

知识点Z2.14

卷积积分的图解法

主要内容:

1. 图解法步骤
2. 图解法作用

基本要求:

1. 掌握图解法
2. 会用图解法求某一点的卷积结果



Z2.14 卷积积分的图解法

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

卷积过程可分解为四步：

- (1) 换元： t 换为 $\tau \rightarrow$ 得 $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$
- (2) 反转平移： 由 $f_2(\tau)$ 反转 $\rightarrow f_2(-\tau)$ 右移 $t \rightarrow f_2(t - \tau)$
- (3) 乘积： $f_1(\tau) f_2(t - \tau)$
- (4) 积分： τ 从 $-\infty$ 到 ∞ 对乘积项积分。

注意： t 为参变量。



2.3 卷积积分

例1 $f(t), h(t)$ 如图, 求 $y_{zs}(t) = h(t) * f(t)$ 。

解:

$h(t)$ 函数形式复杂, 换元为 $h(\tau)$;

$f(t)$ 换元为 $f(\tau)$

$f(\tau)$ 反折 $\rightarrow f(-\tau)$ 平移 $t \rightarrow f(t-\tau)$

① $t < 0$ 时, $f(t-\tau)$ 向左移

$f(t-\tau)h(\tau) = 0$, 故 $y_{zs}(t) = 0$

$t > 0$ 时, $f(t-\tau)$ 向右移

② $0 \leq t \leq 1$ 时

$$y_{zs}(t) = \int_0^t \tau \cdot \frac{1}{2} d\tau = \frac{1}{4} t^2$$

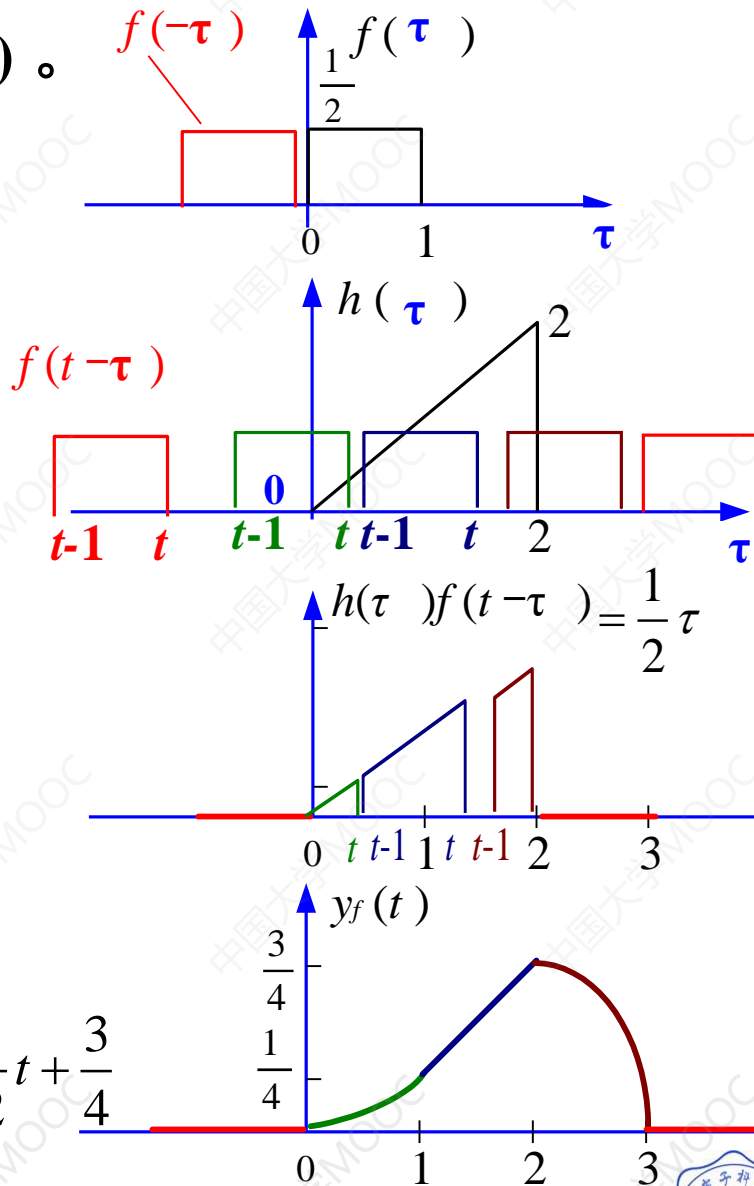
③ $1 \leq t \leq 2$ 时

$$y_{zs}(t) = \int_{t-1}^t \tau \cdot \frac{1}{2} d\tau = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4}$$

④ $2 \leq t \leq 3$ 时

$$y_{zs}(t) = \int_{t-1}^2 \tau \cdot \frac{1}{2} d\tau = -\frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t + \frac{3}{4}$$

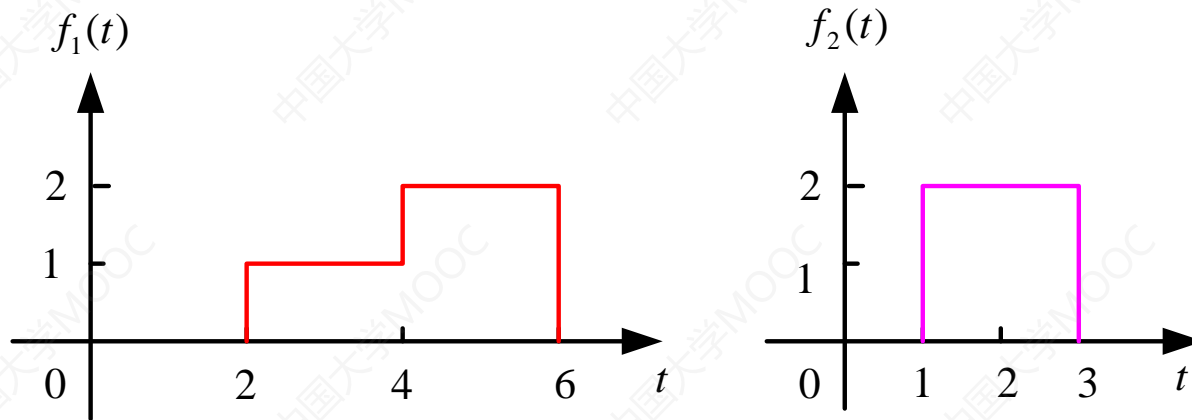
⑤ $t \geq 3$ 时 $f(t-\tau)h(\tau) = 0$, 故 $y_{zs}(t) = 0$



2.3 卷积积分

- 说明：
- (1) 图解法重在概念解释，一般适用于简单图形；
 - (2) 求某一时刻卷积值时比较方便；
 - (3) 确定积分的上下限是关键。

例2 $f_1(t), f_2(t)$ 如图，已知 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，求 $y(6) = ?$



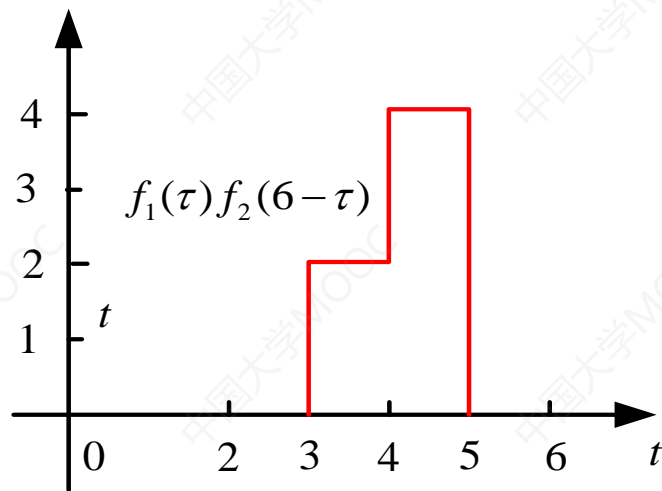
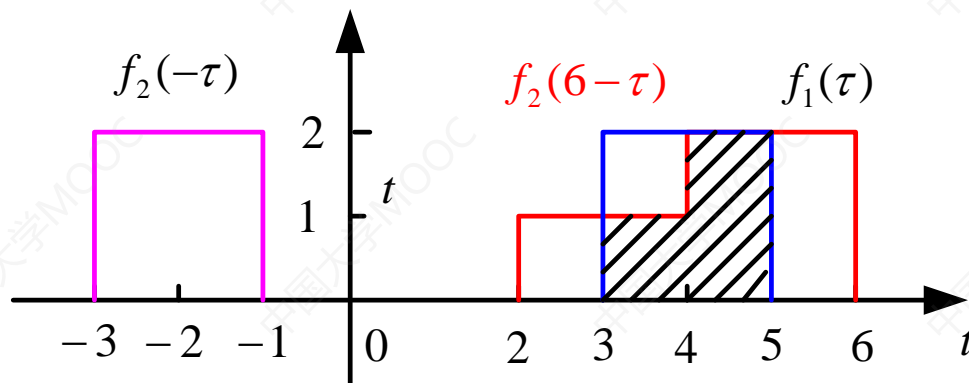
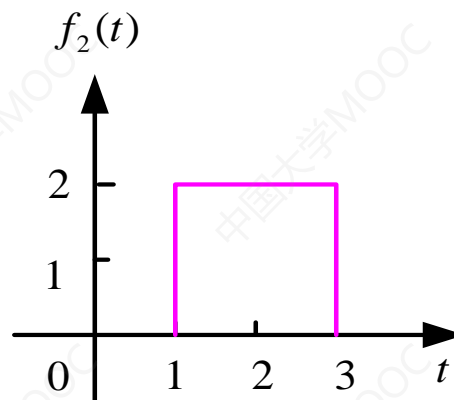
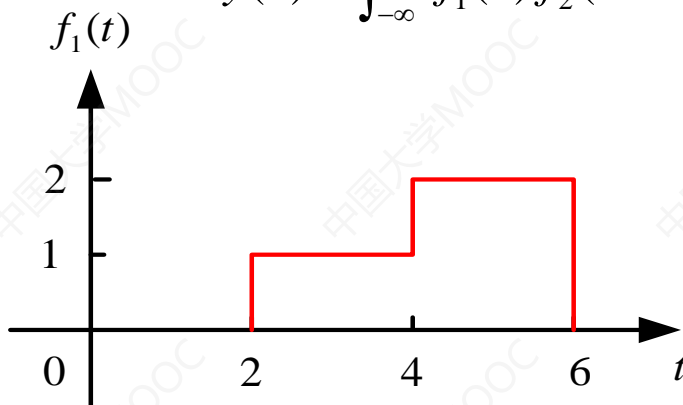
解：

$$y(6) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(6 - \tau) d\tau$$



2.3 卷积积分

$$y(6) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(6-\tau) d\tau$$



$$y(6) = 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 = 6$$

