Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Suites réelles

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.
- Pour tous entiers naturels n et m on a : $u_n = u_m + (n-m)r$.
- En particulier : $u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r$.
- $\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\dfrac{u_p + u_n}{2}$.

Suites géométriques

Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = q.u_n$.
- Pour tous entiers naturels n et m on a : $u_n = q^{n-m} u_m$.
- En particulier : $u_n = q^n.u_0 = q^{n-1}.u_1$.
- Si $q \neq 1$, $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \dfrac{1 - q^{(n-p+1)}}{1-q}$.
- $\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ n'\text{existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$

Suite majorée - suite minorée - suite bornée

- Une suite u est dite majorée s'il existante M telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- Une suite u est dite minorée s'il existante m telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$.
- Une suite u est dite bornée s'il existe deux constantes m et M telles que : $\forall n \in IN, m \leq u_n \leq M$.

Suite monotone

Définition

Soit u une suite réelle :

- u est croissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- u est décroissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$.
- u est constante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

Suites

Soit $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $I = [0, +\infty[$. Si f est monotone sur I alors la suite u a le même sens de variation que f.

Suites récurrentes

Soit u une suite réelle définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans I.

- Si $\forall x \in I, f(x) \geq x$ alors la suite u est croissante.
- Si $\forall x \in I, f(x) \leq x$ alors la suite u est décroissante.

Suite convergente

Définition

Une suite réelle est dite convergente si elle admet une limite finie.

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Théorème

- Toute suite (u_n) croissante et majorée converge vers un réel a et $\forall n, u_n \leq a$.
- Toute suite (u_n) décroissante et minorée converge vers un réel b et $\forall n, u_n \geq b$.

Théorème

Soit u une suite réelle et ℓ un réel (ℓ peut être infinie).
$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell$

Théorème

Soit $u_n = f(n)$ où f est une fonction.
Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ (a fini ou infini) Alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$.

Suite du type : $v_n = f(u_n)$

Théorème

Si $\begin{cases} f & \text{est continue sur un intervalle ouvert } I \\ u_n & \text{une suite d'élément de } I \ (u_n \in I) \\ u_n & \text{converge vers } a \ (a \in I) \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$

Théorème

Si $\begin{cases} f & \text{est définie sur un intervalle } I \\ u_n & \text{une suite d'élément de } I \ (u_n \in I) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \ , & \ell \text{ fini ou infini} \\ \lim\limits_{x \to \ell} f(x) = b & \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = b$

Limites et ordre

Théorème 1

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers a.

- Si $u_n \geq 0$ ou $u_n > 0$, a partir d'un certain rang alors $a \geq 0$.
- Si $u_n \leq 0$ ou $u_n < 0$, a partir d'un certain rang alors $a \leq 0$.
- Si $m \leq u_n \leq M$ ou $m < u_n < M$, à partir d'un certain rang alors $m \leq a \leq M$.

Théorème 2

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Si $\begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n & \text{à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell, & \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Théorème 3

Soit deux suites (u_n) et (v_n)

Si $\begin{cases} u_n \leq v_n & \text{à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty & \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Si $\begin{cases} u_n \leq v_n & \text{à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty & \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 4

Soit deux suites (u_n) et (v_n)

Si $\begin{cases} |u_n| \leq v_n & \text{à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 & \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Suites récurrentes

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.
Si (u_n) est convergente vers un réel a et si f est continue en a alors $f(a) = a$.

Suites adjacentes

Définition

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence converge vers 0.

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante alors ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite a et pour tout n, $\quad u_n \leq a \leq v_n$.