第十四讲　　Penrose 广义逆（Π）

一、$\{1\}$-逆与$\{1,2\}$-逆

定理 1： 设 $Y, Z \in A\{1\}$，则 $YAZ \in A\{1,2\}$.

证 ： 已知 $AYA = AZA = A$ 故

(i) $A(YAZ)A = AZA = A$;

(ii) $(YAZ)A(YAZ)=YAYAZ=YAZ$.

定理 2：给定矩阵 A 及 $Z \in A\{1\}$ ，则 $Z \in A\{1,2\}$的充要条件是

$$rankA = rankZ$$

证 ：必要性. $Z \in A\{1,2\}$ 则 (i) $AZA=A$; (ii) $ZAZ=Z$

$\rightarrow A \in Z\{1,2\}$

而由 $rankA^{(1)} \geq rankA$ 可知 $rankZ \geq rankA$, $rankA \geq rankZ$

$\Rightarrow$ rankZ=rankA

充分性. 因为 $R(ZA)\subseteq R(Z)$, 而 rankZ=rankA , $Z\in A\{1\}$

故 rank(ZA)=rank(A)=rank(Z) $\rightarrow$ R(ZA)=R(Z)

$\forall e\in C^m$, $\exists u\in C^n$,使 $ZAu=Ze$

$\rightarrow ZA[u_1 u_2\cdots u_m]=Z[e_1e_2\cdots e_m]$

令 $[e_1e_2\cdots e_m]=I_m$, $[u_1 u_2\cdots u_m]=U$ (u_i=n 维, e_j=m 维)

$\Rightarrow \exists U$ 使 Z=ZAU

故 ZAZ=ZA(ZAU)=ZAU=Z $\rightarrow$ Z 满足 Penrose 方程(ii)

可见 , $Z\in A\{1,2\}$.

二、$\{1\}$-逆与$\{1,2,3\}$-逆、$\{1,2,4\}$-逆

引理：对任意 m*n 阶矩阵 A 均有 $\operatorname{rank}(A^H A) = \operatorname{rank}A = \operatorname{rank}(AA^H)$

证： $\forall x \in N(A)$，即 $Ax=0$，则 $A^H A x=0$ $\rightarrow N(A) \subseteq N(A^H A)$

另一方面 $\forall x \in N(A^H A)$，则

$x^H A^H Ax=0=(Ax)^H(Ax) \Rightarrow Ax=0 \rightarrow N(A^H A) \subseteq N(A)$

$\therefore N(A^H A)=N(A)$，又 $A^H A$ 与 A 的列数均为 n，

$\dim N(A)=n-\operatorname{rank}A$， $\dim N(A^H A)=n-\operatorname{rank}(A^H A)$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A^H A)=\operatorname{rank}A$.

$A \leftrightarrow A^H$，则 $\operatorname{rank}(AA^H)=\operatorname{rank}A^H=\operatorname{rank}A$.

定理 3： 给定矩阵 A，则 $Y=(A^H A)^{(1)} A^H \in A\{1,2,3\}$

$$Z= A^H (AA^H)^{(1)} \in A\{1,2,4\}$$

证：显然 $R(A^H A) \subseteq R(A^H)$，又由引理可知 $R(A^H A) = R(A^H)$ ，

即存在 U 使 $A^H = A^H A U \quad \rightarrow \quad A = U^H A^H A$

$AYA = (U^H A^H A)[(A^H A)^{(1)} A^H] A \overset{(i)}{=} U^H A^H A = A$ 满足(i) $\rightarrow Y \in A\{1\}$

可见 rankY≥rankA

但 $\text{rank}Y = \text{rank}\left(\left(A^H A\right)^{(1)} A^H\right) \leq \text{rank} A^H = \text{rank}A.$

即 $\text{rank}Y = \text{rank}A. \quad \rightarrow Y \in A\{1,2\}$

$$AY = (U^H A^H A)(A^H A)^{(1)} A^H = U^H A^H A (A^H A)^{(1)} A^H AU$$

$$= U^H (A^H A) U = (AY)^{(H)}$$

$\Rightarrow$ $Y \in A\{3\}$ 综合之，即 $Y \in A\{1,2,3\}$

同理可证另式。

三、关于 A^+

定理 4：给定矩阵 A， $A^+ = A^{(1,4)} AA^{(1,3)}$

证：(1)由定理 1 知 ， $A^{(1,4)} AA^{(1,3)} \stackrel{\Delta}{=} X \in A\{1,2\}$

(2) $AX = A A^{(1,4)} AA^{(1,3)} \stackrel{i}{=} AA^{(1,3)} \stackrel{iii}{=} (AA^{(1,3)})^H = (AX)^H$

(3) $XA = A^{(1,4)} AA^{(1,3)} A \stackrel{i}{=} A^{(1,4)} A \stackrel{iv}{=} (A^{(1,4)} A)^H = (XA)^H$

$\Rightarrow$ $X \in A\{1,2,3,4\} = \mathbf{A}^+$

定理 5： 给定矩阵 A，则

(1) rank A^+=rankA

(2) $(A^+)^+$=A

(3) $(A^H)^+=(A^+)^H$ ， $(A^T)^+=(A^+)^T$

(4) $(A^H A)^+=A^+(A^H)^+$ ， $(A\ A^H)^+=(A^H)^+A^+$

(5) $A^+=(A^H A)^+A^H=A^H(AA^H)^+$

(6) $R(A^+)=R(A^H), N(A^+)=N(A^H)$

证：(1) $A^+\in A\{1,2\}$ $\rightarrow$ rank A^+=rankA

(2) Penrose 方程中 (i)$\leftrightarrow$(ii), (iii)$\leftrightarrow$(iv) 互为对称

故 $(A^+)^+$=A.

(3) 直接采用四个方程验证即可。

(4) 同上。

(5) 证 $X=(A^H A)^+ A^H$，由定理 3 知 $X\in A\{1,2,3\}$，且

$$XA=(A^H A)^+ A^H A=((A^H A)^+ A^H A)^H=(XA)^H$$

$$\uparrow$$

$$(A^H A)^+ \text{当然是} \left(A^H A\right)^{(4)}$$

$$\Rightarrow X\in A\{1,2,3,4\}$$

另式同理可证。

(6) $R(A^+)\overset{(5)}{=} R(A^H(AA^H)^+)\subseteq R(A^H)$

$N(A^+)=N((A^HA)^+A^H)\supseteq N(A^H)$,而 $\text{rank}A^+=\text{rank}A=\text{rank}A^H$

$\therefore\ R(A^+)=R(A^H),N(A^+)=N(A^H)$

推论 1：若 $A\in C_n^{m\times n}$(列满秩矩阵)，则 $\mathbf{A}^+=(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$

$A\in C_m^{m\times n}$(行满秩矩阵)，则 $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{-1}$

推论 2： 对非零列向量 α，$\alpha^+=\left(\alpha^H\alpha\right)^{-1}\alpha^H$；

对非零行向量 β， $\beta^+=\beta^H\left(\beta\beta^H\right)^{-1}$；$\alpha^H\alpha,\beta\beta^H$ 均为数。

A,B 可逆，则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,但一般 $(AB)^+\neq B^+A^+$

如 $A=[1\quad 0]$, $B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$， $AB=[1]$, $BA=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$

$$(AB)^{+}=[1],\ A^{+}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ B^{+}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\ B^{+}A^{+}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

四、广义逆的计算

1、由 Hermite 标准形求{1}-逆

任何矩阵都可由初等行变换化为 Hermite 标准形。设 $A\in C_r^{m\times n}$，存在满秩矩阵 $E\in C_m^{m\times m}$，使 $EA=B$（Hermite 标准形）,采用置换矩阵 P：

$$P=\begin{bmatrix}e_{l_1} & e_{l_2} & \cdots & | & \text{其它}e_i\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$EAP=\begin{bmatrix}I_r & K\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A = E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

求{1}-逆的方法：

$$A\{1\} = \left\{ P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}_{n\times m} E \,\middle|\, KN = 0 \right\}$$ （取阶数合适的 M、L）

[证明]令 $X = P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}E$，则

$$AXA = E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}EE^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r + KN & M + KL \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r + KN & (I_r + KN)K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= A$$

2、 {1,2}-逆

当 $X \in A\{1\}$ 时，由定理可知：$rankX = rankA$ 是 $X \in A\{1,2\}$ 的充要条件。

$$X = P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}E$$，P、E 为满秩方阵

$$\therefore \quad rankX = rank\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix} = rankA = r$$

$$\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_r & M \\ 0 & L - NM \end{bmatrix} \to L - NM = 0$$

$$\therefore \quad A\{1,2\} = \left\{ P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}_{n\times m} E \,\middle|\, KN = 0, L = NM \right\}$$

3、由满秩分解求广义逆

对 A 进行满秩分解：$A = FG$，$A \in C_r^{m\times n}$，$F \in C_r^{m\times r}$，$G \in C_r^{r\times n}$

[定理] 设$A\in C_r^{m\times n}$，其满秩分解为$A=FG$，则

（1）$G^{(i)}F^{(1)}\in A\{i\} \qquad i=1,2,4$

（2）$G^{(1)}F^{(i)}\in A\{i\} \qquad i=1,2,3$

（3）$G^{(1)}F^{+}\in A\{1,2,3\}$，$G^{+}F^{(1)}\in A\{1,2,4\}$

（4）$A^{+}=G^{+}F^{(1,3)}=G^{(1,4)}F^{+}$

（5）$A^{+}=G^{+}F^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}=G^{H}(F^{H}AG^{H})^{-1}F^{H}$

证明思路：（1）（2）代入相应的 Penrose 方程即可证之，

由（1）（2）$\Rightarrow$（3）$\Rightarrow$（4）$\Rightarrow$（5）

作业 ：P 306-307 6、8、11、12