Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Limite et Continuité

Limite d'une fonction

Définition

Soit f une fonction numérique à variable réelle. a et ℓ sont deux réels.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \ \exists\alpha>0$ tel que si $x\in D_f$ et $|x-a|<\alpha$ alors $|f(x)-\ell|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\ \ \exists\alpha>0$ tel que si $x\in D_f$ et $|x-a|<\alpha$ alors $f(x)>A$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\ \ \exists\alpha>0$ tel que si $x\in D_f$ et $|x-a|<\alpha$ alors $f(x)<-A$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \ \exists B>0$ tel que si $x\in D_f$ et $x>B$ alors $|f(x)-\ell|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \ \exists B>0$ tel que si $x\in D_f$ et $x<-B$ alors $|f(x)-\ell|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0$ tel que si $x\in D_f$ et $x>B$ alors $f(x)>A$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists B>0$ tel que si $x\in D_f$ et $x>B$ alors $f(x)<-A$

Théorème

- Si une fonction f admet une limite alors cette limite est unique.
- Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I:
  - Si $\lim\limits_{x_0} f=\ell$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$ (x_0 fini ou infini)
  - Si $\lim\limits_{x_0} f=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to x_0}\sqrt{f(x)}=+\infty$ (x_0 fini ou infini)

Limites de fonctions trigonométriques

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x}=a,(a\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{x}=a$$

Opérations sur les limites

x_0 désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; ℓ et ℓ' désignent des réels.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	0	∞	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell\neq 0$	$\ell\neq 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	0	0	0	∞	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	ℓ	0	∞	∞	$+\infty$	$-\infty$	F.I	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$	$\ell.\ell'$	0	0	F.I	F.I	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$ (signe ℓ)	$\pm\infty$ (signe ℓ)
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}(\ell'\neq 0)$	∞	F.I	∞	0	∞	∞	∞	0	0

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \lvert f(x)\rvert$	$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}$
ℓ	$\lvert\ell\rvert$	$\sqrt{\lvert\ell\rvert}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Limite et ordre

f est une fonction, x_0 désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; ℓ et ℓ' désignent des réels et I désigne un intervalle ouvert de centre x_0 si $x_0\in\mathbb{R}$ si non intervalle de type $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,b[$.

Théorème 1

Si $\left\{\begin{array}{l}\text{f est positive sur I}\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\end{array}\right.$ alors $\ell\geq 0$

Théorème 2

Si $\left\{\begin{array}{l} g(x)\leq f(x) \text{ sur un voisinage de } x_0\\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell,\ell\in\mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\ell'\in\mathbb{R}\end{array}\right.$ alors $\ell'\leq\ell$

Théorème 3

Si $\begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x), \text{ sur un voisinage de } x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Théorème 4

Si $\begin{cases} |f(x)-\ell| \le g(x) \text{ sur un voisinage de } x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell$.

Théorème 5

S'il existe une fonction g vérifiant : $\begin{cases} f(x) \le g(x) \text{ sur } I \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \end{cases}$

alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

S'il existe une fonction g vérifiant : $\begin{cases} g(x) \le f(x) \text{ sur } I \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty \end{cases}$

alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

Limite d'une fonction monotone

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (fini ou infini).

- Si f est croissante et majorée alors elle admet une limite finie en b .
- Si f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.
- Si f est décroissante et minorée alors elle admet une limite finie en b .
- Si f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b .

Limite d'une fonction composée

Théorème 1

x_0 , b et λ désigne des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = \lambda \end{cases}$

alors $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x) = \lambda$

Corollaire

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b, (b \in IR) \\ g \text{ est continue en } b \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x) = g(b)$

Branches infinies

Asymptotes

Limite	Interprétation
$\lim\limits_{a} f = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{a^{\pm}} f = \pm\infty$	La droite $D: x = a$ est asymptote à $\mathscr{C}$
$\lim\limits_{+\infty} f = b$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = b, b \in \mathbb{R}$	La droite $D: y = b$ est asymptote à $\mathscr{C}$
$\lim\limits_{\pm\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$	La droite $D: y = ax+b$ est asymptote à $\mathscr{C}$

Etude d'une branche infinie

Dans le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.
Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Dans ce qui suit le procédé quil faut suivre pour déterminer la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

$*$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de $\left(O, \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

$*$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de $\left(O, \vec{i}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

$*$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ avec $(a \ne 0)$, alors deux cas peuvent se présenter :

✓ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$ avec $(b \in \mathbb{R})$ alors la droite déquation $y = ax+b$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

✓ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une direction asymptotique celle de la droite déquation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$.

Théorème 2

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a, +\infty[$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe, signifie que $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ existe et dans ce cas, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]-\infty, a[$.
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existe, signifie que $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ existe et dans ce cas, on a: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Continuité

Continuité d'une fonction composée

Si f est continue en x_o et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ g \text{ est continue sur un intervalle } J \\ \text{pour tout } x \text{ de } I \text{ on a : } f(x) \in J \end{cases}$

alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème 1

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 2 : (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \lambda$.

Si de plus f est strictement monotone alors x_0 est unique.

corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ telle que $f(a).f(b) < 0$. Il existe au moins un réel $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Théorème 3

Toute fonction continue et ne s'annule pas sur un intervalle I alors elle garde un signe contant sur I.

Théorème 4

L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m, M]$

Image d'un intervalle par une fonction monotone

Théorème

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

Intervalle I	Si f est croissante sur I	Si f est décroissante sur I
$I = [a, b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I = [a, b[$	$f(I) = [f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)]$
$I = [a, +\infty[$	$f(I) = [f(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a)]$
$I =]a, b[$	$f(I) =]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)[$