Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

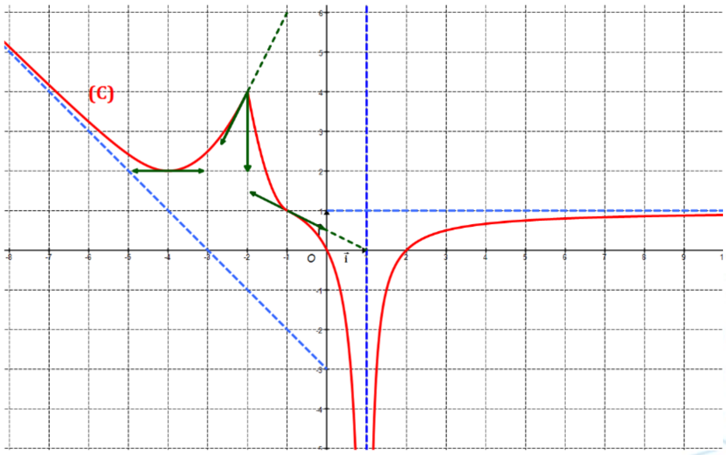
Classe : BAC

Chapitre : Dérivabilité

Exercice 1 — 25 min — 5 pts

La courbe ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction *f* définie sur $IR\setminus\{1\}$. On a tracé sur le graphique les asymptotes à **(C)** (droites bleues en pointillés)

Par lecture graphique compléter :



1°) a) $f(-4)$ et $f(2)$.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to1} f(x)$.

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x+3$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{f(x)-1}$.

2°) a) $f'(-4)$; $f'(-1)$; $f_g'(-2)$ et $f''(-1)$.

b) Quel est le signe de $f''\left(\frac{-1}{2}\right)$?

3°) a) *f* est-elle dérivable à droite en -2 ?

Déterminer alors $\lim_{x\to(-2)^+} \frac{f(x)-4}{x+2}$.

b) Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse -1.

4°) a) Déterminer le signe de *f* sur IR $\setminus\{1\}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur IR $\setminus\{1\}$.

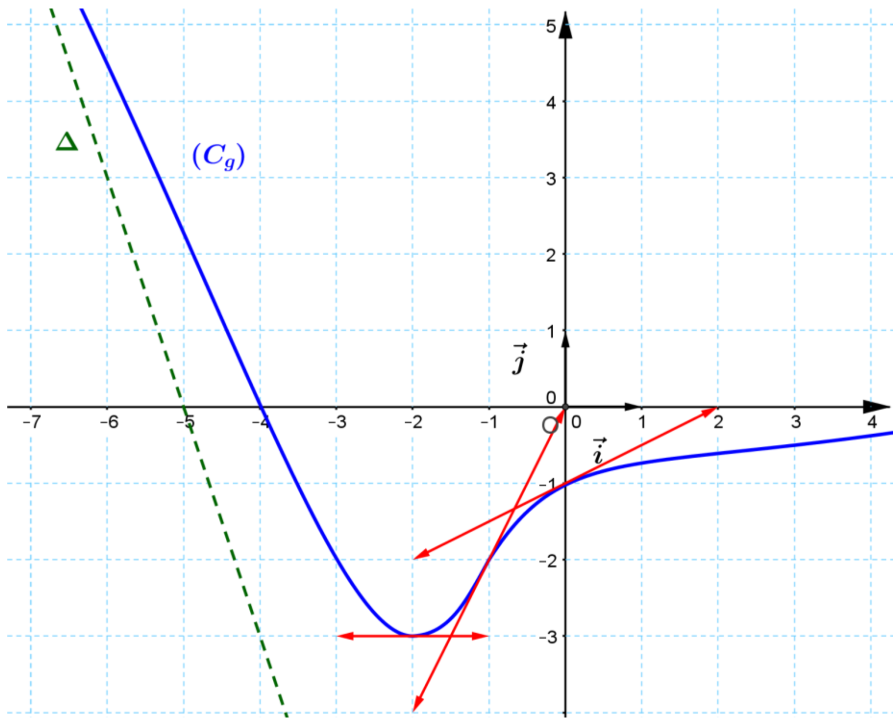
5°) Soit *g* la restriction de *f* sur l'intervalle $]1;+\infty[$. On désigne par (C_g) la courbe représentative de *g* et par (Γ) la courbe qui est symétrique de (C_g) par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Tracer les courbes (C_g) et (Γ).

Exercice 2 — 20 min — 4 pts

Dans le graphique ci-dessous (C_g) est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction *g* dérivable sur IR.

- (C_g) Possède une asymptote oblique Δ au voisinage de $-\infty$.
- L'axe des abscisses est asymptote à (C_g) au voisinage de $+\infty$.



1°) Déterminer par une lecture graphique :

$$\lim_{x\to+\infty} g,\ \lim_{x\to-\infty}\left(g(x)+3x\right),\ g\circ g(0),\ \left(g\circ g\right)'(0) \text{ et } g\circ g\left(\left[-2,+\infty\right[\right).$$

2°) Montrer que l'équation $g'(x)=-1$ admet au moins une solution $c\in\left]-3,-2\right[$.

3°) Soit f la fonction dérivable sur IR qui s'annule en (–4) et dont la fonction dérivée f' est la fonction *g*.

La courbe (C_f)représentative de f possède une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

a) Dresser le tableau de variation de *f* sur IR et donner $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Justifier que (C_f) possède un unique point d'inflexion *I* qu'on précisera l'abscisse.

Exercice 3 — 25 min — 5 pts

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in$ IN : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^{\ 2}\right)$.

1°) Soit la fonction *f* définie sur $[1,2]$ par : $f(x) = x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in [1,2], \left|f'(x)\right| \le \frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$.

2°) a) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in$ IN, $1 \le u_n \le 2$.

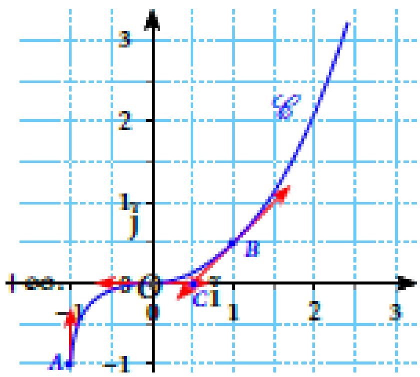
b) Montrer, que pour tout $n \in$ IN, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$.

Exercice 4 — 25 min — 5 pts

Dans l'annexe ci-jointe Figure 1, on a tracer dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe C représentative d'une fonction f définie continue et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ et dérivable sur $]-1;+\infty[$.

La courbe C admet :



- Une demi-tangente verticale au points $A(-1,-1)$.
- Une tangente horizontale au point O.
- Une tangente T au point $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ passant par le point $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- Une branche infinie parabolique de direction $\left(O, \vec{i}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

1) Par lecture graphique :

a) Déterminer $f'(0)$; $f'(1)$; $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1}$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que C admet dans $[-1,1]$ une tangente parallèle à T.

3) Soit u et h les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $u(x)=\frac{-x}{x+1}$ et $h= fou$.

Calculer $\lim_{x\to -1^+} h(x)$, $\lim_{x\to +\infty} h(x)$ et $h'(0)$.

Taki Academy
www.takiacademy.com

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000