Taki Academy
www.takiacademy.com

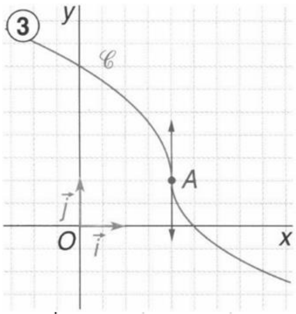
Classe : Bac Maths

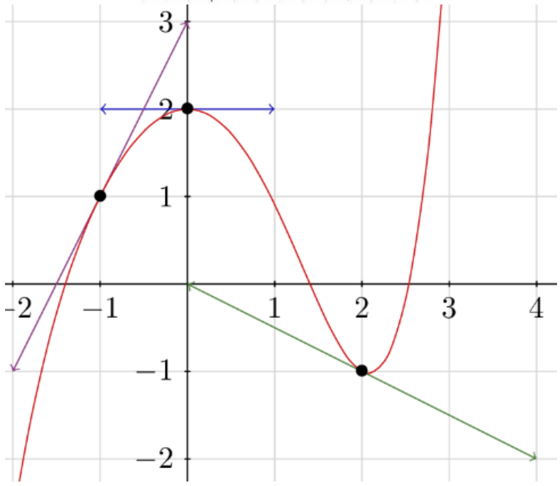
Série : 15(dérivabilités suites isométries)

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Exercice 1 — 25 min — 5 pts

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-1}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-1}{x-2}$



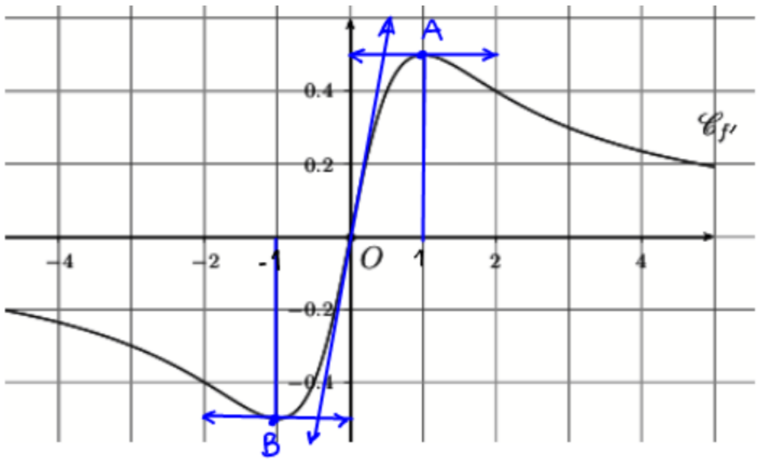


2)

a) Justifier que fof est dérivable en o et calculer $(fof)'(0)$

b)

3) On donne la représentation graphique de la fonction dérivée d'une fonction **f** deux fois dérivable sur [-5,5] , $A(0,1)\in C_f$



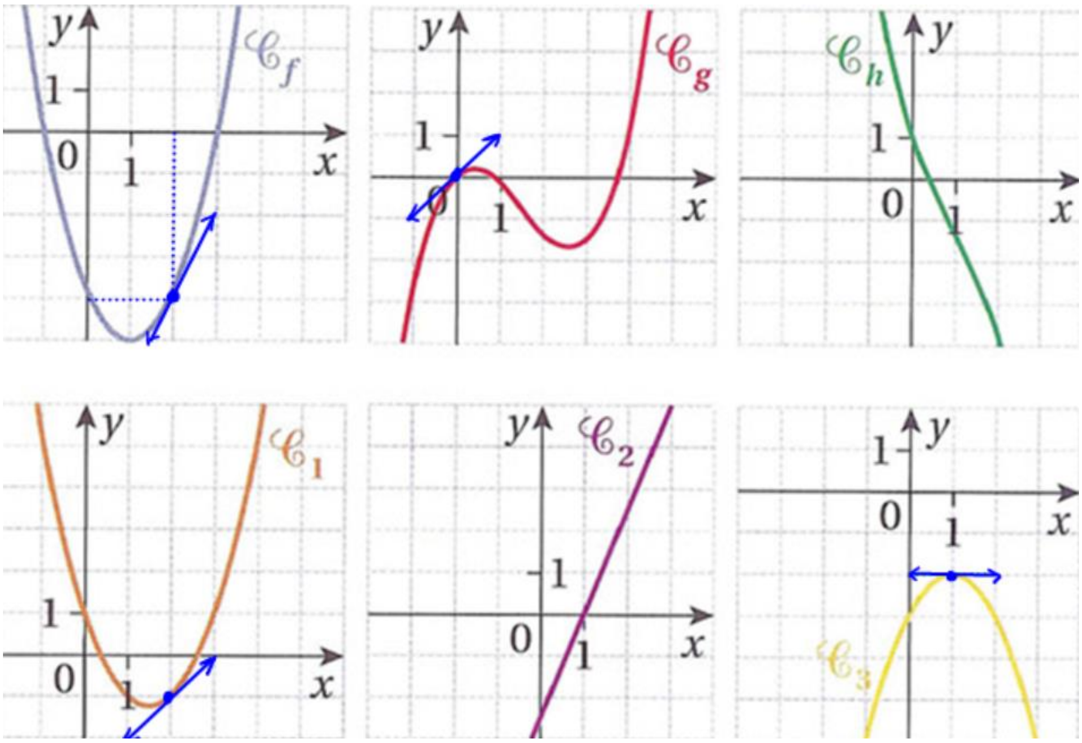
a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

b) Justifier que les points de C_f d'abscisses1 et -1 sont des points d'inflexions

c) Déterminer le sens de variation de **f**

4)

C_1, C_2 et C_3 sont les courbes représentatives des fonctions dérivées des fonctions **f**, **g** et **h** de représentations respectives C_f, C_g et C_h. Faire correspondre chaque fonction avec sa fonction dérivée



Exercice 2 — 25 min — 5 pts

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1}+x-1 & \text{si } x<1\\ \sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) Montrer que f est continue sur IR.

3) a) Montrer que l'équation $\mathbf{f \; x = x - 1}$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

b) Vérifier que : $\tan \; \boldsymbol{\pi\alpha} \; = \dfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{\alpha}^2}}{\boldsymbol{\alpha}}$.

4) Soit **g** la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\boldsymbol{g \; x} = \boldsymbol{f}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\cos x}}\right)$.

a) Montrer que **g** est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Justifier que **g** est dérivable en $\frac{\pi}{3}$ et calculer $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 3 — 25 min — 5 pts

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 + z + 1 = 0$.

Mettre les solutions sous forme exponentielle

Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Déterminer les racines cubiques de j et de $\overline{j}$

2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{j\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a : $\dfrac{j+z}{j-z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = i \; j \; tg\dfrac{\theta}{2}$

3) En déduire les solutions de l'équation $(E'): (j+z)^6 + (j^2 - z^2)^3 + (j-z)^6 = 0$

Exercice 4 — 20 min — 5 pts

P étant le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit m un paramètre complexe

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) : z^2 - 2z + m^2 + 1 = 0$

2) On considère l'application : $f_m : P \to P$

$$N(z) \mapsto N'(z') \text{ tel que } z' = \frac{1 - im}{1 + im} z + m + i$$

a) Pour quelle valeur de m, f_m est une translation. Déterminer ainsi l'affixe de son vecteur

b) Déterminer l'ensemble $R = \{ M(m) / f_m \text{ est une rotation} \}$. Caractériser f_1

c) Déterminer l'ensemble $H = \{ M(m) / f_m \text{ est une homothétie} \}$. Caractériser f_{2i}

Exercice 4 — 30 min — 5 pts

A/ Soit la fonction f définie sur $]-\infty, \pi[$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} - x - 2 & si \quad x < 0 \\ f(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) & si \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0.
3) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi[$

B/ h est une fonction définie et dérivable $[0; +\infty[$ et tels que :

$$(h)'(x) = \frac{2}{1+x^2} \qquad h(1) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = \pi \ .$$

Pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$, on pose $\varphi(x) = h\left(\sqrt{x}\right) + h\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

1) Montrer que φ est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et calculer $\varphi'(x)$.

2) déduire que pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$, $h\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi - h\left(\sqrt{x}\right)$.

D/ On considère les suites (U_n) et (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} h\left(\sqrt{k}\right) \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} h\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $h\left(\sqrt{n}\right) \leq U_n \leq h\left(\sqrt{2n}\right)$.
2) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
3)
   a) Exprimer V_n en fonction de U_n.
   b) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice 5 — 30 min — 5 pts

A/ Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} + 2$.

On désigne par (C) la courbe de F dans un R.O.N $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)
   a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = \frac{3}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) Dresser le tableau de variation de F.
   c) Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente T ou point $A(0,2)$.
   d) Construire (C) et T.
2)
   a) Montrer que $\left|F'(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, pour tout $x \geq \sqrt{2}$.
   b) Montrer que l'équation $F(x) = x$ admet dans $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ une solution unique α.

B/ Soit g la fonction définie sur $K = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $\begin{cases} g(x) = F(\tan(2x)) & si \quad x \neq \frac{\pi}{4} \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue sur l'intervalle K .

2) Montrer que g est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ et pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[$, on a : $g'(x) = 6.\cos(2x)$.

3) Montrer que pour tout $x \in k$, on a : $g(x) = 3.\sin(2x) + 2$.

4) Montrer que g est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ à gauche.

Exercice 6 30 min 5 pts

Le plan P est orienté dans le sens direct.

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .on désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC],[CD]et[DA]$ et par E le symétrique de O par rapport à I .

1)
   a) Montrer que $S_{(DA)}oS_{(DB)} = S_{(DB)}oS_{(DC)} = R_{\left(D,-\frac{\pi}{2}\right)}$.
   b) Déterminer la droite Δ tel que : $T_{\overrightarrow{DC}} = S_{\Delta}oS_{(DA)}$.
   c) En déduire que $T_{\overrightarrow{DC}}oR_{\left(D,-\frac{\pi}{2}\right)}$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2) Soit $g = T_{\overrightarrow{DC}}oS_{(DB)}$.
   Déterminer les points $g(I), g(C) et\ g(O)$. Les transformations g et $T_{\overrightarrow{OB}}oS_{(IJ)}$ sont-elles égales ?

3) Soit f une isométrie de P qui vérifie : $f(D) = C$ et $f(C) = B$.
   a) Déterminer $f(J)$.
   b) Montrer que : $f(O) = O$ où $f(O) = E$.
   c) En déduire que : $f = R_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$ ou $f = T_{\overrightarrow{OB}}oS_{(IJ)}$.

4)
   a) Caractériser la transformation : $g^{-1}oR_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$.
   b) Soit $M \in (CD)$ et soit $N = g(M)$. Montrer que OMN est un triangle rectangle O .

Exercice 7 — 20 min — 5 pts

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = u_n \; 1 - \sqrt{u_n} \;^{2}$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $0 < u_n < 1$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Pour tout $n \in IN$; On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout $k \in IN$, $u_k = \sqrt{u_k} - \sqrt{u_{k+1}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$; $S_n = \frac{1}{2} - \sqrt{u_{n+1}}$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

3°) Soit (v_n) la suite réelle définie sur IN par $v_0 = \sqrt{2}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{\sqrt{1 + u_n . v_n^2}}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$; $v_n = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{u_n}}}$.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} v_n$.