武汉大学 2018-19 第一学期《数值分析（1）》期末实验报告题

说明：报告包括：1、实验内容；2、背景知识介绍；3、代码；4、数值结果（表格或图形）；5、结果分析；6、计算过程碰到的问题，解决办法及收获或体会。

实验报告统一用 A4 纸打印（便于装订存档），单面或双面打印，不要配封面，至多订一颗钉子（装订时钉子要取下来，所有不要订太多钉子）。

电子文档命名为：数值 2017301000999 张三.doc，请发送至：hxiang@whu.edu.cn，并且 email 的标题为:数值实验+学号+姓名（便于打分和查询）；尽量在 12 月 31 日前提交。

第一题：

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = a, \qquad 0 < a < 1, \\ y(0) = 0, y(1) = 1. \end{cases}$$

差分离散后得到线性方程组 Ax=b，其中 A 为$(n-1)\times(n-1)$

$$A = \begin{bmatrix} -(2\varepsilon+h) & \varepsilon+h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon+h) & \varepsilon+h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon+h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon+h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon+h) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{b} = (ah^2,\ \cdots,\ ah^2,\ ah^2 - \varepsilon - h)^{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{h} = \frac{1}{n}.$$

对 $\varepsilon = 1, a = \frac{1}{2}, n = 100$，分别用 Jacobi，G-S 和超松弛迭代方法求线性方程组的解，要求有 4 位有效数字，然后比较与精确解的误差.

对 $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.0001$，考虑同样的问题.

收敛准则为残差小于 1e-6，比较各类方法的迭代步数。绘制各方法的残差曲线。用 plot 命令绘制计算解和精确解，其中精确解为

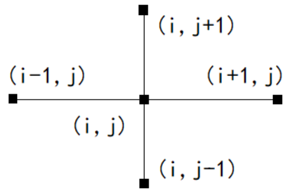
$$y = \frac{1-a}{1-\mathrm{e}^{-1/\varepsilon}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) + ax.$$

第二题:

求解 Dirichlet 问题

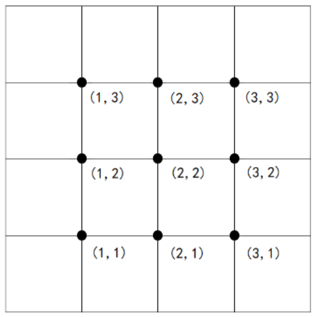
$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,y) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \Omega = [0,1]^2,$$

其中$\mathrm{f(x,y)} = \pi(2\pi\varepsilon\,\sin\pi x + a\,\cos\pi x)\sin\pi y$。



区域离散：将 x、y 方向 N 等分，　步长$h = \frac{1}{N}$。

方程离散:



$$-(\Delta u)_{ij} \approx \frac{-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad (a<0)$$

在(i,j)点偏微分方程近似为（$1 \le i,\ \ j \le N-1$）

$$-\varepsilon \mathrm{u}_{i,j-1} - \varepsilon \mathrm{u}_{i-1,j} + (4\varepsilon - \mathrm{ah})\mathrm{u}_{i,j} - (\varepsilon - \mathrm{ah})\mathrm{u}_{i+1,j} - \varepsilon \mathrm{u}_{i,j+1} = \mathrm{h}^2 \mathrm{f}_{i,j}$$

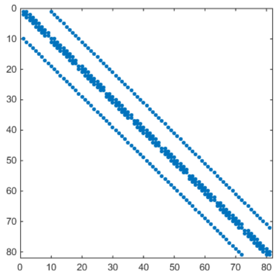
简单起见，考察$\mathrm{N} = 4$。

$$\begin{bmatrix}
4\varepsilon - ah & -\varepsilon + ah & & -\varepsilon & & & & & \\
-\varepsilon & 4\varepsilon - ah & -\varepsilon + ah & & -\varepsilon & & & & \\
 & -\varepsilon & 4\varepsilon - ah & & & -\varepsilon & & & \\
-\varepsilon & & & 4\varepsilon - ah & -\varepsilon + ah & & -\varepsilon & & \\
 & -\varepsilon & & -\varepsilon & 4\varepsilon - ah & -\varepsilon + ah & & -\varepsilon & \\
 & & -\varepsilon & & -\varepsilon & 4\varepsilon - ah & & & -\varepsilon \\
 & & & -\varepsilon & & & 4\varepsilon - ah & -\varepsilon + ah & \\
 & & & & -\varepsilon & & -\varepsilon & 4\varepsilon - ah & -\varepsilon + ah \\
 & & & & & -\varepsilon & & -\varepsilon & 4\varepsilon - ah
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix}
= h^2 \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix}$$

记为

$$\mathrm{Au} = \mathrm{f}.$$

一般地，
$$A=\begin{bmatrix} S & -\varepsilon I & & & & \\ -\varepsilon I & S & -\varepsilon I & & & \\ & -\varepsilon I & S & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & S & -\varepsilon I \\ & & & & -\varepsilon I & S \end{bmatrix},$$



由有$n\times n$块构成（$n=N-1$），每个块（子）矩阵大小为$n\times n$。

参考：用张量积亦可导出线性方程组。定义四个$n\times n$矩阵

$$T=\mathrm{diag}(-1,2,-1),\quad U=(u_{ij}),\ F=(f_{ij}),\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix}。$$

将矩阵方程$\varepsilon\,(TU+UT)+ah\,BU=h^2F$ 按列拉直：

$$(\,\varepsilon\,(I\otimes T+T\otimes I)+ah\ I\otimes B\,)\,u=h^2f，\ 此即Au=f\ 形式。$$

取$\varepsilon=1$，$a=-1$分别用经典迭代法（Jacobi、G-S、SOR）和 CG 方法求解。收敛准则为残差小于 1e-6，比较各类方法的迭代步数。绘制各方法的残差曲线。图示数值解$u(x,y)$。进一步，取$\varepsilon=0.1$，0.01；$a=-10,-100$等各参数进行求解，考察参数ε和 a对迭代法的影响。

注：用 CGLS 求解非对称问题时，无需显式形成$A^{T}A$。

ε对应于扩散，a对应于对流。ε大，a小时问题较容易；a 的方向（正负号）也影响计算格式。

计算结果可用 surf 命令图示：

比如，获得计算解u以后，

可参考下面的命令

```
U = zeros( n );
U(:) = u;
t = ( 1 : n )' * h;
figure, surf ( t, t, W );
```