Taki Academy
www.takiacademy.com

Classe : Bac Maths

Série : **Fonction exponentielle**

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Exercice 1 — 25 min — 5 pts

Calculer

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-xe^{-x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{e^{x}-x}}{e^{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \dfrac{\sqrt{e^{2x}-1}}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to1^{+}} \dfrac{e^{\sqrt{x-1}}-1}{x-1}$

2) a) $\int_{0}^{\ln2} e^{-x}dx$ b) $\int_{0}^{1} \dfrac{e^{x}}{2+e^{x}}dx$ d) $\int_{0}^{1} \dfrac{1}{1+e^{x}}dx$

e) $\int_{1}^{\ln3} \left(\dfrac{1}{x^2e^{-\frac{1}{x}}}\right)dx$

Exercice 2 — 25min — 5pts

Soit $f(x)=e^{2x}-3e^{x}+x+2$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que C_f admet une asymptote oblique D.

2) a) Déterminer les points d'intersections de C_f avec la droite Δ :y=x.

b) Préciser la position de C_f par rapport à la droite Δ et à D. Tracer C_f.

3) Soit U la suite définie par $U_0=\dfrac{\ln2}{2}$ **et** $U_{n+1}=f(U_n)$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $0<U_n\leq\dfrac{\ln2}{2}$

b) Montrer que U est décroissante , conclure .

4) Soit $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(e^{U_k}-\dfrac{3}{2}\right)^2$, $n\in\mathbb{N}^*$

a) Montrer que pour , tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=U_n-\dfrac{1}{2}\ln2+\dfrac{n}{4}$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$

Exercice 3 — 40 min — 7 pts

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\mathbf{f(x)=\sqrt{e^x-1}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

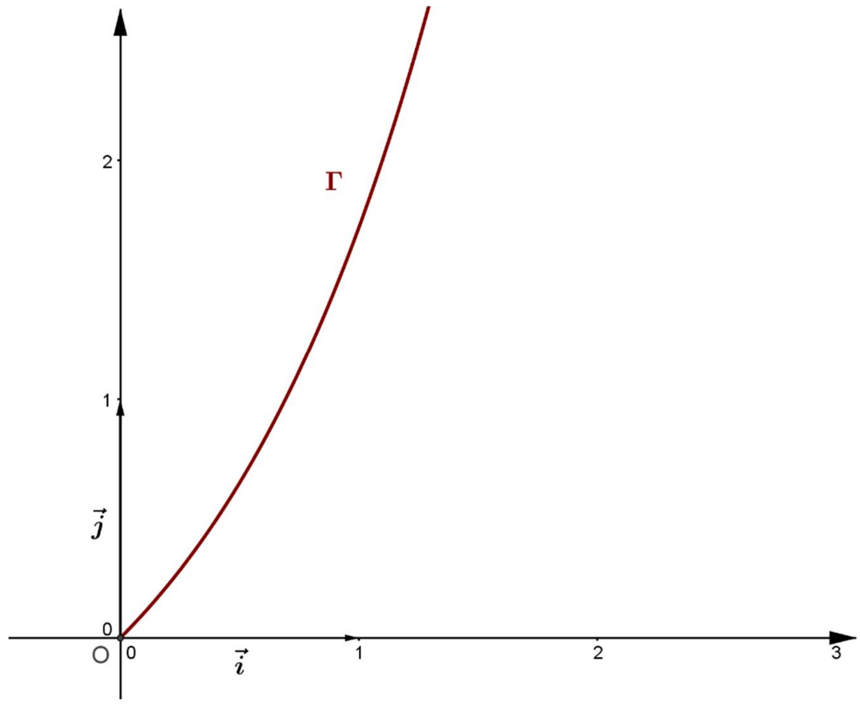
b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) En déduire que $e^x-1\leq\sqrt{e^x-1}$, si et seulement si, $0\leq x\leq \ln 2$.

3°) Montrer que le point $B(\ln2,1)$ est un point d'inflexion de (C_f).

4°) Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x\mapsto e^x-1$.



a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.

b) Tracer la courbe (C_f).

5°) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\mathbf{g(x)=\tan x}$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$. On note $\mathbf{g^{-1}}$ sa fonction réciproque.

b) $\left(\mathbf{g^{-1}}\right)(\mathbf{0})$ et $\left(\mathbf{g^{-1}}\right)(\mathbf{1})$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\left(\mathbf{g^{-1}}\right)'(\mathbf{x})=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x^2}}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathbf{g^{-1}(x)}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$.

6°) On pose pour tout $x\in[0,+\infty[$, $\mathbf{F(x)=\int_0^x f(t)\,dt}$ et $\mathbf{G(x)=2\left(f(x)-\left(g^{-1}\circ f\right)(x)\right)}$.

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\mathbf{F'(x)=G'(x)}$.

b) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$ $\mathbf{F(x)=G(x)}$.

c) Soit $\boldsymbol{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), La courbe Γ et les droites d'équations

$x=0$ et $x=\ln 2$. Montrer que $\boldsymbol{A}=\mathbf{1+\ln 2-\dfrac{\pi}{2}}$.

7°) Soit n un entier tel que $n\geq 2$.

On désigne par $\mathbf{f_n}$ la fonction définie sur $[\ln(n),+\infty[$ par $\mathbf{f_n(x)=\sqrt{e^x-n}}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $[\mathbf{\ln(n)},+\infty[$ par $\mathbf{G_n(x)=2\left(f_n(x)-\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\dfrac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right)}$.

Montrer que pour tout $x\in[\ln(n),+\infty[$, $\mathbf{G_n(x)=\int_{\ln(n)}^x f_n(t)\,dt}$.

b) Vérifier que pour tout $\mathbf{x\geq\ln(n)}$, $\mathbf{\sqrt{e^x-n}<\sqrt{e^x-1}}$.

En déduire que pour tout $x\geq\ln(n)$, $\mathbf{f_n(x)\leq e^x-1}$.

c) Soit $\boldsymbol{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_n), la courbe Γ et les droites d'équations

$\mathbf{x=\ln(n)}$ et $\mathbf{x=\ln(n+1)}$. Montrer que $\boldsymbol{A}_\mathbf{n}=\mathbf{2\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)-1}$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{A}_n$.

Exercice 4 | 35 min | 6 pts

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$

On note (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)=\dfrac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que C_f admet au voisinage de $-\infty$ une branche infinie de direction celle de $(O,\vec{j})$.

b) Tracer (C_f) .

3) Soit la fonction g définie sur $]e,+\infty[$ par $g(x)=\int_2^{\ln x} f(t)dt$

On note (C_g) la courbe de g dans le repère orthonormé

a) Montrer que g est dérivable sur $]e,+\infty[$ et que $g'(x)=\dfrac{1}{x^2(1-\ln x)}$

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Ecrire une équation de la tangente T à (C_g) au point d'abscisse e^2 .

4) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ par : $U_n=\int_{-1}^{0}\dfrac{e^{-x}}{(1-x)^n}dx$

a) Montrer que U est décroissante.

b) En déduire que U est convergente.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $U_n=\dfrac{1}{n-1}\left[1-\dfrac{e}{2^{n-1}}+U_{n-1}\right]$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$.