Taki Academy
www.takiacademy.com

2023-2024

Classe : Bac Maths

Série 28 : Intégrale(2)

Nom du Prof : Lahbib Ghaleb

Exercice 1 | 30 min | 5 pts

1. Calculer $\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$.

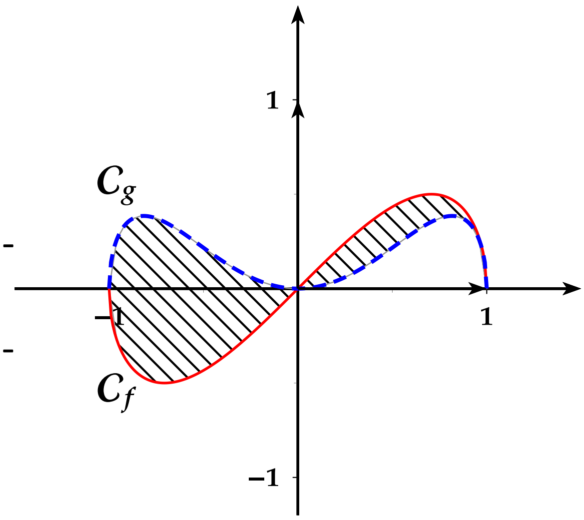
2. Soit F la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \int_0^{\sin x} t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$.

   a. Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
   $F'(x) = \frac{1}{4}\sin^2(2x)$.

   b. Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x)$.

   c. En déduire que $\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{8}$.

3. Soient f et g les fonctions définies sur IR par :
$$f(x) = x\sqrt{1-x^2} \text{ et } g(x) = x^2\sqrt{1-x^2}.$$
On a représenté ci-contre les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé .
Calculer ,en unité d'aire, l'aire de la partie hachurée.



4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n).

   b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

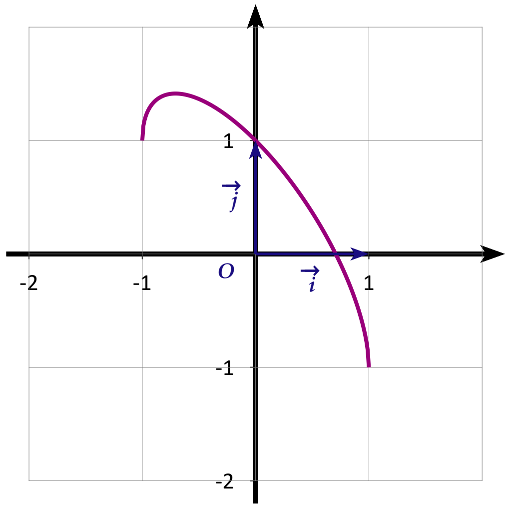
   c. Montrer, à l'aide d'une intégration par partie que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $(n+4)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

   d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant \frac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \frac{n+4}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.

   e. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = \frac{\pi\cdot(2n)!}{2^{2n+2}\cdot n!\cdot(n+1)!}$

Exercice 2 | 30 min | 5 pts

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]$ par : $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$.
Ci-contre est représentée la courbe $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.
Soit $\mathscr{A}$ la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $y = -x$, $x = -1$ et $x = 1$.



1) a) Exprimer $\mathscr{A}$ à l'aide d'une intégrale.

b) Soit Γ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $x \in [-1,1]$ et $y = \sqrt{1-x^2}$.
Montrer que Γ est un demi-cercle que l'on placera sur la figure .

c) En déduire que $\mathscr{A} = \frac{\pi}{2}$.

2) Soit F la primitive de f qui s'annule en -1.
Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = F(\sin x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $g'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$.

c) Retrouver alors $\mathscr{A}$.

3) Pour tout entier naturel non nul n , on considère la suite $u_n = \int_{-1}^{1} x^n \sqrt{1-x^2}dx$.

a) Calculer u_2 par une intégration par parties .

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{2n+1} = 0$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{2n} = 2\int_{0}^{1} x^{2n} \sqrt{1-x^2}dx$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant u_{2n} \leqslant \frac{2}{2n+1}$.

e) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 | 30 min | 5 pts

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1}(x)}$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{2n+1}(x)} dx$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = J_n$.
   b) En déduire la monotonie de la suite (I_n).
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)J_n$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$.
   c) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant \frac{2^{n-1}}{n\sqrt{2}}$.
   d) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 4 | 30 min | 5 pts

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \sin x}{1+x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $g_n(x) = x^n \sin x$ pour tout $x \geqslant 0$.
Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$ et $u_n = \int_0^1 x^n \sin x dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et t un réel quelconque.
   a) Montrer que pour tout réel t , on a :
   $$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}.$$
   b) Montrer alors que pour tout réel t, on a :
   $$f(t) = g_1(t) - g_3(t) + g_5(t) + \ldots + (-1)^n g_{2n+1}(t) + \frac{(-1)^{n+1}}{1+t^2} g_{2n+3}(t).$$
   c) En déduire que $I = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} dt$.
3. On pose $S_n = u_1 - u_3 + u_5 + \ldots + (-1)^n u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|I - S_n| \leqslant u_{2n+3}$.
   b) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = I$.