Mathématiques

Thème : Primitives

Exercices de synthèse

Exercice N°1

Donner les primitives sur l'intervalle I que l'on précisera des fonctions :

1. $f : x \mapsto (x+1)^3$
2. $f : x \mapsto (1-x)^3$
3. $f : x \mapsto x(x^2+1)^6$
4. $f : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$
5. $f : x \mapsto \sin(x)\cos^2(x)$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1+2x)^2}$
7. $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(1+x^4)^4}$
8. $f : x \mapsto \dfrac{1+2x}{\sqrt{1+2x+2x^2}}$
9. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{(4+\cos x)^3}$
10. $f : x \mapsto x(x+1)^n$ où n est un entier naturel.

$$u'u^n \xrightarrow{P} \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

1. $f : x \mapsto (x+1)^3$

f est continue sur $\mathbb{R}$

donc f admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$

Soit $u(x) = x + 1 \rightarrow u'(x) = 1$

$$f(x) = \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(x+1)^3}_{u^3}$$

donc $\boxed{F(x) = \frac{(x+1)^4}{4} + k \ ; k \in \mathbb{R}}$

$$u'u^n \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

2. $f : x \mapsto (1-x)^3$

f est continue sur $\mathbb{R}$

donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Soit $u(x) = 1 - x \rightarrow u'(x) = -1$

$$f(x) = -\underbrace{(-1)}_{u'}\underbrace{(1-x)^3}_{u^3}$$

donc $\boxed{F(x) = \frac{(1-x)^4}{4} + k \ ; \ k \in \mathbb{R}}$

$$u'u^n \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

3. $f : x \mapsto x(x^2+1)^6$

f est continue sur $\mathbb{R}$

donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$

$$u(x) = x^2+1 \longrightarrow u'(x) = 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{(x^2+1)^6}_{u^6}$$

donc $\boxed{F(x) = \frac{(x^2+1)^7}{7} + k \; ; k \in \mathbb{R}}$

4ème année

$u'u \longrightarrow \frac{u^2}{2}$

4. f : x ↦ cos(x) sin(x)

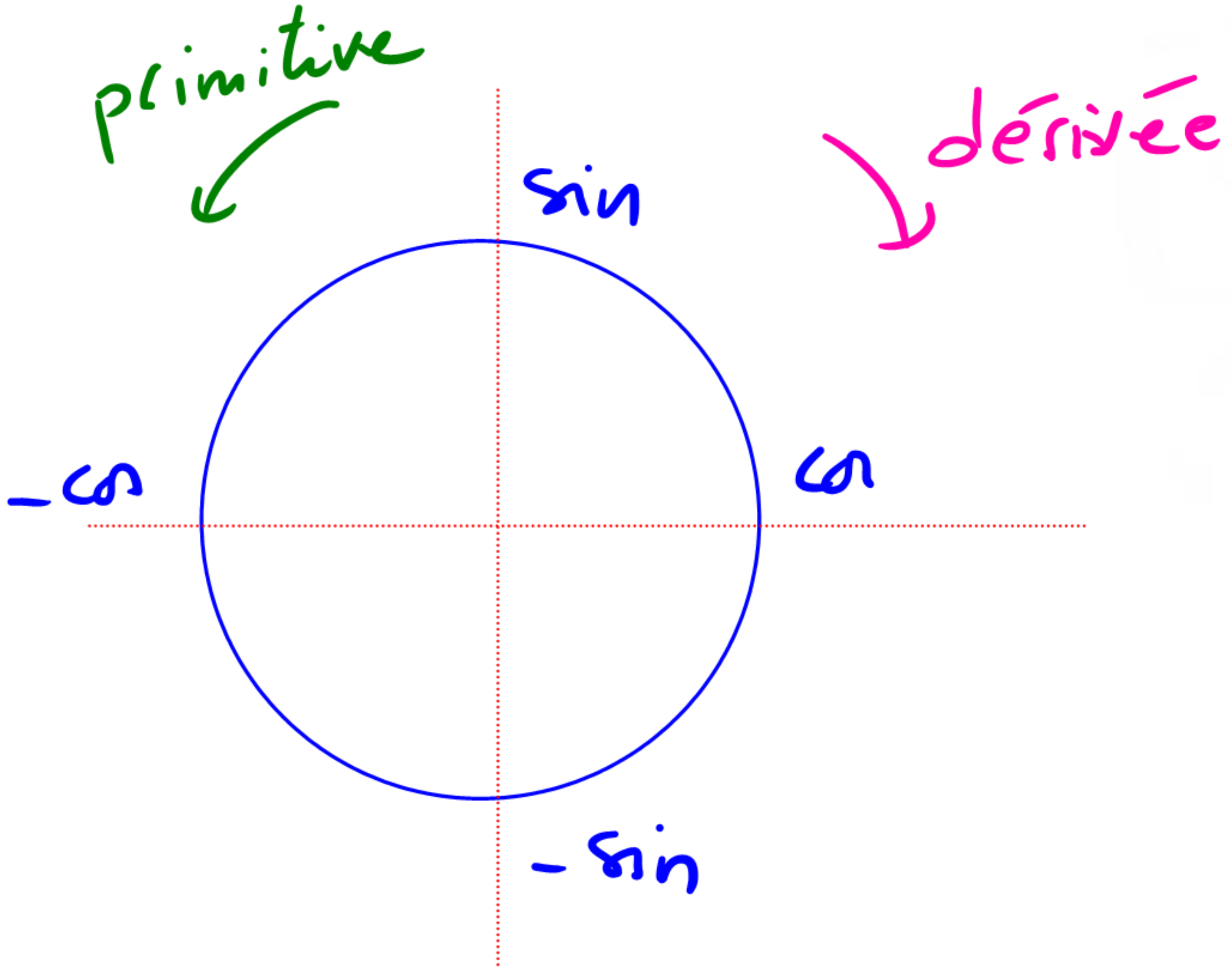
f est continue sur $\mathbb{R}$

donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Soit $u(x) = \sin x \longrightarrow u'(x) = \cos x$

$$f(x) = \underbrace{\cos x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin x}_{u}$$

donc $\boxed{F(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + k \ ; \ k \in \mathbb{R}}$



$u'u \longrightarrow \frac{u^2}{2}$

Autrement:

$u(x) = \cos x \longrightarrow u'(x) = -\sin x$

$f(x) = -\underbrace{(-\sin x)}_{u'} . \underbrace{\cos x}_{u}$

donc $F(x) = -\frac{\cos^2 x}{2} + k$

$= -\frac{1 - \sin^2 x}{2} + k$

$F(x) = -\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} + k$

$= \boxed{-\frac{\sin^2 x}{2} + k' \; ; \; k' \in \mathbb{R}}$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$u'u^2 \to \frac{u^3}{3}$

5. $f : x \mapsto \sin(x)\cos^2(x)$

f est continue sur $\mathbb{R}$

donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$u(x) = \cos x \to u'(x) = -\sin x$

$f(x) = -\underbrace{(-\sin x)}_{u'} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{u^2}$

donc $\boxed{F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + k \ ; \ k \in \mathbb{R}}$

$\frac{u'}{u^n} \rightarrow \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$

6. $f : x \mapsto \frac{1}{(1+2x)^2}$

f est continue sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

donc f admet des primitive sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

Soit $u(x) = 1 + 2x \rightarrow u'(x) = 2$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2)u'}{\underbrace{(1+2x)^2}_{u^2}}$$

donc $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{1+2x}$

$$= \boxed{\frac{-1}{2(1+2x)} + k \quad (k \in \mathbb{R})}$$

$$\frac{u'}{u^n} \longrightarrow \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$$

7. $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(1+x^4)^4}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$u(x) = 1 + x^4 \rightarrow u'(x) = 4.x^3$

$$f(x) = \frac{1}{4}\,\frac{\overbrace{4x^3}^{u'}}{\underbrace{(1+x^4)^4}_{u^4}}$$

donc $F(x) = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{-1}{3(1+x^4)^3} + k$

$$= \boxed{\frac{-1}{12(1+x^4)^3} + k \quad (k \in \mathbb{R})}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \longrightarrow 2\sqrt{u}$$

8. $f : x \mapsto \dfrac{1+2x}{\sqrt{1+2x+2x^2}}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

donc elle admet des primitive sur $\mathbb{R}$

$u(x) = 1 + 2x + 2x^2$

$\rightarrow u'(x) = 2 + 4x$

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{2(1+2x)}^{u'}}{\underbrace{\sqrt{1+2x+2x^2}}_{\sqrt{u}}}$$

donc $F(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{1+2x+2x^2} + k$

$$= \boxed{\sqrt{1+2x+2x^2} + k \;;\; k \in \mathbb{R}}$$

$$\frac{u'}{u^n} \longrightarrow \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$$

9. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{(4+\cos x)^3}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$$u(x) = 4 + \cos x \longrightarrow u'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = -\frac{\overbrace{-\sin x}^{u'}}{\underbrace{(4+\cos x)^3}_{u^3}}$$

donc $F(x) = -\dfrac{-1}{2(4+\cos x)^2} + k$

$$= \boxed{\frac{1}{2(4+\cos x)^2} + k \ ; k \in \mathbb{R}}$$

$$u'u^n \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

10. f : x ↦ x(x + 1)ⁿ où n est un entier naturel.

f est continue sur $\mathbb{R}$

donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x + 1 - 1)(x+1)^n$$

$$= (x+1)^{n+1} - (x+1)^n$$

$$= \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(x+1)^{n+1}}_{u^{n+1}} - \underbrace{1}_{u'}\underbrace{(x+1)^n}_{u^n}$$

donc $\boxed{F(x) = \frac{(x+1)^{n+2}}{n+2} - \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} + k \quad (k \in \mathbb{R})}$