

# 图形反走样的理论与方法初步

冯结青

浙江大学 CAD&CG国家重点实验室

# 主要内容

- 光栅图形中的走样现象
- 走样的分析和反走样的理论基础
- 图形反走样

# 主要内容

- 光栅图形中的走样现象
- 走样的分析和反走样的理论基础
- 图形反走样

# 走样(Aliasing)

- 走样(Aliasing)

- 连续信号的离散采样：当信号的采样过于稀疏时，所得结果为一个低频信号的错觉

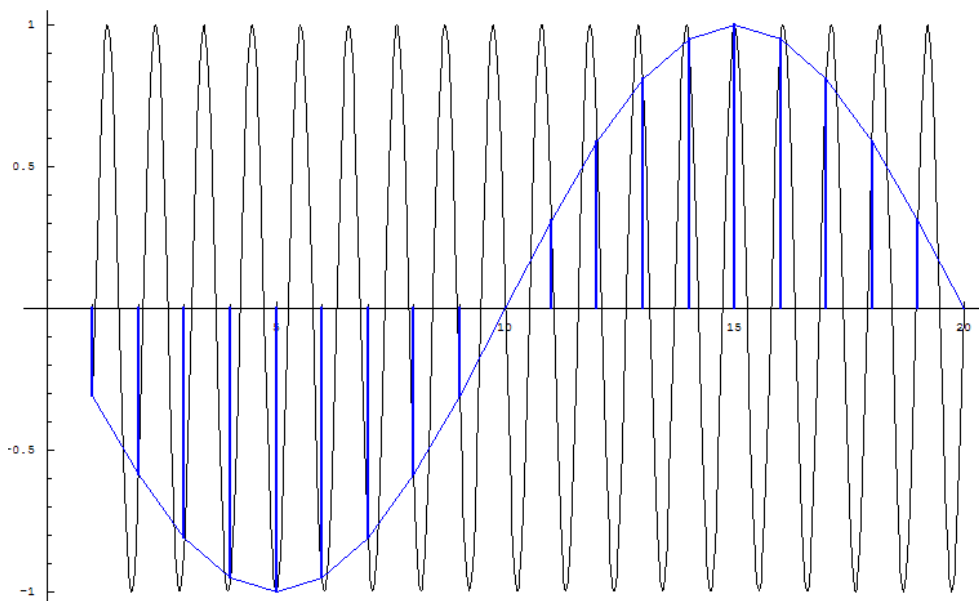
原始信号(黑线)

$$f(t) = \sin 1.9\pi t$$

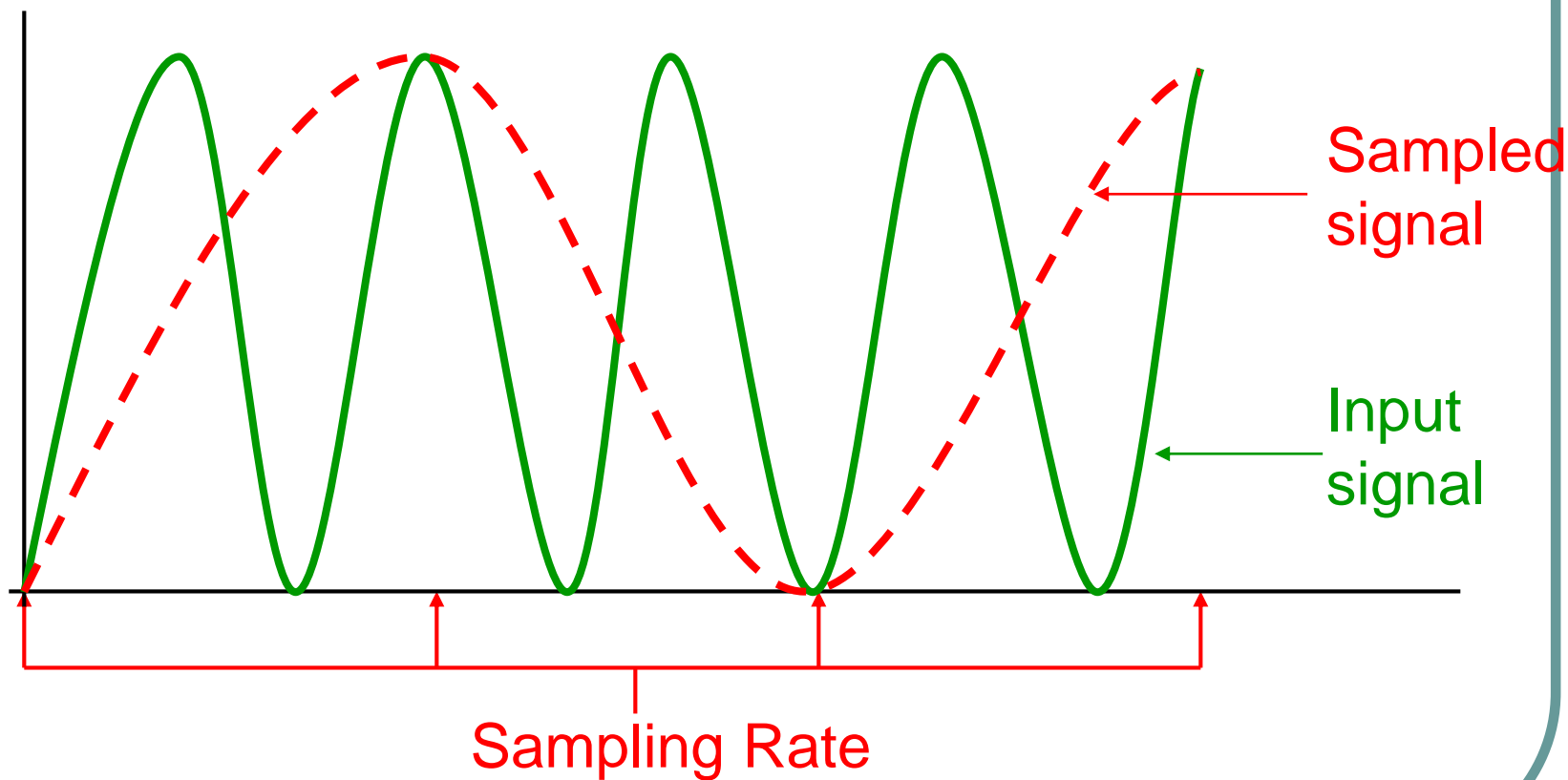
$$t \in [1, 20]$$

在整数  $t$  处采样，重建  
信号表现为(蓝线):

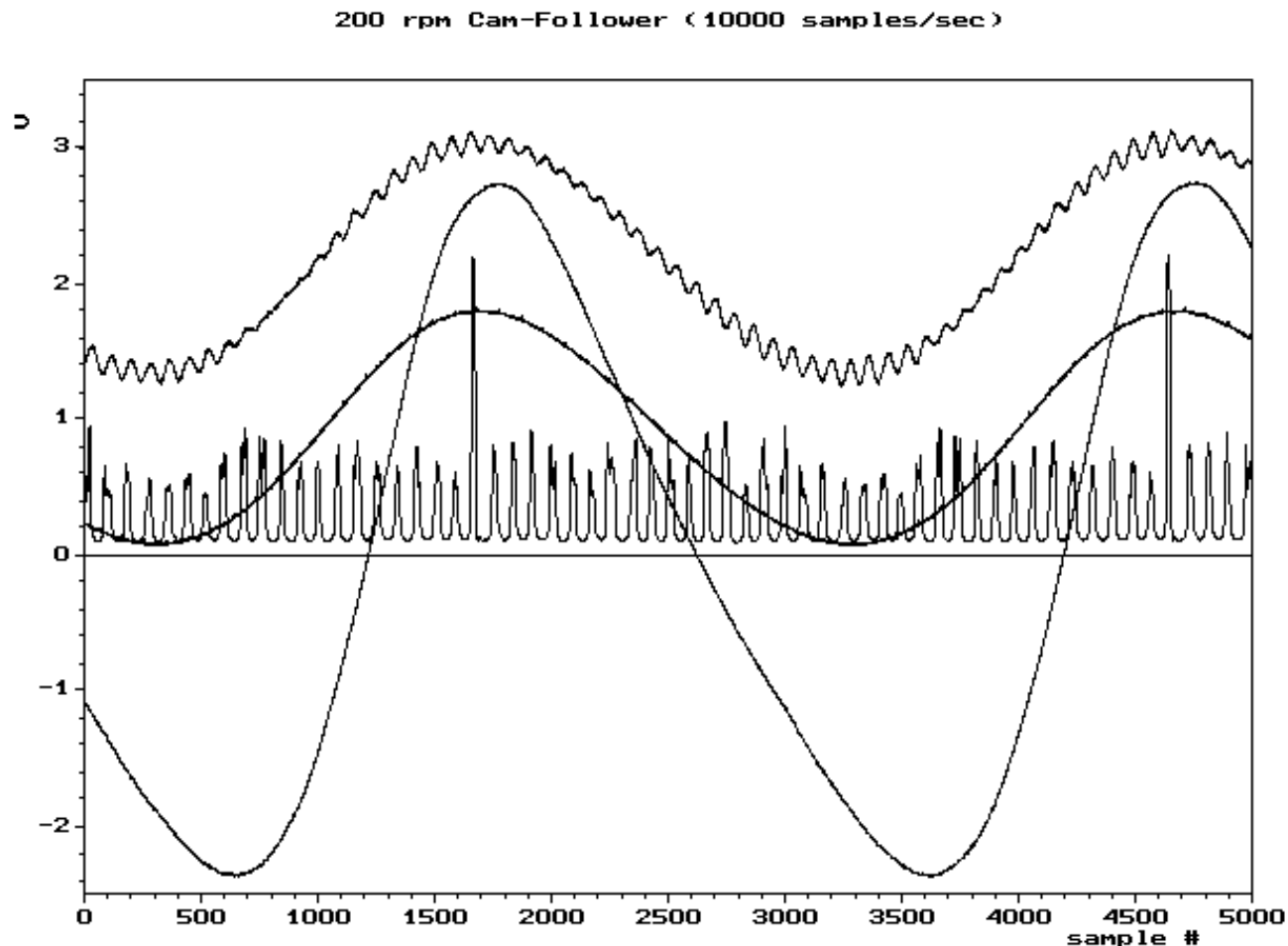
$$f(t) = \sin 0.1\pi t$$



# 输入信号的采样与走样



# 四个信号：用六个不同频率采样



# 图形中的走样

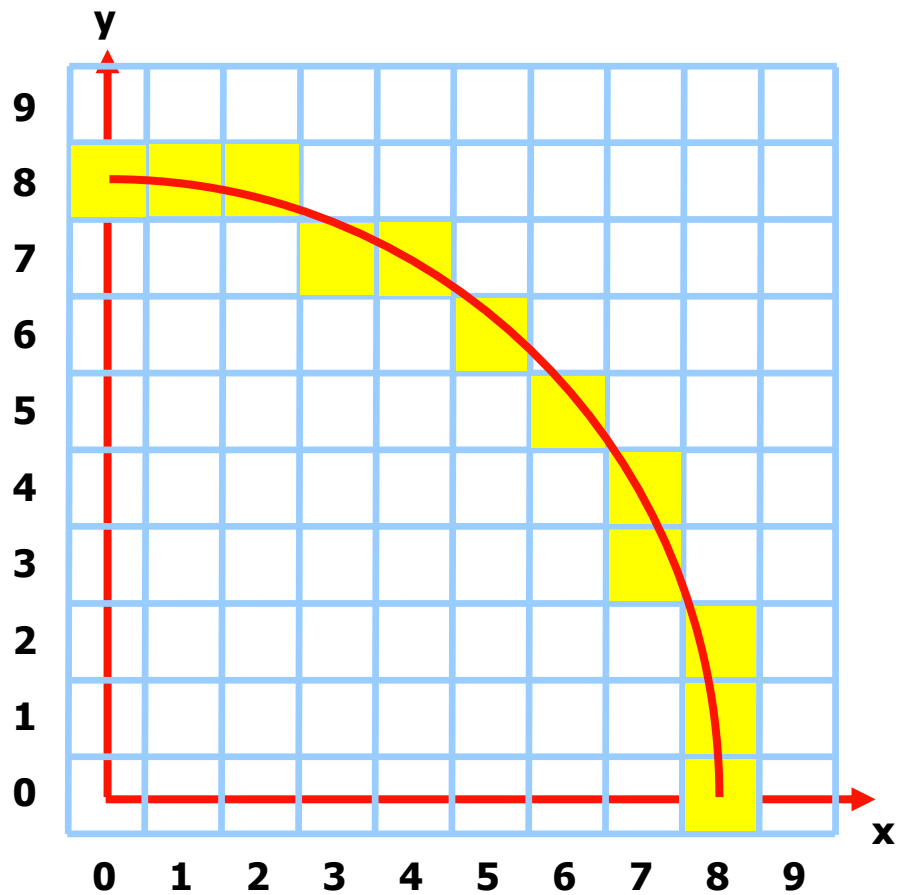
- 颜色空间
- 物体空间、视点空间、屏幕空间等
- 动画中时间

# 图形的走样现象

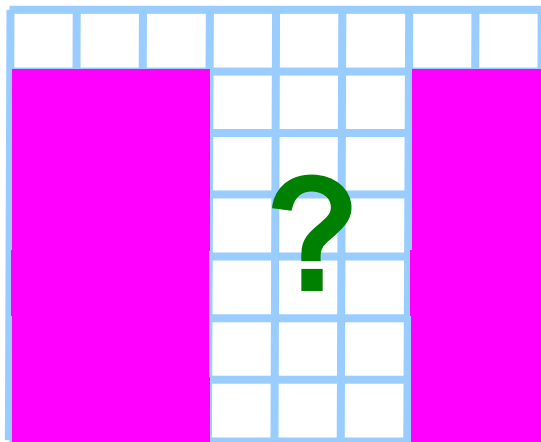
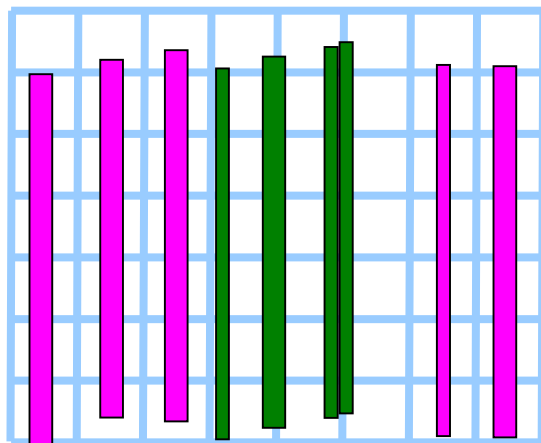
- 锯齿/阶梯现象
- 细节失真
- 狭小图形的遗失
- 动态图形的闪烁
- Moiré模式 //莫列波纹
- 车轮运动错觉



# 锯齿/阶梯现象

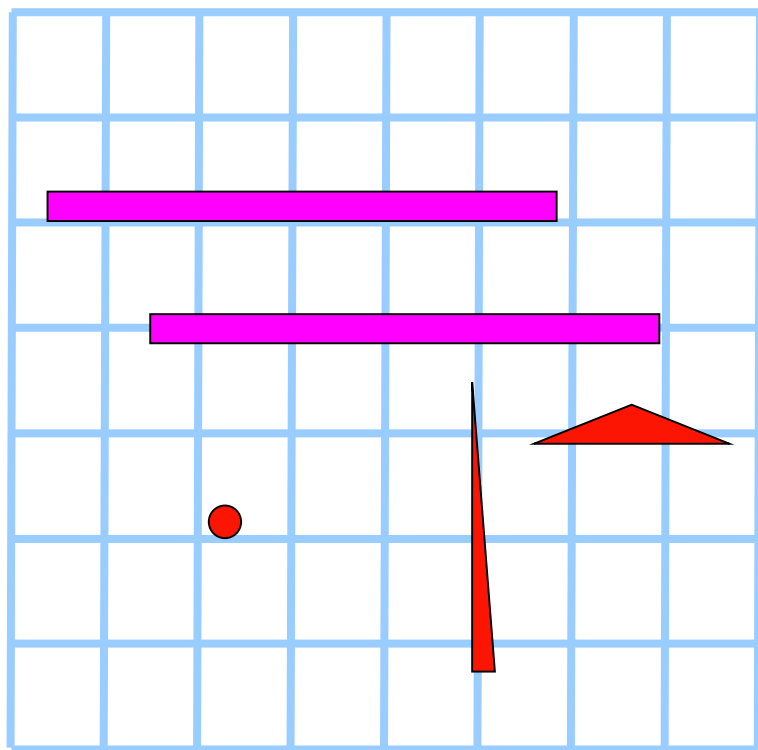


# 细节失真



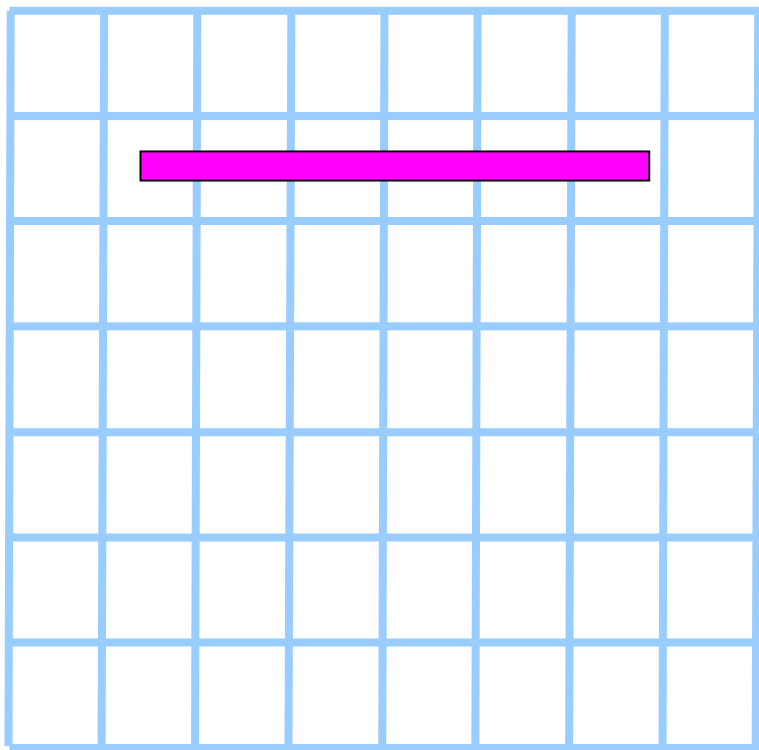
细节失真

# 狭小图形遗失

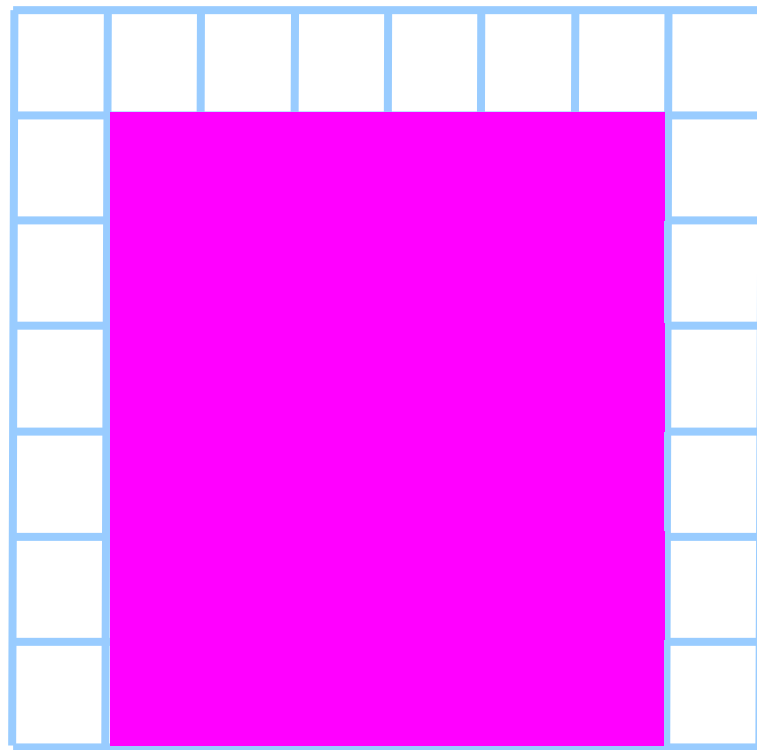


狭小图形遗失

# 动态图形的闪烁

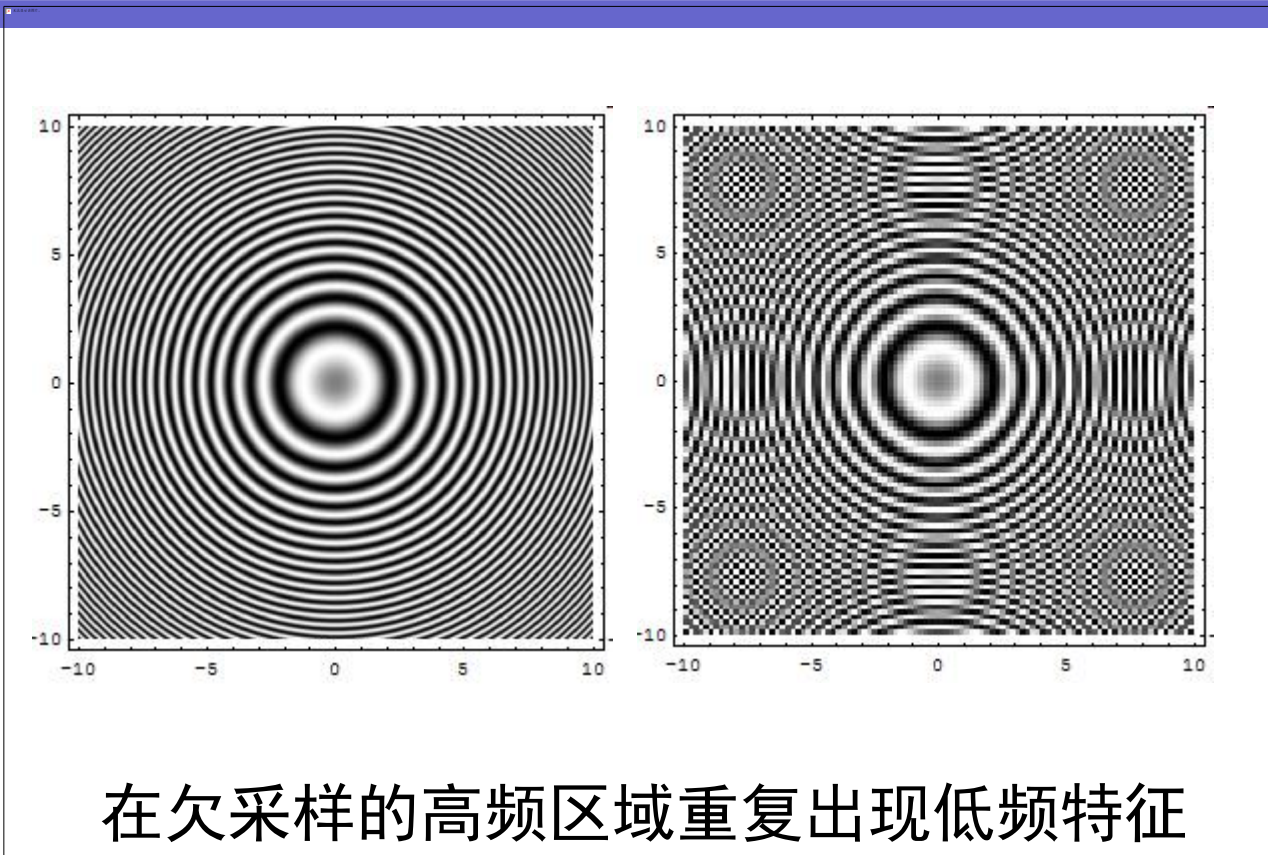


物体的真实运动

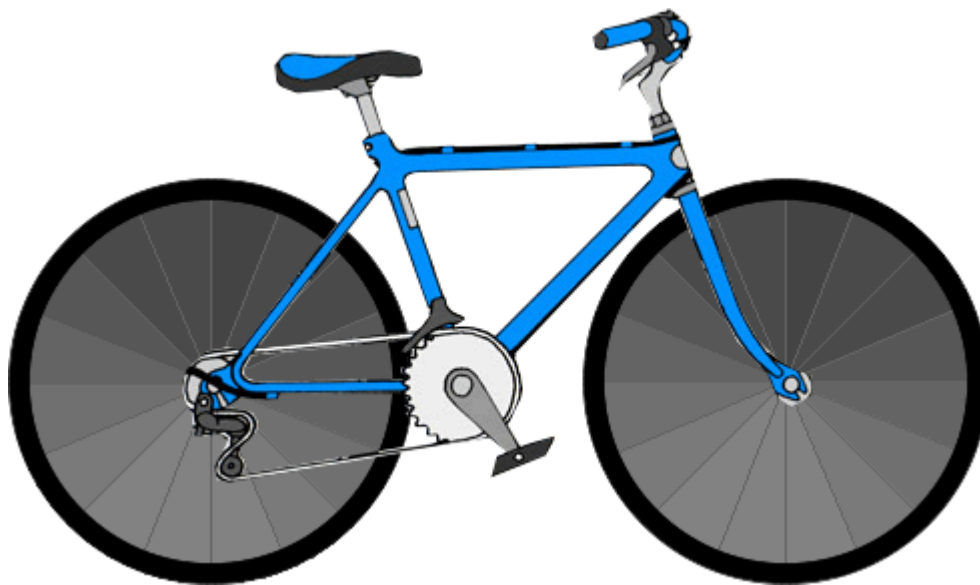


物体运动光栅化后的闪烁现象

# Moiré模式 / 'mwa:rei /



# 车轮运动错觉



旋转角度采样频率的不足

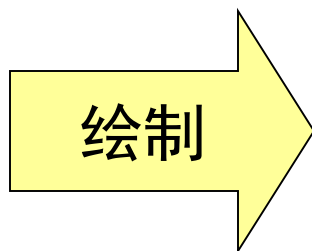
# 主要内容

- 光栅图形中的走样现象
- 走样的分析和反走样的理论基础
- 图形反走样

# 图形绘制与显示：信号角度



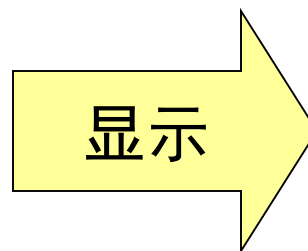
图形描述



绘制



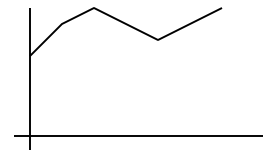
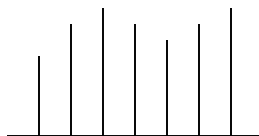
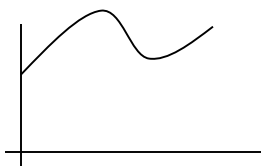
数字图像



显示

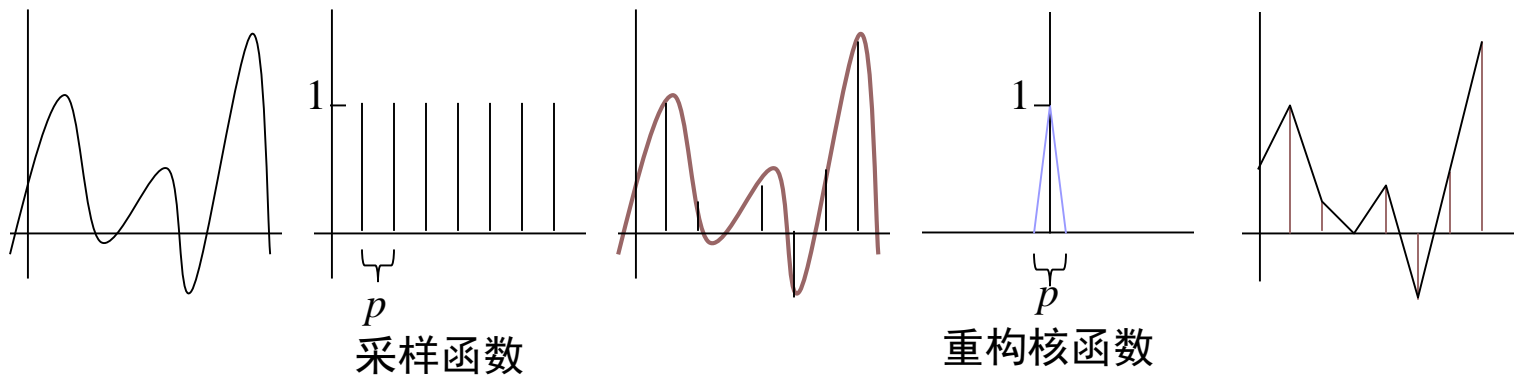
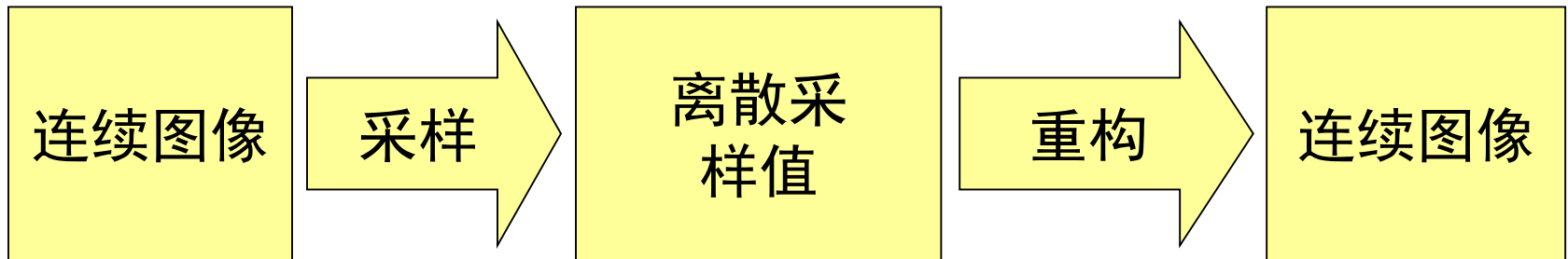


模拟图像





# 信号的采样与重构



# 1-D Fourier变换

- Fourier变换将信号 $I(x)$ 从空域变换到频域
- 得到关于频率 $u$ 的频谱函数 $F(u)$ 
  - $u$  是复数
  - 只关注复数的模:  $|u|$
- 直流项(DC Term):  
 $F(0) = \text{I(x)的均值}$
- 对称性:  $F(-u) = F(u)$

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \int I(x) \exp(-jux) dx$$

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int F(u) \exp(jux) du$$

其中:

$$j^2 = -1$$

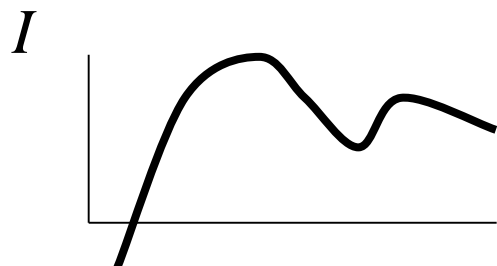
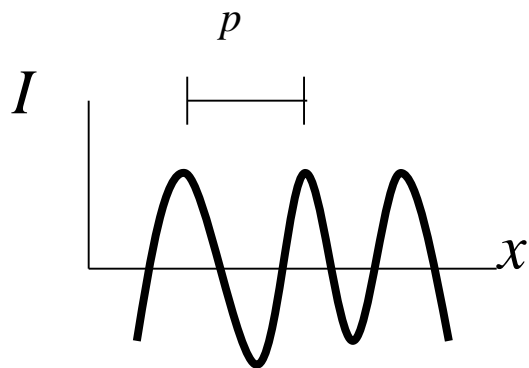
$$\exp(-jux) = \cos ux - j \sin ux$$

$$|a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

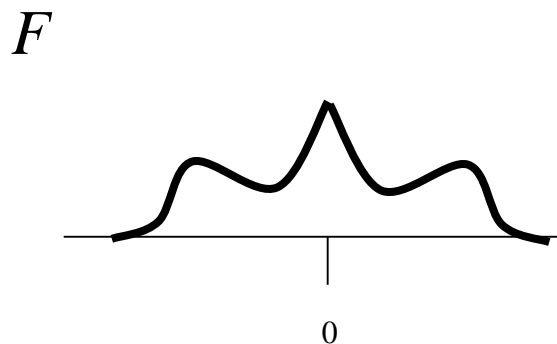
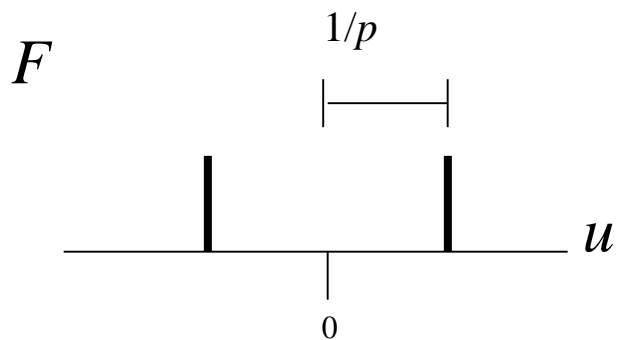
$$\arg(a + bj) = \arctan(b / a)$$

# 1-D Fourier变换

空域



频域

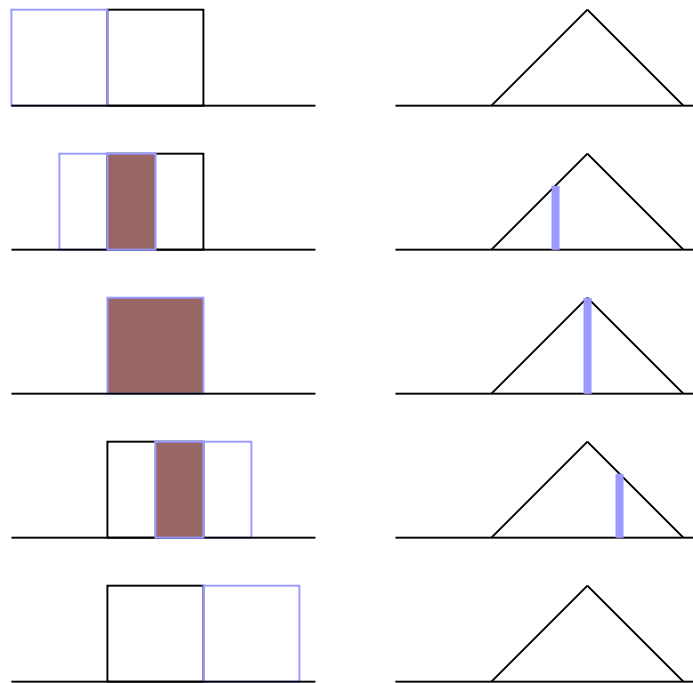


# 乘积与卷积(Convolution)

- 两个函数的**乘积**就是函数在对应点处的乘积
- 两个函数的**卷积**是函数乘积的**和**，其中一个函数取固定点的值，另一个函数取区间中所有点的值
  - 盒函数与盒函数的卷积为三角形帽子函数
- 空域中卷积等于频域中乘积，反之亦然
  - $f * g \Leftrightarrow FG$
  - $fg \Leftrightarrow F * G$

$$(gh)(x) = g(x)h(x)$$

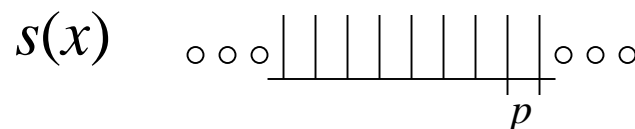
$$(g * h)(x) = \int g(s)h(x-s)ds$$



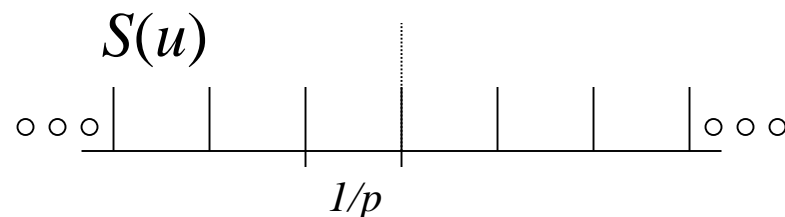
# 采样函数

- 采样：连续函数的离散取值
  - 采样函数： $s(x)$
  - 函数采样： $f(x)s(x)$
- 采样函数 $s(x)$ 
  - 一组离散峰值(函数)
  - 采样频率反比于峰值间距离(采样分辨率)
- 采样函数 $s(x)$ 的Fourier变换 $S(u)$ 
  - 仍然是一组离散峰值(函数)
  - 峰值间距离对应于采样频率

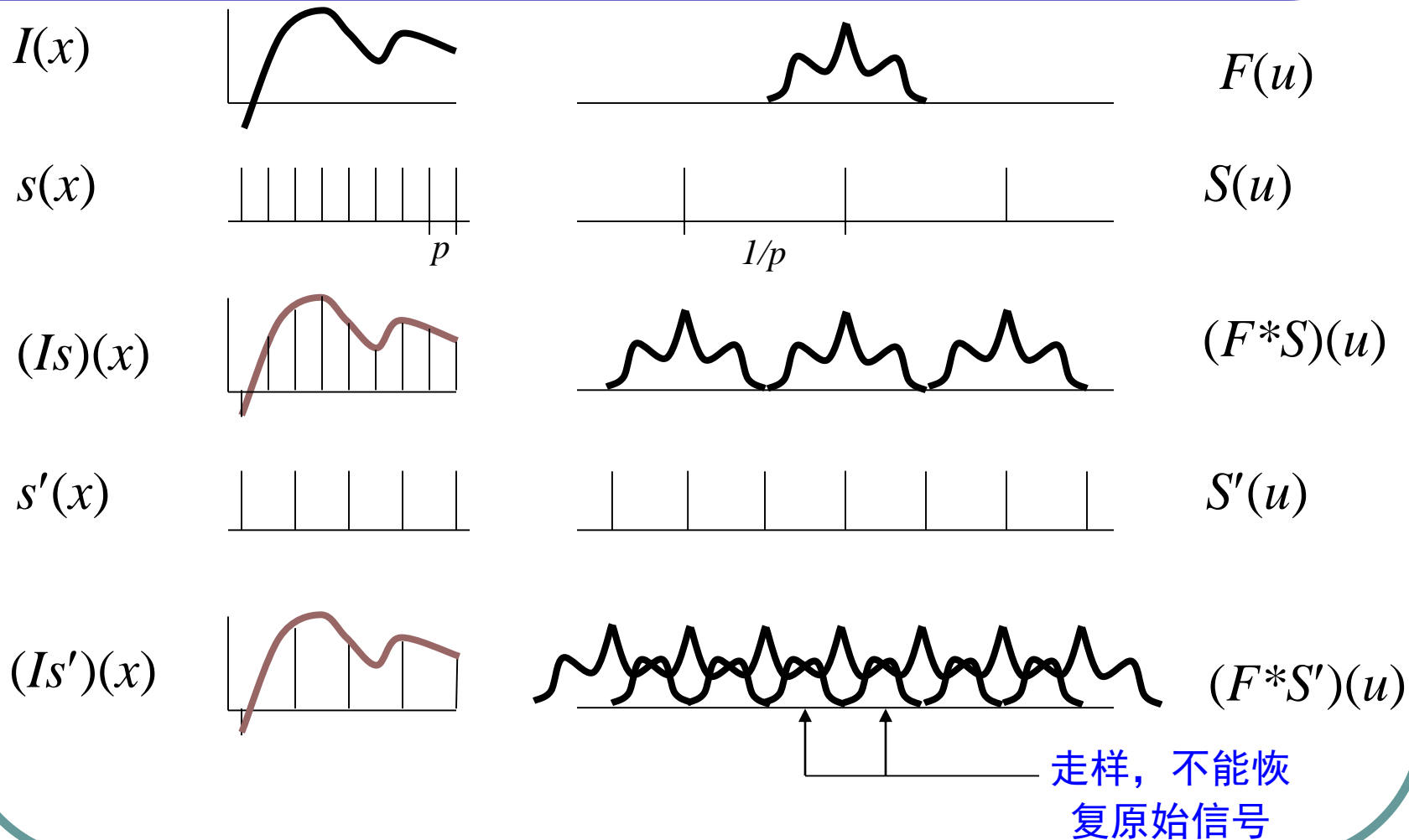
空域



频域

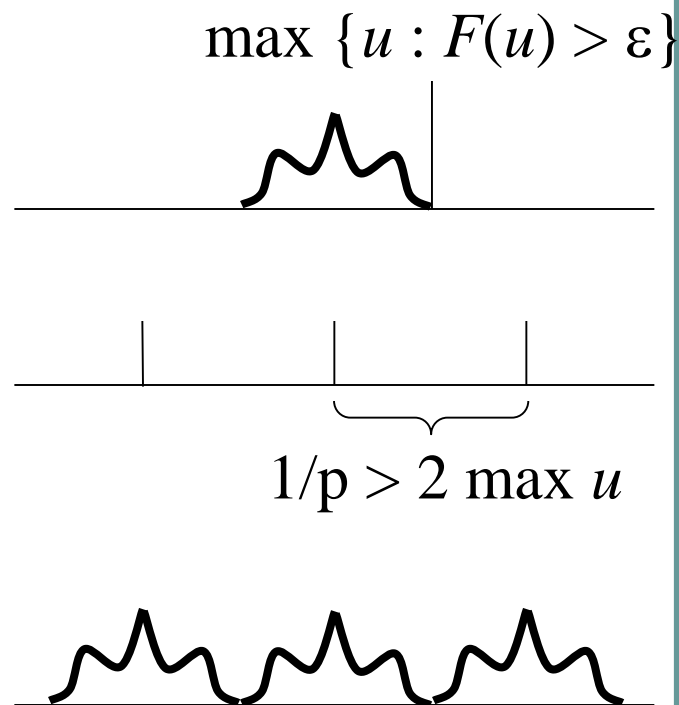


# 1-D信号采样示意图

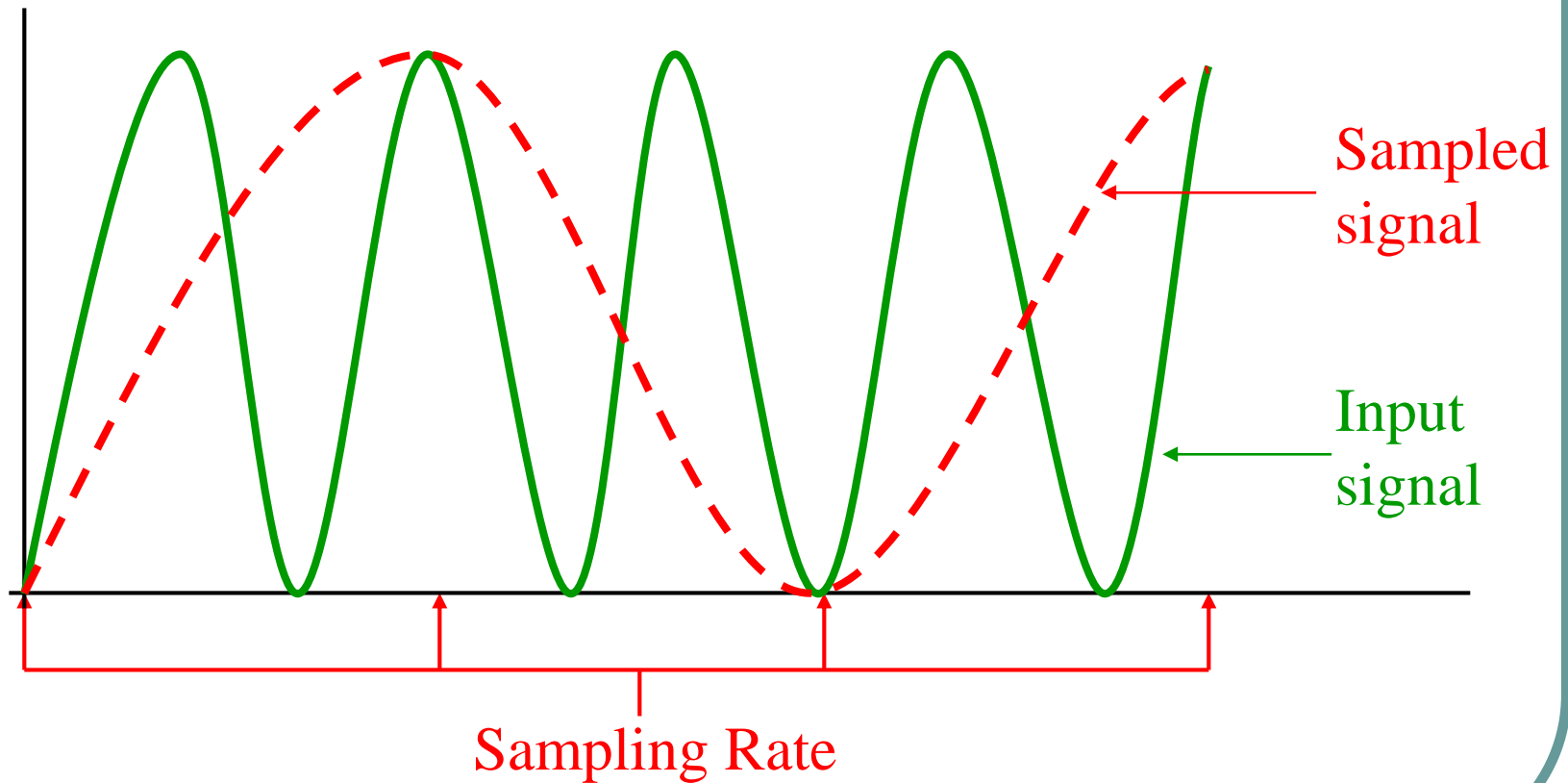


# Nyquist-Shannon采样定理

- 对于带宽有限的原始信号，采样频率至少是原始信号最高频率的两倍，才能实现原始信号的重构
  - 否则，第一个频谱会与原始频谱产生干涉
- 低于Nyquist 极限的采样会导致重构信号的走样
  - 直观上：相邻的峰和谷都有采样！

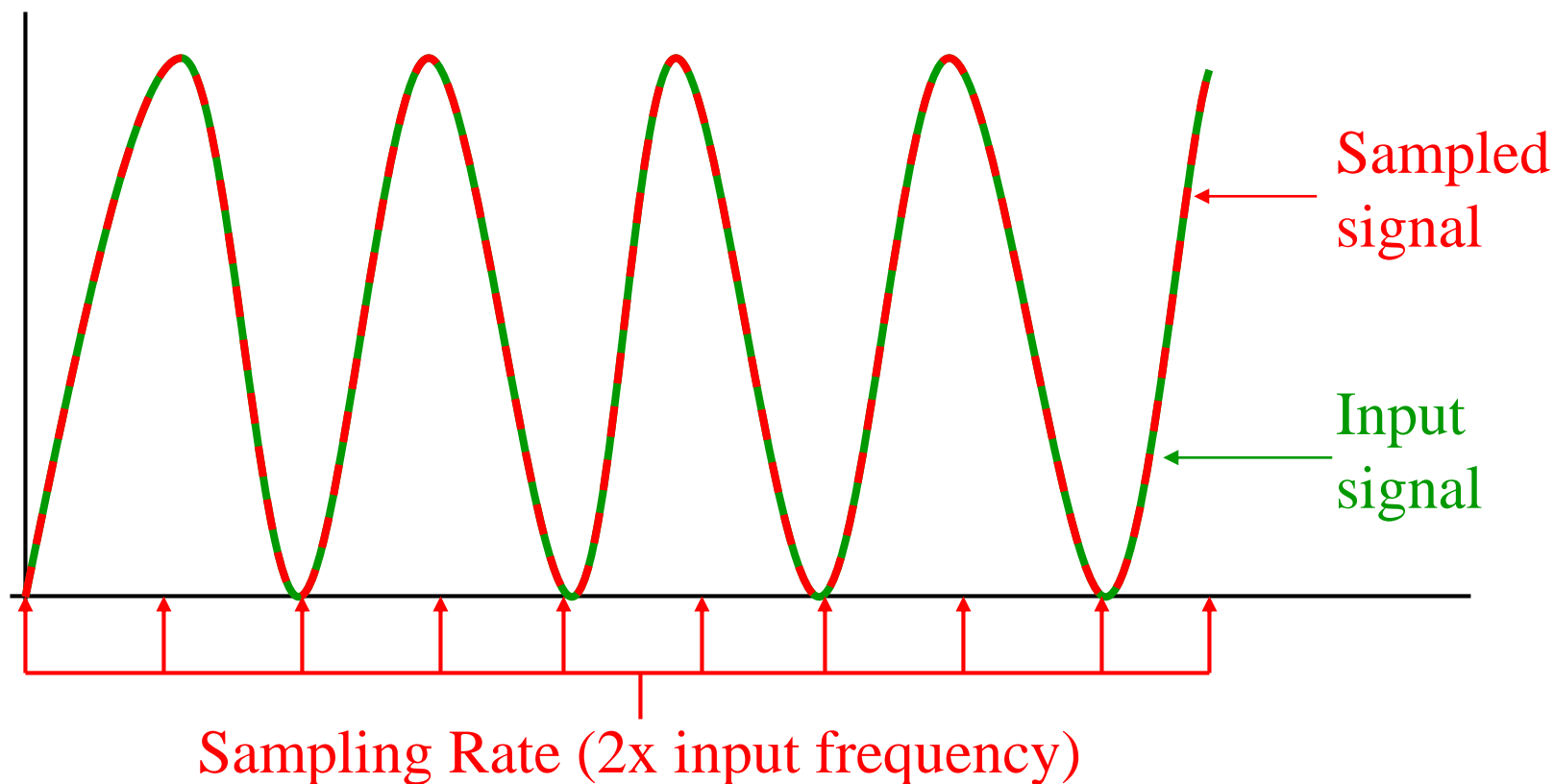


# 输入信号的采样与走样



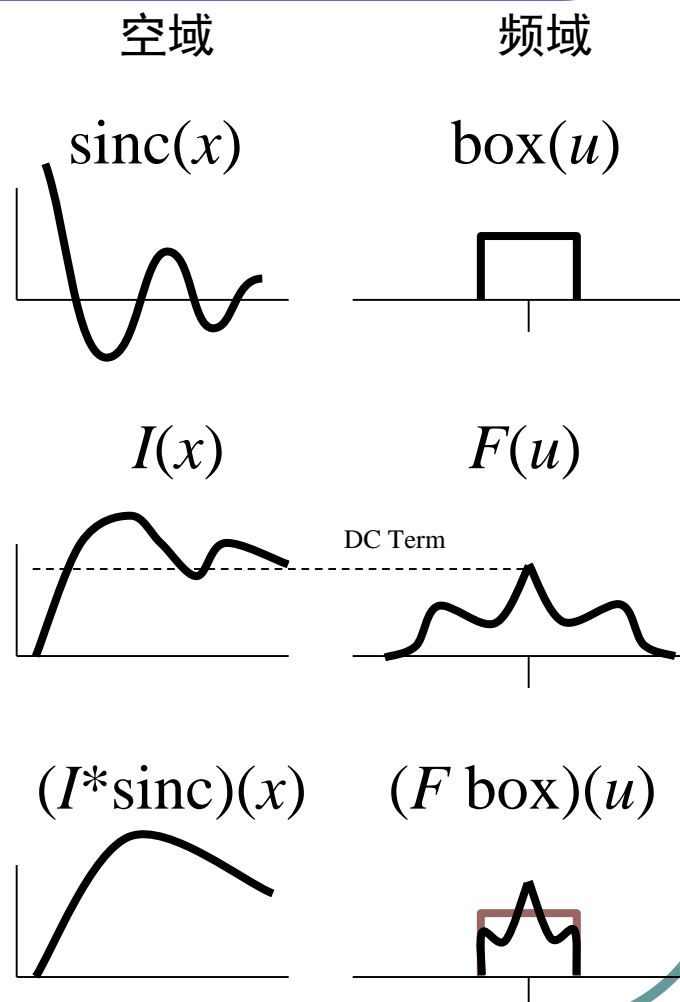


# 输入信号的采样与重构

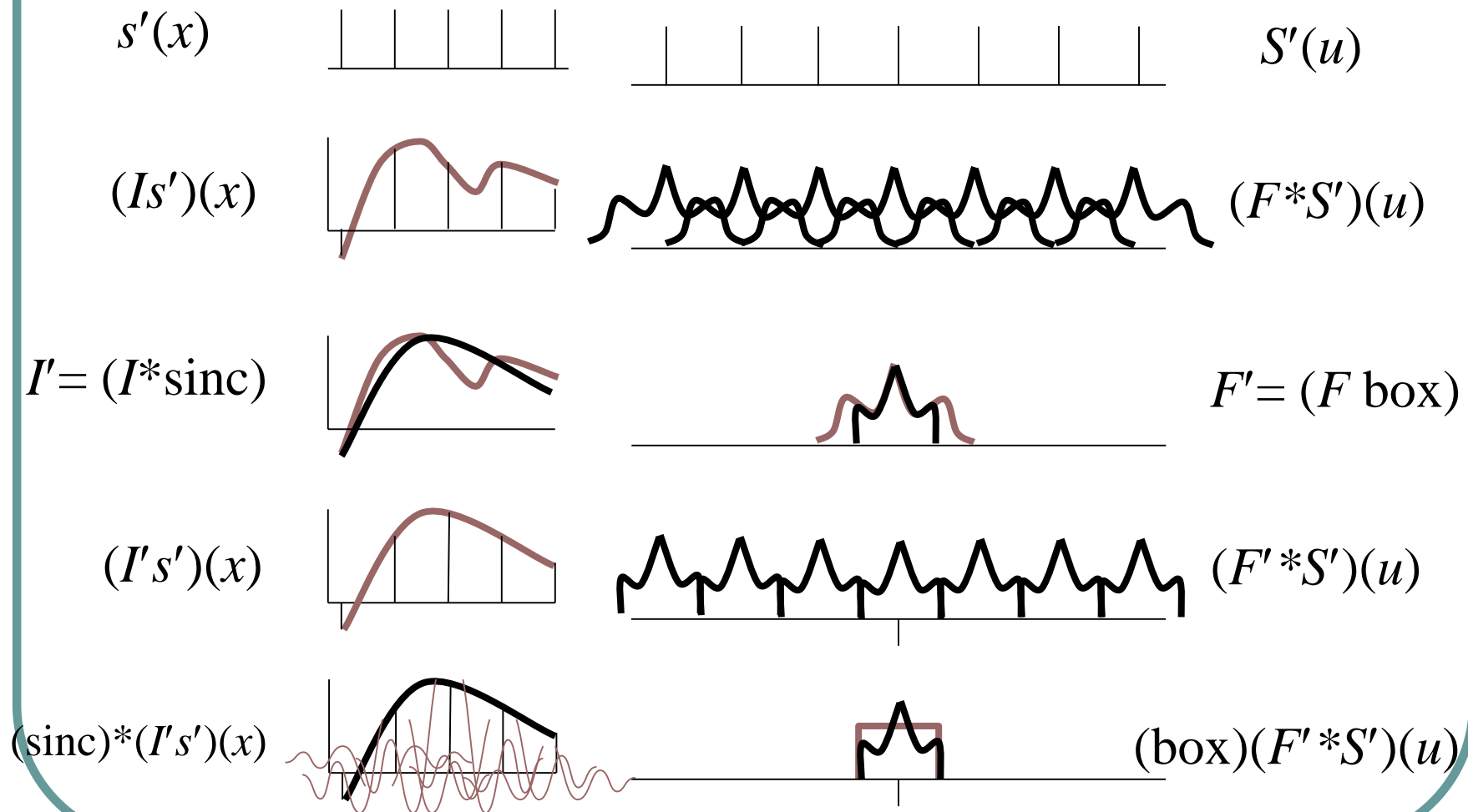


# 预滤波(Prefiltering)

- 走样通常发生在高频部分
  - 尖锐特征、边
  - 条带特征、栅栏特征、棋盘格特征
- **预滤波**：在图像采样之前，将高频部分去除
- 频域中的盒滤波器(Box filter)是理想**低通滤波器**
  - 保存低频分量
  - 高频分量为零
- 盒滤波器Fourier逆变换是 sinc 函数
$$\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$$
- 信号与sinc 函数卷积：去除高频部分

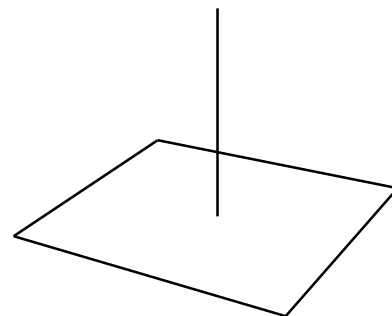
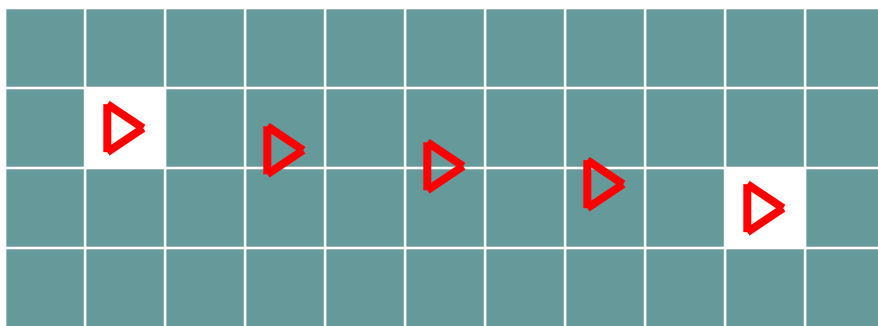


# 预滤波可以防止走样



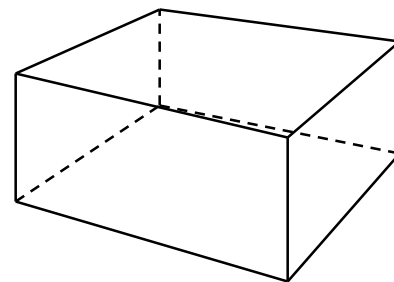
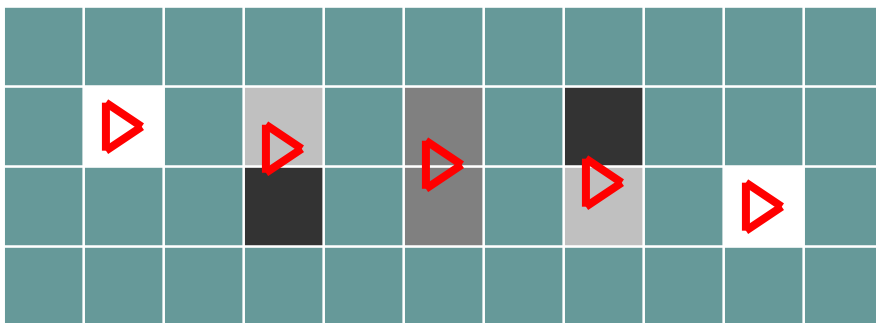
# 点采样

- 走样的根源：对于高频信息的低频点采样
- 只能得到精确点处的原始信号信息，如像素像素中心
- 能否采集到连续的原始信号？



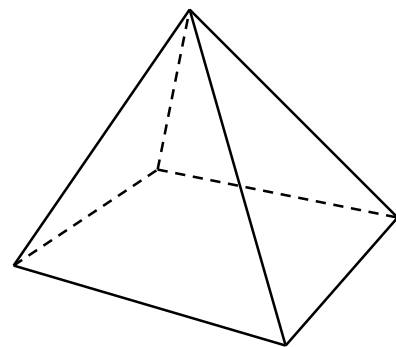
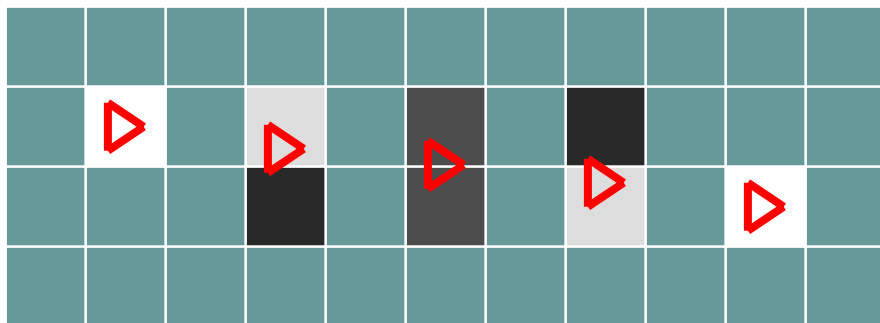
# 盒采样(Box Sampling)

- 对图像的盒采样(盒滤波, *box filter*): 每个三角形对于像素颜色的贡献与三角形覆盖像素面积成比例, 即采样是以面积加权的



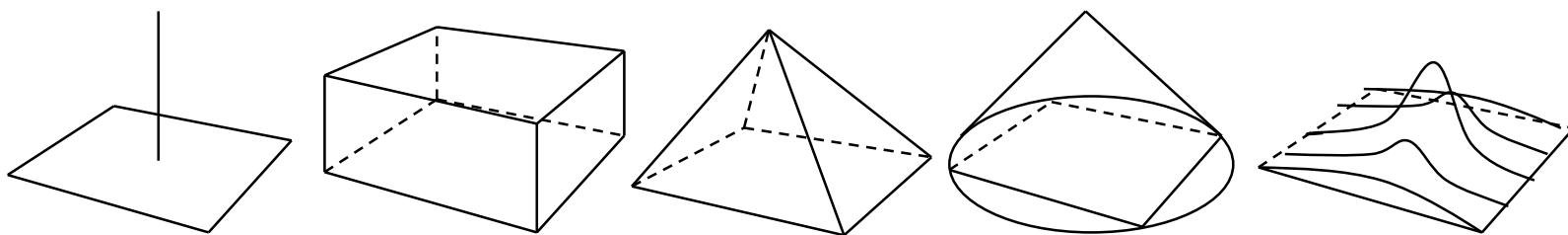
# 金字塔采样(Pyramid Sampling)

- 金字塔采样(金字塔滤波, pyramid filter):  
另一种加权采样方法, 权因子不仅与三角形覆盖像素面积相关, 而且与三角形和像素中心距离相关



# 采样滤波

- 采样信号重建可采用如下低通滤波器：点滤波器、盒滤波器、金字塔滤波器、圆锥滤波器、高斯滤波器
- 不同的滤波器具有不同的特点和适用环境：最佳低通滤波器(sinc滤波器)具有类似于高斯滤波器的形状
- 滤波器不仅可以覆盖一个像素，也可以覆盖当前像素及其邻近像素。如果一个滤波器的覆盖范围小于一个像素，则可能产生类似于点采样的走样问题。



# 图形学中各种走样现象分析

- 闪烁/噪点(Shimmering / Buzzing)

细节丰富的纹理或几何导致像素颜色快速改变(flickering)，本质是高频的颜色变化在低频像素区间上的采样

- 阶梯/锯齿(Stairstepping / Jaggies)

在几乎水平或垂直的高对比度边上，表现出明显的阶梯状边，本质是由于对具有无限频率的颜色变化进行点采样产生的。



# 图形学中各种走样现象分析

- Moiré模式(Moiré Pattern)

在规则模式上表现出的同心曲线特征，本质是由于在规则像素网格上对规则高频模式进行(低频)采样造成的

- 运动闪烁(Strobing)

快速运动的动态物体中表现出的不正确的或不连续的运动，本质是由于在规则时间区间上对规则运动进行低频采样造成的

# 空间/时间走样

- 图形学的各种走样可以归纳为：空间走样 (spatial aliasing) 和时间走样 (temporal aliasing)
  - 空间走样：在空间域上规则采样所导致，如设备空间、颜色空间等
  - 时间走样：在时间域上规则采样所导致
- 各种反走样技术可以减弱、但不能消除图形走样现象

# 主要内容

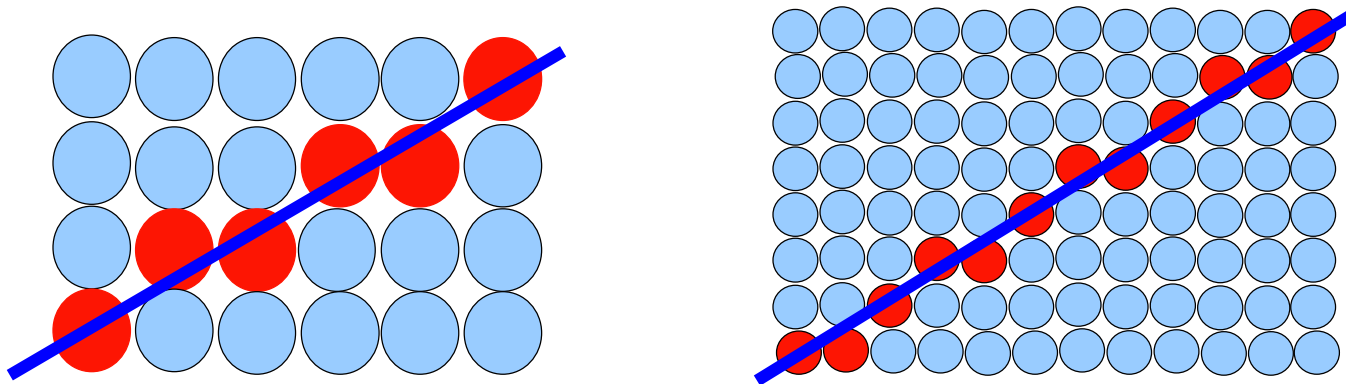
- 光栅图形中的走样现象
- 走样的分析和反走样的理论基础
- 图形反走样

# 图形反走样

- 提高屏幕分辨率
- 预滤波(Pre-filtering)
- 后滤波(Post-filtering) / 超采样(Super-Sampling)
- 时间反走样
- 半色调(Half-tone)技术

# 硬件方法：提高分辨率

- 显示器分辨率提高一倍：代价高！
  - 每个阶梯的宽度也减小一倍，直线段平直光滑一些
  - 降低走样现象，不能消除
- 人眼分辨率的极限：
  - $0.5 \text{ arcminute} = (1/120)^\circ$
  - 1~2英尺观察屏幕：600 pixels per inch!



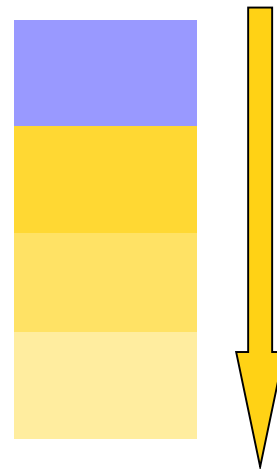
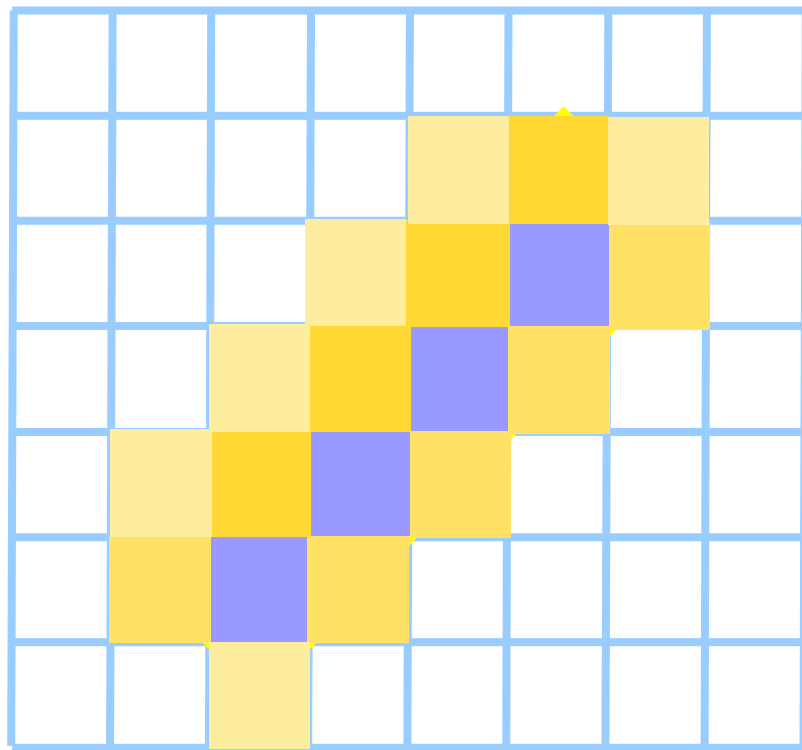
# 预滤波

- 在(显示)采样前，低通滤波信号
  - 未加权的区域采样：盒滤波器；
  - 加权的区域采样：金字塔滤波器、圆锥滤波器或高斯滤波器

# 未加权的区域采样

- 以直线段为例
  - 理想直线段宽度为零
  - 光栅上最细直线段为一个像素宽度
  - 部分像素？
- 反走样直线段
  - 将直线段看作具有一定宽度的狭长矩形
  - 当直线段与某像素有交时，求出两者相交区域的面积
  - 根据相交区域的面积，确定该像素的亮度值

# 直线段反走样

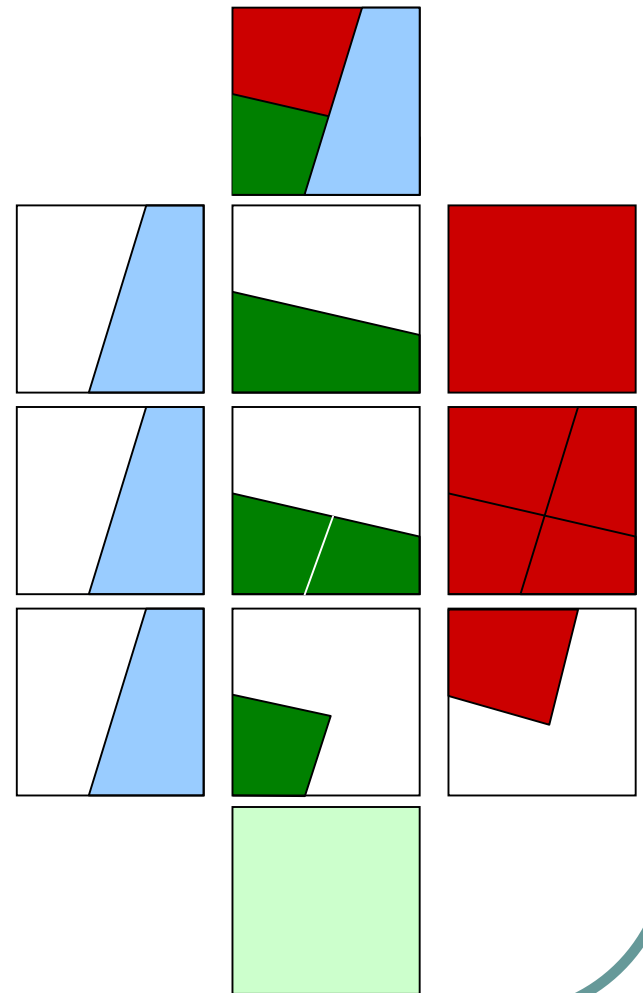


直线段反走样



# 三角片反走样 [Catmull1978]

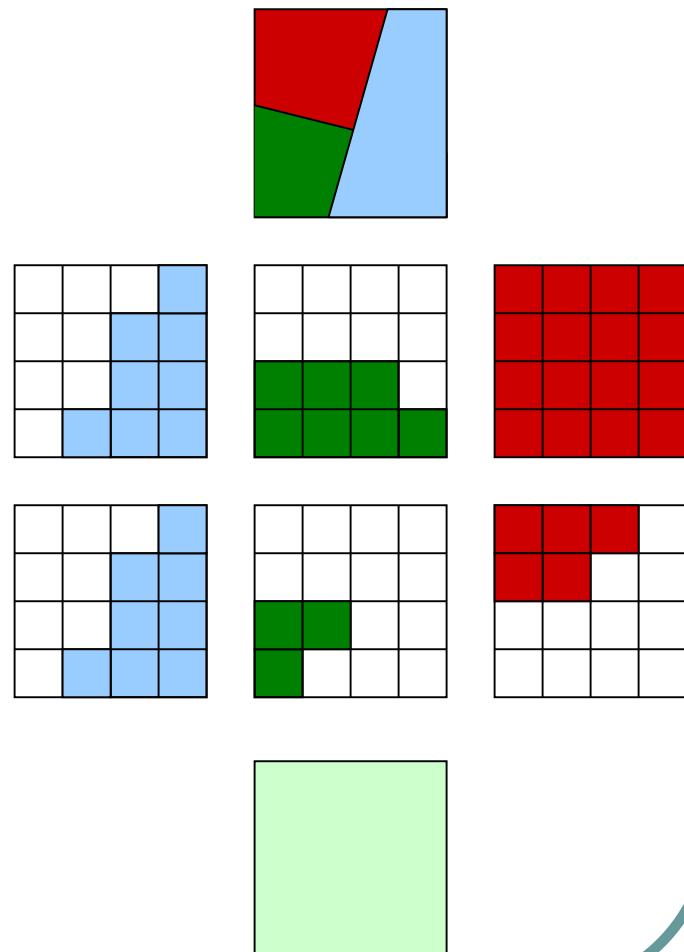
- 解析面积采样：消除边的走样
  - 根据像素裁剪多边形；
  - 在像素内对多边形片元进行深度排序
  - 多边形片元相互裁剪
  - 片元颜色进行面积加权
  - 面积加权颜色求和
- 计算代价非常高！



# 三角片反走样 [Carpenter1984]

- A-Buffer

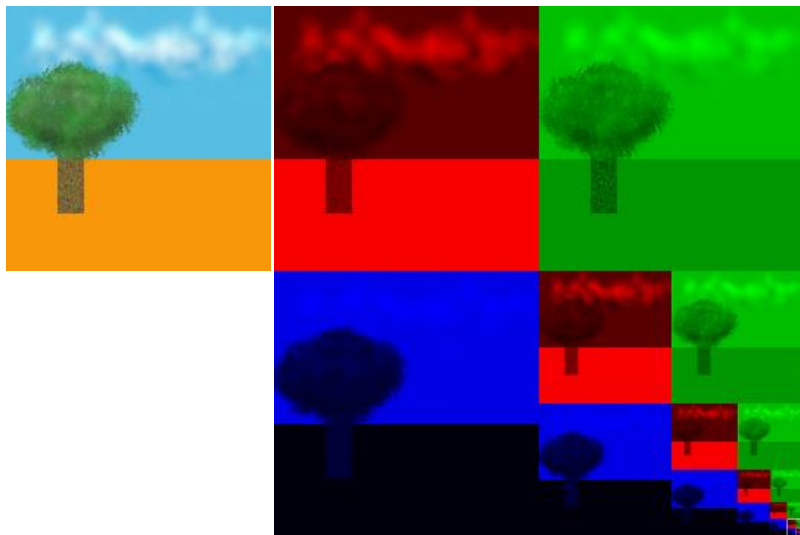
- 将像素剖分为4x4的位掩码(bitmasks)
- 将裁剪转化为位掩码的逻辑运算
- 位掩码同时用作索引查找表



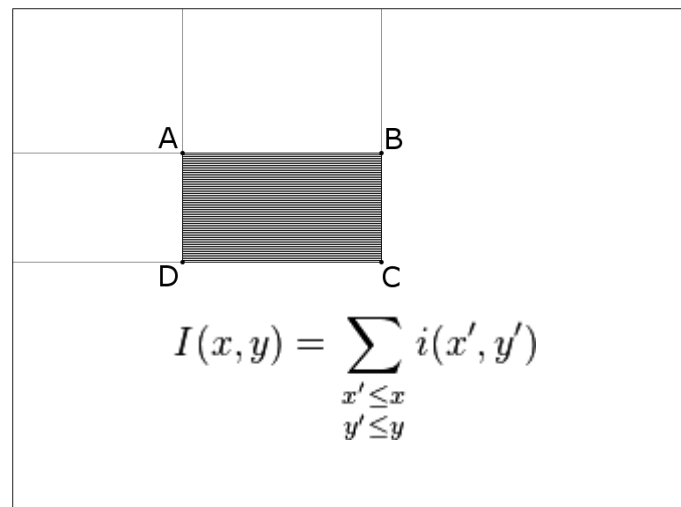
# 加权区域采样

- 简单区域采样
  - 权值处处相同，与片元之像素中心距离无关
  - 本质：盒滤波器(box filter)，与sinc滤波器差距大！
  - 问题：仍可能导致锯齿或闪烁
- 加权的区域采样：考虑片元到像素中心的距离
  - 采用金字塔、圆锥或高斯滤波器；更接近sinc滤波器；
  - 直线段反走样的Gupta-Sproul算法：将采样的滤波器的值存在查找表中

# 纹理预滤波方法



纹理的Mip-Mapping  
[Williams, 1983]



$$\sum_{\substack{x_0 < x \leq x_1 \\ y_0 < y \leq y_1}} i(x, y) = I(B) - I(A) - I(C) + I(D).$$

纹理的区域求和表(Summed  
Area Table ) [Crow 1984]

# 预滤波方法总结

- 优势

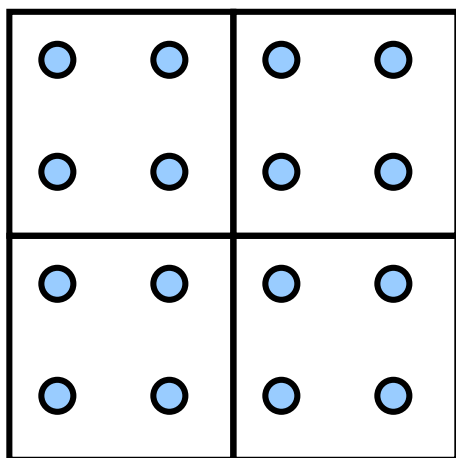
- 可以保证消除走样(无高频信息)
- 保留了所需频率

- 缺点

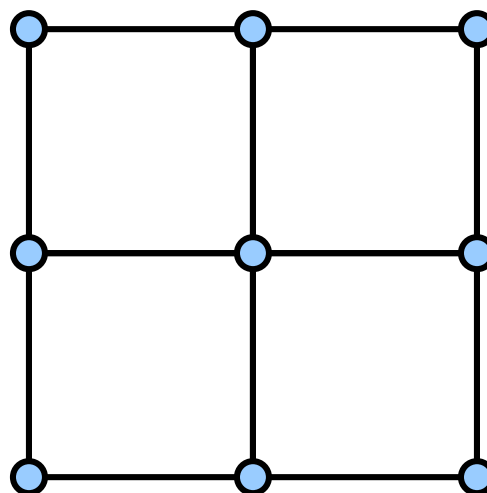
- 代价较高
- 会引入Moiré模式
- 与大部分绘制算法不相容：z-buffer

# 后滤波 / 超采样

- 后滤波(Post-filtering) / 超采样(Super-Sampling): 在一个像素内的不同位置采样多个值, 对多个采样进行滤波, 得到反走样结果



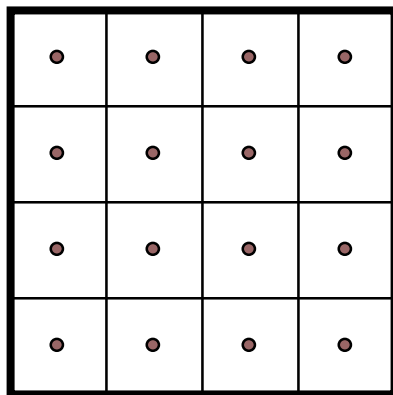
正确的超采样 (像素内部)



错误的超采样(像素角点)

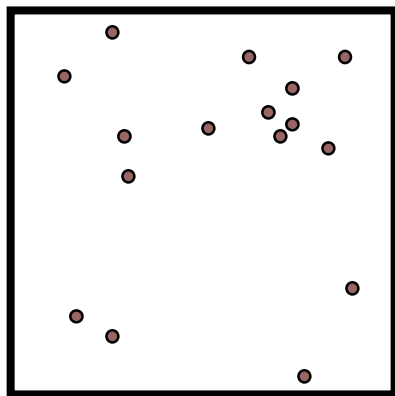
# 均匀采样(Uniform Sampling)

- 均匀采样：一个像素被均匀地剖分为子像素网格
- 均匀超采样的反走样图像质量一定优于单个点采样的图像质量
- 均匀超采样可以过滤掉部分高频信息，但是由于重复的规则采样，仍然可能产生Moiré模式



# 随机采样(Random Sampling)

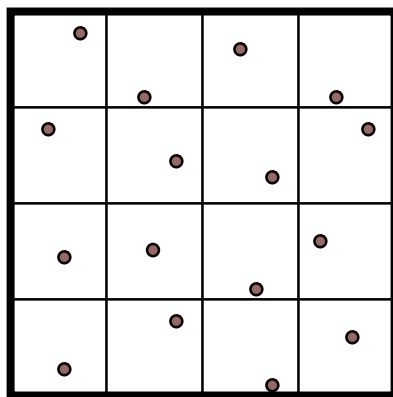
- 随机采样：在一个像素内部，随机采样多个位置的值
- 随机采样克服了规则采样模式，避免了Moiré模式。
- 以随机采样代替均匀采样的代价是可能在图像中产生随机噪声，通常这个噪声可以接受
- 随机采样潜在地存在采样点聚集或空隙的问题





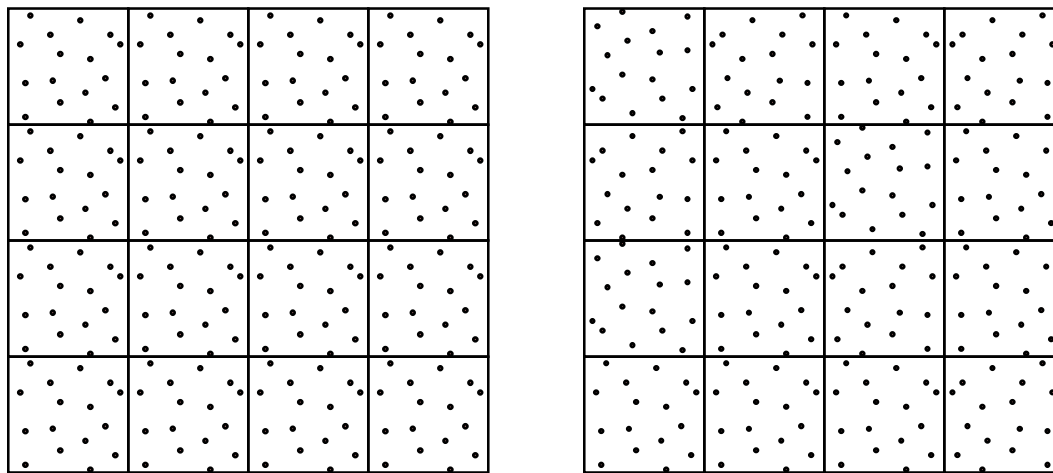
# 抖动采样(Jittered Sampling)

- 抖动采样也称分层采样(stratified sampling): 一个像素均匀剖分为多个子像素, 每个子像素的采样位置在对应子像素内随机选取
- 结合了均匀采样与随机采样的优势



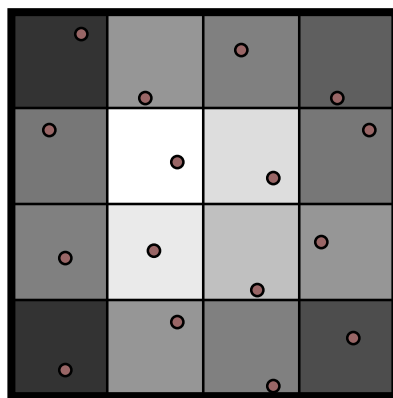
# 半抖动采样(Semi-Jittered Sampling)

- 半抖动采样：对每一个像素的超采样，采用同样的抖动采样模式
- 优势：算法效率高，降低了噪音，直线边缘更清晰
- 不足：有可能产生轻微的Moiré模式



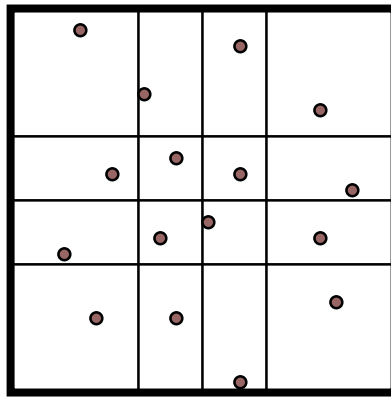
# 加权采样(Weighted Sampling)

- 所有采样点取平均作为像素的最终颜色：对应于盒滤波器
- 加权采样：均匀、随机或抖动采样
  - 子采样具有相应的权值
  - 权值：金字塔、圆锥或高斯滤波器



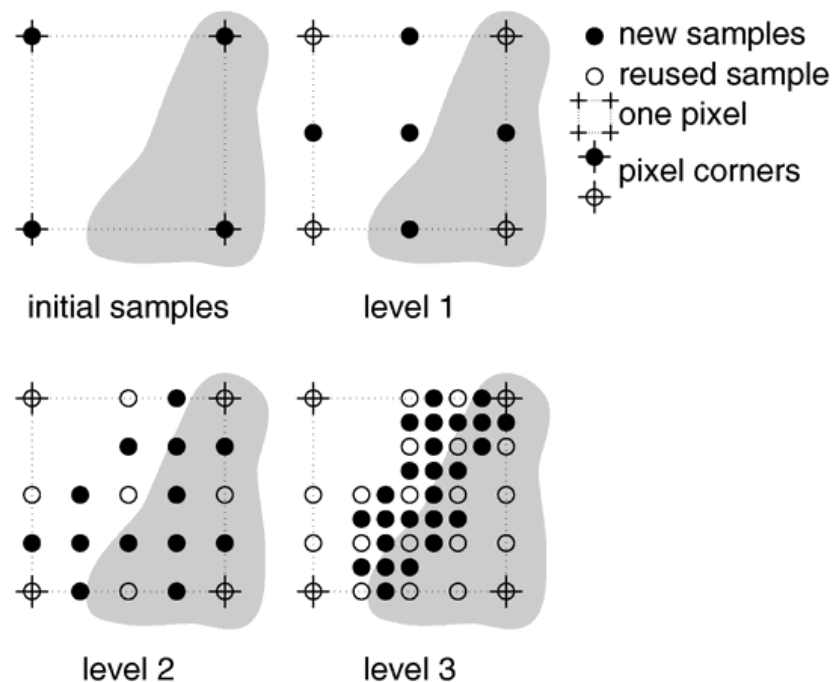
# 加权超采样分布(Weighted Distribution)

- 16x超采样：子采样的重要性不同，但是计算代价一样。
- 一般说来，中心4个采样的权值之和大于周围12个采样的权值之和
- 加权超采样分布：根据权值大小，确定超采样的分布。即权值大的地方采样密集，权值小的地方采样稀疏。



# 自适应采样(Adaptive Sampling)

- 自适应超采样：一个递归过程
  - 采样较少的点，分析采样点之间的颜色变化
  - 如果颜色变化较小，则接受当前的采样
  - 如果颜色变化较大，则加密采样，至子采样之间的颜色变化小于阈值
- 自适应采样的滤波：权值的递归计算



# 后滤波

- 后滤波/超采样：在更高的分辨率上采样，然后将其滤波为低分辨率结果
  - 优势
    - 概念上简单
    - 易于集成入现有绘制方法
    - 大部分情形下反走样效果较好
  - 不足
    - 计算和存储代价高
    - 不能消除走样，只更趋近于Nyquist采样极限结果

# 时间反走样(Temporal Antialiasing)

- 时间反走样：帧间像素的滤波
  - 空间反走样：帧内像素的滤波
- 效果：运动模糊

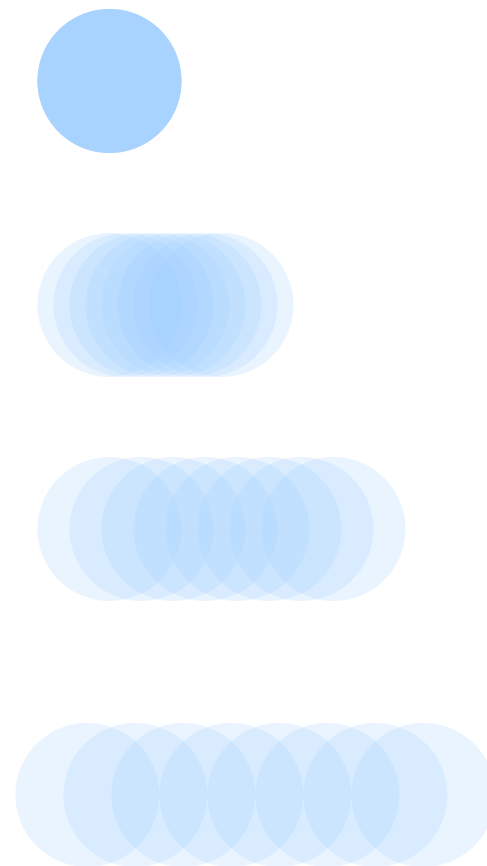


运动模糊

无运动模糊

# 运动模糊(Motion Blur)

- 基于时间空间的超采样实现运动模糊
- 模拟 1/30秒内的运动模糊：在1/30秒内均匀采样多个时间点，绘制对应的图像，并将图像进行时间轴的滤波，得到运动模糊图像
- 如果在一幅图像内，一个物体移动了16个像素，那么采样16个或更少的图像，就足以产生运动模糊



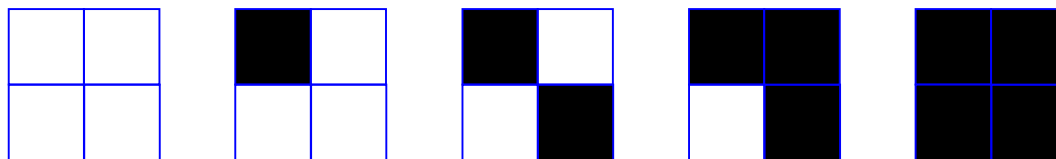


# 软件方法反走样

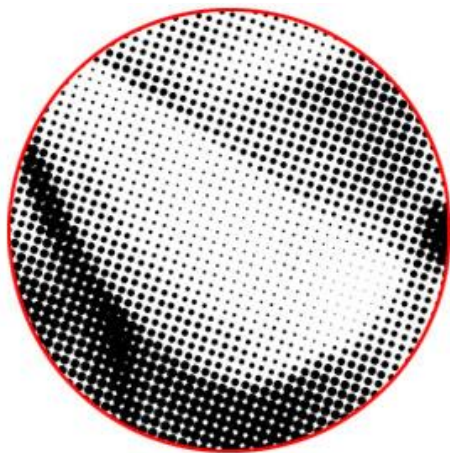
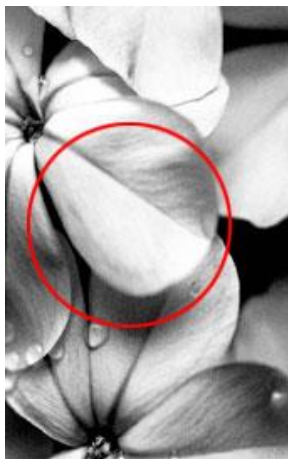
- 软件方法
  - 在高分辨率模式下计算像素的颜色值
  - 计算非加权 (/ 加权) 平均的颜色值
  - 在较低分辨率模式下显示
- 单一灰度下的图形反走样：半色调

# 半色调(halftone)

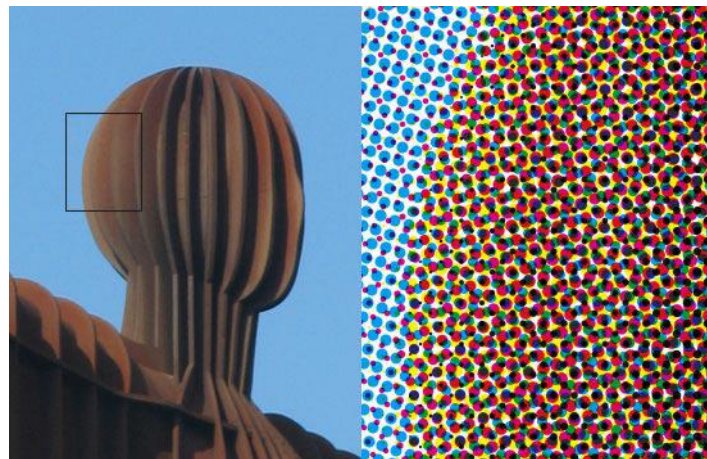
- 简单区域取样和加权区域取样技术的前提是多级灰度，利用多级灰度来提高视觉分辨率，进行图形反走样
- 对于单一灰度显示(黑白)，采用半色调技术进行反走样(基于人眼的综合能力)
  - 对于给定的分辨率，将几个像素组合成一个单元来获得多级灰度



# 半色调技术举例



单一灰度的半色调



彩色的半色调

# 主要内容

- 光栅图形中的走样现象
- 走样的分析和反走样的理论基础
- 图形走样

<http://www.cad.zju.edu.cn/home/jqfeng/CG/CG14.zip>

# 致谢

# 谢谢各位同学

欢迎同学们提出宝贵意见和建议，以便在将来的教学中进一步改进：

Email: [jqfeng@cad.zju.edu.cn](mailto:jqfeng@cad.zju.edu.cn)

微信: 13588104842