Mathématiques

Thème : Nombres complexes

Exercices de synthèse

Exercice N°5

1) a) Vérifier que $(3+2i)^2 = 5+12i$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1): $z^2+iz+1+3i=0$.

c) En déduire les solutions de l'équation (E_2) : $z^2-iz+1-3i=0$.

2) Déduire alors l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation

$(E): z^4+3z^2+6z+10=0$.

3) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1+2i ,1-2i , -1-i et -1+i .

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Montrer que ABCD est un trapèze.

c) Calculer l'aire de ce trapèze.

1) a) Vérifier que $(3+2i)^2 = 5+12i$.

$$(3+2i)^2 = 3^2 + 2\times 3\times 2i + (2i)^2$$

$$= 9 + 12i - 4$$

$$= \boxed{5+12i}$$

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) : $z^2+iz+1+3i=0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (i)^2 - 4\times 1\times(1+3i)$

$= -1 - 4 - 12i$

$= -5 - 12i$

$= -(5+12i)$

$= i^2 \times (3+2i)^2 = (i(3+2i))^2$

$\Delta = (-2+3i)^2$

$\Rightarrow \delta = -2+3i$ est une racine carrée du Δ

$z_1 = \dfrac{-i-(-2+3i)}{2}$

$= \dfrac{-i+2-3i}{2}$

$= 1-2i$

$z_2 = \dfrac{-i-2+3i}{2} = -1+i$

Ainsi $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-1-2i \,;\, -1+i\}}$

c) En déduire les solutions de l'équation (E_2) : $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$.

z est une solution de (E_2)

$\Leftrightarrow \overline{z^2 - iz + 1 - 3i} = 0$

$\Leftrightarrow \bar{z}^2 + i\bar{z} + 1 + 3i = 0$

$\Leftrightarrow \bar{z}$ est une solution de (E_1)

$\Leftrightarrow \overline{\bar{z} = -1 + i}$ ou $\overline{\bar{z} = 1 - 2i}$

$\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $\bar{\bar{z}} = z$

$\Leftrightarrow z = -1 - i$ ou $z = 1 + 2i$

Ainsi $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-1 - i \,;\, 1 + 2i\}}$

2) Déduire alors l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation

$(E): z^4+3z^2+6z+10=0$.

On a $(z^2+iz+1+3i)(z^2-iz+1-3i)$

$= z^4+3z^2+6z+10$

donc $(E) \Leftrightarrow (z^2+iz+1+3i)(z^2-iz+1-3i)=0$

$\Leftrightarrow z^2+iz+1+3i=0$

ou $z^2-iz+1-3i=0$

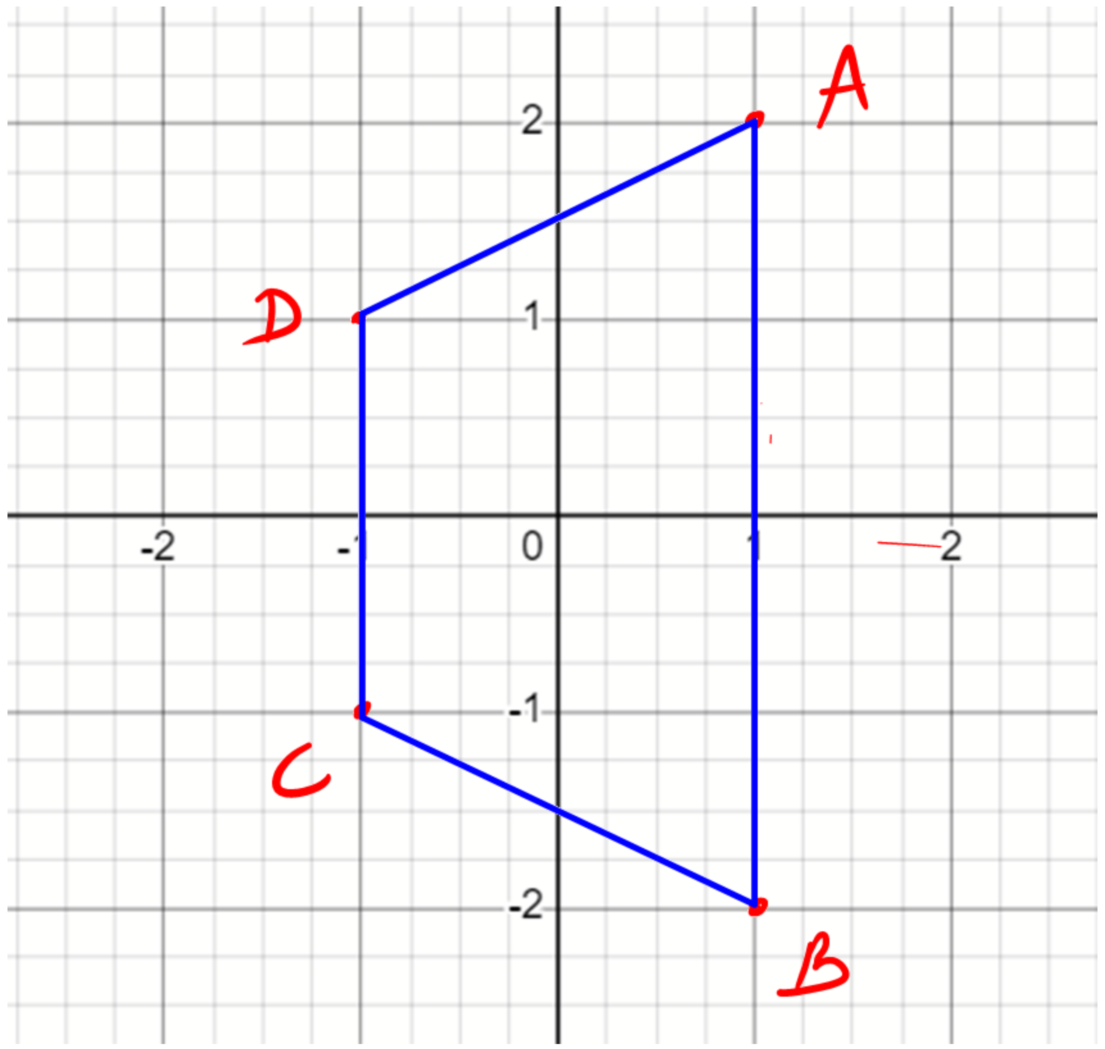
$\Leftrightarrow z=-1+i$ ou $z=1-2i$

ou $z=-1-i$ ou $z=1+2i$

Ainsi $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{-1+i\,;1-2i\,;-1-i\,;1+2i\}}$

3) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i$, $1-2i$, $-1-i$ et $-1+i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.



b) Montrer que ABCD est un trapèze.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -4i$

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -2i$

donc $\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{DC}}} = \dfrac{-4i}{-2i} = 2 \in \mathbb{R}$

d'où $(AB) \parallel (DC)$

et par suite $\boxed{ABCD \text{ est un trapèze}}$

c) Calculer l'aire de ce trapèze.

$$\text{Aire de } ABCD = \frac{(AB + DC) \times \text{hauteur}}{2}$$

$$= \frac{(4+2) \times 2}{2}$$

$$= \boxed{6\ (u.a)}$$