Classe : Bac Maths

Série : Intégrales et espace

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Exercice 1 — 25 min — 6 pts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\mathbf{I_n} = \int_0^1 (1-\mathbf{x}^2)^{\mathbf{n}}\, \mathbf{dx}$.

1) Vérifier que : $I_1 = \frac{2}{3}$ et que $\mathbf{I_2} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$.

2) Vérifier que : $\mathbf{I_n} - \mathbf{I_{n+1}} = \int_0^1 \mathbf{x}^2 (1-\mathbf{x}^2)^{\mathbf{n}}\, \mathbf{dx}$.

3)

a) Montrer par intégration par partie que : $\mathbf{I_{n+1}} = \frac{2\mathbf{n}+2}{2\mathbf{n}+3}\mathbf{I_n}$.

b) Déduire par récurrence que $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{I_n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2\mathbf{n}}{2\mathbf{n}+1}$.

4) On considère les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_0^{\sin \mathbf{x}} (1-\mathbf{t}^2)^{\mathbf{n}}\, \mathbf{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} \cos^{2\mathbf{n}+1}(\mathbf{t})\, \mathbf{dt}.$$

a) Montrer que $\mathbf{F}$ et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puis déterminer $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ et $\mathbf{G}'(\mathbf{x})$.

b) Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})$.

c) Montrer alors que : $\mathbf{I_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\mathbf{n}+1} \mathbf{t}\, \mathbf{dt}$

Exercice 2 — 30 min — 4 pts

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1,-4,0) ; B(4,-1,3) ; C(4,-4,-3) et D(-2,2,-3).

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b)Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

2) Calculer l'aire du triangle **ABC** .

3) Montrer que la droite **(AD)** est perpendiculaire au plan ABC.

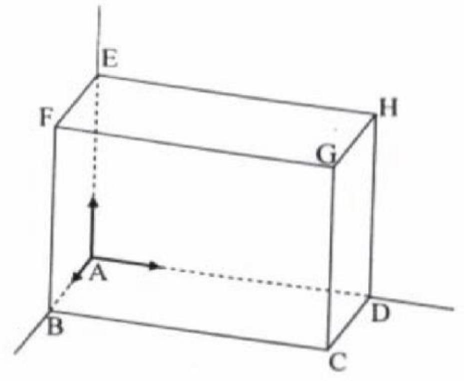
4) a) Vérifier que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 27.

b) Calculer l'aire du triangle **BCD** .

c) En déduire la distance du point A au plan **(BCD).**

Exercice 3 | 25 min | 5 pts

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et ABCDEFGH un parallélépipède tel que : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$.



1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

b) Déterminer les composantes des chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2) Soit α un réel différent de 1 et M le points des coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$

a) Vérifier que le point M décrit la droite (AG) privée du point G.

b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3) Soit v le volume du tétraèdre MEBG .

a) Exprimer v en fonction de α .

b) Calculer le volume du tétraèdre AEBG.

c) Pour quelles valeurs de α , v est –il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?