Mathématiques

Classe : $4^{ème}$ Mathématiques

Devoir de contrôle N°1

Exercice 1 — 45 min — 4.5 pts

Soit (U_n) la suite définie par: $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + U_n + 1}{U_n^2 + 2} \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$.
   b) Montrer que (U_n) est croissante.
   c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(1 - U_n)$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - U_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$
3. Soit (W_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k (1 - U_k)$.
   a) Montrer que (W_n) est décroissante.
   b) Montrer que (W_n) est convergente.

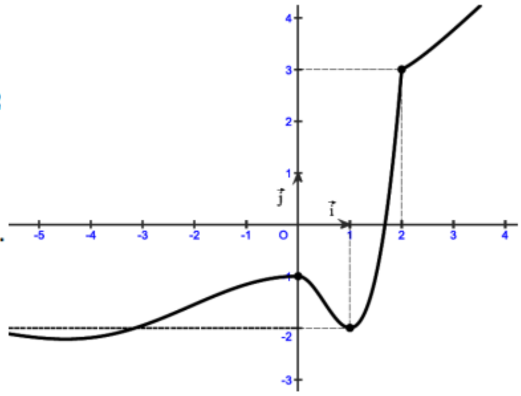
Exercice 2 — 40 min — 4.5 pts

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2(1 + i\cos\theta)z + 2i\cos\theta = 0$ avec $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives 1, $z_1 = 1 + i\,e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + i\,e^{-i\theta}$.
   a) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
   b) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
   c) On pose I le milieu du segment $[M_1M_2]$. Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
3. a) Écrire $\frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ sous forme exponentielle et en déduire que M_2 est l'image de M_1 par une rotation que l'on précisera.
   b) Déterminer θ pour que AM_1M_2 soit un triangle isocèle.
4. a) Montrer que lorsque θ varie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, la droite (M_1M_2) à une direction fixe.
   b) Prouver donc que $M_2 = S_\Delta(M_1)$ avec $\Delta : x = 1$.
   c) Déterminer θ pour que OAM_1M_2 soit un losange.

Exercice 3 — 40 min — 4 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} -2+\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x<0 \\ 2x^3-3x^2-1 & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 2x-\sqrt{x^2-x-1} & \text{si } x>2 \end{cases}$



1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$. Interpréter graphiquement le résultat .

3) Montrer que f est continue en 0 .

4) a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0,2]$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]0,2[$.

c) Vérifier que $1{,}6<\alpha<1{,}7$

5) On donne ci-dessous $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Répondre aux questions suivantes, en utilisant le graphique :

a) Donner le signe de f suivant les valeurs de x .

b) Déterminer les limites éventuelles suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\, f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x) - f(x)$

c) Déterminer les images de chacun des intervalles suivants : $[0,2]$ et $]0,+\infty[$.

Exercice 4 — 50 min — 6 pts

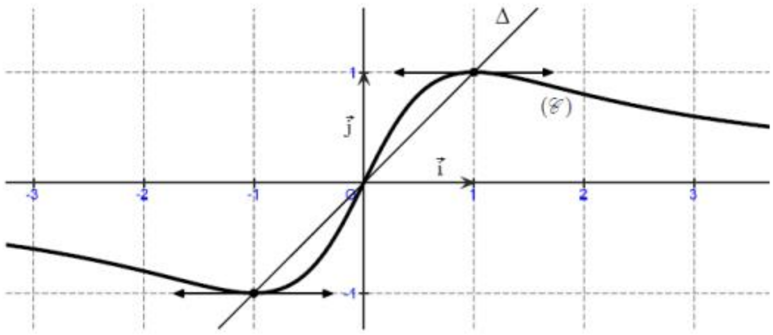
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- La courbe $(\mathscr{C})$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$
- La droite $y=0$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ an voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
- La droite $\Delta : y=x$ coupe la courbe $(\mathscr{C})$ en trois points d'abscisses respectifs -1 , 0 et 1.

1) En utilisant le graphique

a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Déterminer la position relative de $(\mathscr{C})$ et Δ



2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=\dfrac{1}{4} \\ U_{n+1}=\dfrac{2U_n}{1+U_n^{\,2}} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0<U_n<1$.

b) Montrer que (U_n) est croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k$.

a) Montrer que $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2^{n+1}U_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 2^k U_k\right)$

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k < 2^{n+1}U_{n+1}$

c) En déduire que $V_n < 2$ et que (V_n) est convergente.

4) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2^{n+1}}{U_{n+1}} - \frac{2^n}{U_n} = 2^n U_n$.

b) En déduire la limite de (V_n).

Taki Academy
www.takiacademy.com

ترهني على قرايتك

Magazines

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000