Taki Academy
www.takiacademy.com

Classe : Bac Maths

Série : révision synthese2

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Exercice 1 — 25 min — 5 pts

A/ 1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$; $13x \equiv 0[\text{mod } 3] \Leftrightarrow x \equiv 0[\text{mod } 3]$.

2) a) Justifier que 111 est l'unique inverse de 2 modulo 221

qui appartient à $\{1;\ 2;...;\ 220\}$.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$; $2x \equiv 1[\text{mod } 221] \Leftrightarrow x \equiv 111[\text{mod } 221]$.

B/ 1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $17x - 13y = 3$.

a) Justifier que admet au moins une solution.

b) Vérifier que $(-9;-12)$ est une solution de (E).

c) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) Soit, pour tout entier n, $a = 13n - 9$ et $b = 17n - 12$.

a) On pose $d = a \wedge b$. Montrer que d divise 3.

b) Déterminer les entiers n pour lesquels $d = 3$.

c) En déduire $(13 \times 2023^{2022} - 9) \wedge (117 \times 2023^{2022} - 12) = 1$.

C/ On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $2x^{49} \equiv 1[\text{mod } 221]$.

1) Décomposer 221 en produit de facteurs premiers.

2) Soit x une solution de (F).

a) Prouver que $x \wedge 221 = 1$.

b) Montrer que $x^{12} \equiv 1[\text{mod } 13]$ et $x^{16} \equiv 1[\text{mod } 17]$.

c) En déduire que $x^{48} \equiv 1[\text{mod } 221]$.

d) Montrer alors que $2x \equiv 1[\text{mod } 221]$.

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F).

Exercice 2 — 25 min — 5 pts

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $13u-18v=1$.

a) Vérifier que 7 est un inverse de 13 modulo 18.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation(E).

c) Soit x un entier naturel non nul strictement inférieur à 19. On note u(x) le reste de x^{13} modulo 19 et v(x) le reste de x^7 modulo19.

Montrer que $v(u(x)) = x$. A

A -t-on $u(v(x)) = x$?

2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $2x^{18}-x^{13}-1\equiv 0\ [\bmod 38]$.

Soit x une solution de (F).

a) Montrer que $x\wedge 2=1$ et $x\wedge 19=1$. En déduire que $x^{18}\equiv 1\ [\bmod 38]$.

b) Montrer que

(x est solution de (F)) si, et seulement si x est solution de (S) : $\begin{cases} x\equiv 1 \pmod 2 \\ x^{13}\equiv 1 \pmod{19} \end{cases}$.

c) Montrer que, pour tout entier x on a : $x^{13}\equiv 1 \pmod{19} \Leftrightarrow x\equiv 1 \pmod{19}$.

d) Résoudre alors (F).

3) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (G) : $x^{2023}\equiv 5\ [\bmod 38]$.

4) Soit x une solution de (G) et d le plus petit entier naturel non nul tel que $x^{d}\equiv 1\ [\bmod 38]$.

Montrer que d divise 18. En déduire que d=9.

a) Déterminer alors le reste de x^3 modulo 38.

b) Montrer que x est solution de (G) alors $7x\equiv 5[\bmod 38]$

5) **a)** Montrer alors que : x est solution de (G) si, et seulement si $x\equiv 17[\bmod 38]$.

b) Soient n un entier tel que $2020\leq n\leq 2030$ et $S=\sum_{k=0}^{1} C_n^k 16^k$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquels 11 est un inverse de S modulo 38.

Exercice 3 | 30 min | 5 pts

Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous. Soit O le centre du carré ABCD tel que OB = 1.

1) **a)** Montrer que la droite (OS) est l'axe du cercle circonscrit au carré ABCD.

b) Justifier que $(O,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS})$ est orthonormé direct

2) Soit K le point défini par $k = h(D)$ avec $h = h_{\left(S,\frac{1}{3}\right)}$ on note I le milieu de [SO].

a) Déterminer les coordonnées de K dans $(O,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS})$.

b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c) Soit L le point d'intersection de [SA] et le plan (BCI). Montrer que h((AD)) = (KL).

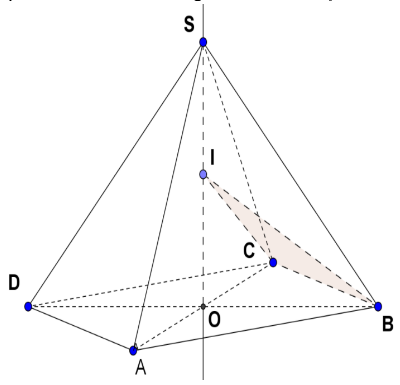
d) Déterminer les coordonnées de L.

e) Le plan Q perpendiculaire à (SO) et passant par K coupe [SC] en G et [SB] en H
Soit v_1 le volume de la pyramide SABCD et v_2 le volume de la pyramide SLHGK.
Calculer v_1 et en déduire v_2.

3) On note P=(SAD) et soit (Γ) la sphère de centre I et tangente à P.

a) Montrer qu'une équation de P est x + y - z + 1 = 0.

b) Déterminer le rayon de (Γ) puis vérifier que la sphère (Γ) est aussi tangente aux plans (SAB), (SBC) et (SCD).



4) **a)** Montrer qu'il existe deux homothéties de centre S qui transforment la sphère (Γ) en une sphère (Γ') passant par O.

b) Montrer que (Γ') est tangente à tous les