

武汉大学数学与统计学院

偏微分方程数值解实验报告

Homework 2

班级: 2017 级信计班

姓名: 江金阳

学号: 2017301000090



WUHAN UNIVERSITY

2020 年 5 月 12 日

目录

Problem1	2
1.1 理论推导	2
1.1.1 相容性分析	2
1.1.2 稳定性分析	3
1.2 数值算例	4
Problem2	5
2.1 理论推导	5
2.2 数值结果	6
2.3 网格细化分析	7
2.4 关于 Crank-Nicolson 方法结果中的突起	8
Problem3	9
3.1 理论推导	9
3.1.1 相容性分析	9
3.1.2 稳定性分析	10
3.2 数值算例	10
Problem4	11
4.1 理论推导	11
4.2 数值结果	11
4.3 误差分析	11
4.4 关于收敛阶验证的反思	13

Problem1

验证 Crank-Nicolson 方法在二维热传导方程

$$u_t = \beta(u_{xx} + u_{yy}) + f$$

中是相容的和稳定的.

1.1 理论推导

在本问题中, 将网格取为

$$x_i = ih, y_j = jh, t^k = k\Delta t$$

对二维热传导方程, Crank-Nicolson 方法有如下的形式

$$\begin{aligned} \frac{U_{ij}^{k+1} - U_{ij}^k}{\Delta t} = & \frac{1}{2} \left(\beta_{ij}^{k+1} \frac{U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i+1,j}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1} - 4U_{ij}^{k+1}}{h^2} + f_{ij}^{k+1} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\beta_{ij}^k \frac{U_{i-1,j}^k + U_{i+1,j}^k + U_{i,j-1}^k + U_{i,j+1}^k - 4U_{ij}^k}{h^2} + f_{ij}^k \right) \end{aligned}$$

1.1.1 相容性分析

将格式的左端在 $t = (k + \frac{1}{2})\Delta t$ 处 Taylor 展开可得

$$\frac{u(x_i, y_j, t^{k+1}) - u(x_i, y_j, t^k)}{\Delta t} = u_t(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t^2}{24} u_{ttt}(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2)$$

将格式的右端在 $x = ih, y = jh$ 处 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{i-1}, y_j, t^k) + u(x_{i+1}, y_j, t^k) + u(x_i, y_{j-1}, t^k) + u(x_i, y_{j+1}, t^k) - 4u(x_i, y_j, t^k)}{h^2} \\ = & u_{xx}(x_i, y_j, t^k) + u_{yy}(x_i, y_j, t^k) + \frac{h^2}{12} (u_{xxxx}(x_i, y_j, t^k) + u_{yyyy}(x_i, y_j, t^k)) + O(h^2) \\ & \frac{u(x_{i-1}, y_j, t^{k+1}) + u(x_{i+1}, y_j, t^{k+1}) + u(x_i, y_{j-1}, t^{k+1}) + u(x_i, y_{j+1}, t^{k+1}) - 4u(x_i, y_j, t^{k+1})}{h^2} \\ = & u_{xx}(x_i, y_j, t^{k+1}) + u_{yy}(x_i, y_j, t^{k+1}) + \frac{h^2}{12} (u_{xxxx}(x_i, y_j, t^{k+1}) + u_{yyyy}(x_i, y_j, t^{k+1})) + O(h^2) \end{aligned}$$

若 β 是常函数, 那么还有

$$\begin{aligned} \frac{\beta(u_{xx}(x_i, y_j, t^{k+1}) - u_{xx}(x_i, y_j, t^k))}{2} &= \beta u_{xx}(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2) \\ \frac{\beta(u_{yy}(x_i, y_j, t^{k+1}) - u_{yy}(x_i, y_j, t^k))}{2} &= \beta u_{yy}(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

由以上各式和原 PDE $u_t = \beta(u_{xx} + u_{yy}) + f$, 若 f 也是常函数, 那么

$$\begin{aligned} T(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) &= \frac{\Delta t^2}{24} u_{ttt}(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) - \frac{\beta h^2}{12} (u_{xxxx}(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + u_{yyyy}(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}})) + O(\Delta t^2 + h^2) \end{aligned}$$

对上面的格式显然有

$$\lim_{h \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} T(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) = 0$$

故在此问题中 Crank-Nicolson 格式是相容的.

1.1.2 稳定性分析

为简化问题, 令 $f = 0$, 使用 von-Neumann 方法对 Crank-Nicolson 方法分析, 设

$$U_{lj}^k = e^{i(lh_x\xi_1 + jh_y\xi_2)}$$

$$U_{lj}^{k+1} = g(\xi_1, \xi_2) e^{i(lh_x\xi_1 + jh_y\xi_2)}$$

将上面的结果代入差分方程中得到

$$\frac{g(\xi_1, \xi_2) - 1}{\Delta t} = -4 (\sin^2(\xi_1 h_x/2) + \sin^2(\xi_2 h_y/2)) \frac{\beta_{ij}^{k+1} g(\xi_1, \xi_2) + \beta_{ij}^k}{2h^2}$$

由于动态稳定性的需要, 设已知 $\beta \geq \beta_0 > 0$, 那么有

$$\begin{aligned} g(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1 - a (\sin^2(\xi_1 h_x/2) + \sin^2(\xi_2 h_y/2))}{1 + b (\sin^2(\xi_1 h_x/2) + \sin^2(\xi_2 h_y/2))} \\ &= -\frac{a}{b} + \frac{1 + a/b}{1 + b (\sin^2(\xi_1 h_x/2) + \sin^2(\xi_2 h_y/2))} \\ a &= 2\Delta t \beta_{ij}^k / h^2 \\ b &= 2\Delta t \beta_{ij}^{k+1} / h^2 \end{aligned}$$

当 $|g(\xi_1, \xi_2)| \leq 1$ 时, 令 $r = \sin^2(\xi_1 h_x/2) + \sin^2(\xi_2 h_y/2) \in [0, 2]$, 可得到

$$g(\xi_1, \xi_2) = -\frac{a}{b} + \frac{1 + a/b}{1 + br} \in [\frac{1 - 2a}{1 + 2b}, 1]$$

$$\frac{1 - 2a}{1 + 2b} \geq -1 \Rightarrow a - b \leq 1 \Rightarrow \frac{2\Delta t}{h^2} (\beta_{ij}^k - \beta_{ij}^{k+1}) \leq 1$$

显然, 当附加假设 β 是常函数时, Crank-Nicolson 格式是无条件稳定的。

1.2 数值算例

在 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ 上求方程 $u_t = \beta(u_{xx} + u_{yy}) + f$ 在 $t = 1$ 时的数值解, 其中

$$\beta(x, y, t) \equiv 1, \quad f(x, y, t) = e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)(2\pi^2 - 1)$$

故方程的真实解为 $u(x, y, t) = e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

在测试问题中, 将网格取为

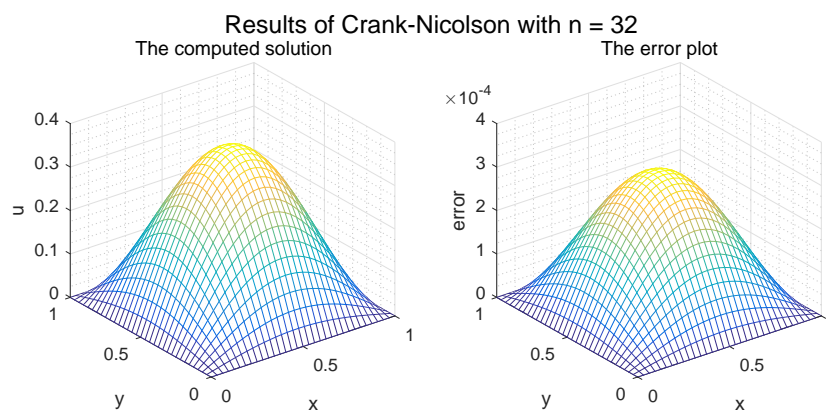
$$x_i = ih_x, \quad y_j = jh_y, \quad h_x = \frac{1}{n}, \quad h_y = \frac{1}{n}$$

$$t^k = k\Delta t, \quad \Delta t = \frac{1}{n}$$

由 Crank-Nicolson 方法的表达式, 在每一时间步内需求解线性方程组

$$\begin{aligned} \beta_{i,j}^{k+1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) U_{i,j}^{k+1} = & \beta_{i,j}^k \left(\frac{U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k}{2h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k}{2h_y^2} \right) + \frac{U_{i,j}^k}{\Delta t} \\ & + \beta_{i,j}^{k+1} \left(\frac{U_{i+1,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1}}{2h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1}}{2h_y^2} \right) + \frac{f_{i,j}^{k+1} + f_{i,j}^k}{2} \end{aligned}$$

与椭圆方程类似地, 可使用 Gauss-Seidel 迭代法求解以上方程组, 下图为 $n = 32$ 时的结果图象



再改变节点数量进行网格细化分析, 得到如下结果

n	Error	n_1	n_2	Order
8	0.0049958	8	16	2.0089
16	0.0012413	16	32	2.0001
32	0.0003103	32	64	1.9659
64	7.9431e-05	64	128	1.5269
128	2.7564e-05			

从表格中可以看出 Crank-Nicolson 方法在时间和空间上表现出二阶精度.

Problem2

使用隐式方法求解初边值问题

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \end{aligned}$$

其真实解为

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-k^2 \pi^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin k\pi x$$

在验证中，我们取上述表达式的前五项之和表示真实解.

2.1 理论推导

在本问题中，将网格取为

$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n} \\ t^k &= k\tau, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad \tau = \frac{T}{m} \end{aligned}$$

对上述 PDE 使用 θ -method 离散，得到如下的形式

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \theta \delta_{xx}^2 U_i^k + (1 - \theta) \delta_{xx}^2 U_i^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

经整理得到

$$\frac{\theta - 1}{h^2} U_{i-1}^{k+1} + \left(\frac{2(1 - \theta)}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right) U_i^{k+1} + \frac{\theta - 1}{h^2} U_{i+1}^{k+1} = \frac{U_i^k}{\tau} + \theta \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

将边值条件记为 $u(0, t) = g_0(t)$, $u(1, t) = g_1(t)$, 则在 $i = 1$ 处与 $i = n - 1$ 处引入边值条件，得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{2(1 - \theta)}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right) U_1^{k+1} + \frac{\theta - 1}{h^2} U_2^{k+1} &= \frac{U_1^k}{\tau} + \theta \frac{g_0^k - 2U_1^k + U_2^k}{h^2} + \frac{1 - \theta}{h^2} g_0^{k+1} \\ \frac{\theta - 1}{h^2} U_{n-2}^{k+1} + \left(\frac{2(1 - \theta)}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right) U_{n-1}^{k+1} &= \frac{U_{n-1}^k}{\tau} + \theta \frac{U_{n-2}^k - 2U_{n-1}^k + g_1^k}{h^2} + \frac{1 - \theta}{h^2} g_1^{k+1} \end{aligned}$$

将以上结果组装为矩阵形式如下

$$AU = F$$

其中

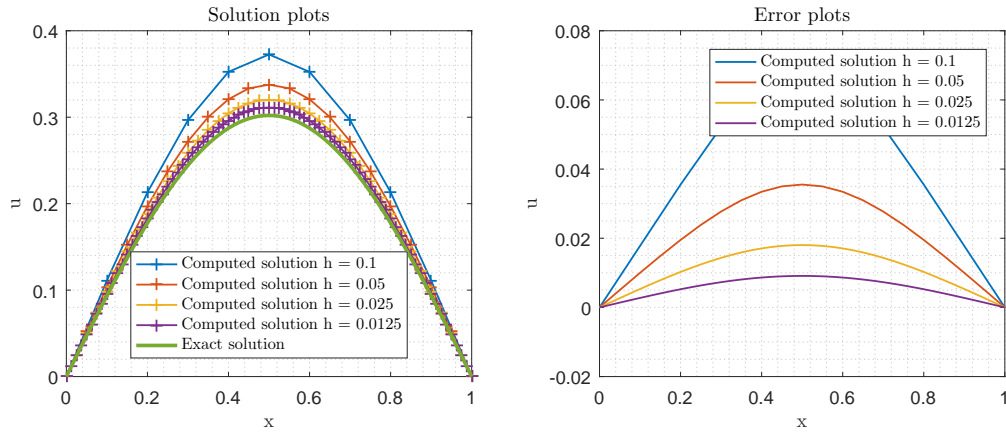
$$A = \begin{bmatrix} \frac{2(1-\theta)}{h^2} + \frac{1}{\tau} & \frac{\theta-1}{h^2} & & & \\ \frac{\theta-1}{h^2} & \frac{2(1-\theta)}{h^2} + \frac{1}{\tau} & \frac{\theta-1}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{\theta-1}{h^2} & \frac{2(1-\theta)}{h^2} + \frac{1}{\tau} & \frac{\theta-1}{h^2} \\ & & & \frac{\theta-1}{h^2} & \frac{2(1-\theta)}{h^2} + \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1^{k+1} \\ U_2^{k+1} \\ \vdots \\ U_{n-2}^{k+1} \\ U_{n-1}^{k+1} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \frac{U_1^k}{\tau} + \theta \frac{g_0^k - 2U_1^k + U_2^k}{h^2} + \frac{1-\theta}{h^2} g_0^{k+1} \\ \frac{U_2^k}{\tau} + \theta \frac{U_1^k - 2U_2^k + U_3^k}{h^2} \\ \vdots \\ \frac{U_{n-2}^k}{\tau} + \theta \frac{U_{n-3}^k - 2U_{n-2}^k + U_{n-1}^k}{h^2} \\ \frac{U_{n-1}^k}{\tau} + \theta \frac{U_{n-2}^k - 2U_{n-1}^k + g_1^k}{h^2} + \frac{1-\theta}{h^2} g_1^{k+1} \end{bmatrix}$$

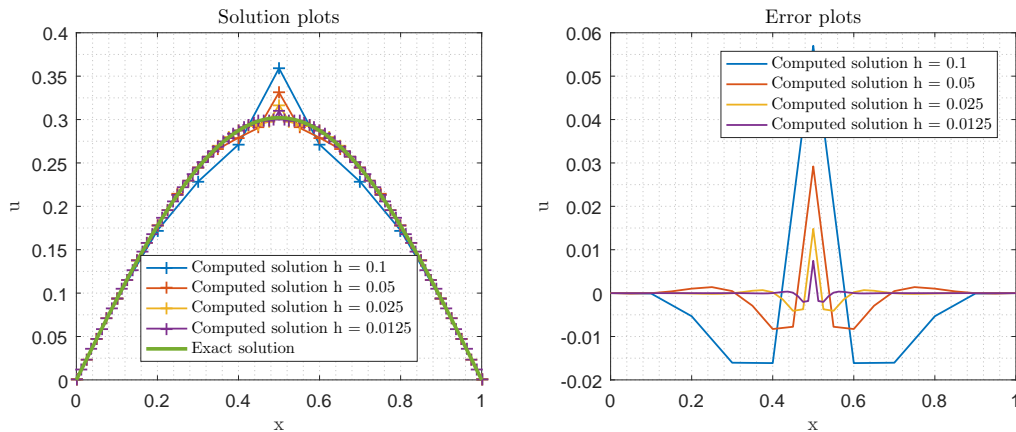
2.2 数值结果

分别取 $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$; $\tau = \frac{h}{2}$ 进行计算,

当 $\theta = 0$ 时, θ -method 相当于 Backward-Euler 格式, 其结果如下:



当 $\theta = 0.5$ 时, θ -method 相当于 Crank-Nicolson 方法, 其结果如下:



2.3 网格细化分析

使用 Backward-Euler 格式得到的误差和处理后的结果如下

h	τ	Error
0.1	0.05	0.07045
0.05	0.025	0.035529
0.025	0.0125	0.018026
0.0125	0.00625	0.0091073

h_1	τ_1	h_2	τ_2	Order
0.1	0.05	0.05	0.025	0.9876
0.05	0.025	0.025	0.0125	0.97891
0.025	0.0125	0.0125	0.00625	0.98499

从表格中可以看出 Backward-Euler 格式在时间和空间上表现出一阶精度.

使用 Crank-Nicolson 方法得到的误差和处理后的结果如下

h	τ	Error
0.1	0.05	0.056999
0.05	0.025	0.029197
0.025	0.0125	0.014812
0.0125	0.00625	0.0074472

h_1	τ_1	h_2	τ_2	Order
0.1	0.05	0.05	0.025	0.96515
0.05	0.025	0.025	0.0125	0.979
0.025	0.0125	0.0125	0.00625	0.99204

以上表格中 Crank-Nicolson 方法表现出的是一阶精度, 与理论分析不符, 但结合图像可以看出 Crank-Nicolson 的结果在图象对称轴处有一个明显的与其他地方误差数量级不一样的突起, 在改用了误差绝对值的平均后得到如下的结果.

h	τ	Error
0.1	0.05	0.012017
0.05	0.025	0.0035183
0.025	0.0125	0.00092798
0.0125	0.00625	0.00023666

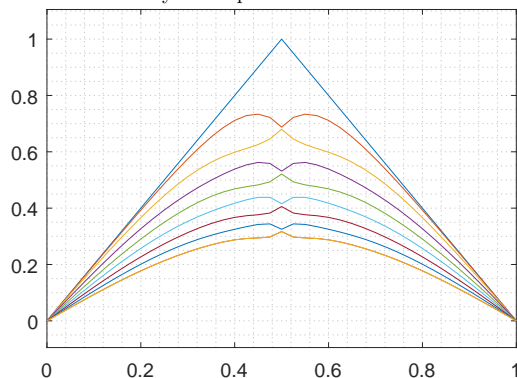
h_1	τ_1	h_2	τ_2	Order
0.1	0.05	0.05	0.025	1.7721
0.05	0.025	0.025	0.0125	1.9227
0.025	0.0125	0.0125	0.00625	1.9713

从表格中可以看出 Crank-Nicolson 方法在时间和空间上表现出二阶精度. 另外, 在这样的误差计算方法下, Backward-Euler 格式 $p \approx 0.93$, 仍然表现出的是一阶精度.

2.4 关于 Crank-Nicolson 方法结果中的突起

在使用自己实现的代码和教材提供的 Crank-Nicolson 方法代码都进行了计算之后,发现数值结果图象中间的突起应该不是由于代码编写的失误带来的,而是格式本身的特点. 但对此我没有找到比较合理的解释, 因为求解中都是使用的隐格式整体求解的, 突起应该也不来自于每个时间步内部计算方法的问题. 从这个突起随着时间步改变方向的特点来看, 猜测这个突起是时间步与时间步之间的误差累积造成的.

Textbook Code dynamic presentation: $h = 0.025$ $\tau = 0.0125$



正是由于这个突起的存在, 与两侧的误差完全不在一个数量级上, 使得 Crank-Nicolson 方法的二阶特点在误差取无穷范数时没有表现出来.

Problem3

验证 Box 格式

$$\frac{(U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}) - (U_i^k + U_{i+1}^k)}{2\tau} + a \frac{(U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}) + (U_{i+1}^k - U_i^k)}{2h} = f_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}$$

在带源项的单向波方程 $u_t + au_x = f$ 中是相容的和无条件稳定的, 并求出截断误差的阶.

3.1 理论推导

3.1.1 相容性分析

对第一项, 首先在 $x = (i + \frac{1}{2})h$ 处 Taylor 展开, 可得

$$\begin{aligned} u(x_i, t^{k+1}) + u(x_{i+1}, t^{k+1}) &= 2u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+1}) + \frac{h^2}{4}u_{xx}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+1}) + O(h^2) \\ u(x_i, t^k) + u(x_{i+1}, t^k) &= 2u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^k) + \frac{h^2}{4}u_{xx}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^k) + O(h^2) \end{aligned}$$

然后在 $t = (k + \frac{1}{2})\tau$ 处 Taylor 展开, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{(u(x_i, t^{k+1}) + u(x_{i+1}, t^{k+1})) - (u(x_i, t^k) + u(x_{i+1}, t^k))}{2\tau} \\ &= u_t(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^2}{24}u_{ttt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{4}u_{xxt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) + O(h^2 + \tau^2) \end{aligned}$$

对第二项, 首先在 $x = (i + \frac{1}{2})h$ 处 Taylor 展开, 可得

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, t^{k+1}) - u(x_i, t^{k+1}) &= hu_x(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+1}) + \frac{h^3}{24}u_{xxx}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+1}) + O(h^3) \\ u(x_{i+1}, t^k) - u(x_i, t^k) &= hu_x(x_{i+\frac{1}{2}}, t^k) + \frac{h^3}{24}u_{xxx}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^k) + O(h^3) \end{aligned}$$

然后在 $t = (k + \frac{1}{2})\tau$ 处 Taylor 展开, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{(u(x_{i+1}, t^{k+1}) - u(x_i, t^{k+1})) + (u(x_{i+1}, t^k) - u(x_i, t^k))}{2h} \\ &= u_x(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^2}{8}u_{xtt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{24}u_{xxx}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) + O(h^2 + \tau^2) \end{aligned}$$

由以上各式和原 PDE $u_t + au_x = f$ 可知

$$\begin{aligned} T(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) &= \tau^2 \left(\frac{1}{24}u_{ttt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{a}{8}u_{xtt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) \right) \\ &\quad + h^2 \left(\frac{1}{4}u_{xxt}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{a}{24}u_{xxx}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) \right) + O(h^2 + \tau^2) \end{aligned}$$

对上面的格式显然有

$$\lim_{h \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} T(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{k+\frac{1}{2}}) = 0$$

故在此问题中 Box 格式是相容的.

3.1.2 稳定性分析

为简化问题, 令 $f = 0$, 使用 von-Neumann 方法对 Crank-Nicolson 方法分析, 设

$$U_j^k = e^{ijh\xi}, \quad U_j^{k+1} = g(\xi)e^{ijh\xi}, \quad \mu = \frac{a\tau}{h} > 0$$

将上面的结果代入差分方程中得到

$$\begin{aligned} & (e^{ijh\xi} + e^{i(j+1)h\xi})(g(\xi) - 1) + \mu(e^{i(j+1)h\xi} - e^{ijh\xi})(g(\xi) + 1) = 0 \\ \Rightarrow & (e^{ih\xi/2} + e^{-ih\xi/2})(g(\xi) - 1) + \mu(e^{ih\xi/2} - e^{-ih\xi/2})(g(\xi) + 1) = 0 \\ \Rightarrow & \cos(h\xi/2)(g(\xi) - 1) + i\mu \sin(h\xi/2)(g(\xi) + 1) = 0 \\ \Rightarrow & g(\xi) = \frac{\cos(h\xi/2) - i\mu \sin(h\xi/2)}{\cos(h\xi/2) + i\mu \sin(h\xi/2)} \end{aligned}$$

显然对 $g(\xi)$ 有 $|g(\xi)| = 1$, $|\text{Reg}(\xi)| < 1$, 故 Box 格式是无条件稳定的.

3.2 数值算例

若方程表示的是右传播波, 则在每个时间步 $t = (k+1)\tau$, 可以利用 $U_i^k, U_{i+1}^k, U_i^{k+1}$ 处信息求解 U_{i+1}^{k+1} 处的信息; 若方程表示的是左传播波, 则可以利用 $U_i^k, U_{i+1}^k, U_{i+1}^{k+1}$ 处信息求解 U_i^{k+1} 处的信息.

测试中求解如下问题, 方程表示一个右传播波

$$\begin{aligned} u_t + (1 + xt)u_x &= (2 + xt) \cos(x + t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin x, \quad \text{IC} \\ u(0, t) &= \sin t, \quad \text{BC}. \end{aligned}$$

此单向波方程的真实解为 $u(x, t) = \sin(x + t)$.

那么, 可以使用 $U_i^k, U_{i+1}^k, U_i^{k+1}$ 处信息求解 U_{i+1}^{k+1} 处的信息

$$U_{i+1}^{k+1} \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{a^{k+1/2}}{2h} \right) = f_{i+1/2}^{k+1/2} + \frac{-U_{i+1}^{k+1} + U_i^k + U_{i+1}^k}{2\tau} + \frac{a^{k+1/2}(U_i^{k+1} - U_{i+1}^k + U_i^k)}{2h}$$

$a > 0$ 时, 边值给在左端, 计算从左向右逐点进行, 是显式的计算. 最终得到如下结果

h	τ	Error	h_1	τ_1	h_2	τ_2	Order
1/8	1/8	0.0025249	1/8	1/8	1/16	1/16	1.9831
1/16	1/16	0.00063865	1/16	1/16	1/32	1/32	1.9996
1/32	1/32	0.00015971	1/32	1/32	1/64	1/64	2.0026
1/64	1/64	3.9854e-05	1/64	1/64	1/128	1/128	2.0011
1/128	1/128	9.9563e-06					

从表格中可以看出 Box 格式在时间和空间上表现出二阶精度.

Problem4

使用 Lax-Wendroff 方法求解 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} u_t + 3u_x &= 0, \\ u(x, 0) &= x^2. \end{aligned}$$

此单向波方程的真实解为 $u(x, t) = (x - 3t)^2$.

4.1 理论推导

在本问题中，将网格取为

$$x_i = ih, \quad t^k = k\tau, \quad \tau \leq \frac{h}{|a|} \quad (\text{CFL})$$

使用 Lax-Wendroff 方法，对上述 PDE 离散，得到如下的形式

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} + a \frac{U_{i+1}^k - U_{i-1}^k}{2h} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \tau}{h^2} (U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k)$$

整理后得到

$$U_i^{k+1} = \frac{\mu^2 + \mu}{2} U_{i-1}^k + (1 - \mu^2) U_i^k + \frac{\mu^2 - \mu}{2} U_{i+1}^k \quad \mu = \frac{a\tau}{h}$$

4.2 数值结果

对于此 Cauchy 问题，每个节点 U_i^{k+1} 每一时间步的求解只需要前一步的三个节点 U_{i-1}^k 、 U_i^k 、 U_{i+1}^k 处的数据，故可以直接从 (x, t) 的依赖区间 $[x - at, x + at]$ 出发求解。

取 $h = 0.05$, $\tau = 0.01$ ，求解 PDE 在 $x = 1$, $t = 1$ 处的值，并与真实解比较得到

Computed Solution	Exact Solution	Error
3.9999999999999999	4	-8.881784197001252e-16

4.3 误差分析

对 Lax-Wendroff 方法的理论分析表明，此格式在时间上和空间上都应该是二阶精度的。

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{a(u(x + h, t) - u(x - h, t))}{2h} \\ &\quad - \frac{a^2 \tau (u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t))}{2h^2} \\ &= u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} - au_x - \frac{a^2 \tau}{2} u_{xx} + O(\tau^2 + h^2) \\ &= O(\tau^2 + h^2) \end{aligned}$$

由于原 Cauchy 问题的求解中，从依赖区域出发的做法中 Lax-Wendroff 的结果非常理想，误差的数量级已经小于了机器精度，没有做网格细化分析的价值，所以在误差分析中，我们在原问题左端引入了一个 Dirichlet 边界条件，对新的问题在一个区间上进行求解。

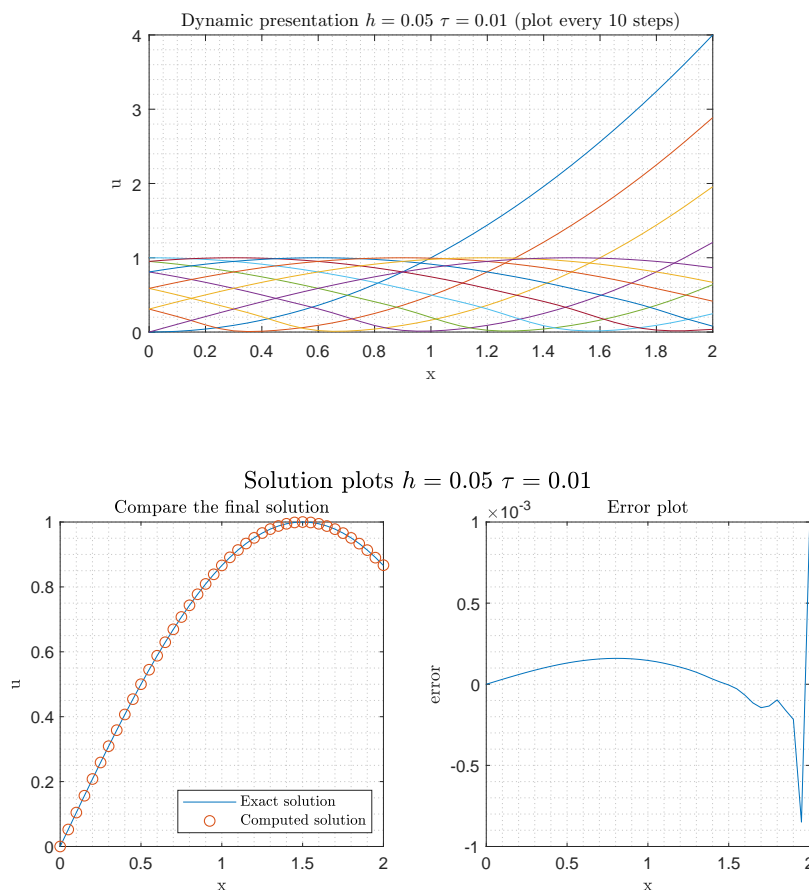
$$\begin{aligned} u_t + 3u_x &= 0, \quad x > 0 \\ u(x, 0) &= x^2, \quad \text{IC} \\ u(0, t) &= \cos(\pi t - \frac{\pi}{2}), \quad \text{BC} \end{aligned}$$

此方程的真实解为 $u(x, t) = \begin{cases} \cos(\pi(t - \frac{x}{3}) - \frac{\pi}{2}), & x < 3t \\ (x - 3t)^2, & x \geq 3t \end{cases}$

为了避免在 T 较大时从一个巨大的依赖区间开始计算，我们可以在右端某处添加一个数值边界条件，此处计算中采用的是用前一步的两个点作插值

$$U_M^{k+1} = U_{M-2}^k \frac{x_M - x_{M-1}}{x_{M-1} - x_M} + U_{M-1}^k \frac{x_M - x_{M-2}}{x_{M-2} - x_{M-1}}$$

此做法在理论上是二阶精度的，不会影响 Lax-Wendroff 格式的表现。最终得到 $h = 0.05$, $\tau = 0.01$ 时的结果如下：



再改变节点数量进行网格细化分析, 得到结果如下, 其中误差使用是在整个区间上的最大误差.

h	τ	Error	h_1	τ_1	h_2	τ_2	Order
0.05	0.01	0.00095964	0.05	0.01	0.025	0.005	1.6626
0.025	0.005	0.00030312	0.025	0.005	0.0125	0.0025	1.9841
0.0125	0.0025	7.6622e-05	0.0125	0.0025	0.00625	0.00125	2.0074
0.00625	0.00125	1.9058e-05	0.00625	0.00125	0.003125	0.000625	2.0038
0.003125	0.000625	4.752e-06					

从表格中可以看出 Lax-Wendroff 格式在时间和空间上表现出二阶精度.

4.4 关于收敛阶验证的反思

在四个问题中, 我都对格式误差的收敛阶数进行了验证, 但都只展示了同时改变时间步长和空间步长的结果. 事实上, 如果要验证格式对时间或者空间是二阶收敛的, 我们应该控制其中一个变量, 改变另一个变量观察误差的变化.

但很不幸的是, 这样控制变量的做法受到了格式 CFL 条件的限制, 当时间和空间步长相差太大时, 在一部分格式中会直接引起不稳定. 而当格式无条件稳定时这样的做法也不总是可取的, 尽管时间和空间步长数量级相差不大, 尽管不受到 CFL 条件的约束, 得到的误差经常也只能在时间和空间中一者上表现出应有的收敛阶. 其原因是在相容性分析得到的截断误差表达式中, 时间项和空间项的系数可能相差很大, 使得一个因素引起的误差淹没了另一个因素引起的误差, 我尝试着在控制变量时对固定的变量取一个非常小的值来减小这个影响, 但随之而来的是求解时间无法接受的增加, 或表现仍然不能达到效果.

为了解决这个问题, 可能需要对网格细化分析的想法做出一些改进.