Taki Academy
www.takiacademy.com

Sciences physiques

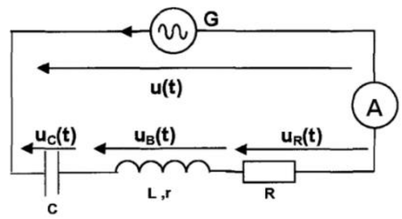
Classe : 4ème **Math** (Gr Standard)

Cours physique :

RLC forcées

Prof : Karmous Med

Equation différentielle en i(t)



$$L\,\frac{di}{dt} + (R+r)\,i(t) + \frac{1}{C}\int i\,dt = U_m \sin(w\,t + \varphi_u)$$

Cette équation différentielle admet comme solution $i(t) = I_m.\sin(wt+\varphi_i)$.

* Expression de I_m et du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$:

$$L\,\frac{di}{dt} \quad + \quad (R+r)\,i(t) \quad + \quad \frac{1}{C}\int i\,dt \quad = \quad U_m \sin(2\pi N t + \varphi_u)$$

$$\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} Lw.\mathrm{Im} \\ \varphi_i + \frac{\pi}{2}\end{pmatrix} + \overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} (R+r).\mathrm{Im} \\ \varphi_i\end{pmatrix} + \overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix} U_{C_m} = \frac{\mathrm{Im}}{C.w} \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2}\end{pmatrix} = \overrightarrow{V}\begin{pmatrix} U_m \\ \varphi u\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ sont parallèles et de sens contraire et perpendiculaire à $\overrightarrow{V_1}$ donc la construction de Fresnel est basée sur la comparaison des modules des vecteurs $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$, on distingue alors trois cas :

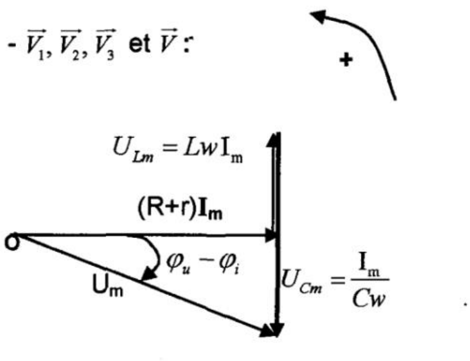
construction de FRESNEL

1 cas w $\prec \omega_0$. $-\frac{\pi}{2} \prec \varphi_u - \varphi_i \prec 0$ (Rad).

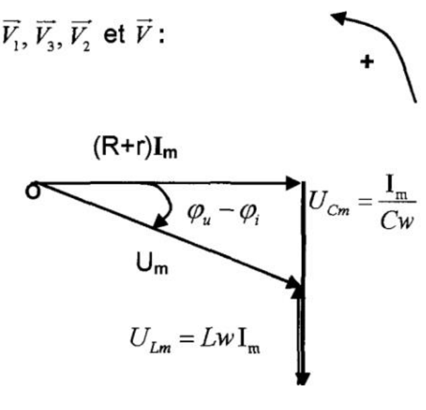
$\omega^2 \prec \frac{1}{LC}$ alors $L\omega \prec \frac{1}{C\omega}$ d'où $L\omega\,I_m \prec \frac{I_m}{C\omega}$ et le circuit est capacitif.

- Construction de Fresnel dans l'ordre des vecteurs :

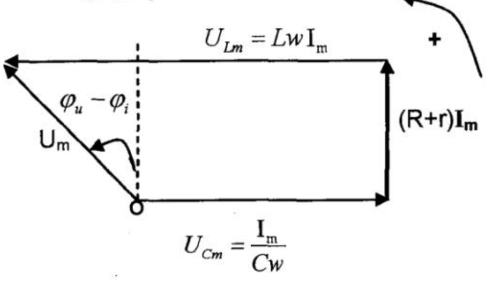
\- $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V}$:



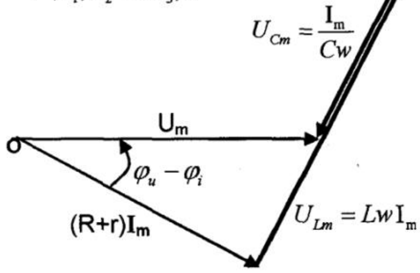
\- $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V}$:



\- $\overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V}$:



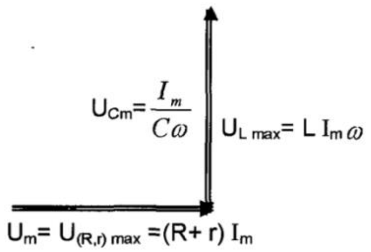
\- $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$:



2cas w=w₀

alors $LI_m\omega = \dfrac{I_m}{C\omega}$ d'où le circuit est en état de résonance d'intensité (circuit résistif)

- $(R+r)\,I_m = U_m$ alors $I_m = \dfrac{U_m}{(R+r)}$.
- $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$.



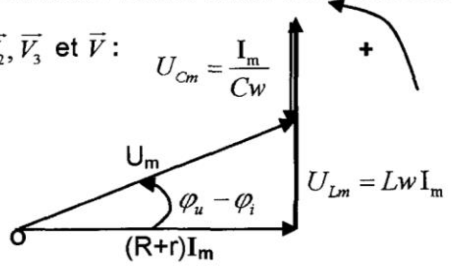
3 cas

$\omega \succ \omega_0$, ω_0 étant la pulsation propre de l'oscillateur (L,C) et ω étant la pulsation du générateur.

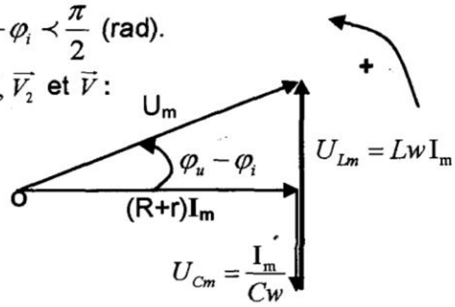
$\omega^2 \succ \dfrac{1}{LC}$ alors $L\omega \succ \dfrac{1}{C\omega}$ d'où $L\omega\,I_m \succ \dfrac{I_m}{C\omega}$ et le circuit est inductif.

- Construction de Fresnel dans l'ordre des vecteurs : $0 \prec \varphi_u - \varphi_i \prec \dfrac{\pi}{2}$ (rad).

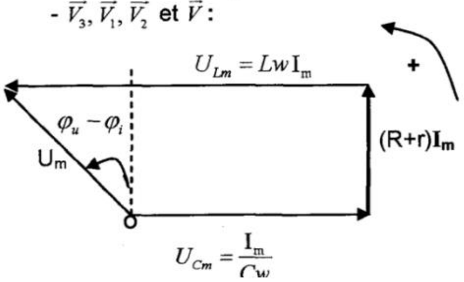
- $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ et $\vec{V}$:



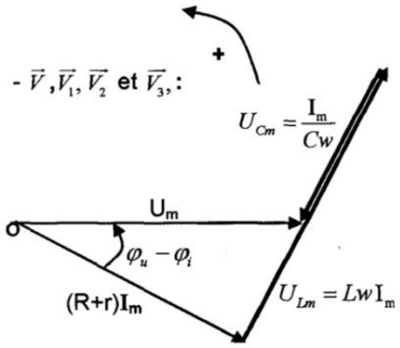
- $\vec{V_1}, \vec{V_3}, \vec{V_2}$ et $\vec{V}$:



- $\vec{V_3}, \vec{V_1}, \vec{V_2}$ et $\vec{V}$:



- $\vec{V}, \vec{V_1}, \vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$:



En appliquant le théorème de Pythagore : $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + (Lw - \dfrac{1}{Cw})^2}}$ **(1)**

Avec $\sqrt{(R+r)^2 + (Lw - \dfrac{1}{cw})^2}$ = Z : Impédance électrique du circuit (RLC).

$\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \dfrac{(R+r)\,I_m}{U_m}$. **(2)** $\tan(\varphi_u - \varphi_i) = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R+r}$. **(3)** $\sin(\varphi_u - \varphi_i) = \dfrac{L\omega\,I_m - \dfrac{I_m}{C\omega}}{U_m}$. **(4)**

Facteur de surtension

* A la résonance d'intensité, on définie, Q, le coefficient de surtension comme étant le quotient de la tension efficace U_c aux bornes du condensateur par la tension efficace U aux bornes du générateur.

- $Q = \dfrac{U_C}{U} = \dfrac{U_{Cm}}{U_m}$ (sans unité).

- A la résonance d'intensité et lorsqu'on augmente la résistance totale du circuit $I_{m_{max}}$ diminue.
- La résonance d'intensité est dite aigue lorsque la résistance totale du circuit est relativement faible.
- Lorsque la résistance totale du circuit est relativement importante la résonance d'intensité est dite floue.

- A la résonance d'intensité on a : $L\omega_0 = \dfrac{1}{C\omega_0}$ alors $Z_L = Z_C$ d'où $U_L = U_C$.

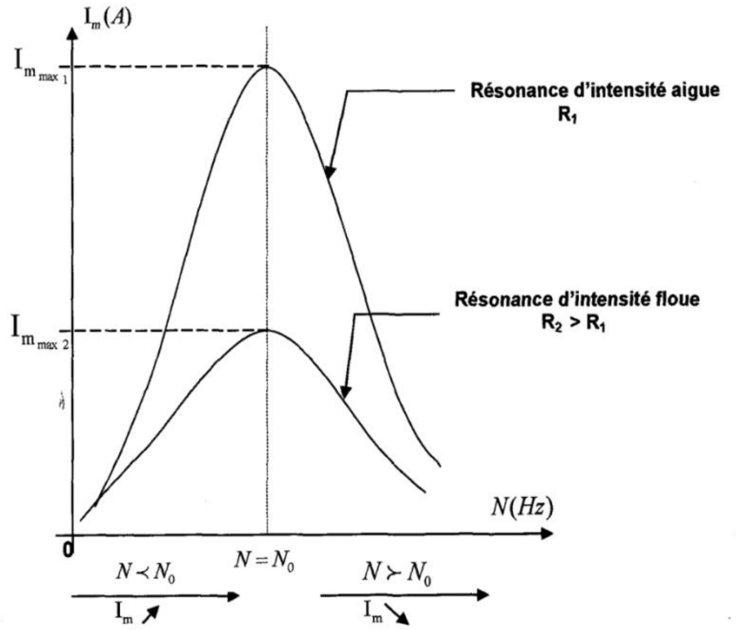
$$Q=\frac{U_L}{U}=\frac{U_{Lm}}{U_m}=\frac{L\omega_0}{R+r}=\frac{1}{C\omega_0(R+r)}=\frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{Z_L}{Z_{R+r}}=\frac{Z_C}{Z_{R+r}}.$$

- Si Q >1 alors il y a phénomène de surtension.
- Si Q < 1 alors pas de phénomène de surtension.

*** Remarque :**

Si la résistance totale R+r du circuit augmente alors le coefficient de surtension Q diminue.

Influence de la fréquence N sur I_{max}



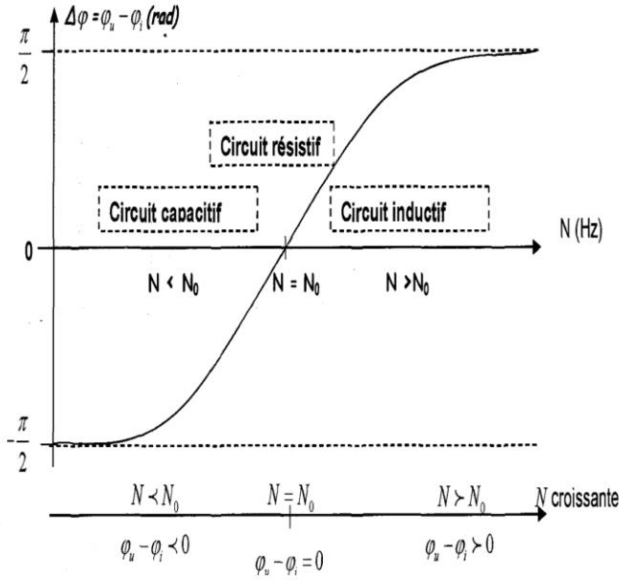
Il s'agit d'un phénomène de résonance d'intensité lorsque I_m atteint une valeur maximale.

La résonance d'intensité est obtenue lorsque $N = N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ indépendante de la résistance totale du circuit.

A la résonance d'intensité et lorsqu'on augmente la résistance totale du circuit $I_{m_{max}}$ diminue.

La résonance d'intensité est dite aigue lorsque la résistance totale du circuit est relativement faible.
Lorsque la résistance totale du circuit est relativement importante la résonance d'intensité est dite floue.

Influence de la fréquence N sur $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$:



On note: $-\dfrac{\pi}{2} \prec \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i \prec \dfrac{\pi}{2}$

propriétés d'un circuit RLC série en résonance d'intensité

- I_m, I, U_{Rm} et U_R sont maximales.
- $\omega = \omega_0$ alors $N = N_0$.
- $L\omega_0 = \dfrac{1}{C\omega_0}$ alors $Z_L = Z_C$ d'où $U_L = U_C$.
- Z= Z_{min} = Z_{R+r} = R+r.
- U_m = (R+r) I_m alors U = (R+r) I.
- $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ = 0.
- $u_L(t)$ = - $u_C(t)$, car $U_{Lm} = U_{Cm}$ et $\varphi_{u_L} = \varphi_C + \pi$

alors $u_L(t)$ + $u_C(t)$ =0 d'où le circuit RLC se comporte comme un dipôle LC.

- L'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit est constante puisque $E_T = \frac{1}{2}\ C u_C^2 + \frac{1}{2} L\ i^2$

alors $\frac{dE_T}{dt}$ = C. u_C. $\frac{du_C}{dt}$ + L. i. $\frac{di}{dt}$ = u_C.i + L. i. $\frac{di}{dt}$ = i.(u_C + L. $\frac{di}{dt}$) or u_C + L. $\frac{di}{dt}$ = - (R+r).i +u(t)=0

d'où $\frac{dE}{dt}$ = 0 alors l'énergie totale E_T est constante au cours du temps.

Identification des courbes

*u(t) et u_R(t)

$U_{Rm} = Z_R\ I_m = R\ I_m$ et $U_m = Z\ I_m = \sqrt{(R+r)^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}\ I_m$ or Z > Z_R donc $U_m > U_{Rm}$ lorsque $r \neq 0$

d'où la courbe ayant l'amplitude la plus grande représente u(t).

N.B : A la résonance d'intensité et lorsque r=0 (bobine purement inductive), on obtient $U_m = U_{Rm}$.

*u(t) et u(Bobine -condensateur)

- u_D(t) et u(t), avec D est un dipôle formé par une bobine (L,r) et un condensateur

$U_{Dm} = Z_D\ I_m = \sqrt{r^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}\ I_m$ et $U_m = Z\ I_m = \sqrt{(R+r)^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}\ I_m$ or Z > Z_D alors

$U_m > U_{Dm}$ d'où la courbe ayant l'amplitude la plus grande représente u(t).

N.B : A la résonance d'intensité, on obtient u(t) = (R+r) i(t) et u_D(t) = r i(t) car $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ = 0 donc

u_D(t) et u(t) sont en phase ($\varphi_D = \varphi_u$) puisque u(t) et u_D(t) sont en phase avec i(t).

*u(t) et u_c(t)

- u_C(t) et u(t) :

On a : $-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ puisque cos $(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R+r}{Z}$ > 0 or i(t) = $\frac{dq}{dt}$ = C$\frac{du_c}{dt}$ puisque q= C u_C

et C > 0 d'où $\varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$ alors $-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_{u_C} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ alors 0< $\varphi_u - \varphi_{u_C} < \pi$ d'où u(t) est

toujours en avance de phase par rapport à u_C(t).

N.B : A la résonance d'intensité on a $\varphi_u - \varphi_i$ = 0 alors $\varphi_u - \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2}$ d'où u(t) est en quadrature avance

de phase par rapport à u_C(t).

*u(t) et u_L(t)

- u_L(t) et u(t) :

On a : $-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ puisque cos $(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R+r}{Z}$ > 0 or u_L(t) =L$\frac{di}{dt}$ puisque L > 0 d'où

$\varphi_i = \varphi_{u_L} - \frac{\pi}{2}$ alors $-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_{u_L} + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ alors $-\pi < \varphi_u - \varphi_{u_L} < 0$ d'où u(t) est toujours

en retard de phase par rapport à u_L(t).

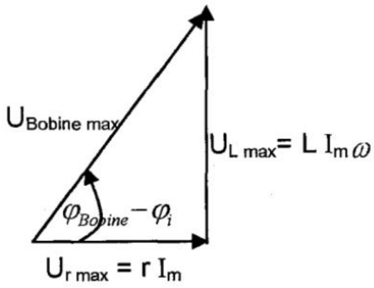
N.B : A la résonance d'intensité on a $\varphi_u - \varphi_i$ = 0 alors $\varphi_u - \varphi_{u_L} = -\frac{\pi}{2}$ d'où u(t) est en quadrature

retard de phase par rapport à u_L(t).

*u(t) et $u_{Bobine}(t)$

$u_{Bobine}(t) = L\dfrac{di}{dt} + ri$ alors $\vec{V}\,(U_{Bobine\,max}\;;\;\varphi_{Bobine}) = \vec{V}_1\,(U_{r\,max} = r\,I_m\;;\;\varphi_i) + \vec{V}_2\,(U_{L\,max} = L\,I_m\,\omega\;;\;\varphi_i + \dfrac{\pi}{2})$

D'après la construction de Fresnel on a :



$\cos(\varphi_{u\,Bobine} - \varphi_i) > 0$ et $\sin(\varphi_{u\,Bobine} - \varphi_i) > 0$

alors $0 < \varphi_{u\,Bobine} - \varphi_i < \dfrac{\pi}{2}$ et puisque

$\mathrm{tg}(\varphi_{u\,Bobine} - \varphi_i) = \dfrac{L\omega}{r}$ et $\mathrm{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r}$

On a : $\dfrac{L\omega}{r} > \dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r}$ d'où $\mathrm{tg}(\varphi_{u\,Bobine} - \varphi_i) > \mathrm{tg}(\varphi_u - \varphi_i)$ puisque pour tout angle $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

$\mathrm{tg}\,\alpha$ augmente lorsque α augmente.

$\varphi_{u\,Bobine} - \varphi_i > \varphi_u - \varphi_i$ d'où $\varphi_{Bobine} - \varphi_u > 0$ alors $u_{Bobine}(t)$ est toujours en avance de phase par rapport u(t).

* **Remarque :** $Z \neq Z_L + Z_C + Z_R + Z_r$ mais à la résonance d'intensité $Z = Z_R + Z_r$.