第九讲 矩阵微分方程

一、矩阵的微分和积分

1. 矩阵导数定义：若矩阵$A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$的每一个元素$a_{ij}(t)$是变量 t 的可微函数，则称$A(t)$可微，其导数定义为

$$\frac{dA}{dt}=A'(t)=\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)_{m\times n}$$

由此出发，函数可以定义高阶导数，类似地，又可以定义偏导数。

2. 矩阵导数性质：若$A(t),B(t)$是两个可进行相应运算的可微矩阵，则

（1）$\frac{d}{dt}[A(t)\pm B(t)]=\frac{dA}{dt}\pm\frac{dB}{dt}$

（2） $\dfrac{d}{dt}[A(t)B(t)]=\dfrac{dA}{dt}B+A\dfrac{dB}{dt}$

（3） $\dfrac{d}{dt}[a(t)A(t)]=\dfrac{da}{dt}A+a\dfrac{dA}{dt}$

（4） $\dfrac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)=Ae^{tA}=e^{tA}A$ $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\cos\left(tA\right)\right)=-A\sin\left(tA\right)$

$\dfrac{d}{dt}\left(\sin\left(tA\right)\right)=A\cos\left(tA\right)$

(A 与 t 无关)

此处仅对$\dfrac{d}{dt}(e^{tA})=Ae^{tA}=e^{tA}A$加以证明

证明：

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \frac{d}{dt}(I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots) = A + tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \cdots$$

$$= A(I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots) = Ae^{tA}$$

又$= (I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots)A = e^{tA}A$

3. 矩阵积分定义：若矩阵$A(t) = (a_{ij}(t))_{m\times n}$的每个元素$a_{ij}(t)$都是区间$[t_0, t_1]$上的可积函数，则称$A(t)$在区间$[t_0, t_1]$上可积，并定义$A(t)$在$[t_0, t_1]$上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1} A(t)dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}$$

4. 矩阵积分性质

（1）$\int_{t_0}^{t_1}[A(t)\pm B(t)]dt=\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\pm\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt$

（2）$\int_{t_0}^{t_1}[A(t)B]dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\right)B,\quad \int_{t_0}^{t_1}[AB(t)]dt=A\left(\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt\right)$

（3）$\dfrac{d}{dt}\int_a^t A(t')dt'=A(t),\quad \int_a^b A'(t)dt=A(b)-A(a)$

二、 一阶线性齐次常系数微分方程组

设有一阶线性齐次常系数微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

式中 t 是自变量，$x_i = x_i(t)$是 t 的一元函数$(i=1,2,\cdots,n)$，

$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$是常系数。

令

$$x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}，\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则原方程组变成如下矩阵方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)$$

其解为

$$x(t)=e^{tA}x(0)=e^{tA}c \xrightarrow{\text{更一般的}} x(t)=e^{(t-t_0)A}x(t_0)$$

对该解求导，可以验证

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ae^{tA}c = Ax(t) \quad \text{且}\, t=0\,\text{时，} \quad x(t) = e^{0A}c = Ic = c = x(0)$$

表明 $x(t)$确为方程的解，积分常数亦正确。

例：求解微分方程组$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$，　初始条件为$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$

解：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，$f(A) = e^{tA} \quad \rightarrow \quad f(\lambda) = e^{t\lambda}$

1^{o}求出 A 的特征多项式，$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^{2}+1)=(\lambda-j)(\lambda+j)$，

$j=\sqrt{-1}$

$\lambda_1=j, m_1=1; \lambda_2=-j, m_2=1$

2^{o}定义待定系数的多项式 $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda$

3^{o}解方程

$$g(\lambda_1)=f(\lambda_1)=e^{jt}=\cos t+j\sin t=c_0+jc_1$$

$$g(\lambda_2)=f(\lambda_2)=e^{-jt}=\cos t-j\sin t=c_0-jc_1$$

$$\begin{cases}c_0=\cos t\\ c_1=\sin t\end{cases}$$

4^{o}

$$g(A) = c_0 I + c_1 A = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$= f(A) = e^{tA}$$

$$x(t) = e^{tA} x(0) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos t + r_2 \sin t \\ r_2 \cos t - r_1 \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

三、 一阶线性非齐次常系数微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

令

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$b(t) = [b_1(t), b_2(t), \cdots, b_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

方程组化为矩阵方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax+b$$

采用常数变易法求解之；齐次方程组的解为$e^{tA}c$，可设非齐次方程组的解为$e^{tA}c(t)$，

代入方程，得：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(e^{tA})c(t)+e^{tA}\frac{dc}{dt}=\cancel{Ax}(t)+e^{tA}\frac{dc}{dt}=\cancel{Ax}(t)+b(t)\rightarrow\frac{dc}{dt}=e^{-tA}b(t)$$

$\therefore\ c(t)=\int_0^t e^{-sA}b(s)ds \ \leftarrow$ 由积分性质(3)可验证 $c(t)$是解。

加上初始条件，有

$$x(t)=e^{tA}\left[c(0)+\int_0^t e^{-sA}b(s)ds\right]$$

说明:高阶常微分方程常可以化为一阶常微分方程组来处理,

如: $$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f$$

令 $x_1 = y, x_2 = \frac{dy}{dt}$，则可得

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{a}(f - cx_1 - bx_2) = -\frac{c}{a}x_1 - \frac{b}{a}x_2 + \frac{f}{a} \end{cases}$$

一般地, n 阶常微分方程可以化为 n 个一阶常微分方程组成的方程组。

作业：p170-171　　5、9

p177　　3、4