OPEN BOEK EXAMEN
DATASTRUCTUREN EN GRAAFALGORITMEN
27/6/2023

Oefeningen (3,3,3,2,3,3,3)

1. Graaf searching (3): Laat G een acyclische graaf zijn zodat alle knopen v bereikbaar zijn vanuit knoop s. Stel dat we BFS(G,s) uitvoeren en telkens wanneer een knoop is afgewerkt, deze achteraan toevoegen aan een initieel lege lijst. Zijn de knopen van onze acyclische graaf G dan topologisch gesorteerd op het einde van het BFS algoritme? Bewijs dit of geef een tegenvoorbeeld.

2. Flow netwerken (3): Geef een voorbeeld van een flow netwerk zodat er exact 72 verschillende minimale cuts bestaan én waarvoor het aantal knopen zo klein mogelijk is.

3. Graaf matching (3): Laat $G = (L \cup R, E)$ een bipartite graaf zijn zodat voor $v \in L$ geldt dat $|\Gamma(v)| = d$ en voor $v \in R$ geldt dat $|\Gamma(v)| = 2d$. Wat kan je afleiden in verband met de grootte van een maximale matching M in G? [Hint: gebruik volgende stelling "Er is een matching van grootte $|L|$ in een bipartite graaf indien voor elke $A \subseteq L$ geldt dat $|A| \leq |\Gamma(A)|$."]

4. Disjoint-Sets (2): Stel dat bij elke Union(x, y) operatie geldt dat de set van x of y slechts één element bevat. Welke disjoint sets datastructuur heeft dan de beste complexiteit? Leg uit.

5. Opspannende bomen (3): Stel dat we een opspannende boom T zoeken zodat de som van de gewichten van de edges die toekomen in een enkele knoop minimaal is. Met andere woorden we willen $\max_{v \in V} \sum_{u:(u,v) \in T} \alpha(u, v)$ minimaliseren. Is dit probleem snel op te lossen? Geef een snel algoritme of leg uit waarom dit niet zomaar kan.

6. Fibonacci heaps (3): Geef aan hoe je, startende vanuit een lege Fibonacci heap, een Fibonacci heap kan maken die exact 5 knopen bevat, namelijk de knopen a, b, c, d en e, zodat b en c kinderen zijn van a, terwijl d en e kinderen zijn van knoop c.

7. Kortste Paden (3): Beschouw een set valuta's C met een wisselkoers van r_{ij} tussen valuta i en j (je krijgt r_{ij} eenheden van valuta j voor één eenheid van valuta i). Een valuta arbitrage is mogelijk als er een opeenvolging van valutawisselacties bestaat die begint met één eenheid van een valuta en eindigt met meer dan één eenheid van dezelfde valuta. Laat zien hoe je snel kan bepalen of een matrix van wisselkoersen een valuta arbitrage bevat gebruik makend van een kortste pad algoritme. [Hint: $\log(xy) = \log x + \log y$.]

Veel succes.