Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

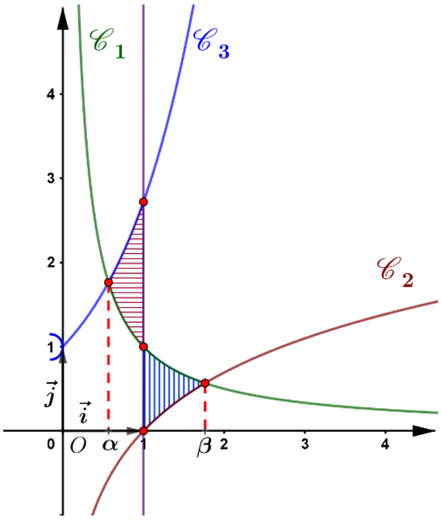
Classe : BAC

Chapitre : Fonctions Exponentielles

Exercice 1 | 50 min | 7 pt

Dans le graphique ci-contre, on a représenté les courbes C_1, C_2 et C_3 dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

- La courbe C_1 représente la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- La courbe C_2 représente la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \mapsto \ln x$.
- La courbe C_3 représente la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $x \mapsto e^x$.



1°) a) Déterminer graphiquement le signe de $\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$.

b) Déterminer graphiquement le signe de $\left(e^x - \dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0,+\infty[$.

2°) a) Calculer en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan hachurée en rayure horizontale.

b) Vérifier que $\mathcal{A} = \mathrm{e} + \ln\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$.

3°) a) Calculer en fonction de β, l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan hachurée en rayure verticale.

b) Montrer que $\mathcal{A}' = \dfrac{(\beta-1)^2}{\beta}$.

4°) On considère la fonction *f* définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln x$ et on note C sa courbe représentative dans le repère $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement le résultat.

5°) a) Dresser le tableau de variation de *f*.

b) Etudier la position de C et C_3.

c) Expliquer comment utiliser les courbes C_2 et C_3 pour tracer la tangente horizontale de C.

d) Tracer C dans le même repère $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$.

6°) Hachurer (en rayure oblique) en justifiant le domaine $\mathcal{D}$ du plan limitée par les courbes C_1 et C_3 ; et ; les droites d'équations : $x=\lambda$ et $x=\alpha$ tel que $0<\lambda<\alpha$ et l'aire du $\mathcal{D}$ est égale à $\mathcal{A}$.

Exercice 2 — 60 min — 7 pt

I– Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (**unité : 2cm**).

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$.

Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que le point $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C.

d) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à C au point I.

2°) a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t)\le\dfrac{1}{2}$.

b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente, montrer que pour $x\ge 0$ on a :

$f(x)\le\dfrac{1}{2}(x+1)$

c) Déterminer alors la position de C par rapport à (T).

3°) Tracer (T) et C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) a) Montrer que f est une bijection de IR sur $]0,1[$.

b) Soit $y\in\,]0,1[$. Déterminer le réel x tel que $f(x)=y$.

c) En déduire la représentation graphique dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction g définie sur $]0,1[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

II– On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $I_n=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}}dt$.

1°) a) Montrer que (I_n) est décroissante et positive.

b) En déduire que (I_n) est convergente.

2°) Montrer que pour tout naturel non nul *n*, on a : $I_n \leq \dfrac{1}{2n}$.

3°) Trouver la limite de I_n quand *n* tend vers l'infini.

Taki Academy
www.takiacademy.com