第十六讲 广义逆应用

一、 矩阵方程$\mathbf{AXB=D}$的相容性条件及通解

定理 1. 矩阵方程$\mathbf{AXB=D}$相容（有解）的充要条件： $\mathbf{AA^{(1)}DB^{(1)}B=D}$

在相容情况下矩阵方程的通解为：

$$\left\{\mathbf{A^{(1)}DB^{(1)}+Y-A^{(1)}AYBB^{(1)}\mid Y\text{为阶数合适的任意矩阵}}\right\}$$

[证明] 相容性条件的充分性：

已知$\mathbf{AA^{(1)}DB^{(1)}B=D}$， 显然有解$\mathbf{X=A^{(1)}DB^{(1)}}$

相容性条件的必要性：已知$\mathbf{AXB=D}$有解， 设某个解为$\mathbf{X}$， 即

$$\mathbf{D=AXB=AA^{(1)}AXBB^{(1)}B=AA^{(1)}DB^{(1)}B}$$

现在证明通解：“通解”有两个含义：（1）解集合中的任何元素为方程的解；（2）方程的任何解均可由集合中的元素表现出来。

（1） 令$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(1)}+\mathbf{Y}-\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{B}\mathbf{B}^{(1)}$， 代入$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}=\mathbf{D}$

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}=\mathbf{D}+\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{B}-\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{B}=\mathbf{D}$$

$\therefore$ 集合中的元素为方程的解

（2） 设$\mathbf{X}$为方程的解， 即$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}=\mathbf{D}$

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(1)}+\mathbf{X}-\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(1)}=\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{D}\mathbf{B}^{(1)}+\mathbf{X}-\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{B}^{(1)}$$

对应于集合中$\mathbf{Y}=\mathbf{X}$的情况。

[得证]

由上述证明可见：（1）通解中两个$\mathbf{A}^{(1)}$及两个$\mathbf{B}^{(1)}$完全可以不同。

（2）通解集合中，不同的$\mathbf{Y}$完全可能对应同一个解。

推论 1. 线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$有解的充要条件为： $\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b}=\mathbf{b}$

且通解为$\left\{\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b}+(\mathbf{I}_n-\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})\mathbf{y} \mid \mathbf{y}\text{为列向量}\right\}$

推论 2. $\mathbf{A}\{1\}$ $(\mathbf{AXA}=\mathbf{A}\text{的解})$为如下集合：

$\left\{\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}+\mathbf{Y}-\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{AYA}\mathbf{A}^{(1)}\right\}$ （四个$\mathbf{A}^{(1)}$可互不相同）

二、 极小范数解

在方程有解时，完全可能是具有无穷多个解，实际中常常希望研究其中具有特定性质的解，例如范数最小的解，即极小范数解。

引理 1. 方程$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$若有解，则必存在唯一的极小范数解（对 2-范数），

且该解在$\mathbf{R}(\mathbf{A}^H)$中。

[证明] 设$\mathbf{x}$是方程$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解，可将其分解为$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{y}$，其中

$\mathbf{x}_0\in\mathbf{R}(\mathbf{A}^H)=\mathbf{N}^{\perp}(\mathbf{A})\to\mathbf{x}_0\perp\mathbf{N}(\mathbf{A})$， $\mathbf{y}\in\mathbf{N}(\mathbf{A})$

$$\|\mathbf{x}\|_2^2=\|\mathbf{x}_0+\mathbf{y}\|_2^2=(\mathbf{x}_0+\mathbf{y})^H(\mathbf{x}_0+\mathbf{y})=\mathbf{x}_0^H\mathbf{x}_0+\mathbf{y}^H\mathbf{y}\ =\|\mathbf{x}_0\|_2^2+\|\mathbf{y}\|_2^2\geq\|\mathbf{x}_0\|_2^2$$

而 $\mathbf{Ax}=\mathbf{Ax}_0+\mathbf{Ay}=\mathbf{Ax}_0+\mathbf{0}=\mathbf{Ax}_0=\mathbf{b}$

即： $\mathbf{x}_0$ 也是方程的解，也就是 $\mathbf{R(A^H)}$ 中存在 $\mathbf{Ax=b}$ 的解。

假设 $\mathbf{R(A^H)}$ 中存在方程 $\mathbf{Ax=b}$ 的两个解 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$， 即 $\mathbf{Ax}_1=\mathbf{Ax}_2=\mathbf{b}$

$\rightarrow \mathbf{Ax}_1-\mathbf{Ax}_2=\mathbf{0}\rightarrow(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\in\mathbf{N(A)}$ 同时 $(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\in\mathbf{N}^{\perp}\mathbf{(A)}$

$\therefore \quad (\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\in\mathbf{N(A)}\bigcap\mathbf{N}^{\perp}\mathbf{(A)}=\{\mathbf{0}\}$

$\therefore \quad \mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$

也就是说在 $\mathbf{R(A^H)}$ 中方程 $\mathbf{Ax=b}$ 只有唯一的解（若方程有解）

$\therefore$ 方程的任何其它解的 2-范数均大于 $\mathbf{x}_0$ 的 2-范数

$\therefore$ $\mathbf{x}_0$ 是极小范数解 [得证]

由证明可知，方程 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{R(A^H)}$ 的解必定是极小范数解。

引理 2. $\mathbf{A\{1,4\}}$ 由如下方程的通解构成 $\mathbf{XA}=\mathbf{A^{(1,4)}A}$，其中 $\mathbf{A^{(1,4)}}$ 是 A 的某一个{1,4}-逆。

[证明]一方面：上述方程的解一定是 A 的某一个{1,4}-逆,设 X 为其解

(ⅰ) $\mathbf{AXA}=\mathbf{AA^{(1,4)}A}=\mathbf{A}$

(iv) $\mathbf{XA}=\mathbf{A^{(1,4)}A}$ 是厄米矩阵

另一方面：A 的任何{1,4}-逆均满足上述方程，设 X 是 A 的{1,4}-逆，$\mathbf{A^{(1,4)}}$ 是某个给定的{1,4}-逆，X 满足(ⅰ)(iv)Penrose 方程

$$\mathbf{A^{(1,4)}A}\overset{(i)}{=}\mathbf{A^{(1,4)}AXA}\overset{(iv)}{=}\left(\mathbf{A^{(1,4)}A}\right)^{H}\left(\mathbf{XA}\right)^{H}=\left(\mathbf{XAA^{(1,4)}A}\right)^{H}=\left(\mathbf{XA}\right)^{H}=\mathbf{XA}$$

[得证]

以上引理说明，对于$\mathbf{X}\in\mathbf{A}\{1,4\}$， $\mathbf{XA}$是个不变量。

定理 2. 设方程$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$相容，则$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{b}$是方程的极小范数解；反之，若对任意$\mathbf{b}\in\mathbf{R}(\mathbf{A})$，存在$\mathbf{X}$使得$\mathbf{Xb}$成为该方程的极小范数解，则$\mathbf{X}\in\mathbf{A}\{1,4\}$。

[证明] 先证前半部分。推论 1$\rightarrow\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b}$是$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(1,4)}\in\mathbf{A}\{1\}\rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{b}\text{是方程的解} \\ \mathbf{A}^{(1,4)}\in\mathbf{A}\{4\}\rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{b}=\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b}=\left(\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}\right)^{\mathbf{H}}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b} \end{cases}$$

$$=\mathbf{A}^{\mathbf{H}}(\mathbf{A}^{(1,4)})^{\mathbf{H}}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b}\in\mathbf{R}(\mathbf{A}^{\mathbf{H}})$$

由引理 1 知， $\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{b}$是极小范数解。

后半部分:，存在对于任意$\mathbf{b}\in\mathbf{R}(\mathbf{A})$，均有$\mathbf{Xb}$为$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的极小范数

解，即 $\mathbf{Xb} = \mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{b}$ 为极小范数解。

因为 $\forall \mathbf{b} \in \mathbf{R(A)}$，上式都成立，将 $\mathbf{b}$ 依次取为 $\mathbf{A}$ 的各列，合起来得

$$\mathbf{XA} = \mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}$$

由引理 2 知 $\mathbf{X} \in \mathbf{A}\{1,4\}$

定理 3. 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则 $\mathbf{A}\{1,4\} = \left\{\mathbf{A}^{(1,4)} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^{(1,4)}) \mid \mathbf{Z} \in \mathbf{C}^{m\times n}\right\}$

该定理的证明可由引理 2 结合定理 1 给出。

作业：P332　2　3(1)(2)