Maths

Classe : Bac Maths

Série : f.reciproques

déplacements et antideplacements

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Exercice 1 : 20 min 4pts

Soit $ABCD$ est un rectangle direct de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$, on construit le point E tel que ACE un triangle équilatéral direct et I est le milieu de $[EC]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $\mathrm{f}(B) = A$ et $\mathrm{f}\ (D) = E$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f.

2) Soit $g = t_{\overrightarrow{OA}} o r_{(C,\frac{-\pi}{3})}$

3) a) Déterminer $g(B)$ puis montrer que $g = f$.

b) Soit le point $F = \mathrm{g}(A)$ montrer que $AOEF$ est un rectangle

Exercice 2 : 30 min 4 pts

Soit ABC est un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]]$ H est le projeté orthogonal de C sur (AB) I et J les milieux respectifs des segments $[AH]$ et $[AC]$ Δ est la médiatrice de $[AC]$.

1)a)Faire une figure claire

b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $\mathrm{f}(C) = A$ et $\mathrm{f}(H) = J$

b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

c) Soit D le symétrique de H par rapport à J, montrer que $f(J) = D$

d) Montrer que $\mathrm{f}((AB)) = \Delta$

e) La parallèle à (AC) passant par D coupe Δ en K, montrer que $\mathrm{f}\ (I) = K$

2) Soit $g = S\Delta \circ f$

a) Déterminer $\mathrm{g}(H)$ et $\mathrm{g}\ (C)$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g

Exercice 3 : 30 min 4 pts

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que. On désigne par

R : la rotation de centre a et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

t : translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

S : la symétrie de centre C.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de des applications : $f = toR$; $g = S\,o\,t\,o\,R$ et $f\,o\,g$.

2) Montrer qu'il existe un unique point M du plan vérifiant $f(M) = g(M)$.

3) Soient $I = A * B$ et $J = B * C$.

   a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui envoie A en C et B en D.

   Caractériser φ.

   b) Soit Ψ l'antidéplacement qui envoie A en C et B en D.

   Déterminer $\psi o \varphi(C)$ et $\psi o \varphi(D)$.

Exercice 4 30 min 6 pts

Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \tan x$.

1) a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$.

   b) Soit g^{-1} sa fonction réciproque.

   Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$g_n(x) = x^n + g^{-1}\left(\frac{x}{n}\right).$$

   a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 1$ admet une solution unique α_n dans $[0,+\infty[$ et que $\alpha_n \in]0,1[$.

   b) Montrer que $\forall x \in]0,1[$; $g_{n+1}(x) < g_n(x)$. En déduire que la suite (α_n) est croissante.

   c) Montrer que la suite (α_n) est convergente.

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - g^{-1}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) < \alpha_n < 1$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

   b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-(\alpha_n)^n\right) = 1$.

Exercice 5 — 30 min — 6 pts

Le plan est orienté. On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O tel que $AB = AD$;

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.

1)
   a) Montrer que $AB = ED$.
   b) En déduire qu'il existe une rotation r tel que $r(A) = E$ et $r(B) = D$. Préciser son angle θ et construire son centre I.

2) L droite (EC) coupe (AB) en F.
   a) Montrer que le triangle AEF est équilatéral et que $r(F) = A$.
   b) En déduire que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

3) Soit r' la rotation de centre c et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Trouver $r'(F)$ et $r'(D)$ et en déduire que les droites (FD) et (BE) se coupe en J et que $\left(\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JB}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

4) Soit Γ le cercle de centre Ω circonscrit au triangle ABD.
   a) Montrer que Γ passe par I et J.
   b) Montrer que I, O et Ω sont alignés sur une droite A.

5)
   a) Caractériser le déplacement f tel que : $f(B) = A$ et $f(C) = D$.
   b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement σ tel que $\sigma(C) = D$ et $\sigma(B) = A$
   .
   Donner les éléments caractéristiques de σ.

6) Soit $S = \sigma o S_{(BD)}$.
   a) Donner la nature de S.
   b) Donner les éléments caractéristiques de S.

Exercice6 30 min 5 pt

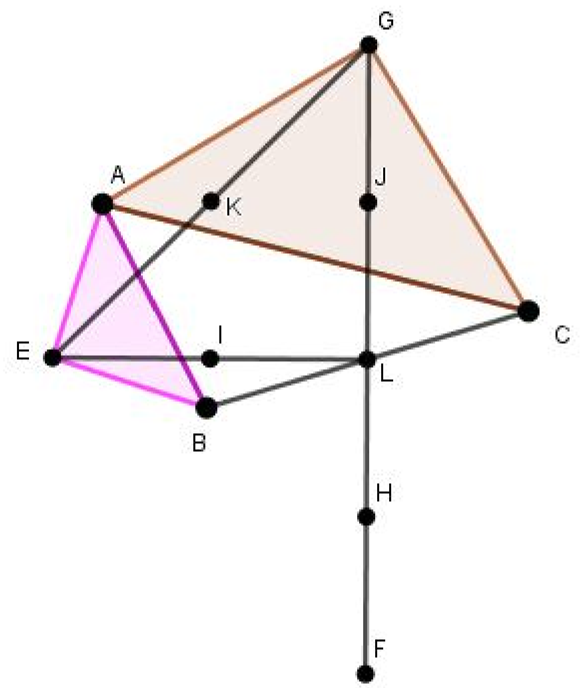
Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle direct, non rectangle et non isocèle.

GAC et EBA sont des triangles directs, rectangles et isocèles respectivement en G et E .

L, K, I et J sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[GE]$, $[EL]$ et $[GL]$. F et H sont les symétriques respectifs de G et J par rapport à L .

On note r_1 et r_2 les rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs G et E . S_L désigne la symétrie centrale de centre L .



1)
   a) Déterminer $r_2 \circ S_L \circ r_1(A)$.
      Caractériser $r_2 \circ S_L \circ r_1$.
   b) En déduire que le triangles EFG est rectangle, isocèle.
   c) Justifier que le quadrilatère $LJKI$ est un carré.
2) Soit φ la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{LK}$ de l'axe Δ passant par I .
   On pose $g = \varphi \circ S_{(LE)}$, où $S_{(LE)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (LE) .
   a) Montrer que $\Delta = (IH)$.
   b) Montrer que $g(J) = I$ et $g(L) = E$.
   c) Prouver que g est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3) Soit f l'antidéplacement qui envoie J en I et L en E .
   a) Justifier que f est une symétrie glissante.
   b) Donner les éléments caractéristiques de f .
4) Soit M un point du plan. Soient M' et M'' les images de M respectivement par f et g .
   Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.