第三讲 线性变换及其矩阵

一、线性变换及其运算

定义：设V是数域K上的线性空间，T是V到自身的一个映射，使得对于V中的任意元素x均存在唯一的$y \in V$与之对应，则称T为V的一个变换或算子，记为

$$Tx = y$$

称y为x在变换T下的象，x为y的原象。

若变化T还满足

$$T(kx + ly) = k(Tx) + l(Ty) \quad \forall x, y \in V, k, l \in K$$

称 T 为线性变换。

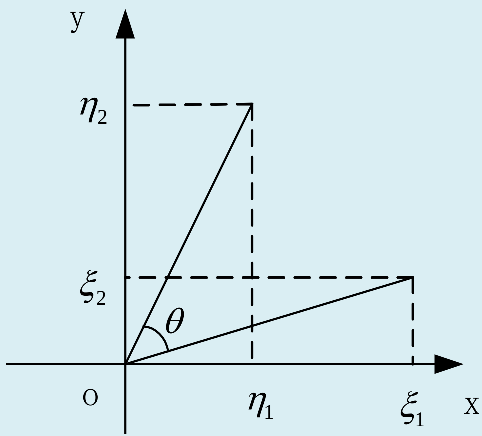
[例 1] 二维实向量空间 $R^2=\left\{\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\middle|\ \xi_i\in R\right\}$，将其绕原点旋转 θ 角的操作就是一个线性变换。

[证明] $x=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$ $\quad y=Tx=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$ $\quad\begin{cases}\eta_1=\xi_1\cos\theta-\xi_2\sin\theta\\ \eta_2=\xi_1\sin\theta+\xi_2\cos\theta\end{cases}$

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\in R^2$$

可见该操作为变换，下面证明其为线性变换

$$\forall x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\quad z=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}\in R^2,\quad k,l\in\mathbf{R}$$



$$kx+lz=\begin{bmatrix}kx_1\\kx_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}lz_1\\lz_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx_1+lz_1\\kx_2+lz_2\end{bmatrix}$$

$$T(kx+lz)=\begin{bmatrix}\cos\boldsymbol{\theta} & -\sin\boldsymbol{\theta}\\ \sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}kx_1+lz_1\\kx_2+lz_2\end{bmatrix}$$

$$=k\begin{bmatrix}\cos\boldsymbol{\theta} & -\sin\boldsymbol{\theta}\\ \sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+l\begin{bmatrix}\cos\boldsymbol{\theta} & -\sin\boldsymbol{\theta}\\ \sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$$

$$=k(Tx)+l(Tz)$$

$\therefore$ T 是线性变换。

[例 2] 次数不超过n的全体实多项式P_n构成实数域上的一个$n+1$维的线性空间，其基可选为$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$，微分算子$D=\frac{d}{dx}$是$P_n$上的一个线性变换。

[证明] 显然D对P_n而言是变换，

要证明D满足线性变换的条件

$\forall f, g \in \mathbf{P_n}$， $k, l \in \mathbf{R}$

$$D(kf+lg)=k(Df)+l(Dg)$$

$\therefore$ D是P_n上的线性变换。

2. 性质

（1） 线性变换把零元素仍变为零元素

（2） 负元素的象为原来元素的象的负元素

（3） 线性变换把线性相关的元素组仍变为线性相关的元素组

[证明] 线性变换 $T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty)$

（1）$T(O)=T(0x)=0(Tx)=O$

（2）$T(-x)=(-1)(Tx)=-(Tx)$

（3）元素组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$\sum_{i=1}^{m} k_i x_i = 0$$

则 $$T(\sum_{i=1}^{m} k_i x_i) = \sum_{i=1}^{m} k_i (Tx_i) = T(0) = 0$$

$\therefore$ $\{Tx_i\}$线性相关。

[得证]

应该注意，线性无关的元素组经过线性变换不一定再是线性无关的，变换后的情况与元素组和线性变换有关。若线性变换T将所有的元素组仍变换为线性无关的元素组，则称之为满秩的线性变换，其变换矩阵为满秩矩阵。

3. 线性变换的运算

（1） 恒等变换T_e：$\forall x \in V, T_e x = x$

（2） 零变换T_0：$\forall x \in V, T_0 x = 0$

（3） 变换的相等：T_1、T_2是V的两个线性变换，$\forall x \in V$，均有$T_1 x = T_2 x$，则称$T_1 = T_2$

（4） 线性变换的和$T_1 + T_2$：$\forall x \in V$，$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T x_2$

（5） 线性变换的数乘kT：$\forall x \in V$，$(kT)x = k(Tx)$

负变换：$(-T)x = -(Tx)$

（6） 线性变换的乘积$T_1 T_2$：$\forall x \in V$，$(T_1 T_2)x = T_1(T_2 x)$

（7） 逆变换T^{-1}：$\forall x \in V$，若存在线性变换S使得$(ST)x \equiv x$，则

称 S 为 T 的逆变换 $S=T^{-1}$

（8） 线性变换的多项式：

$$T^n=\underbrace{TT\cdots T}_{n\square}\text{，并规定}T^0=T_e$$

$$f(T)=\sum_{n=0}^{N}a_nT^n \quad\rightarrow\quad f(T)x=\sum_{n=0}^{N}a_nT^nx$$

需要说明的是：

1）T_e 也称为单位变换，它的矩阵表示为单位矩阵 I；

2）T_0 对应的矩阵表示为零矩阵；

3）和矩阵的乘积一样，线性变换的乘积不满足交换律；

4）不是所有的变换都具有逆变换，只有满秩变换才有逆变换，$ST = T_e$；

5）恒等变换、零变换、线性变换的和、乘积多项式及逆变换（若存在）

均为线性变换。

二、线性变换的矩阵表示

线性变换用矩阵表示，将抽象的线性变换转化为具体的矩阵形式。

设T是线性空间V^n的一个线性变换，且 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$V^n$的一个基，$\forall x \in \mathbf{V^n}$，存在唯一的坐标表示

$$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$$

$$Tx = T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n)$$

$$= [Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [T(x_1, x_2, \cdots, x_n)] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

因此，要确定线性变换T，只需确定基元素在该变换下的象就可以了。

$$Tx_i=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{bmatrix}$$

$$T[x_1,x_2,\cdots,x_n]=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]A$$

对于任意元素x，在该基下，变换后Tx的坐标表示为

$$Tx = [x_1, x_2, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

同时

$$Tx = [T(x_1, x_2, \cdots, x_n)] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \cdots, x_n] A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

对比可知：

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

即：

$$x \leftrightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$Tx \leftrightarrow A\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

1. 定义：把 A 称为 T 在基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 下的矩阵。

2. 定理：设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 V^n 的一个基，T_1、T_2 在该基下的矩阵分别为 A、B。则有

（1）$(T_1 + T_2)[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n](A+B)$

（2）$kT_1[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n](kA)$

（3）$(T_1T_2)[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n](AB)$

（4）$T^{-1}\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]A^{-1}$

推论 1. 设 $f(t)=\sum_{i=0}^{m}a_i t^i$ 为纯量 t 的 m 次多项式，T 为线性空间V^n 的一个线性变换，且在V^n 的基$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$下的矩阵为 A，则

$$f(T)\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]f(A)$$

其中 $f(T)=a_0T_e+a_1T+a_2T^2+\cdots+a_nT^n$

$$f(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$$

推论 2. 设线性变换T 在V^n 的基$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$下的矩阵为 A，元素 x 在该基下的坐标为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则 Tx 在该基下的坐标

$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$满足

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

3.相似矩阵

设T在V^n的两个基$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$及$\{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$的矩阵分别为$A$和$B$，且$[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]C$，则

$$B = C^{-1}AC$$

即A和B为相似矩阵。

[证明] $$T\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]A$$

$$T\left[x_1',x_2',\cdots,x_n'\right]=\left[x_1',x_2',\cdots,x_n'\right]B$$

$$T\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]C=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]CB$$

$$\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]AC=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]CB$$

$\Rightarrow AC=CB$ 即 $B=C^{-1}AC$

定理：n阶方阵A和B相似的充要条件是A和B为同一线性变换在不同基下的矩阵。

[证明] 必要性：已知A和B相似，即存在可逆矩阵P使$B=P^{-1}AP$

选取一个基$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，定义

$$T\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]A$$

考虑$\left[x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots, x_n^{'}\right] = \left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]P$可作为基，且

$$T\left[x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots, x_n^{'}\right] = T\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]P$$

$$= \left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]AP$$

$$= \left[x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots, x_n^{'}\right]P^{-1}AP$$

$$= \left[x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots, x_n^{'}\right]B$$

$\therefore A$和B为同一线性变换在不同基下的矩阵。

充分性的证明由相似矩阵定义的证明给出。

三、线性变换及矩阵的值域和核

1. 定义：设T是线性空间V^n的线性变换，称

$$R(T)=\{Tx \mid x\in \mathbf{V^n}\}$$ 为T的值域；

$$N(T)=\{x \mid x\in \mathbf{V^n}, Tx=0\}$$ 称为T的核。

$R(T)$和$N(T)$均为V^n的子空间。

设A为$m\times n$阶矩阵，称

$$R(A)=\{Ax \mid x\in \mathbf{R^n} \text{ or } \quad x\in \mathbf{C^n}\}$$ 为矩阵A的值域；

$$N(A)=\{x \mid x\in \mathbf{R^n} \text{ or } \quad x\in \mathbf{C^n}, Ax=0\}$$ 为A的核。

$\dim R(T)$、$\dim N(T)$称为T的秩和零度；

$\dim R(A)$、$\dim N(A)$称为A的秩和零度。

2. 定理：（1）$\dim R(T)+\dim N(T)=\dim \mathbf{V}^{\mathbf{n}}$

（2）$\dim R(A)=\mathrm{rank}(A)$

（3）$\dim R(A)+\dim N(A)=n$，n 为 A 的列数。

若 A 是线性变换 T 的矩阵，则

$$\dim R(T)=\dim R(A)，\quad \dim N(T)=\dim N(A)$$

[证明]：（1）设 $\dim N(T)=r$， $\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$ 是 $N(T)$ 的一组基，则根据基扩定理，可将其扩展为 V^n 的一组基 $\{x_1,x_2,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n\}$，可以证明 $\{Tx_{r+1},Tx_{r+2},\cdots,Tx_n\}$ 是 $R(T)$ 的一组基。

设 $\forall x\in V^n$， $x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n$，则

$Tx=k_1Tx_1+k_2Tx_2+\cdots+k_nTx_n$

$\because \quad Tx_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$

$\therefore \quad Tx = k_{r+1}Tx_{r+1} + k_{r+2}Tx_{r+2} + \cdots + k_nTx_n$

即 $R(T)$ 中的任意元素 Tx 均可由 $\{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \cdots, Tx_n\}$ 线性表示。下面证明 $\{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \cdots, Tx_n\}$ 线性无关

设 $\sum_{i=r+1}^{n} l_iTx_i = 0$， 即 $T\left(\sum_{i=r+1}^{n} l_ix_i\right) = 0$，

则 $\sum_{i=r+1}^{n} l_ix_i \in N(T)$，可用 $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 线性表示，即：

$$\sum_{i=r+1}^{n} l_ix_i = \sum_{i=1}^{r} p_ix_i$$

$\because \quad \{x_1, x_2, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n\}$线性无关 $\quad \therefore \quad l_i = 0 \qquad (i = r+1, \cdots, n)$

$\therefore \quad \{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \cdots, Tx_n\}$线性无关

$\therefore \quad \{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \cdots, Tx_n\}$是$R(T)$的一组基，$\dim R(T) = n - r$

$\therefore \quad \dim R(T) + \dim N(T) = \dim \mathbf{V}^{\mathbf{n}}$

（2）由定义知，$R(A)$是 A 的列向量所张成的子空间，$\dim R(A)$等于列向量组中最大线性无关组中的元素个数，即列向量组的秩，又因为矩阵 A 的秩 rankA 等于列向量组的秩，所以$\dim R(A) = \operatorname{rank}(A)$

（3）$N(A)$是 Ax=0 的解空间，若 rankA=r，则$\dim N(A) = n - r$

所以$\dim R(A) + \dim N(A) = n$，$n$为$A$的列数。 ［证毕］

作业：P77—78，1、2、6、7