Mathématiques

Thème : Nombres complexes

Exercices de synthèse

Exercice N°4

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+i)\,z+i=0$

2°) θ étant un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

(E_θ) : $z^2-2e^{i\theta}\cos\theta\,z+e^{2i\theta}=0$

a) Vérifier que 1 est une solution de (E_θ).

b) En déduire l'autre solution de (E_θ).

3°) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$.

a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un losange.

c) Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire du losange $OACB$ soit égale à $\frac{1}{2}$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+i)\,z+i=0$

$a=1$; $b=-(1+i)$ et $c=i$

$a+b+c=0$

$z'=1$ et $z''=\frac{c}{a}=i$

$$\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{1\,;\,i\}}$$

2°) θ étant un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

(E_θ) : $z^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$

a) Vérifier que 1 est une solution de (E_θ).

$$1^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta \times 1 + e^{2i\theta}$$

$$= 1 - e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + e^{2i\theta}$$

$$= 1 \cancel{- e^{2i\theta}} - e^{0} \cancel{+ e^{2i\theta}}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

Donc $\boxed{\text{1 est une solution de } (E_\theta).}$

b) En déduire l'autre solution de (E_θ).

$$\boxed{\begin{array}{l} z' + z'' = -\frac{b}{a} \\ z' \times z'' = \frac{c}{a} \end{array}}$$

$$1 \times z'' = \frac{c}{a} = e^{2i\theta} \iff z'' = e^{2i\theta}$$

Donc $\boxed{\text{l'autre solution de } (E_\theta) \text{ est } e^{2i\theta}}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ |e^{i\alpha}| = 1$

3°) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$.

a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $E = \left\{ B(e^{2i\theta}) ; \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right\}$

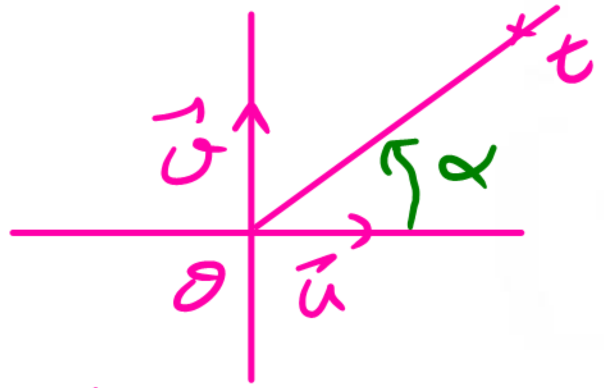
$$B \in E \iff \begin{cases} |z_B| = |e^{2i\theta}| = 1 \\ \arg(z_B) = \arg(e^{2i\theta}) + 2k\pi ; \end{cases} \quad \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\iff \begin{cases} OB = 1 \\ (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) = 2\theta + 2k\pi \end{cases} ; \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$$

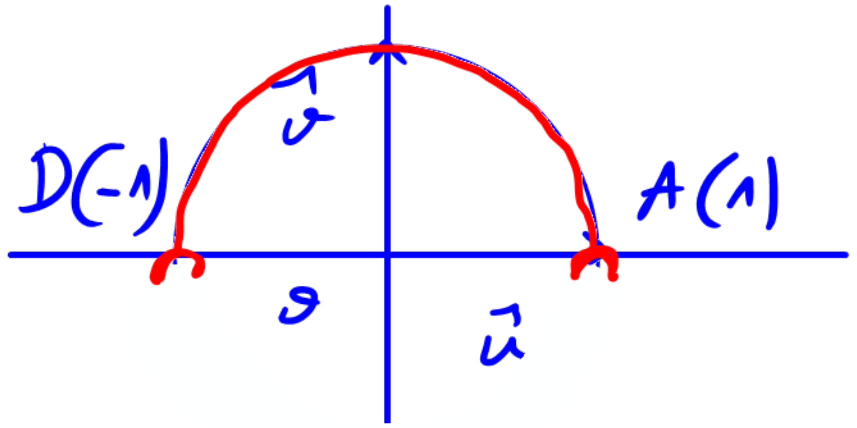
$$\iff \begin{cases} B \in \mathcal{C}(O,1) \\ B \in [Ot)\setminus\{O\} \text{ tel que } (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{Ot}}) = 2\theta + 2k\pi \end{cases}$$

avec $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 2\theta \in]0,\pi[$

$(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) = \alpha + 2k\pi$



$\iff B \in [Ot)\setminus\{O\}$ tel que $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{Ot}}) = \alpha + 2k\pi$



Ainsi $\boxed{E = \overset{\frown}{AD} \text{ du cercle } \mathscr{C}_{(O,1)} \text{ privé de } A(1) \text{ et } D(-1)}$

b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un losange.

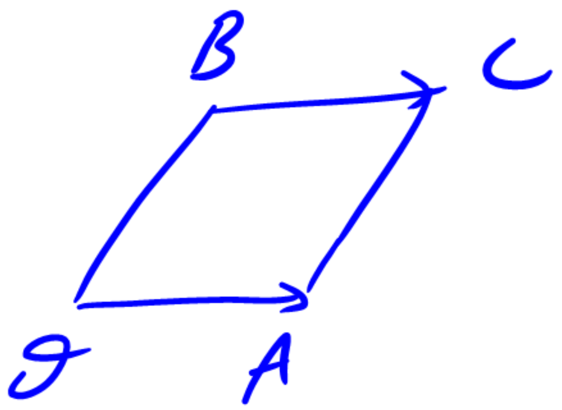
$OACB$ est un losange

$\Rightarrow OACB$ est un parallélogramme

$\Rightarrow \vec{OA} = \vec{BC}$

$\Rightarrow z_{\vec{OA}} = z_{\vec{BC}}$

$\Leftrightarrow z_A = z_C - z_B$



$\Leftrightarrow z_C = z_A + z_B$

$\Leftrightarrow \boxed{z_C = 1 + e^{2i\theta}}$

c) Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire du losange $OACB$ soit égale à $\frac{1}{2}$.

$$\mathcal{A}(OACB)=\frac{OC\times AB}{2}$$

$$=\frac{|z_C|\times|z_B-z_A|}{2}$$

$$=\frac{|1+e^{2i\theta}||e^{2i\theta}-1|}{2}$$

$$=\frac{|(e^{2i\theta}+1)(e^{2i\theta}-1)|}{2}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$=\frac{|e^{4i\theta}-1|}{2}$$

$$=\frac{|e^{2i\theta}\times e^{2i\theta}-e^{2i\theta}\times e^{-2i\theta}|}{2}$$

$$=\frac{|e^{2i\theta}(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})|}{2}$$

$$=\frac{|2i\sin(2\theta)e^{2i\theta}|}{2}$$

$$=\frac{2|\sin(2\theta)|}{2}=|\sin(2\theta)|$$

or $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $2\theta \in \left]0, \pi\right[$

donc $\mathcal{A}(OACB) = \sin(2\theta)$

Ainsi $\mathcal{A}(OACB) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $2\theta = \frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{12}$

$\sin \alpha = \sin \beta$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$

$(k \in \mathbb{Z})$