Fiche méthodes: Les oscillations mécaniques forcées.

Rappel: Oscillation libre non Amortie

→ L'élongation x est sinusoïdale périodique, subie des oscillations sans diminution d'amplitude (sans frottement)

→ Les caractéristiques d'oscillation
$$\begin{cases} N_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}} \\ T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}} \end{cases}$$

Les oscillations forcées:

A - Etude experimentale.

Production des oscillations forcées:

→ Le système solide, ressort est excité par un moteur délivrant une force excitatrice de la forme:

$$F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$$

avec:

- F_m: Intensité de la force excitatrice
- ω: pulsation excitatrice $\omega = 2\pi N$ [rad s⁻¹].
- N: fréquence du moteur [Hz]
- φ_F: phase initiale; phase à l'origine de $F(t)$

→ Les oscillations sont dites forcées

→ Le pendule se comporte comme un oscillateur qui réalise des oscillations forcées.

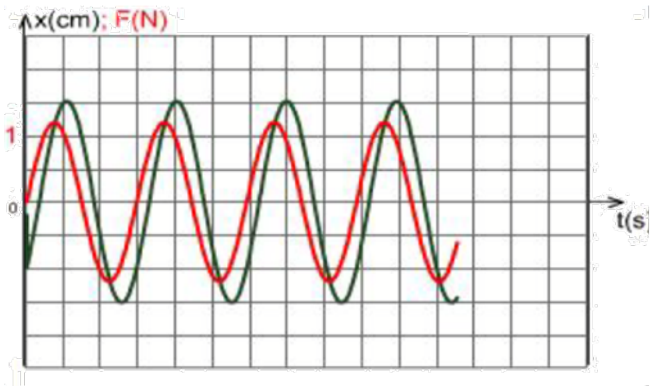
→ Le dispositif d'entretient moteur est appelé excitateur.

→ Le pendule est appelé résonateur.

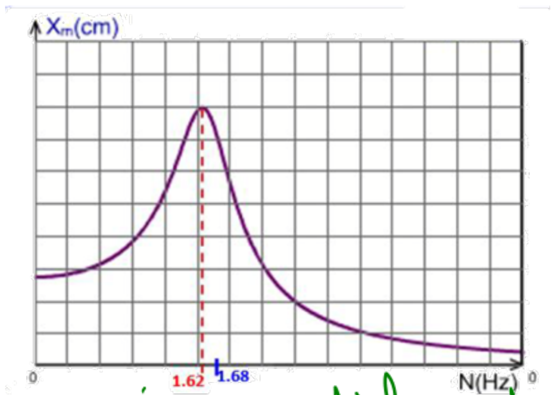
L'expérience montre que l'élongation $x(t)$ est une fonction sinusoïdale périodique du temps, de la forme:
$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$.

→ On donne les deux courbes $x(t)$ et $F(t)$.

→ $F(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $x(t)$.



courbes $x(t)$ et $F(t)$



résonance d'élongation

Influence de l'excitateur N sur l'amplitude :

→ On fait varier la fréquence de l'excitateur, l'amplitude X_m atteint sa valeur maximale on dit alors que l'oscillateur est en résonnance d'élongation.

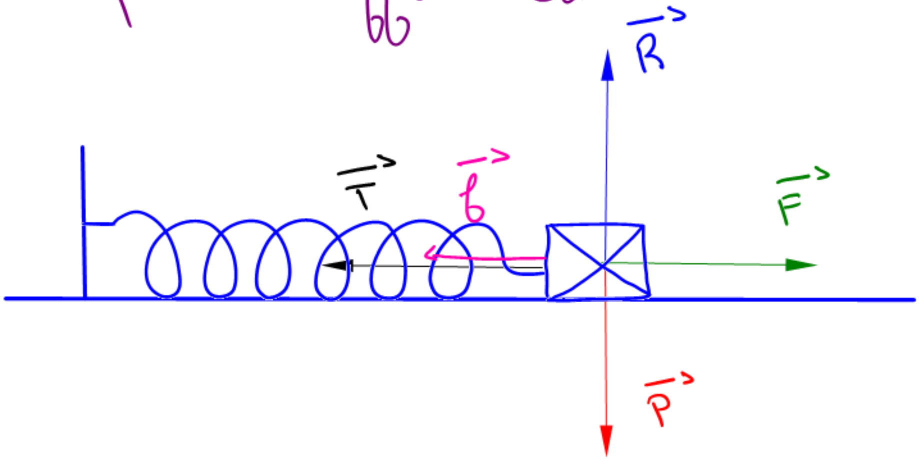
→ X_m augmente, atteind un maximum puis diminue.

→ À la résonnance d'élongation ou d'amplitude c'est à dire X_m est maximale on a :

$$N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2} \quad (N_r < N_0) \quad \text{et} \quad \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \quad (\omega_0 < \omega_r)$$

B. Etude théorique:

Etablir l'équation différentielle:



Bilan des forces:

$\vec{P}$: poids du ressort
$\vec{R}$: réaction du plan
$\vec{f}$: force de frottement
$\vec{T}$: tension du ressort
$\vec{F}$: force excitatrice

On applique la RFD:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} = m.\vec{a}$$

On projette sur l'axe $(x\,x')$:

$$0 + 0 - Kx - h.v + F(t) = m.a$$

$$\Rightarrow K.x + h.v + m.a = F(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + K.x = F(t)}$$

L'équation différentielle relative à $x(t)$.

Déterminer la construction de Fresnel :

L'équation différentielle admet comme solution :

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x) \text{ et } F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$$

Soit l'équation différentielle : $\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2}}_{\vec{V_3}} + \underbrace{h\frac{dx}{dt}}_{\vec{V_2}} + \underbrace{Kx}_{\vec{V_1}} = \underbrace{F(t)}_{\vec{V}}$

- À la fonction $Kx(t) = KX_m \sin(\omega t + \varphi_x)$. on associe un vecteur

$$\vec{V_1} \begin{cases} KX_m \\ \varphi_x \end{cases}$$

- À la fonction $h\frac{dx}{dt} = h\omega X_m \sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$. On associe le vecteur : $\vec{V_2} \begin{cases} h\omega X_m \\ \varphi_x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- À la fonction $m\frac{d^2x}{dt^2} = m\omega^2 X_m \sin(\omega t + \varphi_x + \pi)$, on associe le vecteur : $\vec{V_3} \begin{cases} m\omega^2 X_m \\ \varphi_x + \pi \end{cases}$

- À la fonction $F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$, on associe le vecteur : $\vec{V} \begin{cases} F_m \\ \varphi_F \end{cases}$

avec :

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3}}$$

Déterminer X_m et φ_F par la méthode de Fresnel :

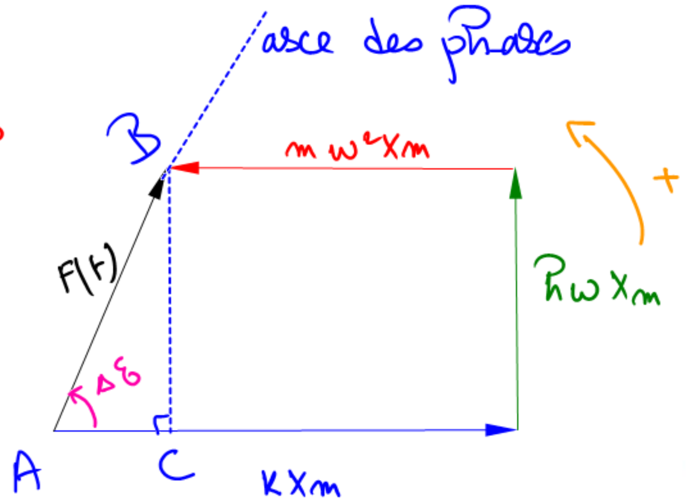
1er cas : si $\omega < \omega_0$ et $N < N_0$

$\Rightarrow \omega^2 < \omega_0^2$

$\Rightarrow \omega^2 < \frac{k}{m}$

$\Rightarrow m\omega^2 < k$

$\Rightarrow m\omega^2 X_m < k X_m$



- $\Delta\varphi = (\varphi_F - \varphi_x) \in [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \tan(\varphi_F - \varphi_x) > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{h\omega}{k - m\omega^2}}$$

- F(t) est en avance de phase par rapport à x(t).

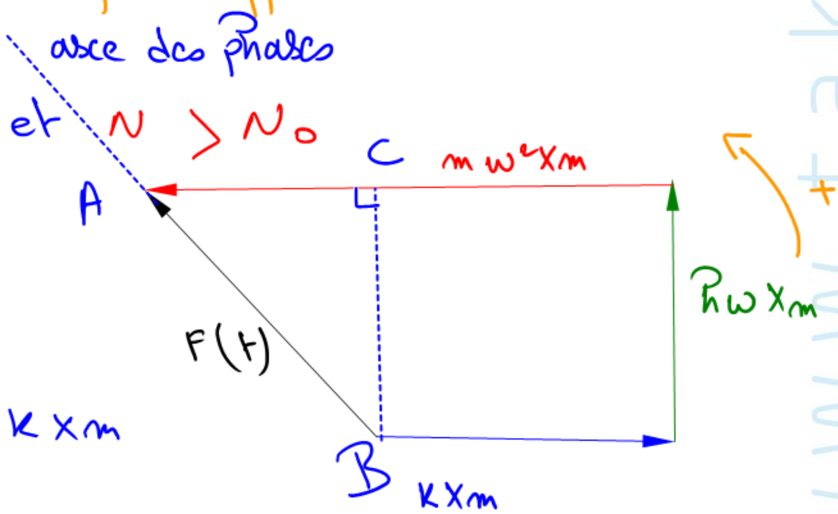
2ème cas : si $\omega > \omega_0$ et $N > N_0$

$\Rightarrow \omega^2 > \omega_0^2$

$\Rightarrow \omega^2 > \frac{k}{m}$

$\Rightarrow m\omega^2 > k$

$\Rightarrow m\omega^2 X_m > k X_m$



- $\Delta\varphi = (\varphi_F - \varphi_x) \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\Rightarrow \tan(\varphi_F - \varphi_x) < 0$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{h\omega}{k - m\omega^2}}$$

• F(t) est en avance de phase par rapport à x(t).

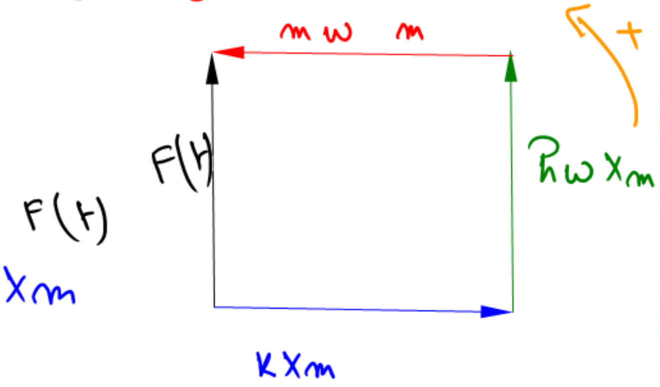
3ème cas: Si $\omega = \omega_0$ et $N = N_0$

$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m}$

$\Rightarrow m\omega^2 = K$

$\Rightarrow m\omega^2 X_m = K X_m$



• $\varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ rad et $\varphi_F > \varphi_x$; $\boxed{X_m = \frac{F_m}{h\omega}}$

• F(t) est en quadrature avance par rapport à x(t)

D'après pythagore dans le triangle ABC

$$F_m^2 = (h\omega X_m)^2 + (K X_m - m\omega^2 X_m)^2$$

$$\Rightarrow F_m^2 = X_m^2 \cdot (h\omega)^2 + X_m^2 \cdot (K - m\omega^2)^2$$

$$\Rightarrow F_m^2 = X_m^2 \cdot \left[(h\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2\right]$$

$$\Rightarrow X_m^2 = \frac{F_m^2}{(h\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(h\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2}}}$$

Déterminer l'expression de N_r, à la résonance d'élongation :

→ À la résonance d'élongation X_m est maximal.

→ pour que X_m soit maximal il faut que $f(\omega)$ soit minimal.

avec : $f(\omega) = h^2\omega^2 + (K - m\omega^2)^2$

Etude de $f(\omega)$:

$$f'(\omega) = 2h^2\omega - 4m\omega(K - m\omega^2)$$

$$= 2\omega\left[h^2 - 2m(K - m\omega^2)\right]$$

ω	0	ω_r	$+\infty$
$f'(\omega)$	$-$		$+$
$f(\omega)$	↘		↗
X_m	↗		↘

$$f'(\omega_r) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_r = 0 \text{ ou } h^2 - 2m(k - m\omega_r^2) = 0$$

$$\Rightarrow h^2 - 2mk + 2m^2\omega_r^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega_r^2 = 2mk - h^2$$

$$\Rightarrow \omega_r^2 = \frac{\cancel{2}\cancel{m}k}{\cancel{2}m^{\cancel{2}}} - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$\Rightarrow \omega_r^2 = \frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$\Rightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}}$$

Or $\omega_r = 2\pi N_r$

D'où $2\pi N_r = \sqrt{4\pi^2 N_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}}$$

→ A la résonance d'élongation ou d'amplitude

On a :

$$\boxed{N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2} \quad (N_r < N_0)}$$

et

$$\boxed{\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \quad (\omega_r < \omega_0)}$$

Trouver l'expression de h :

Dans le triangle ABC :

- $\sin(\varphi_F - \varphi_x) = \dfrac{h\omega X_m}{F_m} \Rightarrow \boxed{h = \dfrac{F_m \sin(\varphi_F - \varphi_x)}{\omega X_m}}$

Trouver l'expression de k :

Dans le triangle ABC :

- $\cos(\varphi_F - \varphi_x) = \dfrac{(k - m\omega^2) X_m}{F_m}$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{F_m \cos(\varphi_F - \varphi_x)}{X_m} + m\omega^2}$$

Trouver l'expression de l'impédance mécanique

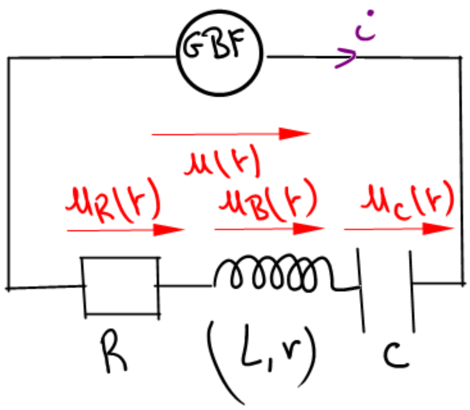
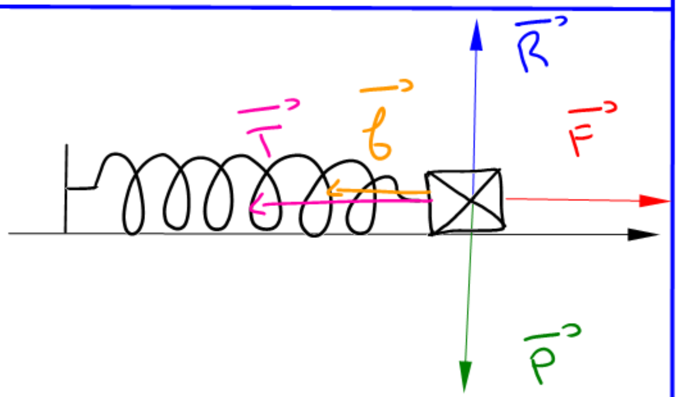
$$Z_{mécanique} = \frac{F_m}{V_m}$$

$$Z_{mécanique} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2}$$: impédance mécanique

Analogie :

électrique - mécanique

Tableau d'analogie Electrique - mécanique :

Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
	
q i L $\frac{1}{C}$ R(totale) U_m $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$	x v m K h F_m $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$