Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions Réciproques

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

Exercice 1 : 20 min 3 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$.

1)
   a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha \in \left]1;\dfrac{3}{2}\right[$.
2) Soit g la restriction de f sur $[0;+\infty[$.
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]1;2]$.
   b) Ecrire l'expression de $g^{-1}(x)$ pour $x \in]1;2]$.

Exercice 2 25 min 5 pts

A/ Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x^2-1+\sqrt{x^2+x}$ et soit C_f

1) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2)
   a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
   c) En déduire que $f'(x)>0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
3)
   a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$.
4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0;+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]0;1[$.

B/ Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

1) Donner le sens de variation de f^{-1}.
2)
   a) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur $[-1,+\infty[$.
   b) Calculer $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)$.
3) Construire C' la courbe représentative de f^{-1}.

Exercice 3 : 25 min 5 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x+2+\sqrt{x^2-x} & si\ \ x\leq 0 \\ -2x^3-3x^2+2 & si\ \ x>0 \end{cases}$

1)
   a) Montrer que f est continue en 0.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0. Interpréter graphiquement lle résultat.
2) Soit g la restriction de f sur $]0;+\infty[$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;2[$.
   b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ une unique solution $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.
3)
   a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\infty;2[$.
   b) Montrer que $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{-6\alpha(\alpha+1)}$.
   c) Calculer $g(1)$ et $(g^{-1})'(-3)$.
   d) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse (-3).

Exercice 4 : 25 min 5 pts

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{2}{x}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1)
   a) Etudier les variations de f.
   b) Montrer que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   c) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=f(x)-x$.
   Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et que $\alpha=2$.
2) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f et soit C' sa courbe représentative.
   a) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur J.
   b) Calculer $f^{-1}(3)$et $(f^{-1})'(3)$.
   c) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
   d) Calculer $(f^{-1})'(x)$pour tout $x\in J$.
   e) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice 5 : 30 min 5 pts

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x+1$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1)
   a) Montrer que
   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter le résultat graphiquement.
   c) Vérifier que $\forall x\in]1;+\infty[$, on a :
2)
   a) Montrer que
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Montrer que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
3)
   a) Justifier graphiquement que f^{-1} est dérivable à droite en 0.
   b) Donner le tableau de variation de f^{-1}.
4)
   a) Calculer $f\left(\sqrt{5}\right)$.
   b) Montrer que f^{-1} est dérivable en $3-\sqrt{5}$ et donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en son point d'abscisse $3-\sqrt{5}$.
5)
   a) Montrer que $\forall x\in J$ n, on a : $f^{-1}(x)=\dfrac{-x^2+2x-2}{2(x-1)}$.
   b) Résoudre alors l'équation : $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 6 : 20 min 4 pts

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3;+\infty[$ ainsi que sa tangente T au point d'abscisse 0. Sa demi tangente à droite au point $(-3,-2)$ et ses demi tangentes au point $(-1,0)$.

✓ La courbe $\mathcal{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$.

1) Par lecture graphique déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x);\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x};\ \lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)}{x+1};\ \lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)}{x+1}$$

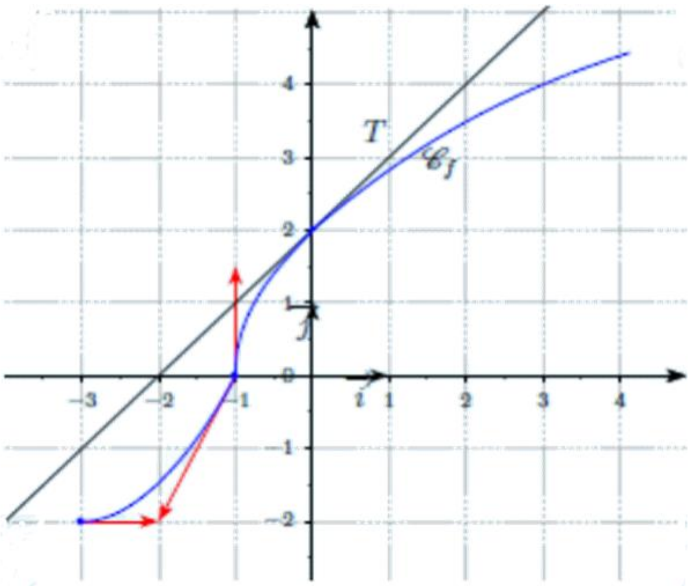
2) Ecrire l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 0.

3)

a) Justifier que f réalise une bijection de sure un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

c) Tracer dans le même repère la courbe de f^{-1}. Ainsi que sa tangente à au point d'abscisse -2 et ses tangentes au point d'abscisse 0.



Taki Academy
www.takiacademy.com

تهنى على قرايتك

Magazines

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000