第4-5卷 工程图学学报 vol.
83-84 ACTA ENGINEERING GRAPHICS 4-5

正负法数控绘图*

蔡耀志

（浙江大学）

内容提要

本文充分应用隐函数曲线表达式的划分正負性质，并在数控绘图中引入自动控制变向概念。提出了采用变向线来控制方向。从而解决了隐函数曲线 f(x,y)=0 的直接高精度数控绘图問題。

数控绘图技术从五十年代末期诞生至今，二十余年来产生了不少绘图方法，然而这些方法都只能直接产生一些基本曲线，显函数曲线和显参数曲线。本文给出隐函数曲线高精度直接数控绘制的方法，也可作为一种计算方法用于隐函数数值解，求面积、弧长和极点等。

我们把满足以下条件的曲线称为"易画曲线"。

1. 曲线所对应的方程式 $f(x,y)=0$ 函数二阶连续可微。
2. 曲线上各点的曲率半径均大于绘图步长。
3. 以曲线上任意点为中心绘图步长为半径的圆只和曲线有二个交点。

本文只考虑易画曲线。我们用大步长走折线的过程阐明绘图原理（图1）。

设使得 $f(x,y)<0$, $f(x,y)=0$ 和 $f(x,y)>0$ 的点的集合分别记成 G_-, G_0 和 G_+.

假设起始点 $p_0=(x_0,y_0)$ 在曲线上，先走一个 Δx，到达 $p_1^-=(x_0+\Delta x,y_0)$，該 $p_1^-\in G_-$，当进入 G_- 时沿 y 选择合适（正或负）方向向 G_+ 区域前进。在图上显然应该走正的 Δy，一直到跨入 G_+ 区域（或到达 G_0），设該点是 p_1^+（注意这里每走一步的长度总是固定

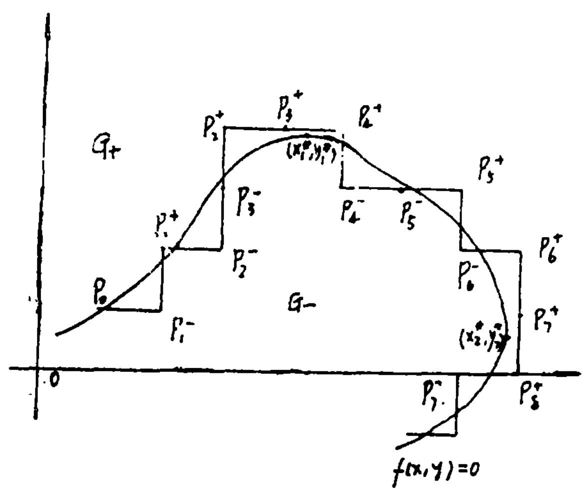


图1

*本文1984年4月收到。

的)。接着就选择合适方向向 G_- 前进……。在图上 p_1^* 之前所选的方向都是正的 Δx 及正的 Δy。而跨过 y 方向极点 (x_1^*, y_1^*) 之后，取 Δy 为负值。又当跨过曲线 x 方向极点 (x_2^*, y_2^*) 之后，Δx 也得改变方向。这样一直走下去，我们就得到一条逼近曲线 $f(x,y)=0$ 的阶梯形折线。当步长充分小时这条折线就成了一条光滑的曲线。

本方法要使用者给出的信息如下：

1．曲线段的起点 (x_0, y_0) 和终点 (x_s, y_s)，其精度在半个绘图步长 k 以内。

2．给出起始方向 $(\Delta x, \Delta y)$，$|\Delta x| = |\Delta y| = k$。

3．以函数的形式给出曲线方程 $f(x,y)=0$。

我们根据以上信息作判别函数

$$F(x,y) = \sigma f(x,y) \tag{1}$$

其中
$$\sigma = \begin{cases} -1 & \text{如果 } f(x_0+\Delta x, y_0) \geqslant 0 \\ 1 & \text{如果 } f(x_0+\Delta x, y_0) < 0 \end{cases}$$

我们的输出规则是

a) 当 $(x,y) \in G_+ \cup G_0$ 时，即 $F(x,y) \geqslant 0$ 时 $\underrightarrow{\Delta x}$　　（2）

b) 当 $(x,y) \in G_-$ 时，即 $F(x,y) < 0$ 时 $\underrightarrow{\Delta y}$　　（3）

其中 $\underrightarrow{\Delta x}$ 代表输出一步 Δx。

定理1　当给出了正确的起始方向后按照输出规则（2）和（3）来控制绘图笔的走向，就能画出起始点 (x_0, y_0) 所在的单调部份曲线段，其绘制误差小于等于绘图步长。

证明　由于 $F(x_0, y_0)=0$ 满足（2），因此绘图笔第一步必定先走 x 方向。当输出一步 Δx 后因 $F(x_0+\Delta x, y_0) < 0$，由（3）第二步输出 Δy。根据 $F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 满足（2）或（3）确定第三步输出 Δx 或 Δy，其余类推。

因为从起点到第一个极点（如果有极点的话）之间曲线必定是单调的，所以在绘图过程中没有到达极点之前，按照给定的起始方向根据输出规则（2）和（3）必然向着曲线，走下去一定会和曲线相交。

为了证明其绘制误差小于一步，不失一般性，我们假定所绘曲线是单调增加的（参看图2），曲线可以用长方形分段框起来，这种长方形不外图 (a) 和图 (b) 二种类型。带箭头的实

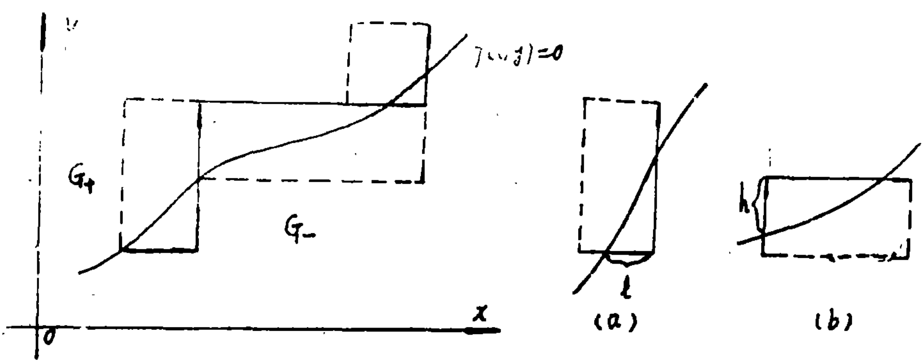


图2

线代表绘图笔的走向。对于(a)长方形内曲线的点到矩形一边的距离一定小于 l。(b) 长方形内曲线到矩形边的距离一定小于 h。而 l 和 h 总是小于绘图步长 k。证毕。

根据定理1，要解决隐函数曲线的绘图只需实现绘图笔走过极点时自动控制输出方向即可。我们知道曲线 $f(x,y)=0$ 的 y 方向极点 (x^*,y^*) 处必有

$$y'(x^*,y^*)=-f_x(x^*,y^*)/f_y(x^*,y^*)=0$$

因此，我们知道 y 方向极点必在曲线

$$f_x(x,y)=0 \tag{4}$$

上。于是用跨过曲线（4）来标志走过极点 (x^*,y^*)。这样输出量的变向规则定为

当　　$f_x(x,y_1)\cdot f_x(x+\Delta x,y_2)\leqslant 0$ 时 Δy 和 σ 变号　　（5）

当　　$f_y(x_1,y)\cdot f_y(x_2,y+\Delta y)\leqslant 0$ 时 Δx 和 σ 变号　　（6）

每输出一步 Δx 就判别（5）而输出一步 Δy 就判别（6）。由于在输出 Δx 之前 y 高度可能不一样，有可能像图3那样跨过极点，所以可能 $y_1 \neq y_2$。对 σ 的变号，原因在于按照原输出规则 $F(x,y)\geqslant 0$ 时是输出 Δx，而跨过变向线（4）之后就得改成当 $F(x,y)\geqslant 0$ 时控制 Δy 输出。将 σ 符号改变一下，就使得输出规则不变而达到同样的效果。

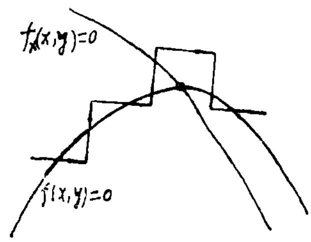


图3

这一方法给我们带来一系列理论上的问题。例如 $f(x,y)=0$ 与 $f_x(x,y)=0$ 什么情形下才相交？$f_x(x,y)=0$ 什么条件下具有划分正负性质？$f_y(x,y)=0$ 与 $f(x,y)=0$ 相交的点在什么条件下为极点？等等。这些问题在［1］的定理4和5及其推论中已作了回答，从理论上说明变向规则（5）、（6）完全正确。

因为绘图步长总是很小而且是固定的，由偏导数的定义使我们想到用阶差曲线

$$\Delta f(x,y,\Delta x)=f_x(x+\Delta x,y)-f(x,y)=0 \tag{7}$$

来代替（4）式，此时变向规则变成

当　　$\Delta f_x(x,y_1,\Delta x)\Delta f_x(x+\Delta x,y_2,\Delta x)\leqslant 0$ 时 Δy 和 σ 变号　　（8）

当　　$\Delta f_y(x_1,y,\Delta y)\Delta f_y(x_2,y+\Delta y,\Delta y)\leqslant 0$ 时 Δx 和 σ 变号　　（9）

为了分析这种代替的合理性和以后绘图误差分析的需要，我们引入一个“包含圆”概念。

定义1　(x_0,y_0) 是曲线上一点，满足以下条件的圆称为该点的包含圆。

1）圆与曲线在该点相切。

2）圆心与该点曲率圆中心在曲线同一侧。

3）整个圆上的点全在曲线同一侧，并且半径达到最大。

从定义可以看到包含圆不仅与一个点邻近的性态有关而且与所考虑曲线整体有关。

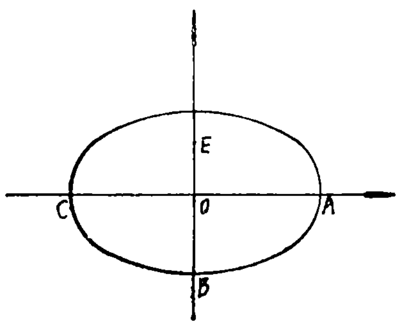


图 4

例如图 4 中就整个椭圆，B 处的包含圆半径为 OB。如果只考察半个椭圆 $\widehat{ABC}$，那么 B 点的包含圆即为通过 ABC 之圆，其半径为 BE 。

定理 2　对于易画曲线 $f(x,y)=0$ 及其阶差曲线（7）的交点(x^4,y^4)与 y 方向极点(x^*,y^*)之间有以下关系：

a）一般 $|x^*-x^4|\doteq|\Delta x|/2$,

而恒有　　$|x^*-x^4|<|\Delta x|$　　(10)

b）$|y^*-y^4|<|\Delta x|/7$　　(11)

c）在绘图过程中总是先跨过曲线(7)后跨过(4)。

证明　(x^4,y^4)满足方程“$f(x^4,y^4)=0$，$\Delta f_x(x^4,y^4,\Delta x)=0$”，由于

$$\Delta f_x(x^4,y^4,\Delta x)=f(x^4+\Delta x,y^4)-f(x^4,y^4)=f(x^4+\Delta x,y^4)$$

所以，以上方程化成

$$\begin{cases}f(x^4,y^4)=0\\ f(x^4+\Delta x,y^4)=0\end{cases}$$

该方程有一个明显的几何意义，如图 5。(x^4,y^4)是将曲线 $f(x,y)=0$ 往后平移 Δx 位置之后与原曲线的交点。于是结论 a)与 c)就显而易见。

对于结论 b)，可以看到二个包含圆的交点(x_1,y_1)有

$$|y^*-y^4|<|y^*-y_1|=r-\sqrt{r^2-(\Delta x/2)^2}=h(r)$$

由于 $h(r)$ 是 r 的单调减少函数，又易画曲线上的一切包含圆半径恒大于或等于 Δx，所以

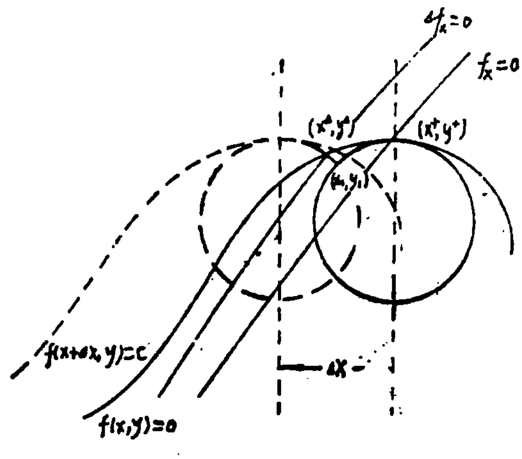


图 5

$$h(r)\leqslant h(\Delta x)=|\Delta x|(2-\sqrt{3})/2<|\Delta x|/7$$

证毕。

应用(7)式控制变向时，需要多走一步（参看图 6 中(a)），这是因为 $\Delta f_x(M)=f(B)-f(M)$。正因如此，所以用(7)代替(4)所产生的极点偏离误差在许多情况在此得到补偿。只有当输出一 Δx 同时跨过(7)和(4)二条曲线时(参看图 6 中(b)）才多走一步。

值得注意的第二个问题是“多余变向”。其根本原因在于某些变向控制线和曲线夹角很小。在图 6 (c) 中我们看到 A 到 B 由于越过了 $\Delta f_x=0$，所以 Δy 变向，然而从 B_1 到 C 再到 D 时按变向规则又要变向一次。为了避免这种现象，可在程序中每当变向之后在几步内不作变向判别。

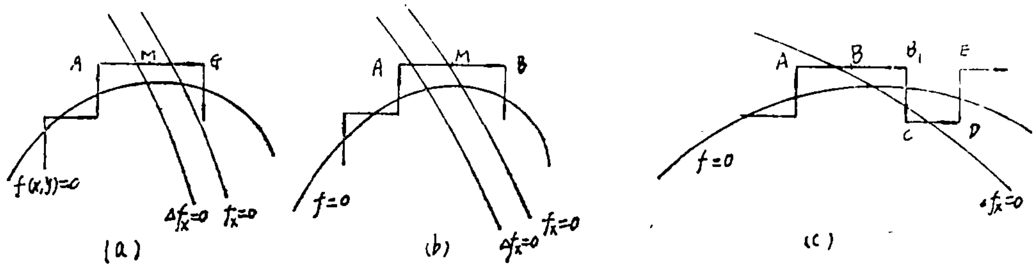


图6

下面我们分析过极点时有可能引入的误差。过极点时可罗列出种种不同情形，然而只有当变向线和极点切线夹角很小时才有可能引入稍大误差。下面定理中的方程是以绘图步长为单位。

定理3 设 $P=(x^*,y^*)$ 是曲线 $f(x,y)=0$ 的 y 方向极点，并假设 $\Delta f_x=0$ 在极点处一步高之内近似地线性，r 是该点包含圆半径。当变向线 $\Delta f_x=0$ 和极点处切线夹角 θ 满足如下关系

$$\theta \geqslant arc\text{tg}(1/(\sqrt{2r}-1)) \tag{12}$$

则有以下结论

1）转向角（参看图7）

$$\angle BOG=\omega < arc\ \text{tg}\sqrt{2/r} \tag{13}$$

2）变向处可能引入的最大误差 $\varepsilon<2$（即小于二个绘图步长）。

证明 首先证明1），因为

$$\text{tg}\ \omega=GB/OG<EB/OP$$

而 $EB\leqslant P_0E\text{ctg}\theta+AB\geqslant \text{ctg}\ \theta+2$ 所以

$$\text{tg}\ \omega<(\text{ctg}\ \theta+2)/r$$

其次，由定理假设(13)推得

$$\text{ctg}\ \theta+2<\sqrt{2r} \tag{14}$$

将其代入前一式即得证1）。

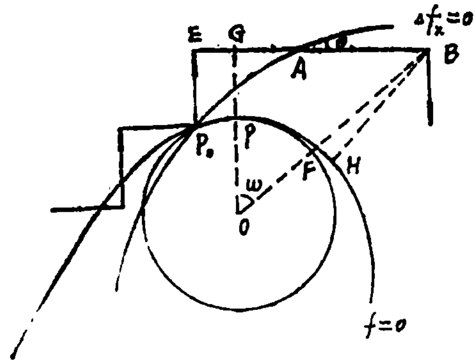


图7

证明2），从图7可以看到

$$\varepsilon=BH<BF=OB-OF=\sqrt{OG^2+GB^2}-r<\sqrt{(1+r)^2+(\text{ctg}\theta+2)^2}-r$$

要证明 $\varepsilon<2$，只需证明

$$\sqrt{(1+r)^2+(\text{ctg}\ \theta+2)^2}-r<2$$

而上式消去根号即可化成

$$(\text{ctg}\ \theta+2)^2-3<2r$$

由(14)式推知上式成立。证毕。

用正负法来绘制隐函数曲线的完整绘图方案如下：

一、方程形式“$f(x,y)=0$”要求具有划分正负性质，并且是易画曲线。

二、输入量

1．曲线段起始点(x_0,y_0)和终点(x_s,y_s) 。

2．起始方向象限数G 。

3．绘图步长k 。

4．计算$f(x,y)$函数值的子程序。

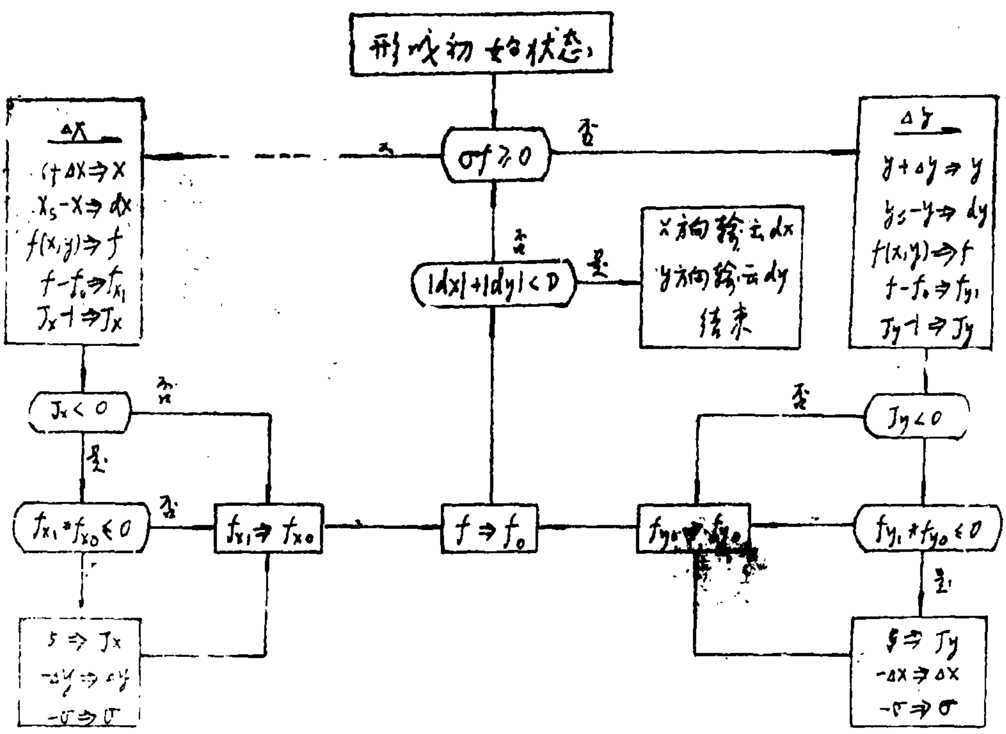
三、形成初始状态

$0\Longrightarrow f,f_0$；$y_0\Longrightarrow x,y_0\Longrightarrow y$；$k*sign((G-1.5)*(G-3.5))\Longrightarrow\Delta x$，$k*sign(2.5-G)\Longrightarrow\Delta y$；$1\Longrightarrow J_x,J_y$；$k\Longrightarrow dx,dy$，$1.8k\Longrightarrow D$

$$\sigma=\begin{cases}-1 & 若\ f(x_0+\Delta x,y_0)\geqslant 0\\ 1 & 若\ f(x_0+\Delta x,y_0)<0\end{cases}$$

将绘图笔移到起始点(x_0,y_0)。

四、框图



图中 $\underrightarrow{\Delta x}$ 代表输出一步 Δx 。

参 考 文 献

［1］蔡耀志：关于隐式曲綫表达式的划分正負性质，浙江大学計算数学組讲义。

［2］楊学平：計算机繪图，电力工业出版社(1980)。

［3］求新造船厂、六机部十一研究所、浙江大学計算数学組，"小型通用計算机应用插补法绘图"，《造船技术》1973年第二期。

［4］江南造船厂、南京工学院，"NJ型绘图切割数控机"，六机部六一〇研究所編印，1973年8月。

［5］吕維雪：曲綫数字程序控制系統設計，上海科技出版社，1964年12月，P.113—153。

［6］日本図学会，エンピユータグラフイクス委員会編，自动制图システム。日刊工业新聞社。

［7］齐田伸雄，新レソ关数概念の创造，安川电机，第38卷第3号，1974年3月P.300—309

［8］Bresnham, J.E., Algorithm for Computer Control of a digital plotter, IBM Systems Journal, Vol.4(1965), P.25。

［9］M.L.V Pilteway, Algorithm for drawing ellipses or hyperbolas with a digital plotter, The computer Journal, Vol.10, No.3(1967), P.282—290.

［10］Dertouzos. M.L. and Graham. H.L., A parametric graphical display technique for on-line use. AFIPS conference proceedings, Vol.29(1966), P.201.

［11］M.F.Partridge, Algorithm for drawing ellipses or hyperbolas with a digital plotter, The oomputer Journal, Vol.11, No.1, P.119—120(1967)。

［12］L.B.Smith, Drawing ellipses, hyperbolas or parabolas with fixed number of points and maximun inscribed area, The computer Journal, Vol.14, №1, P.81－86 (1971)。

POSITIVE–NEGATIVE ALGORITHM OF DRAWING GRAPHS WITH A DIGITAL PLOTTER

Cai Yaozhi

(zhejiang university)

Abstract

This paper fully utilizes the property of the implicit curve expression dividing a region into positive and negative. The idea of the automatic changing direction is introduced into drawing graphs with a digital plotter. The changing direction is controled automtically by using a direction-changing curve. Thus the problem of drawing an implicit function curve directly with high precision is solved.