Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions Réciproques

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

Exercice 1 — 25 min — 5 pt

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\frac{1}{1+\sin x}$.

1°) a) Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Etablir le tableau de variation de f.

2°) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J qu'on précisera.

3°) Calculer $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{2}{3}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{2}{3}\right)$.

4°) a) Montrer que f^{-1} n'est pas dérivable à droite en $\frac{1}{2}$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},1\right]$.

c) Montrer que $\sin\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{x}-1$ et que $\cos\left(f^{-1}(x)\right)=\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}$.

d) En déduire que pour tout $x\in\left]\frac{1}{2},1\right]$: $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$.

Exercice 2 — 40 min — 7 pt

1°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)+2 & si \quad x<0 \\ f(x)=\frac{2-x^2}{1+x^2} & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $x<0$ on a $|f(x)-2|\leq 2x^2$.

b) Montrer que f est continue en 0.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2°) Montrer que l'équation $x^3+x^2+x-2=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha\in]0,8;1[$

3°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$.

On désigne par Γ la courbe de la fonction g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

b) En déduire que g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-1,2]$.

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in]-1,2]$.

4°) a) Prouver que $g(\alpha)=\alpha$.

b) Tracer la courbe Γ puis la courbe Γ' de g^{-1} dans le même repère.

5°) Sur la figure ci-dessous est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction *h* définie et continue sur $]-\infty,-2[\cup[-1,+\infty[$.

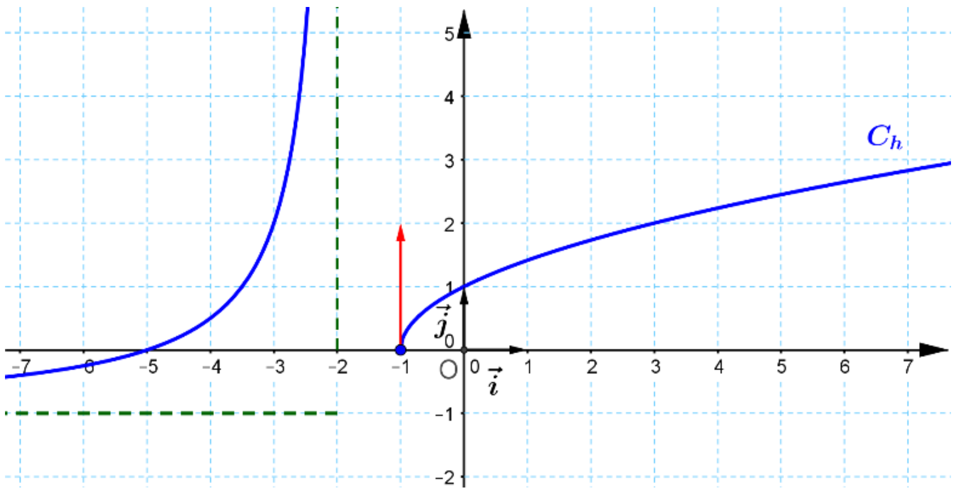
On sait que la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote à C_h au voisinage de $-\infty$, la droite $x=-2$ est aussi une asymptote à C_h et que C_h admet une branche parabolique de direction celle de (*OI*) au voisinage de $+\infty$.

Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x)=g^{-1}oh(x)$.

a) Déterminer l'ensemble D de définition de la fonction φ

b) Montrer que φ est continue sur D.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$.



Exercice 3 — 30 min — 4 pt

Soit *f* la fonction définie sur $[-1,+\infty[=I$ par : $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$

1°) Montrer que *f* réalise une bijection de *I* sur un intervalle *J* que l'on précisera.

2°) Montrer que pour tout *x* de J on a $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}-1$.

3°) Soit *g* la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=f^{-1}(\cos x)$.

a) Sur quel ensemble *K*, *g* est dérivable et calculer *g'*(*x*).

b) Dresser alors le tableau de variation de *g et tracer la courbe de g* dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.


Q
Magazines