Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC MATHS

Chapitre : Divisibilité dans Z

Exercice 1 — 15 min — 3 pt

a. Déterminer les entiers n, pour lesquels 3n+5 divise 8.

b. Déterminer les entiers n, pour lesquels 13 divise n+4 et $|n| \leq 22$.

c. Déterminer les entiers n tels que n-4 divise n+17.

Exercice 2 — 15 min — 3 pt

a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2=4y^2+3$.

b. Développer (x-2)(y-3). Puis déduire les couples (x; y) de tel que xy = 3x+2y.

c. Déterminer les couples (x; y) d'entiers relatifs tels que $x^2=y^2+13$.

d. Déterminer les couples (x; y) d'entiers relatifs tels que $3x^2+y^2=21$

Exercice 3 — 15 min — 4 pt

1) Déterminer les entiers naturels a tel que 2 et 3 sont les seuls diviseurs premiers de a, et le nombre de diviseurs de a^2 et le triple du nombre de diviseurs de a.
2) Soit n un naturel impair. Montrer que la somme S de n entiers naturels consécutifs, est divisible par n.
3)a. Soient a et b deux naturels non nuls, montrer que : (a^2+b^2 est impair) $\Leftrightarrow$ (a et b sont de parité différentes).
b. Montrer que si un naturel impair n est la somme de deux carrés alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que n=4k+1.

Exercice 4 — 15 min — 4 pt

1) Sachant que $1159 = 47 \times 24 + 31$, en déduire le quotient q et le reste r de la division euclidienne de:
a. 1159 par 47 **b.** 1159 par 24 **c.** -1159 par 24 **d.** -1159 par -47 **e.** 1159 par -24.
2) Soit n est un entier naturel tel que le reste de sa division euclidienne par 7 est égal au reste de sa division euclidienne par 3. Quels sont les valeurs possibles de n.
3) Les restes consécutifs de la division euclidienne de deux naturels m et n par 17 sont 8 et 12. Déterminer les restes de la division euclidienne de (m+n); mn et m^2 par 17.

Exercice 5 — 15 min — 3 pt

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $1+5+5^2+...5^n$, puis déduire le reste de la division euclidienne de 5^{n+1} par 4.

2) a. Montrer, par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}$, le chiffre des unités de $n^5 - n$ est 0.

b. En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, n^{p+1} et n^{p+5} ont le même chiffre des unités.

Exercice 6 — 25 min — 4 pt

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, effectuer la division euclidienne de a par b pour $a=3n^2+n$ et $b=n+1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $4n+27$ par $n+5$.

3) Soit a et n deux entiers tel que a divise $n-1$ et $n^2 + n + 3$.

a. Déduire que a divise $3n + 2$.

b. Montrer alors que a divise 5.

c. Déduire les valeurs possibles de a.

Exercice 7 — 15 min — 3 pt

1) Vrai ou Faux:

a. $45 \equiv 3[7]$ **b.** $29 \equiv -1[6]$ **c.** $-13 \equiv 2[3]$ **d.** $152 \equiv 2[3]$ **e.** $137 \equiv -3[5]$ **f.** $-17 \equiv -7[10]$

2) x un entier dont le reste modulo 7 est 2.
Déterminer les restes modulo 7 de $(x+5)$, $(x-5)$, $(-15x)$ et x^3.

3) n un entier naturel ≥ 2, dans chacun des cas ci-dessous déterminer les valeurs de n pour lesquelles:

a. $46 \equiv 0[\text{mod } n]$ **b.** $10 \equiv 1[\text{mod } n]$ **c.** $27 \equiv 5[\text{mod } n]$

Exercice 8 — 25 min — 5 pt

1) Déterminer r dans chacun des cas ci-dessous:

a. $7^{8043} \equiv r[\text{mod}2011]$ **b.** $7(3^{2000}) \equiv r[\text{mod}2]$ **c.** $(6^6)^6 \equiv r[\text{mod}7]$ **d.** $7(49^{11})+1 \equiv r[23]$

e. $6(8^{100})+1 \equiv r[\text{mod}31]$ **f.** $53^{62} \equiv r[\text{mod}61]$ **g.** $11(7^6)^{10} \equiv r[\text{mod}13]$ **e.** $2^{103}+1 \equiv r[97]$.

2) **VRAI OU FAUX**

Soit n un entier naturel, alors:

a. $3^{6n+3}+1\equiv 0[\text{mod}7]$ **b.** $n^{7}+6n\equiv 0[\text{mod}7]$ **c.** $7^{3n}\equiv 1[\text{mod}9]$ **d.**

$3^{6n+2}+3^{3n+1}+1\equiv 0[\text{mod}13]$

3) Déterminer les restes modulo 7 de:

a. 2^{213} **b.** 3^{215} **c.** 2012^{213} **d.** $421^{120}\times 99^{15}$ **e.** $93^{120}-44^{120}$.

Exercice 9 — 25 min — 5 pt

1)a. Soit $n\in\mathbb{N}$, discuter suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 3^{n} et 4^{n} par7.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{N}$, de l'équation $3^{x}+4^{x}\equiv 0[\text{mod}7]$.

c. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $2019^{6n+1}+2\times 2020^{3n+2}$ est divisible par 7.

2) Pour tout entier naturel n, on pose: $u_{n}=2\times 3^{n}+3\times 4^{n}$ et $S_{n}=\sum_{k=0}^{n}u_{k}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. pour quelles valeurs de n, $S_{n}\equiv 0[\text{mod}7]$.

Exercice 10 — 25 min — 5 pt

1) déterminer l'ensemble E des entiers tels que $4x\equiv 6[7]$

Méthode :
On travaille par disjonction des cas: on étudie suivant les congruences modulo 7 de x, les congruences de 4x modulo 7. On résume les résultats dans un tableau de congruences, puis on déduit les résultats.

x mod 7	0	1	2	3	4	5	6
4x mod 7							

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes :

a. $6x\equiv 3[\text{mod}4]$ **b.** $4x\equiv 3[\text{mod}7]$ **c.** $12x\equiv 2[\text{mod}9]$ **d.** $5x\equiv 4[\text{mod}6]$

e. $2x\equiv 3[\text{mod}5]$

Taki Academy
www.takiacademy.com

تهنى على قرايتك