots, \gamma_t$ 线性无关,其中必无零向量。

(2) 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,则$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_s\}$仍等价于$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$,且 $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ 两两正交,但其中有零向量。

若记 $\varepsilon_i = \frac{\gamma_i}{\|\gamma_i\|}$, $i = 1, \cdots, s$,则$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t\}$是与$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$等价的标准正交组,$t = 1, \cdots, s$。

命题 4.14 若 n 维向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ $(t < n)$ 是正交组(或标准正交组),则存在 n 维向量 $\alpha_{t+1}, \cdots, \alpha_n$ 使 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t, \cdots, \alpha_n$ 为正交组(或标准正交组)。

证 因为 P^n 的秩为 n,由命题 3.8 与命题 4.13,存在 n 维向量 $\beta_{t+1}, \cdots, \beta_n$ 使 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t, \beta_{t+1}, \cdots, \beta_n$ 线性无关,令

$$\alpha_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{[\alpha_j, \beta_i]}{[\alpha_j, \alpha_j]}\alpha_j, \quad i = t+1, \cdots, n,$$

则$\alpha_1, \cdots, \alpha_t, \cdots, \alpha_n$ 是正交组。

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 是标准正交组,令 $\gamma_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$, $i = t+1, \cdots, n$,则$\alpha_1, \cdots, \alpha_t, \gamma_{t+1}, \cdots, \gamma_n$ 是标准正交组。

例 4.20 求与向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 等价的

标准正交组。

解 正交化,得

$$\gamma_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 - \frac{[\gamma_1, \alpha_2]}{[\gamma_1, \gamma_1]}\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = \alpha_3 - \frac{[\gamma_1, \alpha_3]}{[\gamma_1, \gamma_1]}\gamma_1 - \frac{[\gamma_2, \alpha_3]}{[\gamma_2, \gamma_2]}\gamma_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

单位化,得

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 即为所求标准正交组。

4.6 酉相似

4.6.1 关联阵

定义 4.13 设 A 为 n 阶方阵,称 $\overline{A}'$ 为 A 的关联阵,记成 $A^\star$。由矩阵的转置与共轭运算的性质,即得

性质 (1) $(A^\star)^\star = A$;

(2) $(A + B)^\star = A^\star + B^\star$;

(3) $(kA)^{\star} = \bar{k}A^{\star}$;

(4) $(A')^{\star} = (A^{\star})'$;

(5) $(AB)^{\star} = B^{\star}A^{\star}$;

(6) 若 A 可逆,则 $(A^{-1})^{\star} = (A^{\star})^{-1}$。

命题 4.15 设 A 为 n 阶方阵,则对任意 n 维(列)向量 α,β,均有

$$[A\alpha,\beta] = [\alpha, A^{\star}\beta]。$$

证 因为 $[A\alpha,\beta] = (A\alpha)^{\star}\beta = \overline{\alpha}'A^{\star}\beta = [\alpha, A^{\star}\beta]$。

4.6.2 酉阵

定义 4.14 若 n 阶方阵 A 满足 $AA^{\star} = A^{\star}A = E$,即 $A^{-1} = A^{\star}$,则称 A 为酉阵。

性质 (1) 若 A 是酉阵,则 A',$\overline{A}$ 与 $A^{-1} = A^{\star}$ 都是酉阵;

(2) 若 A 与 B 是两个 n 阶酉阵,则 AB 也是酉阵。

证 (1) 因为 $(A')^{-1} = (A^{-1})' = (A^{\star})' = (A')^{\star}$,

$$(\overline{A})^{-1} = (\overline{A^{-1}}) = \overline{A^{\star}} = (\overline{A})^{\star},$$
$$(A^{\star})^{-1} = (A^{-1})^{\star} = (A^{\star})^{\star}。$$

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^{\star}A^{\star} = (AB)^{\star}$。

命题 4.16 n 阶方阵 A 是酉阵 A 的列向量是标准正交组 A 的行向量是标准正交组。

证 A 是酉阵 $A^{-1} = A^{\star}$ $A^{\star}A = E$ $A^{\star}A(i,j) = \delta_{ij}$,即 $(\overline{A^{(i)}})' \cdot A^{(j)} = \delta_{ij}$,即 $[A^{(i)}, A^{(j)}] = \delta_{j}$,即 A 的列向量为标准正交组。

又 A 是酉阵 A' 是酉阵 A' 的列向量为标准正交组 A 的行向量为标准正交组。

由命题 4.14 与 4.16 即得

命题 4.17 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 是 P^n 中的标准正交组 $(t < n)$,则存

在 n 维向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$,使 n 阶方阵$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_n)$为酉阵。

定义 4.15 实酉阵称为正交阵,即实矩阵 $A(\overline{A}=A)$ 为正交阵 $A^{-1}=A'$。

例 4.21 求正交阵 A,若 $A=\begin{pmatrix} a & x & u \\ 2a & -b & v \\ 2a & 2b & w \end{pmatrix}$,这里 $a,b,w>0$。

解 由于正交阵的列向量组为标准正交组,故由

$$\begin{cases} a^2+(2a)^2+(2a)^2=1, \\ a>0, \end{cases}$$

得 $a=\dfrac{1}{3}$,由$\left[\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x \\ -b \\ 2b \end{pmatrix}\right]=a[x-2b+4b]=0$,得 $x=-2b$,

由$\begin{cases} x^2+(-b)^2+(2b)^2=(-2b)^2+(-b)^2+(2b)^2=1, \\ b>0。\end{cases}$

得 $b=\dfrac{1}{3}$,于是 $A=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & u \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & v \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} & w \end{pmatrix}$,又由行向量为单位向量,得

$$w=\frac{1}{3}(>0),$$

$$v=\pm\frac{2}{3},$$

$$u=\pm\frac{2}{3}。$$

由行向量内积为 0,得

$$v=-\frac{2}{3},\quad u=\frac{2}{3}。$$

故所求矩阵

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}。$$

4.6.3 酉相似

定义 4.16 设 A, B 为两个 n 阶方阵，若存在酉阵 T 使 $B = T^{-1}AT = T^{\star}AT$，则称 A 与 B 酉相似。记成 $A\overset{\bar{U}}{\sim}B$。

利用单位阵是酉阵、酉阵的逆、两个酉阵的积仍是酉阵，可得

性质 (1) $A\overset{U}{\sim}A$;

(2) 若 $A\overset{\bar{U}}{\sim}B$，则 $B\overset{U}{\sim}A$;

(3) 若 $A\overset{\bar{U}}{\sim}B$, $B\overset{\bar{U}}{\sim}C$，则 $A\overset{\bar{U}}{\sim}C$。

定理 4.7 任意方阵 A 必酉相似于上三角阵。

证 对 A 的阶 n 用归纳法。

$n = 1$ 时，A 已是上三角阵。

若 $(n-1)$ 时结论成立。设 A 为一 n 阶方阵，取 A 的一个特征值 λ_1，设 α_1 是对应的单位特征向量，由命题 4.14，存在 n 维向量 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 使 $T = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 为酉阵，于是

$$\begin{aligned}AT &= A(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n)\\ &= (\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n)\\ &= (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12}, & \cdots & b_{1n}\\ 0 & & & \\ \cdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\\ &= T\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & & & \\ \cdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = TB,\end{aligned}$$

即

$$T^{-1}AT = B。$$

$$A \overset{U}{\sim} B。$$

A_1 为 $(n-1)$ 阶方阵,由归纳法假设,存在 $(n-1)$ 阶酉阵 V 使 $V^{-1}A_1V$ 为上三角阵, $\begin{pmatrix} \lambda_2 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$。

令 $Q = \begin{pmatrix} 1 & \\ & V \end{pmatrix}$ 为 n 阶准对角阵,则

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & V^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & V^{\star} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & V \end{pmatrix}^{\star} = Q^{\star},$$

即 Q 为酉阵,且

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & \\ & V^{\star} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \cdots b_{1n} \\ 0 & \\ \cdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & V \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \cdots b_{1n} \\ 0 & \\ \cdots & V^{-1}A_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & V \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \cdots & V^{-1}A_1V \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即

$$B \overset{\overline{U}}{\sim} 上三角阵\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

从而 $A \overset{\overline{U}}{\sim}$ 上三角阵。

4.6.4 正规阵

定义 4.17 n 阶方阵 A 称为 Hermite 阵,如果 $A^{\star} = A$。

推论 实对称阵是 Hermite 阵。

定义 4.18 方阵 A 称为正规阵,如果 $A^{\star}A = AA^{\star}$。

推论 酉阵、Hermite 阵都是正规阵。从而正交阵、实对称阵都是正规阵。

引理 4.1 设 A 是正规阵,α 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量,则 α 也是 $A^{\star}$ 的对应于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量。

证 因为 A 是正规阵,$A^{\star}A = AA^{\star}$,从而

$$\begin{aligned}(A - \lambda E)^{\star}(A - \lambda E) &= (A^{\star} - \bar{\lambda}E)(A - \lambda E) \\ &= A^{\star}A - (\lambda + \bar{\lambda})A + \bar{\lambda}\lambda E \\ &= AA^{\star} - (\lambda + \bar{\lambda})A + \lambda\bar{\lambda}E \\ &= (A - \lambda E)(A - \lambda E)^{\star}。\end{aligned}$$

由于 $A\alpha = \lambda\alpha$,因而 $(A - \lambda E)\alpha = 0$,由命题 4.15,我们有

$$\begin{aligned}[(A - \lambda E)^{\star}\alpha, (A - \lambda E)^{\star}\alpha] &= [\alpha, (A - \lambda E)(A - \lambda E)^{\star}\alpha] \\ &= [\alpha, (A - \lambda E)^{\star}(A - \lambda E)\alpha] \\ &= [(A - \lambda E)\alpha, (A - \lambda E)\alpha] = 0,\end{aligned}$$

于是

$$A^{\star}\alpha - \bar{\lambda}\alpha = (A - \lambda E)^{\star}\alpha = 0,$$

即

$$A^{\star}\alpha = \bar{\lambda}\alpha。$$

引理得证。

定理 4.8 正规阵 A 的对应于不同特征值的特征向量是正交的。

证 设 λ_1, λ_2 是 A 的不同特征值，对应的特征向量分别是 α, β，则

$$A\alpha = \lambda_1\alpha,\ A^{\star}\beta = \overline{\lambda_2}\beta,$$

又

$$[A\alpha, \beta] = [\alpha, A^{\star}\beta]\ (\text{命题 } 4.15),$$

即

$$[\lambda_1\alpha, \beta] = [\alpha, \overline{\lambda_2}\beta],$$

于是

$$\overline{\lambda_1}[\alpha, \beta] = \overline{\lambda_2}[\alpha, \beta]。$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\overline{\lambda_1} \neq \overline{\lambda_2}$，故必 $[\alpha, \beta] = 0$。

定理 4.9 方阵 $A \overset{\bar{U}}{\sim}$ 对角阵 A 是正规阵。

证 $$A = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}T^{-1},\ T \text{ 是酉阵。}$$

于是

$$A^{\star} = (T^{-1})^{\star}\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}T^{\star} = T\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}T^{-1},$$

从而

$$AA^{\star} = T\begin{pmatrix} \lambda_1\overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\overline{\lambda_n} \end{pmatrix}T^{-1} = A^{\star}A。$$

由定理 4.7，存在酉阵 T 使

$$T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & & \cdots \\ & & \ddots & & \cdots \\ & 0 & & \ddots & \cdots \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix}。$$

由 $A^{\star}A = AA^{\star}$ 可得 $B^{\star}B = BB^{\star}$，即

$$\begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & & & & \\ \cdots & \ddots & & 0 & \\ \cdots & & \ddots & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ \overline{b_{1n}} & \cdots & \cdots & \cdots & \overline{b_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & & \cdots \\ & & \ddots & & \cdots \\ & 0 & & \ddots & \cdots \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & & \cdots \\ & & \ddots & & \cdots \\ & 0 & & \ddots & \cdots \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & & & & \\ \cdots & \ddots & & 0 & \\ \cdots & & \ddots & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ \overline{b_{1n}} & \cdots & \cdots & \cdots & \overline{b_{nn}} \end{pmatrix}。$$

依次比较两边对角线上元素，得

$$|b_{11}|^2 = |b_{11}|^2 + |b_{12}|^2 + \cdots + |b_{1n}|^2,$$

从而

$$b_{12} = b_{13} = \cdots = b_{1n} = 0,$$

$$|b_{22}|^2 = |b_{22}|^2 + |b_{23}|^2 + \cdots + |b_{2n}|^2,$$

$$b_{23} = \cdots = b_{2n} = 0。$$

$$\cdots\cdots$$

故有 $i < j$ 时，$b_{ij} = 0$，即 B 为对角阵。A 酉相似于对角阵 B。

推论 酉阵、Hermite 阵必酉相似于对角阵。

4.6.5 实对称阵

设 A 是实对称阵，由定理 4.9，存在酉阵 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}。$$

下面我们证明实对称阵 A 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是实数，上式中的 T 是实数矩阵。

设 λ 是 A 的一个特征值，于是存在 $\alpha\neq 0$ 使

$$A\alpha=\lambda\alpha,$$

由命题 4.16

$$[A\alpha,\alpha]=[\alpha,A^{*}\alpha]=[\alpha,A\alpha],$$

于是

$$[\lambda\alpha,\alpha]=[\alpha,\lambda\alpha],$$

即

$$\bar{\lambda}[\alpha,\alpha]=\lambda[\alpha,\alpha],$$

因为 $[\alpha,\alpha]\neq 0$，故必 $\bar{\lambda}=\lambda$，即 A 的特征值为实数。

实对称阵 A 的特征值全是实数，特征向量是实系数线性方程组 $(\lambda_i E-A)X=0$ 的非零解向量，因而可取实向量。这样，在酉相似于实对角阵时可取实酉阵，即正交阵作为过渡矩阵。

定理 4.10 实对称阵 A 必正交相似于实对角阵，即存在正交阵 T 使 $T'AT=T^{-1}AT$ 为实对角阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$。

正交阵 T 是由 A 的线性无关特征向量经正交化、标准化而得。由于实对称阵是正规阵，它的对应于不同特征值的特征向量彼此正交。于是在求特征向量组成的正交组时，仅须将同一特征

值的特征向量正交化。

例 4.22 求正交阵 T 使 $T'AT=T'\begin{pmatrix}5&4&4\\4&5&4\\4&4&5\end{pmatrix}T$ 为对角阵。

解 由 $\begin{vmatrix}\lambda-5&-4&-4\\-4&\lambda-5&-4\\-4&-4&\lambda-5\end{vmatrix}=0$

得特征值 $\lambda=1,13$:

(1) $\lambda=1$, $1E-A=\begin{pmatrix}-4&-4&-4\\-4&-4&-4\\-4&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}$

$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得线性无关特征向量$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$。

正交化,得

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

单位化,得

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}。$$

(2) $\lambda=13$, $13E-A=\begin{pmatrix}8&-4&-4\\-4&8&-4\\-4&-4&8\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}$

$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得线性无关特征向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,单位化,得

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

令

$$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},$$

则

$$T'AT=T^{1}AT=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 13\end{pmatrix}。$$

例 4.23 A**为三阶实对称阵,且**

$$|\lambda E_3-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)^2,$$

A**的对应于特征值 1 的特征向量为**$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$**,求** A。

解 A**的对应于特征值 - 1 的特征向量**$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$**必与**$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$**正交(对应于不同特征值的特征向量彼此正交),故**

$$x+y+z=0,$$

解之,得基础解系(即对应于特征值 - 1 的线性无关的特征向量)

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}。$$

于是

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1},$$

算法如下:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\\1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{(1)+(2)+(3)}{3}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\\-\frac{1}{3}&-1&-1\\\frac{2}{3}&1&0\\\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow[-(3)]{-(2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

故

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

习　题　4

1．求下列矩阵的特征值与特征向量：

(1) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$。

2．若 n 阶方阵 A 的 i 行、j 列元素为 ij $(n\geq 2)$，求 A 的所有特征值。

3．若 A 为 n 阶可逆阵，B 为 n 阶方阵，求证：

$$AB\sim BA。$$

4．若 A 与 B 为同阶方阵，求证：AB 与 BA 有相同的特征多项式。

5．求下列矩阵的 n 次幂：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{bmatrix}$。

6．若 A 为 n 阶方阵，且 $A^k=0$，$k\in \mathbf{Z}^+$，求证：A 的特征值为 0。

7．求证：0 不是可逆阵的特征值。

8．若

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix},$$

求 A 的特征值。

9. 若三阶方阵 A 有 3 个特征值 $1, 5, -5$，对应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$。求 A 与 A^n。

10. 若 λ 是可逆矩阵 A 的特征值，求证：$\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，$\frac{|A|}{\lambda}$ 是伴随矩阵 A^* 的特征值。

11. 若 λ_1, λ_2 是方阵 A 的两个不同特征值，对应的特征向量分别是 α_1 与 α_2，求证：$\alpha_1 + \alpha_2$ 不是 A 的特征向量。

12. 若 A 为对角线上元素两两不等的上三角阵，则 A 相似于对角阵。

13. 若二阶实方阵 A 的行列式值 $|A| < 0$，求证：A 相似于对角阵。

14. 求下列矩阵的特征多项式与最小多项式：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & & 4 & 2 & \\ & & 3 & 5 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 3 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 3 & & & & \\ & & & 5 & 2 & & \\ & & & -4 & -1 & & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$。

15. **求下列矩阵的** 100 **次幂**:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。

16. $n \geq 2$, **若** n **阶方阵** A **的元素全为** 1, **求** A **的特征值, 最小多项式与** A^{100}。

17. **若** $x^m - 1 (m \in \mathbb{Z}^+)$ **是** A **的一个化零多项式, 求证**: A **相似于对角阵**。

18. **若方阵** A **满足** $E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^t}{t!} = 0$, **则** A **相似于对角阵**。

19. **若方阵** A **满足** $A^2 = A$, **且** A **的秩为** r, **则** $|A + E| = 2^r$。

20. **若** n **阶方阵** A **有** n **个不同特征值, 且** $AB = BA$, **求证**: B **相似于对角阵**。

21. **若** n **阶方阵** A **相似于对角阵, 则** $2n$ **阶方阵** $\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{pmatrix}$ **也相似于对角阵**。

22. **设** $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 3+i \\ 4-i \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1-i \\ 4+i \end{pmatrix}$, **求** $[\alpha, \beta]$, $\|\alpha\|$, $\|\beta\|$。

23. **求单位向量** α **使与**

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$$

正交。

24. **求与下列向量组等价的正交组**:

(1) $\begin{pmatrix}2\\3\\-4\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\8\\-2\\-16\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\10\\-29\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\11\\4\\-7\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\\-9\end{pmatrix}$。

25. **若向量 β 是向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合,且** $[\beta,\alpha_i]=0$, $i=1,\cdots,s$, **求证**: $\beta=0$。

26. **求证**:

(1) **实反对称阵的特征值是零或纯虚数**;

(2) **酉阵的特征值的模为** 1。

27. **求正交阵 T 使 $T'AT$ 为对角阵**:

(1) $\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ $(a\neq b)$; (4) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$。

28. **设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 s 个 n 维向量**, $s\leq n$, **记** $A=([\alpha_i,\alpha_j])_{s\times s}$, **求证**: $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ **线性无关** $\quad |A|\neq 0$。

29. **求证：可逆阵** A **必可表示为酉阵** Q **与上三角阵** T **之积。**

30. A **为三阶实对称阵，**

$$|\lambda E_3 - A| = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1),$$

A **的对应于特征值** -1 **的特征向量为** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$。**求** A。

31. **设** A **为实矩阵，且** $(A'A)^{100} = 0$。**求证：** $A = 0$。

第 5 章　二次型

在平面解析几何中,为了便于研究二次曲线

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

的几何性质,我们选择适当的(坐标)旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

把方程化为标准形。

$ax^2 + bxy + cy^2$ 可看成一个二次齐次多项式。从代数学的观点看,化标准形意味着通过变量的线性替换化简二次齐次多项式,使它仅含平方项。

5.1　二次型的矩阵形式

5.1.1　二次型与它的矩阵

定义 5.1　设 P 是数域。一个系数在 P 中的字母 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j,$$

称为数域 P 上的 n 元二次型,简称二次型。

例如, $x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3$ 是有理数域 Q 上的一个三元二次型。

若 $i > j$ 时,令 $a_{ij} = a_{ji}$,注意到 $x_ix_j = x_jx_i$, $f(x_1, \cdots, x_n)$ 可

写成$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$。

若记$A=(a_{ij})_{n\times n}$，称它为二次型f的矩阵，由于$a_{ij}=a_{ji}$，所以$A'=A$，即二次型的矩阵A为对称阵。

令$X=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}$，则

$$X'AX=(x_1,\cdots,x_n)(a_{ij})_{n\times n}\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$=(x_1,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \cdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

即二次型可用矩阵的乘积来表示:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX。$$

二次型$X'AX$的矩阵A的元素，当$i\neq j$时，$a_{ij}=a_{ji}$是它的x_ix_j项的系数的一半，而a_{ii}是它的x_i^2项的系数，因此二次型的矩阵是惟一的，即若二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX=X'BX,$$

且$A'=A,B'=B$，则$A=B$。

例如，$3x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+x_2^2+8x_2x_3+7x_3^2$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}3&-2&3\\-2&1&4\\3&4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}。$$

5.1.2 二次型的满秩线性替换

定义 5.2 设 $x_1,\cdots,x_n$ 与 $y_1,\cdots,y_n$ 是两组字母，系数在数域 P 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}y_1 + \cdots + t_{1n}y_n, \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \\ x_n = t_{n1}y_1 + \cdots + t_{nn}y_n, \end{cases}$$

即 $X = TY$。这里

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, T = (t_{ij})_{n\times n}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称为由 $x_1,\cdots,x_n$ 到 $y_1,\cdots,y_n$ 的一个线性替换，简称线性替换。如果系数行列式 $|T| \neq 0$，则称为满秩线性替换。此时矩阵 T 可逆，$Y = T^{-1}X$; $x_1,\cdots,x_n$ 是 $y_1,\cdots,y_n$ 的一次齐式，$y_1,\cdots,y_n$ 也是 $x_1,\cdots,x_n$ 的一次齐式。

若把 $X = TY$ 代入 $f = X'AX$，得到 $y_1,\cdots,y_n$ 的二次型 $f = (TY)'ATY = Y'(T'AT)Y$，即线性替换 $X = TY$，把 X 的二次型变成了 Y 的二次型，由于 $(T'AT)' = T'A'(T')' = T'AT$，即 $B = T'AT$ 是对称阵，故 B 是 Y 的二次型 f 的矩阵。

$B = T'AT$ 是二次型线性替换前后的矩阵关系。

例如，二次型

$$f = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

在满秩线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

下,化为 y_1, y_2, y_3 的二次型

$$f = (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

这里

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

定义 5.3　**数域** P **上两个** n **阶方阵** A **与** B **称为合同的,如果存在** P **上** n **阶可逆阵** T **使** $B = T'AT$。

推论　**二次型在满秩线性替换前后的矩阵是合同的。**

性质　(1) A **与** A **合同**;

(2) **若** A **与** B **合同,则** B **与** A **合同**;

(3) **若** A **与** B **合同**, B **与** C **合同,则** A **与** C **合同。**

证　(1) **因为** $A = E'AE$, $|E| = 1 \neq 0$。

(2) $B = T'AT$, **则** $A = (T^{-1})'BT^{-1}$。

(3) $B = T_1'AT_1$, $C = T_2'AT_2$, T_1, T_2 **可逆,则**

$$C = T_2'T_1'AT_1T_2 = (T_1T_2)'A(T_1T_2), T = T_1T_2$$

是可逆阵的积,仍可逆。

定义 5.4　**称二次型矩阵的秩为二次型的秩。**

引理 5.1　**合同矩阵有相同的秩。**

证　**若** A **合同于** B, **即存在可逆阵** T **使** $B = T'AT$, **于是** $r(B) \leq r(A)$。**由性质**(2), B **合同于** A, **故** $r(A) \leq r(B)$。**这样** $r(A) = r(B)$。

由于二次型在满秩线性替换前后的矩阵是合同的,故其秩相等。

命题 5.1　**满秩线性替换不改变二次型的秩。**

5.2 二次型的标准形

定义 5.5 矩阵为对角阵的二次型，即 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$，称为标准二次型。

本节中，我们指出：任何二次型都可经满秩线性替换化为标准二次型，并提供具体方法。

例 5.1 用满秩线性替换化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$$

为标准形。

解 f 中含 x_1 的平方项，把 f 中含 x_1 的项归并在一起，配方得

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &\quad + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 10x_2x_3\text{。} \end{aligned}$$

继续把余下的项(已经没有含 x_1 的项)中含 x_2 的项归并在一起，配方得

$$f = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 - 5x_3)^2 - 23x_3^2\text{。}$$

作满秩线性替换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

则 f 为 y_1, y_2, y_3 的标准二次型

$$f = y_1^2 + y_2^2 - 23y_3^2\text{。}$$

例 5.2 用满秩线性替换化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

为标准二次型。

解　f **不含平方项，因而不能用配方法。**

作满秩线性替换：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1^2 - y_2^2) + 2y_3[(y_1 + y_2) - 3(y_1 - y_2)] \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3, \end{aligned}$$

此时，f **含平方项，配方得**

$$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2,$$

令

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

或 $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

则　$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$。

从而 f **经过满秩线性替换：**

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

化为标准二次型 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$。

注 由于可逆阵的积仍是可逆阵,故对二次型连续作多次满秩线性替换,相当于对二次型作一次满秩线性替换。

定理 5.1 二次型可经满秩线性替换化为标准形。

证 设二次型 $f = X'AX, A = (a_{ij})_{k\times k}$。

我们对二次型 f 的元数 k 用归纳法。

$k = 1$ 时, $f = a_{11}x_1^2$ 已是标准形了。

若 $k = (n-1)$ 时结论成立, $f = X'AX$ 为 n 元二次型,分 3 种情形:

(1) $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 中至少有一个不为 0,如 $a_{11} \neq 0$。此时

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + f_1, \quad f_1 = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

是 $x_2, \cdots, x_n$ 的$(n-1)$元二次型。配方得

$$f = a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 + f_2。$$

$$f_2 = f_1 - a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2$$ 是 $x_2, \cdots, x_n$ 的$(n-1)$元二次型。

由归纳法假设,存在满秩线性替换:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

使

$$f_2 = d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2。$$

作满秩线性替换:

$$
Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \cdots \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \hline 0 & \\ \cdots & \\ \cdots & T_1 \\ 0 & \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = TX。
$$

(由于 $|T| = |T_1| \neq 0$, 故是满秩线性替换。)

此时, $f = a_{11} y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$, 已是标准形了。

(2) $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 全为 0, 但有一个 $a_{1j} \neq 0$ $(j > 1)$, 可设 $a_{12} \neq 0$, 作满秩线性替换:

$$
\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \quad \cdots \\ x_n = y_n, \end{cases}
$$

此时

$$
\begin{aligned} f &= 2a_{11}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + \cdots \\ &= 2a_{12} y_1^2 - 2a_{12} y_2^2 + \cdots, \end{aligned}
$$

y_1^2 的系数不为 0, 化归为(1)的情形。

(3) 若 $a_{1i} = 0$, $(i = 1, \cdots, n)$。此时, f 是 $x_2, \cdots, x_n$ 的 $(n-1)$ 元二次型, 由归纳法假设, 结论成立。

由(1)、(2)、(3)可知, n 时结论成立。由归纳法, 本定理得证。

推论 对称阵必合同于对角阵。即若 $A' = A$, 则存在可逆阵 T 使 $T'AT$ 为对角阵。

证 构造二次型 $f = X'AX$, 由定理 5.1, 存在满秩线性替换 $X = TY$ 使

$$
f = Y' \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} Y,
$$

此时

$$T'AT = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}。$$

5.3　实二次型

本节中,我们研究实数域上的二次型,即实二次型。

5.3.1　规范形

实二次型 $f = X'AX$ 可经满秩线性替换化为标准形:

$$f = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

适当调整字母的次序(即作满秩线性替换)可使

$$d_i = \begin{cases} \text{正}, & 0 \leq i \leq p, \\ \text{负}, & p < i \leq r, \\ 0, & r < i \leq n, \end{cases}$$

这里 $1 \leq p \leq r \leq n$, r 是二次型 f 的秩。

进一步作满秩线性替换:

$$\begin{aligned} z_i &= \sqrt{d_i}\, y_i, & 1 \leq i \leq p, \\ z_i &= \sqrt{-d_i}\, y_i, & p < i \leq r, \\ z_i &= y_i, & r < i \leq n, \end{aligned}$$

此时, $f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$, 称它为 f 的规范形。r 是二次型 f 的秩,是一个从属于 f 的不变量。下面指出,正平方项的个数 p 也是 f 的一个不变量。

定理 5.2(惯性定理)　若 $y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$ 与 $z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2$ 都是 n 元实二次型 $f = X'AX$ 的规范

形，则 $p = q$。

证 若 $p \neq q$，不妨设 $q < p$。

由假设 $X = T_1 Y = T_2 Z$，从而 $Z = TY$，这里 $T = T_2^{-1} T_1$ 是两个可逆阵的积，也是可逆阵。设 $T = (t_{ij})_{n\times n}$，于是 $z_1, \cdots, z_n$ 是 $y_1, \cdots, y_n$ 的一次齐式。

n 个未知量 $y_1, \cdots, y_n$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} z_1 = t_{11} y_1 + \cdots + t_{1n} y_n = 0, \\ \cdots \\ z_q = t_{q1} y_1 + \cdots + t_{qn} y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \cdots \quad \cdots \\ y_r = 0, \\ \cdots \quad \cdots \\ y_n = 0 \end{cases}$$

的式子个数为 $q + (n - p) = n - (p - q) <$ 未知量个数 n，故有非零解 $Y = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} c_{p+1} = \cdots = c_n = 0 \\ c_1, \cdots, c_p \text{ 不全为 } 0 \end{matrix} \right)$。

用 $\begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 代 Y，得 $Z = T\begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$，分别用 $Y = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$，$Z = T\begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 代入 f 得

$$f = c_1^2 + \cdots + c_p^2 > 0 \quad (\text{因为 } c_1, \cdots, c_p \text{ 不全为 } 0),$$

$$f = 0^2 + \cdots + 0^2 + 0^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_{(q+1)i} c_i \right)^2 - \cdots - \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ri} c_i \right)^2 \leq 0,$$

这是不可能的。故必 $p = q$。

定义 5.6 实二次型 f 的规范形中正平方项的个数称为 f 的正惯性指数，负平方项的个数称为 f 的负惯性指数，两者的差称

为符号差。

由惯性定理可知,实二次型的秩与正、负惯性指数,在满秩线性替换下保持不变,是从属于 f 的不变量。

5.3.2 正交替换

设 A 是实二次型 $f = X'AX$ 的矩阵,则 A 是实对称阵,由定理 4.10,存在正交阵 T 使

$$T'AT = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值。

当 T 为正交阵时的满秩线性替换 $X = TY$ 叫正交替换。从而在满秩线性替换(称正交替换) $X = TY$ 下:

$$f = Y'\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

即为标准形。于是得下述定理:

定理 5.3 实二次型 $f = X'AX$ 可经正交替换 $X = TY$ 化为标准形 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$,这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值。

例 5.3 用正交替换化实二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ 为标准形。

解 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

特征多项式 $|\lambda E - A| = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^3$,得特征值 $\lambda = -3, 1$。

$\lambda = -3$ 时:

$$(-3E - A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4]{(1)+(2)+(3)+(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)+(1) \\ (3)+(1) \\ (4)-(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3)+(2) \\ (4)-(2) \\ -\frac{1}{2}(2)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1)-(2) \\ \frac{-(4)}{4} \backslash (3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(2)+(3) \\ (1)-2(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得其基础解系: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,单位化,得 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。

$\lambda = 1$ 时:

$$1E - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)+(1) \\ (3)+(1) \\ (4)-(1)}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(1)} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得其基础解系: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **或** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

正交化,得 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$,

单位化,得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$。

于是经正交替换: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$,

f **化为标准形**:

$$f = -3y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2。$$

5.3.3 正定二次型

定义 5.7 实二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 称为正定的，如果对任意一组不全为零的实数 $c_1, \cdots, c_n$，恒有 $f(c_1, \cdots, c_n) > 0$。

推论 实二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是正定的　　对任意一组实数 $c_1, \cdots, c_n$，有 $f(c_1, \cdots, c_n) \geq 0$，且 $f(c_1, \cdots, c_n) = 0$ 时必

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0。$$

例 5.4 n 元实二次型

$$f(x_1, \cdots, x_n) = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2$$

是正定的。

证 对任意实数 $c_1, \cdots, c_n$，$f(c_1, \cdots, c_n) \geq 0$，且 $f(c_1, \cdots, c_n) = 0$，必

$$c_1 = c_1 + c_2 = c_2 + c_3 = \cdots = c_{n-1} + c_n = c_n = 0,$$

即

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,$$

故 f 是正定的。

例 5.5 n 元实二次型

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

是正定的。

命题 5.2 n 元实二次型 $f(X) = X'AX$ 是正定的　　f 的正惯性指数 p 等于元数 n。

证 若 $p < n$，f 的规范形为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots,$$

$$X = TY, \text{令 } Y_0 = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{matrix}\right\} p\text{个} \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

因为 $p < n$,故 $Y_0 \neq 0$,此时 $X_0 = TY_0$ 也不等于 0(否则 $Y_0 = T^{-1}X_0 = 0$),但 $f \leq 0$,与 f 正定的假设矛盾,所以 $p = n$。

设 f 的正惯性指数等于 n,则 f 的规范形为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_n^2,$$

因而用实数代 $y_1, \cdots, y_n$ 时 $f \geq 0$,且 $f = 0$ 时,$Y = 0$,从而 $X = TY = 0$,即 f 为正定二次型。

推论 1 实二次型 f 是正定的 f 的规范形的矩阵为单位阵 f 的矩阵相合于 E。

推论 2 满秩线性替换不改变二次型的正定性。

证 因为满秩线性替换不改变二次型的正惯性指数,从而替换前后的二次型其正惯性指数或同时等于元数或同时小于元数,所以替换前后的二次型或同时是正定的或同时不是正定的。

n 元实二次型可经正交替换化为标准形 $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$,这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是二次型矩阵的全部特征值。而 $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 作为 $y_1, \cdots, y_n$ 的二次型是正定的 $\lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$。由推论 2 即得下述命题:

命题 5.3 实二次型 f 是正定的 f 的矩阵的特征值全大于零。

引理 5.2 若 $f = X'AX$ 是正定的,则 f 的矩阵 A 的行列式 $|A| > 0$。

证 由推论 1,A 合同于 E,即存在可逆阵 T 使

$$A = T'ET = T'T,$$

从而

$$|A| = |T|^2 > 0。$$

定义 5.8 实对称矩阵 A 称为正定的,如果实二次型 $X'AX$ 是正定二次型。

由命题 5.2 的推论 1 与命题 5.3 即得下述命题:

命题 5.4 实对称矩阵 A 是正定的 A 合同于 E(或一已知

正定矩阵)　A 的特征值全大于 0。

命题 5.5　n 元实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是正定的 $\Leftrightarrow$ f 的矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个顺序主子式 a_{11}, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\cdots$, $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$, $\cdots$, $|A|$ 全大于零。

证　$\Rightarrow$　令 $g(x_1,\cdots,x_k)=f(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$, $k\leq n$, 则

$g(x_1,\cdots,x_k)=(x_1,\cdots,x_k)\begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1}, & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_k \end{pmatrix}$ 即 g 的矩阵为 $(a_{ij})_{k\times k}$。

因为 f 正定, 故对任意一组不全为 0 的实数 $c_1,\cdots,c_k$ 有

$$g(c_1,\cdots,c_k)=f(c_1,\cdots,c_k,0,\cdots 0)>0,$$

故 g 为 k 元正定二次型。由引理 5.2 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}>0,\ k=1,\cdots,n。$$

$\Leftarrow$　对元数 n 用归纳法证矩阵 A 是正定的(从而 f 是正定的)。$n=1$ 时, $f=a_{11}x_1^2$, 因为 $a_{11}>0$, 故 f 是正定的, 于是 A 是正定的。若 $n-1$ 时结论成立。记

$$A_1=(a_{ij})_{(n-1)\times(n-1)},$$

因为 A_1 的 $(n-1)$ 个顺序主子式也是 A 的顺序主子式, 因此全大于 0, 由归纳法假设, $(n-1)$ 阶方阵 A_1 是正定的。于是 A_1 合同于 E, 即存在可逆阵 P 使

$$P'A_1P=E。$$

若记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\cdots\\a_{n-1,n}\end{pmatrix}$，则

$$A=\begin{pmatrix}A_1&\alpha\\\alpha'&a_{nn}\end{pmatrix}。$$

令 $T_1=\begin{pmatrix}P&0\\0&1\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}T_1'AT_1&=\begin{pmatrix}P'&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&\alpha\\\alpha'&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}P'A_1P&P'\alpha\\\alpha'P&a_{nn}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

若记 $P'\alpha=\beta$，则

$$T_1'AT_1=\begin{pmatrix}E&\beta\\\beta'&a_{nn}\end{pmatrix}。$$

令 $T_2=\begin{pmatrix}E&-\beta\\0&1\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}(T_1T_2)'A(T_1T_2)&=T_2'(T_1'AT_1)T_2\\&=\begin{pmatrix}E&0\\-\beta'&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&\beta\\\beta'&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-\beta\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}E&0\\0&a_{nn}-\beta'\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因为 $|T_1|=|P|\neq0$，$|T_2|=1\neq0$，故 T_1 与 T_2 都是可逆阵，从而 $T=T_1T_2$ 也是可逆阵。于是 A 合同于对角阵 $\begin{pmatrix}E&0\\0&a_{nn}-\beta'\beta\end{pmatrix}$。

又

$$a_{nn} - \beta\beta = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & a_{nn} - \beta\beta \end{vmatrix} = |T'AT| = |T|^2 \cdot |A| > 0,$$

所以对角阵$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & a_{nn} - \beta\beta \end{pmatrix}$的对角线上元素全大于 0,故为正定阵,从而与之合同的矩阵 A 也正定。

由归纳法,充分性得证。

推论 实对称矩阵 A 是正定的 A 的顺序主子式全大于 0。

例 5.6 判别二次型 $f = 4x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 是否正定。

解 f 的矩阵为$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,

因为 $4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 11 > 0$, 故 f 是正定的。

例 5.7 若 $a_i > b > 0\ (i = 1, \cdots, n)$,求证: n元实二次型 $f = X'\begin{pmatrix} a_1 & & b \\ & \ddots & \\ b & & a_n \end{pmatrix}X$ 是正定的。

证(第一种方法) $\begin{pmatrix} a_1 & & b \\ & \ddots & \\ b & & a_n \end{pmatrix}$的 k 阶顺序主子式

$$= \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & b & \\ & & \ddots & \\ b & & \ddots & \\ & & & a_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b + (a_1 - b) & \cdots b + 0 \\ \vdots & \vdots \\ b + \quad 0 & \cdots b + (a_n - b) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1-b & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k-b \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{k} \begin{vmatrix} a_1-b & & b & & & \\ & \ddots & \vdots & & & \\ & & \ddots\ \vdots & & & \\ & & b & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & b & & & a_k-b \end{vmatrix}$$

i列

$$= (a_1 - b)\cdots(a_k - b) + b\sum_{i=1}^{k} \frac{(a_1 - b)\cdots(a_k - b)}{(a_i - b)} > 0,\quad k = 1,\cdots,n,$$

故 f 是正定的。

证(第二种方法) $f = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}(a_i - b)x_i^2$,因为 $b > 0$, $a_i - b > 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$,故 f 为正定二次型。

5.3.4 半正定二次型

定义 5.9 n 元实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 称为半正定的,如果对于任意一组实数 $c_1,\cdots,c_n$,恒有 $f(c_1,\cdots,c_n) \geq 0$。

定义 5.10 实对称阵称为半正定的,如果相应的实二次型 $X'AX$ 是半正定的。

例如,n 元实二次型 $(x_1 + \cdots + x_n)^2$ 和 $\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2$ 都是半正定二次型。

由惯性定理不难得到下面的命题:

命题 5.6 实二次型 $f = X'AX$ 是半正定的

f 的负惯性指数为 0(正惯性指数 = f 的秩)。

f 的规范形为 $f = y_1^2 + \cdots + y_r^2$。

f 的标准形为 $f = d_1 z_1^2 + \cdots + d_r z_r^2$, $d_i \geq 0\ (i = 1,\cdots,r)$。

$f(A)$ 的特征值全大于、等于 0。

推论 半正定矩阵 A 的行列式 $|A| \geq 0$。

证 A 合同于 $f = X'AX$ 的规范形的矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，即存在可逆阵 T 使

$$A = T'\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T,$$

两边取行列式，得

$$|A| = |T|^2\begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \geq 0。$$

命题 5.7 n 元实二次型 $f = X'AX$ 是半正定的 $\Leftrightarrow$ A 的所有主子式：

$$D_A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots\cdots & a_{i_1 i_k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots\cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} (1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n),$$

全大于、等于 0。

证 $\Rightarrow$ 若在 f 的表达式中令 $x_{i_t} = y_t\ (t = 1, \cdots, k)$，其余的 $x_j = 0$，得 k 元实二次型

$$g(y_1, \cdots, y_k) = f(0, \cdots, 0, \underset{i_1\text{位}}{y_1}, 0, \cdots, 0, \underset{i_2\text{位}}{y_2}, 0, \cdots, 0, \cdots, 0, \underset{i_k\text{位}}{y_k}, 0, \cdots, 0)$$

$$= \sum_{s,t=1}^{k} a_{i_s i_t} y_s y_t$$

$$= (y_1, \cdots, y_k)\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots\cdots & a_{i_1 i_k} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots\cdots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_k \end{pmatrix},$$

因为 f 是半正定的,按定义 g 也是半正定的,故其矩阵的行列式 $D_A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix} \geq 0$。

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n b_n,$$

由多项式与行列式性质,得

$$\begin{aligned} b_k &= A \text{ 的所有 } k \text{ 阶主子式之和} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} D\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ i_1 \cdots i_k \end{pmatrix} \geq 0。\end{aligned}$$

若 A 有负的特征值 $-a(a > 0)$, 代入特征多项式,得

$$\begin{aligned} &(-a)^n - b_1(-a)^{n-1} + \cdots + (-1)^n b_n \\ =\ &(-1)^n[a^n + b_1 a^{n-1} + \cdots + b_n] = 0, \end{aligned}$$

即

$$a^n + b_1 a^{n-1} + \cdots + b_n = 0。$$

但因为 $a > 0, b_k \geq 0\ (k = 1, \cdots, n)$, 上式不可能成立。故实对称阵 A 无负的特征值,即 A 的特征值是非负实数。于是由命题 5.6, $f = X'AX$ 为半正定二次型。

例 5.8 若 A 为 n 阶半正定矩阵,求证:

$$|A + E_n| \geq 1。$$

证 A 为半正定矩阵,其特征值 $\lambda_i \geq 0\ (i = 1, \cdots, n)$。由定理 5.3,存在正交阵 T 使

$$T'AT = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

或

$$A = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}。$$

于是

$$\begin{aligned}
|A+E| &= \left| T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1} + T\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} T^{-1} \right| \\
&= \left| T\begin{pmatrix} \lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+1 \end{pmatrix} T^{-1} \right| \\
&= |T| \begin{vmatrix} \lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+1 \end{vmatrix} |T^{-1}| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+1 \end{vmatrix} = (\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1) \geq 1。
\end{aligned}$$

习　题　5

1. **写出下列二次型的矩阵**:

   (1) $4x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2 + 6x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3$;

   (2) $x_1x_2 - x_3x_4$。

2. **用满秩线性替换化下列二次型为标准形**:

   (1) $x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;

   (2) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

   (3) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$;

   (4) $\sum_{i=1}^{n} x_i x_{2n-i+1}$;

(5) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$。

3. **求证：秩为 r 的对称阵可表示为 r 个秩为 1 的对称阵之和。**

4. **求证：**$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \end{pmatrix}$**与**$\begin{pmatrix} i_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & i_n \end{pmatrix}$**合同。这里** $i_1, \cdots, i_n$ **是** $1, \cdots, n$ **的一个排列。**

5. **若** A **为** n **阶对称阵，且对任意** n **维向量** α **都有** $\alpha' A\alpha = 0$，**求证：**A **为零矩阵。**

6. **设** n **元实二次型** $f = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2$，**求证：**$f$ **的秩等于矩阵** $A = (a_{ij})_{s\times n}$ **的秩。**

7. **如果把实** n **阶对称阵按合同分类，即两个** n **阶实对称阵属于同一类，当且仅当它们合同，问共有多少类？**

8. **若** n **元实二次型** $f(x_1, \cdots, x_n) = l_1^2 + \cdots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \cdots - l_{p+q}^2$，**这里** l_i **是** $x_1, \cdots, x_n$ **的一次齐式**$(i = 1, \cdots, p+q)$，**求证：**f **的正惯性指数** $\le p$，f **的负惯性指数** $\le q$。

9. **用正交替换化下列实二次型为标准形：**

(1) $X'\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} X$;

(2) $X'\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$。

10. **判别下列实二次型是否正定：**

(1) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 6x_2x_3$;

(2) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$;

(3) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$;

(4) $(n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$。

11. **求** t **的值,使下列实二次型为正定**:

(1) $3x^2 + 2txy + 5y^2$;

(2) $5x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3$。

12. **若实** $s\times n$ **阵** A **的秩为** n**,则实二次型** $X'A'AX$ **是正定的。**

13. **若** A **与** B **为同阶正定阵,则** $A+B$ **也是正定阵。**

14. **若** A **是正定阵,则** A^{-1} **也是正定阵。**

15. (1) **设** A **为实对称阵,求证:存在正实数** a**,使得对于任意实向量** α**,恒有**

$$|\alpha' A\alpha| \leq a\alpha'\alpha;$$

(2) **设** A **为实对称阵,求证:存在实数** $m>0, \varepsilon>0$**,使得** $mE+A$ **与** $E+\varepsilon A$ **为正定矩阵。**

16. **若** A **是** n **阶正定阵,求证:** $f = -\begin{vmatrix} A & \begin{matrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{matrix} \\ x_1 \cdots x_n & 0 \end{vmatrix}$ **是正定二次型。**

17. **若** A **为** n **阶正定阵,** B **为** n **阶实对称阵,求证:存在可逆阵** T **使** $T'AT$ **与** $T'BT$ **同时为对角阵。**

18. **若** A, B **为同阶正定阵,且** $AB = BA$**,求证:** AB **也是正定阵。**

19. **若** A, B **为同阶正定阵,且多项式** $|xA - B|$ **的根全为** 1**,求证:**

$$A = B。$$

20. **若** A **为正定矩阵,** B **为半正定矩阵,求证:**

$$|A+B| \geq |B|。$$

21. **若** A **为正定矩阵,** B **为反对称矩阵,求证:**

$$|A+B|>0。$$

22. **若矩阵方程**

$$AX+XA=C$$

有惟一解 B, **这里** A, C **是同阶正定阵, 求证:** B **也是正定阵。**

第6章　线性空间

本章把具体的、直观的平面与几何空间推广到抽象的线性空间。

6.1　线性空间的概念

6.1.1　定义

我们从下面的例子导出线性空间的定义。

例6.1　在几何空间,两个向量按平行四边形法则相加,一个向量可与实数作数量乘法。我们常用这两种运算来描述几何与力学对象的一些性质。

例6.2　为了解线性方程组,我们引入了 n 维向量,它们有加法与数乘两种运算。

例6.3　数域 P 上一元多项式同样有加法与数乘运算。

这些例子中,研究的对象各不相同,但它们有一个共同点:都有加法与数乘两种运算。为了在它们共同点的基础上,导出普遍适用的理论,我们引进抽象的线性空间的概念。

定义6.1　非空集合 V 称为数域 P 上的线性空间,如果:

(1) 在集合 V 中定义了"加法"运算,即给出一个法则,对 V 中任意两个元素 α 与 β,都存在 V 中惟一的一个元素 γ 与之对应,γ 称为 α 与 β 的和,记成 $\gamma=\alpha+\beta$。"加法"运算满足如下规则:

i) 交换律,即任意 $\alpha,\beta\in V$,有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

ii) 结合律,即任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$,有 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

iii) V 中存在零元素 0,对 V 中任意向量 α 都有

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha;$$

iv) 对 V 中任意元素 α,都存在 V 中元素 β 使

$$\alpha + \beta = 0,\ \beta\text{称为}\ \alpha\ \text{的负元素。}$$

(2) 定义了“数乘”运算,即给出了一个法则,对 P 中任意数 k 与 V 中任意元素 α,都有 V 中惟一的元素 δ 与之对应,δ 称为 k 与 α 的数量积,记成 $\delta = k\alpha$。数乘运算满足:

v) 任意 $\alpha \in V, 1 \cdot \alpha = \alpha$;

vi) 任意 $k, l \in P, \alpha \in V, (kl)\alpha = k(l\alpha)$;

vii) 任意 $k, l \in P, \alpha \in V, (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

viii) 任意 $k \in P, \alpha, \beta \in V, k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$。

例 6.4　按 n 维向量的加法与数乘:

$$P^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| a_i \in P, i = 1, \cdots, n \right\}$$

是数域 P 上的线性空间。

例 6.5　按矩阵的加法与数乘:

$$P^{s\times n} = \{(a_{ij})_{s\times n} \mid a_{ij} \in P, i = 1, \cdots s; j = 1, \cdots, n\}$$

是数域 P 上的线性空间。

例 6.6　按多项式的加法与数乘,$P[x]$ 是数域 P 上的线性空间。

按多项式的加法与数乘

$$P[x]_n = \{f(x) \in P[x] \mid \deg f(x) < n\}$$

是数域 P 上的线性空间。但集合

$$\{f(x) \in P[x] \mid \deg f(x) = n\}$$

不是线性空间,因为 $(1 - x^n) + x^n$ 不在其内。

例 6.7　按数的加法与乘法,数域 P 本身是 P 上的线性空间。

例 6.8　按数的加法与乘法，复数域 C 是实数域 R 上的线性空间。

线性空间的元素也称向量，当然这里的向量比以前引进的 n 维向量要广泛得多。向量常用小写希腊字母 α, β, γ 等表示，数域 P 中的数常用小写英文字母表示。

6.1.2　简单性质

(1) 零向量(即零元素)是惟一的;

(2) 一个元素的负元素是惟一的，α 的负元素记成"$-\alpha$";

(3) $0\alpha = k0 = 0$;

(4) $(-k)\alpha = k(-\alpha) = -k\alpha$，特别 $(-1)\alpha = -\alpha$;

(5) 若 $k\alpha = 0$，则 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$。

证　(1) 设 0_1 与 0_2 都是零向量。

考虑和 $0_1 + 0_2$，由于 0_1 是零向量，故 $0_1 + 0_2 = 0_2$；又由于 0_2 也是零向量，故 $0_1 + 0_2 = 0_1$。于是 $0_2 = 0_1$，即零向量惟一。

(2) 若向量 β, γ 都是向量 α 的负元素，则

$$\beta = \beta + 0 = \beta + (\alpha + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma = 0 + \gamma = \gamma,$$

即负元素惟一。

记 α 的负元素为 $-\alpha$，由此可定义向量的减法:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

(3)
$$\begin{aligned} 0\alpha &= 0\alpha + 0 = 0\alpha + \alpha - \alpha = 0\alpha + 1\alpha - \alpha \\ &= (0 + 1)\alpha - \alpha = \alpha - \alpha = 0。\end{aligned}$$

$$k0 = k(0\alpha) = (k0)\alpha = 0\alpha = 0。$$

(4) $-k\alpha$ 表示 $k\alpha$ 的负元素，又

$$k\alpha + (-k)\alpha = [k + (-k)]\alpha = 0\alpha = 0,$$
$$k\alpha + k(-\alpha) = k[\alpha + (-\alpha)] = k0 = 0,$$

即$(-k)\alpha$, $k(-\alpha)$也是 $k\alpha$ 的负元素,由负元素的惟一性得

$$(-k)\alpha = k(-\alpha) = -k\alpha。$$

(5) $k\alpha = 0$,若 $k \neq 0$,则 $\alpha = 1 \cdot \alpha = \frac{1}{k}k\alpha = \frac{1}{k} \cdot 0 = 0$。

6.1.3　向量的线性关系

定义 6.2　称向量 β 是向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合,或称向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 能线性表出 β,记成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \quad \beta$,如果存在数 $k_1, \cdots, k_s \in P$ 使

$$\beta = \sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i。$$

定义 6.3　称向量组 Σ 能线性表出向量组 Σ_2,记成 $\Sigma \quad \Sigma_2$,如果任意 $\beta \in \Sigma_2$,必存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \Sigma$ 使

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_s \quad \beta,$$

即 Σ_2 中的任意一个向量可用 Σ 中有限个向量线性表出。

定义 6.4　$r \geq 1$,向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 称为线性相关,如果存在 P 中 r 个不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_r$ 使

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i = 0,$$

即向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性相关　方程式 $\sum_{i=1}^{r} x_i \alpha_i = 0$ 在 P 中有非零解。

若向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 不线性相关,则称为线性无关,即方程式 $\sum_{i=1}^{r} x_i \alpha_i = 0$ 在 P 中仅有零解。

引理 6.1　若 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} \quad \{\beta_1, \cdots, \beta_t\}$, $t > s$,则向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性相关。

证　按假设,采用矩阵记号,可设

$$(\beta_1,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)A,\ A\in P^{s\times t}。$$

因为 $s<t$,齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\begin{pmatrix}k_1\\ \cdots\\ k_t\end{pmatrix}$。此时

$$\sum_{i=1}^{t}k_i\beta_i=(\beta_1,\cdots,\beta_t)\begin{pmatrix}k_1\\ \cdots\\ k_t\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)A\begin{pmatrix}k_1\\ \cdots\\ k_t\end{pmatrix}$$ (由矩阵乘法性质(3)的推论)

$$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}0\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix}=0。$$

故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关。

定义 6.5　设 Σ 为一向量组,$\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in\Sigma$。$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 称为 Σ 的一个极大线性无关组,如果

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) 任意 $\alpha\in\Sigma$,$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha$ 线性相关。

命题 6.1　$\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in\Sigma$,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组　(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$　Σ。

证　　任意 $\alpha\in\Sigma$,$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha$ 线性相关,即存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_r,k$ 使

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+k\alpha=0,$$

若 $k=0$,则 $k_1,\cdots,k_r$ 不全为 0,且 $\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i=0$,与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关的假设矛盾,故 $k\neq 0$,从而

$$\alpha=\left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1\cdots+\left(-\frac{k_r}{k}\right)\alpha_r,$$

即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 　 α,于是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 　 Σ。

任意 $\alpha\in\Sigma$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 　 α,即存在数 $k_1,\cdots,k_r$ 使 $\alpha=\Sigma k_i\alpha_i$,因而

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i+(-1)\alpha=0。$$

由于 $k_1,\cdots,k_r,(-1)$,已经不全为 0,故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha$ 线性相关。于是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组。

定理 6.1　向量组的任意两个极大线性无关组所含向量个数相等,即若 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 与 $\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 都是向量组 Σ 的极大线性无关组,则 $r=t$。

证　若 $r\neq t$,可设 $t>r$。

因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组,由命题 6.1, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 　 Σ。而 $\beta_1,\cdots,\beta_t\in\Sigma$,故

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\} \quad \{\beta_1,\cdots,\beta_t\},$$

且 $t>r$,由引理 6.1, $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性相关,于是导出了矛盾,故必 $r=t$。

6.1.4　向量组的秩

定义 6.6　向量组 Σ 的极大线性无关组(如果存在的话)所含向量个数称为向量组 Σ 的秩,记成 $r(\Sigma)$。

性质　(1) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 　 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 秩为 r;

(2) 若向量组 Σ 的秩为 r, $s>r$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in\Sigma$,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关;

(3) 若 Σ_1 与 Σ_2 是秩有限的向量组,且 Σ_1 　 Σ_2,则 $r(\Sigma_1)\geq r(\Sigma_2)$。

特别,若 Σ_1 　 Σ_2, Σ_2 　 Σ_1,则 $r(\Sigma_1)=r(\Sigma_2)$。

证　(1) 显然。

(2) 因为 $r(\Sigma)=r$,可设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组,由命题 6.1

$$\{\beta_1, \cdots, \beta_r\} \quad \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}, s > r,$$

由引理 6. 1, $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关。

(3) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 分别是 Σ_1 与 Σ_2 的极大线性无关组, 于是 $r(\Sigma_1) = r, r(\Sigma_2) = s$。

若 $s > r$, 因为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \quad \Sigma_1 \quad \Sigma_2$, 于是

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\} \quad \{\beta_1, \cdots, \beta_s\},$$

由引理 6. 1, $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性相关, 与 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 是 Σ_2 的极大线性无关组的假设矛盾, 故必 $s \leq r$, 即 $r(\Sigma_1) \geq r(\Sigma_2)$。

命题 6. 2 若 $r(\Sigma) = r$:

(1) 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \Sigma$, 且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组;

(2) 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \Sigma$, 且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \quad \Sigma$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组。

证 $r(\Sigma) = r$, 设 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组:

(1) 任意 $\alpha \in \Sigma$, $\beta_1, \cdots, \beta_r \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha$, 由引理 6. 1, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha$ 线性相关。按定义 6. 5, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组。

(2) $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\} \quad \Sigma$, 由性质 (3), $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ 秩 $\geq r$, 由性质 (1), $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关。根据命题 6. 1, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 Σ 的一个极大线性无关组。

6.2 有限维线性空间

定义 6. 7 数域 P 上线性空间 V, 如果存在由有限个向量 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 组成 V 的极大线性无关组, 则称 V 是 n 维线性空间, 记成 $n = \dim V$。V 的极大线性无关组称为 V 的基。

例 6. 9 P^n 是数域 P 上 n 维线性空间, 因为它有一组基

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

例 6. 10　$P^{s\times n}$**是** P **上** $s\times n$ **维线性空间,它有基**

$$\{ E_{ij} \mid i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, n\},$$

这里 E_{ij} **表示** i **行、**j **列的元素为** 1,**其余元素为** 0 **的** $s\times n$ **阵。**

例 6. 11　C **是** R **上的二维线性空间,它有一组基**: 1, i。

例 6. 12　$P[x]_n$ **是** P **上** n **维线性空间,它有一组基**: $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$。

6.2.1　**基,维数,坐标**

利用上一节的结果,把 Σ **换成** V,**即得下列各命题。**

命题 6. 3　**若** $s > n$,**则** n **维线性空间中任意** s **个向量必线性相关**,(**见本章定义** 6. 6 **后的性质**(2))。

命题 6. 4　n **维线性空间中任意** n **个线性无关的向量必是线性空间的一组基**(**见命题** 6. 2)。

命题 6. 5　n **维线性空间** V **中, 若** $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$　V, **则** $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ **是** V **的一组基**(**见命题** 6. 2)。

定义 6. 8　**若** $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ **是数域** P **上线性空间** V **的一组基, 则对任意** $\alpha \in V$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$　α, **即存在数** $a_1, \cdots, a_n \in P$,**使**

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}。$$

称 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$ **为向量** α **在基** $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ **下的坐标。**

性质 (1) **任意向量 α 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标是惟一的**;

(2) **若 α, β 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标分别为** $\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$ **与** $\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$,**则向量** $(\alpha+\beta)$, $k\alpha$ **在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标分别为**

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} ka_1 \\ \cdots \\ ka_n \end{pmatrix}。$$

证 (1) **若 α 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 有两组坐标** $\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$,**即**

$$\alpha = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - c_i)\varepsilon_i = 0。$$

由于 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是基,因而线性无关,故 $a_i - c_i = 0$, **或** $a_i = c_i$, $i = 1, \cdots, n$。**即** $\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$, **故得坐标惟一性的证明。**

(2) $\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\varepsilon_i = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$,

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{n} ka_i\varepsilon_i = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} ka_1 \\ \cdots \\ ka_n \end{pmatrix}。$$

6.2.2　基变换与坐标变换

引理 6.2　**若线性无关向量组** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **能线性表出向量** $\beta_1, \cdots, \beta_s$,**即** $\beta_i = \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\alpha_j, i = 1, \cdots, s, b_{ij} \in P$, **写成矩阵形式**:

$$(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11}, & \cdots, & b_{s1} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{1s}, & \cdots, & b_{ss} \end{pmatrix},$$

记 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{s1} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{1s} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix}$, **则** $\beta_1, \cdots, \beta_s$ **线性无关**　　$|B| \neq 0$, **即矩阵** B **可逆**。

证　**由于** $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **线性无关**, **故**

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_s \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\beta_1, \cdots, \beta_s$ **线性无关**　　$\sum_{i=1}^{s} x_i\beta_i = (\beta_1, \cdots, \beta_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_s \end{pmatrix} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$

$B\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0$ **仅有零解**　　$B\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0$ **仅有零解**　　$|B| \neq 0$。

于是, **若** $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ **与** $\eta_1, \cdots, \eta_n$ **是线性空间** V **的两组基**, **且** $(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)T$, **由引理** 6.2, T **为可逆阵**, **称** T **为由基** $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ **到基** $\eta_1, \cdots, \eta_n$ **的过渡矩阵**。T **的** i **列** $T^{(i)}$ **是向量** η_i **在基**

$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标。

例 6.13 给了 $V = P^3$ 的两组基 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 求 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵 T。

解 由 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) T$ 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

于是

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}。$$

计算如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-(3)]{(1)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

故

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}。$$

下面我们寻求同一个向量 α 在两组基下的坐标关系。

设

$$\alpha = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

由于

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) T,$$

代入上式得

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) T \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}。$$

这样, $\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 与 $T \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$ 都是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标, 由坐标的惟一性得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}。$$

例 6. 14 P^n 中, 向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 在基

$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$; 另选一组基

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

即

$$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & \mathbf{1} & \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}。$$

则 α 在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & 1\\ & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-a_2\\ a_2-a_3\\ \vdots\\ a_{n-1}-a_n\\ a_n\end{pmatrix}。$$

6.3 子空间

6.3.1 定义

几何空间看成三维线性空间,易验证,通过原点的平面与直线分别成二维与一维的线性空间。现在我们研究原线性空间的这些特殊“子集合”及它们的相互关系。

定义 6.9 数域 P 上线性空间 V 的一个非空子集 W,如果对于 V 的两种运算(即加法与数乘)仍是数域 P 上的线性空间,则称为 V 的子空间。

下面我们分析 V 的非空子集 W 满足什么条件才能成为子空间。

设 W　V,V 是线性空间,故 W 中的向量(也是 V 的向量)对 V 的两种运算满足线性空间定义中 i)、ii)、v)、vi)、vii)与 viii)。为了使 W 是线性空间,仅需 W 对两种运算封闭及 iii)、iv)成立,即

(1) 若 $\alpha\in W$, $k\in P$ 必 $k\alpha\in W$;

(2) 若 $\alpha,\beta\in W$,必 $\alpha+\beta\in W$;

(3) $0 = 0\alpha \in W$;

(4) $\forall \alpha \in W$,必 $-\alpha = (-1)\alpha \in W$。

其中要求(3)、(4)已经包含在(1)中(分别令 $k = 0$ 与 -1 即得),故有

定理 6.2 如果线性空间 V 的非空子集 W 对于 V 的两种运算封闭(即满足上述条件(1)与(2)),则 W 是 V 的子空间。

推论 若 W 是线性空间 V 的非空子集,对任意 $k, l \in P$, α, $\beta \in W$,均有 $k\alpha + l\beta \in W$,则 W 是 V 的子空间。

证 分别令 $k = l = 1$ 和 $l = 0$ 即得条件(2)与(1)。

例 6.15 $\{0\}$ 与 V 是 V 的当然子空间,称为 V 的平凡子空间。$\{0\}$称为零子空间。

例 6.16 $P[x]_n$ 是 $P[x]$的子空间。

例 6.17 若 A 是数域 P 上 $s\times n$ 阵,记 $W = \{\alpha\in P^n \mid A\alpha = 0\}$,则 W是 $V = P^n$ 的子空间。W称为齐次线性方程组 $AX = 0$的解空间。且 $\dim W = n - r(A)$。

对 t 用归纳法,易得下面的性质:

性质 若 W 是 V 的子空间,$\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in W$, $k_1, \cdots, k_t \in P$,则

$$\sum_{i=1}^{t} k_i\alpha_i \in W。$$

6.3.2 交与和

定理 6.3 任意多个子空间的交仍是子空间。

即若 $W_i\ (i\in I)$ 是 V 的子空间,则 $W = \bigcap_{i\in I} W_i$ 也是 V的子空间。

证 若 $\alpha, \beta\in W$, $k\in P$,则 $\alpha, \beta\in W_i\ (i\in I)$,因为 W_i 是子空间,所以 $\alpha+\beta$, $k\alpha \in W_i\ (i\in I)$,从而 $\alpha+\beta$, $k\alpha\in W$。

由定理 6.2,W 是子空间。

定义 6.10 若 $W_1, \cdots, W_s$ 是 V 的子空间,记

$$W = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_i + \cdots + \alpha_s \mid \alpha_i \in W_i, i = 1, \cdots, s\},$$

则 W 是 V 的子空间,称它为 $W_1,\cdots,W_s$ 的和空间,记成 $W_1+\cdots+W_s$。

证 设 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\beta=\beta_1+\cdots+\beta_s,\alpha_i,\beta_i\in W_i,i=1,\cdots,s;\alpha,\beta\in W$。$k\in P$。则 $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+(\alpha_s+\beta_s)$,

$$k\alpha=k\alpha_1+\cdots+k\alpha_s。$$

因为 W_i 是子空间,所以 $\alpha_i+\beta_i,k\alpha_i\in W_i,i=1,\cdots,s$,于是 $\alpha+\beta$, $k\alpha\in W$,由本章定理 6.2,W 是子空间。

定理 6.4 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性无关向量组($s<n$),则存在 V 中向量 $\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$ 使 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基。

证 由于 $\dim V=n,s<n,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 不是 V 的基,故存在 V 中向量 α_{s+1},使 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 线性无关,若 $s+1<n$,可继续这个过程。于是找到 V 中向量 $\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$ 使 $\alpha_1,\cdots\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$ 线性无关,由命题 6.4,$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基。

定理 6.5 若 W_1,W_2 是 V 的两个子空间,则

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1\cap W_2)+\dim(W_1+W_2)。$$

证 $W_1\cap W_2$ W_1,W_2 W_1+W_2。设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t$ 为 $W_1\cap W_2$ 的一组基。由定理 6.4,可设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为 W_1 的一组基,$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t,\beta_1,\cdots,\beta_l$ 为 W_2 的一组基。

此时 $\dim(W_1\cap W_2)=t,\dim W_1=t+s,\dim W_2=t+l$,证明本定理意味着证明 $\dim(W_1+W_2)=t+s+l$。

若能证明 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t,\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_l$ 是 W_1+W_2 的一组基,则结论成立。其证如下:

若 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2\in W_1+W_2,\gamma_1\in W_1,\gamma_2\in W_2$。于是

$$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t,\alpha_1,\cdots,\alpha_s\quad\gamma_1,$$

即

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^{t} k_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{s} m_i \alpha_i ,$$

$$\varepsilon_1 , \cdots , \varepsilon_t , \beta_1 , \cdots , \beta_l \quad \gamma_2 ,$$

即

$$\gamma_2 = \sum_{i=1}^{t} u_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{l} v_i \beta_i ,$$

因而

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \sum_{i=1}^{t} (k_i + u_i) \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{s} m_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{l} v_i \beta_i ,$$

即

$$\varepsilon_1 , \cdots , \varepsilon_t , \alpha_1 , \cdots , \alpha_s , \beta_1 , \cdots , \beta_l \quad \gamma,$$

所以

$$\varepsilon_1 , \cdots , \varepsilon_t , \alpha_1 , \cdots , \alpha_s , \beta_1 , \cdots , \beta_l , \quad W_1 + W_2 。$$

再证 $\varepsilon_1 , \cdots , \varepsilon_t , \alpha_1 , \cdots , \alpha_s , \beta_1 , \cdots , \beta_l$ 线性无关。若

$$x_1 \varepsilon_1 + \cdots + x_t \varepsilon_t + y_1 \alpha_1 + \cdots + y_s \alpha_s + z_1 \beta_1 + \cdots + z_l \beta_l = 0 , \tag{6 - 1}$$

令 $\delta = x_1 \varepsilon_1 + \cdots + x_t \varepsilon_t + y_1 \alpha_1 + \cdots + y_s \alpha_s$,则 $\delta \in W_1$,由式(6 - 1)得 $\delta = - z_1 \beta_1 - z_2 \beta_2 - \cdots - z_l \beta_l$,则 $\delta \in W_2$。因而 $\delta \in W_1 \cap W_2$,故$W_1 \cap W_2$ 的基 $\varepsilon_1 , \cdots , \varepsilon_t \quad \delta$,即存在数 $a_1 , \cdots , a_t$ 使

$$\delta = a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_t \varepsilon_t ,$$

于是$(a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_t \varepsilon_t) + (z_1 \beta_1 + \cdots + z_l \beta_l) = \delta - \delta = 0$,因为 $\varepsilon_1 , \cdots , \varepsilon_t , \beta_1 , \cdots , \beta_l$ 是 W_2 的一组线性无关基,故 $a_1 = \cdots = a_t = z_1 = \cdots = z_l = 0$。

把 $z_1 = \cdots = z_l = 0$ 代入式(6. 1)得

$$x_1 \varepsilon_1 + \cdots + x_t \varepsilon_t + y_1 \alpha_1 + \cdots + y_s \alpha_s = 0 ,$$

因为 $\varepsilon_1 , \cdots , \varepsilon_t , \alpha_1 , \cdots , \alpha_s$ 是 W_1 的一组基,故 $x_1 = \cdots = x_t = y_1 = \cdots = y_l = 0$。

这就证明了 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta$ 线性无关,从而它们是 $W_1 + W_2$ 的一组基,定理得证。

例 6.18 在线性空间 P^3 中,令

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in P \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y, z \in P \right\},$$

则

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 。 \end{pmatrix} \middle| \, y \in P \right\},$$

$$W_1 + W_2 = P^3 。$$

此时:

$$\dim W_1 = \dim W_2 = 2, \dim W_1 \cap W_2 = 1,$$

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim P^3 = 3,\text{符合定理的结论。}$$

6.3.3 子集生成的子空间

设 S 是线性空间 V 的一个子集。记

$$L(S) = \bigcap_{\substack{W \quad S \\ W\text{是子空间}}} W,$$

则 (1) $L(S) \quad S$;

(2) $L(S)$ 是子空间的交,故仍是子空间;

(3) 若 $W \quad S$, W 是子空间,则 $W \quad L(S)$。

若 S 是有限个向量组成的集合。$S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$,简记 $L(S)$ 为 $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$,更有

(4) $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_t) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} k_i \alpha_i \mid k_i \in P, i = 1, \cdots, t \right\}$。

证(4)于下:

$\alpha_1,\cdots,\alpha_t \in$ 左边,左边是子空间,故 $\sum_{i=1}^{t} k_i\alpha_i \in$ 左边,即左边 右边。

又 $\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 1\cdot\alpha_i + \cdots + 0\alpha_t \in$ 右边,易验证,右边对两种运算封闭,因而是 V 的包含$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t\}$ 的子空间,由(3),右边 左边,故右边 = 左边。

由上面的分析,$L(S)$是 V 的包含 S 的最小子空间,它包含在所有包含 S 的子空间内,称它为集合 S 生成的子空间。

命题 6.6　若 $W_1,\cdots,W_s$ 是 V 的子空间,则

$$L(W_1 \cup W_2 \cdots \cup W_s) = W_1 + \cdots + W_s。$$

证　左边 $W_1,\cdots,W_s$,任意 $\alpha_i \in W_i$,必 $\alpha_i \in$ 左边,因为左边是子空间,故 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s \in$ 左边,即左边 右边。

右边 $W_1,\cdots,W_s$,右边 $W_1 \cup \cdots \cup W_s$,又右边是和空间,即子空间,由(3),右边 左边,故右边 = 左边。

命题 6.7　$\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t) =$ 向量组$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t\}$的秩。

证　由(4)可知,$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 的一个极大线性无关组能线性表出$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)$中的任意向量,因而是它的一组基,即得本命题的证明。

命题 6.8　$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t) = L(\beta_1,\cdots,\beta_s)$　$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t\}\sim\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$,即$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t\}$　$\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$且$\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$　$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t\}$。

证　由(4),$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t) = L(\beta_1,\cdots,\beta_s)$　$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 的线性组合必是$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的线性组合,反之 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的线性组合也是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 的线性组合　$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t\}\sim\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$。

例 6.19　若$(\beta_1,\cdots,\beta_s) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_s)A$,这里 A 是 s 阶可逆阵,则

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s) = L(\beta_1,\cdots,\beta_s)。$$

证　因 A 有逆 A^{-1},从而

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s) = (\beta_1,\cdots,\beta_s)A^{-1},$$

即

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\} \sim \{\beta_1,\cdots,\beta_s\},$$

由命题 6. 8

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s) = L(\beta_1,\cdots,\beta_s)。$$

6 .4　内积空间 R^n

6 .4 .1　基本概念

实数域上 n 维向量全体 R^n 对向量的加法与数乘运算,成为实数域上 n 维线性空间。

在 4 .5 中,我们定义了向量的内积,两个实向量的内积为

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}\right] = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n。$$

实向量的内积有如下性质:

(1) $[\beta,\alpha] = [\alpha,\beta] = \alpha'\beta = \beta'\alpha$;

(2) $[\sum_i k_i\alpha_i, \sum_j l_j\beta_j] = \sum_i\sum_j k_i l_j[\alpha_i,\beta_j]$;

(3) $[\alpha,\alpha] \geq 0$, 且 $[\alpha,\alpha] = 0$　α。

R^n 关于加法,数乘,内积所生的系统,称为实内积空间,也称欧几里得空间。

6 .4 .2　标准正交基

定义 6 .11　R^n 中的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 称标准正交基,如果 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交组,即

$$[\varepsilon_i,\varepsilon_j] = \delta_{ij},\quad i,j = 1,\cdots,n。$$

例如,

$$若\ \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} i,\ i = 1, \cdots, n,$$

则 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ **为标准正交基。**

$$又 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} 是\ R^3\ 的一组标准正交基。$$

由命题 4 .13, **标准正交组必线性无关**, **故得下面的定理。**

定理 6 .6　n **个向量组成的标准正交组必是** R^n **的标准正交基。**

由命题 4 .16 **与** 4 .17 **可得**:

(1) $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ **是** R^n **的标准正交基。**

$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, n$。

n **阶方阵** $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ **是正交阵。**

(2) R^n **的标准正交组必可扩充为** R^n **的标准正交基。即若** $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ **为标准正交组**, **则存** $\varepsilon_{t+1}, \cdots, \varepsilon_n$, **使** $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, \cdots, \varepsilon_n$ **为标准正交基。**

$$例如,\ \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 是\ R^4\ 的标准正交组,若令$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$;则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是 R^4 的标准正交基。

又如，$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是 R^4 的标准正交组，若令 $\varepsilon_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是 R^4 的标准正交基。

6.4.3 正交基下向量的坐标与内积

定义 6.12 R^n 的基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 称正交基，如果

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \cdots, n。$$

设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 为内积空间 R^n 的一组正交基，向量 α 在这组基下的坐标为 $\begin{pmatrix}a_1\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}$，即

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\\cdots\\a_n\end{pmatrix},$$则

$$[\alpha, \varepsilon_j] = \sum_{i=1}^{n} a_i [\varepsilon_i, \varepsilon_j] = a_j [\varepsilon_j, \varepsilon_j]。$$

于是向量 α 在正交基下的坐标为

$$a_j = \frac{[\alpha, \varepsilon_j]}{[\varepsilon_j, \varepsilon_j]}, \quad j = 1, \cdots, n。$$

若向量 β 在正交基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标为$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$,则 $[\alpha, \beta] =$

$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \varepsilon_j\right] = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j [\varepsilon_j, \varepsilon_j]$。

特别,若 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 为标准正交基,即$[\varepsilon_j, \varepsilon_j] = 1$,则向量 α 的坐标为

$$a_j = [\alpha, \varepsilon_j]。$$

向量 α 与 β 的内积为

$$[\alpha, \beta] = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j。$$

例 6.20 **在 R^3 中,求向量 α 在正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标。这里**

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

解 $[\alpha, \varepsilon_1] = 2 + 10 + 12 = 24$,

$[\alpha, \varepsilon_2] = 4 + 5 - 12 = -3$

$[\alpha, \varepsilon_3] = 4 - 10 + 6 = 0$,

又 $[\varepsilon_1, \varepsilon_1] = [\varepsilon_2, \varepsilon_2] = [\varepsilon_3, \varepsilon_3] = 9$,

故向量 α 在正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标为$\begin{pmatrix} \frac{24}{9} \\ -\frac{3}{9} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$。

6.4.4 正交补

定义 6.13 **设 W 为内积空间 R^n 的一个子空间,记**

$$W^{\perp} = \{\alpha \in R^n, \text{任意 } \beta \in W, \text{必} [\alpha, \beta] = 0\}$$

称 $W^{\perp}$ 为子空间 W 的正交补。

直接验证，易得

$$\{0\}^{\perp} = R^n, (R^n)^{\perp} = \{0\}。$$

引理 6.3 若 W 为 R^n 的一子空间，$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ 为 W 的一组标准正交基，于是 $W = L(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t)$。扩充 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t$ 使 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \cdots, \varepsilon_n$ 为 R^n 的一组标准正交基。

则

$$W^{\perp} = L(\varepsilon_{t+1}, \cdots, \varepsilon_n)。$$

证 任意 $\alpha \in W^{\perp}$，设

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_t\varepsilon_{t+1} + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

$\varepsilon_i \in W \quad (i = 1, \cdots, t)$，于是

$[\alpha, \varepsilon_i] = 0$，得 $a_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, t)$，即

$$\alpha = a_{t+1}\varepsilon_{t+1} + \cdots + a_n\varepsilon_n \in L(\varepsilon_{t+1}, \cdots, \varepsilon_n)。$$

反之，若 $\alpha \in L(\varepsilon_{t+1}, \cdots, \varepsilon_n)$，$\alpha = a_{t+1}\varepsilon_{t+1} + \cdots + a_n\varepsilon_n$。

任意 $\beta \in W$，$\beta = b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_t\varepsilon_t$，

因 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 二二内积为 0，故

$[\alpha, \beta] = 0$，即 $\alpha \in W^{\perp}$。从而

$$W^{\perp} = L(\varepsilon_{t+1}, \cdots, \varepsilon_n)。\quad \text{证毕。}$$

性质 (1) $W^{\perp}$ 是 R^n 的子空间。

(2) $(W^{\perp})^{\perp} = W$。

(3) $W \cap W^{\perp} = \{O\}$。

(4) $\dim W + \dim W^{\perp} = n$。

(5) 任意 $\alpha \in R^n$，存在惟一 $\alpha_1 \in W, \alpha_2 \in W^{\perp}$，使 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$。

证 (1) 若 $\alpha_1, \alpha_2 \in W^{\perp}$，对任意 $\beta \in W$，

$$[k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta] = k_1[\alpha_1, \beta] + k_2[\alpha_2, \beta] = 0,$$

即 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in W^{\perp}$，故 $W^{\perp}$ 为子空间。

(2) 由引理 6.3

$$(W^{\perp})^{\perp} = L(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_t) = W。$$

(3) $W \cap W^{\perp} \quad \{0\}$，若 $\alpha \in W \cap W^{\perp}$，则$[\alpha, \alpha] = 0$，从而 $\alpha = 0$，故 $W \cap W^{\perp} = \{0\}$。

(4) 由引理 6.3

$$\dim W + \dim W^{\perp} = t + (n - t) = n。$$

(5) $\alpha\in R^n$，由引理 6.3：

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_t\varepsilon_t + a_{t+1}\varepsilon_{t+1} + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

则 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$。

若另有 $\beta_1\in W, \beta_2\in W^{\perp}$ 使

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2,$$

则 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$，$\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2 \in W\cap W^{\perp} = \{0\}$，

于是 $\alpha_1 = \beta_1$，$\alpha_2 = \beta_2$。证毕

命题 6.9　若 $W = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$，则 $W^{\perp}$ 为齐次线性方程组。

$$AX = 0$$

的解空间。这里

$$A' = (\alpha_1 \cdots \alpha_s)。$$

由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 为矩阵 A 的行向量(的转量)，W 是由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 生成的，故常称 W 为 $AX = 0$ 的行空间。

命题 6.9 指出，齐次线性方程组的行空间与解空间互为正交补。

证　$\beta\in W^{\perp}$　任意 $\alpha\in W = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$，$[\alpha, \beta] = 0$

$$[\alpha_i, \beta] = 0 \quad (i = 1, \cdots, s) \quad \alpha_i' \cdot \beta = 0 \ (i = 1, \cdots, s) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \cdots \\ \alpha_s' \end{pmatrix}\beta =$$

0　$A\beta = 0$。即

$AX = 0$ 的解空间为 $W^{\perp}$。

例 6.21　齐次线性方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解　A 的行向量组～B 的行向量组。

证　$AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解

两者的解空间相同

两者的解空间的正交补相同

A 的行空间 = B 的行空间。

A 的行向量组～B 的行向量组。

习　题　6

1．检验以下集合对于所指运算是否构成实数域上的线性空间：

(1) 次数等于 $n(n\geq 1)$ 的实系数多项式全体，对于多项式的加法和数乘运算；

(2) 全体实对称(反对称，上下三角)矩阵，对于矩阵的加法和数乘运算；

(3) 设 A 是 n 阶实方阵，A 的实系数多项式全体，对于矩阵的加法和数乘运算；

(4) P 为数域，集合 P^n 对于如下定义的加法与数乘：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},$$

$$k\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k\in P;$$

(5) 集合与加法同(4)，数乘定义为

$$k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}。\quad \boldsymbol{\alpha}\in P^n, k\in P;$$

(6) 全体正实数 R^+，加法和数乘定义为

$$a \qquad b = ab,$$

$$k \qquad a = a^k。$$

2．求下列线性空间的维数与一组基：

(1) 数域 P 上 n 阶上三角矩阵全体组成的线性空间；

(2) 数域 P 上线性空间 $V=\{A\in P^{n\times n} \mid A'=A\}$；

(3) 数域 P 上线性空间 $V=\{A\in P^{n\times n} \mid A'=-A\}$；

(4) 数域 P 上线性空间 $V=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}\in P^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\right\}$;

(5) 习题 1 的 6;

(6) 实数域 R 上线性空间 $V=\{f(A)\mid f(x)\in \mathbf{R}[x]\}$,这里

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & 0\\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ 0 & & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}。$$

3 . 设 $a\in P$, 求证: $1, x-a, \cdots, (x-a)^{n-1}$ 是 $P[x]_n$ 的一组基。

4 . 若 $a_1,\cdots,a_n$ 是 P 中 n 个两两不同的数,记

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i),\quad f_i(x)=\frac{f(x)}{x-a_i},\quad i=1,\cdots,n。$$

求证: $f_1,\cdots,f_n$ 是 $P[x]_n$ 的一组基。

5 . 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 P 中 4 个两两不同的数,记

$$A_i=\begin{pmatrix}1, & a_i\\ a_i^2, & a_i^3\end{pmatrix},\ i=1,2,3,4。$$

求证: A_1, A_2, A_3, A_4 是 $P^{2\times 2}$ 的一组基。

6. 求向量 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标:

(1) $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\varepsilon_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$;

(2) $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。

7．**求由基** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ **到基** $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ **的过渡矩阵**:

(1) $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\eta_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\eta_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\eta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。

8．**在习题** 7 **的**(2)**中**，**求向量** α **使它在两组基下的坐标相同**。

9．**若** W_1 **与** W_2 **都是线性空间** V **的子空间**，W_1 　 W_2，**且** $\dim W_1 = \dim W_2$，**求证**: $W_1 = W_2$。

10．**在** R^4 **中**，**求下列齐次线性方程组的解空间的维数与一组基**:

(1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$;

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 13x_4 = 0。\end{cases}$

11 . **求** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \end{cases}$

与 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

的解空间相交的一组基。

12 . **若** $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, **且** $ac \neq 0$, **求证**:

$$L(\alpha, \beta) = L(\beta, \gamma)。$$

13 . **若** $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\cdots$, $\beta_{s-1} = \alpha_{s-1} + \alpha_s$, $\beta_s = \alpha_s + \alpha_1$, s **是奇数,求证**: $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = L(\beta_1, \cdots, \beta_s)$。

14 . **设** A **为** 2 **阶方阵**,

$$A\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

求: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

15 . **设** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ **是内积空间** R^3 **的一组标准正交基,求证**:

$$\alpha_i = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

也是 R^3 **的标准正交基。**

16 . **求由下列向量组生成的子空间** $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$**的正交基**:

(1) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ -29 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}$。

17 . **求齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间(作为 R^5 **的子空间)的一组标准正交基。**

18 . **设** $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ **是内积空间** R^n **的一组基,** $\boldsymbol{\alpha} \in R^n$, **且** $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_i] = 0$, $i = 1, \cdots, n$, **求证:** $\boldsymbol{\alpha} = 0$。

19 . **设** $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **是内积空间** R^n **的一组向量, 记** $\boldsymbol{\Delta} = ([\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j])_{s\times s}$, **求证:** $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关** $|\boldsymbol{\Delta}| = 0$。

习题答案

习题 1

1 . 28 , - 53

3 . 14

4 . (1) 1　(2) - 1　(3) 2　(4) - 4　(5) 160　(6) 0　(7) 0

6 . 0

7 . 1) $(-1)^{n+1} n!$

(2) $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{i=1}^{n} a_i$

(3) $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} a^n + (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} b^n$

(4) $a_1 - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

(5) 0

(6) $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} b(n-3)!$

(7) $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-1-i}$

(8) $x^n + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) x^{n-1}$

(9) $\dfrac{1}{a-b}[a(x-b)^n - b(x-a)^n]$

(10) $\prod_{i=1}^{n} a_i^{n-1} \prod_{1 \le j < i \le n} \left(\dfrac{b_i}{a_i} - \dfrac{b_j}{a_j}\right) = \prod_{1 \le j < i \le n} (b_i a_j - a_i b_j)$

(11) $\prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)\left[2\prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)\right]$

(12) $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \dfrac{(n+1)}{2} n^{n-1}$

(13) $(n+1)$

(14) $3^{n+1}-2^{n+1}$

(15) $\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$

(16) $\cos n\alpha$

8. $|b_{ij}|_n = c^1\cdots c^n|c^{-j}b_{ij}|_n = c^1\cdots c^n c^{-1}\cdots c^{-n}|b_{ij}|_n = d$

9. $|A| = |A'| = |-A| = (-1)^n|A| = -|A|$,于是$|A|=0$

10. 0 与 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$

习题 2

1. $\begin{pmatrix} 14 & 4 & -5 \\ 12 & -2 & -3 \\ 1 & 9 & -12 \end{pmatrix}$

2. $k^n d$

3. 1) 14

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+5$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \mathrm{con}\, n\varphi \end{pmatrix}$

(9) n **偶数**, $2^n E$; n **奇数**, 2^{n-1} (**原矩阵**)

(10) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \mathrm{con}\, n\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi = \arctan \dfrac{b}{a}$

4 . $\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$,

$y = \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$

5 . 0

14 . **当** $k < n-1$ **时**, 0;

当 $k = n-1$ **时**, $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i} \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$。

17 . $\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_j^i \right)$; $\varepsilon, \cdots, \varepsilon_n$ **为** $x^n - 1 = 0$ **的** n **个根**

18 . 2, 4, $n-1$

21 . $(14)^{99} A$

25 . 1) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\dfrac{1}{4}$(**原矩阵**)

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -15 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n} & & & & 0 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$

26 . 1) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & & \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & \ddots & \ddots\ 1 & -1 \\ & & & \ddots\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

29. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$

34. $2^{3n}d^2$

习题 3

1. (1) (1,2,1)　(2) 无解　(3) (0,0,0)　(4) 无解

2. 1) $(b_1 - b_2, b_2 - b_3, b_3 - b_4, b_4)$

(2) $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

3. 有解 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$,有解时,解为$(a_1 + a_2 + a_3 + k, a_2 + a_3 + k, a_3 + k, k)$,$k$ 为任意数

4. 1) $a = 5$, $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $a = 0$, $b = 2$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) ① $a\neq 1, b\neq 0$ **有惟一解** $\left(\dfrac{2-\dfrac{1}{b}}{a-1}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{2a-4+\dfrac{1}{b}}{a-1}\right)$ ② $a=1, b=\dfrac{1}{2}$, **有无穷解** $(k, 2, 2-k)$, k **为任意数** ③ **其他情形, 无解**

(4) $a=1$, $x_1=1-x_2-x_3$

5 . (1) $k=-1, 4$ (2) $k=3, -6$

6 . (1) $(3, -1)$ (2) $(1, 2, 3)$ (3) $(-a, b, c)$

7 . $(-1)^{n-1}$

8 . 15

21 . (1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \dfrac{15}{2} \\ 12 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

22 . 1) $k\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $k\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

24 . $k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

31 . $k\begin{pmatrix}1\\\cdots\\1\end{pmatrix}$

习题 4

1 . 1) 2 , $k\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $(k, l)\neq(0,0)$

(2) 1 , $k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $(k, l)\neq(0,0)$ $\quad$ - 1 , $k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $k\neq 0$

(3) 2 , $k\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $(k, l)\neq(0,0)$ $\quad$ - 1 , $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $k\neq 0$

(4) 2 , $k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $(k_1, k_2, k_3)\neq(0,0,0)$ - 2 ,

$k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $k\neq 0$

2 . 0 与 $\sum_{i=1}^{n} i^2$

5．1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

8．$a+b+c+d,\ a-b+c-d,\ a+bi-c-di,\ a-bi-c+di$

9．$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

14．1) $(\lambda-2)^4, (\lambda-2)$

(2) $(\lambda-2)^3(\lambda-7)^2, (\lambda-2)^2(\lambda-7)$

(3) $(\lambda-3)^4(\lambda-1)^3, (\lambda-3)^3(\lambda-1)^2$

(4) $\lambda(\lambda-1)^2, \lambda(\lambda-1)$

15．**设原矩阵为** A: (1) $(2^{100}-1)A+(2-2^{100})E$

(2) $(2^{100}-2)(A^2+E)-(2^{101}-5)A$

(3) $\frac{1}{3}(2^{100}-1)A+\frac{1}{3}(2+2^{100})E$

(4) $100A-99E$

16．**特征值** 0 **与** n,**最小多项式** x^2-nx, $A^{100}=n^{99}A$

22．$17+7\mathrm{i}, 4\sqrt{2}, \sqrt{21}$

23．$\frac{\pm 1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

24．(1) $\begin{pmatrix}2\\3\\-4\\-6\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-3\\2\\6\\4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}4\\-6\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}6\\4\\3\\2\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\5\\1\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$

27．(1) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}\frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{12}}\end{pmatrix}$

30．$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7 & -4 & -4\\ -4 & 1 & -8\\ -4 & -8 & 1\end{pmatrix}$

习题 5

1．(1) $\begin{pmatrix}4 & 3 & -\frac{1}{2}\\ 3 & 5 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -7\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$

9 . 1) $Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} X$, **标准形** $Y' \begin{pmatrix} 13 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix} Y$

(2) $Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} & \frac{-1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \end{pmatrix} X$, **标准形**

$Y' \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1-\sqrt{3} & \\ & & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} Y$

10 . (1) **非正定** (2)(3)(4) **正定**

11 . (1) $|t| < \sqrt{15}$ (2) $t > \frac{58}{3}$

习题 6

6 . (1) $\left[\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right]$ (2) $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 1, \frac{3}{2}\right]$

7 . (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 1 \\ 7 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8 . $\boldsymbol{\alpha} = 0$

10 . (1) 3; $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) 0

11 . $(-7, 1, -1, 1)$

14 . $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

16 . (1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$