第六讲 Jordon 标准形的变换与应用

一、 Jordon 标准形变换矩阵的求法

$$P^{-1}AP = J \quad \rightarrow \quad AP = PJ$$

1° 将 P 按 J 的结构写成列块的形式

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ m_1 & m_2 & m_r \end{array}$$

$$\rightarrow \quad A\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow AP_i = P_i J_i \quad (i = 1,2\cdots,r)$$

2° 求解 r 个矩阵方程 $AP_i = P_i J_i \quad (i = 1,2\cdots,r)$

3° 将 r 个 P_i 合成变换矩阵 $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix}$

★ 关于方程 $AP_i = P_i J_i$ 的求解

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{im_i} \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{im_i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{im_i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i\end{bmatrix}$$

$$AP_{i1}=\lambda_i P_{i1} \qquad \rightarrow \quad (A-\lambda_i I)P_{i1}=0$$

$$AP_{i2}=P_{i1}+\lambda_i P_{i2} \rightarrow \ (A-\lambda_i I)P_{i2}=P_{i1} \rightarrow \ (A-\lambda_i I)^2 P_{i2}=0$$

$$\vdots$$

$$AP_{im_i}=P_{im_i-1}+\lambda_i P_{im_i} \rightarrow (A-\lambda_i I)P_{im_i}=P_{im_i-1} \rightarrow \ (A-\lambda_i I)^{m_i} P_{im_i}=0$$

两种具体做法: (ⅰ) 按照 $P_{i1} \rightarrow P_{i2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_{im}$ 的顺序求解，即先求出特征向量 P_{i1}，然后由后续方程求出 P_{i2}、P_{i3}、…；（ⅱ）先求

$(A-\lambda_i I)^{m_i}P_{im_i}=0$的解向量$P_{im_i}$，然后直接得到

$$P_{im_i-1}\to P_{im_i-2}\to\cdots\to P_{i1}$$

前一做法由于$(A-\lambda_i I)$为奇异矩阵，每一步均存在多解及无解问题，故各步之间不能完全独立，前一步尚需依赖后一步、再后一步、…，直至最后一步才能完全确定一些待定系数；而后一做法仅出现一次求解方程，其余为直接赋值，无上述问题。但又可能导致低阶P_{im_i}出现零向量的问题。

由于 $P_{i1}=(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i}$

$$P_{i2}=(A-\lambda_i I)^{m_i-2}P_{im_i}$$

$$\vdots$$

$$P_{im_{i-1}}=(A-\lambda_i I)P_{im_i}$$

故P_{im_i}应满足：$(A-\lambda_i I)^{m_i}P_{im_i}=0$但$(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i}\neq 0$

同一特征值可能出现在不同的 Jordan 块中，对于这种情况，按各 Jordan 块阶数高低依次进行处理，高阶先处理，低阶后处理，同阶同时处理。

(1)最高阶（没有属于同一特征值的 Jordan 块同阶）可按下述方法求出P_{im_i}，即使$(A-\lambda_i I)^{m_i}x=0$但$(A-\lambda_i I)^{m_i-1}x\neq 0$的$x$作为$P_{im_i}$。

然后由方程$P_{i(j-1)}=(A-\lambda_i I)P_j$依次求出$P_{im_{i-1}},P_{im_{i-2}},\cdots,$直至$P_{i1}$

(2) 对于较低阶的 Jordan 块，它的P_{im_i}不仅要考虑到满足

$$(A-\lambda_i I)^{m_i}x=0\text{但}(A-\lambda_i I)^{m_i-1}x\neq 0,$$

而且还应与前述P_{ij}线性无关。

(3)其它属于同一特征值的 Jordan 块处理时，按照（2）的原则处理即可。

(4)出现多个属于同一特征值的 Jordan 块同阶时，还应考虑线性无关问题。

例：求 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形及其变换矩阵。

[解]：上一讲已求出其 Jordan 标准形，也可按如下方法求得。

$(\lambda I - A)$可采用初等变换化为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & (\lambda-2) & \\ 0 & & & & & (\lambda-2)^2(\lambda-4)^3 \end{bmatrix}$$

按此得出 Jordon 标准形

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & 0 \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 4 & 1 & \\ & & & & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

同时可见 $det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3(\lambda-4)^3$,即 $\lambda=2$ 与 $\lambda=4$ 均为三重特征值。

下面求变换矩阵 P

（1）$\lambda_3=4$ 的 Jordon 矩阵仅有一块，$m_3=3$

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

先求P_{33}，P_{33}应满足 $(A-4I)^3 P_{33} = 0 \quad (A-4I)^2 P_{33} \neq 0$

$$(A-4I) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-4I)^2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-4I)^3=\begin{bmatrix} -12 & 8 & 0 & -8 & 0 & -4 \\ 8 & -12 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求$(A-4I)^3x=0 \quad (A-4I)^2x=0$

设$x=\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$(A-4I)^3 x = 0 \qquad \text{其通解为} \xi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-4I)^2x=0 \qquad 其通解为\xi_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+\xi_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

可取 $P_{33}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$

$$P_{32}=(A-4I)P_{33}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$P_{31}=(A-4I)P_{32}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

（2）对$\lambda_{1,2}=2$存在两个 Jordan 块，$J_1=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$，$J_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，

分别对应P_1，$P_2=\begin{bmatrix}P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}$

从P_{22}入手：$(A-2I)^2P_{22}=0$，$(A-2I)P_{22}\neq 0$

$$(A-2I)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$(A-2I)^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & -4 & 4 & 4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I)^2 x=0$$

$\rightarrow$

$$x=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & 0 & \xi_1+\xi_2+\xi_6 & 0 & \xi_6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$(A-2I)x=0$$

$$\to x=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & 0 & \xi_2 & 0 & -\xi_1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

取 $P_{22}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$P_{21}=(A-2I)P_{22}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

P_1：$(A-2I)P_1=0$ P_1与P_{21}应线性无关，可取

$$P_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

（3）合成变换矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \qquad P^{-1}\text{存在}$$

可以验证：$P^{-1}AP=J$

二、 Jordan 标准形的幂及多项式

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{bmatrix}, \text{ 即 } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix},$$

$$J_i^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ 0 & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix}$$

J_i^k亦为类似的上三角形条带矩阵,在与主对角线平行的斜线上各元素相等. 其中J_i^k第一行的元素依次为

$$\begin{cases} \lambda_i^k \quad k\lambda_i^{k-1} \quad \dfrac{k!}{2!(k-2)!}\lambda_i^{k-2} \quad \ldots \quad C_k^t\lambda_i^t \quad \ldots \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \qquad (m_i-k-1\text{个}0),(m_i>k) \\ \lambda_i^k \quad k\lambda_i^{k-1} \quad \dfrac{k!}{2!(k-2)!}\lambda_i^{k-2} \quad \ldots \quad C_k^t\lambda_i^t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad C_k^{k-m_i+1}\lambda_i^{k-m_i+1},(m_i\le k) \end{cases}$$

设有多项式$f(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^k=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$.则

$$f(J)=\sum_{k=0}^{m}a_kJ^k=a_0I+a_1J+\cdots+a_mJ^m=\begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{bmatrix}$$

又 $$f(\lambda_i)=a_0+a_1\lambda_i+\cdots+a_m\lambda_i^m=\sum_{k=0}^{m}a_k\lambda_i^k$$

$$f'(\lambda_i)=a_1+2a_2\lambda_i+\cdots+ma_m\lambda_i^{m-1}=\sum_{k=1}^{m}ka_k\lambda_i^{k-1}$$

……

$$f^{(m)}(\lambda_i)=m!\,a_m \qquad f^{(m+l)}(\lambda_i)=0,(l=1,2,\ldots)$$

$$
f(J_i) = a_0 \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix}
$$

$$
+ a_2 \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ 0 & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix} + \cdots
$$

$$
=\begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda) \\ & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(m_i-2)!}f^{(m_i-2)}(\lambda) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{bmatrix}\Bigg|_{\lambda=\lambda_i}
$$

这就是说，$f(J_i)$仍为上三角矩阵，在与主对角线平行的斜线上各元素均相等,第一行元素依次为

$$f(\lambda_i) \quad f'(\lambda_i) \quad \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) \quad \cdots \quad \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$ （无论m_i是否大于m）

若$A=P^{-1}JP$, 则$f(A)=P^{-1}f(J)P$计算十分方便,无需再采用矩阵乘积。

作业: P107 11