Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Nombres complexes

Exercice 1 — 20 min — 4 pts

1) On considère dans C l'équation $(E): z^2 - 2iz - ie^{2i\theta} = 0$; $\theta \in [0, \pi]$.

   a) Déterminer la valeur de θ pour que zéro soit une solution de (E).

   b) Résoudre dans C l'équation (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   On désigne par I, A, B et C les points d'affixes respectives i, $2i$, $i + e^{i(\theta + \pi/4)}$ et $i - e^{i(\theta+\pi/4)}$.

   a) Montrer que $[BC]$ est un diamètre du cercle C de centre I et de rayon 1.

   b) Montrer que lorsque $\theta \neq \frac{\pi}{4}$, $OBAC$ est un rectangle.

   c) Déterminer θ pour que $OBAC$ est un carré.

Exercice 2 — 25 min — 5 pts

1)

   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - z + 1 = 0$.

   b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.

   c) En déduire les solutions de l'équation $(E'): z^4 - z^2 + 1 = 0$.

2) Mettre le polynôme $P(z) = z^4 - z^2 + 1$ sous forme d'un produit de deux polynôme du second degré à coefficient réels.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équation (E') telles que $\mathrm{Re}(z_A) > 0$, $\mathrm{Im}(z_A) > 0$; $\mathrm{Re}(z_B) > 0$ et $\mathrm{Im}(z_D) > 0$.

   a) Placer les points A, B, C et D.

   b) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 3 — 25 min — 5 pts

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2-(3+i)z+2(1+i)=0$.

2) Soit l'équation $(E_\theta): z^2-(3+i)e^{i\theta}z+2(1+i)e^{2i\theta}=0$ où $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

   a) Montrer que z est une solution de (E_θ) si et seulement si $(ze^{-i\theta})$ est une solution de (E).

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

3) On considère les points A,B et C d'affixes respectives $a=2e^{i\theta}$; $b=(1+i)e^{i\theta}$ et $c=ie^{i\theta}$.

   a) Donner la forme exponentielle de b et c.

   b) Montrer que : $(OA)\perp(OC)$ et $(OB)\perp(AB)$.

   c) Construire les points A,B et C pour $\theta=\frac{\pi}{3}$.

4)

   a) Montrer que $OABC$ est un trapèze pour tout $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

   b) Vérifier que l'aire de ce trapèze est constante pour tout $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4 — 25 min — 5 pts

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-2(1+i)z-1+2i=0$

2°) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_\theta): z^2-2\left(i+e^{i\theta}\right)z-1+2ie^{i\theta}=0$ avec $\theta\in IR$.

Vérifier que i est une solution de l'équation (E_θ) et en déduire l'autre solution.

3°) Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose $P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(1+4i)z+1-2i$.

a) Vérifier que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle que l'on précisera.

b) Déterminer deux nombre complexes b et c tels que $P(z)=(z-1)(z^2+bz+c)$.

c) En déduire les solutions de l'équation : $P(z)=0$.

4°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

On donne le point M d'affixe $i+2e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]-\pi,\pi\right]$.

a) Vérifier que pour $\theta=0$, ABM est un triangle rectangle isocèle en A.

b) Montrer que lorsque θ varie, le point M varie sur un cercle C qu'on précisera le centre et le rayon.

c) Montrer que $OM^2=5+4\sin\theta$.

d) En déduire la valeur de θ, pour laquelle la distance OM est maximale.

Taki Academy
www.takiacademy.com

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000