4.2 习题.　证明公式 4.11

贝叶斯估计.

(1) 假设 $m_k = \sum_{i=1}^{N} I(y_i = c_k)$. $\sum_{k=1}^{N} m_k = N$　y 总有 N 个.

$P_\lambda(Y = c_k) = u_k$.　对于一个未知的事件. Beta 分布或 Dirichlet 分布可以作为事件发生的概率的概率分布.

2、可得先验概率为 $P(u) = P(u_1, u_2, u_3 \cdots u_k) = C(\lambda) \prod_{k=1}^{k} u_k^{\lambda-1}$

3、得到似然函数.

$$P(m|u) = u_1^{m_1} \cdot u_2^{m_2} \cdots u_k^{m_k} = \prod_{k=1}^{k} u_k^{m_k}$$

4、后验概率分布.　$P(u|m) = \dfrac{P(m|u)P(u)}{P(m)}$　$P(u|m,\lambda)$ 服从 Dirichlet 分布.

5、u 的期望 由期望公式得

$$E(u_k) = \frac{a_k}{\sum_{k=1}^{k} a_k}$$　$a_k = \lambda + m_k$　$E(u_k) = \dfrac{\lambda + m_k}{\sum\lambda + \sum m_k}$　$P(Y = c_k) = u_k = E(u_k)$ 证毕.

(2) 同理证明 4.11.　$P_\lambda(X^{(j)} = a_{jl} | Y = c_k) = \dfrac{\sum I(x_i^{(j)} = a_{jl}, y_i = c_k) + \lambda}{\sum_{i=1}^{} I(y_i = c_k) + S_j\lambda}$.

(2)
同理 (1) 设 $P_\lambda(X^{(j)} = a_{jl} | Y = c_k) = u_l$　u_l 服从的 Dirichlet 分布.

证明: 同理可知 $P(u|m,\lambda)$ 为 ~~满足~~ 分布. 随机变量 取 u_k 的期望 则证毕.

5.2、

寻找最优切分j和最优切分点s的方法.

$$\min_{j,s}\Big[\min_{c_1} \sum_{x_i \in R_1(j,s)} (y_i - c_1)^2 + \min_{c_2} \sum_{x_i \in R_2(j,s)} (y_i - c_2)^2\Big]$$　其中 $c_1 = \{y_i / N \mid x_i \in R_1(j,s)\}$
$c_2 = \{y_i \mid x_i \in R_2(j,s)\}$

取 $s = 1$ 此时 $R_1 = \{1\}$, $R_2 = \{2, 3 \cdots 10\}$.

计算 $c_1 = 4.5$　$c_2 = (4.75 + \cdots 9.00)/9 = 6.85$.

则计算

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	4.5	4.63	4.72	4.88	5.06	5.39	5.75	5.18	6.35	6.62
$\hat{}$						[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.00

则 $c_1\ c_2$ 的划分误差

$m(1) = 0 + \{(4.75-6.85)^2 + (4.91-6.85)^2 + (5.34-6.85)^2 \cdots\} = 22.65$

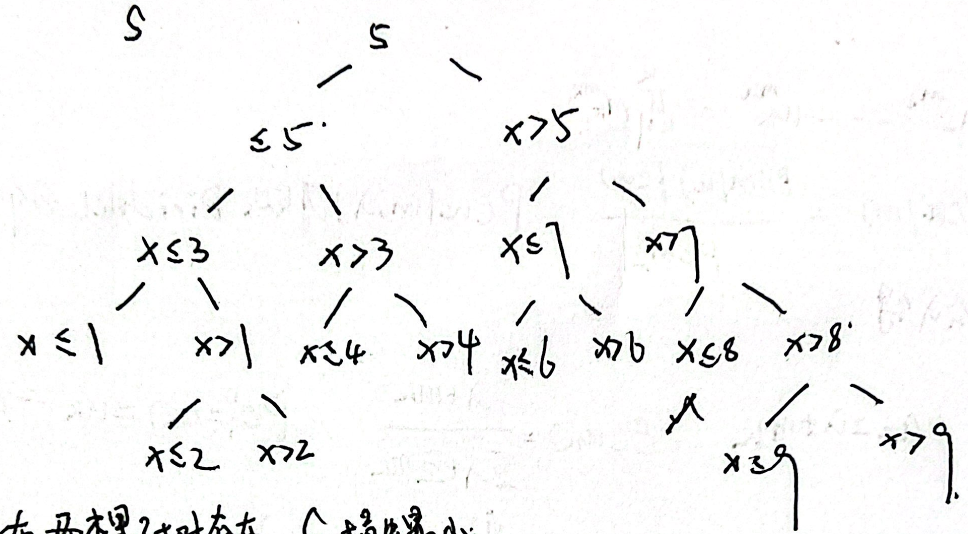
则可得下表.

$m(s)$	22.65	17.70	12.19	7.38	3.36	5.07	10.05	15.18	21.33	27.63

$s=5$ 时 $m(s)$ 最小，划分区域 $R_1=\{1,2,3,4,5\}$ $R_2=\{6,7,8,9,10\}$

$c_1=5.06$ $c_2=8.18$

递归划分.



3 假设存在两棵子树存在 C 损失最小

1、内部节点是否剪枝只与该点为根节点的子树有关

2、$C_a(t) < C_a(T_t)$ 时，对根结点的子树进行剪枝.

如图所示、整个树有两个子树 $T_2\ T_3$ 假设两棵都是T的最优子树，使得损失函数最小

$C_a(T_2) = C_a(T_3)$

根据 T_2 位置 $C_a(t_2) < C_a(T_2)$ $C_a(t_3) < C_a(T_3)$

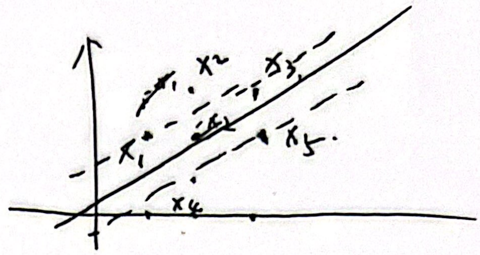
由上可得 都可以进一步剪枝. 剪枝之后的子树记作 T_4.

所以如果两棵子树，其中一棵树总能找到来自另一棵子树的剪枝点

所以存在唯一的最小子树 使得损失函数最小.

$x_1=(1,2)^T$ $x_2=(2,3)^T$ $x_3=(3,3)^T$ $+1$

$x_4=(2,1)^T$ $x_5=(3,2)^T$ -1



线性可分.

对偶问题.

$$\min \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} a_i a_j y_i y_j (x_i\cdot x_j) - \sum_{i=1}^{N} a_i$$

s.t. $a_1+a_2+a_3-a_4-a_5=0$

$a_i \geq 0$

最小化 $\frac{1}{2}(5a_1^2+13a_2^2+18a_3^2+5a_4^2+13a_5^2+16a_1a_2+18a_1a_3+8a_1a_4$

$+14a_1a_5+30a_2a_3+14a_2a_4+24a_2a_5+18a_3a_4+30a_3a_5+16a_4a_5)$

解得分离超平面 $-x^{(1)}+2x^{(2)}-2=0$ 支持向量 $(3,2)^T$ $(1,2)^T$ $(3,3)^T$

7.4 数学归纳法.

假设 $p=k$ $K(x,z)=(x\cdot z)^k$ 是正定核函数

假设 $\phi(x)=(f_1(x),f_2(x)\cdots f_m(x))^T$ $x=(x^{(1)},x^{(2)}\cdots x^{(n)})^T$

$K(x,z)=(x\cdot z)^{k+1}$

$=(x\cdot z)^k(x\cdot z)$

$=\phi(x)\cdot\phi(z)(x\cdot z)=(f_1(x)f_1(z)\cdots f_m(x)f_m(z))(x^{(1)}z^{(1)}\cdots x^{(n)}z^{(n)}$

$=(f_1(x)x^{(1)})(f_1(z)z^{(1)})+(f_1(x)x^{(2)})(f_1(z)z^{(2)})$

$\phi'(x)=(f_1(x)x^{(1)},f_1(x)x^{(2)}\cdots f_1(x)x^{(n)},f_2(x)x^{(1)}\cdots f_m(x)x^{(n)}$

$K(x,z)=(x\cdot z)^{k+1}=\phi'(x)\cdot\phi'(z)$ 可得 $(x\cdot z)^{k+1}$ 是正定核函数 $\therefore$ $K(x,z)$ 为正定