# 参数曲线和曲面

冯结青

浙江大学CAD&CG国家重点实验室

# 参数曲线和曲面

- 几何物体的参数表示
- 参数曲线
  - Bézier曲线
  - B-样条曲线和NURBS曲线
  - Catmull-Rom样条曲线
- 参数曲面
  - Bézier曲面
  - B-样条曲面和NURBS曲面

# 参数曲线和曲面

- 几何物体的参数表示
- 参数曲线
  - Bézier曲线
  - B-样条曲线和NURBS曲线
  - Catmull-Rom样条曲线
- 参数曲面
  - Bézier曲面
  - B-样条曲面和NURBS曲面

# 直线段的参数表示

- 考虑直线段 $\mathbf{P}_0(x_0, y_0, z_0) \to \mathbf{P}_1(x_1, y_1, z_1)$
  - 参数表示

$$\mathbf{R}(t) = (1-t)\,\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \qquad 0 \le t \le 1$$

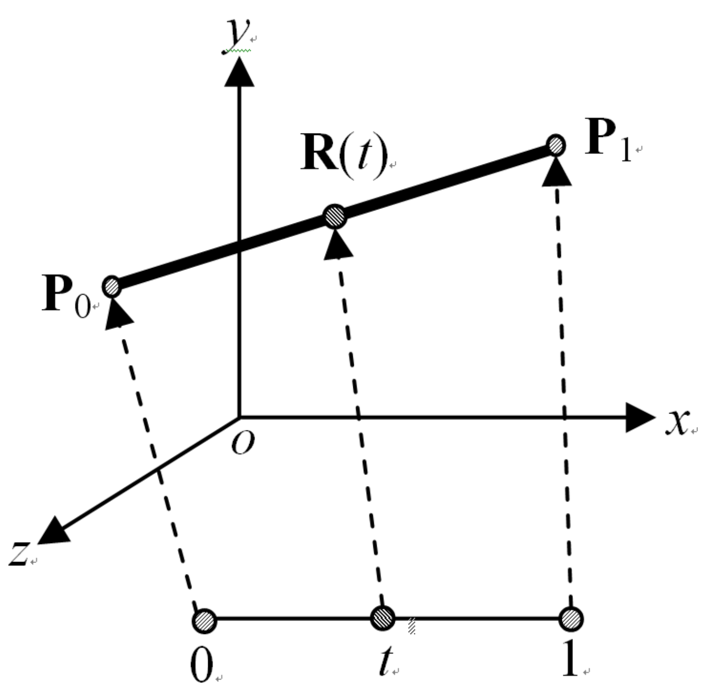
  - 分量表示

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)\,x_0 + tx_1 \\ y(t) = (1-t)\,y_0 + ty_1 \\ z(t) = (1-t)\,z_0 + tz_1 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

  - 参数空间：

$$0 \le t \le 1$$

# 直线段参数表示的几何意义




- 参数空间中每一个参数对应于直线段上一个点
- 参数空间的两个端点对应于直线段的两个端点

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$$

$$\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_1$$

# 曲线的参数表示

- 一般三维参数曲线形式：

$$\mathbf{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

  - 参数空间中每一个 $t$ 对应曲线上一个点 $\mathbf{R}(t)$
  - 在计算机图形学中，参数空间通常是有限区间，此时参数曲线称为参数曲线段
  - 在计算机图形学中，常用的函数形式是分段多项式或分段有理多项式

# 曲面的参数表示

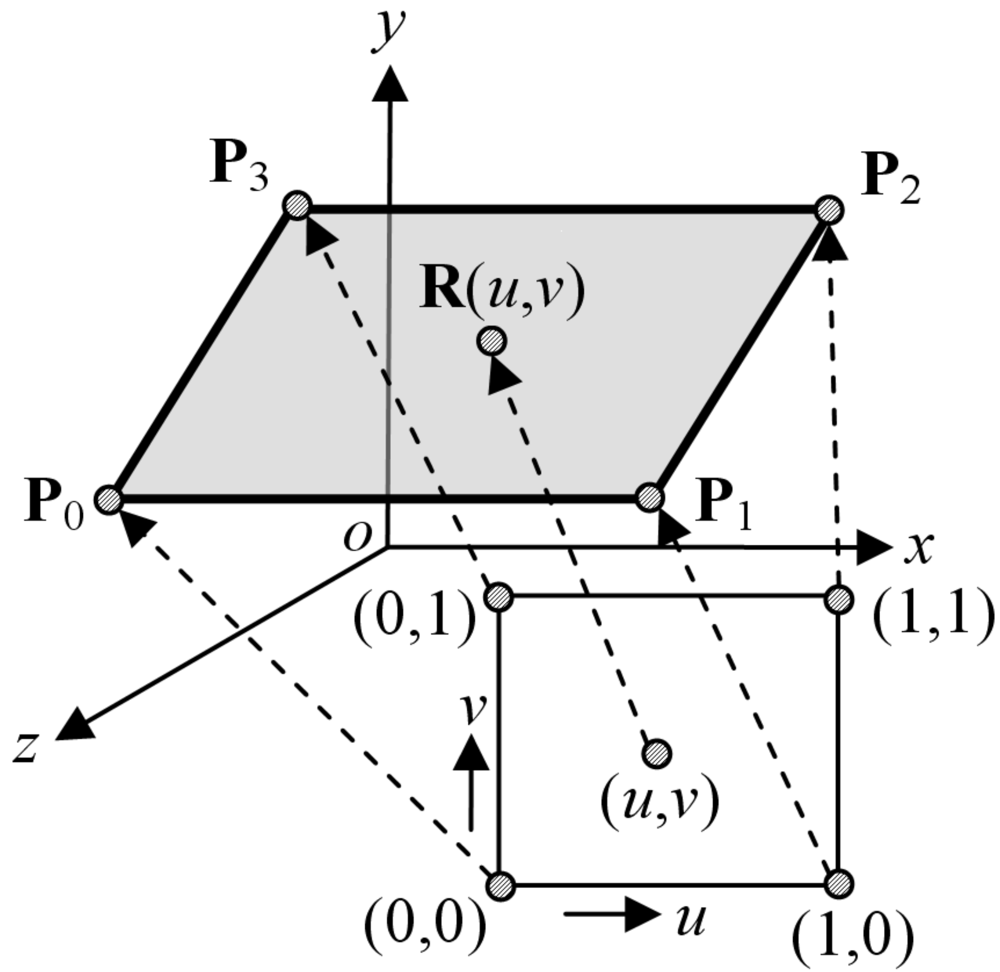
- 双线性四边面片：

$$\mathbf{R}(u,v)=(1-v)\left[(1-u)\mathbf{P}_0+u\mathbf{P}_1\right]+v\left[(1-u)\mathbf{P}_3+u\mathbf{P}_2\right]$$

$$(u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

- 四边面片的四个顶点$\mathbf{P}_0$、$\mathbf{P}_1$、$\mathbf{P}_2$和$\mathbf{P}_3$对应于参数曲面的四个角点$\mathbf{R}(0,0)$、$\mathbf{R}(1,0)$、$\mathbf{R}(1,0)$和$\mathbf{R}(0,1)$

# 双线性四边面片的几何意义



# 曲面的参数表示

- 一般形式的空间参数曲面

$$\mathbf{R}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

  - 参数空间中每一点$(u, v)$对应曲面上一点 $\mathbf{R}(u,v)$ 。
  - 如果参数空间是一个有限的定义域(如矩形)，则对应的参数曲面称为参数曲面片。
  - 计算机图形学中常用的参数曲面为张量积多项式或张量积有理多项式参数曲面片。

# 几何物体参数表示的优点

- 参数表示是显式的
  - 给定参数值，可以直接计算几何物体上的对应点
  - 可方便地转化为多边形逼近表示，便于显示与绘制
- 微分属性可以解析计算：弧长、法向、曲率等
- 当采用特殊形式的多项式时，参数表示的曲线和曲面外形控制十分直观
  - Bézier、B-样条、非均匀有理B-样条 (Non-Uniform Rational B-Spline, 简称NURBS) 曲线/曲面等

# 参数曲线和曲面

- 几何物体的参数表示
- 参数曲线
  - Bézier曲线
  - B-样条曲线和NURBS曲线
  - Catmull-Rom样条曲线
- 参数曲面
  - Bézier曲面
  - B-样条曲面和NURBS曲面

# Bézier曲线

Paul de Casteljau

1959

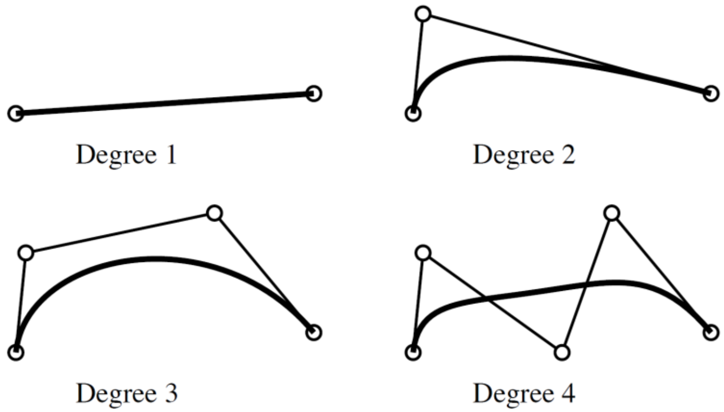
Pierre Bézier

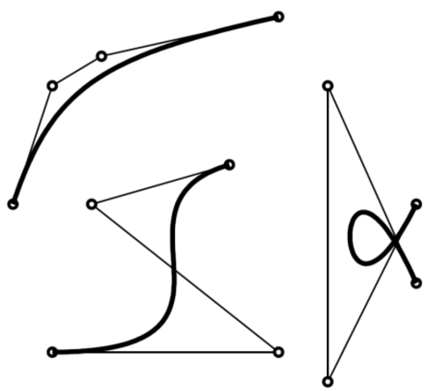
1962

https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_de_Casteljau

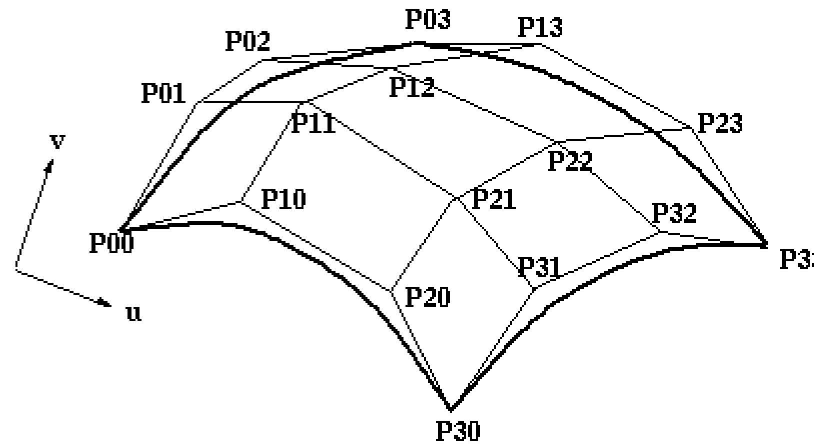
https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_B%C3%A9zier

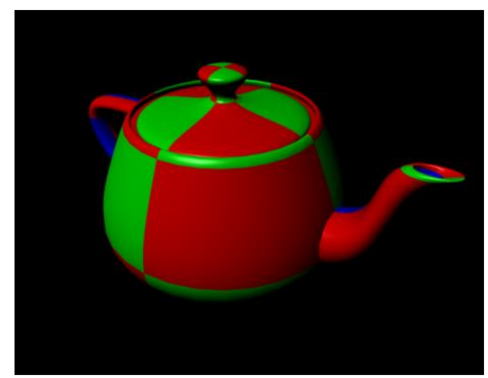
# Bézier曲线和曲面



不同次数的Bézier曲线和三次Bézier曲线



双三次Bézier曲面和Utah茶壶

# Bézier曲线定义

- $n$ 次Bézier曲线：$(n+1)$个控制顶点$\{\mathbf{R}_i\}$

$$\mathbf{R}(t)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{R}_i B_{i,n}(t) \quad 0\le t\le 1$$

多项式 $\{B_{i,n}(t)\}_{i=0}^{n}$称为Bernstein基函数：

$$B_{i,n}(t)=C_n^i(1-t)^{n-i}t^i$$

$$C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

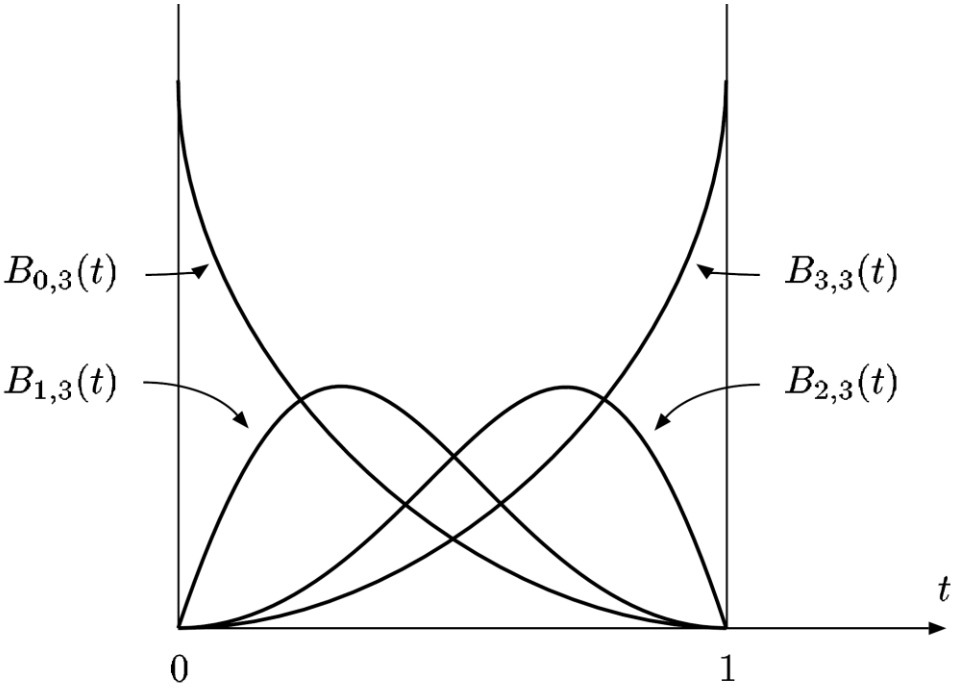
# Bernstein基函数

三次Bernstein基函数

$$\begin{cases} B_{0,3}(t) &= (1-t)^3 \\ B_{1,3}(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_{2,3}(t) &= 3t^2(1-t) \\ B_{3,3}(t) &= t^3 \end{cases}$$

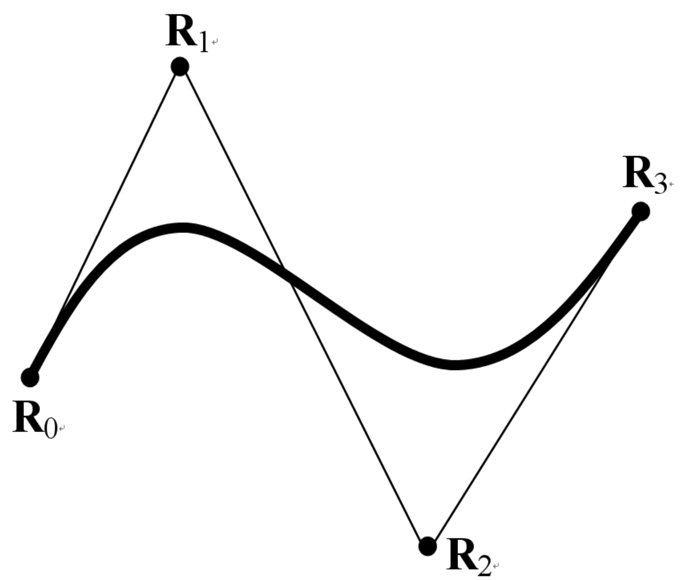
其中：$0 \le t \le 1$

三次Bernstein基函数的图：



# Bézier曲线性质

- 端点性质
  - 插值：$\mathbf{R}(0)=\mathbf{R}_0,\ \mathbf{R}(1)=\mathbf{R}_n$
  - 切向：$\mathbf{R}^{'}(0)=n(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_0),\ \mathbf{R}^{'}(1)=n(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_{n-1})$

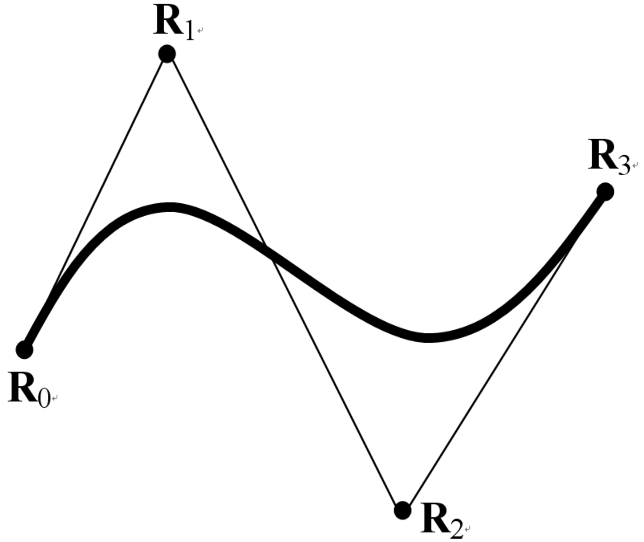


# Bézier曲线性质

- 对称性：曲线控制顶点的几何地位是对称的，两个端点具有相同的几何性质

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{R}_{n-i} B_{i,n}(1-t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{R}_i B_{i,n}(t)$$

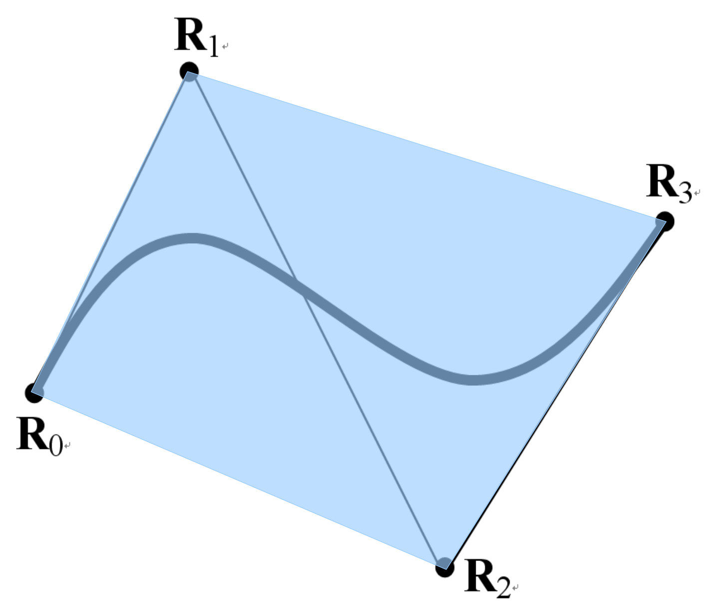
$$B_{n-i,n}(1-t) = B_{i,n}(t)$$



# Bézier曲线性质

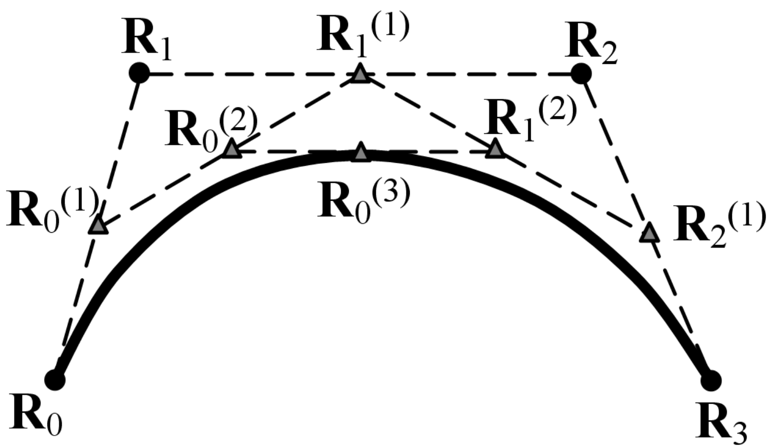
- 凸包性：Bézier曲线位于控制多边形的凸包（包含控制顶点的最小凸集）内

- 几何不变性：Bézier曲线的形状仅与控制多边形有关，与坐标系无关。




三次Bézier曲线凸包：着色区域

# Bézier曲线剖分：de Casteljau算法




Bézier曲线剖分示意图

SubdivideBézierCurve($t_0$, $\mathbf{R}(t)$)

{

for($i$=0; $i$<=$n$; $i$++)

$\mathbf{R}_i^{(0)}=\mathbf{R}_i$;

for($s$=1; $s$<=n; $s$++)

for($i$=0; $i$<=$n$-$s$; $i$++)

$\mathbf{R}_i^{(s)}=(1-t_0)\,\mathbf{R}_i^{(s-1)}+t_0\mathbf{R}_{i+1}^{(s-1)}$;

}

Bézier曲线剖分算法描述

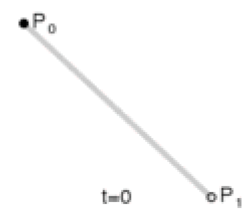
# Bézier曲线剖分性质

- 曲线剖分为两段子Bézier曲线，子曲线的控制多边形更加趋近于原始Bézier曲线

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{left}(t) = \sum_{s=0}^{n} \mathbf{R}_0^{(s)} B_{s,n}(t) \\ \mathbf{R}^{right}(t) = \sum_{s=0}^{n} \mathbf{R}_s^{(n-s)} B_{s,n}(t) \end{cases}$$

- 当剖分次数足够大时，子曲线控制多边形可以作为Bézier曲线逼近

# Bézier曲线的生成

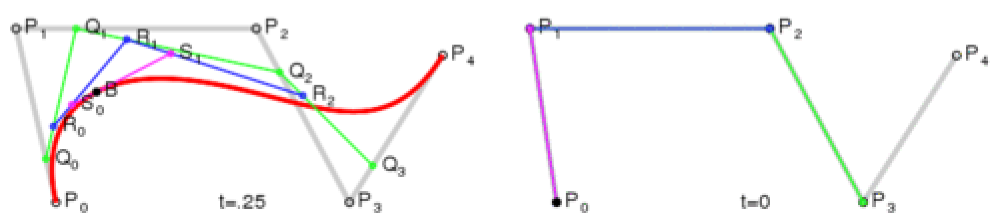



一次Bézier曲线的生成：直线段

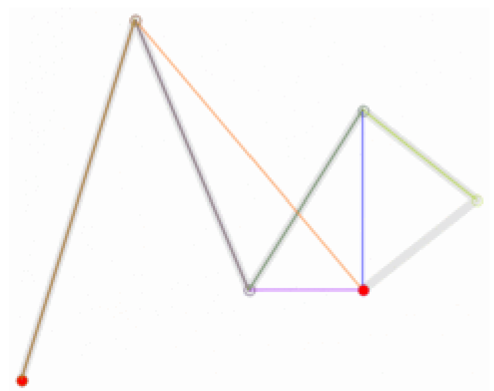

二次Bézier曲线的生成：抛物线段

# Bézier曲线的生成


三次Bézier曲线的生成




四次Bézier曲线的生成



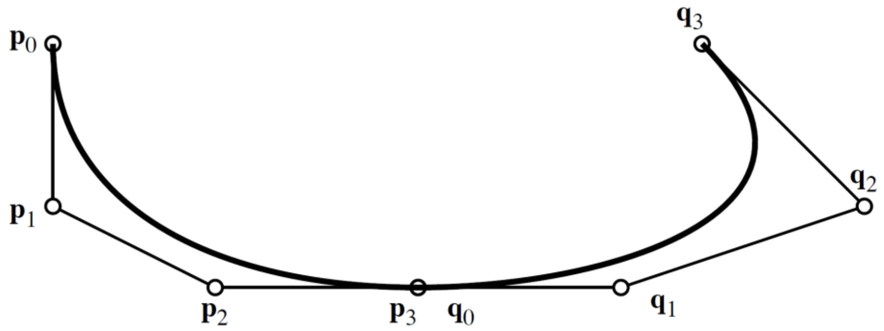
五次Bézier曲线的生成

# Bézier曲线的矩阵表示

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}_i B_i(t) \\
&= (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3 \\
&= \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

# Bézier曲线的不足

- 整体性质：当移动曲线的一个控制顶点时，整条曲线的形状都会发生改变
- Bézier样条曲线：多条Bézier 曲线拼接
  - 位置连续
  - 一次(或高次)导数连续：参数连续、几何连续

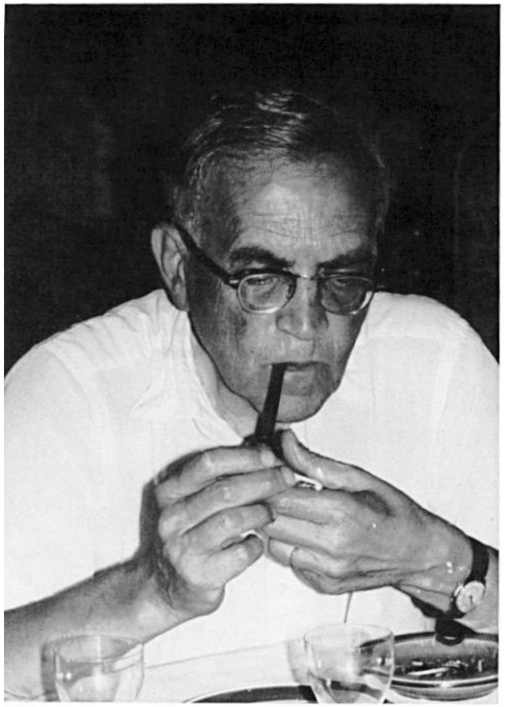



$C^2$连续 Bézier样条曲线（位置、一阶导数、二阶导数）

# 参数曲线和曲面

- 几何物体的参数表示
- 参数曲线
  - Bézier曲线
  - B-样条曲线和NURBS曲线
  - Catmull-Rom样条曲线
- 参数曲面
  - Bézier曲面
  - B-样条曲面和NURBS曲面

# B-Spline (Basis Spline)



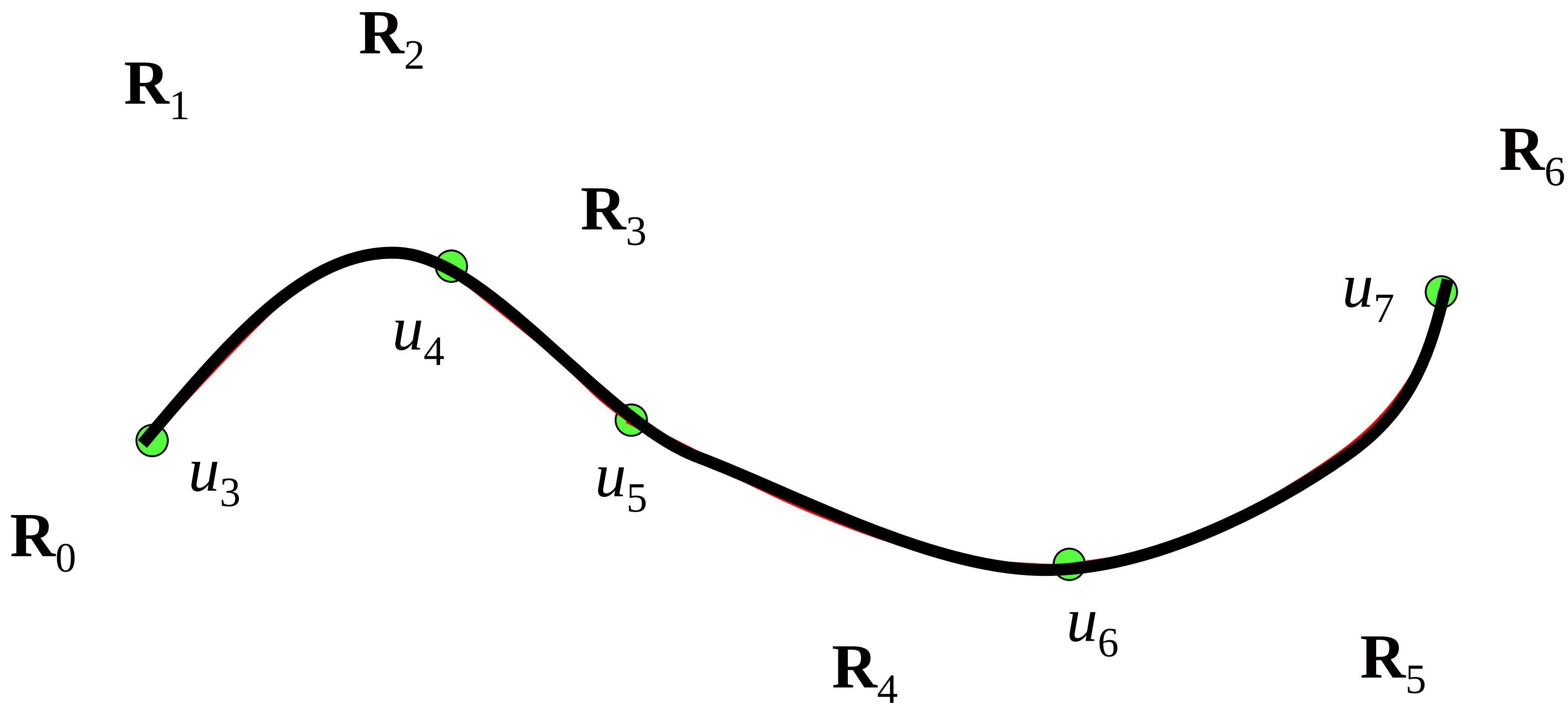
**J. Schoenberg**

**C. de Door**

http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Jacob_Schoenberg

http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_R._de_Boor

# B-样条曲线


$\mathbf{R}_2$
$\mathbf{R}_1$
$\mathbf{R}_6$
$\mathbf{R}_3$
$u_7$
$u_4$
$u_3$
$u_5$
$\mathbf{R}_0$
$u_6$
$\mathbf{R}_4$
$\mathbf{R}_5$

# B-样条曲线的定义

- B-样条曲线是分段连续的多项式曲线，其基函数由**节点向量**定义
- 定义在**节点向量**$\mathbf{u} = \{u_0, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_{n+k+1}\}$ (其中 $u_i \le u_{i+1}$) 上的$k$次($k$+1阶)、具有($n$+1)个控制顶点的B-样条曲线为：

$$\mathbf{R}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{R}_i N_{i,k}(u) \qquad u \in [u_k, u_{n+1}]$$

# B-样条曲线的定义

- $\{\mathbf{R}_i\}$为控制顶点，$\{N_{i,k}(u)\}$为单位化的B-样条基函数，其定义为：

$$
\begin{cases}
N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{当} u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \\
N_{i,k}(u) = \dfrac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \dfrac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\
\text{定义} \dfrac{0}{0} = 0
\end{cases}
$$

# B-样条中的节点向量类型

- 均匀分布(Uniform)：节点值以等差级数方式排列，且一般第一个元素值为零

  {0, 1, 2, 3, 4,…} 或

  {0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0,…}

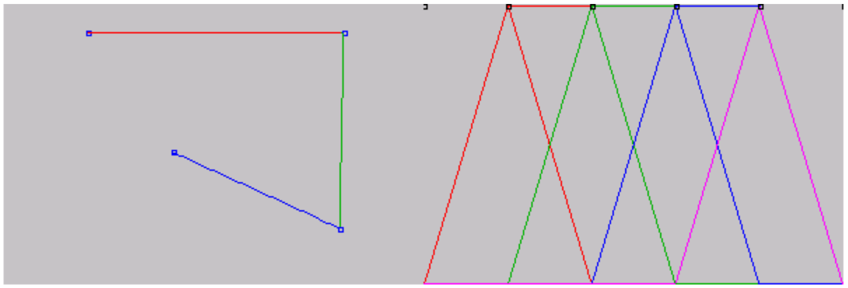
- 开放均匀分布(Open uniform)：两端节点重复

  {0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3} 或

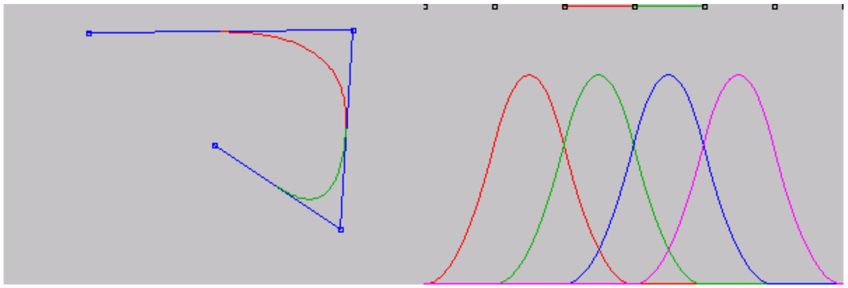
  {0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1}

- 非均匀分布(Nonumiform)：非递减序列

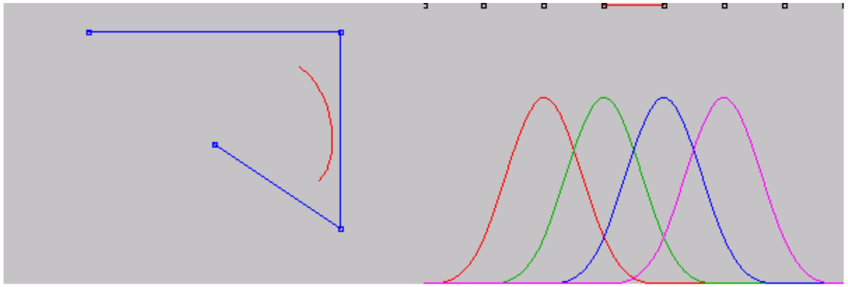
# 均匀B-样条基函数



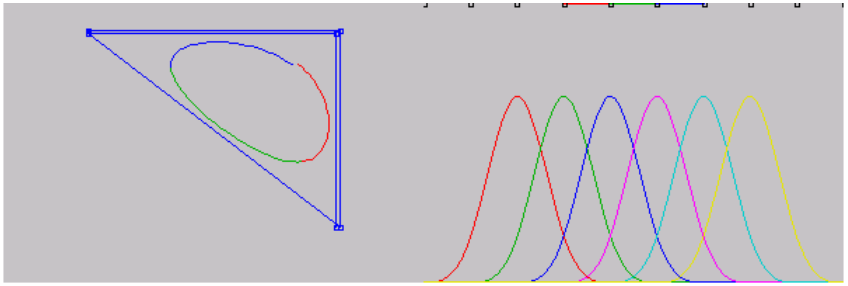
Linear B-Spline $n$=3, $k$=1



Quadratic B-Spline $n$=3, $k$=2



Cubic B-Spline $n$=3, $k$=3



Cubic B-Spline $n$=5, $k$=3

# 开放均匀分布B-样条基函数

$n$=3 (4个控制顶点)

$k$=2 二次/三阶曲线

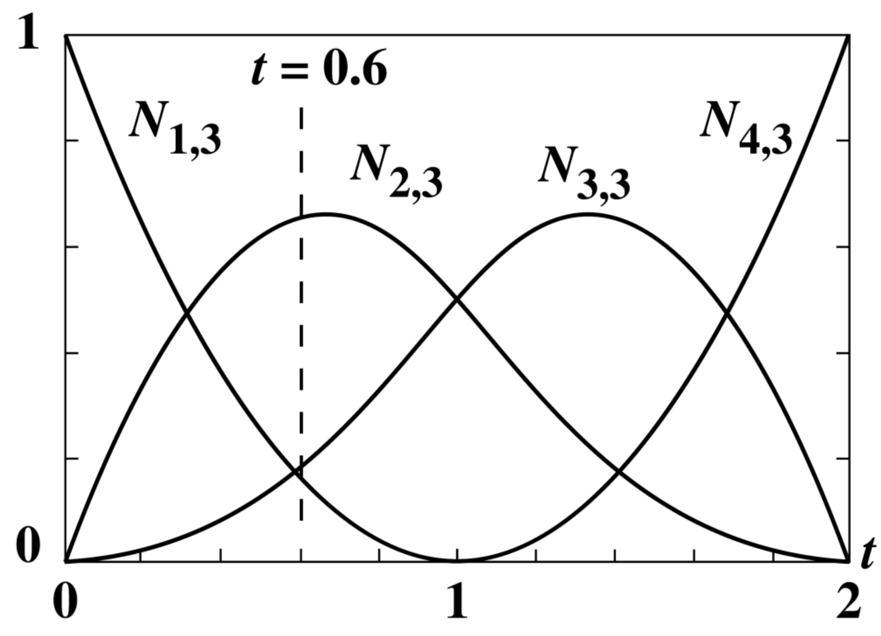
$\mathbf{u}$=[0 0 0 1 2 3 3 3]

$t$ = 0.6

$N_{1,3}+N_{2,3}+N_{3,3}+N_{4,3}$

= 0.16+0.66+0.18+0.0

= 1.0

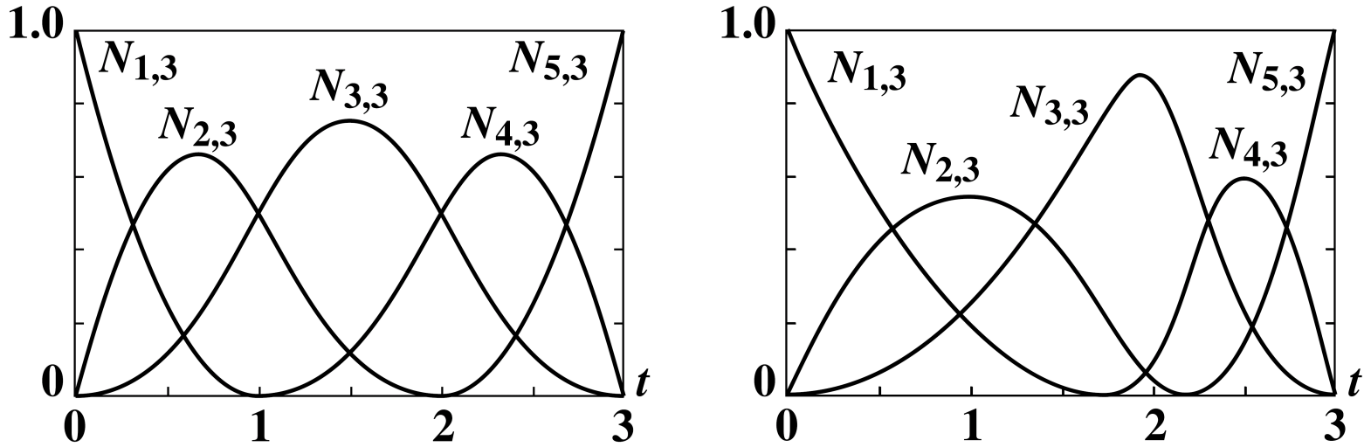



注：图中$N_{i,3}$中的“3”为“阶”

# 非均匀B-样条基函数

均匀和非均匀B-样条基函数: $k$=2, $n$+1=5

$[X] = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 3]$　　$[X] = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1.8\ \ 2.2\ \ 3\ \ 3\ \ 3]$




注：图中$N_{i,3}$中的“3”为“阶”

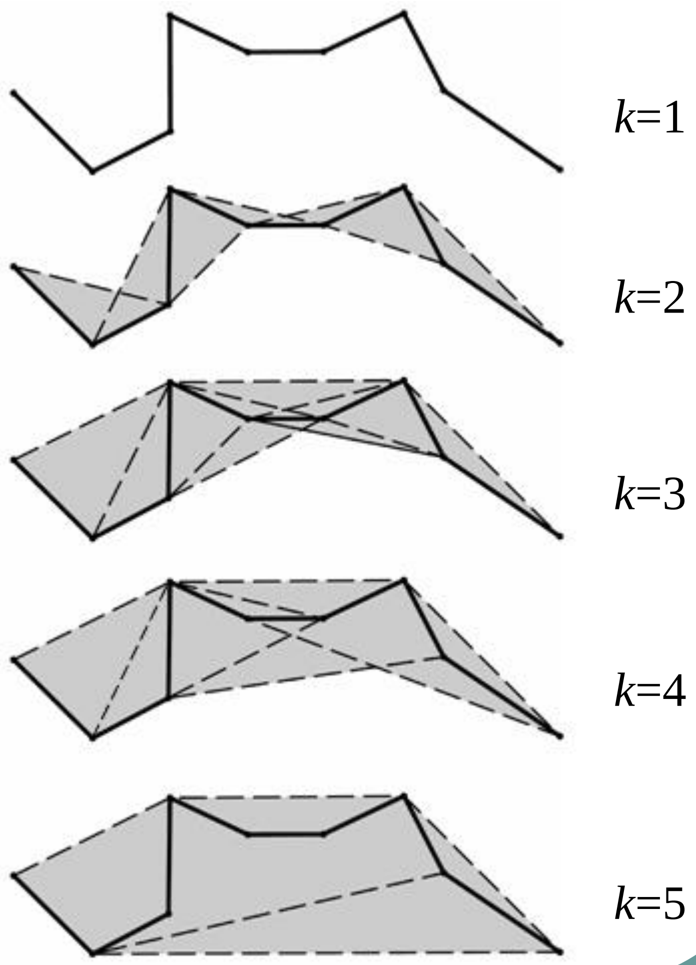
- 基函数$N_{3,3}$被拉向右端，且幅度增大
- 与基函数$N_{3,3}$对应的控制顶点$P_3$ 影响增大
- 其它控制顶点的影响减小

# B-样条曲线性质

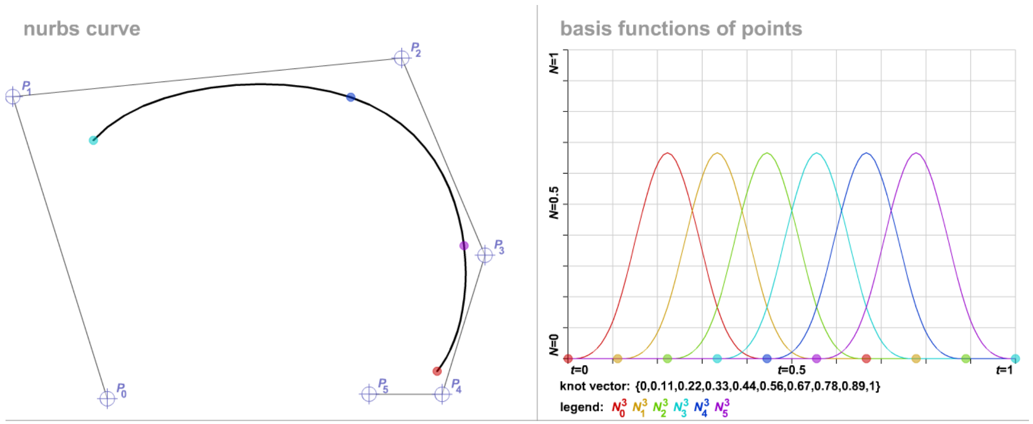
- B-样条曲线具有**凸包性**和**几何不变性**。
- 当曲线的两个端节点的重复度是$k$+1时，B-样条曲线具有类似于Bézier曲线的**端点插值**性质和**端点导数**性质
- 对于开放均匀节点，当$n=k+1$时，B-样条曲线就是一条Bézier曲线。
- **局部性**：当移动一个控制顶点时，只会影响曲线的一部分，而不是整条曲线
- **光滑性**：$k$次B-样条曲线具有$C^{k-1}$阶光滑性

# B-样条曲线的凸包性

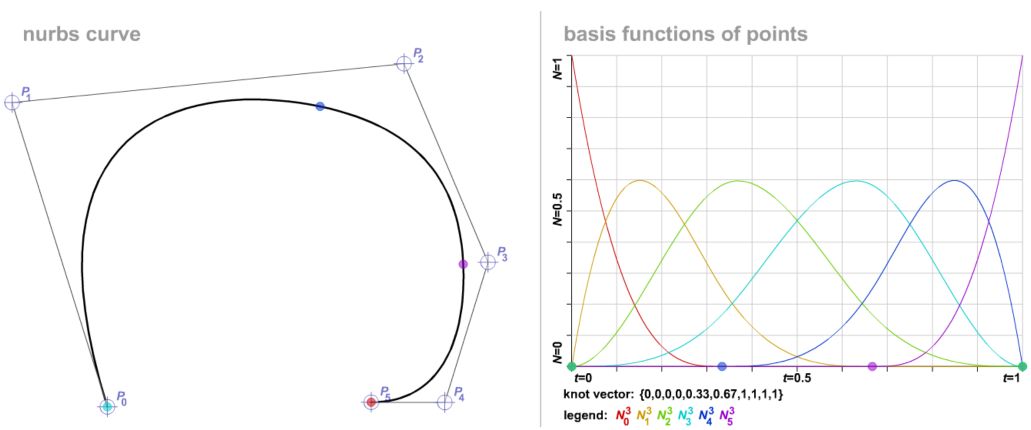
- 与Bézier曲线的区别：
  - $k$次B-样条曲线的凸包性是指：曲线位于相邻 $(k+1)$ 个控制顶点的凸包的并
  - Bézier曲线位于其控制顶点的凸包



# 均匀和开放均匀节点B-样条曲线

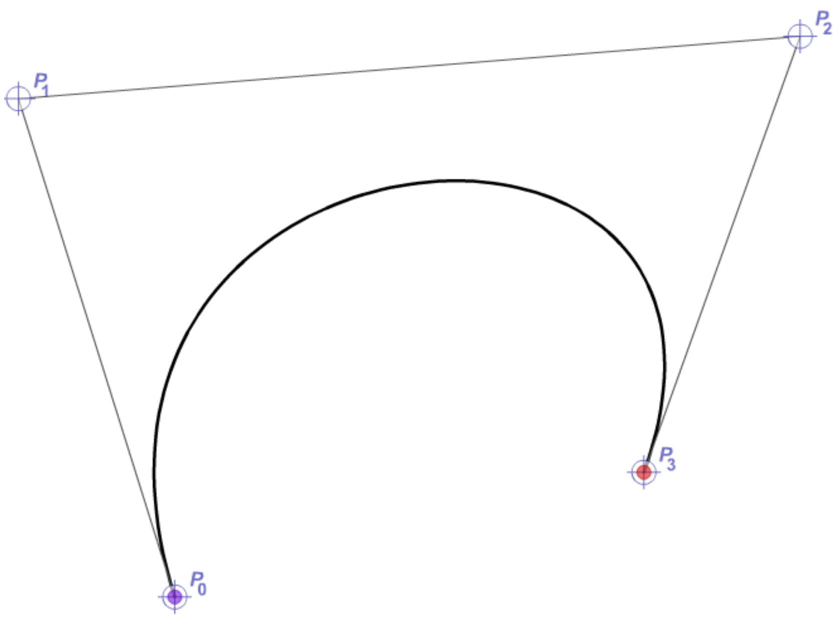


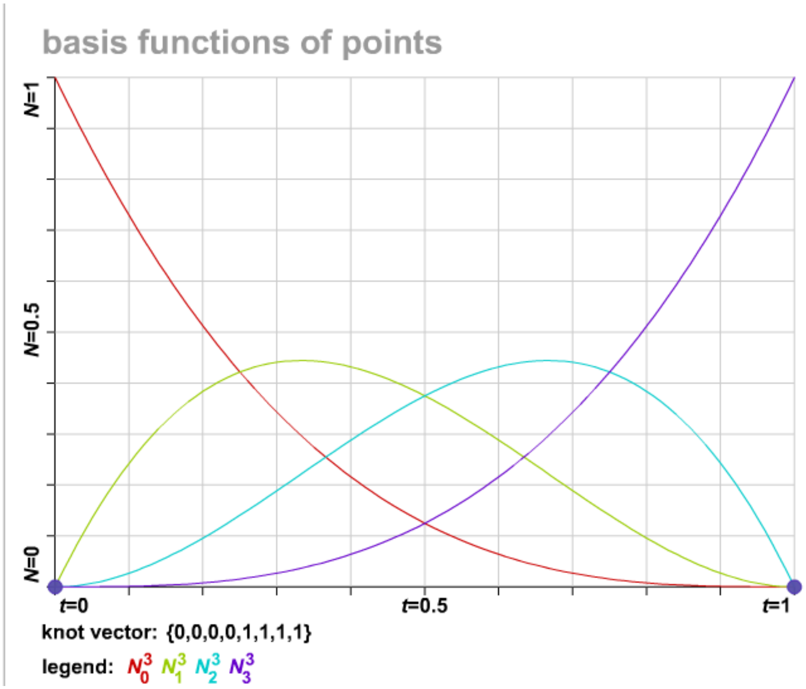

均匀节点B-样条曲线



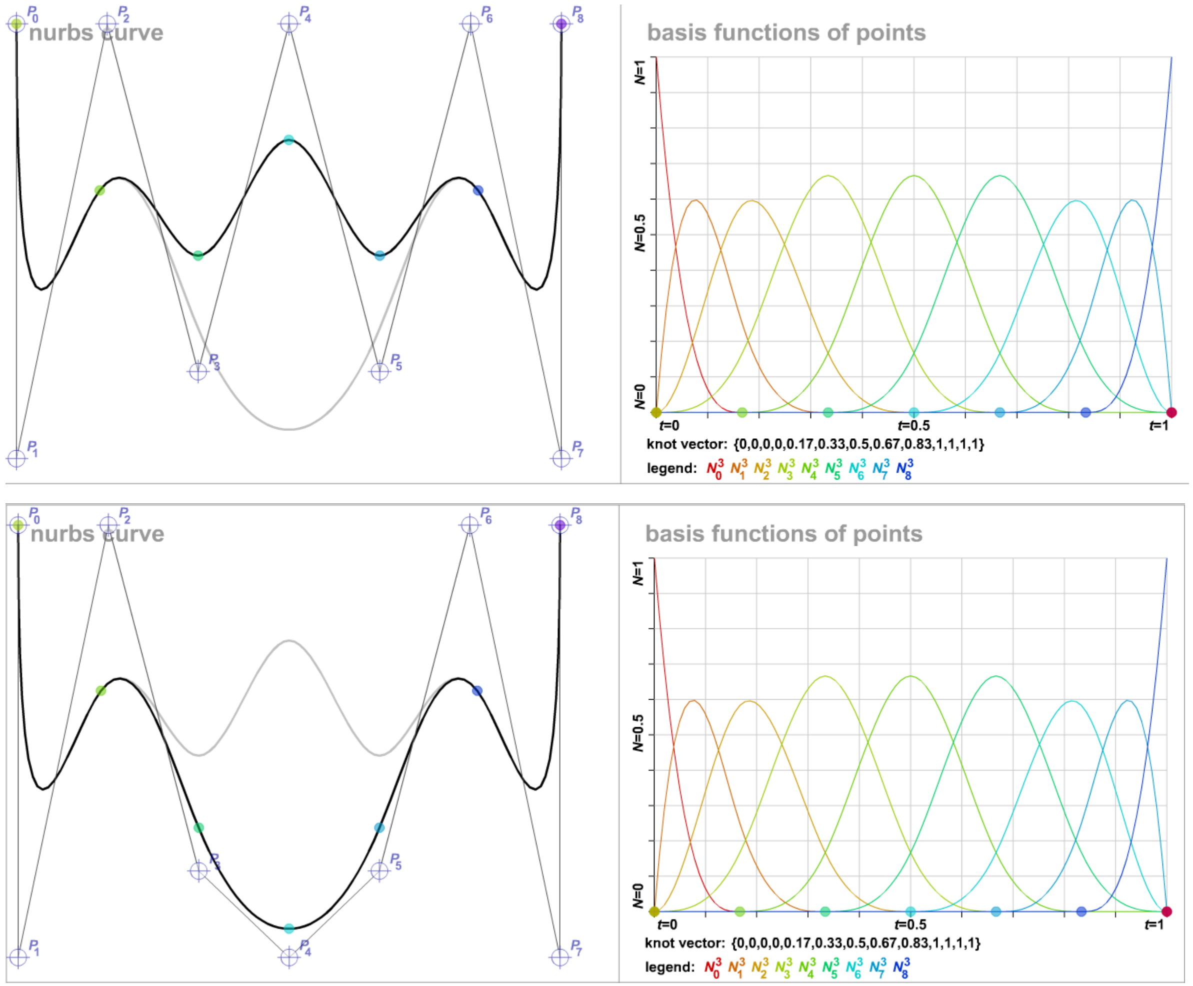

开放均匀节点B-样条曲线

# Bézier曲线是特殊的B-样条曲线



# 三次B-样条曲线的局部性



# B-样条曲线计算的de Boor-Cox算法

1. 搜索下标 $i$，满足 $u_i \le u \le u_{i+1}$
2. for $(j = i\text{-}k;\ j \le i;\ j\text{++})$

$$\mathbf{R}_j^{(0)} = \mathbf{R}_j\ ;$$

for $(s = 1;\ s \le k;\ s\text{++})$

for $(j = i\text{-}k\text{+}s;\ j \le i;\ j\text{++})$

$$\mathbf{R}_j^{(s)} = \left(1 - \frac{u - u_j}{u_{j+k+1-s} - u_j}\right)\mathbf{R}_{j-1}^{(s-1)} + \frac{u - u_j}{u_{j+k+1-s} - u_j}\mathbf{R}_j^{(s-1)}\ ;$$

3. $\mathbf{R}(u) = \mathbf{R}_i^{(k)}$

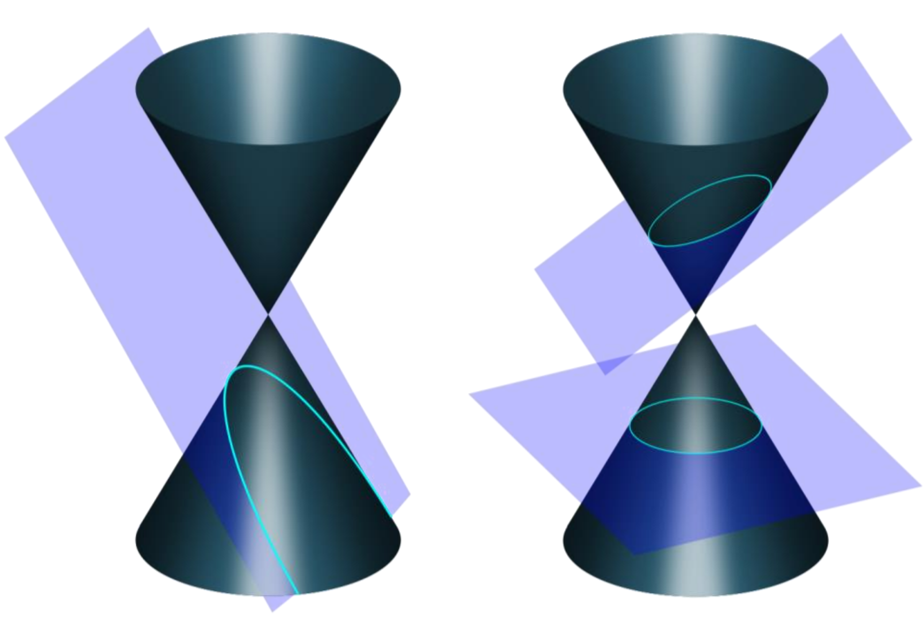
# 均匀B-样条曲线的矩阵计算

- 均匀三次B-样条曲线 $\mathbf{R}(u)$
  - 节点向量{0 1 2 3 4 5 6 7 ……}
  - 控制顶点$\{\mathbf{R}_i\}$
  - 定义在区间[$i$, $i$+1]上的$\mathbf{R}(u)$可以通过如下矩阵计算：

$$\mathbf{R}(u) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} (u-i)^3 & (u-i)^2 & (u-i) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-3} \\ \mathbf{R}_{i-2} \\ \mathbf{R}_{i-1} \\ \mathbf{R}_i \end{bmatrix}$$

# B-样条曲线的不足

- 不能完全表示圆锥曲线(Conic Sections)



抛物线√　　椭圆与圆×　　双曲线×

# NURBS曲线

- NURBS (Non-Uniform Rational Basis Spline)：非均匀有理B-样条的简称

- 定义：$$\mathbf{R}\left(u\right)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i\mathbf{R}_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i N_{i,k}(u)}$$

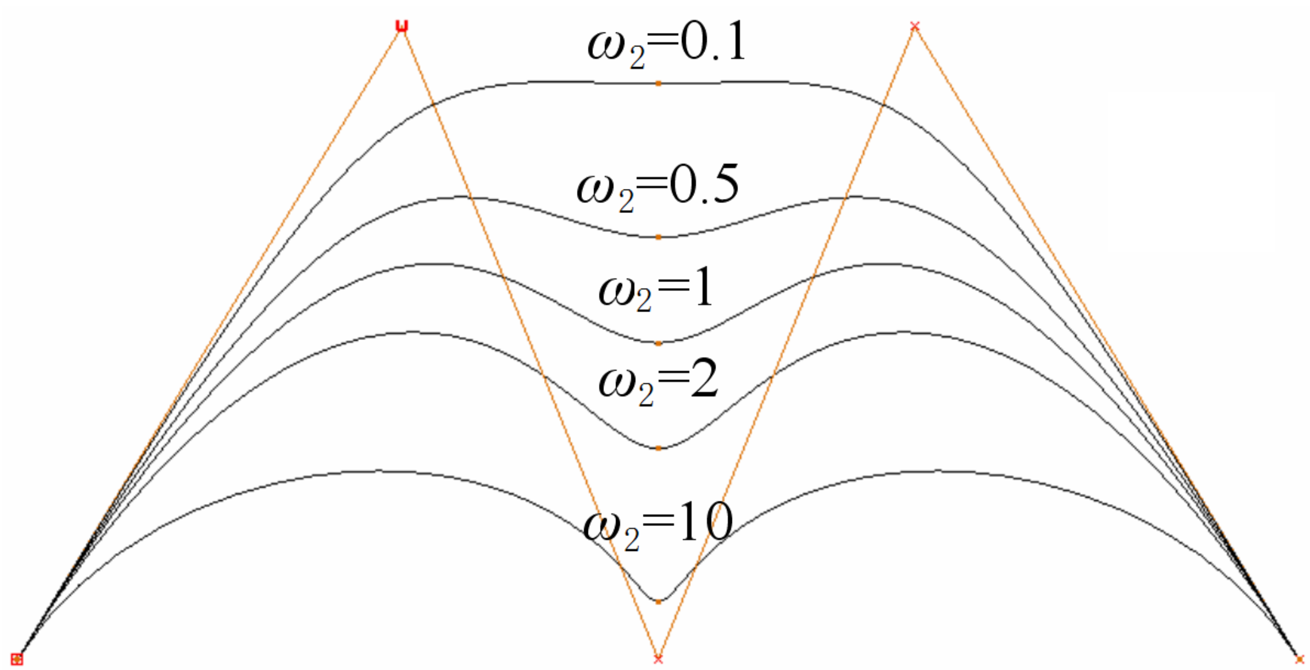
# NURBS曲线

- $\{N_{i,k}(u)\}$为单位化的B-样条基函数
- $\{\mathbf{R}_i\}$仍为控制顶点
- 与B-样条曲线相比，NURBS曲线新增加的控制手段是权因子$\{\omega_i\}$，一般首尾两个权因子$\omega_0$、$\omega_n > 0$ ，其余的权因子满足$\omega_i \geq 0$

# NURBS曲线的权因子

- 每一个权因子对应于一个控制顶点
- 通过调整权因子大小可以调整曲线的形状。
  - 当所有权因子$\omega_i = 1$时，NURBS曲线就是B-样条曲线
  - 当某个权因子$\omega_i = 0$时，对应的控制顶点对曲线的形状没有影响
  - 当 $\omega_i \to \infty$ 时，曲线$\mathbf{R}(u_{i+\mathrm{k}}) \to \mathbf{R}_i$

# NURBS曲线的例子




NURBS曲线权因子对曲线形状的影响

# 二次NURBS曲线表示圆

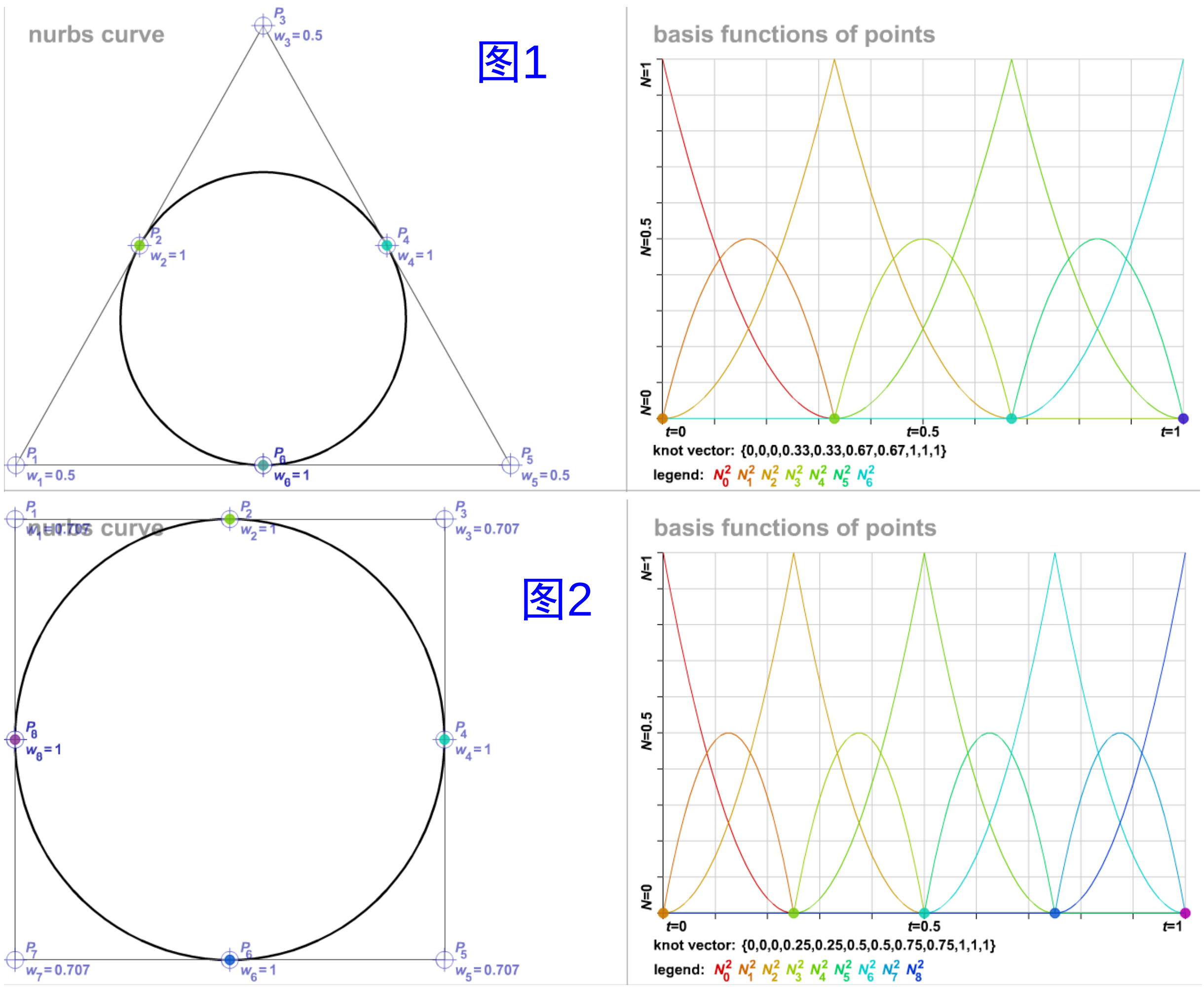
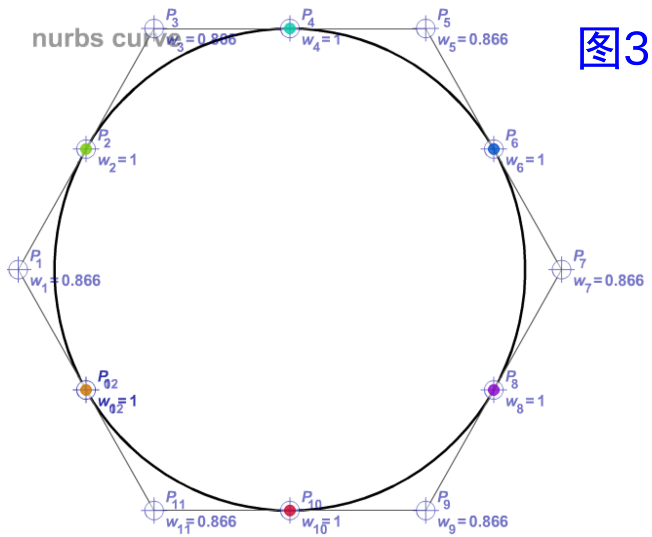



图1

图2

# 二次NURBS曲线表示圆

图3



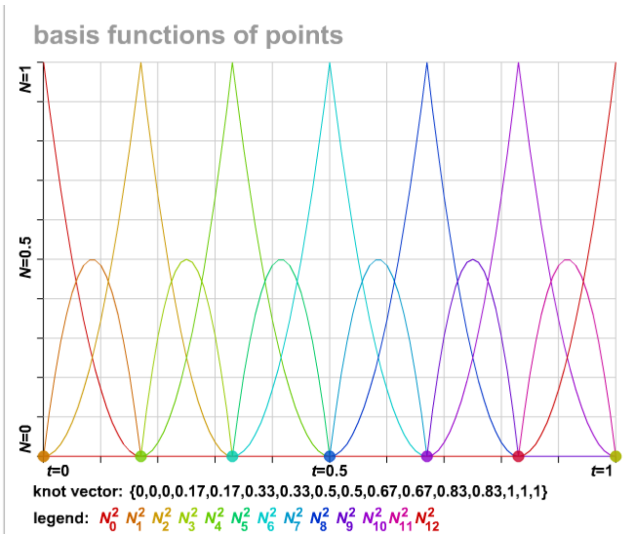




图1：7个控制顶点，[0 0 0 1/3 1/3 2/3 2/3 1 1 1]

图2：9个控制顶点，[0 0 0 1/4 1/4 2/4 2/4  3/4 3/4 3/4  1 1 1]

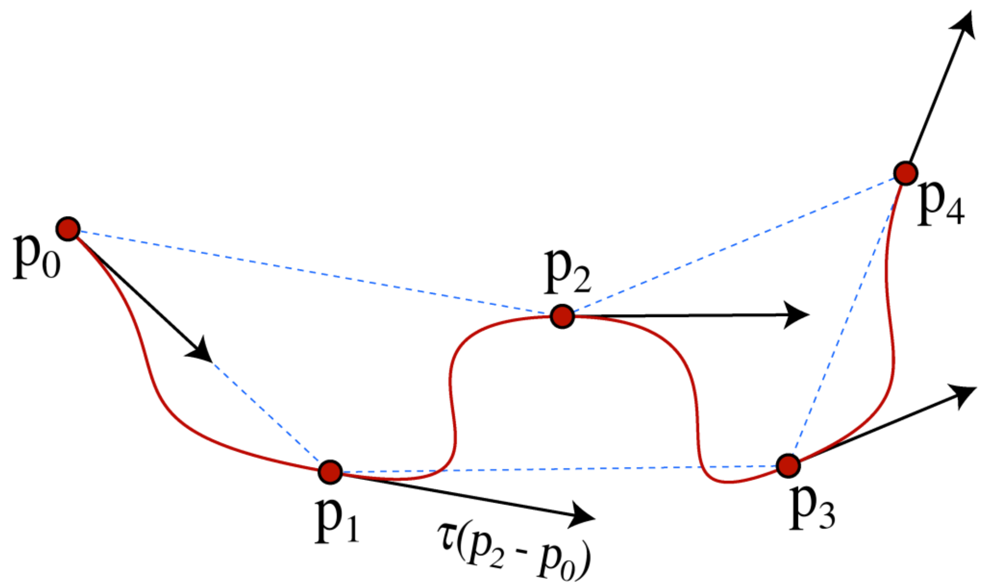
图3：13个控制顶点，[0 0 0 1/6 1/6 2/6 2/6  3/6 3/6 4/6 4/6 5/6 5/6 1 1 1]

# 参数曲线和曲面

- 几何物体的参数表示
- 参数曲线
  - Bézier曲线
  - B-样条曲线和NURBS曲线
  - Catmull-Rom样条曲线
- 参数曲面
  - Bézier曲面
  - B-样条曲面和NURBS曲面

# Catmull-Rom样条曲线

- Catmull-Rom样条曲线是一种局部插值数据点及其切向量的样条曲线
  - 广泛应用于计算机图形学、几何造型、计算机动画



# Ferguson三次参数曲线

给定：

两个数据点 $\mathbf{P}_0$ 和 $\mathbf{P}_1$, 及两个数据点处的切向量 $\mathbf{P}_0'$ 和 $\mathbf{P}_1'$

计算：

一条三次参数曲线，通过数据点 $\mathbf{P}_0$ 和 $\mathbf{P}_1$，

并且在数据点$\mathbf{P}_0$和$\mathbf{P}_1$处，分别具有切向量 $\mathbf{P}_0'$ and $\mathbf{P}_1'$

求解：将上述条件代入如下三次参数曲线方程$\mathbf{P}(t)$，得到：

$\mathbf{P}(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \quad t\in[0, 1]$

$\mathbf{P}(0)=a_0$ $\qquad$ $\mathbf{P}(1)= a_0+a_1+a_2+a_3$

$\mathbf{P}'(0)=a_1$ $\qquad$ $\mathbf{P}'(1)=a_1+2a_2+3a_3$

# Ferguson三次参数曲线

求解上述关于 $a_0, a_1, a_2$ 和 $a_3$的方程，可以得到：

将上述$a_0, a_1, a_2$ 和 $a_3$代入曲线方程P(t)，并将关于 $\mathbf{P}(0)$ 和 $\mathbf{P}(1)$、 $\mathbf{P}'(0)$ 和 $\mathbf{P}'(1)$ 的项合并，得到：

# Ferguson三次参数曲线

三次参数曲线方程$\mathbf{P}(t)$ 可以写成矩阵形式：

$$\mathbf{P}(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P}(0)\\ \mathbf{P}(1)\\ \mathbf{P}'(0)\\ \mathbf{P}'(1)\end{bmatrix}$$

当将上述公式应用于数据点系列 $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n\}$ 及其相应的切向量系列$\{\mathbf{P}_0', \mathbf{P}_1', \ldots, \mathbf{P}_n'\}$，即得到Ferguson三次参数曲线

# Catmull-Rom样条曲线

**问题**：给定 $n+1$ 控制点(数据点) $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n\}$ , 求一条曲线**局部地**插值控制点。即当移动一个控制点时，只局部地影响插值曲线形状

**求解**：对于定义在线段 $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$之间的曲线段，分别采用 $\mathbf{P}_i$ 和 $\mathbf{P}_{i+1}$ 作为数据点、如下向量作为切向量：

$$\frac{\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_{i-1}}{2} \quad \text{和} \quad \frac{\mathbf{P}_{i+2}-\mathbf{P}_{i}}{2}$$

将上述数据点及其切向量代入Ferguson三次参数曲线, 可以得到如下矩阵表示：

# Catmull-Rom样条曲线

$$\mathbf{P}(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P}_i\\ \mathbf{P}_{i+1}\\ \dfrac{\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_{i-1}}{2}\\ \dfrac{\mathbf{P}_{i+2}-\mathbf{P}_{i}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i-1}\\ \mathbf{P}_i\\ \mathbf{P}_{i+1}\\ \mathbf{P}_{i+2}\end{bmatrix}$$

# Catmull-Rom样条曲线

合并中间两个矩阵，得到：

$$\mathbf{P}(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i-1}\\ \mathbf{P}_i\\ \mathbf{P}_{i+1}\\ \mathbf{P}_{i+2}\end{bmatrix}, \quad M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 4 & -1\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

- 两个端点切向量 $\mathbf{P}_0'$ 和 $\mathbf{P}_n'$ 可以通过反射线法、抛物线法等得到
- Catmull-Rom样条曲线中，切向量的大小可调，作为曲线形状控制因子

# 参数曲线和曲面

- 几何物体的参数表示
- 参数曲线
  - Bézier曲线
  - B-样条曲线和NURBS曲线
  - Catmull-Rom样条曲线
- 参数曲面
  - Bézier曲面
  - B-样条曲面和NURBS曲面

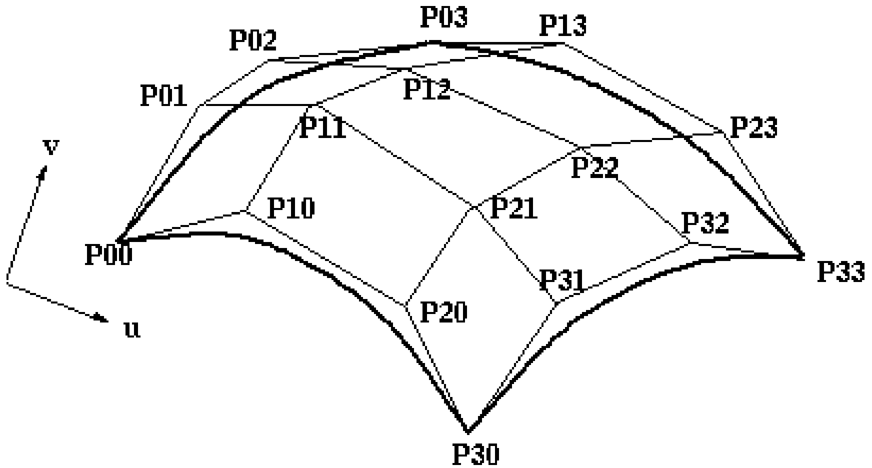
# 张量积Bézier曲面

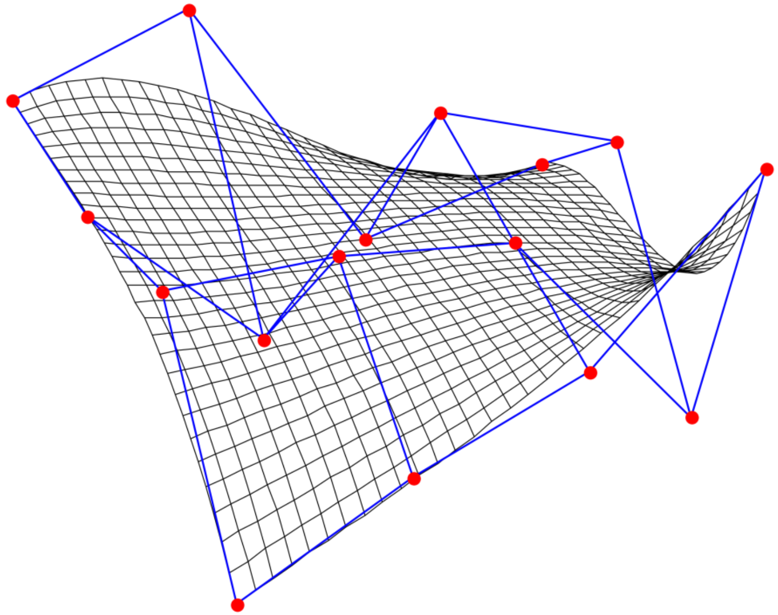
- $m \times n$ 次Bézier曲面：

$$\mathbf{R}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{R}_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$

  - $\{B_{i,m}(u)\}_{i=0}^{m}$ 为*u*-方向的Bernstein基函数
  - $\{B_{j,n}(v)\}_{j=0}^{n}$ 为*v*-方向的Bernstein基函数
  - $\{\mathbf{R}_{ij}\}_{i=0}^{m}{}_{j=0}^{n}$ 形成拓扑结构为矩形的控制网

# 双三次Bézier曲面例子



双三次Bézier曲面实例

# Bézier曲面性质

- Bézier曲面控制顶点所形成的控制网格形状，大致反映了曲面的形状
  - 编辑控制顶点实现对曲面形状的改变
- 曲面通过(插值)四个角点处的控制顶点

$$\mathbf{R}(0,0)=\mathbf{R}_{00} \qquad \mathbf{R}(1,0)=\mathbf{R}_{m0}$$

$$\mathbf{R}(0,1)=\mathbf{R}_{0n} \qquad \mathbf{R}(1,1)=\mathbf{R}_{mn}$$

# Bézier曲面性质

- 在角点处曲面与控制多边形相切

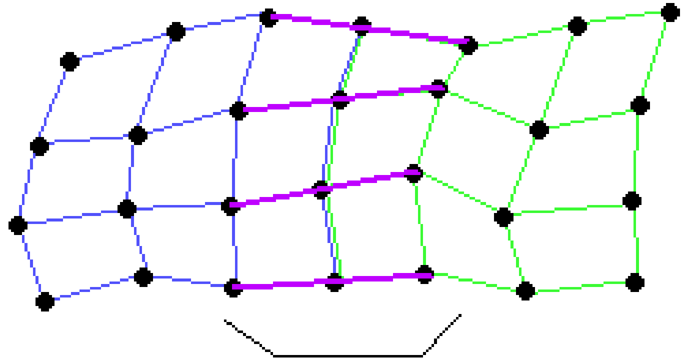
$$\mathbf{R}_u(0,0) = m(\mathbf{R}_{10} - \mathbf{R}_{00})$$
$$\mathbf{R}_v(0,0) = n(\mathbf{R}_{01} - \mathbf{R}_{00})$$

- Bézier曲面具有剖分算法：用加密的控制多边形来逼近显示Bézier曲面

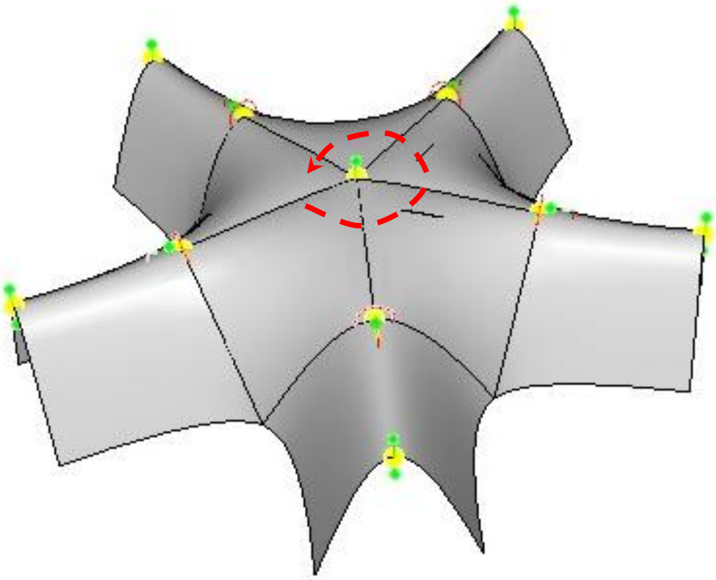
- 凸包性：曲面位于控制顶点的凸包内

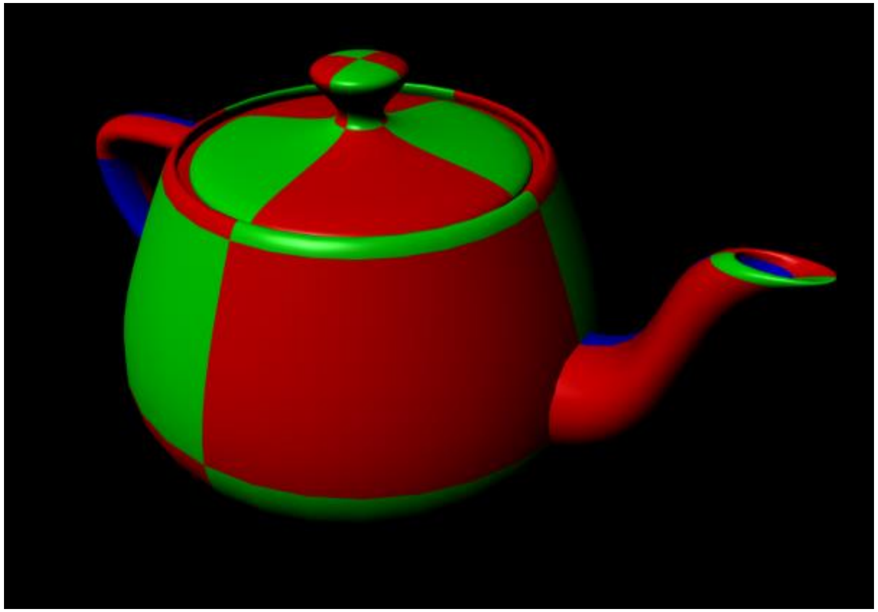
# Bézier曲面的不足

- 全局性：当移动一个控制顶点的位置时，整个曲面的形状会发生改变，对于外形设计不方便
- 生成复杂外形需要多个Bézier曲面的光滑拼接，十分复杂



# 光滑拼接Bézier曲面





https://en.wikipedia.org/wiki/Utah_teapot

Bézier曲面拼接实例

# 三角Bézier曲面

定义：

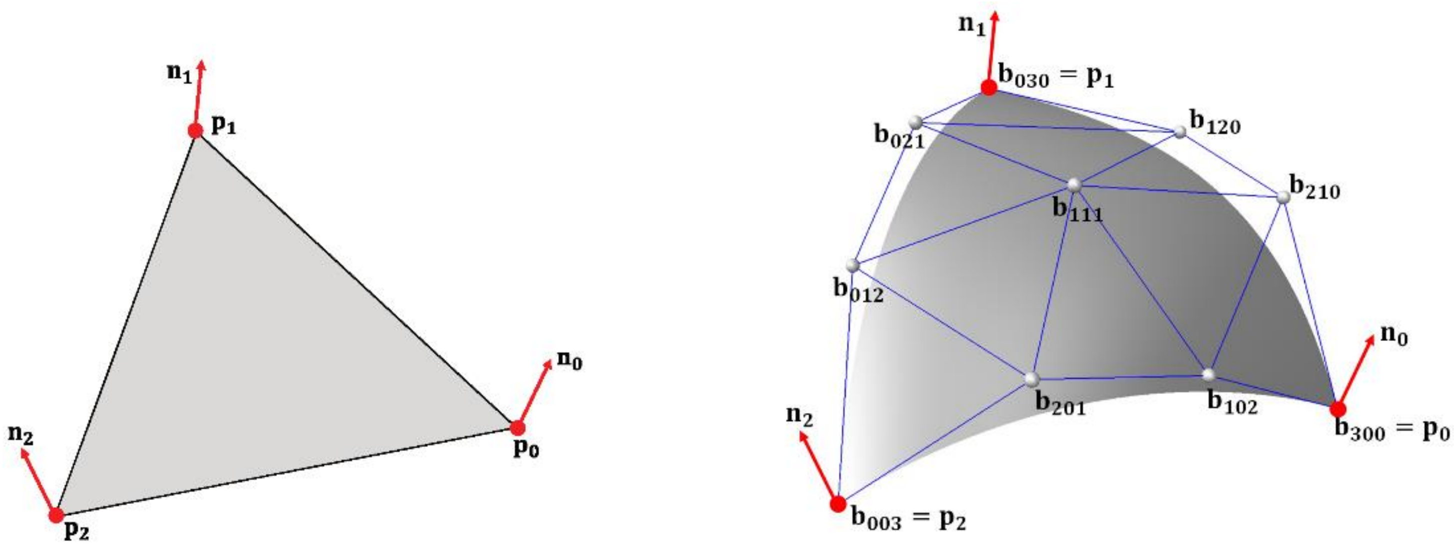
$$\mathbf{R}(u,v,w)=\sum_{i+j+k=n}\mathbf{R}_{ijk}B^n_{ijk}(u,v,w)$$

其中

$$B^n_{ijk}(u,v,w)=\binom{n}{i,j,k}(u^i,v^j,w^k)$$

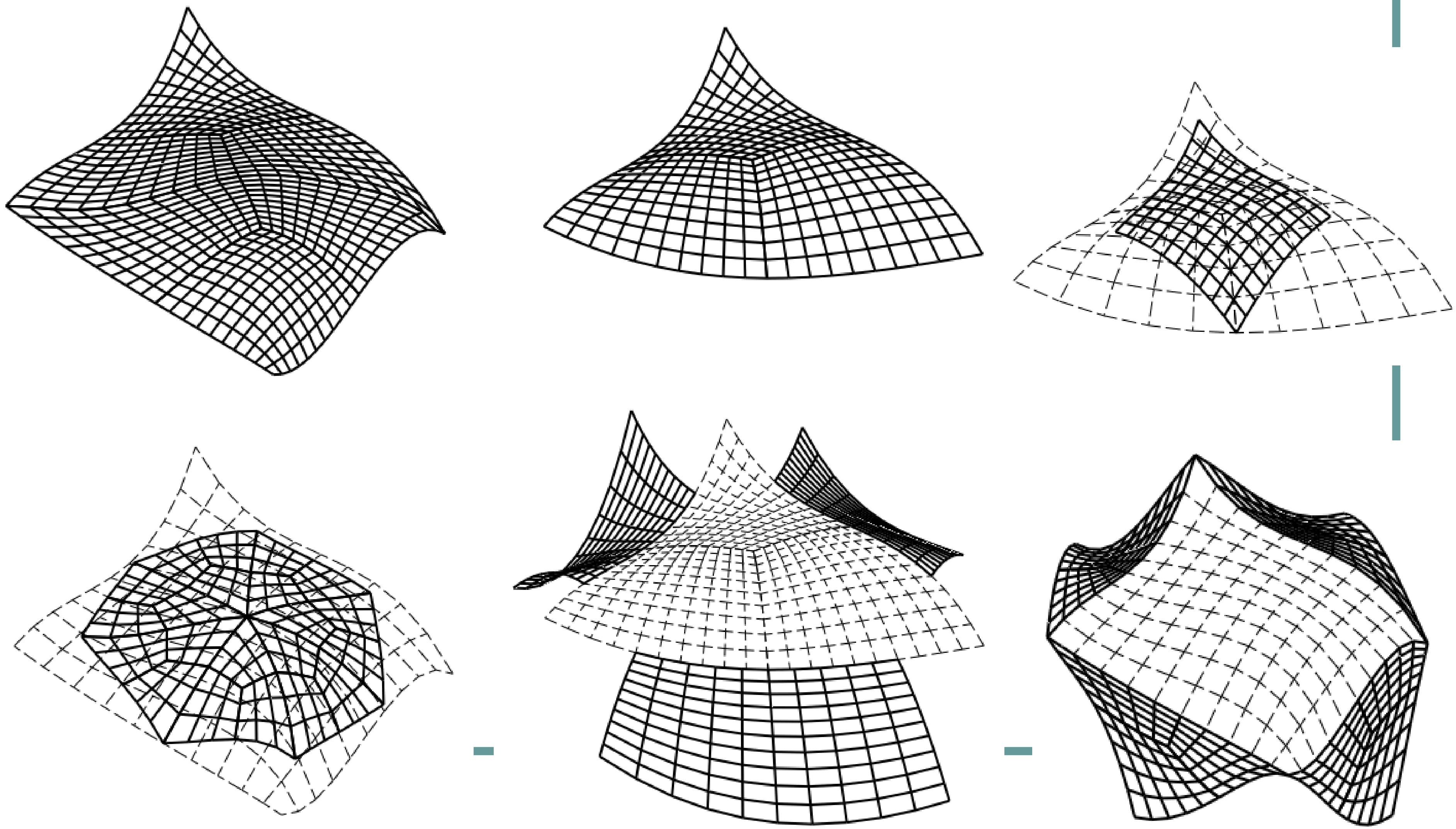
$$i,j,k\geq 0;\quad u+v+w=1;\quad u,v,w\geq 0$$

# 三角Bézier曲面




(a) (b)

# 张量积和三角Bézier曲面转换



# 参数曲线和曲面

- 几何物体的参数表示
- 参数曲线
  - Bézier曲线
  - B-样条曲线和NURBS曲线
  - Catmull-Rom样条曲线
- 参数曲面
  - Bézier曲面
  - B-样条曲面和NURBS曲面

# B-样条曲面

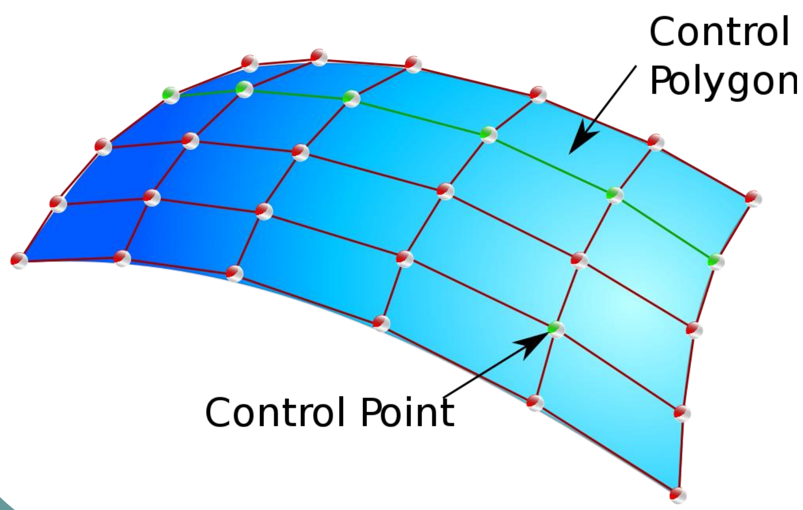
- B-样条曲面定义
  - 次数：$k_u \times k_v$
  - 控制顶点数：$(n_u+1)\times(n_v+1)$
  - 节点向量：$\mathbf{u}=\left\{u_0,u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_{n_u+k_u+1}\right\}$

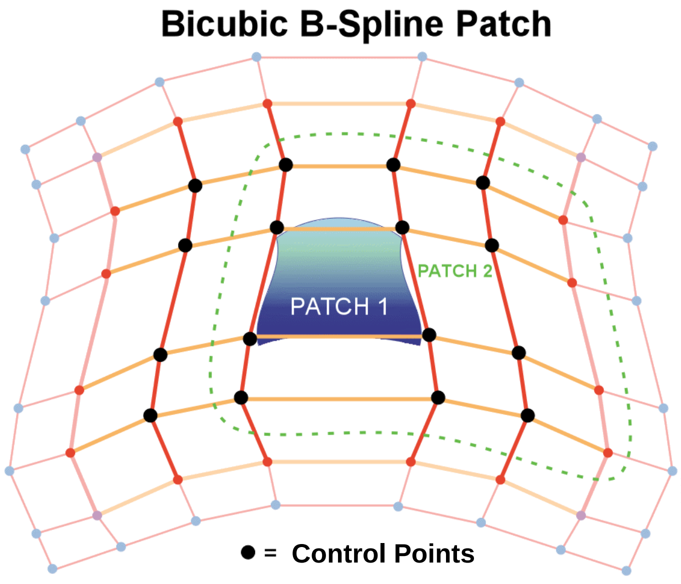
$$\mathbf{v}=\left\{v_0,v_1,\cdots,v_j,\cdots,v_{n_v+k_v+1}\right\}$$

$$\mathbf{R}(u,v)=\sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_v}\mathbf{R}_{ij}N_{i,k_u}(u)N_{j,k_v}(v)$$

# B-样条曲面

- 控制顶点$\{\mathbf{R}_{ij}\}$ 规则连接，形成拓扑结构为矩形的控制网格
- $\{N_{i,ku}(u)\}$和$\{N_{i,kv}(v)\}$分别为定义在节点向量**u**和**v**上的规范化B-样条基函数



# B-样条曲面的性质

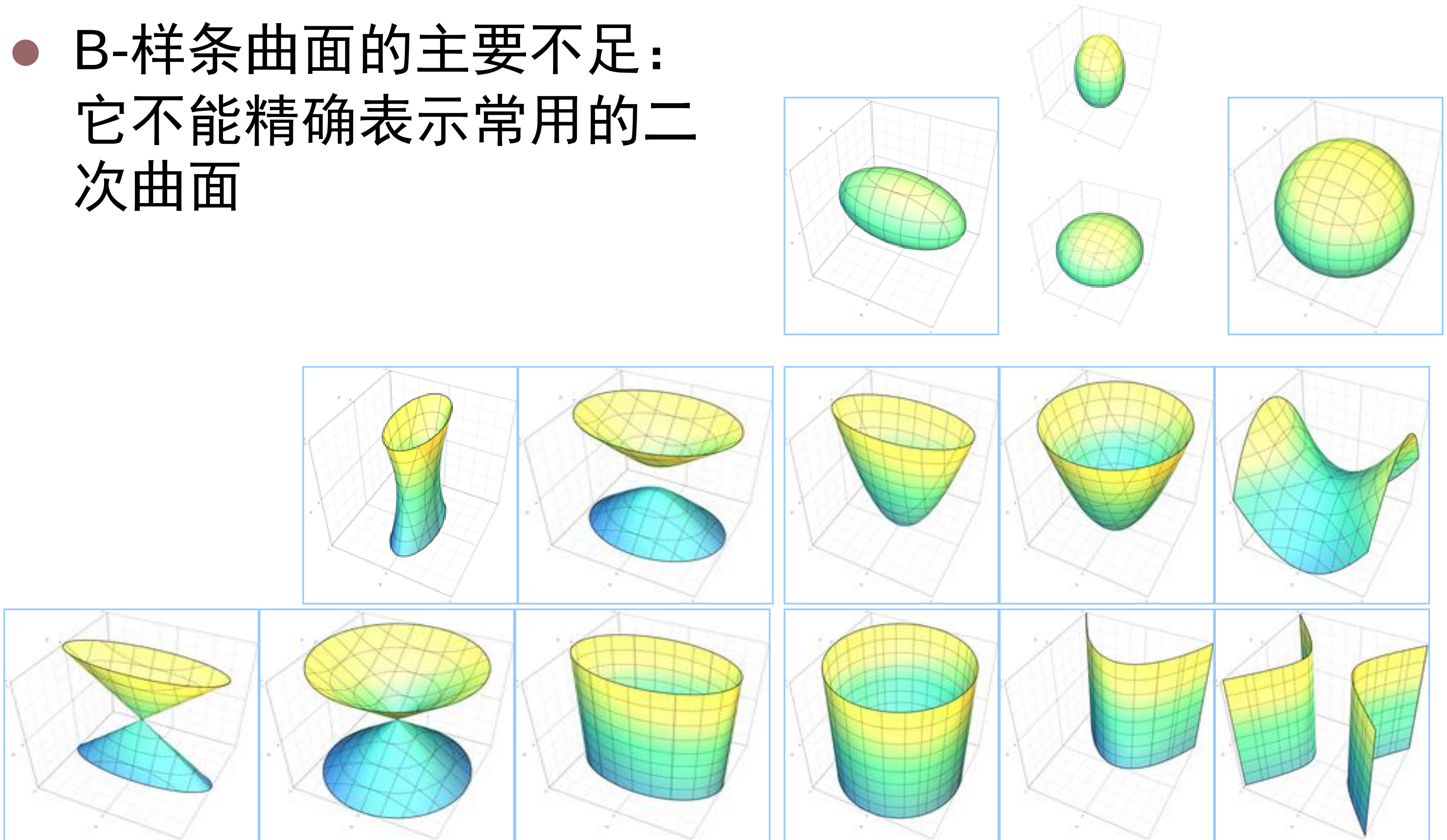
- 局部性：移动一个控制顶点部分改变曲面形状
- 控制顶点数目：
  - Bézier曲面的次数确定后，控制顶点数目就定了
  - B-样条曲面的次数确定后，控制顶点数目可任意
- 对于开放式均匀节点，即当节点向量**u**和**v**在端节点处分别具有$k_u$+1和$k_v$+1重节点时，B-样条曲面具有类似与Bézier曲面的插值曲面四个角点的性质
- 其它性质：参考曲线情形

# B-样条曲面局部性质

基于层次B-样条的曲面形状编辑

# B-样条曲面和NURBS曲面

- B-样条曲面的主要不足：
  它不能精确表示常用的二次曲面



# NURBS曲面

- 非均匀有理B-样条曲(NURBS, **N**on-**U**niform **R**ational **B**asis **S**pline)

$$\mathbf{R}(u,v)=\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}h_{i,j}\mathbf{R}_{i,j}N_{i,k}(u)M_{j,l}(v)}{\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}h_{i,j}N_{i,k}(u)M_{j,l}(v)}=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}\mathbf{R}_{i,j}S_{i,j}(u,v)$$

$$S_{i,j}(u,v)=\frac{h_{i,j}N_{i,k}(u)M_{j,l}(v)}{\sum_{i1=1}^{n+1}\sum_{j1=1}^{m+1}h_{i1,j1}N_{i1,k}(u)M_{j1,l}(v)}$$

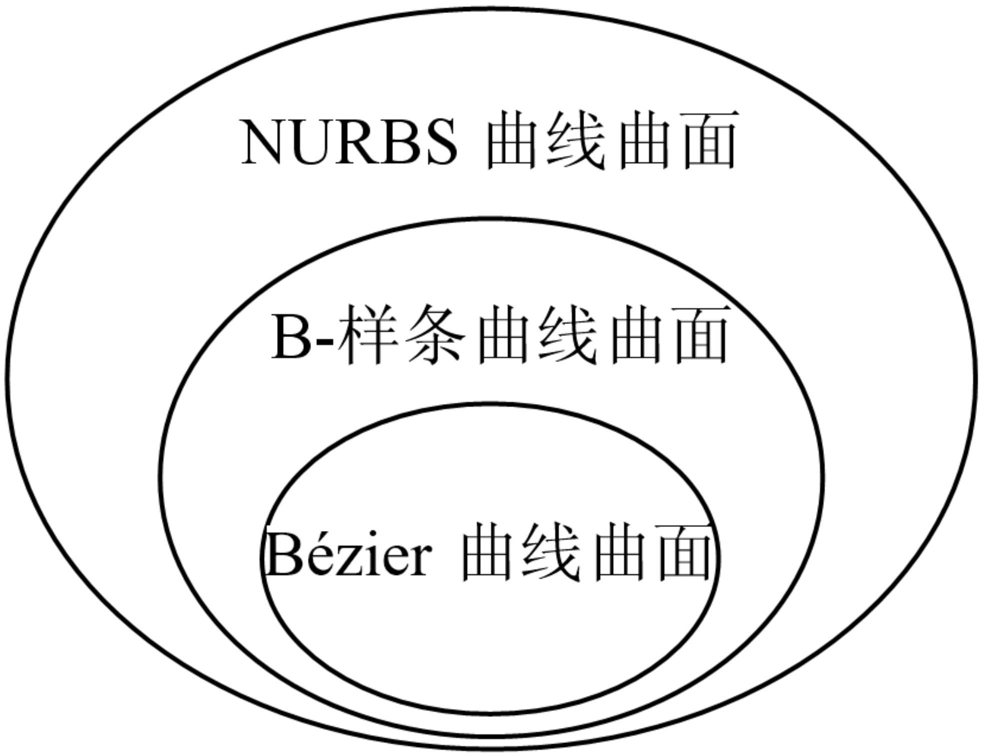
$S_{i,j}(u,v)$：有理B-样条基函数

$h_{i,j}$： 权因子，非负

# NURBS曲面

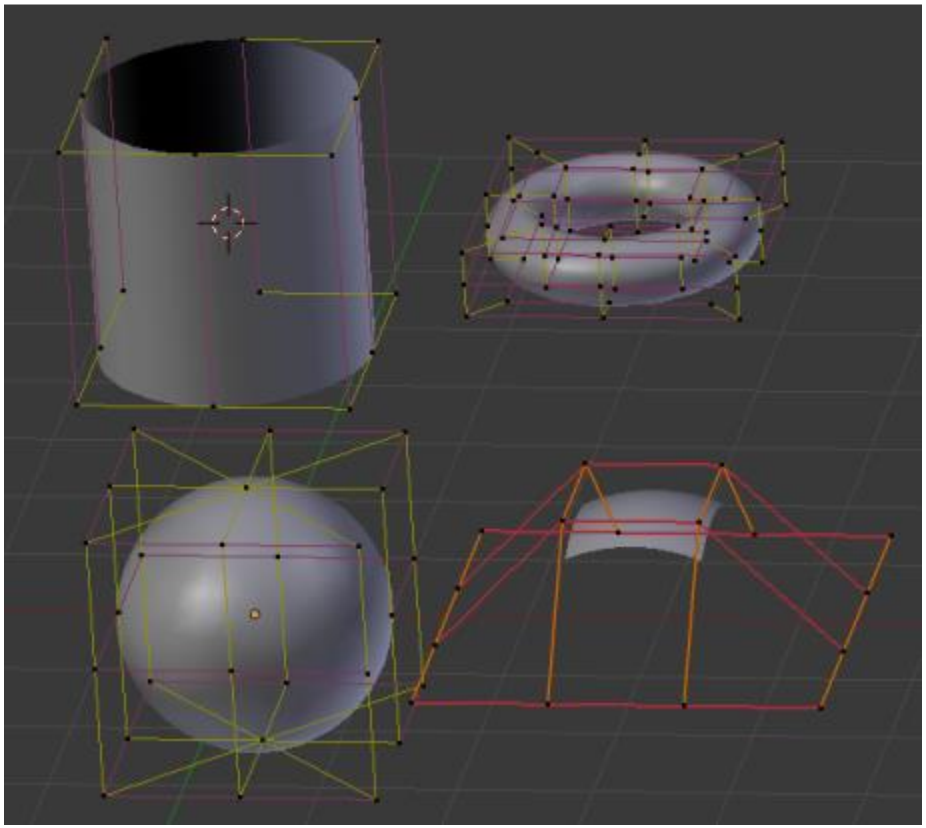
- NURBS曲面的优势
  - 与B-样条曲面相比，NURBS曲面增加了权因子作为形状控制手段。
  - NURBS曲面包含了B-样条曲面和Bézier曲面，并且可以精确表示机械零件中常用的二次曲面，
  - 在1991年国际标准组织颁布的工业产品几何定义的STEP标准中，自由曲线曲面唯一地采用NURBS表示

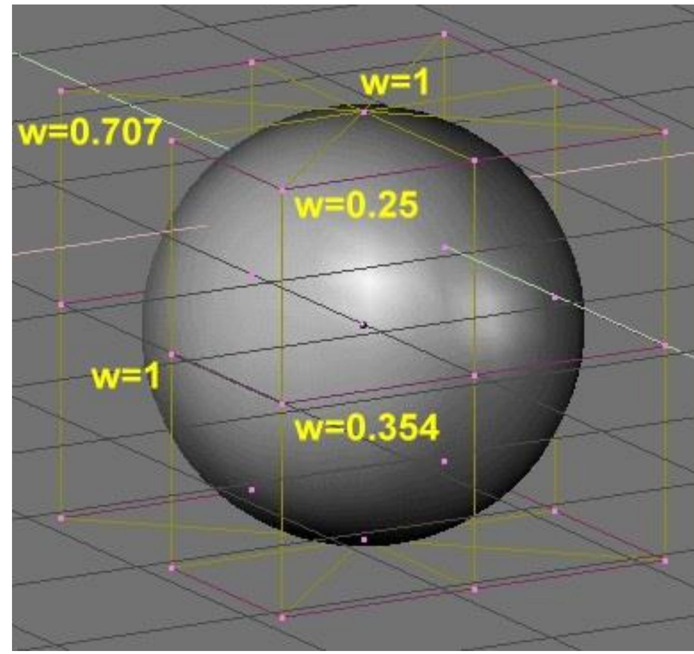
# Bezier、B-样条和NURBS曲面




三种参数曲线曲面之间的关系

# B-样条曲面和NURBS曲面






NURBS曲面表示的球面及其控制顶点

# 课件下载

- 几何物体的参数表示
- 参数曲线
  - Bézier曲线
  - B-样条曲线和NURBS曲线
  - Catmull-Rom样条曲线
- 参数曲面
  - Bézier曲面
  - B-样条曲面和NURBS曲面