Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Exercice 1 — 25 min — 4 pt

Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_1^e x\,dx$ et pour tout entier $n \geq 1$, par

$I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$.

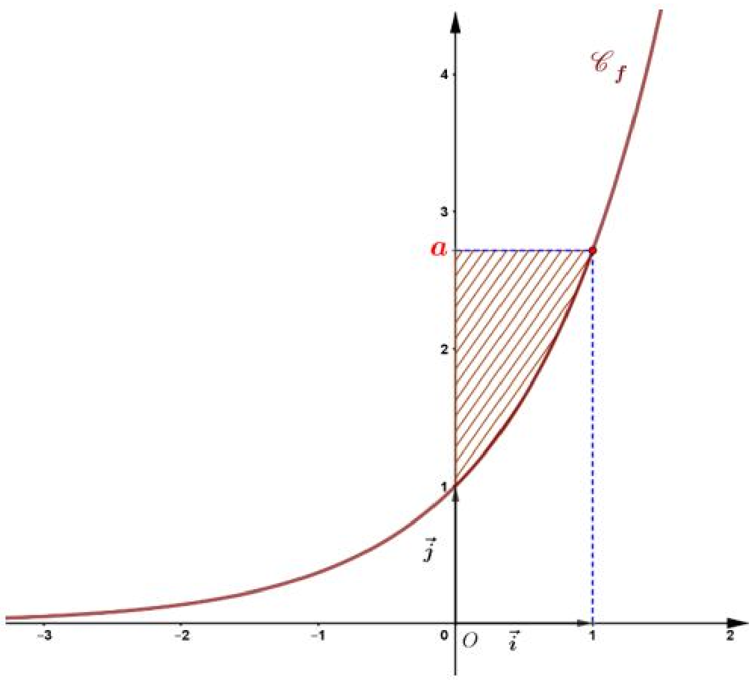
1) Calculer I_0.
2) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.
3) En déduire I_1.
4) a. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
   b. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
5) Déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$.
6) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 2 — 35 min — 7 pt

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie, continue

et dérivable sur IR telle que :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in IR \\ f(1) = a \end{cases}$$



1°) Calculer l'aire de partie hachurée.

2°) On considére la suite (I_n) définie sur IN^* par $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{a}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

3°) a) Soit *h* la fonction définie sur *IR* par $h(x) = x\, f(x)$.

Montrer que pour tout $x \in IR$: $h(x) = h'(x) - f'(x)$.

b) En déduire la valeur de I_1.

4°) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $n \in IN^*$: $I_{n+1} = a - (n+1)\, I_n$.

Calculer alors $\int_0^1 x^3 f(x)\, dx$.

Exercice 3 — 35 min — 5 pt

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1}(x)}$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{2n+1}(x)} dx$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n - I_{n-1} = J_n$.
   b) En déduire la monotonie de la suite (I_n).
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)\, J_n$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2nI_n = (2n-1)\, I_{n-1} - \frac{2^n}{\sqrt{2}}$.
   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n \geqslant \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2}n}$.
   d) Montrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $2^n \geqslant n^2$.
   e) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 4 | 35 min | 5 pt

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par f(x)= $x\sqrt{x+1}$

1) a- Etudier les variations de f sur $[-1,+\infty[$ (on étudiera la dérivabilité de f à droite en -1)

   b- Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

   c- Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par (C) , $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations x=-1 et x=0.

2) Soit U la suite réelle définie sur IN par : $U_0=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+x}\,dx$ et $\forall n\geq 1$; $U_n=\int_{-1}^{0}x^n\sqrt{1+x}\,dx$

   a- Calculer U_0

   b- Montrer que pour tout $n\in$ IN : $(2n+5)U_{n+1}=-2(n+1)U_n$, en déduire que $\forall n\in IN\ ,U_n=\dfrac{(-1)^n 2^{2n+2}.n!(n+1)!}{(2n+3)!}$

3) a- A l'aide du théorème des accroissements finis , montrer que $\forall t\in[0,1]:0\leq\sqrt{2}-\sqrt{1+t}\leq\dfrac{1-t}{2}$

   b- On pose $V_n=\int_{0}^{1}t^n\sqrt{1+t}\,dt$; $n\in IN^*$ montrer que $0\leq\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}-v_n\leq\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$ .Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}V_n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}nV_n$


Q
Magazines