

# 多项式乘法与快速傅里叶变换

于海鑫

2017211240

2019 年 9 月 25 日

# 多项式

- 以  $x$  为变量的**多项式**定义在数域  $F$  上, 将函数

$$A(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

表示为形式和  $A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$  的形式

- $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$  被称为多项式的**系数**
- 如果  $A(x)$  的最高次的非零系数是  $a_k$ , 则称  $A(x)$  的**次数**为  $k$
- 任何严格大于多项式的次数的整数都是该多项式的**次数界**

# 多项式的表示

## 系数表达

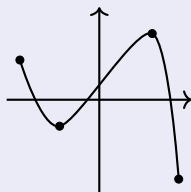
对于多项式  $A(x)$  , 其**系数表达**为由其系数组成的向量

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

## 点值表达

次数界为  $n$  的多项式  $A(x)$  的**点值表达**为  $n$  个点值对构成的集合

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$$



# 举例

对于多项式：

$$A(x) = x^3 + x^2 + 1$$

- $A(x)$  的系数为 3
- $A(x)$  的次数界为  $4, 5, \dots$  等全部大于 3 的数
- $A(x)$  的系数表示为  $(1, 1, 0, 1)$
- $A(x)$  的一个点值表达为  $\{(-1, 1), (0, 1), (1, 3), (2, 13)\}$

# 表达形式的转换

系数表达  $\Rightarrow$  点值表达 aka 求值

直接对选取的点进行求值即可，时间复杂度为  $\Theta(n^2)$

点值表达  $\Rightarrow$  系数表达 aka 插值

对于给定的点值对集合  $\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$  使用**拉格朗日公式**

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}$$

即可求出  $A(x)$  的系数表达。时间复杂度为  $\Theta(n^2)$ 。

# 多项式的乘法

对于多项式乘法, 如果  $A(x).B(x)$  均为次数界为  $n$  的多项式, 则它们的**乘积**  $C(x)$  是一个次数界为  $2n - 1$  的多项式, 对于任一属于多项式定义域的  $x$ , 都有  $C(x) = A(x)B(x)$

# 多项式的乘法

当多项式为**系数**表达时，其乘积的计算方法相当简单，对于表示为

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

$$\vec{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$$

的多项式  $A(x).B(x)$ ，其乘积  $C(x)$  的系数表达为：

$$\vec{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{2n-1})$$

其中

$$c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \quad \Rightarrow \Theta(n^2)$$

$\vec{c}$  被称为  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  的卷积，记为  $\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b}$

# 多项式的乘法

当多项式为点值表达时, 对于任一点  $x_k$ , 由都有  $C(x_k) = A(x_k)B(x_k)$ 。  
同时注意到

$$\text{degree}(C) = \text{degree}(A) + \text{degree}(B)$$

因此当  $A(x)$   $B(x)$  的点值表达分别为 (注意对于  $A(x), B(x)$  需要  $2n$  个点值对)

$$A : \{(x_0, y_0), \dots, (x_{2n-1}, y_{2n-1})\}$$

$$B : \{(x_0, y'_0), \dots, (x_{2n-1}, y'_{2n-1})\}$$

时,  $C(x)$  的点值表达应为:

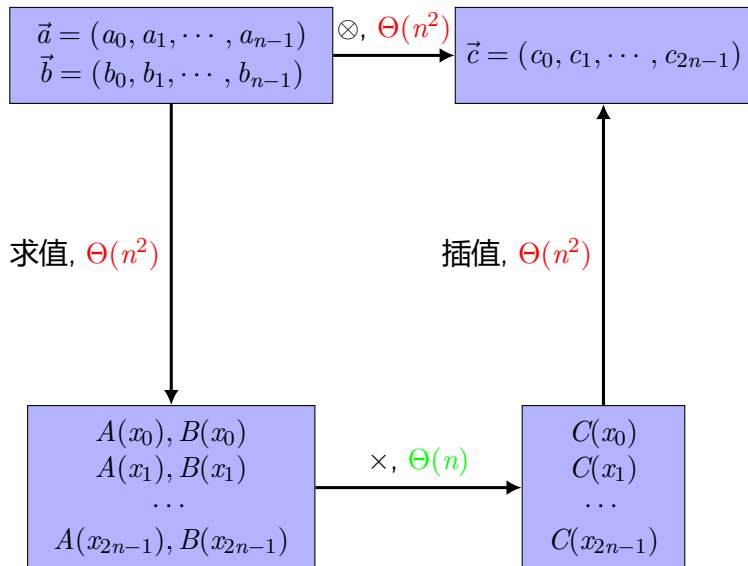
$$C : \{(x_0, z_0), \dots, (x_{2n-1}, z_{2n-1})\}$$

其中

$$z_i = y_i y'_i \Rightarrow \Theta(n)$$



# 多项式的乘法



# Can we do better?

使用**快速傅里叶变换**，我们可以在  $\Theta(n \log n)$  的时间复杂度下完成两种表示形式的转换

此时我们可以在  $\Theta(n \log n)$  的时间复杂度内计算多项式的乘积



# N 次单位根

称方程  $\omega^n = 1$  在  $\mathbb{C}$  上的  $n$  个解

$$\omega_k = \exp \frac{2k\pi i}{n} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

为  $n$  次单位根

显然,  $N$  次单位根有如下性质:

- $\omega_{dn}^{dk} = \omega_n^k$  (Cancellation Lemma)
- 当  $n$  为偶数时,  $(\omega_n^k)^2 = (\omega_n^k)^2$  (Halving Lemma)
- 当  $n \geq 1$  时, 对于  $k \neq 0$  且  $k$  不被  $n$  整除, 有  $\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j = 0$  (Summation Lemma)

证明留做习题

# 离散傅里叶变换 (DFT)

可用于求次数界为  $n$  的多项式  $A(x)$  在  $(\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1})$  处进行求值。  
为了简化问题，在这里我们假设

- $n$  是 2 的幂
- $A(x)$  被表示为系数向量  $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$

我们定义，对于上文所述多项式  $A(x)$ ，向量  $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  被称为系数向量的**离散傅里叶变换**，其中

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega_n^{ki}$$

可记

$$\vec{y} = DFT_n(\vec{a}) \quad \Rightarrow \Theta(n^2)$$

# 快速傅里叶变换 (FFT)

“The most important numerical algorithm of our lifetime”  
by G. Strang, 1994

# 分而治之

$$A^{[0]}(x) = a_0 + a_2x + a_4x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{\frac{n}{2}-1}$$

$$A^{[1]}(x) = a_1 + a_3x + a_5x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}$$

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \quad \Rightarrow \Theta(n \log n)$$

# 正确性证明

对于  $y_0, y_1, \dots, y_{n/2-1}$  有

$$\begin{aligned}y_k &= y_k^{[0]} + \omega_n^k y_k^{[1]} \\&= A^{[0]}(\omega_n^{2k}) + \omega_n^k A^{[1]}(\omega_n^{2k}) \\&= A(\omega_n^k)\end{aligned}$$

对于  $y_{n/2}, y_{n/2+1}, \dots, y_{n-1}$  有

$$\begin{aligned}y_{k+n/2} &= y_k^{[0]} - \omega_n^k y_k^{[1]} \\&= y_k^{[0]} + \omega_n^{k+n/2} y_k^{[1]} \\&= A^{[0]}(\omega_n^{2k}) + \omega_n^{k+n/2} A^{[1]}(\omega_n^{2k}) \\&= A^{[0]}(\omega_n^{2k+n}) + \omega_n^{k+n/2} A^{[1]}(\omega_n^{2k+n}) \\&= A(\omega_n^{k+n/2})\end{aligned}$$

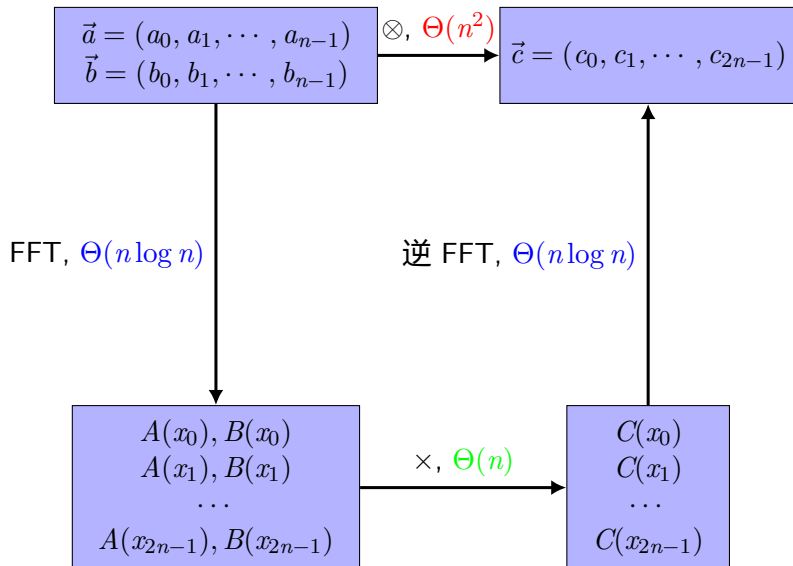


# 逆 DFT

如果  $y = DFT_n(y)$  则可以记  $a = DFT_n^{-1}(y)$   
通过对 FFT 进行以下修改, 我们可以在  $\Theta(n \log n)$  的时间复杂度下计算  $DFT_n^{-1}$ :

- $a$  和  $y$  的位置互换
- $\omega_n$  替换为  $\omega_n^{-1}$
- 结果除以  $n$

# 多项式的乘法



# 卷积定理

对任何长度为  $n$  的向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$ , 有

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = DFT_{2n}^{-1}(DFT_{2n}(\vec{a}) \cdot DFT_{2n}\vec{b})$$

# 代码实现：N 次单位根

```
1  from cmath import exp
2  from math import pi
3
4
5  class NthRootOfUnity:
6      def __init__(self, n, k=1):
7          self.k = k
8          self.n = n
9
10     def __pow__(self, other):
11         if type(other) is int:
12             n = NthRootOfUnity(self.n, self.k * other)
13             return n
```

# 代码实现：N 次单位根

```
1     def __eq__(self, other):
2         if other == 1:
3             return abs(self.n) == abs(self.k)
4
5     def __mul__(self, other):
6         return exp(2*1j*pi*self.k/self.n)*other
7
8     def __repr__(self):
9         return str(self.n) + "-th root of unity to the "
10            + str(self.k)
11
12 @property
13 def th(self):
14     return abs(self.n // self.k)
```

# 代码实现: FFT

```
1 def fft(a, omega):
2     if omega == 1:
3         return [sum(a)]
4     o2 = omega**2
5     a0 = fft(a[0::2], o2)
6     a1 = fft(a[1::2], o2)
7     res = [None]*omega.th
8     for i in range(omega.th//2):
9         res[i] = a0[i] + omega**i * a1[i]
10        res[i+omega.th//2] = a0[i] - omega**i * a1[i]
11    return res
```

# 代码实现：多项式乘法

```
1  # Input: Coefficient representation of A and B as list
2  # Output: Coefficient representation of AB
3  def poly_mul(a, b):
4      n = 1 << (len(a) + len(b) - 2).bit_length()
5      o = NthRootOfUnity(n)
6      fft_a = fft(a, o)
7      fft_b = fft(b, o)
8      fft_c = [fft_a[i] * fft_b[i] for i in range(n)]
9      c = [round((a/n).real) for a in fft(fft_c, o ** -1)]
10     while len(c) > 0 and c[-1] == 0:
11         del c[-1]
12     return c
```