OPEN BOEK EXAMEN
DATASTRUCTUREN EN GRAAFALGORITMEN
29/6/2022

Oefeningen (4+3+2+4+3+4)

1. Graaf searching (4): Geef een algoritme met een zo laag mogelijke tijdscomplexiteit om het kortste gesloten pad in een gerichte graaf G te vinden. Leg duidelijk uit waarom je algoritme werkt. Kan je een gelijkaardig algoritme bedenken voor het vinden van het langste gesloten pad? Leg uit.

2. Flow netwerken (3): Geef een voorbeeld van een flownetwerk zodat er een knoop v bestaat waarvoor $\delta_f(s,v) > \delta_{f'}(s,v)$ met f' een flow die we bekomen uit de flow f door één iteratie van de methode van Ford en Fulkerson uit te voeren waarbij p een simpel augmenting pad is van s naar t in G_f. Geef duidelijk aan hoe G_f en $G_{f'}$ er uit zien en welk pad p je neemt.

3. Disjoint Sets (2): Geef aan hoe je de FindSet operatie kan implementeren zonder gebruik te maken van recursie wanneer we een disjoint-set forest representatie gebruiken. Zorg er voor dat de complexiteit niet toeneemt.

4. Opspannende bomen (4): Laat $G = (V, E)$ een gerichte gewogen graaf zijn. Een gerichte opspannende boom $T(r)$ met root r is een deelgraaf van G die $|V| - 1$ edges $E' \subset E$ bevat zodat er een uniek pad is in $T(r)$ van r naar elke andere knoop in V. Een gerichte opspannende boom met root r heeft minimaal gewicht indien $\sum_{e \in E'} \alpha(e)$ minimaal is. We noemen een edge $e \in E$ nutteloos indien deze nooit kan voorkomen in een gerichte opspannende boom $T(r)$ met root r. Geef een voorbeeld waarbij de edge met het kleinste gewicht in E niet nutteloos is, maar toch geen deel uitmaakt van een gerichte opspannende boom $T(r)$ met minimaal gewicht. Toon aan dat een edge $e = (u, v)$ nutteloos is als en slechts als alle paden van r naar u via de knoop v lopen (indien er minstens één gerichte opspannende boom met root r bestaat).

5. Fibonacci heaps (3): Stel dat we $\Phi(H) = at(H) + bm(H)$ gebruiken als potentiaal functie, met $t(H)$ het aantal knopen in de root list, $m(H)$ het aantal gemarkeerde knopen en $a, b \geq 0$. Aan welke voorwaarde moeten a en b dan voldoen zodat de Decrease-Key operatie een geamortizeerde kost heeft van $O(1)$. Leg je anwoord in voldoende detail uit.

6. Kortste Paden (4): Stel dat we een kortste pad p zoeken in een gewogen gerichte graaf $G = (V, E)$ van s naar t dat eveneens de knopen in W bezoekt met $W \subset V$. De volgorde waarin de knopen in W worden bezocht op het pad van s naar t ligt niet vast. Is p steeds een simple pad? Geef een algoritme om dit probleem op te lossen (in woorden). Bespreek de tijdscomplexiteit van je algoritme.

Veel succes.