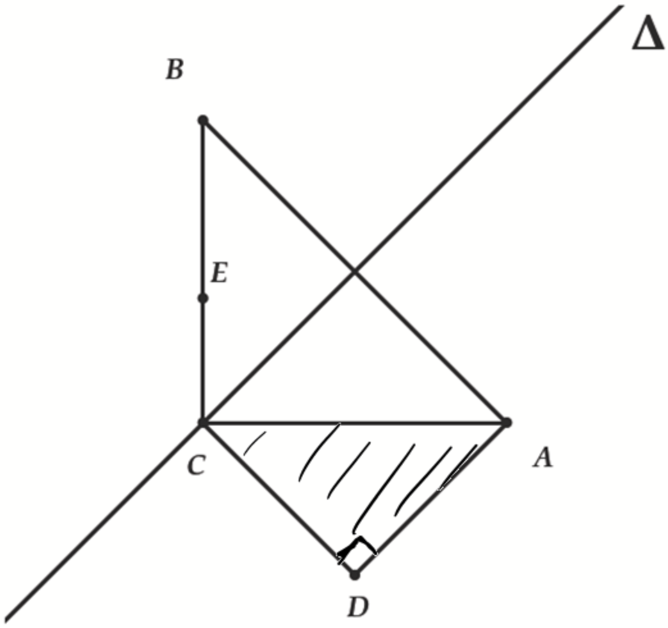
Exercice 1

$EB = \sqrt{2}EC.$



1. Soit f la similitude directe tels que : $f(D) = C$ et $f(C) = B$.

a) Montrer que f est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

soit k le rapport de f

$\left.\begin{array}{l} f(D)=C \\ f(C)=B \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CD} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$

$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$

$= \boxed{\sqrt{2}}$

ADC rectangle et isocèle en D alors

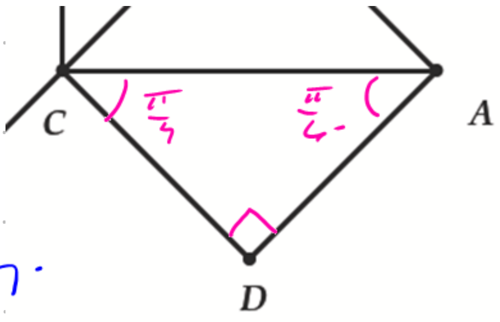
$AC = \sqrt{2}\, CD$.

Soit θ l'angle de f

$$\theta \equiv (\overrightarrow{DC}, \widehat{\,\overrightarrow{CB}}) \ [2\pi]$$
$$\equiv (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) + \pi \ [2\pi]$$
$$\equiv (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \pi \ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi \ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{7\pi}{4} \ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{7\pi}{4} - 2\pi \ [2\pi]$$
$$\equiv \boxed{-\frac{\pi}{4}} \ [2\pi]$$

b Montrer que A est le centre de f.

Dans le triangle ADC on a :



$$\begin{cases} \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sqrt{2}\,AD}{AD} = \sqrt{2} \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\dfrac{\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases}$$

Comme $f(D) = C$ alors A le centre de f.

Autrement

Posons ω le centre de f

Comme f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

et $f(D) = C$

alors ω est l'unique point

tq $\begin{cases} \frac{\omega C}{\omega D} = \sqrt{2} \\ (\overrightarrow{\omega D}, \widehat{\overrightarrow{\omega C}}) \equiv -\frac{\pi}{4} \ (2\pi) \end{cases}$

or $\begin{cases} \frac{AC}{AD} = \sqrt{2} \\ (\overrightarrow{AD}, \widehat{\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{\pi}{4} \ (2\pi) \end{cases}$

donc $\omega = A$

2 Soit $F = f(B)$; montrer que : $AF = 2BC$ et que $(BC)//(AF)$.

$\begin{cases} f(C) = B \\ f(B) = F \end{cases} \Longrightarrow f \circ f(C) = F.$

$f \circ f$ est une similitude directe de rapport $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \boxed{2}$ et

d'angle $\theta \equiv \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \ [2\pi]$

$\equiv \boxed{-\frac{\pi}{2}} \ [2\pi].$

$$\begin{cases} f\circ f(A) = A \\ \text{le rapport de } f\circ f \text{ est } 2 \neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le centre de $f\circ f$ est le point $\boxed{A}$

$f\circ f(C) = F \Rightarrow \begin{cases} AF = 2AC & (1) \\ (\widehat{\vec{AC}, \vec{AF}}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] & (2) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} AF = 2AC \\ AC = BC \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{AF = 2BC.}$

(2) $\Rightarrow (AF) \perp (AC)$

or $(BC) \perp (AC)$

donc $\boxed{(AF) \parallel BC.}$

<u>2ème méthode :</u>

$f(C) = B \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{2}AC \\ (\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]. \end{cases}$

$f(B) = F \Rightarrow \begin{cases} AF = \sqrt{2}AB \\ (\widehat{\vec{AB}, \vec{AF}}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi). \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} AB = \sqrt{2}\,AC \\ AF = \sqrt{2}\,AB \end{array}\right\} \Rightarrow AF = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}\,AC)$$

$$= 2AC$$

or $AC = BC$

donc $AF = 2BC$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AF}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) \; (2\pi)$$

$$\equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \; (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \; (2\pi)$$

$$\equiv -\pi \; (2\pi)$$

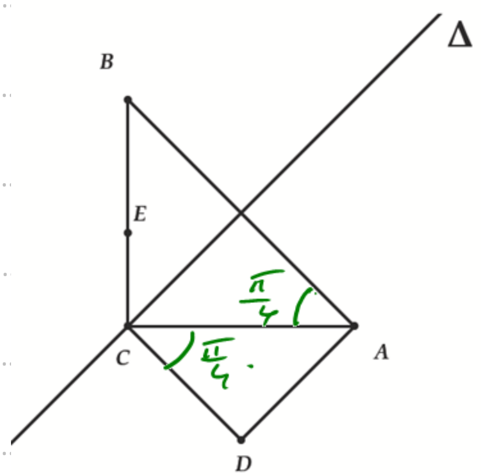
$$\equiv \pi \; (2\pi)$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires

$\Rightarrow$ $(BC) \parallel (AF)$

2ème méthode :

$(AB) \parallel (CD)$ car $D\hat{C}A$ et $B\hat{A}C$ sont deux alternes-internes égaux à $\frac{\pi}{4}$



$\Rightarrow f((AB)) \parallel f((CD))$.

$\Rightarrow$ $\boxed{(AF) \parallel (BC)}$.

3 Soit $g = f \circ S_\Delta$.

a Montrer que g admet un centre noté Ω.

$\begin{cases} S_\Delta : \text{similitude indirecte de rapport } 1 \\ f : \text{similitude directe de rapport } \sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow g = f \circ S_\Delta$ est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2} \neq 1$

donc g admet un centre noté Ω.

b ~~Montrer que~~ Déterminer $g \circ g(C)$ puis ~~que~~ M.q C est le milieu de $[A\Omega]$.

$g(C) = f \circ S_\Delta(C)$
$= f(C)$
$= B$

$g(B) = f \circ S_\Delta(B)$
$= f(A)$
$= A$

$$\begin{cases} g(C) = B \\ g(B) = A \end{cases} \Rightarrow g \circ g(C) = A$$

$$\boxed{g \circ g = h(\Omega, \sqrt{2}^2) = h(\Omega, 2)}$$

$h(\Omega, 2)(C) = A \Rightarrow \overrightarrow{\Omega A} = 2\overrightarrow{\Omega C}$

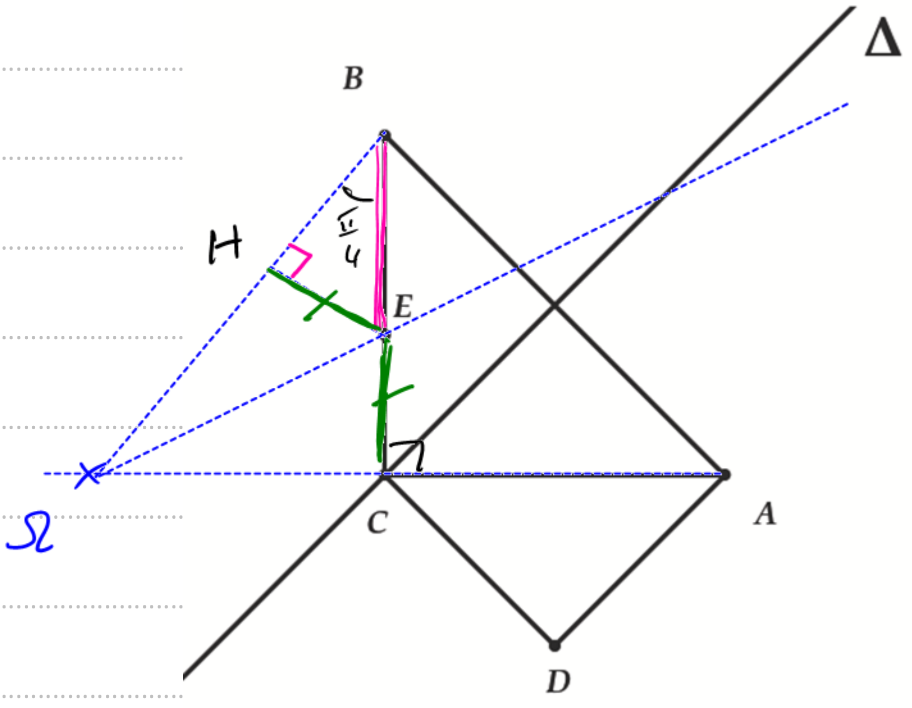
$\Omega \quad\quad C \quad\quad A$

donc C est le milieu de $[A\Omega]$.

$\Omega = S_C(A)$

c On note H le projeté orthogonal du point E sur (ΩB).

$BE = \sqrt{2}\, EC$.



Montrer que $EC = EH$

$S_{(BC)}(A) = \Omega$.

donc $S_{(BC)}(ACB) = \Omega CB$

or ACB rectangle et isocèle en C

alors ΩCB rectangle et isocèle en C

donc $\widehat{HBE} = \frac{\pi}{4}$

$\sin \widehat{HBC} = \frac{HE}{BE}$

donc $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{HE}{BE}$

d'où $HE = \frac{BE}{\sqrt{2}}$

or $EB = \sqrt{2}EC$. donc $EC = \frac{EB}{\sqrt{2}}$.

d'où $\boxed{HE = EC}$

puis déduire que (ΩE) est l'axe de g.

forme réduite

bissectrice intérieure

$\begin{cases} g(C) = B \\ \Omega \text{ le centre de } g \end{cases}$

$\Rightarrow$ l'axe g porte la bissectrice intérieure de l'angle $B\hat{\Omega}C$.

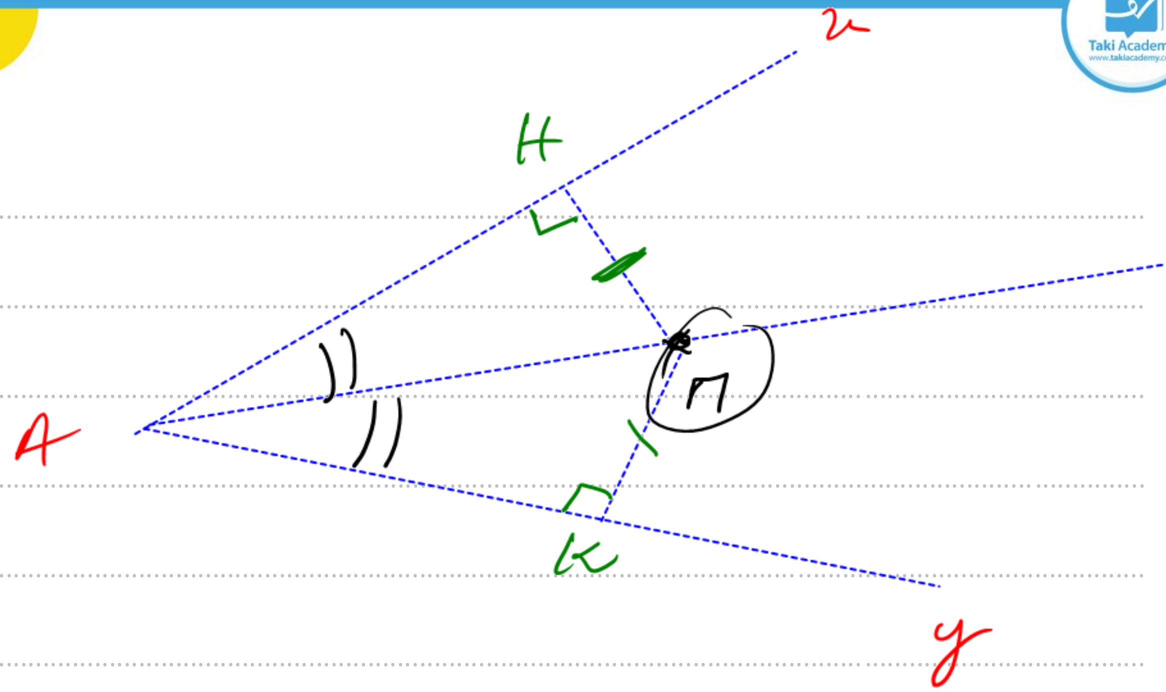
comme $EH = EC$

$\begin{cases} H \text{ est le proj}^{\perp} \text{ de } E \text{ sur } (\Omega B). \\ C \text{ est le proj}^{\perp} \text{ de } E \text{ sur } (\Omega C). \end{cases}$

$\Rightarrow d(E,(\Omega B)) = d(E,(\Omega C))$

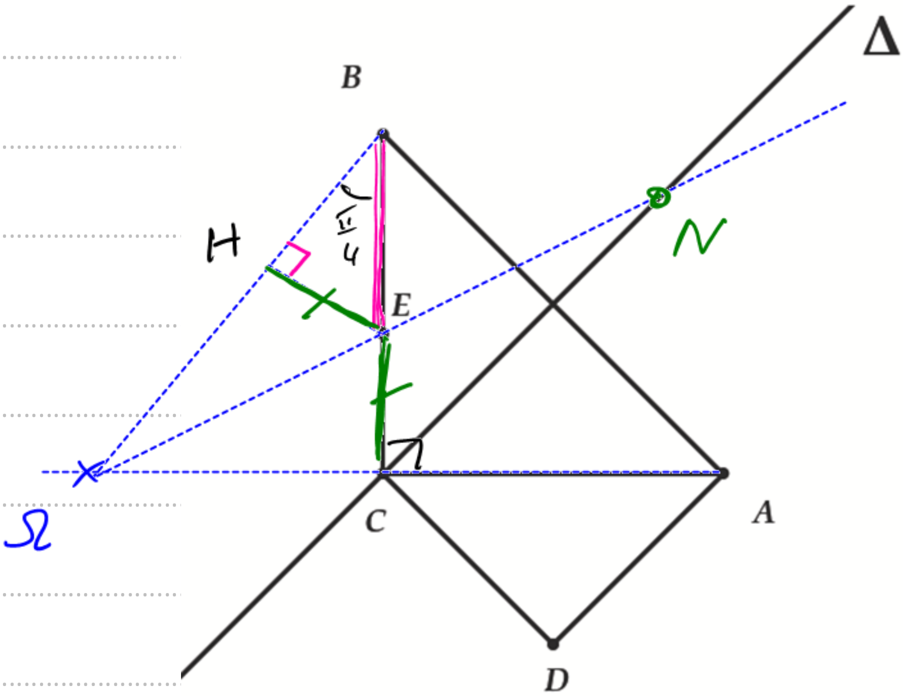
donc (ΩE) est la bissectrice intérieure de l'angle $B\hat{\Omega}C$

d'où (ΩE) est l'axe de g.



4 La droite (ΩE) coupe la droite Δ en Net on note $N' = f(N)$.

a Montrer que $g(N) = N'$ et déduire que $\overrightarrow{\Omega N'} = \sqrt{2}\overrightarrow{\Omega N}$.



$g(N) = f \circ S_\Delta (N)$ $\quad S_\Delta(N) = N$ car $N \in \Delta$

$= f(N)$

$= N'$

$\overrightarrow{\Omega N'} = \sqrt{2}\overrightarrow{\Omega N}$. ??

Thm :

Soit g une similitude indirecte de centre Ω de rapport k et d'axe Δ.

alors Δ est l'ensemble des points M tels que $g(M) = M'$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

On a :

$\begin{cases} N \in (AE) \text{ qui est l'axe de } g \\ g(N) = N' \end{cases}$

donc $\overrightarrow{\Omega N'} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{\Omega N}$.

On bien : (forme réduite).

$g = h_{(\Omega, \sqrt{2})} \circ S_{(\Omega E)}$

$= S_{(\Omega E)} \circ h_{(\Omega, \sqrt{2})}$

$N \in (\Omega E)$

$g(N) = h_{(\Omega, \sqrt{2})} \circ S_{(\Omega E)}(N)$

$= h_{(\Omega, \sqrt{2})}(N)$

or $g(N) = N' \Rightarrow h_{(\Omega, \sqrt{2})}(N) = N'$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\Omega N'} = \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{\Omega N}}$

b) Montrer que $NA = NN'$ puis construit le point N' .

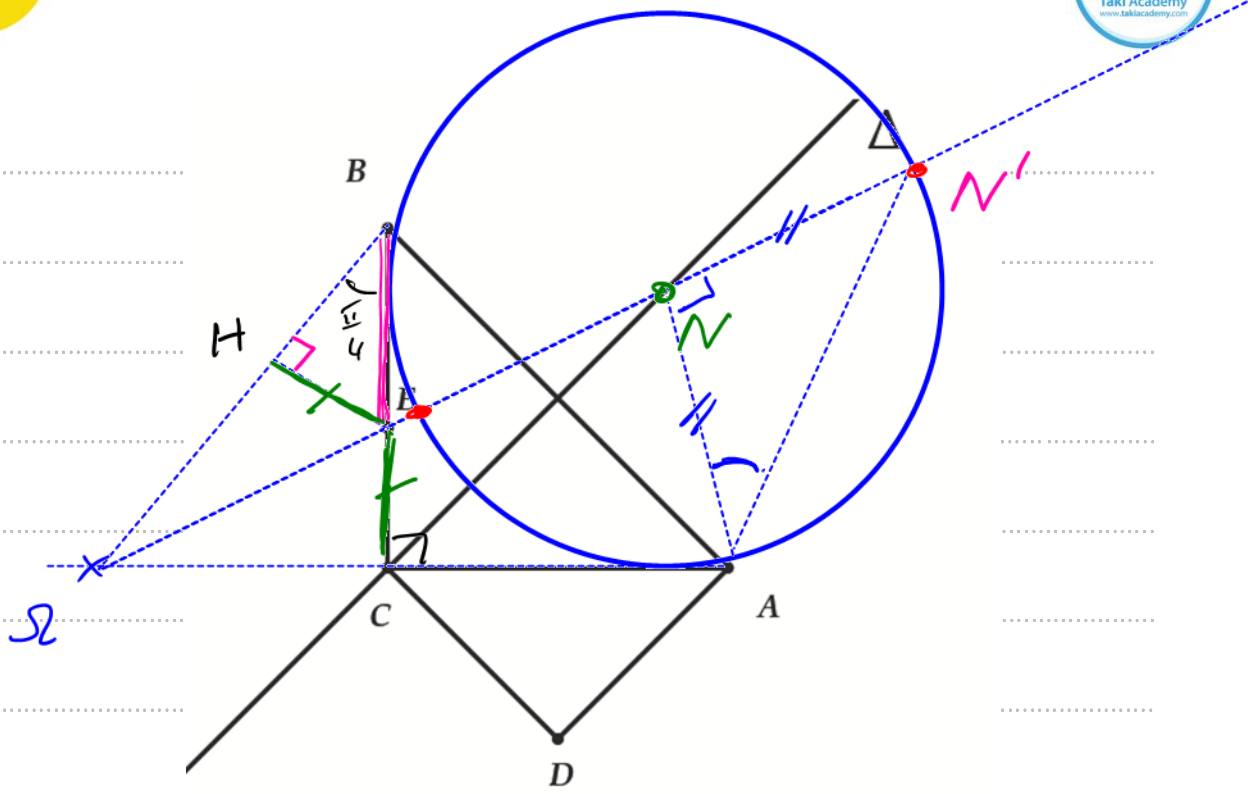
$NA = NN' \Rightarrow N' \in \mathcal{C}_{(N, NA)}$.

$\overrightarrow{\Omega N'} = \sqrt{2}\overrightarrow{\Omega N}$. $\Rightarrow N' \in (\Omega N)$

$\Downarrow$

$\Omega N' = \sqrt{2}\, \Omega N \Rightarrow \Omega N' > \Omega N$.

car $\sqrt{2} > 1$.



$$NA = NN'$$

$f(N) = N'$
$f(A) = A$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \boxed{AN' = \sqrt{2}\,.\,AN} \\ (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AN'}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$

$\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{NA} \cdot (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AN'})$

$= \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AN'}$

$= NA^2 - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AN'}$

$= NA^2 - AN \cdot AN' \cdot \cos(\widehat{NAN'})$

$= NA^2 - AN \cdot \cancel{\sqrt{2}}AN \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}$

$= 0$

alors $\vec{NA} \perp \vec{NN'}$

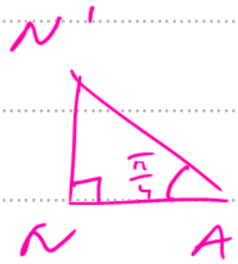
donc le triangle ANN' est rectangle en N

or $N\hat{A}N' = \frac{\pi}{4}$.

d'où ANN' est isocèle en N

et $\boxed{NA = NN'}$

D'après El Kadhi : (2ème méthode) :



$$NN'^2 = NA^2 + AN'^2 - 2AN.AN'\cos\frac{\pi}{4}.$$

$$= NA^2 + 2.AN^2 - 2AN.\cancel{\sqrt{2}}AN\frac{\cancel{1}}{\cancel{\sqrt{2}}}.$$

$$= NA^2 + \cancel{2AN^2} - \cancel{2AN^2}.$$

$$= NA^2$$

$$\Rightarrow \boxed{NN' = NA.}$$