Mathématiques

Thème : Nombres complexes

Exercices de synthèse

Exercice N°1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) a) Vérifier que : $-7-4i\sqrt{2}=\left(1-2i\sqrt{2}\right)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2+z+2+i\sqrt{2}=0$.

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-i\sqrt{2}$; $z_B=-1+i\sqrt{2}$ et $z_C=\overline{z_A}$.
Montrer que C est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

3) A toute M du plan d'affixe z distincts d chacun des points A et B , on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\dfrac{z+1-i\sqrt{2}}{z+i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que si l'affixe z' du point M' est imaginaire pur, alors M appartient au cercle $\mathscr{C}$.
b) Montrer que si $|z'|=1$, alors M est un point de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

4) Soit E le point d'affixe $z_E=\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}i$ et E' d'affixe $z_{E'}=\dfrac{z_E+1-i\sqrt{2}}{z_E+i\sqrt{2}}$

a) Montrer que : $z_{E'}=-i$.
b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle $\mathscr{C}$.

1) a) Vérifier que : $-7-4i\sqrt{2}=\left(1-2i\sqrt{2}\right)^2$.

$$\left(1-2i\sqrt{2}\right)^2=1^2-2\times1\times2i\sqrt{2}+\left(2i\sqrt{2}\right)^2$$

$$=1-4i\sqrt{2}-8$$

$$=\boxed{-7-4i\sqrt{2}}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2+z+2+i\sqrt{2}=0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1^2 - 4\times 1\times(2+i\sqrt{2})$

$= 1 - 8 - 4i\sqrt{2}$

$= -7 - 4i\sqrt{2}$

$= (1-2i\sqrt{2})^2$

d'où $z' = \dfrac{-1-(1-2i\sqrt{2})}{2}$

$= \dfrac{-1-1+2i\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{-2+2i\sqrt{2}}{2}$

$= -1+i\sqrt{2}$

et $z'' = \dfrac{\cancel{-1}+\cancel{1}-2i\sqrt{2}}{2}$

$= -i\sqrt{2}$

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-1+i\sqrt{2}\,;\,-i\sqrt{2}\}}$$

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -i\sqrt{2}$; $z_B = -1 + i\sqrt{2}$ et $z_C = \overline{z_A}$.
Montrer que C est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

On a $\dfrac{aff(\overrightarrow{CA})}{aff(\overrightarrow{CB})} = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

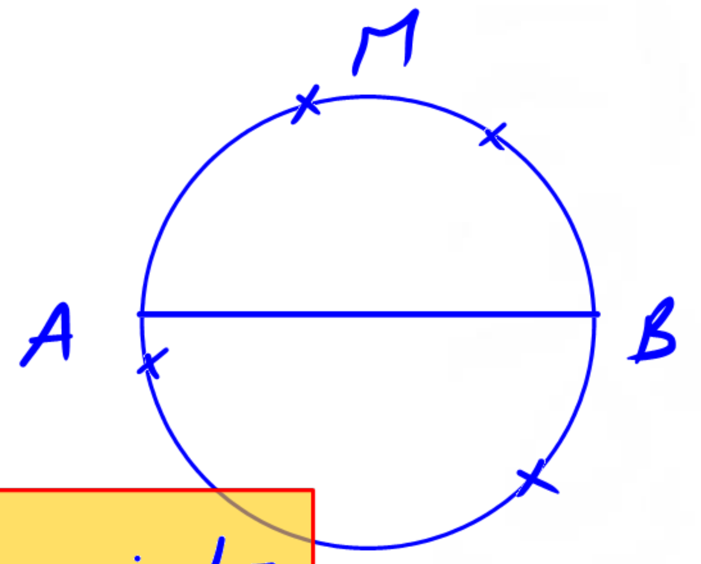
$$= \frac{-i\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{-1 \cancel{+i\sqrt{2}} \cancel{-i\sqrt{2}}}$$

$$= 2i\sqrt{2} \in i\mathbb{R}$$

donc $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

d'où $(CA) \perp (CB)$

et par suite C est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$



3) A toute M du plan d'affixe z distincts d chacun des points A et B, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{z+1-i\sqrt{2}}{z+i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que si l'affixe z' du point M' est imaginaire pur, alors M appartient au cercle $\mathscr{C}$.

Si $z' \in i\mathbb{R}$ alors $\dfrac{z+1-i\sqrt{2}}{z+i\sqrt{2}} \in i\mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{z-(-1+i\sqrt{2})}{z-(-i\sqrt{2})} \in i\mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{aff}(\overrightarrow{BM})}{\mathrm{aff}(\overrightarrow{AM})} \in i\mathbb{R}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow (BM) \perp (AM)$

et par suite $M \in \mathscr{C}$

On a donc $\boxed{\text{si } z' \in i\mathbb{R}, \text{ alors } M \in \mathscr{C}}$

b) Montrer que si $|z'|=1$, alors M est un point de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

Si $|z'|=1$, alors $\left|\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right| = 1$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{AM} = 1$

$\Rightarrow BM = AM$

$\Rightarrow M \in \Delta = méd[AB]$

On a donc :

$$\boxed{\text{Si } |z'|=1, \text{ alors } M \in \Delta}$$

4) Soit E le point d'affixe $z_E = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i$ et E' d'affixe $z_{E'} = \dfrac{z_E + 1 - i\sqrt{2}}{z_E + i\sqrt{2}}$

a) Montrer que : $z_{E'} = -i$.

$$z_{E'} = \frac{z_E + 1 - i\sqrt{2}}{z_E + i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1 - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{2} - i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + i\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{-i\left(\cancel{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + i\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)}\right)}{\cancel{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + i\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)}}$$

$$= -i$$

donc $\boxed{z_{E'} = -i}$

b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle $\mathscr{C}$.

*) On a $z_{E'} = -i$

$\Rightarrow$ $z_{E'}$ est imaginaire pure

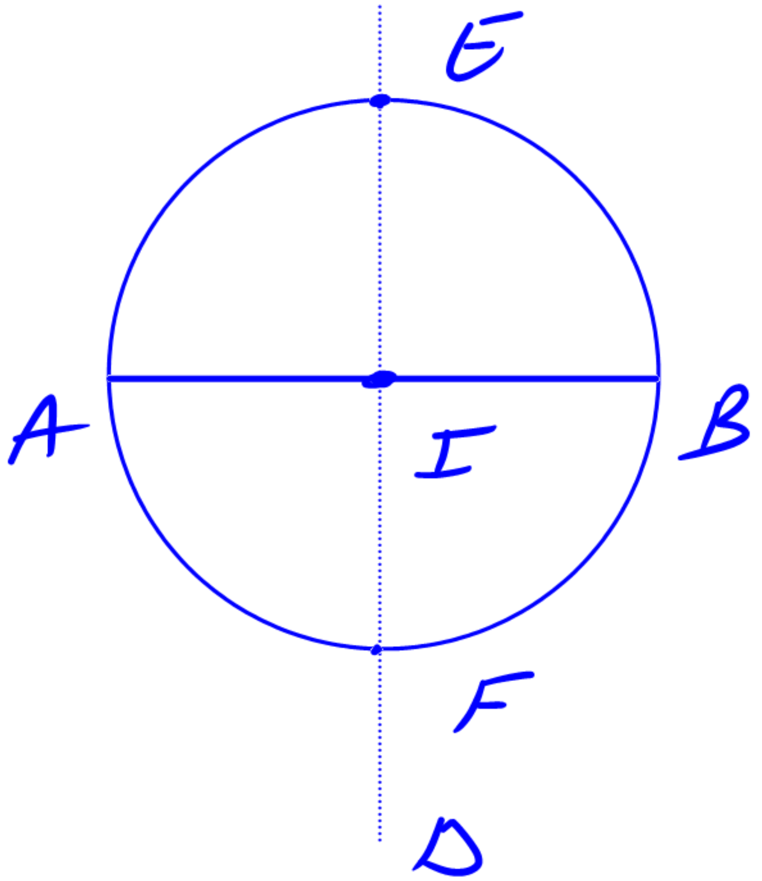
$\Rightarrow$ $E \in \mathscr{C}$ (d'après 3) a))

*) $|z_{E'}| = |-i| = 1$ donc $E \in \Delta$

(d'après 3) b))

d'où $\boxed{E \in \mathscr{C} \cap \Delta}$

Soit F le deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ



Soit $I = A * B$

donc $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2}$

On a $E \in \Delta \cap \mathscr{C}$ et $\Delta = \text{méd}[AB]$

donc $F = S_I(E)$

donc $I = E * F$

donc $z_I = \frac{z_E + z_F}{2}$

$\Leftrightarrow z_F = 2z_I - z_E$

$= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}i$

$= -1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$= \boxed{-\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}i}$

Ainsi $\mathscr{C} \cap \Delta = \{E, F\}$ avec

$z_E = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i$

$z_F = -\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}i$