Taki Academy
www.takiacademy.com

Classe : Bac Maths

Série : Intégrales

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Taki Academy

Exercice 1 : 30 min 6 pts

Soit n un entier ≥ 2. On pose : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)$.

1) Calculer : U_2

$\mathbb{R}$

2)
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $U_n \geq 0$.
   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
3)
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $U_{n+2} + U_n = \frac{1}{n+1}$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
4) On pose, pour tout entier $n \geq 2$, $V_n = U_{n+4} - U_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} V_{4k-2}$.
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $V_n = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$.
   b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = U_{4n+2} - U_2$.
   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right)$.

Exercice 2 25 min 4 pts

On pose : $g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

1) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in {}^+$.
3)
   a) Montrer que : $f : t \to \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est déduire sur $\mathbb{R}^+$.
   b) En déduire que : $\frac{x}{\sqrt{1+8x^3}} \leq g(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$; $\forall x \geq 0$.
4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Exercice 3 — 30 min — 5 pts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\mathbf{I_n} = \int_0^1 (1-\mathbf{x}^2)^{\mathbf{n}}\,\mathbf{dx}$.

1) Vérifier que : $I_1 = \frac{2}{3}$ et que $\mathbf{I}_2 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$.
2) Vérifier que : $\mathbf{I_n} - \mathbf{I_{n+1}} = \int_0^1 \mathbf{x}^2 (1-\mathbf{x}^2)^{\mathbf{n}}\,\mathbf{dx}$.
3)
   a) Montrer par intégration par partie que : $\mathbf{I_{n+1}} = \frac{2\mathbf{n}+2}{2\mathbf{n}+3}\mathbf{I_n}$.
   b) Déduire par récurrence que $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{I_n} = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.....\frac{2\mathbf{n}}{2\mathbf{n}+1}$.
4) On considère les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_0^{\sin x} (1-\mathbf{t}^2)^{\mathbf{n}}\,\mathbf{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \int_0^{x} \cos^{2\mathbf{n}+1}(\mathbf{t})\,\mathbf{dt}.$$

   a) Montrer que $\mathbf{F}$ et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puis déterminer $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ et $\mathbf{G}'(\mathbf{x})$.
   b) Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})$.
   c) Montrer alors que : $\mathbf{I_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\mathbf{n}+1}\mathbf{t}\,\mathbf{dt}$.

Exercice 4 — 35 min — 5 pts

Soit F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_0^{\sqrt{\tan x}} \frac{\mathbf{t}}{1+\mathbf{t}^4}\mathbf{dt}$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2)
   a) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\frac{\tan \mathbf{x}}{2\mathbf{x}(1+\tan^2 \mathbf{x})} \leq \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \leq \frac{\tan \mathbf{x}}{2\mathbf{x}}$.
   b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.
   c) Déterminer l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis déterminer la valeur de $\mathbf{I} = \int_0^1 \frac{\mathbf{t}}{1+\mathbf{t}^4}\mathbf{dt}$.

3) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\dfrac{\mathbf{t}}{1+\mathbf{t}^4} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} (-1)^{\mathbf{k}} \mathbf{t}^{4\mathbf{k}+1} + (-1)^{\mathbf{n}+1} \dfrac{\mathbf{t}^{4\mathbf{n}+5}}{1+\mathbf{t}^4}$.

4) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U_n} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} \dfrac{(-1)^{\mathbf{k}}}{4\mathbf{k}+2}$ et $\mathbf{V_n} = (-1)^{\mathbf{n}+1} \int_0^1 \dfrac{\mathbf{t}^{4\mathbf{n}+5}}{1+\mathbf{t}^4} \mathbf{dt}$.

a) Vérifier que : $\mathbf{U_n} + \mathbf{V_n} = \mathbf{I}$.

b) Montrer que : $|\mathbf{V_n}| \leq \dfrac{1}{4\mathbf{n}+6}$.

c) Déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite.