主要内容

1.主成分分析法

Principal Component Analysis: PCA

问题1. 如何确定主成分?

问题2. 如何基于主成分确定数据的降维表示?

问题3. 如何由r(r<p)个主成分，重构x?

2. 应用之一--K-L变换在人脸识别中的应用举例

3. 应用之二--高维数据的低维显示

主成分分析实质：

借助**正交线性**变换，将一组观测数据由可能相关的特征描述转化由一系列互不相关的**特征(主成分)**描述。

主成分分析的目的：

- 特征提取
- 降维
- ……

问题描述：

设(1)原始特征空间特征向量$\boldsymbol{x}=\left[x_1,\cdots,x_p\right]^T$，

其中 $x_1,\cdots,x_p$统计相关

由于相关性，使得各特征存在信息冗余

(2)原始特征空间经**正交**线性变换$\boldsymbol{A}$，得新特征空间

新特征$\xi_i, \boldsymbol{i}=1,\cdots,\boldsymbol{p}$无信息冗余

$$\boldsymbol{\xi}=\left[\xi_1,\cdots,\xi_{\boldsymbol{p}}\right]^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\left[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{p}}\right]^T\boldsymbol{x}$$

其中 $\xi_{\boldsymbol{i}}=\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{p}} a_{ij}x_j=\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}^T\boldsymbol{x}$

目标：寻求**最优正交变换A**，使新特征**方差最大**。

$$\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{p}}\right]，\text{其中 } \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}^T\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{j}}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\\ 0 & \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}\end{cases}$$

各个变换特征（主成分）的确定原则

(1) ξ_i与ξ_j互不相关$(i, j = 1, \ldots, p$并且$i \neq j)$

(2) ξ_1是原始特征线性组合中的方差最大者.

(3) ξ_2是与ξ_1不相关的原始特征线性组合中的方差最大者；它对于原始数据中不能被ξ_1解释的剩余部分，拥有最大解释能力.

(4) ξ_3是与ξ_1, ξ_2均不相关的原始特征线性组合中的方差最大者;对于原始数据中不能被 ξ_1, ξ_2解释的剩余部分，具有最大解释能力……

(5) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$分别称为关于原始特征向量$\boldsymbol{x}$的第一，第二，…，第$\boldsymbol{p}$个主成分。

STEP1.确定a_1.

考虑新特征 $\xi_1 = \sum_{j=1}^{p} a_{1j} x_j = \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}_1$

各样本关于新特征ξ_1的方差

$$\operatorname{var}(\xi_1) = \boxed{\boldsymbol{E}\left[\left(\xi_1 - \widehat{\xi_1}\right)^2\right] = \boldsymbol{E}\left[\left(\boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_1^T \widehat{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}_1 - \widehat{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{a}_1\right)\right]}$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{a}_1^T \left(\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{a}_1\right]$$

$$= \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{E}\left[\left(\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}\right)^T\right] \boldsymbol{a}_1$$

$$= \boldsymbol{a}_1^T \Sigma \boldsymbol{a}_1$$

最优$\boldsymbol{a}_1$应满足 $\begin{cases} \max\limits_{\boldsymbol{a}_1} \quad \operatorname{var}(\xi_1) = \boldsymbol{a}_1^T \Sigma \boldsymbol{a}_1 \\ s.t. \ \ \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{a}_1 = 1 \end{cases}$

构造*Lagrang*目标函数

$$\begin{cases} f\left(\boldsymbol{a}_1\right)=\boldsymbol{a}_1^T\Sigma\boldsymbol{a}_1-v\left(\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1-1\right) \\ v\text{为}\boldsymbol{Lagrang}\text{乘子} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{a}_1}=2\left(\Sigma\boldsymbol{a}_1-v\boldsymbol{a}_1\right)=0 \quad\rightarrow\quad \Sigma\boldsymbol{a}_1=v\boldsymbol{a}_1$$

$\boldsymbol{a}_1$为协方差矩阵Σ的**本征值**v对应**本征列向量**

$$\operatorname{var}\left(\xi_1\right)=\boldsymbol{a}_1^T\Sigma\boldsymbol{a}_1=v\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1=v$$

要使$\operatorname{var}\left(\xi_1\right)$最大，$v$应为$\Sigma$最大本征值$\lambda_1$

(ξ_1为**第一主成分**)

$\boldsymbol{a}_1$为Σ对应本征值λ_1的本征列向量

STEP2.确定a_2.

$\boldsymbol{a}_2$应满足两个要求$\begin{cases}\text{A.新特征}\xi_2\text{与第一主成分}\xi_1\text{不相关}\\ \text{B.除去}\xi_1\text{外，新特征}\xi_2\text{方差最大}\end{cases}$

其中 $\xi_2=\sum_{j=1}^{p} a_{2j}x_j = \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{a}_2$

$\boxed{\text{A. }\xi_2\text{与}\xi_1\text{不相关}}$ 协方差 $E\left[\left(\xi_1-\widehat{\xi_1}\right)\left(\xi_2-\widehat{\xi_2}\right)\right]=0$

$$E\left[\left(\xi_1-\widehat{\xi_1}\right)\left(\xi_2-\widehat{\xi_2}\right)\right]=E\left[\boldsymbol{a}_1^T\left(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\right)^T\boldsymbol{a}_2\right]$$

$$=\boldsymbol{a}_1^T E\left[\left(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\right)^T\right]\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1^T\Sigma\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_2^T\Sigma\boldsymbol{a}_1=0$$

由于$\Sigma\boldsymbol{a}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}_1$，所以$\boldsymbol{a}_2^T\Sigma\boldsymbol{a}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1=0$。

即： ξ_2与ξ_1不相关 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1$正交。

$\boldsymbol{B}$. ξ_2的方差

$$\operatorname{var}(\xi_2) = \boldsymbol{E}\left[\left(\xi_2 - \widehat{\xi_2}\right)^2\right]$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{a}_2^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\right)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}_2\right] = \boldsymbol{a}_2^{\boldsymbol{T}}\Sigma\boldsymbol{a}_2$$

最优$\boldsymbol{a}_2$应满足
$$\begin{cases} \max\limits_{\boldsymbol{a}_2} \quad \operatorname{var}(\xi_2) = \boldsymbol{a}_2^{\boldsymbol{T}}\Sigma\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{s.t.} \quad \boldsymbol{a}_2^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}_2 = 1, \quad \boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}_2 = 0 \end{cases}$$

构造***Lagrange***目标函数

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{a}_2, \nu_2, \mu\right) = \boldsymbol{a}_2^{\boldsymbol{T}}\Sigma\boldsymbol{a}_2 - \nu_2\left(\boldsymbol{a}_2^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}_2 - 1\right) - \mu\boldsymbol{a}_1^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}_2$$

Lagrange目标函数

$$f\left(a_2, \nu_2, \mu\right) = a_2^T \Sigma a_2 - \nu_2\left(a_2^T a_2 - 1\right) - \mu a_1^T a_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = 2\Sigma a_2 - 2\nu_2 a_2 - \mu a_1 = 0$$

两边左乘a_1^T，有：

$$2a_1^T \Sigma a_2 - 2\nu_2 a_1^T a_2 - \mu a_1^T a_1 = 2a_1^T \Sigma a_2 - 0 - \mu = 0$$

又 $a_1^T \Sigma a_2 = a_2^T \Sigma a_1 = \lambda_1 a_2^T a_1 = 0$

所以 $\mu = 0$

所以 $\Sigma a_2 - \nu_2 a_2 = 0$

由前页

$\Sigma \boldsymbol{a}_2 - \nu_2 \boldsymbol{a}_2 = 0$

显然ν_2为Σ的**本征列向量$\boldsymbol{a}_2$**对应的**本征值**

所以 $\operatorname{var}(\xi_2) = \boldsymbol{a}_2^T \Sigma \boldsymbol{a}_2 = \nu_2 \boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{a}_2 = \nu_2$

要使 $\operatorname{var}(\xi_2) = \nu_2$最大

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_2\text{必为}\Sigma\text{剩余本征值中最大本征值}\lambda_2\text{对应的本征向量} \\ \nu_2\text{应为}\Sigma\text{第二大本征值}\lambda_2 \\ \xi_2\text{为}\textbf{第二主成分} \end{cases}$$

STEP3.确定其它$a_i, i=3,\ldots,p$,及正交变换矩阵A

样本协方差矩阵Σ共有p个本征值，将其排列为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$$

基于上述本征值对应本征向量$\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{i}=1,\ldots,\boldsymbol{p}$,可以构造**所有主成分**$\xi_i, \boldsymbol{i}=1,\ldots,\boldsymbol{p}$

各个主成分的方差满足 $\sum_{i=1}^{p}\mathrm{var}(\xi_i)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i$

并且有 $\boldsymbol{\xi}=\left[\xi_1,\cdots,\xi_p\right]^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\left[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_p\right]^T\boldsymbol{x}$

结论：

(1)线性变换矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_p\end{bmatrix}$的各个列向量由协方差矩阵Σ的正交归一本征向量组成，$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$.

--$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}$

(2)主成分方差满足 $\mathrm{var}(\xi_i)=\lambda_i$ $\sum_{i=1}^{p}\mathrm{var}(\xi_i)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i$

(3)基于前k个主成分可描述数据信息比例 $d=\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i}$

通常求取的是"**零均值化**"**的主成分**ξ $\begin{cases}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\mu}\end{cases}$

基于主成分分析的特征降维

A. 基于p维样本数据，估计**样本中心**μ及**协方差矩阵**Σ

B. 确定Σ的p个**本征值**及**本征向量**，

得 p个本征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$

对应本征向量 $a_i, i = 1, \ldots, p$

C. 确定主成分数目r

$$r = \arg\min_k \frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j} \geq \alpha$$

D. 确定$p \times r$的变换矩阵$A_r = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{bmatrix}$

E. 提取r维零均值变换特征：$\xi_r = A_r^T (x - \mu)$

主要内容

1.主成分分析法

Principal Component Analysis: PCA

问题1. 如何确定主成分?

问题2. 如何基于主成分确定数据的降维表示?

问题3. 如何由$r(r<p)$个主成分，重构x?

2. 应用之一--PCA在人脸识别中的应用举例

3. 应用之二--高维数据的低维显示

人脸识别的一般概念：给定一个场景中的静态图像或视频，利用给定的人脸数据库信息，**鉴别**或**确认**场景中的一位或多位人身份的过程。

一个完整的人脸识别系统通常包括三个部分：

（1）图像获取

（2）人脸检测与分割

（3）人脸识别（特征选择与提取、模式匹配）

人脸识别方法的分类（根据特征提取方法）

- **第一类 基于表观（全局特征）的方法**

　　全局匹配方法是用整个人脸区域作为输入，作为一个整体与已知人脸数据库进行匹配。

　　如 *Eigenfaces, Fisherfaces, SVM* 等。

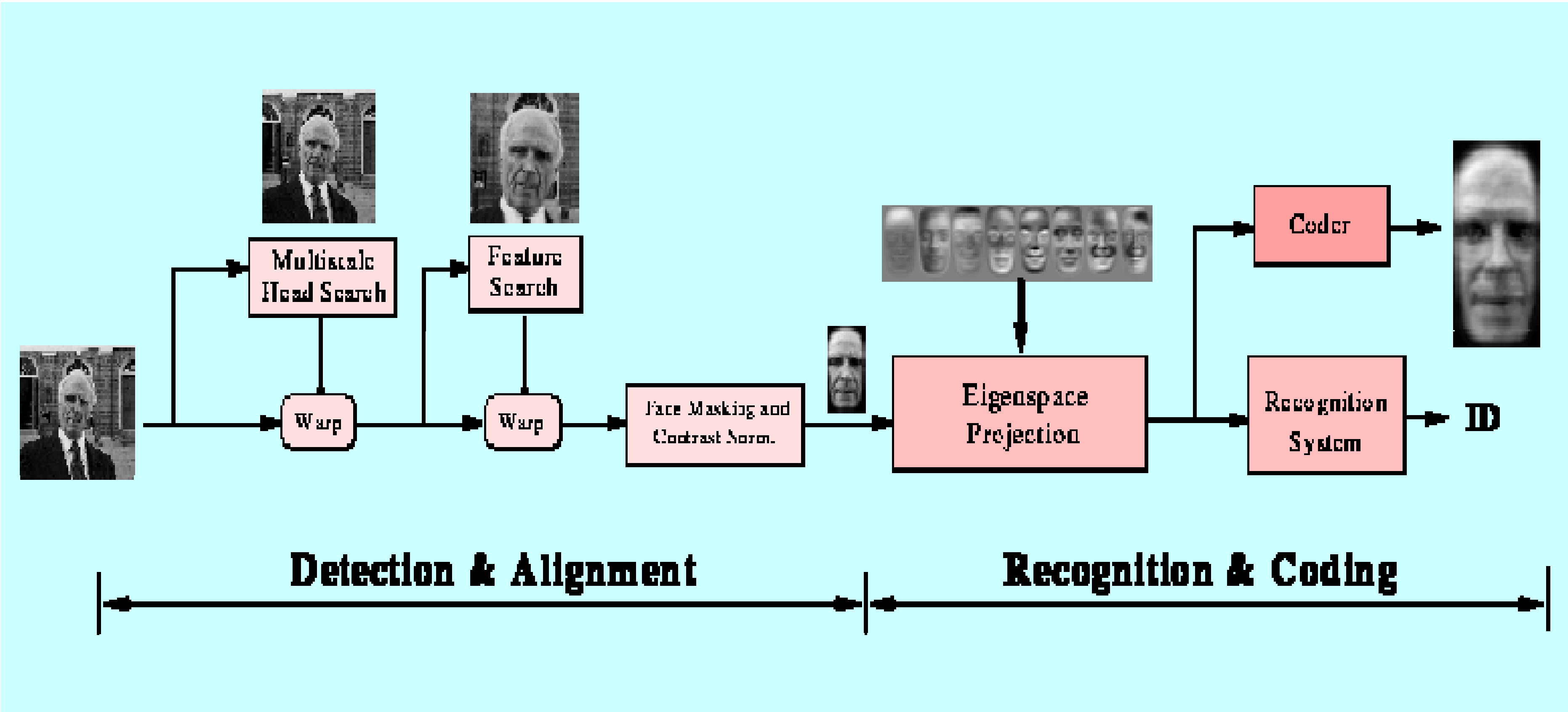
- **第二类：基于结构（局部特征）的方法**

　　基于局部特征的结构匹配方法是根据人脸图中的局部特征（眼睛、鼻子、嘴巴等）在人脸图像中的位置和各自自身的结构确定对人脸图像进行识别。

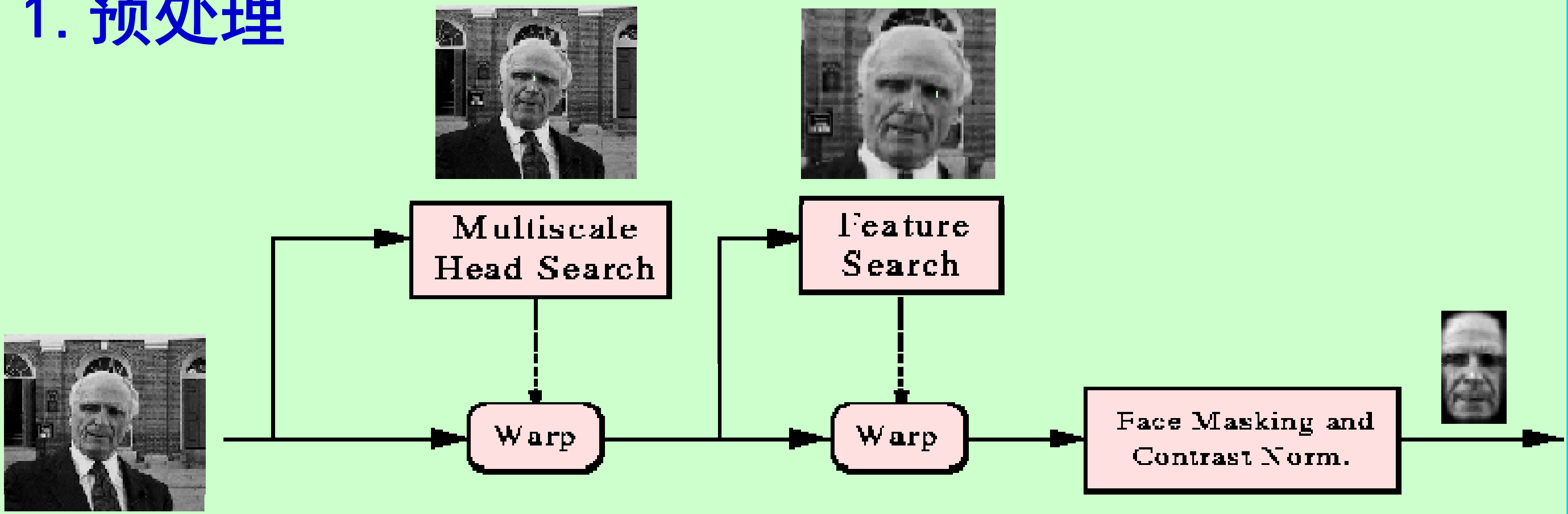
　　如 *HMM Based Method*等。

例：MIT人脸识别系统流程图

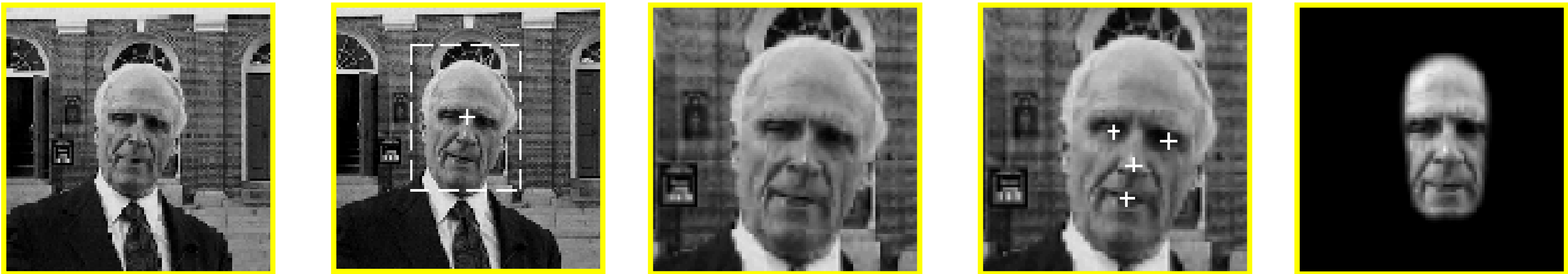
http://vismod.media.mit.edu/vismod/demos/facerec/



1. 预处理



Detection and Alignment



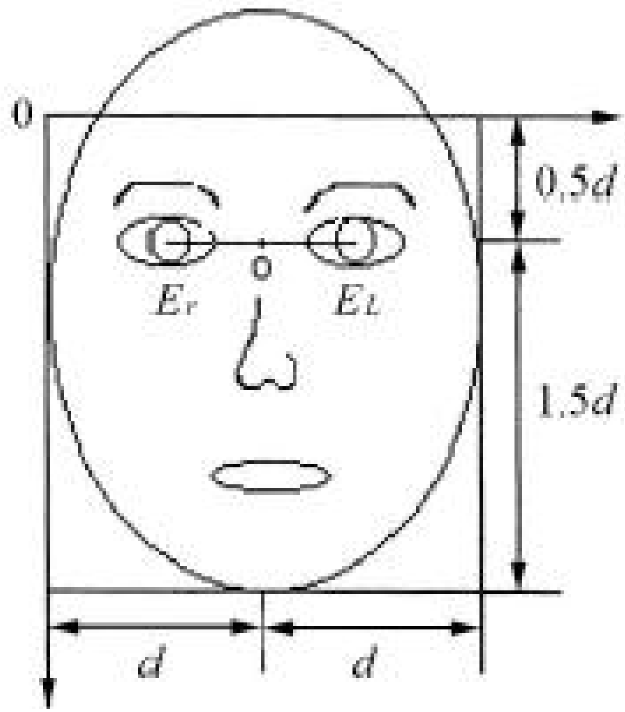
(1)Original Input Image；(2)Estimated Head Location & Scale；(3)Head-Centered Image；(4)Estimated Facial Feature Locations；(5) Warped & Masked Facial Region

预处理阶段：

- 人脸图像的分割与脸部主要器官定位；

  人脸正面图像；

  左右两眼中心位置



- 图像归一化与裁剪

图像几何校准：

图像旋转，使两眼中心连线水平；

图像裁剪：2d×2d

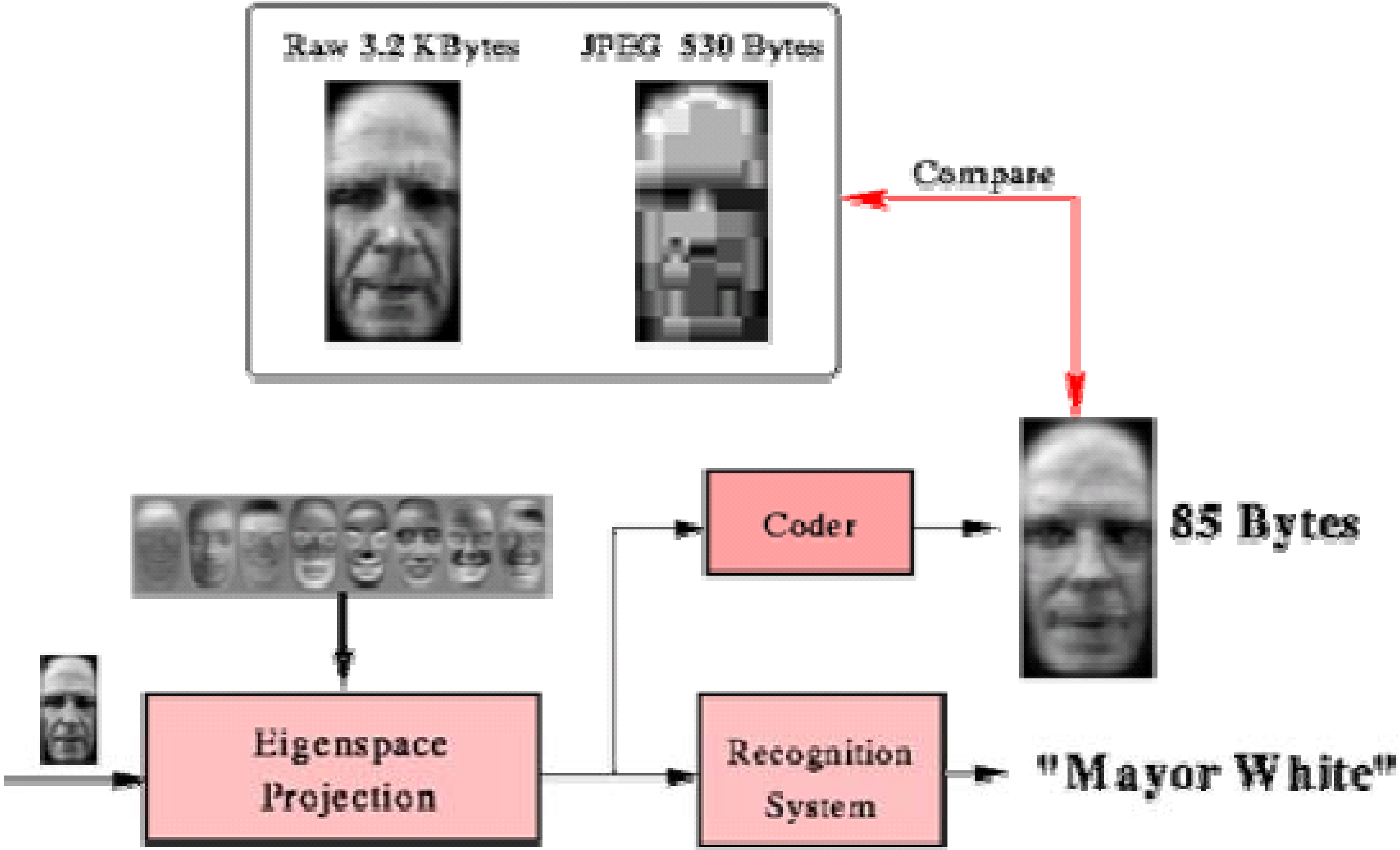
图像放缩，使其大小统一，如：2d×2d ➔ 128×128

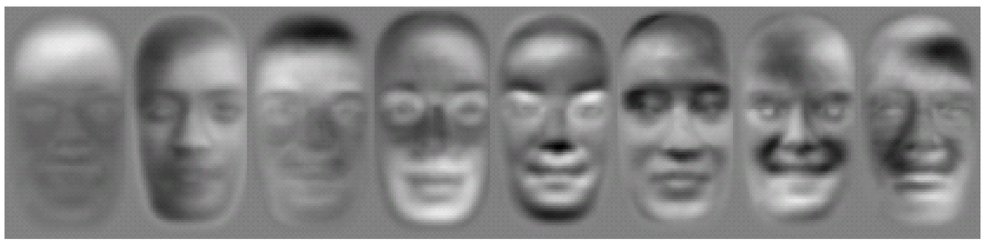
灰度拉伸：直方图修正，消除光照影响

预处理阶段：

归一化部分人脸图像

2. 特征提取：本征脸的提取和表示





前8个本征脸

PCA：本征脸的提取和表示

- **训练样本集：**

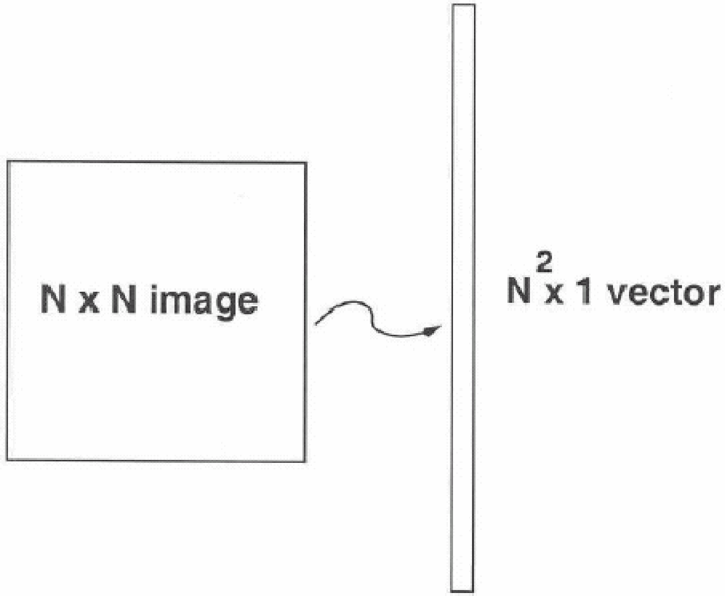
假定进行身份注册的人脸库中含有p个人，共计m幅图像。

每一幅图像都是归一化的标准图像。

所有图像构成训练样本集：

$$x_i \in R^{N^2} \qquad i = 1, \ldots, m$$

m – –标准图像的数量



- PCA

训练样本集 $\quad x_i \in R^{N^2} \qquad i = 1, \ldots, m$

m ——训练样本（标准图像）数量

[1]确定PCA所需样本总协方差矩阵

$$\Sigma = E\left[(x-\mu)(x-\mu)^T\right] \approx \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)(x_i-\mu)^T = \frac{1}{m}XX^T$$

μ ——训练样本集的平均向量(**平均脸**) $\quad \mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$

m ——标准图像数量

$X = \left[x_1-\mu, x_2-\mu, \ldots, x_m-\mu\right] \quad N^2 \times m$维矩阵

Σ是一个$N^2 \times N^2$矩阵，$N^2 \gg m$，$rank(\Sigma) \le \min\{N^2, m\}$

直接计算Σ的本征向量，非常困难。

$\rightarrow$ 采用**SVD**(***Singular Value Decomposition***)方法

[2]基于SVD的矩阵Σ本征值和本征向量求解

构造矩阵 $R = X^T X$，为$m \times m$矩阵$(m \ll N^2)$

矩阵R的特征方程 $Rv_i = \lambda_i v_i$ 即 $X^T X v_i = \lambda_i v_i$

$X X^T X v_i = \lambda_i X v_i$ 即 $\Sigma X v_i = \lambda_i X v_i$

记 $u_i = X v_i$ 则 $\Sigma u_i = \lambda_i u_i$

矩阵$\Sigma = X X^T$与矩阵$R = X^T X$具有相同**本征值**

对应**本征向量**关系 $u_i = X v_i$

R为$m \times m$矩阵$(m \ll N^2)$，容易求取：

本征值λ_i，及正交归一**本征向量**$v_i \ (i = 1, \ldots, m)$

若 矩阵$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$的本征向量$v_i$ ($\boldsymbol{m}$维向量)

则 矩阵$\sum = \frac{1}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T$的归一化本征向量 $\boldsymbol{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\boldsymbol{X}v_i$

--$\boldsymbol{N}^2$维向量(即$\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$图像)，本征脸"***eigenfaces***"

将$\sum$本征值由大到小排列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq \cdots \geq \lambda_m$

对应本征向量$\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{i} = 1,\ldots,\boldsymbol{m}$

每一幅人脸图像可投影到$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m$所张成的子空间中；

每一幅人脸图像对应该子空间一点；

任一幅人脸图像均可表示成"本征脸"的线性组合，

其加权系数为K-L变换的展开系数。

[3]投影子空间的生成

尽管$\boldsymbol{m} \ll \boldsymbol{N}^2$, 但$\boldsymbol{m}$仍很大, 可根据需要，对$\boldsymbol{m}$个本征向量有所舍取。

设信息压缩比$\alpha\left(\alpha = 95\%\right)$，取前$\boldsymbol{k}$个本征向量，

满足：
$$\boldsymbol{k} = \arg\min_{1 \le \boldsymbol{d} \le \boldsymbol{m}} \left(\frac{\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{d}} \lambda_{\boldsymbol{i}}}{\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}} \lambda_{\boldsymbol{i}}} \ge \alpha \right)$$

构造变换矩阵$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} \end{bmatrix}$

[4]特征提取：投影子空间的样本描述

$$y = U^T(x - \mu)$$

思考：特征提取后，如何做进一步的身份识别或鉴别？

基于压缩信息的人脸近似重构

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^{k} y_j u_j + \mu = Uy + \mu$$

主要内容

1.主成分分析法

Principal Component Analysis: PCA

问题1. 如何确定主成分？

问题2. 如何基于主成分确定数据的降维表示？

问题3. 如何由r(r<p)个主成分，重构x？

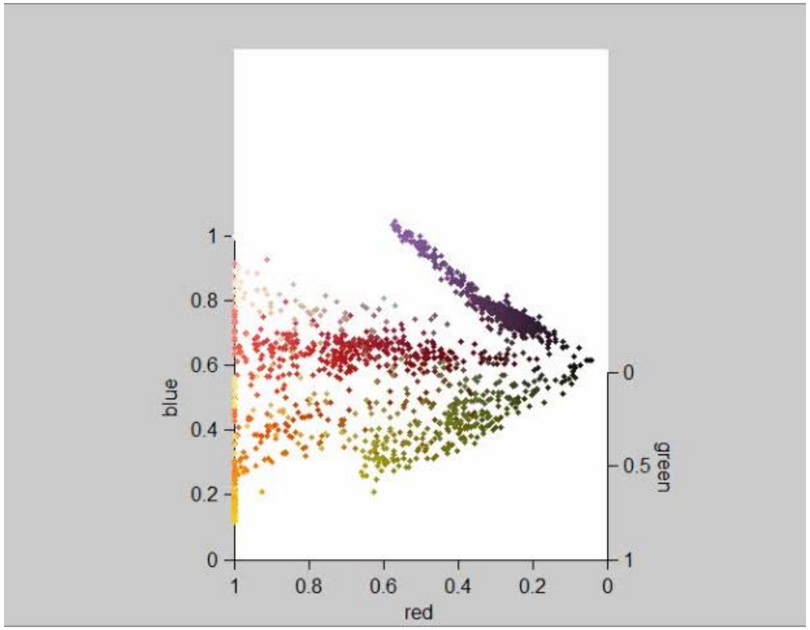
2. 应用之一--PCA在人脸识别中的应用举例

3. 应用之二—彩色图像的压缩

Example – PCA to compress color images

- Recall that a color image is made up of pixels with red, green, blue (RGB) values.
- Essentially, we have a collection of 3D vectors in RGB space.

Image “peppers.png’



Pixels in RGB space (only 1% are shown)

```
clear all
close all

RGB = im2double(imread('peppers.png'));

% Convert 3-dimensional array array to 2D, where each row is a pixel (RGB)
X = reshape(RGB, [], 3);
N = size(X,1);  % N is the number of pixels

% Plot pixels in color space.  To limit the number of points, only plot
% every 100th point.
figure
hold on
for i=1:100:size(X,1)
    mycolor = X(i,:);
    mycolor = max(mycolor, [0 0 0]);
    mycolor = min(mycolor, [1 1 1]);
    plot3(X(i, 1), X(i, 2), X(i, 3), ...
        '.', 'Color', mycolor);
end
xlabel('red'), ylabel('green'), zlabel('blue');
xlim([0 1]), ylim([0 1]), zlim([0 1]);
hold off
axis equal
% Rotate the display.
for az=-180:3:180
    view(az,30);    % set azimuth, elevation in degrees
    drawnow;
end
```

Code to convert RGB color image to a set of vectors, and plot them

Example (continued)

- Can we use fewer than 3 values per pixel?
- Do PCA on color vectors ... keep the top two PCs.

```
% Get mean and covariance
mx = mean(X);
Cx = cov(X);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Get eigenvalues and eigenvectors of Cx.
% Produces V,D such that Cx*V = V*D.
% So the eigenvectors are the columns of V.
[V,D] = eig(Cx);
e1 = V(:,3);
disp('Eigenvector e1:'), disp(e1);
e2 = V(:,2);
disp('Eigenvector e2:'), disp(e2);
e3 = V(:,1);
disp('Eigenvector e3:'), disp(e3);

d1 = D(3,3);
disp('Eigenvalue d1:'), disp(d1);
d2 = D(2,2);
disp('Eigenvalue d2:'), disp(d2);
d3 = D(1,1);
disp('Eigenvalue d3:'), disp(d3);
```

```
Eigenvector e1:
  -0.8239
  -0.5611
  -0.0793
Eigenvector e2:
  -0.3262
   0.3551
   0.8761
Eigenvector e3:
  -0.4634
   0.7477
  -0.4756
Eigenvalue d1:
   0.0912
Eigenvalue d2:
   0.0296
Eigenvalue d3:
   0.0140
```

Example (continued)

- Construct the "A" matrix, whose rows are the eigenvectors of Cx

```
% Construct matrix A such that the 1st row of A is the eigenvector
% corresponding to the largest eigenvalue, the 2nd row is the eigenvector
% corresponding to the second largest eigenvalue, etc.
A = [e1'; e2'; e3'];
```

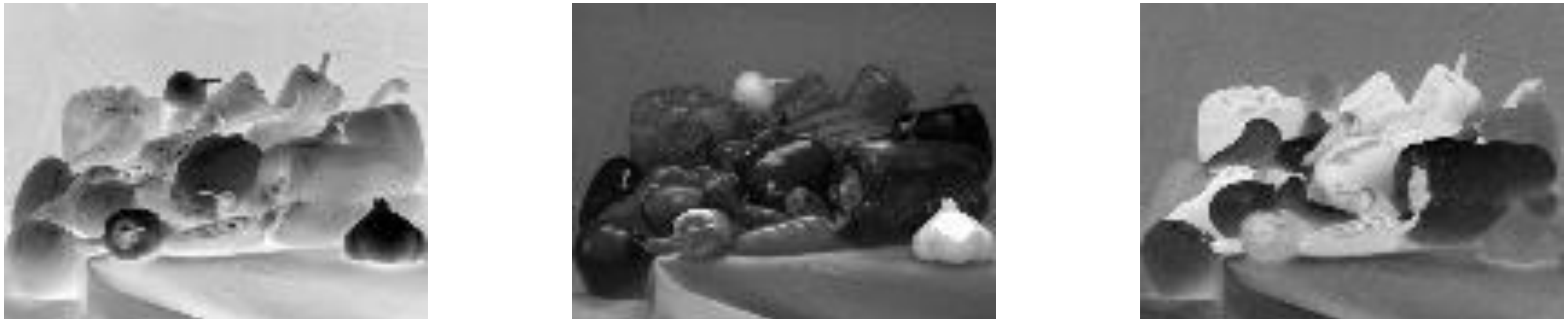
- Project input vectors onto the PCs

```
% Project input vectors x onto eigenvectors.  For each (column) vector x,
% we will use the equation y = A*(x - mx).
% To explain the Matlab commands below:
%   X is our (N,3) array of vectors; each row is a vector.
%   mx is the mean of the vectors, size (1,3).
%   We first subtract off the mean using X - repmat(mx,N,1).
%   We then transpose that result so that each vector is a column.
%   We then apply our transform A to each column.
Y = A*(X - repmat(mx,N,1))';    % Y has size 3xN
```

Example (continued)

- Display the y vectors as images

```
% Display y vectors as images
[height,width,depth] = size(RGB);
Y1 = reshape(Y(1,:), height, width);
Y2 = reshape(Y(2,:), height, width);
Y3 = reshape(Y(3,:), height, width);
figure;
subplot(1,3,1), imshow(Y1,[]);
subplot(1,3,2), imshow(Y2,[]);
subplot(1,3,3), imshow(Y3,[]);
```

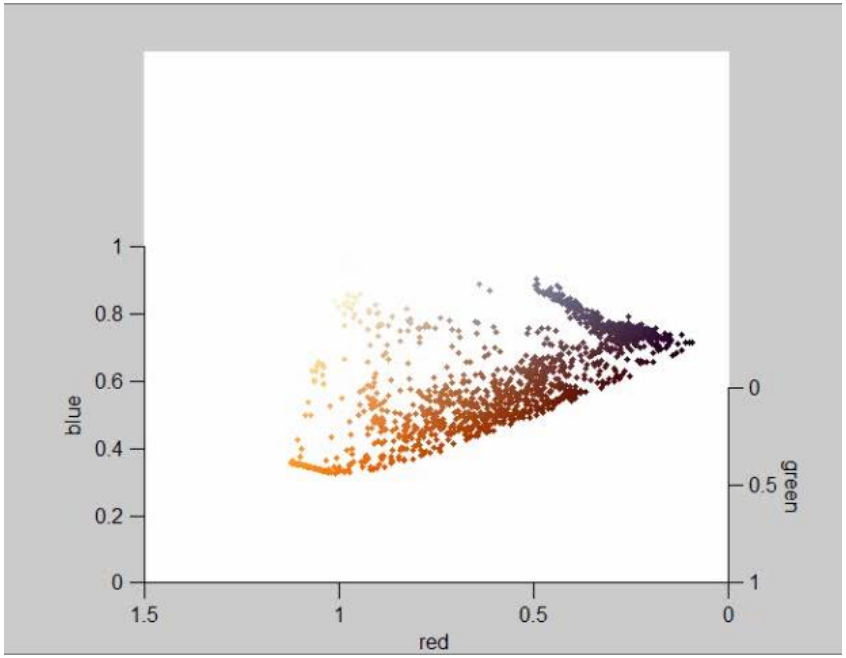


Example (continued)

- Form the A_k matrix by taking only the top *k* rows of A
- Reconstruct the **x** vectors using only the top k PC's:

$$\mathbf{x'} = \mathbf{A}_k^T \mathbf{y} + \mathbf{m_x}$$

- Plot the x vectors in RGB space.



Example (continued)

- Put the x vectors back into the form of an RGB image, using "reshape".

Original

Reconstructed