MATHS

Classe : Bac Maths

Sujet : Prototype N°3

Durée : 4 h

Nom du prof : Profs Takiacademy

Exercice 1 — 60 min — 3 pts

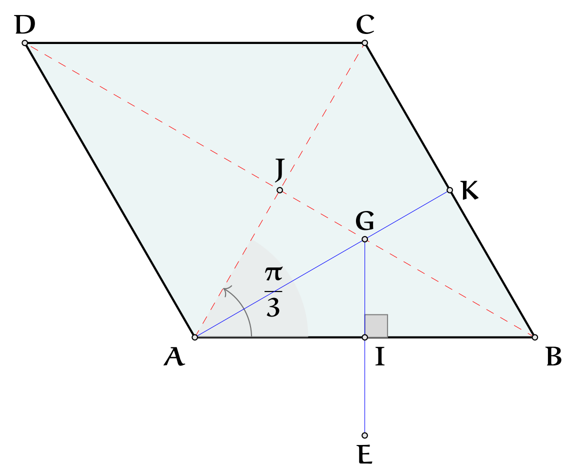
Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $\alpha = e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $\beta = \alpha - i$ et $\gamma = 2\,\mathrm{Im}(\alpha)i$.

1. a) Ecrire α sous la forme algébrique en déduire la forme exponentielle de β et γ.
   b) Construire les points A, B et C.
   c) Montrer que $OBAC$ est un losange.
2. On considère l'équation $(E) : z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$.
   a) Vérifier que γ est une solution de (E).
   b) Résoudre alors l'équation (E).
3. Soit n un entier naturel, on pose $z_n = (-i\alpha)^n$ et le point A_n d'affixe z_n.
   a) Calculer les affixes z_0, z_1 et z_2 des points A_0, A_1 et A_2.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n les points A_n sont situés sur le cercle unité.
   c) Montrer que pour tout entier naturel n on a :$z_{n+1} - z_n = (z_1)^n \times z_2$
   d) En déduire que les triangles OA_nA_{n+1} sont équilatéraux.

Exercice 2 — 60 min — 5 pts

Le plan est orienté dans le sense direct.
Dans la figure ci-contre :

- $ABCD$ est un losange direct de coté 4 et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
- G est le centre de gravité du triangle ABC.
- E est le symétrique de G par rapport à I.



1. Soit f la similitude directe qui envoie D sur A et J sur I.
   a) Montrer que f est de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
   b) Vérifier que B est le centre de f.

2. a) Déterminer $f((BC))$ et $f((AC))$, en déduire $f(C)$.

   b) Montrer que $f(A) = E$.

3. On pose $g = f^{-1} \circ S_{(AB)}$.

   a) Déterminer $g(B)$ et $g(A)$.

   b) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre.

   c) Construire Δ l'axe de g.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite des points (M_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} M_0 = D \\ M_{n+1} = f(M_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

   a) Préciser M_1 et M_2.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $BM_{n+1} = M_nM_{n+1}$.

   c) Construire alors le point M_3.

   d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$.

   Calculer S_n en fonction de n et en déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = 6 + 2\sqrt{3}$.

Exercice 3 — 60 min — 5 pts

1. Montrer que $8^{23} \equiv 17 \pmod{55}$ puis vérifier que $6^7 \equiv 41 \pmod{55}$.

2. Dans cette question, on considère l'équation $(E) : 23x - 40y = 1$, dont les solutions sont des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs.

   a) Vérifier que $(7, 4)$ est une solution l'équation (E) puis résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

   b) Montrer que 7 est l'unique entier d vérifiant les conditions $0 < d < 40$ et $23\ d \equiv 1 \pmod{40}$.

3. **Cryptage dans le système RSA.**
Une personne A choisit deux nombres **premiers distincts** p et q, puis calcule les produits

$$N = pq \text{ et } n = (p-1)(q-1).$$

Elle choisit également un entier naturel c premier avec n.
La personne A publie le couple $(\ N; c\ )$, qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.
Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et $N - 1$.
Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste b dans la division euclidienne par N du nombre a^c, et le nombre crypté est l'entier b.

Dans la pratique, cette méthode est sûre si la personne A choisit des nombres premiers p et q très grands, s'écrivant avec plusieurs dizaines de chiffres. On va l'envisager ici avec des nombres plus simples : $p = 5$ et $q = 11$.
La personne A choisit également $c = 23$.

a) Calculer les nombres N et n, puis justifier que la valeur de c vérifie la condition voulue.

b) Un émetteur souhaite envoyer à la personne A le nombre $a = 8$.

Déterminer la valeur du nombre crypté b.

4) **Décryptage dans le système RSA**.
La personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant les conditions $0 < d < n$ et $cd \equiv 1 \pmod{n}$.
Elle garde secret ce nombre d qui lui permet, et à elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

a) Montrer que d existe et unique et que $cd = 1 + kn$ où k est un entier naturel.

b) Montrer que pour tout entier m, $m^{1+kn} \equiv m \pmod{p}$ et $m^{1+kn} \equiv m \pmod{q}$.

En déduire que $m^{1+kn} \equiv m \pmod{N}$

c) Montrer que $a^c \equiv b \pmod{N}$ si et seulement si $b^d \equiv a \pmod{N}$.

d) Pour décrypter un nombre crypté b, la personne A calcule le reste a dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair - c'est-à-dire le nombre avant cryptage est le nombre a.
Les nombres choisis par A sont encore $p = 5, q = 11$ et $c = 23$.
Déterminer la valeur de d puis En appliquant la règle de décryptage, retrouver le nombre en clair lorsque le nombre crypté est $b = 6$.

Exercice 4 — 84 min — 7 pts

n étant un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par : $f_n : x \longmapsto \begin{cases} x\sqrt[n]{-\ln x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Justifier que f_n est continue sur $[0,1]$.

b) Étudier la dérivabilité de f_n à droite en 0. Interpréter graphiquement.

c) Montrer que pour tout réel $x \in]0,1[$, on a :

$$\frac{f_n(x) - f_n(1)}{x-1} = -\frac{x}{\sqrt[n]{(-\ln x)^{n-1}}} \times \frac{\ln x}{x-1}$$

Étudier alors la dérivabilité de f_n à gauche en 1. Interpréter graphiquement.

2 a) Justifier que f_n est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout réel $x \in]0,1[$, on a :

$$f'_n(x) = \frac{\sqrt[n]{-\ln x}}{n \ln x}(n \ln x + 1)$$

b) On pose $v_n = \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}}$. Montrer que v_n est un maximum de f_n sur $[0,1]$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c) Dresser le tableau de variations de f_n.

d) Montrer que $\mathscr{C}_n$ passe par exactement trois points de coordonnées $(0,0)$ et $(1,0)$ et $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

e) On note A le point de coordonnées $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

Montrer que $y = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x + \frac{1}{ne}$ est une équation de la tangente T_n à $\mathscr{C}_n$ au point A.

f) Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_n)$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

3 On considère la fonction g_n définie sur $[0,1]$ par : $g_n(x) = e^{-\frac{1}{n}} \sqrt[n]{x^{n-1}}$.

On désigne par Γ_n la courbe de g_n dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Justifier que Γ_n passe par les points O et A.

b) Justifier que g_n est dérivable sur $]0,1]$ et que pour tout réel x de $]0,1]$, on a :

$$g'_n(x) = \frac{n-1}{n} \times \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{x}}$$

c) Montrer que T_n est la tangente à Γ_n au point A.

d) Montrer que pour tout réel $t > 0$, on a : $\ln t \leq t - 1$.

Montrer alors que pour tout réel $x \in [0,1]$, on a :

$$f_n(x) \leq g_n(x)$$

4 Dans la figure jointe on donne les courbes Γ_2 et la courbe γ de la fonction $\ln$.

a) Construite le point B de $(\mathscr{C}_2)$ d'ordonnée v_2.

b) Construire le point A.

c) Construire T_2.

d) Tracer $(\mathscr{C}_2)$

5 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $U_n = \int_0^{\frac{1}{e}} f_n(x)\,dx$.

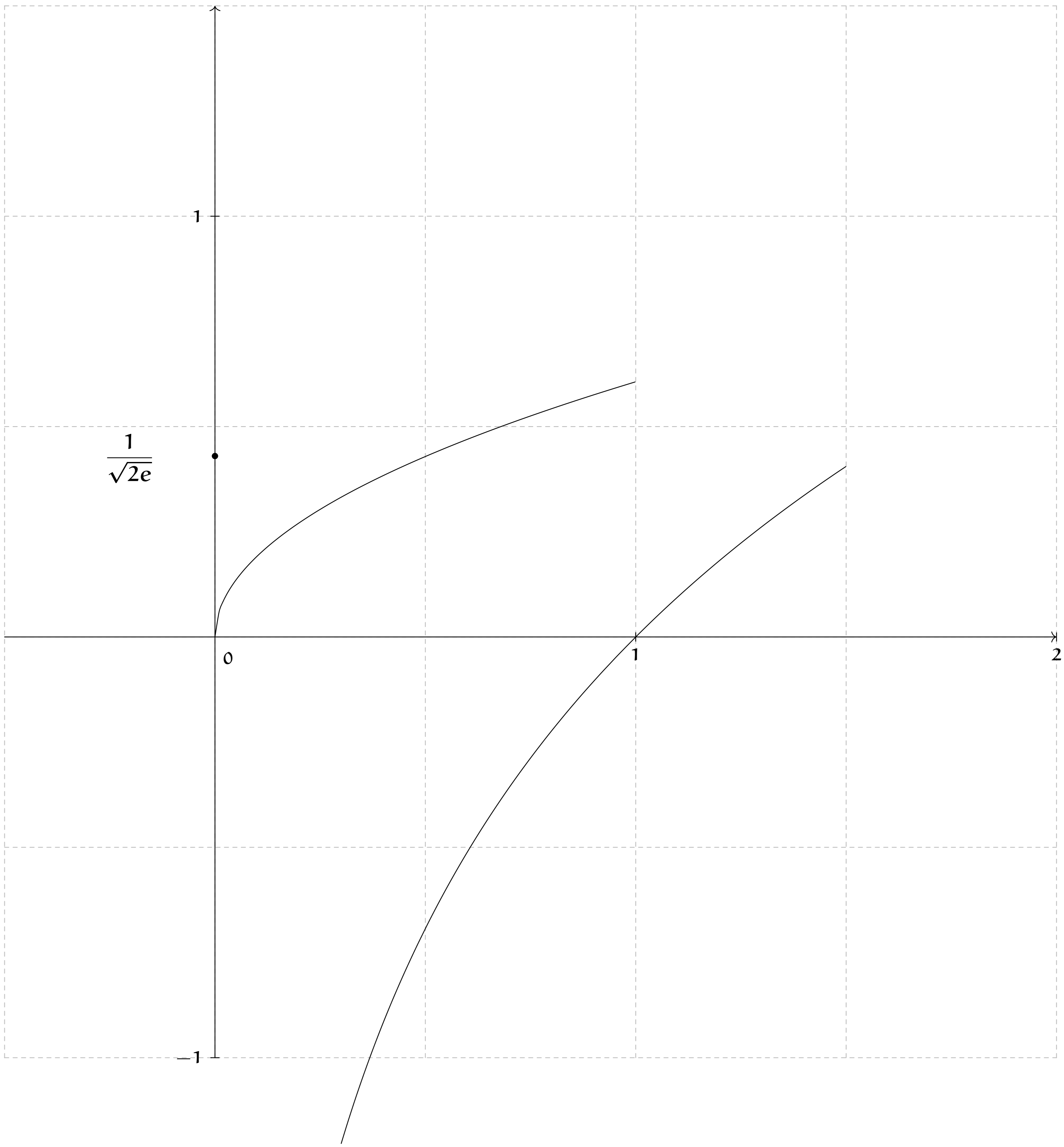
Taki Academy

a) Montrer que la fonction $G_n : x \mapsto \dfrac{n}{2n-1} e^{-\frac{1}{n}} \sqrt[n]{x^{2n-1}}$ est la primitive de g_n sur $[0, 1]$ qui s'annule en 0.

b) Montrer que

$$\frac{1}{2e^2} \leq U_n \leq \frac{n}{2n-1} \times \frac{1}{e^2}$$

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.


1
$\frac{1}{\sqrt{2e}}$
0
1
2
−1