平成26年度
東京大学大学院情報理工学系研究科 コンピュータ科学専攻 入学試験問題

専門科目 II

平成25年8月20日
13:30 – 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.

(2) 4 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

Specialized Subjects II

13:30 – 16:00, August 20, 2013

Entrance Examination (AY 2014)
Department of Computer Science, Graduate School of Information Science and Technology
The University of Tokyo

Notice:

(1) Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) Answer the following 4 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

問題 1

図1のように xy 座標系に定義される $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ の4頂点において，それぞれ実数値 A, B, C, D が定義されているとする．このとき，4頂点に囲まれる矩形領域内の座標 (x, y) (ただし $0 < x, y < 1$) における補間値を，双線形補間を用いて定義することにする．ここで，双線形補間とは，x 方向に関して線形に補間したのちに y 方向に関しても線形補間を施すことで，補間値を求める手法である．

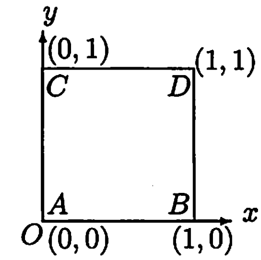


図1

以下の問いに答えよ．

(1) 座標 (x, y) （ただし $0 < x, y < 1$）における補間値を $f(x, y)$ と定義する．$f(x, y)$ を x, y, A, B, C, D を用いて表せ．

(2) $f(0,0) = 0$, $f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = 2$, $f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = -1$, $f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = 3$ であるとき，A, B, C, D の値を求めよ．

以下では，ある一定の実数 H に対しての等位線 $f(x, y) = H$ を考える．

(3) 等位線 $f(x, y) = H$ が矩形領域内に存在するような場合を考えるとき，方程式 $f(x, y) = H$ は（特別な場合を除き）双曲線を表す．この双曲線の2つの漸近線の式と，漸近線の交点における補間値を，A, B, C, D を用いて表せ．

(4) 実数値 H が A, B, C, D のいずれとも異なると仮定し，各4頂点における実数値が H より大きい場合 $+$，小さい場合 $-$ とラベルを振ることにする．このとき，$+$ と $-$ のラベルのパタンは図2に列挙された以外にないことを示せ．ただし，回転して同一になる場合は，同じパタンとみなすことにする．

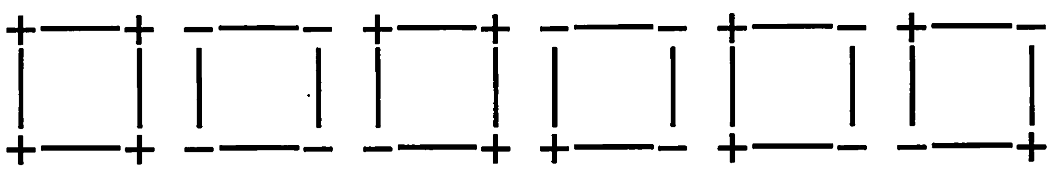


図2

(5) 矩形領域内に等位線 $f(x, y) = H$ が存在するとき，そのつながり方を次のように単純化して図示することを考える．すなわち，

- 等位線と矩形領域を囲む辺が交わる場合，その交点を辺の中点に移動し，
- 等位線そのものは直線として描く．

図2の最後のパタンに対しては，等位線 $f(x, y) = H$ のつながり方は図3の (i)–(iii) のどれかになる．(i)–(iii) それぞれについて，等位線のつながり方がそのようになるための条件を実数値 A, B, C, D, H を用いて表せ．

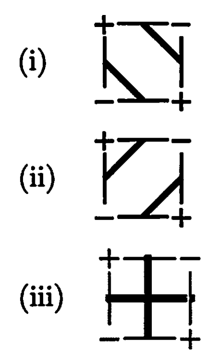


図3

(6) 図4のような，一般的なグリッドサンプルにおいても，前述通り双線形補間を各矩形に施したのち，等位線のつながり方を図示することを考える．等位線 $f(x, y) = H$ が図4のようなつながり方となるための，実数値 H の条件を求めよ．

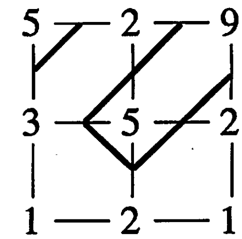


図4

Problem 1

As shown in Figure 1, define four corner points $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, and $(1,1)$ on the xy-coordinate system, and the corresponding real values A, B, C, and D at these points, respectively. Suppose that we compute the interpolated value at a point (x, y) (where $0 < x, y < 1$) by applying bilinear interpolation over the square region. Note that the bilinear interpolation is to compute an interpolated value by applying linear interpolation along the x-coordinate axis first and then along the y-coordinate axis.

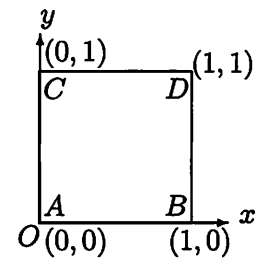


Figure 1

Answer the following questions.

(1) Let $f(x, y)$ be the interpolated value at (x, y), where $0 < x, y < 1$. Express the value of $f(x, y)$ using x, y, A, B, C and D.

(2) Find A, B, C, and D if $f(0,0) = 0$, $f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = 2$, $f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = -1$, and $f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = 3$.

Let us now consider the isolines defined by $f(x, y) = H$ for some fixed real value H.

(3) When the isolines defined by $f(x, y) = H$ intersect with the square region, the equation $f(x, y) = H$ represents a hyperbola (except for some degenerate cases). Express the equations of the two asymptotes of the hyperbola, and the interpolated value at the intersection point of these two asymptotes, using A, B, C, and D.

(4) Suppose that the real value H is different from any of A, B, C and D. We place the label $+$ if the real value at the corner point is larger than the real value H, and the label $-$ otherwise. Show that Figure 2 contains all the possible patterns of the $+$ and $-$ labels. Here we identify two patterns if they are equivalent after some rotational transformation.

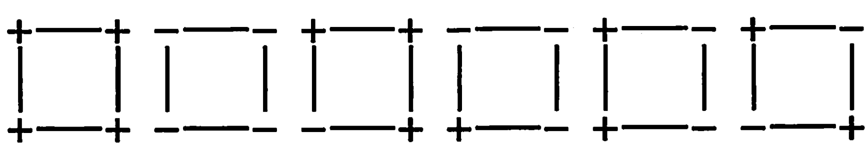


Figure 2

(5) Suppose that the isolines defined by $f(x, y) = H$ intersect with the square region. We shall depict how these isolines are connected in the following simplified manner.

- When an edge of the square region intersects with the isolines, we move the intersection to the midpoint of the edge.
- The isolines themselves are depicted as straight lines.

For the last pattern in Figure 2, all the possible connections of the isolines defined by $f(x, y) = H$ are depicted as (i)–(iii) in Figure 3. For each of (i)–(iii), express the condition for that connection to occur using the real values A, B, C, D and H.

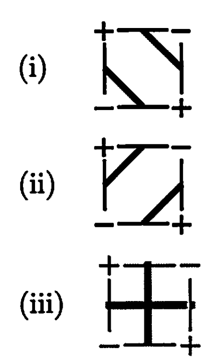


Figure 3

(6) For grid samples like the one in Figure 4, we similarly apply bilinear interpolation to each square region and depict how the isolines are connected. Express the condition on the real value H for the isolines defined by $f(x, y) = H$ to be connected in the way depicted in Figure 4.

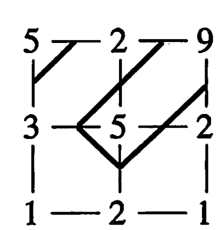


Figure 4

問題 2

半順序集合 P, Q を考え，P, Q それぞれにおける順序関係を $\sqsubseteq$ で書き表す．関数 $\alpha : P \to Q$ と $\gamma : Q \to P$ に対する以下の条件を考える．

i. 任意の $c_1, c_2 \in P$ に対して，$c_1 \sqsubseteq c_2$ ならば $\alpha(c_1) \sqsubseteq \alpha(c_2)$.

ii. 任意の $a_1, a_2 \in Q$ に対して，$a_1 \sqsubseteq a_2$ ならば $\gamma(a_1) \sqsubseteq \gamma(a_2)$.

iii. 任意の $c \in P$ に対して $c \sqsubseteq \gamma(\alpha(c))$.

iv. 任意の $a \in Q$ に対して $\alpha(\gamma(a)) \sqsubseteq a$.

以下の問いに答えよ．

(1) 上の条件 i.–iv. のもとで，次が成り立つことを示せ．

$$\gamma(a) \quad = \quad \max\{c \in P \mid \alpha(c) \sqsubseteq a\}$$

次に，C を整数全体の集合，A を 3 点集合 $\{\mathrm{NEG}, \mathrm{ZERO}, \mathrm{POS}\}$ とする．さらに P を C の部分集合全体の集合，Q を A の部分集合全体の集合とする．すると P, Q は集合の包含関係によって半順序集合となる．関数 $\beta : C \to A$ を

$$\beta(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{NEG} & \text{if } x < 0 \\ \mathrm{ZERO} & \text{if } x = 0 \\ \mathrm{POS} & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

とおく．さらに関数 $\alpha : P \to Q$ を

$$\alpha(X) \quad = \quad \{\beta(x) \mid x \in X\}$$

とおく．これらの $A, C, P, Q, \alpha, \beta$ の定義のもとで，以下の問いに答えよ．

(2) 上の条件 i.–iv. を満たすように関数 γ を定めよ．

(3) 与えられた関数 $f : C \to C$ に対して，以下の条件 $(*)$ をみたす関数 $\Phi(f) : Q \to Q$ を返すような，対応 Φ を定義せよ．

$$\text{任意の部分集合 } X \subseteq C \text{ に対して} \qquad \alpha\bigl(\{f(x) \mid x \in X\}\bigr) \sqsubseteq \Phi(f)\bigl(\alpha(X)\bigr) \qquad (*)$$

ただし以下の自明な解 $\Phi_\top$ 以外のものを答えること：

$$\text{任意の関数 } f : C \to C \text{ と任意の部分集合 } Y \subseteq A \text{ について，} \quad \Phi_\top(f)(Y) \; = \; A \; .$$

(4) 問い (3) で答えた Φ の定義について，等号

$$\alpha\bigl(\{f(x) \mid x \in X\}\bigr) \; = \; \Phi(f)\bigl(\alpha(X)\bigr)$$

が成り立たないような f と X を挙げよ．

Problem 2

Let P, Q be partially ordered sets; for each of P, Q, its order is denoted by $\sqsubseteq$. Let us consider the following conditions for functions $\alpha : P \to Q$ and $\gamma : Q \to P$.

i. For each $c_1, c_2 \in P$, $c_1 \sqsubseteq c_2$ implies $\alpha(c_1) \sqsubseteq \alpha(c_2)$.

ii. For each $a_1, a_2 \in Q$, $a_1 \sqsubseteq a_2$ implies $\gamma(a_1) \sqsubseteq \gamma(a_2)$.

iii. $c \sqsubseteq \gamma(\alpha(c))$ for each $c \in P$.

iv. $\alpha(\gamma(a)) \sqsubseteq a$ for each $a \in Q$.

Answer the following question.

(1) Show that the following holds under the conditions i.–iv. above.

$$\gamma(a) \quad = \quad \max\{c \in P \mid \alpha(c) \sqsubseteq a\}$$

Now let C be the set of all integers, and A be the three-element set $\{\mathrm{NEG}, \mathrm{ZERO}, \mathrm{POS}\}$. Let P be the set of all subsets of C, and Q be the set of all subsets of A; then P and Q are partially ordered sets with respect to the set inclusion. We define a function $\beta : C \to A$ by

$$\beta(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{NEG} & \text{if } x < 0 \\ \mathrm{ZERO} & \text{if } x = 0 \\ \mathrm{POS} & \text{if } x > 0; \end{cases}$$

and define a function $\alpha : P \to Q$ by

$$\alpha(X) \quad = \quad \{\beta(x) \mid x \in X\} \ .$$

Answer the following questions, regarding $A, C, P, Q, \alpha, \beta$ thus defined.

(2) Give a function γ that satisfies the conditions i.–iv. above.

(3) Define a correspondence Φ that, given a function $f : C \to C$, returns a function $\Phi(f) : Q \to Q$ that satisfies the following condition $(*)$.

$$\alpha\big(\{f(x) \mid x \in X\}\big) \ \sqsubseteq \ \Phi(f)\big(\alpha(X)\big) \qquad \text{for each subset } X \subseteq C. \qquad (*)$$

Here exclude the following trivial solution $\Phi_\top$:

$$\Phi_\top(f)(Y) \ = \ A \qquad \text{for any function } f : C \to C \text{ and any subset } Y \subseteq A.$$

(4) For the definition of $\Phi(f)$ given in Question (3), give a choice of f and X such that the equality

$$\alpha\big(\{f(x) \mid x \in X\}\big) \ = \ \Phi(f)\big(\alpha(X)\big)$$

does not hold.

問題 3

3つの文字からなるアルファベット $S=\{a,b,c\}$ を考える．各時刻 $t=1,2,3,\ldots$ において，

- 機械 M_1 がある規則にしたがって S から文字を選んで紙に印刷し，また，
- 機械 M_2 が印刷された文字を認識して，同じ時刻 t に読み上げる．

さらに以下の条件を仮定する．

- 条件 A: 開始時刻 $t=1$ において，M_1 は文字 x $(x \in \{a,b,c\})$ を確率 π_x で選んで印刷する．ただし，$\pi_a+\pi_b+\pi_c=1$ とする．
- 条件 B: 任意の時刻 t (>1) において，M_1 は時刻 $t-1$ で印刷した文字と同じ文字を確率 α $(0<\alpha<1)$ で選んで印刷する．それ以外の場合には，他の2つの文字のどちらかをランダムに等確率で選んで印刷する．
- 条件 C: M_2 が印刷された文字を読み上げる際に，M_2 は確率 β $(0<\beta<1)$ で正しい文字を読み上げる．それ以外の場合には，他の2つの文字のどちらかをランダムに等確率で選んで読み上げる．

以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 t までに M_1 が印刷した文字列を $x_1,x_2,\cdots,x_t$，M_2 が読み上げた文字列を $y_1,y_2,\cdots,y_t$ とする．両者が，ともに t 個の “a” の並びである確率を式で示せ．

(2) 時刻 t において M_1 が印刷した文字が “a” であった．時刻 $(t+2)$ において M_1 が文字 “c” を印刷する確率を式で示せ．

(3) $\pi_a=0.3$, $\pi_b=0.6$, $\pi_c=0.1$, $\alpha=0.6$, $\beta=0.4$ とする．時刻 $t=2$ までに M_2 が読み上げた文字列が “aa” であるとき，M_1 が $t=2$ までに印刷した可能性がもっとも高い文字列は何か．その理由とともに示せ．

(4) 時刻 t までに M_2 が読み上げた文字列 $y_1,y_2,\cdots,y_t$ が与えられるとき，実際に M_1 が印刷した文字列のもっとも確からしい候補を効率よく求める方法と，その時間計算量について述べよ．

Problem 3

Let $S = \{a, b, c\}$ be an alphabet having three letters. Suppose that, at each time $t = 1, 2, 3, \ldots$:

- a machine M_1 chooses a letter from S using some rules and prints the chosen letter on paper; and
- another machine M_2 recognizes the printed letter and reads it out, also at the time t.

Furthermore, assume the following conditions.

- Condition A: At the initial time $t = 1$, M_1 chooses and prints a letter x ($x \in \{a, b, c\}$) with a probability π_x where $\pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$.
- Condition B: At an arbitrary time t (> 1), M_1 chooses the same letter as it printed at $t - 1$ with a probability α ($0 < \alpha < 1$). Otherwise, M_1 randomly chooses one of the other two letters with equal probabilities.
- Condition C: When M_2 reads out a printed letter, M_2 reads out the correct one with a probability β ($0 < \beta < 1$). Otherwise, M_2 randomly reads out one of the other two letters with equal probabilities.

Answer the following questions.

(1) Let $x_1, x_2, \cdots, x_t$ be the sequence of letters that M_1 printed, and $y_1, y_2, \cdots, y_t$ be the sequence of letters that M_2 read out, by the time t. Show a formula to calculate the probability with which all the letters in $x_1, x_2, \cdots, x_t$ and $y_1, y_2, \cdots, y_t$ are "a"s.

(2) Suppose that at the time t, we observed that M_1 printed the letter "a". Show a formula to calculate the probability with which M_1 prints the letter "c" at the time $(t + 2)$.

(3) Assume that $\pi_a = 0.3$, $\pi_b = 0.6$, $\pi_c = 0.1$, $\alpha = 0.6$, and $\beta = 0.4$. Suppose that M_2 read out the sequence "aa" by the time $t = 2$. Answer the most likely sequence that M_1 printed by $t = 2$. Explain the reason.

(4) Suppose that $y_1, y_2, \cdots, y_t$, the sequence of letters that M_2 read out by the time t, is given. Describe an efficient procedure to obtain the most likely sequence of letters that M_1 printed, and its time complexity.

問題 4

除算回路とは，被除数 X を除数 Y で割り算を行い，商 Q を求める回路である．ここで

$$X = Y * Q + R$$

である．

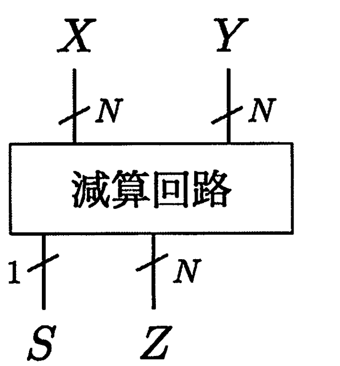
回路を簡単にするため，剰余 R は求めないものとする．また，X, Y は全て正の整数とし，X, Y, Q, R は N ビットで表現されるものとする．

以下の問いに答えよ．

(1) $N = 8$ として，$X - Y$ を計算する減算回路を AND, OR, NOT ゲートを用いて設計せよ．

(2) 問い (1) で求めた減算回路に，計算結果が負であることを示す符号出力 S を追加せよ．

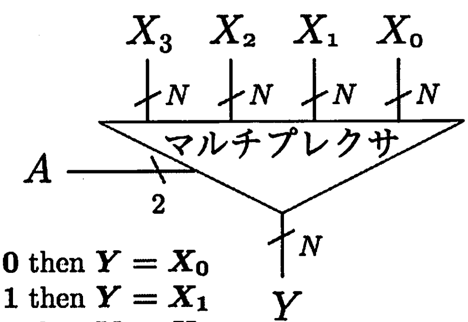
(3) 1 クロックで 1 ビットずつ出力を行う除算回路を減算回路（図 1 のように表記），フリップフロップ，マルチプレクサ（図 2），AND, OR, NOT ゲートを用いて設計せよ．



$Z = X - Y$

if $Z \geq 0$ then $S = 0$ else $S = 1$

図 1.　減算回路（N ビット）



if $A = 0$ then $Y = X_0$

if $A = 1$ then $Y = X_1$

if $A = 2$ then $Y = X_2$

if $A = 3$ then $Y = X_3$

図 2.　マルチプレクサ（N ビット，4 入力の例）

(4) (3) の除算回路は，1 クロックで 1 ビットずつ出力を行いながら除算を実現している．この除算回路を高速化するため，1 クロックで 2 ビットずつ出力を行う除算回路を設計せよ．

Problem 4

A divider is a logic circuit for division. It divides X (a dividend) by Y (a divider) to make Q (the quotient). That is,

$$X = Y * Q + R \ .$$

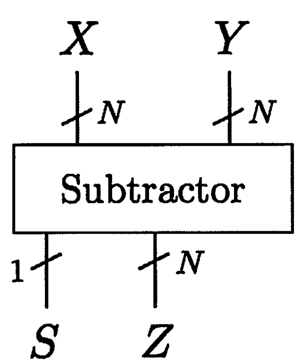
In this problem the remainder (R) is not calculated in order to simplify the circuits. We assume that X and Y are positive integers, and that the data size of X, Y, Q, R is N bits.

Answer the following questions.

(1) Let $N = 8$. Design a subtractor to calculate $X - Y$ using AND, OR, and NOT gates.

(2) Add an output signal that shows whether the result is negative to the logic circuit designed in Question (1).

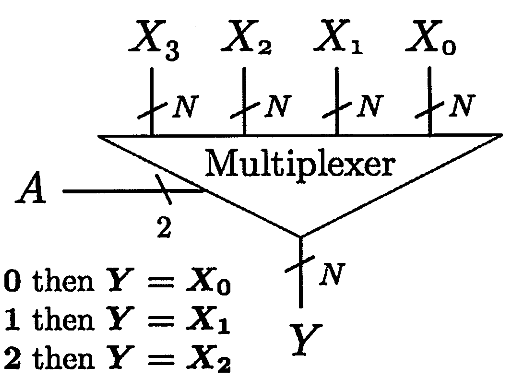
(3) Design a logic circuit of a divider that consists of subtractors (Figure 1), multiplexers (Figure 2), flip-flops and AND, OR and NOT gates. The divider should produce 1-bit output in a clock cycle.



$Z = X - Y$

if $Z \geq 0$ then $S = 0$ else $S = 1$

Figure 1. Subtractor (N bits)



if $A = 0$ then $Y = X_0$
if $A = 1$ then $Y = X_1$
if $A = 2$ then $Y = X_2$
if $A = 3$ then $Y = X_3$

Figure 2. Multiplexer (Example: N bits, 4 inputs)

(4) The divider designed in (3) produces 1-bit output in a clock cycle to realize division. To accelerate division, design a logic circuit of division where two bits of the result are produced in a clock cycle.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.