第十三讲 Penrose 广义逆矩阵(I)

一、Penrose 广义逆矩阵的定义及存在性

所谓广义，即推广了原有概念或结果。我们知道，逆矩阵概念是针对非奇异的（或称为满秩的）方阵。故这一概念可推广到：（1）奇异方阵;（2）非方矩阵。事实上， Penrose 广义逆矩阵涵盖了两种情况。

对于满秩方阵 A, A^{-1}存在，且 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$　　故，当然有

$$\begin{cases} AA^{-1}A=A \\ A^{-1}AA^{-1}=A \\ (AA^{-1})^H=AA^{-1} \\ (A^{-1}A)^H=A^{-1}A \end{cases}$$

这四个对满秩方阵显然成立的等式构成了 Penrose 广义逆的启示。

1. Penrose 定义：设 $A \in C^{m\times n}$，若 $Z \in C^{n\times m}$ 且使如下四个等式成立，

$$AZA = A,\quad ZAZ = Z,\quad (AZ)^H = AZ,\quad (ZA)^H = ZA$$

则称 Z 为 A 的 Moore-Penrose(广义)逆，记为，$A^{\dagger}$。

而上述四个等式又依次称为 Penrose 方程（i）,(ii) ,(iii) ,(iv)。

2. Moore-Penrose 逆的存在性和唯一性

定理：任给 $A \in C^{m\times n}$，$A^{\dagger}$ 均存在且唯一。

证明：存在性. $\forall$ $A \in C_r^{m\times n}$，均存在酉矩阵 $U \in C_m^{m\times m}$，$V \in C_n^{n\times n}$ 使

$$
U^H AV = D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \vdots & \\ & \sigma_2 & & & \vdots & \\ & & \ddots & & \vdots & 0 \\ & & & \sigma_r & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & 0 & & & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \quad 即 \quad A = UDV^H
$$

其中，$\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_r^2$ 是 $A^H A$ 的全部非零特征值。

此时，令 $Z=V\tilde{D}U^H \in C_r^{n\times m}$ 则

$$\tilde{D} = \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1^{-1} & & & & \\ & \sigma_2^{-1} & & & \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & \sigma_r^{-1} & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right]_{n\times m}$$

$$\text{(i)}\ AZA = (UDV^H)(V\tilde{D}U^H)(UDV^H) = UD\tilde{D}DV^H = UDV^H = A$$

$$\text{(ii)}\ ZAZ = (V\tilde{D}U^H)(UDV^H)(V\tilde{D}U^H) = V\tilde{D}D\tilde{D}U^H = V\tilde{D}U^H = Z$$

$$\text{(iii)}\ (AZ)^H = [(UDV^H)(V\tilde{D}U^H)]^H = (UD\tilde{D}U^H)^H = UD\tilde{D}U^H = AZ$$

$$\text{(iv)}\,(ZA)^H = (V\tilde{D}DV^H)^H = V\tilde{D}DV^H = ZA$$

即， $Z = A^{\dagger}$

其　中　$D\tilde{D} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$　　$\tilde{D}D = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$　　$AZ = UD\tilde{D}U^H$ ，

$$ZA = V\tilde{D}DV^H$$

唯一性：设 Z ,Y 均满足四个 Penrose 方程，则

$$Z = ZAZ = Z(AZ)^H = ZZ^H A^H = ZZ^H (AYA)^H = Z(AZ)^H (AY)^H$$
$$= Z(AZ)(AY) = ZAY = (ZA)^H Y = A^H Z^H Y = A^H \; Z^H (YAY)$$
$$= A^H Z^H (YA)^H Y = A^H Z^H A^H Y^H Y = (AZA)^H Y^H Y = A^H Y^H Y$$
$$= (YA)^H Y = YAY = Y$$

即，满足四个 Penrose 方程的 Z 是唯一的.

该证明实际上给出了 Moore-Penrose 逆的一种构造方法。由 $A^\dagger$ 的唯一性可知：(1)当 A 为满秩方阵时，$A^\dagger = A^{-1}$；(2) $A^\dagger$ 实际上还是一个限制相当严格，可考虑更加放宽。

3. $\{i, j, \cdots, l\}$-逆的定义：$\forall A \in C^{m\times n}$，若 $Z \in C^{n\times m}$ 且满足 Penrose 方程中的第 $(i), (j), \cdots, (l)$ 个方程，则称 Z 为 A 的 $\{i, j, \cdots, l\}$-逆，记为

$A^{(i,j,\cdots,l)}$，其全体记为 $A\{i,j,\cdots,l\}$。$\{i,j,\cdots,l\}$ - 逆共有 $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$ 类，但实际上常用的为如下 5 类：

$$\mathrm{A}\{1\}, \mathrm{A}\{1,2\}, \mathrm{A}\{1,3\}, \mathrm{A}\{1,4\}, \mathrm{A}\{1,2,3,4\} = A^{\dagger}$$

二、{1}-逆的性质

引理： $rank(AB) \le \min\ (rankA, rank\ B\ )$

证明：矩阵的秩＝行秩＝列秩. 将 A、B写成 $(A\in C^{m\times n},\ B\in C^{n\times p})$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

（1）设 $rank(A)=r$，则必存在 $a_{l_1},a_{l_2},\cdots,a_{l_r}$ $(l_1,l_2,\cdots,l_r$两两不同）成为线性无关的向量组。所以，其它列向量 a_i 可表示为:

$$a_i=\sum_{k=1}^{r}p_{ik}a_{l_k} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$AB = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= [\ \sum_{i=1}^{n} b_{i1} a_i \quad \sum_{i=1}^{n} b_{i2} a_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ip} a_i\ ]$$

可见 AB 的各列向量均为$a_{l_1}, a_{l_2}, \cdots, a_{l_r}$的线性组合。亦即

$$rank(AB) \le r = rank(A)$$

(2) 同理。设$rank(B) = s$,则必存在 $b_{m_1}, b_{m_2}, \cdots, b_{m_s}$ 成为线性无关的向量组。所以，其它列向量b_i可表示为:

$$b_i=\sum_{k=1}^{s}q_{ik}b_{m_k}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_{1i}b_i \\ \sum_{i=1}^{n}a_{2i}b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}a_{mi}b_i \end{bmatrix}$$

可见，AB 的各行向量均为$b_{m_1},b_{m_2},\cdots,b_{m_s}$的线性组合，故

$$rank(AB)\le rank\ B=s$$

合起来即 $rank(AB) \le \min\ (rankA, rank\ B\ )$

定理：设 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times P}, \lambda \in C,\ \lambda^{\dagger} = \begin{cases} \lambda^{-1} & \lambda \ne 0 \\ 0 & \lambda = 0 \end{cases}$ 则

(1) $(A^{(1)})^H \in A^H\{1\}$

(2) $\lambda^{\dagger} A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}$

(3) S、T 为可逆方阵且与 A 可乘，则

$$T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in (SAT)\{1\}\ ,\ (S \in C_m^{m\times m}, T \in C_n^{n\times n})$$

(4) $rank\,(A^{(1)}) \ge rankA$

(5) $AA^{(1)}$和$A^{(1)}A$均为幂等矩阵且与A同秩 $(P^2 = P)$

(6) $R(AA^{(1)}) = R(A),\quad N(A^{(1)}A) = N(A),\quad R((A^{(1)}A)^H) = R(A^H)$

(7) $A^{(1)}A=I_n \quad \Leftrightarrow \quad rank(A)=n$

$AA^{(1)}=I_m \quad \Leftrightarrow \quad rank(A)=m$

(8) $AB(AB)^{(1)}A=A \quad \Leftrightarrow rank(AB)=rank(A)$

$B(AB)^{(1)}AB=B \quad \Leftrightarrow \quad rank(AB)=rank(B)$

证明：(1) $A^H(A^{(1)})^H A^H=(AA^{(1)}A)^H=A^H \quad \rightarrow (A^{(1)})^H \in A^H\{1\}$

(2) $\lambda=0$时，$\lambda A=0_{m\times n}$，$\lambda^{\dagger}A^{(1)}=0_{n\times m}$.显然成立.

$\lambda \neq 0$时，$(\lambda A)(\lambda^{\dagger}A^{(1)})(\lambda A)=(\lambda\lambda^{-1}\lambda)(AA^{(1)}A)=\lambda A$

(3) $(SAT)(T^{-1}A^{(1)}S^{-1})(SAT)=S(AA^{(1)}A)T=SAT$

(4) $rank(A)=rank(AA^{(1)}A)\le rank(A^{(1)})$

$$(5)\quad AA^{(1)}A = A \quad \rightarrow \begin{cases} AA^{(1)}A\cdot A^{(1)} = A\cdot A^{(1)} & \rightarrow (AA^{(1)})^2 = AA^{(1)} \\ A^{(1)}\cdot AA^{(1)}A = A^{(1)}\cdot A & \rightarrow (A^{(1)}A)^2 = A^{(1)}A \end{cases}$$

又

$$rank(A) = rank(AA^{(1)}A) \le rank(AA^{(1)}) \le rank(A)$$

$$\rightarrow rank(AA^{(1)}) = rank(A)$$

同理，$rank(A^{(1)}A) = rank(A)$

(6)

- $R(A) = \{Ax \mid x \in C^n\} \subset C^m, R(AA^{(1)}) = \{AA^{(1)}y \mid y \in C^m\} \subset C^m$

$$\Rightarrow R(A) \supseteq R(AA^{(1)}) \supseteq R(AA^{(1)}A) \quad \rightarrow R(A) = R(AA^{(1)})$$

- $N(A) = \{x \mid Ax = 0, x \in C^n\} \subseteq C^m,$

$N(A^{(1)}A) = \{x \mid A^{(1)}Ax = 0 \ , x \in C^n\} \subseteq C^n$

$$\Rightarrow \quad N(A) \subseteq N(A^{(1)}A) \subseteq N(AA^{(1)}A) = N(A) \quad \to N(A) = N(A^{(1)}A)$$

在 $R(AA^{(1)}) = R(A)$ 中，将 A 换为 A^H， $A^{(1)}$ 换为 $(A^{(1)})^H$,则有

$$R(A^H) = R(A^H(A^{(1)})^H) = R((A^{(1)}A)^H)$$

(7) 以 $AA^{(1)} = I_m \quad \Leftrightarrow \quad rankA = m$ 为例.

$$\Rightarrow: \qquad rankA = rank(AA^{(1)}) = rank(I_m) = m.$$

$$\Leftarrow: \qquad rank(AA^{(1)}) = rankA = m$$

即 $AA^{(1)}$ 为 m 阶满秩可逆方阵,$(AA^{(1)})^{-1}$ 存在。

又 $AA^{(1)}$ 幂等：（$AA^{(1)})^2$＝$AA^{(1)}$，乘以（$AA^{(1)})^{-1}$，得 $AA^{(1)}$＝I_m

(8) $R(A) = \{Ax \mid x \in C^n\} \subseteq C^m$

$$R(AB) = \{ABy \mid y \in C^P\} \subseteq C^m \quad \to R(A) \supseteq R(AB)$$

• 对 $AB(AB)^{(1)}A = A \quad \Leftrightarrow \quad rank(AB) = rank(A)$

$\Rightarrow$: $\quad rankA = rank(AB(AB)^{(1)}A) \le rank(AB) \le rank(A)$

$\to \quad rank(AB) = rankA$

$\Leftarrow$: $\quad rankA = \dim R(A), \quad rank(AB) = \dim R(AB)$

故 $\quad R(A) = R(AB)$

即，$\forall x \in C^n, \exists y \in C^p$，使 $\quad Ax = ABy$. 故

$Ax = ABy = AB(AB)^{(1)}ABy = AB(AB)^{(1)}Ax$

(注意 $\forall x \in C^n$) $\to AB(AB)^{(1)}A = A$

$\bullet$ 对 $B(AB)^{(1)}AB = B \quad \Leftrightarrow \quad rank(AB) = rank(B)$

$\Rightarrow$: $\quad rankB = rank(B(AB)^{(1)}AB) \le rank(AB) \le rank(B)$

$\rightarrow \quad rank(AB) = rankB$

$\Leftarrow$: $\quad R(B(AB)^{(1)}AB) = \{B(AB)^{(1)}ABy \mid y \in C^p\} \subseteq R(B) = \{Bx \mid x \in C^p\}$

又 ,

$$rankB = rank(AB) = rank(AB(AB)^{(1)}AB) \le rank(B(AB)^{(1)}AB) \le rankB$$

$\rightarrow rankB = rank(B(AB)^{(1)}AB) \quad \Rightarrow \quad R(B) = R(B(AB)^{(1)}AB)$

即，$\forall\, x \in C^p$， $\exists\, y \in C^p$，使 $B(AB)^{(1)}ABy = Bx$．故

$$Bx = B(AB)^{(1)}ABy = B(AB)^{(1)}AB(AB)^{(1)}ABy = B(AB)^{(1)}ABx$$

$\therefore B(AB)^{(1)}AB = B$

定理：矩阵 A 当且仅当 A 为满秩方阵时具有唯一的{1}逆，此时

$$A^{(1)} = A^{-1}$$

作业：P306　　3，4，5