第一讲　线性空间

一、 线性空间的定义及性质

[知识预备]

★集合：笼统的说是指一些事物（或者对象）组成的整体。

集合的表示：枚举、表达式

集合的运算：并（$\bigcup$），交（$\bigcap$）

另外，集合的“和”（＋）：并不是严格意义上集合的运算，因为它限定了集合中元素须有可加性。

★数域：一种数集，对四则运算封闭（除数不为零）。比如有理数域、实数域（R）和复数域（C）。实数域和复数域是工程上较常用的两个数域。

线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是学习现代矩阵论的重要基础。线性空间的概念是某类事物从量的方面的一个抽象。

1．线性空间的定义：

设V是一个非空集合，其元素用x,y,z等表示；K是一个数域，其元素用k,l,m等表示。如果V满足[如下 8 条性质，分两类]：

（I）在V中定义一个“加法”运算，即当$x,y\in V$时，有唯一的和$x+y\in V$（封闭性），且加法运算满足下列性质:

（1）结合律　　$x+(y+z)=(x+y)+z$；

（2）交换律　　$x+y=y+x$；

（3）零元律　　存在零元素O，使$x+O=x$；

（4）负元律　对于任一元素 $x\in V$，存在一元素 $y\in V$，使 $x+y=O$，且称 y 为 x 的负元素，记为（$-x$）。则有 $x+(-x)=O$。

（II）在 V 中定义一个“数乘”运算，即当 $x\in V,k\in K$ 时，有唯一的 $kx\in V$（封闭性），且数乘运算满足下列性质:

（5）数因子分配律　$k(x+y)=kx+ky$；

（6）分配律　$(k+l)x=kx+lx$；

（7）结合律　$k(lx)=(kl)x$；

（8）恒等律　$1x=x$；　[数域中一定有 **1**]

则称 V 为数域 K 上的线性空间。

注意以下几点：

1）线性空间不能离开某一数域来定义，因为同一个集合，如果数域不同，该集合构成的线性空间也不同。

2）两种运算、八条性质。数域 K 中的运算是具体的四则运算，而 V 中所定义的加法运算和数乘运算则可以十分抽象。

3）除了两种运算和八条性质外，还应注意唯一性、封闭性。唯一性一般较显然，封闭性还需要证明，出现不封闭的情况：集合小、运算本身就不满足。

当数域 K 为实数域时，V 就称为实线性空间；K 为复数域，V 就称为复线性空间。

例1． 设$R^+=${全体正实数}，其“加法”及“数乘”运算定义为

$$x \boxplus y = xy \quad , \qquad k \circ x = x^k$$

证明：R^+是实数域R上的线性空间。

[证明] 首先需要证明两种运算的唯一性和封闭性

①唯一性和封闭性

唯一性显然

若$x>0, y>0$，$k \in R$，则有

$$x \boxplus y = xy \in R^+, \quad k \circ x = x^k \in R^+$$ 封闭性得证。

②八条性质

（1） $x \boxplus (y \boxplus z) = x(yz) = (xy)z = (x \boxplus y) \boxplus z$ [结合律]

（2）　$x \boxplus y = xy = yx = y \boxplus x$　[交换律]

（3）　**1** 是零元素　　$x \boxplus 1 = x \cdot 1 = x$　[零元律]

$$[x \boxplus O = x \rightarrow xO = x \rightarrow O = 1]$$

（4）　${}^{1}\!/\!{}_{x}$ 是 x 的负元素　$x \boxplus {}^{1}\!/\!{}_{x} = x \cdot {}^{1}\!/\!{}_{x} = 1$　　[负元律]

（5）$k \circ (x \boxplus y) = (xy)^k = x^k y^k = (k \circ x) \boxplus (k \circ y)$　[数因子分配律]

（6）　$(k + l) \circ x = x^{k+l} = x^k x^l = (k \circ x) \boxplus (l \circ x)$　[分配律]

（7）　$k \circ (l \circ x) = (x^l)^k = x^{kl} = (kl) \circ x$　　　[结合律]

（8）　$1 \circ x = x^1 = x$　　　　　[恒等律]

由此可证，　R^+ 是实数域 R 上的线性空间。

2．定理：线性空间具有如下性质

（1）零元素是唯一的，任一元素的负元素也是唯一的。

（2）如下恒等式成立： $0x = O$，$(-1)x = (-x)$。

[证明]（1）采用反证法：

①零元素是唯一的。设存在两个零元素 O_1 和 O_2，则由于 O_1 和 O_2 均为零元素， 按零元律有

[交换律]

$$O_1 + O_2 = O_1 = O_2 + O_1 = O_2$$

所以 $O_1 = O_2$

即 O_1 和 O_2 相同，与假设相矛盾，故只有一个零元素。

②任一元素的负元素也是唯一的。假设$\forall x \in V$，存在两个负元素y和z，则根据负元律有

$$x + y = O = x + z$$

$$y = y + O = y + (x + z) = (y + x) + z = O + z = z$$

[零元律]　　　　　　[结合律]　　[零元律]

即y和z相同，故负元素唯一。

（2）①：设$w = 0x$，则$x + w = 1x + 0x = (1 + 0)x = x$，故$w = O$。

[恒等律]

②：设$w = (-1)x$，则$x + w = 1x + (-1)x = 0x = O$，故$w = -x$。

3．线性相关性

线性空间中相关性概念与线性代数中向量组线性相关性概念类似。

•线性组合：$\forall x_1, x_2 \cdots, x_m \in V, c_1, c_2 \cdots, c_m \in K$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

称为元素组 $x_1, x_2 \cdots, x_m$ 的一个线性组合。

•线性表示：V 中某个元素 x 可表示为其中某个元素组的线性组合，则称 x 可由该元素组线性表示。

•线性相关性：如果存在一组不全为零的数 $c_1, c_2 \cdots, c_m \in K$，使得对于元素 $x_1, x_2 \cdots, x_m \in V$ 有

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i = 0$$

则称元素组$x_1, x_2 \cdots, x_m$线性相关，否则称其线性无关。线性相关性概念是个非常重要的概念，有了线性相关性才有下面的线性空间的维数、基和坐标。

4．线性空间的维数

定义：线性空间V中最大线性无关元素组所含元素个数称为V的维数，记为$\dim V$。

本课程只考虑有限维情况，对于无限维情况不涉及 。

例 2. 全体 m×n 阶实矩阵的集合构成一个实线性空间（对于矩阵加法和数对矩阵的数乘运算），求其维数。

[解] 一个直接的方法就是找一个最大线性无关组，其元素尽可能简单。

令 E_{ij} 为这样的一个 m×n 阶矩阵，其 (i, j) 元素为 1，其余元素为零。

显然，这样的矩阵共有 m×n 个，构成一个具有 m×n 个元素的线性无关元素组 $\left\{E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}; E_{21}, E_{22,} \cdots, E_{2n}; \cdots; E_{m1}, E_{m2}, \cdots, E_{mn}\right\}$。另一方面，还需说明元素个数最大。对于任意的 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，都可由以上元素组线性表示，

$$A=\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}\to\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}-A=0$$

即$\left\{E_{ij}\middle|i=1,2\cdots,m;j=1,2\cdots,n\right\}$构成了最大线性无关元素组，所以该空间的维数为 m×n。

二、 线性空间的基与坐标

1. 基的定义：设V是数域K上的线性空间，$x_1,x_2\cdots,x_r(r\geq1)$是属于$V$的$r$个任意元素，如果它满足

（1）$x_1,x_2\cdots,x_r$线性无关；

（2）V中任一向量x均可由$x_1,x_2\cdots,x_r$线性表示。

则称$x_1,x_2\cdots,x_r$为V的一个基，并称$x_1,x_2\cdots,x_r$为该基的基元素。

•基正是V中最大线性无关元素组；V的维数正是基中所含元素的个数。

•基是不唯一的，但不同的基所含元素个数相等。

例3　考虑全体复数所形成的集合C。如果$K=C$（复数域），则该集合对复数加法和复数的乘法构成线性空间，其基可取为 1，空间维数为 1；如果取$K=R$（实数域），则该集合对复数加法及实数对复数的数乘构成线性空间，其基可取为$\{1,i\}$，空间维数为 2。

数域 K	两种运算	基	一般元素	空间类型	维数
复数域 C	（1）复数加法；（2）复数对复数的数乘	$\{1\}$	$c=c\cdot 1$	复线性空间	1
实数域 R	（1）复数加法；（2）实数对复数的数乘	$\{1,i\}$	$c=a\cdot 1+b\cdot i$	实线性空间	2

2. 坐标的定义：称线性空间V^n的一个基$x_1, x_2 \cdots, x_n$为V^n的一个坐标系，$\forall x \in V^n$，它在该基下的线性表示为：

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \quad (\xi_i \in K, x_i \in V^n, i = 1, 2 \cdots, n)$$

则称$\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n$为$x$在该坐标系中的坐标或分量，记为$(\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n)^T$

讨论：（1）一般来说，线性空间及其元素是抽象的对象，不同空间的元素完全可以具有千差万别的类别及性质。但坐标表示却把它们统一了起来，坐标表示把这种差别留给了基和基元素，由坐标所组成的新向量仅由数域中的数表示出来。

（2）更进一步，原本抽象的“加法”及 “数乘”经过坐标表示就演化为向量加法及数对向量的数乘。

$$1^\circ \quad \begin{aligned} x+y &= (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n) + (\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots + \eta_n x_n) \\ &= (\xi_1+\eta_1)x_1 + (\xi_2+\eta_2)x_2 + \cdots + (\xi_n+\eta_n)x_n \end{aligned}$$

正对应

$$\begin{cases} x = (\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n) \\ y = (\eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_n) \end{cases} \rightarrow x+y = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2 \cdots, \xi_n+\eta_n)$$

$$2^\circ \quad kx = k(\xi x + \xi x + \cdots + \xi x) = (k\xi_1)x_1 + (k\xi_2)x_2 + \cdots + (k\xi_n)x_n$$

$$\rightarrow (k\xi_1, k\xi_2 \cdots, k\xi_n)$$

正对应 $x = (\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_n) \rightarrow kx = (k\xi_1, k\xi_2 \cdots, k\xi_3)$

（3）显然，同一元素在不同坐标系中的坐标是不同的。后面我们还要研究这一变换关系。

三、 基变换与坐标变换

基是不唯一的，因此，需要研究基改变时坐标变换的规律。

设 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 是 V^n 的旧基，$y_1, y_2 \cdots, y_n$ 是 V^n 的新基，由于两者都是基，所以可以相互线性表示

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i \quad (i = 1, 2 \cdots, n)$$

即

$$[y_1, y_2 \cdots, y_n] = [x_1, x_2 \cdots, x_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [x_1, x_2 \cdots, x_n] C$$

其中C称为过渡矩阵，上式就给出了基变换关系，可以证明，C是可逆的。

设$x \in V^n$，它在旧基下的线性表示为

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = [x_1, x_2 \cdots, x_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

它在新基下的线性表示为

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' y_i = [y_1, y_2 \cdots, y_n] \begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{bmatrix}$$

则 $$[y_1, y_2 \cdots, y_n]\begin{bmatrix}\xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} = [x_1, x_2 \cdots, x_n]\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix}$$

由于基元素的线性无关性，得到坐标变换关系

$$C\begin{bmatrix}\xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} = C^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix}$$

作业：P25－26　　3，5，7，9

补充：证明对于线性空间的零元素O，$\forall k\in K$，均有$kO=O$。