第十二讲　满秩分解与奇异值分解

一、矩阵的满秩分解

1. 定义：设$A\in C_r^{m\times n}(r>0)$，若存在矩阵$F\in C_r^{m\times r}$及$G\in C_r^{r\times n}$，使得

$A=FG$，则称其为A的一个满秩分解。

说明：（1）F为列满秩矩阵，即列数等于秩；G为行满秩矩阵，即行数等于秩。

（2）满秩分解不唯一。$\forall D\in C_r^{r\times r}$（$r$阶可逆方阵），则

$$A=FG=F(DD^{-1})G=(FD)(D^{-1}G)=F_1G_1, \text{且} F_1\in C_r^{m\times r}, G_1\in C_r^{r\times n}$$

2. 存在性定理：任何非零矩阵均存在满秩矩阵

证明：采用构造性证明方法。设$A\in C_r^{m\times n}$，则存在初等变换矩阵$E\in C_m^{m\times m}$，

使 $$EA = B = \begin{bmatrix} G \\ \cdots\cdots\cdots \\ O \end{bmatrix} \begin{matrix} r\text{行} \\ \\ (m-r)\text{行} \end{matrix}$$ ，其中 $G \in C_r^{r\times n}$

将 A 写成 $A = E^{-1}B$，并把 E^{-1} 分块成 $E^{-1} = [\underset{r\text{列}}{F} \quad | \quad \underset{(m-r)\text{列}}{S}]$，其中

$F \in C_r^{m\times r}$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} & . & \\ F & . & S \\ & . & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \cdots\cdots \\ O \end{bmatrix} = FG$$ 是满秩分解。

3. Hermite 标准形（行阶梯标准形）

设$B\in C_r^{m\times n}(r>0)$，且满足

（1）　B的前r行中每一行至少含一个非零元素（称为非零行），且第一个非零元素为 1，而后$(m-r)$行的元素全为零（称为零行）；

（2）　若 B 中第 i 行的第一个非零元素（即 1）在第 j_i 列$(i=1,2,\ldots,r)$，则

$$j_1<j_2<\ldots<j_r;$$

（3）　矩阵B的第j_1列，第j_2列，…,第j_r列合起来恰为m阶单位方阵I_m的前r列（即$j_1,j_2,\ldots,j_r$列上除了前述的 1 外全为 0）

则称B为 Hermite 标准形。

例 1 $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 6} \in C_3^{5\times 6}$ 为 Hermite 标准形

$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5} \in C_2^{4\times 5}$ 也是 Hermite 标准形

4. 满秩分解的一种求法

设 $A \in C_r^{m\times n}$，

（1） 采用行初等变换将 A 化成 Hermite 标准形，其矩阵形式为 $EA=B$，其中 B 为 Hermite 标准形定义中给出的形状；

（2） 选取置换矩阵 P

1° P 的第 i 列为 e_{j_i}，即该列向量除第 j_i 个元素为 1 外，其余元素全为零 $(i=1,2,\ldots,r)$,其中 j_i 为 Hermite 标准形中每行第一个非零元素（即 1）所在的列数；

2° 其它 $(n-r)$ 列只需确保 P 为置换矩阵即可（P 的每一行，每一列均只有一个非零元素，且为 1）；

3° 用 P 右乘任何矩阵（可乘性得到满足时），即可将该矩阵的第 j_i 列置换到新矩阵（即乘积矩阵）的第 i 列

$$4^\circ \text{ 令 } P=[\underset{r\text{列}}{P_1} \quad | \quad \underset{(n-r)\text{列}}{*}]\text{，即 } P_1=\begin{bmatrix} e_{j_1} & e_{j_2}\dots e_{j_r} \end{bmatrix}_{n\times r}\in C_r^{n\times r}$$

（3）令 $G=B$ 的前 r 行 $\in C_n^{r\times n}$， $F=AP_1\in C_r^{m\times r}$ 则 $A=FG$

证明：$EA=B=\begin{bmatrix} G \\ O \end{bmatrix}$， $A=E^{-1}B=[F \quad | \quad S]\begin{bmatrix} G \\ O \end{bmatrix}=FG$ 则 $F\in C_r^{m\times r}$，

$G\in C_r^{r\times n}$， G 已知，但 $F=?$， 当然可以通过求出 E,E^{-1} 再将 E^{-1} 分块得到，但这样 G 就没必要采用 Hermite 标准形形式，注意到 $BP_1=\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}$，

则 $AP_1 = E^{-1}BP_1 = \begin{bmatrix} F & | & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} = F$ 证毕

例 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 求其满秩分解

解：（1）首先求出 A 的秩。显然，前两行互相独立，而第三行可由第一行减去第二行得到，故 $r = 2$。

(2)进行初等变换将 A 化为 Hermite 标准型。

$$\left[A \quad | \quad I_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & . & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(1)+(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & . & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)/2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & . & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & . & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

即

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(3)求出 P_1 及 AP_1

$$\text{由} B \text{可见，}\quad j_1 = 1, j_2 = 2 \text{故} P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad F = AP_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{验证：} FG = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

而 $E^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

二、酉对角分解与奇异值分解

1. 正规矩阵的谱分解

A为正规矩阵，可酉对角化，则存在酉矩阵U，使

$$U^H A U=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & O\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda$$

将U写成列向量形式，即$U=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}$，则

$$A=U\Lambda U^H=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & O \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^H \\ u_2^H \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n^H \end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i u_i^H$$

这种分解形式称为正规矩阵的谱分解。

2. 非奇异矩阵的酉对角分解

定理：设A为n阶非奇异矩阵，则存在n阶酉矩阵U及V，使得

$$U^{H}AV=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & & O\\ & \sigma_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & \sigma_n\end{bmatrix},\quad \sigma_i>0(i=1,2,\ldots,n)$$

（若将U,V写成$U=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \ldots & u_n\end{bmatrix},V=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \ldots & v_n\end{bmatrix}$,

则 $$A=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i u_i v_i^{\mathrm{H}}$$ ）

证：$A^{H}A$也为n阶非奇异矩阵，而且是厄米、正定矩阵，故存在n阶

酉矩阵V，使 $V^H(A^HA)V=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & O \\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$ σ_i^2为A^HA的特征值。

令 $\sum=\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & O \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & \sigma_n \end{bmatrix}$，则 $V^HA^HAV=\sum^2$

令$U^H=\sum^{-1}V^HA^H, \to U=AV\sum^{-1}$，则

$$U^HU=\sum^{-1}(V^HA^HAV)\sum^{-1}=I_n$$

即U也是酉矩阵，而且$U^HAV=\sum^{-1}V^HA^HAV=\sum$　证毕

酉对角分解的求法正如证明中所给：先对A^HA对角化（酉对角化），求出变换矩阵V，再令$U=AV\sum^{-1}$即可。

3. 一般矩阵的奇异值分解

定理：设$A\in C_r^{m\times n}$，则存在m阶酉矩阵U及n阶酉矩阵V，使

$$U^H A V = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & & & 0 & \\ & \sigma_2 & & & O \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \sigma_r & \\ \hline & O & & & O \end{array}\right] & \begin{array}{l} r\text{行} \\ \\ (m-r)\text{行} \end{array} \\ \quad r\text{列} \qquad\qquad (n-r)\text{列} & \end{array} \qquad \text{即}$$

$$A = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & O \\ & \sigma_2 & & & \\ & & . & & \\ & & & \sigma_r & \\ O & & & & O \end{bmatrix} V^H$$

证：首先考虑 $A^H A$。因为 $rank(A^H A)=rank(AA^H)=rankA$，故 $A^H A\in C_r^{n\times n}$，

而且是厄米、半正定的，存在n阶酉矩阵V，使

$$V^H(A^H A)V=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & & & O\\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \sigma_r^2 & \\ O & & & & O\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$令\sum=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & & O\\ & \sigma_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & \sigma_r\end{bmatrix},\quad V=\begin{matrix}[V_1 & | & V_2]\\ r列 & & (n-r)列\end{matrix}\quad 则$$

$$V^H(A^HA)V=\begin{bmatrix}V_1^H(A^HA)V_1 & V_1^H(A^HA)V_2\\ V_2^H(A^HA)V_1 & V_2^H(A^HA)V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}$$

$$V_1^H(A^HA)V_1=\sum^2 \qquad V_1^H(A^HA)V_2=O_{r\times(n-r)}$$

$$V_2^H(A^HA)V_2=O_{(n-r)\times(n-r)}$$

令$U_1 = AV_1 \sum^{-1}$ 则$U_1^H AV_1 = \sum$ ，又$(AV_2)^H (AV_2) = 0 \to AV_2 = 0$

在U_1的基础上构造酉矩阵$U = [U_1 \quad | \quad U_2]$，即$U^H U = I$

这由前面基扩充定理可知是可行的，

$$U_1^H U_1 = I_r, U_1^H U_2 = O_{r\times(n-r)}, U_2^H U_2 = I_{n-r}$$

故

$$U^H AV = \begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^H AV_1 & U_1^H AV_2 \\ U_2^H AV_1 & U_2^H AV_2 \end{bmatrix}$$

其中已知

$$U_1^H AV_1 = \sum \quad 而 \quad U_1^H AV_2 = 0, U_2^H AV_2 = 0 \quad (\because AV_2 = 0)$$

$$U_2^H AV_1 = U_2^H (U_1 \sum \ ) = (U_2^H U_1) \sum = 0$$

故定理得证。

奇异值分解的求法可按证明步骤求之。

作业： P225 1(2)， 2， 5

P233 1