多项式乘法与快速傅里叶变换

于海鑫

2017211240

2019 年 9 月 24 日

多项式

- 以 x 为变量的**多项式**定义在数域 F 上，将函数

$$A(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

  表示为形式和 $A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ 的形式
- $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 被称为多项式的**系数**
- 如果 $A(x)$ 的最高次的非零系数是 a_k，则称 $A(x)$ 的**次数**为 k
- 任何严格大于多项式的次数的整数都是该多项式的**次数界**

多项式的表示

系数表达

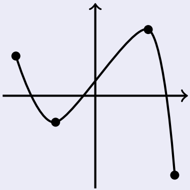
对于多项式 $A(x)$ ，其**系数表达**为由其系数组成的向量

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_{n_1})$$

点值表达

次数界为 n 的多项式 $A(x)$ 的**点值表达**为 n 个点值对构成的集合

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$$



举例

对于多项式:

$$A(x) = x^3 + x^2 + 1$$

- $A(x)$ 的系数为 3
- $A(x)$ 的次数界为 $4, 5, \cdots$ 等全部大于 3 的数
- $A(x)$ 的系数表示为 $(1, 1, 0, 1)$
- $A(x)$ 的一个点值表达为 $\{(-1, 1), (0, 1), (1, 3), (2, 13)\}$

表达形式的转换

系数表达 $\Rightarrow$ 点值表达

直接对选取的点进行求值即可，时间复杂度为 $\Theta(n^2)$

点值表达 $\Rightarrow$ 系数表达

对于给定的点值对集合 $\{(x_0, y_0), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ 使用**拉格朗日公式**

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k}(x - x_j)}{\prod_{j \neq k}(x_k - x_j)}$$

即可求出 $A(x)$ 的系数表达。时间复杂度为 $\Theta(n^2)$。

多项式的乘法

对于多项式乘法，如果 $A(x).B(x)$ 均为次数界为 n 的多项式，则它们的**乘积** $C(x)$ 是一个次数界为 $2n-1$ 的多项式，对于任一属于多项式定义域的 x，都有 $C(x) = A(x)B(x)$

多项式的乘法

当多项式为**系数**表达时，其乘积的计算方法相当简单，对于表示为

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$$

$$\vec{b} = (b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$$

的多项式 $A(x).B(x)$，其乘积 $C(x)$ 的系数表达为：

$$\vec{b} = (c_0, c_1, \cdots, c_{2n-1})$$

其中

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \qquad \Rightarrow \Theta(n^2)$$

$\vec{c}$ 被称为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的卷积，记为 $\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b}$

多项式的乘法

当多项式为**点值**表达时，对于任一点 x_k，由都有 $C(x_k) = A(x_k)B(x_k)$。同时注意到

$$degree(C) = degree(A) + degree(B)$$

因此当 $A(x)$ $B(x)$ 的点值表达分别为 (注意对于 $A(x), B(x)$ 需要 $2n$ 个点值对)

$$A : \{(x_0, y_0), \cdots, (x_{2n-1}, y_{2n-1})\}$$

$$B : \{(x_0, y_0'), \cdots, (x_{2n-1}, y_{2n-1}')\}$$

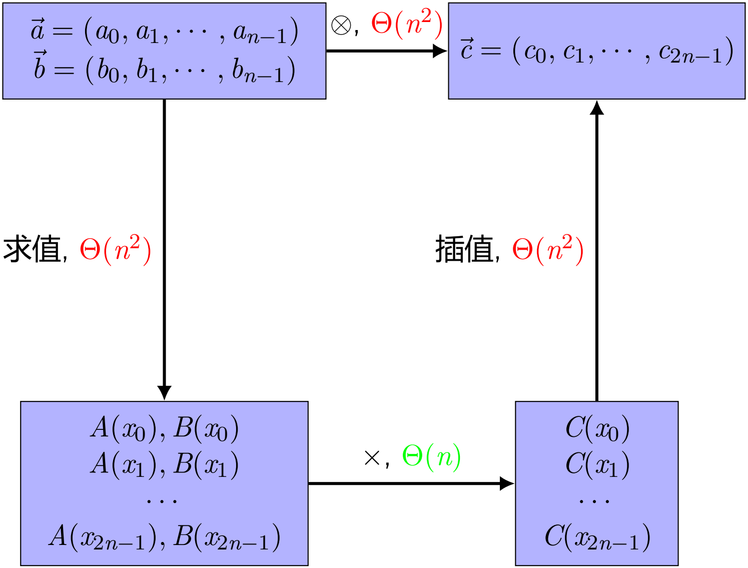
时，$C(x)$ 的点值表达应为:

$$C : \{(x_0, z_0), \cdots, (x_{2n-1}, z_{2n-1})\}$$

其中

$$z_i = y_i y_i' \qquad \Rightarrow \Theta(n)$$

多项式的乘法



$\vec{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$
$\vec{b} = (b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$
$\otimes$, $\Theta(n^2)$
$\vec{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_{2n-1})$
求值, $\Theta(n^2)$
插值, $\Theta(n^2)$
$A(x_0), B(x_0)$
$A(x_1), B(x_1)$
$\cdots$
$A(x_{2n-1}), B(x_{2n-1})$
$\times$, $\Theta(n)$
$C(x_0)$
$C(x_1)$
$\cdots$
$C(x_{2n-1})$

Can we do better?

使用**快速傅里叶变换**，我们可以在 $\Theta(n \log n)$ 的时间复杂度下完成两种表示形式的转换

此时我们可以在 $\Theta(n \log n)$ 的时间复杂度内计算多项式的乘积

傅里叶变换

- 有史以来最伟大、最深刻的发现之一
- 将时域信号转换为频域信号
- ~~不开门课专门讲这个是计算机院学生的损失~~