Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Suites Réelles

Exercice 1 : 30 min 5 pts

Soit U la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 - U_n + 2}{1+U_n}, \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n∈ , $1 < U_n \leq 2$.

b) Etudier la monotonie de la suite U. En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout n de IN on a : $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$, $0 \leq U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ pour tout $n \in IN^*$

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $n < S_n \leq n + 1 - (\frac{1}{2})^n$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 2 : 36 min 6 pts

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n^2 + U_n + 2}{2 + U_n^2} \quad \text{pour tout } n \in IN. \end{cases}$

1) a- Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > 2$.

b- Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) a- Montrer que pour tout n de IN ; $0 < U_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(U_n - 2)$.

b- En déduire que pour tout n de IN , $0 < U_n - 2 \leq \frac{1}{2^n}$, puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) On pose pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ et $V_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$

a- Montrer que pour tout n de IN^* ; $2n \leq S_n \leq 2n + 1$

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice 3 : 24 min 4 pts

On considère les suites réelles définies sur IN par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \dfrac{2U_n + V_n}{3} \\ V_0 = 1 \text{ et } V_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2V_n}{5} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $U_n \leq V_n$.
2) Montrer que la suite (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
3) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et admettent la même limite.
4) Soit la suite (W_n) définie sur IN par $W_n = 9U_n + 5V_n$.
   a) Montrer que (W_n) est une suite constante .
   b) En déduire la limite commune des suites (U_n) et (V_n)

Exercice 4 : 24 min 4 pts

On considère les suites réelles (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = 1$; $V_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \alpha U_n + (1-\alpha) V_n$ et $V_{n+1} = (1-\alpha) U_n + \alpha V_n$ où α est un réel donné tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

1) Soit (t_n) la suite définie sur N par $t_n = v_n - u_n$.
   a) Calculer t_0 et t_1 .
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $t_n = (2\alpha - 1)^n$.
   c) En déduire la limite de t_n.
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l .
   d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 3$ et en déduire la valeur de la limite l.

Exercice 5 : 30 min 5 pts

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{8+U_n}{1+2U_n} \quad \text{pour tout } n \in \text{IN}. \end{cases}$

1/ a- Déterminer U_1 et U_2.

b- La suite U est-elle monotone ?

2/ a- Montrer que pour tout $n \in$ IN,on a : $\dfrac{3}{2} < U_n < 3$.

b- Montrer que pour tout $n \in$ IN , on a : $|U_{n+1} - 2| \leq \dfrac{3}{4}|U_n - 2|$

c- Montrer par récurrence, que pour tout $n \in$ IN on a : $|U_n - 2| \leq \dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{4})^n$.

d- En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3/ On considère la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \dfrac{U_n - 2}{2+U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 6 : 24 min 4 pts

1)Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$. Montrer que : $\forall x > 0 \ , \ 0 < f(x) < x$

2) Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n > 0$

b) Montrer que (U_n) est décroissante

c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit (V_n) la suite réelle définie par : $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \dfrac{V_n}{U_n}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} \geq \sqrt{2}\ .V_n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n \geq \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

Taki Academy
www.takiacademy.com

Magazines