Exercice 1 — 40 min — 4 pts

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(E) : 2x^3 + 7y = 2022^n$$

1. Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors $2x^3 \equiv (-1)^n \pmod 7$. En déduire les restes possibles de $2x^3$ modulo 7.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Déterminer les restes possibles de $2a^3$ modulo 7.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Partie B :
Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7. On pose $A = p^4 - 1$.

1. Montrer que $A \equiv 0 \pmod 3$.
2. Montrer que $A \equiv 0 \pmod{16}$.
3. Montrer que 240 divise A.

Exercice 2 — 70 min — 6 pts

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x3^{-x}$ *et on désigne par* $\mathscr{C}_f$ *sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé* $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A

1. a) *Calculer* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. *Interpréter graphiquement.*
   b) *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. *Interpréter.*
2. a) *Montrer que pour tout réel* x, $f'(x) = 3^{-x} - f(x)\ln 3$.
   b) *Dresser le tableau de variation de* f *et préciser la valeur maximale de* f.
3. *Soit* T *la tangente à* (C_f) *au point d'abscisse* 0.
   Montrer que (C_f) *est au dessous de* T.
4. *Dans la figure ci-jointe (voir annexe 1), on donne les courbes* Γ_1 *et* Γ_2 *représentatives respectives des fonctions* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *et* $x \mapsto \ln x$.
   On note (x_A, y_A) *les coordonnées du point* A *de* $\mathscr{C}_f$ *d'abscisse* $\frac{1}{\ln 3}$.
   a) *Construire le point de coordonées* $(x_A, 0)$.
   b) *Tracer* T.
   c) *Vérifier que* $\ln y_A = -1 + \ln(x_A)$ *puis construire* A.
   d) *Tracer* (C_f).

B *Pour tout entier naturel* $n \geq 1$, *on pose :* $I_n = \int_1^n f(t)dt$.

① ⓐ *Vérifier que :* $I_n = \frac{1}{\ln 3}\left(\int_1^n 3^{-x}dx + f(1) - f(n)\right)$

ⓑ *Montrer que :* $\int_1^n 3^{-x}dx = \frac{1}{3\ln 3} - \frac{1}{3^n \ln 3}$.

ⓒ *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

② *Pour tout* $n \geq 1$, *on note* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k3^{-k}$.

ⓐ *Montrer que pour tout entier* $k \geq 1$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

ⓑ *Déduire que pour tout entier* $n \geq 2$,

$$S_n - \frac{1}{3} \leq I_n \leq S_n - \frac{n}{3^n}$$

ⓒ *Montrer que la suite* (S_n) *est convergente et déterminer un encadrement de sa limite* ℓ.

ⓓ *Montrer que pour tout* $n \geq 1$, $S_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(S_n + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\right)$.

ⓔ *Déduire la valeur de* ℓ.

Exercice 3 — 40 min — 4 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Soit f la similitude indirecte qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -2i\bar{z} + 1 + 2i$

1. a. Préciser le rapport de f.

   b. Montrer que la similitude indirecte f est de centre I d'affixe 1 et d'axe la droite Δ d'équation $y = 1 - x$.

2. On définit la suite des points (M_n) par $\begin{cases} M_0 \text{ est le point d'affixe } 2. \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N};\ M_{n+1} = f(M_n). \end{cases}$

   On désigne par z_n l'affixe du point M_n.

   a. Caractériser $f \circ f$ puis donner son écriture complexe.

   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $z_{2n} = 1 + 4^n$.

   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $z_{2n+1} = 1 - 2 \times 4^n\, i$.

   d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; les droites (IM_{2n}) et (IM_{2n+1}) sont perpendiculaires.

Exercice 4 — 70 min — 6 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.
On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1-e^{-x}}$.

1) a) Montrer que f possède une fonction réciproque g définie sur $[0,1[$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[\,;\ g(x) = -\ln\left(1-x^2\right)$.

c) Montrer que $g(x) = x$ admet sur $[0,1[$ une unique solution α et que : $\alpha \in [0{,}7\,;\,0{,}8]$.

d) On donne en annexe la représentation graphique C de la fonction f dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, la première bissectrice Δ et le point $A(\alpha,\alpha)$.
On désigne par C' la courbe g. Tracer C' dans le même repère.

2) Soit φ la fonction définie sur $[0,1[$ par $\varphi(x) = F\big(g(x)\big)$ avec F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,1[$ et que $\varphi'(x) = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $[0,1[$,
$$\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x}.$$

c) En déduire que $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right);\ x \in [0,1[$.

d) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la région du plan située entre les courbes C et C' et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.
Montrer que $\mathcal{A} = 2\left(\varphi(\alpha) - \dfrac{\alpha^2}{2}\right)$.

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k3^k}$.

Soit $n \geqslant 1$. On pose pour tout $t \in [0,1[$, $S_n(t) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{2k-1}$.

a) Montrer que $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)dt = u_n$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0,1[$, $S_n(t) = \left(1 - t^{2n}\right) g'(t)$.

c) Montrer que pour tout $0 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g'(t) \leqslant S_n(t) \leqslant g'(t)$.

d) En déduire que $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leqslant u_n \leqslant g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

4) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.