Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Primitive

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

Exercice 1 — 40 min — 6 pt

Q.C.M

Une seule réponse est exacte. Laquelle ?

1 La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ est une primitive sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction :

- (a) $x \mapsto \dfrac{x^2}{\cos x}$
- (b) $x \mapsto \dfrac{\sin x - x.\cos x}{\sin^2(x)}$
- (c) $x \mapsto \dfrac{-2x^2}{\cos(x)}$

2 La primitive sur $[0;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ qui s'annule en 0 est :

- (a) $x \mapsto \dfrac{1}{2(2x+1)}$.
- (b) $x \mapsto -\dfrac{1}{4x+2}+\dfrac{1}{2}$
- (c) $x \mapsto -\dfrac{1}{2(2x+1)^3}+\dfrac{1}{2}$

3 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F la primitive de f qui vérifie $F(0)=2$.

I) La primitive G de la fonction $g(x)=f(2x)$ qui vérifie $G(0)=2$ est telle que $G(x)=$

- (a) $F(2x)+1$
- (b) $\dfrac{1}{2}F(2x)+1$
- (c) $\dfrac{1}{2}F(2x)$

II) La primitive H de la fonction $h(x)=f(x+2)$ qui vérifie $H(0)=2$ est la fonction :

- (a) $x \mapsto F(x+2)$
- (b) $x \mapsto F\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)$
- (c) $x \mapsto F(x+2)+2-F(2)$

4 Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\sin\left(x^2+1\right)$ est :

- (a) $x \mapsto -2\cos\left(x^2+1\right)$
- (b) $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)$
- (c) $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sin\left(x^2+1\right)$

5 La fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$ est la primitive sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0 de la fonction :

- (a) $x \mapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
- (b) $x \mapsto \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}$
- (c) $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Exercice 2 — 40 min — 6 pt

Déterminer les primitives de f sur l'intervalle I.

- (a) $f(x)=x^4-2x^3+3x^2+7$ et $I=\mathbb{R}$
- (b) $f(x)=2x+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ et $I=]0;+\infty[$
- (c) $f(x)=\dfrac{3x^4+2x^3-4x^2+5}{x^2}$ et $I=]0;+\infty[$
- (d) $f(x)=\dfrac{1}{(3x+6)^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $I=]-2;+\infty[$
- (e) $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ et $I=]1;+\infty[$
- (f) $f(x)=4x\left(x^2+4\right)^2+x^3\left(x^4+3\right)^3$ et $I=\mathbb{R}$
- (g) $f(x)=\left(x^2-1\right)^2+\dfrac{3}{(2-x)^2}$ et $I=]-\infty;2[$
- (h) $f(x)=2\sin(x)-5\cos(x+1)$ et $I=\mathbb{R}$
- (i) $f(x)=6\sin(3x+\pi)+3\cos(2x+\pi)$ et $I=\mathbb{R}$
- (j) $f(x)=\cos(x).(\sin x+2)$ et $I=\mathbb{R}$
- (k) $f(x)=\sin(x).\sqrt{\cos x+1}$ et $I=\mathbb{R}$
- (l) $f(x)=\sin(x)\times\cos^3(x)$ et $I=\mathbb{R}$
- (m) $f(x)=2\sin^2(x)-4\cos^2(x)$ et $I=\mathbb{R}$
- (n) $f(x)=\cos^2(x)\times\sin^3(x)$ et $I=\mathbb{R}$
- (o) $f(x)=\sin(2x)\times\cos(2x)$ et $I=\mathbb{R}$
- (p) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin x+\cos x+2}}$
- (q) $f(x)=\cos^2(x)\times\sin^3(x)$

Exercice 3 — 30 min — 5 pt

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x+5}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réels $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$.
2. Déterminer alors la primitive F de f sur $]1;+\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 4 — 40 min — 6 pt

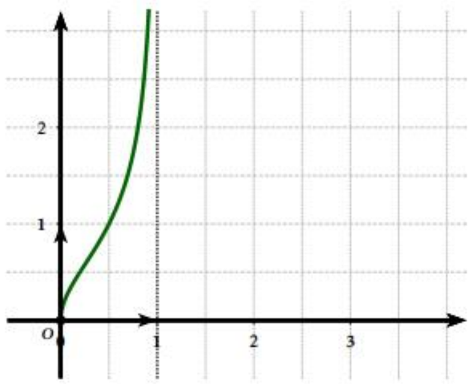
Répondre par Vrai ou Faux.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive quelconque de f sur I.

1. Si f est positive sur I alors F est croissante sur I.
2. Si f est décroissante sur I alors F est décroissante sur I.
3. Si pour tout $x\in I$, $f(x)\geq 1$, alors pour tout x de I on a : $F(x)\geq x$.
4. Si pour tout réel x de I, $F(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ alors pour tout x de I, $f(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$.
5. Si pour tout réel x de I, $f(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$ alors pour tout x de I, $F(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$

Exercice 5 — 25 min — 4 pt

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$



1.
   a. Par une lecture graphique, montrer que f réalise une bijection de $[0;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b. Déterminer $f^{-1}(1)$.
   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère.
   d. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.
2. Soit F la primitive de f sur $[0;1[$ qui s'annule en 0. On considère la fonction g définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=F\left(\sin^2 x\right)$.
   a. Montrer que g est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = x - \frac{1}{2}\sin(2x)$.

c) Calculer alors $F\left(\frac{1}{2}\right)$.