Taki Academy
www.takiacademy.com

# Mathématiques

Classe : Bac MATHS (TOP 50-2)

Série 14 : **Isométries**

---

Nom du Prof : M. ZOGHBI Naoufel

## Exercice 1 — 20 min — 4 pts

On donne, dans le plan est orienté dans le sens direct, un carré OABC de centre $\Omega$. On note I et J et K les milieux respectifs de $[OA]$ , $[OC]$ et $[AB]$.

**1°)** Soit f= $S_{(OB)} o S_{(\Omega I)}$. Caractériser f.

**2°)** Soit g une isométrie sans point fixes qui transforme O en C et I en J.

**a)** Déterminer g(A).

**b)** Montrer que g est une symétrie glissante.

**c)** Soit D=g(K). Montrer que O est le milieu de [ID].

**d)** Vérifier que g= $t_{\overrightarrow{AO}} o S_{(AC)}$.

**e)** En déduire les éléments caractéristiques de g.

**3°)** Soit $\varphi = g^{-1} of$.

**a)** Déterminer $\varphi$(O) et $\varphi$(I) puis caractériser $\varphi$.

**b)** Trouver alors l'ensemble (S) des points M du plan tels que f(M)=g(M).

## Exercice 2 — 20 min — 4 pts

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. On note O' le symétrique du point O par rapport à (AB).

**1°)a)** Caractériser les applications f=$S_{(OC)} o S_{(OJ)}$ et g= $S_{(OJ)} o S_{(DC)}$.

**b)** En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\varphi$ =fog.

**2°)** Soit l'application h=$S_{(BD)} o\ \varphi$ .

**a)** Vérifier que h(C)=A, h(D)=B puis prouver que h(O)=O'.

**b)** Montrer que h n'a pas de points invariants, puis déduire sa nature.

**3°)** Soit l'application S=$S_{(BC)}$ o $t_{\overrightarrow{AB}}$.

**a)** Caractériser S.

**b)** Montrer que h=g o S.

## Exercice 3 — 20 min — 4 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit m un nombre complexe différent de 1. On considère l'équation (E) : $z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$ d'inconnue complexe z .

**1°)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

**2°)** On désigne par A , $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectives $(1-i)$, $(m-i)$ et $(1-im)$..

Soit l'application f du plan **P** dans lui-même qui , à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=-iz+2$.

**a)** Montrer que f est une isométrie .

**b)** Justifier f admet un unique point invariant que l'on déterminera.
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

**c)** Déterminer la nature du triangle $AM_1M_2$**.**

**3°)** On suppose , dans cette question , que $m=e^{i\theta}$ où $\theta\in]-\pi;\pi]\setminus\{0\}$.

**a)** Déterminer et construire l'ensemble des points $M_1$ quand $\theta$ décrit $]-\pi;\pi]\setminus\{0\}$.
En déduire l'ensemble des points $M_2$ .

**b)** Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$.
Déterminer l'affixe de $M_1$ pour que la distance AI soit maximale.

## Exercice 4 — 30 min — 4 pts

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un triangle ABC rectangle en C, inscrit dans un cercle ( $\mathscr{C}$ ) centre O tel que $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de[BC], D le symétrique de C par rapport à (AB) et E le symétrique de O par rapport à I.

**1°)** montre que[DE] est un diamètre de ( $\mathscr{C}$ ).

**2°)** Soit $k=S_{(BC)}oS_{(AB)}$ et $h=S_{(ED)}oS_{(OA)}$.

**a)** Caractériser chacune des isométries k, h et $hok^{-1}$

**b)** Déterminer l'image de la droite (BD) par k.

**c)** Soit M un point du plan n'appartenant pas à la droite (BD). On pose M'=k(M) et M''=h(M)

**i)** Montrer que le quadrilatère BM'CM'' est un parallélogramme.

**ii)** Où faut-il placer M pour que BM'CM'' soit un losange.

**3°)** On se propose de déterminer les isométries f de P qui vérifient: f(E)=A et f(C)=D.

**a)** Soit g l'isométrie telle que: $f = t_{\overrightarrow{EA}}og$ . Montrer que $g=R_{\left(E,-\frac{2\pi}{3}\right)}$ ou $g = S_{(ED)}$

**b)** On suppose que $g=R_{\left(E,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.Déterminer les droites $\Delta$ et $\Delta'$ tels que:

$R_{\left(E,-\frac{2\pi}{3}\right)}=S_{(EB)}oS_{\Delta}$ et $t_{\overrightarrow{EA}}=S_{\Delta'}oS_{(EB)}$ . Caractériser alors f.

**c)** On suppose que $g=S_{(ED)}$.Montrer que f est une symétrie glissante.
(On pourra considérer le point H projeté orthogonal de A sur (ED)).

## Exercice 5 — 30 min — 4 pts

Soit AEFD un rectangle tel que AE = 2AD et $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par B et C les milieux respectifs des segments [AE] et [DF] et par I et J les centres respectifs des carrée ABCD et BEFC.

**1°)** Soit f l'isométrie du plan telle que : f(A) = E ; f(B) = B et f(D) = F.

**a)** Déterminer les images des droites (AB) ; (BC) et (DC) par f.

**b)** En déduire que f(C) = C.

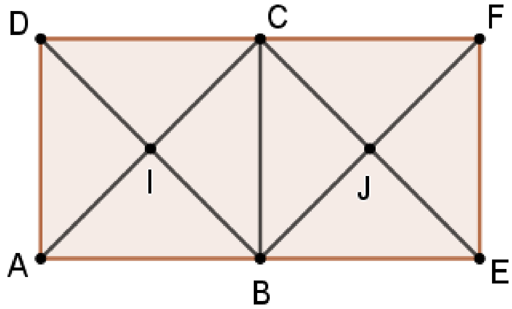
**c)** Caractériser alors l'isométrie f.

**2°)** Soit g l'isométrie du plan telle que : g(E) = C ; g(F) = D et g(C) = A et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

**a)** Déterminer les images des points E, F et C par l'application R o g.

**b)** En déduire que g est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

**c)** Caractériser l'application : t = S(EF) o S(BC).
**d)** Déterminer les droites $\Delta$ et $\Delta'$ telles que :
R = S$\Delta$ o S(BC) et t = S(BC) o S$\Delta'$
**e)** Caractériser alors l'application R o t.
**3°)** Soit h l'isométrie du plan telle que :
h(A) = C ; h(B) = F et h(D) = B.
**a)** Montrer que h ne fixe aucun point du plan.
**b)** En déduire que h est une symétrie glissante.




**c)** Montrer que la droite (IJ) est l'axe de h et $\overrightarrow{IJ}$ est son vecteur.
**d)** Caractériser alors chacune des applications suivantes : h o $S_{(IJ)}$ et $t_{\overrightarrow{JI}} \circ h$.

## Exercice 6 — 25 min — 4 pts

.Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit m un nombre complexe.

**I/** On considère l'équation (E) : $(i-1)z^2-(1-i)(m-i)z-2(m-i)^2=0$ d'inconnue complexe z .

**1°)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . On note $z_1$ et $z_2$ les solutions de (E).

**2°)** On désigne par $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$ .

Déterminer l'ensemble décrit par chacun des points $M_1$ et $M_2$ lorsque $|m|$ varie et $\arg(m)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

**II/** Soit l'application f du plan **P** dans lui-même qui , à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=(1+im)\overline{z}+(1-i)(m-i)$.

**1°)** Montrer que f est une isométrie du plan si, et seulement si, $m=i+e^{i\theta}$ où $\theta\in]-\pi;\pi]$.

**2°)a)** On pose $m=i+e^{i\theta}$ où $\theta\in]-\pi;\pi]$. Soient M(z) un point de P et $M''=f\circ f(M)$.

Montrer que l'affixe $z''$ de $M''$ est $z''=z+(1-i)\left(e^{i\theta}-1\right)$.

En déduire que si $\theta\neq0$ alors f n'admet aucun point invariant.

**b)** On pose $m=i+e^{i\theta}$ où $\theta\in]-\pi;\pi]\setminus\{0\}$.

Soit A le point d'affixe 1, déterminer les affixes des points $A'=f(A)$ et $A''=f'(A')$.

Montrer que f n'est pas une translation puis donner sa nature.

**3°)** On pose m= 1+i. Déterminer l'ensemble des points invariants par f puis caractériser f.