Taki Academy
www.takiacademy.com

Classe : Bac Maths

Série : révision synthese2

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Exercice 1 — 25 min — 5 pts

L’espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A(0 ,0 ,1) ; B(1 , 0 , 1) , C (2 , 1, -1) et I (-2 , 1 , 2)

1/ a- Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b- En déduire que A , B et C déterminent un plan P dont on déterminera une équation cartésienne

c- Calculer l’aire du triangle BCA

d- Déterminer la distance du point C au droite (AB) .

2/

a- Montrer que IABC est un tétraèdre

b- Déterminer le volume V du tétraèdre IABC.

c- En déduire de ce qui précède la distance de I à P.

3/ Soit S la sphère de centre I et passant par A . Montrer que *S* et *P* sont sécants suivants un cercle (C) que l’on caractérisera.

4/ On désigne par h l’homothétie de centre I et de rapport $k=\frac{1}{5}$

a- Déterminer l’expression analytique de h .

b- Déterminer S’=h(S)

c- Déterminer A’= h(A) puis en déduire P’=h(P).

d- Montrer que S’ $\cap$ P’ est un cercle (C’) dont on précisera le centre et le rayon

Exercice 2 — 25 min — 5 pts

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1(\bmod 2^4)$ et $a \equiv 1(\bmod 5^4)$. Montrer que : $a \equiv 1(\bmod 10^4)$

2) Soit $b=(9217)^4$. Montrer que : $b \equiv 1(\bmod 5)$ et $b \equiv 1(\bmod 2^4)$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = b^{5^n} - 1$.

   a) Montrer que pour tout entier, naturel n, $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_3^2 + 5b_n$.

4)

   a) Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5.

   b) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $b_n = 0(\bmod 5^{n+1})$.

5)

   a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1(\bmod 625)$

   b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1(\bmod 10000)$

c) Trouver un entier dont le cube est congru a 9217 modulo 10000.

Exercice 3 — 40 min — 7 pts

Soit *f* la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\sqrt{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\mathbf{1}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

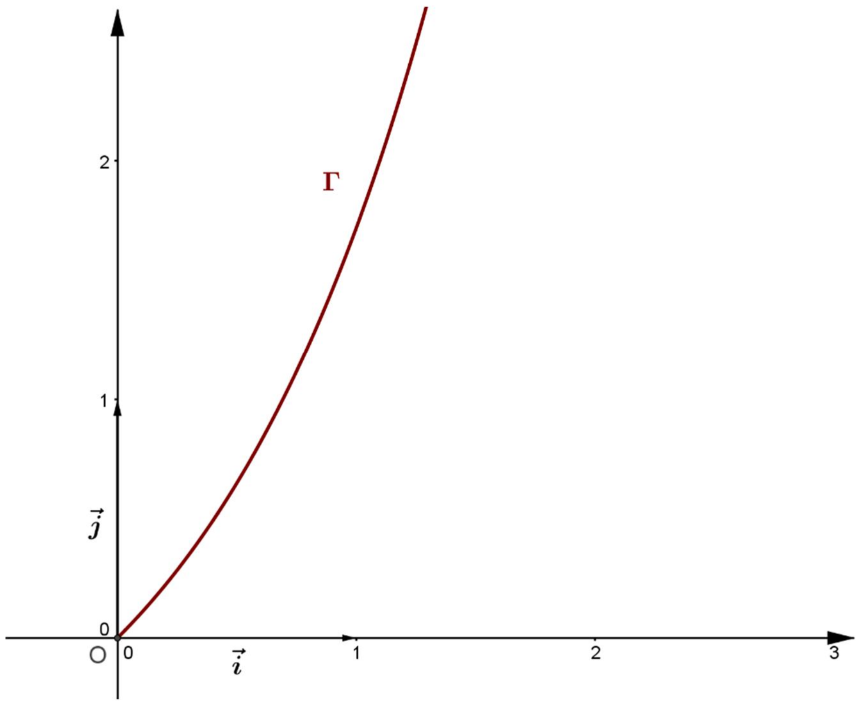
b) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de *f*.

d) En déduire que $e^x-1\leq\sqrt{e^x-1}$, si et seulement si, $0\leq x\leq \ln 2$.

3°) Montrer que le point $\mathbf{B}(\ln 2,1)$ est un point d'inflexion de (C_f).

4°) Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x\mapsto e^x-1$.



a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.

b) Tracer la courbe (C_f).

5°) Soit g la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\mathbf{g(x)=\tan x}$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$. On note $\mathbf{g^{-1}}$ sa fonction réciproque.

b) $(\mathbf{g^{-1}})(\mathbf{0})$ et $(\mathbf{g^{-1}})(\mathbf{1})$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $(\mathbf{g}^{-1})'(\mathbf{x})=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x^2}}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathbf{g^{-1}(x)}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$.

6°) On pose pour tout $x\in[0,+\infty[$, $\mathbf{F(x)=\int_0^x f(t)\,dt}$ et $\mathbf{G(x)=2\left(f(x)-(g^{-1}\circ f)(x)\right)}$.

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\mathbf{F'(x)=G'(x)}$.

b) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$ $\mathbf{F(x)=G(x)}$.

c) Soit $\boldsymbol{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , La courbe Γ et les droites d'équations

$x=0$ et $x=\ln 2$. Montrer que $\boldsymbol{A}=\mathbf{1+\ln 2-\frac{\pi}{2}}$.

7°) Soit n un entier tel que $n\geq 2$.

On désigne par $\mathbf{f_n}$ la fonction définie sur $[\ln(n),+\infty[$ par $\mathbf{f_n(x)=\sqrt{e^x-n}}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $[\mathbf{\ln(n)},+\infty[$ par $\mathbf{G_n(x)=2\left(f_n(x)-\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right)}$.

Montrer que pour tout $x\in[\ln(n),+\infty[$, $\mathbf{G_n(x)=\int_{\ln(n)}^x f_n(t)\,dt}$.

b) Vérifier que pour tout $\mathbf{x\geq\ln(n)}$, $\mathbf{\sqrt{e^x-n}<\sqrt{e^x-1}}$.

En déduire que pour tout $x\geq\ln(n)$, $\mathbf{f_n(x)\leq e^x-1}$.

c) Soit $\boldsymbol{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_n), la courbe Γ et les droites d'équations

$\mathbf{x=\ln(n)}$ et $\mathbf{x=\ln(n+1)}$. Montrer que $\boldsymbol{A}_\mathbf{n}=\mathbf{2\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-1}$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{A}_n$.