Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions logarithmes

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Exercice 1 — 25 min — 4 pt

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(1-\ln x)^2$.

1°) Etudier les variations de la fonction f.

2°) a) Soit g la restriction de f à la l'intervalle $[e\ ;+\infty[$

Montrer que g réalise une bijection de $[e\ ;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f et la courbe $\mathcal{C}'$ de g^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

4°) Pour tout $n \in IN^*$, on pose : $I_n=\int_1^e (1-\ln t)^n\,dt$.

a) Calculer I_1.

b) À l'aide d'une intégration par partie, Monter que pour tout $n \in IN^*$ on a :

$I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$.

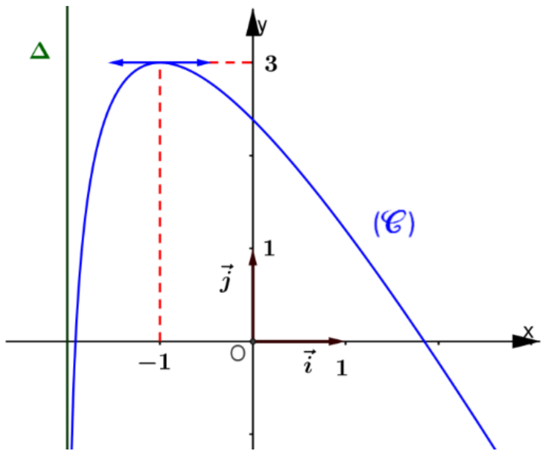
c) On désigne par A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectifs 1 et e.

Soit **v** le volume de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de la courbe $\mathcal{C}$ autour de l'axe $(O,\vec{i})$. Calculer **v**.

Exercice 2 — 25 min — 5 pt

Dans te graphique ci-contre, désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.

La droite $(\Delta): x=-2$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.



1°) Donner :

a) $f(-1)$ et $f'(-1)$.

b) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$.

c) Le nombre de solutions dans IR de l'équation $f(x)=0$.

2°) On suppose dans la suite que pour tout $x\in]-2,+\infty[$,

$f(x)=-2x+m+p\ln(x+2)$, où m et p sont deux constantes réelles.

a) Montrer que $m=1$.

b) Calculer $f'(x)$ à l'aide de p.

c) Montrer que $f(x)=-2x+1+2\ln(x+2)$.

d) Étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite D d'équation $y=-2x+1$.

3°) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_{-1}^{1}\ln(x+2)\,dx=3\ln(3)-2$.

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite D et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=1$.

iacademy.com
Magazines

Taki Academy
www.takiacademy.com

c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 3 — 25 min — 5 pt

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x}$.

1°) Montrer que l'ensemble de définition de *f* est $D_f=\left[\dfrac{1}{e},e\right]$.

2°) Soit *G* la fonction définie sur D_f par $G(x)=\int_1^{\ln x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

a) Montrer que *G* est dérivable sur D_f et calculer $G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in D_f$, $F(x)=G(x)+F(e)$ (où *F* est la primitive de *f* sur D_f qui s'annule en 1)

3°) Soit *H* la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $H(x)=\int_1^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

a) Montrer que *H* est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$.

b) Donner alors l'expression de $H(x)$.

4°) Déduire de ce qui précède l'aire de la partie du plan limité par la courbe de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Exercice 4 — 40 min — 6 pt

I– La fonction *f* est définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-2+\dfrac{1}{2}\ln x$.

1°) Étudier le sens de variations de *f*. Calculer les limites de *f* aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de *f*.

2°) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

Déterminer l'entier *n* tel que $\alpha\in]n,n+1[$.

3°) Déterminer le signe de $f(x)$.

II– La fonction *g* est définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=-\dfrac{7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x, \quad \text{si } x>0 \end{cases}$.

1°) a) Montrer que la fonction *g* est continue en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement cette limite.

2°) Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=x\,f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3°) Montrer que $g\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\dfrac{1+4\alpha}{8\,\alpha^2}$. Dresser le tableau de variation de *g*.

www.takiacademy.com

Taki Academy
www.takiacademy.com

4°) Donner une équations de la tangente à la courbe C_g représentative de *g* au point d'abscisses 1.

5°) Représenter C_g et ses tangentes dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (on prend $\alpha = 1{,}72$)

6°) a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_\alpha = \int_1^{\frac{1}{\alpha}} x^2 \ln x \, dx$ en fonction de α.

b) On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_g et l'axe des abscisses et les droite d'équations respective $x = 1$ et $x = \frac{1}{\alpha}$. Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α.

www.takiacademy.com

Magazines
73.832.000

Taki Academy
www.takiacademy.com

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000