Taki Academy

MATHS

Classe : Bac Maths

Sujet : Prototype N°5

Durée : 4 h

Nom du prof : Profs Takiacademy

Exercice 1 — 36 min — 3 pts

n étant un entier naturel non nul, on place dans une urne n boules rouges, $8+n$ boules noires et 20 boules blanches. Un joueur tire une boule de l'urne ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

- S'il tire une boule rouge, il perd.
- S'il tire une boule noire, il gagne.
- S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage, toujours avec équiprobabilité. S'il tire alors une noire, il gagne sinon il perd.

1 a) Démontrer que la probabilité que ce joueur gagne est $f(n)$ où f est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{(x+8)(x+24)}{2(x+14)^2}$.

b) Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit maximale. Calculer alors cette probabilité.

c) Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit minimale. Calculer alors cette probabilité.

2 Dans cette question, on suppose que $n = 16$.

Pour jouer, le joueur a misé 8 dinars. p et q étant des entiers naturels tels que $p > q > 8$.

- S'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet p dinars.
- S'il gagne à l'issue du deuxième tirage, on lui remet q dinars.
- S'il perd il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de X en fonction de p et q ainsi que son espérance mathématique.

b) On suppose que p et q sont tels que le jeu est équitable.

- Montrer alors que $3p + q = 60$.
- Déterminer les couples (p, q) possibles pour que le jeu soit équitable.
- Pour $p = 16$ et $q = 12$, calculer l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire X.

Exercice 2 — 60 min — 5 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et $\left(\sqrt{2}-1\right)(1-i)$.

Soit g l'application du plan dans le plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+i)z + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1 Montrer que g est une similitude directe et déterminer ses éléments caractéristiques.

2 Déterminer l'écriture complexe associé à l'homothétie h de centre B et de rapport $-\sqrt{2}$.

3 a) Montrer que l'écriture complexe de l'application $S = g \circ h$ est $z' = \dfrac{1}{2}(1+i)z$.

b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de S.

4 On pose $M_0 = A$; $M_1 = S(M_0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = S(M_n)$. Soit z_n l'affixe de M_n.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{aff}\left(\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} e^{i(n+3)\frac{\pi}{4}}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose L_n la longueur du polygone $M_0M_1M_2\dots M_n$.

Montrer que $L_n = (\sqrt{2}+1)\left(1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$.

Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S^n = \underbrace{S \circ S \circ \dots S}_{n \text{ fois}}$.

a) Montrer que S^n est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles S^n est une homothétie de rapport négatif.

c) Caractériser l'application $\varphi = S_{(OB)} \circ S^{12}$.

Exercice 3 — 60 min — 5 pts

On considère dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation $(E) : x^2 - 8y^2 = 1$ dont les solutions sont les couples (x, y) d'entiers naturels.

A- Dans cette partie on se propose de montrer que cette équation admet une infinité de couples solutions.

1) Soit (x_n) et (y_n) les suites des entiers définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} x_0 = 1, \quad y_0 = 0 \\ x_{n+1} = 3\,x_n + 8\,y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3\,y_n \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, (x_n, y_n) est solution de (E).

b) Donner trois couples solutions de (E).

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n > 0$ et $y_n \geqslant 0$.

b) En déduire que (x_n) est strictement croissante.

c) Montrer alors que (E) admet une infinité de couples solutions.

B- Dans cette partie on montrera qu'il n'existe aucun couple (n, p) solution avec p est **premier**.

On suppose que (n, p) est solution de (E) avec p un nombre premier.

1) a) Montrer que n est impair .

b) Montrer que l'un des entiers $n-1$ ou $n+1$ n'est pas un multiple de 4.

2) On suppose que $n - 1 = 4k + 2$ où k est un entier naturel.

a) Montrer que $(2k+1)(k+1) = p^2$

b) Vérifier que $2k+1$ et $k+1$ sont premiers entre eux.

c) En déduire que $p^2 = 2k+1$ ou $p^2 = k+1$.

d) Conclure .

3) On suppose que $n+1 = 4k+2$ où k est un entier naturel.

a) Montrer que $k(2k+1) = p^2$

b) Conclure .

Exercice 4 — 84 min — 7 pts

1) Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on pose : $h(x) = x^2 + 1 + 4\ln x$ et $f(x) = \dfrac{\ln x}{(1+x^2)^2}$.

a) Dresser le tableau des variations de h et déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une seule solution α.

b) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{x\, h\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^3}$ et dresser le tableau des variations de f.

2) Soit la fonction K définie sur $]0;+\infty[$ par $K(x) = \dfrac{1}{4x^2(1+x^2)}$.

On désigne respectivement par $\mathscr{C}_K$ et $\mathscr{C}_f$ les courbes des fonctions K et f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Vérifier que : $K(x) - f(x) = \dfrac{h\left(\frac{1}{x}\right)}{4(1+x^2)^2}$ puis étudier la position de $\mathscr{C}_K$ et $\mathscr{C}_f$.

b) On a tracé dans l'annexe la courbe $\mathscr{C}_K$ et on a placé le point A de $\mathscr{C}_K$ d'abscisse $\dfrac{1}{\alpha}$.

Construire dans le même repère la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on pose : $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,dt$ si $x > 0$ et $F(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{(1-x^2)\ln(x)}{(1+x^2)^2}$

4) Soit $g(x) = \tan(x)$ pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0;+\infty[$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

5) Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on pose : $U(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1+x^2}$.

a) Vérifier que $U'(x) = F'(x) + \left(g^{-1}\right)'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a : $F(x) = U(x) - g^{-1}(x) + \dfrac{\pi}{4}$.

c) Etudier alors la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0 puis dresser le tableau de variation de F.

d) On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $x = \sqrt{3}$.

Montrer que $\quad \mathcal{A} \geqslant \left| \dfrac{\sqrt{3}\ln(3)}{8} - \dfrac{\pi}{12} \right|$

6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on donne la suite $V_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} t\ln(t)dt$.

a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $I_n = \dfrac{\ln(n)}{2n^2} + \dfrac{1}{4n^2} - \dfrac{1}{4}$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\ln(t)dt \leq V_n \leq \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\ln(t)dt$

c) En déduire que : $I_{n+1} - I_n \leq V_n \leq \dfrac{1}{2}(I_{n+1} - I_n)$ puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n$.