Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions logarithmes

Exercice 1 — 15 min — 4 pt

Calculer les limites suivants :

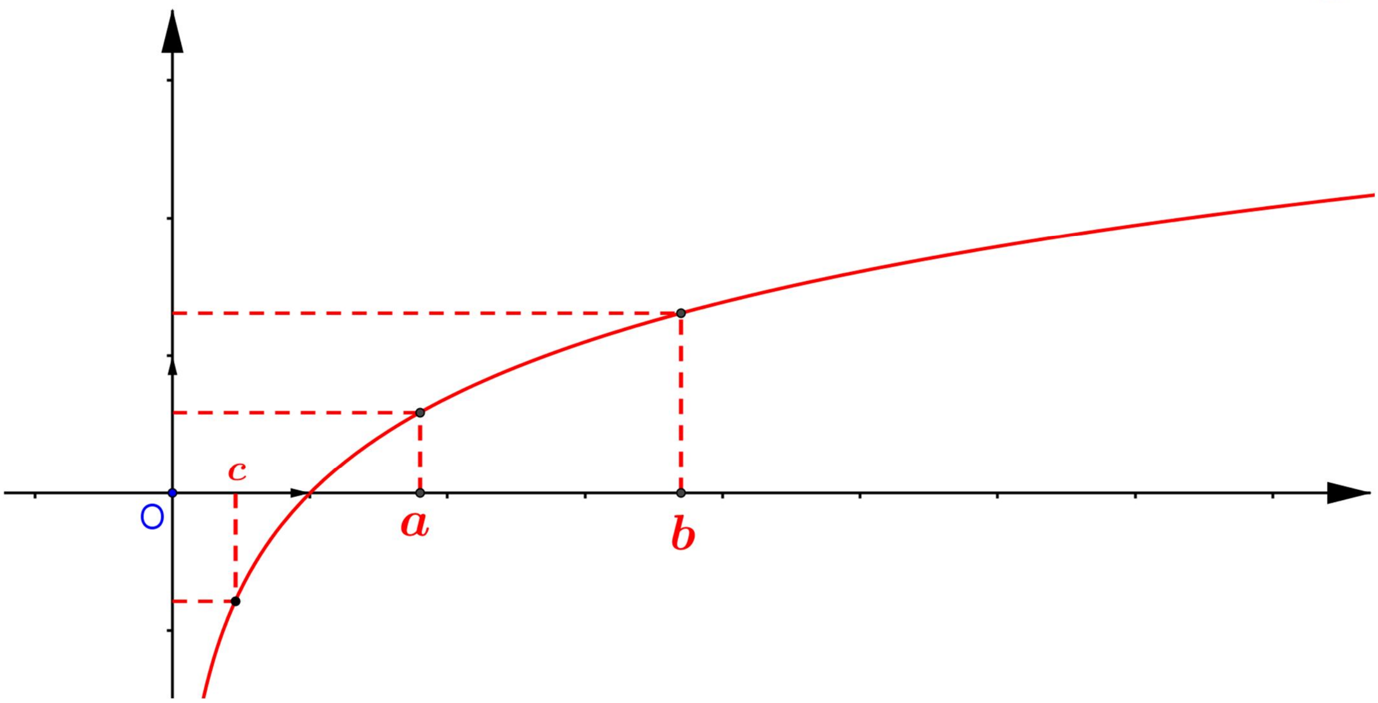
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\ln x \; ; \; \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \; ; \; \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} \; ; \; \lim_{x\to0^+} \frac{3\ln x-1}{2\ln x+2} \; ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \; ; \; \lim_{x\to2} \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2} \; ; \; \lim_{x\to0^+} x\sqrt{3+2(\ln x)^2} \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt[3]{x}} \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2-x\right)}{x} ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\ln x)}{x} \; ; \; \lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos x)}{x} \; ; \; \lim_{x\to0^+} \frac{\ln\left(1-\sqrt{x}\right)}{x} .$$

Exercice 2 — 10 min — 2 pt

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.



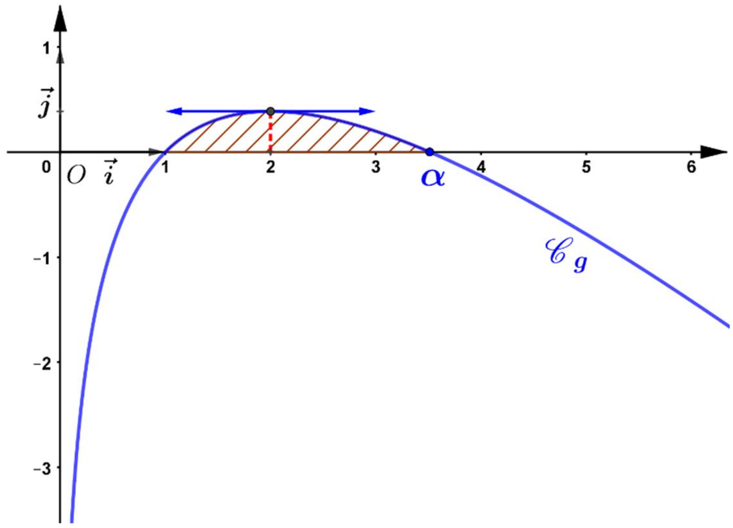
Placer, sur l'axe des abscisses les nombres ae , $\frac{b}{e}$, ab , a^2 , $\frac{a}{b}$, $\sqrt{a}$ et $\frac{a}{c}$.

Exercice 3 — 40 min — 6 pt

I– La figure ci-dessous, montre la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé, de la fonction

g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$g(x)=1-x+2\ln(x)$.

◗ La courbe $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses 1 et α.



1°) a) Montrer que $3{,}51<\alpha<3{,}52$.

b) Déterminer le maximum de $g(x)$.

2°) a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^\alpha \ln x\,dx$ en fonction de α.

b) En déduire l'aire $S(\alpha)$ du domaine hachuré limité par $\mathcal{C}_g$ et l'axe des abscisses

II– Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Déterminer le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

b) Montrer que les axes du repère sont asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

2°) a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-4\ln x}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$.

c) Tracer $\mathcal{C}_f$.

3°) a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}.

c) Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x)>\alpha$.

III– Soit (I_n). la suite définie, pour $n\geq 4$, par $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

1°) Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $[4;+\infty[$, $0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{x}$.

2°) En déduire que, pour tout entier naturel $n\geq 4$, $0\leq I_n\leq\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

3°) Déterminer la limite de la suite (I_n).

Taki Academy
www.takiacademy.com

تهنى على قرايتك

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba