Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Suites Réelles

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

Exercice 1 : 30 min 5 pts

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = u_n\left(1-\sqrt{u_n}\right)^2$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $0 < u_n < 1$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Pour tout $n \in IN$; On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout $k \in IN$, $u_k = \sqrt{u_k} - \sqrt{u_{k+1}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$; $S_n = \frac{1}{2} - \sqrt{u_{n+1}}$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

3°) Soit (v_n) la suite réelle définie sur IN par $v_0 = \sqrt{2}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{\sqrt{1+u_n . v_n^2}}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$; $v_n = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{u_n}}}$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 2 : 24 min 4 pts

On pose, pour tout n de IN*, $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1°) Montrer que pour tout n∈IN*, on a : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2°) En déduire la limite de la suite (u_n).

3°) Pour tout n∈IN*, on pose : $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que pour tout n∈IN*, on a : $v_n \geq \sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite (v_n).

b) En utilisant la double inégalité, $u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}} < u_{n-1}$, montrer que la suite de terme générale $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$ converge vers le réel 2.

www.takiacademy.com

Exercice 3 : 36 min 6 pts

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \ , \quad \text{pour tout } n \in \text{IN} \end{cases}$.

1°) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que **si** la suite (u_n) converge **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2°) On suppose dans cette question que $0 < u_0 < 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 < u_n < 1$.

b) En déduire que (u_n) est convergente.

c) On pose pour tout $n \in IN$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$, Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Dans la suite, on prend $u_0 > 1$

3°) a) Vérifier que $u_1 < 0$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$, $u_n \le u_1$.

c) En déduire que la suite (u_n) n'est pas minorée, et déterminer sa limite.

d) On pose pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-u_k}$.

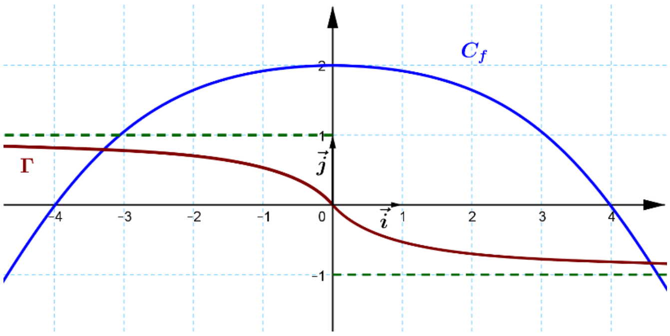
Vérifier que pour tout $k \in IN$, $\frac{1}{1-u_k} = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4 : 30 min 5 pts

1°) Dans la figure ci-contre on donne C_f la courbe d'une fonction *f* dérivable sur IR, et Γ la courbe de f' (fonction dérivée de *f*).

On a tracer sur le graphique les asymptotes à Γ **(Droites en pointillés)**.

Montrer que $g : x \mapsto f(x) + x$ est croissante sur $[-4,4]$



2°) Soit (u_n) la suite définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + f(u_n), \ \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \le u_n \le 4$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Taki Academy
www.takiacademy.com
www.takiacademy.com
Magazines
73.832.000

2°) Pour tout $n \in IN$, on pose : $v_n = \sum_{k=0}^{n} f(u_k)$. Montrer que $v_n = u_{n+1} - 1$ et déduire $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

3°) Pour tout $n \in IN$, on pose : $w_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} + u_k)$.

Montrer que pour tout $k \in IN$: $u_{k+1} + u_k \geq 2$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} w_n$.

Exercice 5 : 24 min 4 pts

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \quad ; \quad U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \frac{2}{3} U_{n+1} - \frac{1}{9} U_n, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

Soient (V_n) et (W_n) deux suites définie sur *IN* par : $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{3} U_n$ et $W_n = 3^n U_n$.

1°) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison, puis déterminer V_n en fonction

de *n*.

2°) Montrer que (W_n) est une suite arithmétique.

3°) Déterminer l'expression de U_n en fonction de *n*.

4°) a) Montrer que pour tout entier naturel $n \in IN^*$ on a : $0 < U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$.

b) Déduire que pour tout entier naturel $n \in IN^*$: $0 < U_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

c) Calculer alors $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 6 : 24 min 4 pts

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{2 - u_n^2}}, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$.

1°) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

2°) Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

www.takiacademy.com
Magazines

Taki Academy
www.takiacademy.com

3°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $u_{n+1} \le \frac{2\sqrt{7}}{7} u_n$. En déduire que pour tout $n \in IN$, on a :

$$u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^n .$$

b) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4°) Soit (S_n) la suite réelle définie sur IN par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que (S_n) est majorée.

b) En déduire qu'elle est convergente.

Exercice 7 : 30 min 5 pts

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n + 3}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n + 3}{3}$. On pose $u_n = a_n - b_n$

1°) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b) En déduire la limite de (u_n)

2°) On pose, pour $n \in IN^*$, $v_n = \frac{a_n + b_n}{n}$

a) Montrer que pour tout $n \ge 1$ on a : $v_n \ge 2$.

b) Montrer que pour tout $n \ge 1$ on a : $v_{n+1} = v_n + \frac{2 - v_n}{n+1}$.

c) En déduire que (v_n) converge vers un réel $l > 0$.

3°) Exprimer alors a_n et b_n en fonction de u_n, v_n et n puis déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).

www.takiacademy.com

Magazines

73.832.000

Taki Academy
www.takiacademy.com

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000