Taki Academy
www.takiacademy.com

2023-2024

Classe : Bac Maths

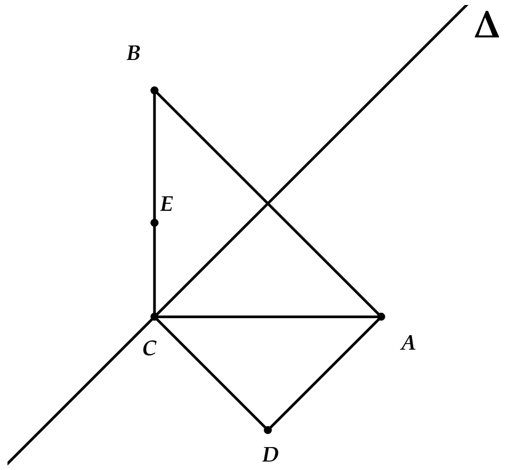
Série 29 : Exemple 1 : DC2

Nom du Prof : Lahbib Ghaleb

Exercice 1 — 45 min — 6 pts

Dans la figure ci-contre :

- ABC est un triangle rectangle et isocèle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- ACD est un triangle rectangle et isocèle en D tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- Δ est la médiatrice du segment $[AB]$.
- E le point du segment $[BC]$ tel que $EB = \sqrt{2}EC$.



1. Soit f la similitude directe tels que : $f(D) = C$ et $f(C) = B$.
   a) Montrer que f est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
   b) Montrer que A est le centre de f.
2. Soit $F = f(B)$; montrer que : $AF = 2BC$ et que $(BC)//(AF)$.
3. Soit $g = f \circ S_{\Delta}$.
   a) Montrer que g admet un centre noté Ω.
   b) Montrer que $g \circ g(C)$ puis que C est le milieu de $[A\Omega]$.
   c) On note H le projeté orthogonal du point E sur (ΩB).
   Montrer que $EC = EH$ puis déduire que (ΩE) est l'axe de g.
4. La droite (ΩE) coupe la droite Δ en Net on note $N' = f(N)$.
   a) Montrer que $g(N) = N'$ et déduire que $\overrightarrow{\Omega N'} = \sqrt{2}\overrightarrow{\Omega N}$.
   b) Montrer que $NA = NN'$ puis construit le point N' .

Exercice 2 — 45 min — 6 pts

On considère la suite (I_n) définie par : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt$ et pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)dt$.

On pose pour tout réel x et pour tout $n \in IN^*$, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq f_n(1) \leq \frac{1}{n+1}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\int_0^x \tan^n(t)dt = f_n(\tan x)$$

(c) En déduire la limite de la suite (I_n).

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2(t)}dt + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{2n+2}(t)}{1+\tan^2(t)}dt$$

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{2n+2}(t)}{1+\tan^2(t)}dt \leq I_{2n++2}$.

(c) Déterminer la limite de la suite (J_n).

3. Dans cette question, on étudiera la fonction f_n pour $n \geq 2$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, f_{2n} est impaire et f_{2n+1} est paire.

(b) Calculer $f_1(x)$ en fonction de x.

(c) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$f_n(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x^2)}$$

(d) Dresser le tableau de variations de f_n.

Exercice 3 — 30 min — 4 pts

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

1. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, a_n est impair.

(b) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 8 de 5^n.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1(\text{mod}\,8)$.

2. (a) Montrer que si $\begin{cases} x \equiv 1(\text{mod}\,8) \\ x \equiv 7(\text{mod}\,125) \end{cases}$ alors $x \equiv 257(\text{mod}\,1000)$

(b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_n = 257(\text{mod}\,1000)$

c) Quels sont les trois derniers chiffres de $\left(2 \times 5^{2023} + 7\right)\left(2 \times 5^{2024} + 7\right)$?

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, 5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$

b) Soit d le $PGCD$ de a_{2n} et a_{2n+1}. Montrer que d est différent de 7 .

c) Trouver alors d.

Exercice 4 — 30 min — 4 pts

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(1,1,1)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ et $I(-1,1,-1)$.

1) a) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCI.

2) On désigne par P le plan (ABC).
Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x + y + 2z - 4 = 0$.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 8 = 0.$$

a) Montrer que S est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{11}$.

b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{5}$.

c) Vérifier que le segment $[BC]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.
En déduire les coordonnés du point H, centre de $\mathscr{C}$.

4) Soit a un réel et M le point définie par $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$.

a) Déterminer à l'aide de a les coordonnés du point M.

b) Montrer que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = (a-1)(11a+3)$.

c) En déduire que la droite (AB) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ au point E défini par :
$\overrightarrow{AE} = -\dfrac{3}{11}\overrightarrow{AB}$.

d) Montrer que le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre AECI est égale à $\dfrac{3}{11}\mathcal{V}$.