第二讲　线性子空间

一、线性子空间的定义及其性质

1. 定义：设V_1是数域K上的线性空间V的一个非空子集合，且对V已有的线性运算满足以下条件

（1）如果$x, y \in V_1$，则$x + y \in V_1$；

（2）如果$x \in V_1$，$k \in K$，则$kx \in V_1$，

则称V_1是V的一个线性子空间或子空间。

2. 性质：（1）线性子空间V_1与线性空间V享有共同的零元素；

（2）V_1中元素的负元素仍在V_1中。

[证明]（1）$0x = O$

$$x \in V_1 \subset V$$

$\therefore V$中的零元素也在V_1中，V_1与V享有共同的零元素。

（2）$\forall x \in V_1$

$(-1)x = (-x) \in V_1$　封闭性

$\therefore$ V_1中元素的负元素仍在V_1中

3. 分类：子空间可分为平凡子空间和非平凡子空间

平凡子空间：$\{0\}$和V本身

非平凡子空间：除以上两类子空间

4. 生成子空间：设$x_1, x_2 \cdots, x_m$为V中的元素，它们的所有线性组合的集合

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} k_i x_i \middle| k_i \in K, i=1,2\cdots,m\right\}$$

也是V的线性子空间，称为由$x_1,x_2\cdots,x_m$生（张）成的子空间，记为$L(x_1,x_2\cdots,x_m)$或者$Span(x_1,x_2\cdots,x_m)$。

若$x_1,x_2\cdots,x_m$线性无关，则

$$\dim\{L(x_1,x_2\cdots,x_m)\}=m$$

5. 基扩定理：设V_1是数域K上的线性空间V^n的一个m维子空间，$x_1,x_2\cdots,x_m$是V_1的一个基，则这m个基向量必可扩充为V^n的一个基；换言之，在V^n中必可找到$n-m$个元素$x_{m+1},x_{m+2}\cdots,x_n$，使得$x_1,x_2\cdots,x_n$成为$V^n$的一个基。这

$n-m$个元素必不在V_1中。

二、子空间的交与和

1.定义：设V_1、V_2是线性空间V的两个子空间，则

$$V_1 \cap V_2 = \{x | x \in V_1, x \in V_2\}$$

$$V_1 + V_2 = \{x + y | x \in V_1, y \in V_2\}$$

分别称为V_1和V_2的交与和。

2.定理：若V_1和V_2是线性空间V的两个子空间，则$V_1 \cap V_2$，$V_1 + V_2$均为V的子空间

[证明]（1）$\forall x, y \in V_1 \cap V_2$

$$x + y \in V_1 \qquad x + y \in V_2$$

$$\therefore\ x+y\in V_1\bigcap V_2$$

$$\forall x\in V_1\bigcap V_2\quad k\in K$$

$$kx\in V_1\quad kx\in V_2\quad \therefore\ kx\in V_1\bigcap V_2$$

$\therefore\ V_1\bigcap V_2$是$V$的一个线性子空间。

（2）$\forall x_1,x_2\in V_1\quad \forall y_1,y_2\in V_2$

$$(x_1+y_1)\in V_1+V_2\qquad (x_2+y_2)\in V_1+V_2\qquad (x_1+x_2)\in V_1\qquad (y_1+y_2)\in V_2$$

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\in V_1+V_2$$

$$\forall k\in K\qquad kx_1\in V_1\qquad ky_1\in V_2$$

$$k(x_1+y_1)=kx_1+ky_1\in V_1+V_2$$

$\therefore\ V_1+V_2$是V的子空间。

3. 维数公式：若V_1、V_2是线性空间V的子空间，则有

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

[证明] 设 $\dim V_1=n_1, \dim V_2=n_2, \dim(V_1\cap V_2)=m$

需要证明$\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$

设$x_1,x_2\cdots,x_m$是$V_1\cap V_2$的一个基，根据基扩定理

存在 1）$y_1,y_2\cdots,y_{n1-m}\in V_1$，使$x_1,x_2\cdots,x_m,y_1,y_2\cdots,y_{n1-m}$成为$V_1$的一个基；

2）$z_1,z_2\cdots,z_{n2-m}\in V_2$，使$x_1,x_2\cdots,x_m,z_1,z_2\cdots,z_{n2-m}$成为$V_2$的一个基；

考察$x_1,x_2\cdots,x_m,y_1,y_2\cdots,y_{n1-m},z_1,z_2\cdots,z_{n2-m}$,

若能证明它为V_1+V_2的一个基，则有$\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$。

成为基的两个条件：

1） 它可以线性表示V_1+V_2中的任意元素

2） 线性无关

显然条件 1）是满足的，现在证明条件 2），采用反证法。

假定上述元素组线性相关，则存在一组不全为 0 的数$k_1,k_2\cdots,k_m,p_1,p_2\cdots,p_{n1-m},q_1,q_2\cdots,q_{n2-m}$使

$$\sum k_i x_i+\sum p_i y_i+\sum q_i z_i=0$$

令$z=\sum q_i z_i\in V_2$，则

$$\sum k_i x_i + \sum p_i y_i = -z \in V_1$$

$$\therefore \quad -z \in V_1 \bigcap V_2$$

则$-z$可用$x_1, x_2 \cdots, x_m$线性表示，

$$\therefore \quad p_i = 0$$

则，$\sum k_i x_i + \sum q_i z_i = 0$

因为，$x_1, x_2 \cdots, x_m, z_1, z_2 \cdots, z_{n2-m}$线性无关

$$\therefore \quad q_i = 0 \quad k_i = 0$$

这与假设矛盾，所以上述元素线性无关，可作为$V_1 + V_2$的一个基。

三、子空间的直和

1. 定义：设V_1、V_2是线性空间V的子空间，若其和空间V_1+V_2中的任一元素只能唯一的表示为V_1的一个元素与V_2的一个元素之和，即$\forall x\in V_1+V_2$，存在唯一的$y\in V_1, z\in V_2$，使$x=y+z$，则称V_1+V_2为V_1与V_2的直和，记为$V_1\oplus V_2$

子空间的直和并不是一种特殊的和，仍然是

$$V_1+V_2=\{y+z\,|\,y\in V_1, z\in V_2\},$$

反映的是两个子空间的关系特殊。

2. 定理：如下四种表述等价

（1）V_1+V_2成为直和$V_1\oplus V_2$

（2）$V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$

（3）$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

（4）$x_1, x_2 \cdots, x_s$ 为 V_1 的基， $y_1, y_2 \cdots, y_t$ 为 V_2 的基， 则

$x_1, x_2 \cdots, x_s, y_1, y_2 \cdots, y_t$ 为 $V_1 + V_2$ 的基

[证明]（2）和（3）的等价性显然

采用循环证法：（1）$\rightarrow$（2）$\rightarrow$（4）$\rightarrow$（1）

（1）$\rightarrow$（2）：已知 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$

假定 $x \neq 0$ 且 $x \in V_1 \bigcap V_2$，则

$$0 = 0 + 0 = x + (-x)$$

$0 \in V_1 + V_2$， $0 \in V_1$， $0 \in V_2$， $x \in V_1$， $-x \in V_2$

说明对 0 元素存在两种分解，这与直和的定义矛盾，所以假定不成立，在$V_1 \bigcap V_2$中只能存在 0 元素，即$V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$

（2）$\to$（4）：已知$V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$

成为基的两个条件：

1） 可以线性表示$V_1 + V_2$中的任意元素

2）线性无关

$\forall x \in V_1$，$y \in V_2$，存在如下坐标表示式

$$x = \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i$$

$x + y$可表示$V_1 + V_2$中的任一元素，

$\therefore x_1, x_2 \cdots, x_s, y_1, y_2 \cdots, y_t$ 可表示 $V_1 + V_2$ 中的任意元素。

假设 $x_1, x_2 \cdots, x_s, y_1, y_2 \cdots, y_t$ 线性相关，即存在不全为 0 的 $\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_s, \eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_t$ 使

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i + \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i = 0$$

而 $x = \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \in V_1 \quad y = \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i \in V_2$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i = -y \in V_2$$

$\therefore \quad \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \in V_1 \cap V_2$

$\therefore \quad \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i = 0$

$\therefore \quad \xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_s = 0$

同理$\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_s = 0$

这与其线性相关性矛盾，$x_1, x_2 \cdots, x_s, y_1, y_2 \cdots, y_t$线性无关

$\therefore \ x_1, x_2 \cdots, x_s, y_1, y_2 \cdots, y_t$可作为$V_1 + V_2$的基

（4）$\rightarrow$（1）：已知（4）成立

在$x_1, x_2 \cdots, x_s, y_1, y_2 \cdots, y_t$这组基下

$\forall x \in V_1 + V_2$ 存在唯一的坐标 $\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_s, \eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_t$ 使

$$x = \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i + \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \in V_1 \qquad \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i \in V_2$$

$\therefore$ $V_1 + V_2$ 成为直和

作业：P25－26，11、12、13