# 第二十讲 矩阵特征值估计

特征值计算较困难，希望找到简便的特征值界限或分布范围的估计方法。

## 一、 特征值界的估计

定理 1. 设 $A\in R^{n\times n}$， $\lambda$ 为 A 的任意特征值，则有

$$\left|\mathrm{Im}(\lambda)\right|\le M\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$

其中， $$M=\max_{1\le i,j\le n}\left|\frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}\right|$$

证明：设 x 为 A 的属于特征值 $\lambda$ 的单位特征向量，即 $Ax=\lambda x$，$x^H x=1$，

则

$$\lambda = x^H A x \ \rightarrow \ \overline{\lambda} = \left(x^H A x\right)^H = x^H A^H x$$

$$\lambda - \overline{\lambda} = 2j\mathrm{Im}(\lambda) = x^H\left(A - A^H\right)x = x^H\left(A - A^T\right)x$$

将 x 写成 $x = \left[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\right]^T$

$$x^H\left(A - A^T\right)x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\xi}_i\left(a_{ij} - a_{ji}\right)\xi_j$$

$$2\left|\mathrm{Im}(\lambda)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\xi}_i\left(a_{ij} - a_{ji}\right)\xi_j\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\overline{\xi}_i\left(a_{ij} - a_{ji}\right)\xi_j\right|$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}{}' |\xi_i \xi_j| |a_{ij} - a_{ji}| \qquad （\sum{}' 表示不含 i=j）$$

$$\leq 2M \sum_{i,j=1}^{n}{}' |\xi_i \xi_j|$$

$$|\mathrm{Im}(\lambda)|^2 \leq M^2 \left( \sum_{i,j=1}^{n}{}' |\xi_i \xi_j| \right)^2$$

$$\leq M^2 n(n-1) \sum_{i,j=1}^{n}{}' |\xi_i \xi_j|^2$$

$$= M^2 n(n-1) \sum_{i,j=1}^{n}{}' |\xi_i|^2 |\xi_j|^2$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}{}' \left|\xi_i\right|^2 \left|\xi_j\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left|\xi_i\right|^2 \left|\xi_j\right|^2 - \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right|^4 \le \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right|^2 - \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right|^4$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right|^2 \left(1 - \left|\xi_i\right|^2\right)$$

不妨写为：

$$= \left|\xi_1\right|^2 \left(1 - \left|\xi_1\right|^2\right) + \left|\xi_2\right|^2 \left(1 - \left|\xi_2\right|^2\right) + \sum_{i=3}^{n} \left|\xi_i\right|^2 \left(1 - \left|\xi_i\right|^2\right)$$

$$\le \left(\frac{|\xi_1|^2+\left(1-|\xi_1|^2\right)}{2}\right)^2+\left(\frac{|\xi_2|^2+\left(1-|\xi_2|^2\right)}{2}\right)^2+\sum_{i=3}^{n}|\xi_i|^2\left(1-|\xi_i|^2\right)$$

$$\le \frac{1}{2}$$

取等号的条件为$|\xi_1|^2=|\xi_2|^2=\frac{1}{2}$，但$\|x\|^2=1$，所以其它$|\xi_i|^2=0$

$$\therefore\ |\mathrm{Im}(\lambda)|\le M\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$

定理 2. 设$A\in R^{n\times n}$，$\lambda$为 A 的任意特征值，则有

$$|\lambda| \le n\rho \qquad |\mathrm{Re}(\lambda)| \le \frac{1}{2} n\tau \qquad |\mathrm{Im}(\lambda)| \le \frac{1}{2} ns$$

其中，$\rho = \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$，$\tau = \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij} + \overline{a_{ji}}|$，$s = \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij} - \overline{a_{ji}}|$

二、 盖尔圆法

定义：设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in C^{n\times n}$,由方程 $|z - a_{ii}| \le R_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ i\ne j}}^{n} |a_{ij}|$ 所确定的圆称为 A 的第 i 个盖尔圆，$R_i$ 称为盖尔圆的半径。

定理 3：矩阵 A 的所有特征值均落在它的所有盖尔圆的并集之中。

证明：设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in C^{n\times n}$，$\lambda$ 为 A 的某一个特征值，x 为相应的特征

向量，将 x 写成$x=\left[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right]^T$，设$\left|\xi_{i_0}\right|=\max\left|\xi_{\mathrm{i}}\right|$

由$Ax=\lambda x$，考虑$i_0$行

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\xi_j=\lambda\xi_{i_0}$$

$$\left(\lambda-a_{i_0 i_0}\right)\xi_{i_0}=\sum_{j=1}^{n}{}' a_{i_0 j}\xi_j \quad \left(j\neq i_0\right)$$

$$\left|\lambda-a_{i_0 i_0}\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}{}' a_{i_0 j}\frac{\xi_j}{\xi_{i_0}}\right|\leq\sum_{j=1}^{n}{}'\left|a_{i_0 j}\right|\left|\frac{\xi_j}{\xi_{i_0}}\right|\leq R_{i_0}$$

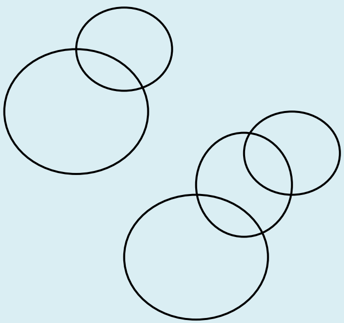
对于 A 的特征值$\lambda$，一定存在$i_0\left(1\leq i_0\leq n\right)$，使$\lambda$落在 A 的第$i_0$个盖尔

圆中，对于每个特征值都有相同的结论。

定理 4. 将矩阵 A 的全体盖尔圆的并集按连通部分分成若干个子集,（一个子集由完全连通的盖尔圆组成，不同子集没有相连通的部分），对每个子集，若它恰好由 K 个盖尔圆组成，则该子集中恰好包含 A 的 K 个特征值。

说明：盖尔圆相互重叠时重复计算，特征值相重时也重复计算

证明：设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in C^{n\times n}$，



令 $B(u)=\begin{bmatrix} a_{11} & ua_{12} & ua_{13} & \cdots & ua_{1n} \\ ua_{21} & a_{22} & ua_{23} & \cdots & ua_{2n} \\ ua_{31} & ua_{32} & a_{33} & \cdots & ua_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ua_{n1} & ua_{n2} & ua_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$0\le u\le 1$，$B(0)=diag\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$，$B(1)=A$

$B(u)$的特征多项式是 u 的多项式，其特征值是 u 的连续函数，观察 u（$0\le u\le 1$）变化的过程中$B(u)$特征值的变化，特征值只能在盖尔圆连通的子集内变动，而不能跨出连通子集。

由此可见，由 K 个盖尔圆组成的连通子集恰好包含 K 个特征值。

应该注意到：连通的这些盖尔圆中，有些盖尔圆可能包含两个或多个特征值，而其它盖尔圆中可能无特征值。

推论 1. 孤立盖尔圆中恰好包含一个特征值。

推论 2. 实矩阵的孤立盖尔圆恰好包含一个实特征值。

推论 3. 盖尔圆方法中盖尔圆半径可以按列求和。（因为方阵转置后特征值不变）

推论 4. 盖尔圆半径变为$R_i = {\sum_{j=1}^{n}}' \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\left|a_{ij}\right|$，两个盖尔圆定理仍然成立。

说明如下：相似矩阵$P^{-1}AP$与 A 具有相同的特征值，取

$$P = diag\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix} \ (\alpha_i > 0)$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix} \left[a_{ij}\right] \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\alpha_i}{\alpha_j} a_{ij}\right]$$

根据推论 4，选取适当的$\alpha_i$使盖尔圆变大或变小，可以对特征值进行隔离。但有时这种隔离特征值的方法会失效，如对于那些对角线上

由相同元素组成的矩阵，此时盖尔圆的圆心相同。

作业：P261　　2，3，4