Mathématiques

Classe : Bac MATHS (TOP 50-2)

Série 14 : **Isométries**

Nom du Prof : M. ZOGHBI Naoufel

Exercice 1 — 20 min — 4 pts

On donne, dans le plan est orienté dans le sens direct, un carré OABC de centre Ω. On note I et J et K les milieux respectifs de $[OA]$, $[OC]$ et $[AB]$.

1°) Soit f= $S_{(OB)} o S_{(\Omega I)}$. Caractériser f.

2°) Soit g une isométrie sans point fixes qui transforme O en C et I en J.

a) Déterminer g(A).

b) Montrer que g est une symétrie glissante.

c) Soit D=g(K). Montrer que O est le milieu de [ID].

d) Vérifier que g= $t_{\overrightarrow{AO}} o S_{(AC)}$.

e) En déduire les éléments caractéristiques de g.

3°) Soit $\varphi = g^{-1} o f$.

a) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(I)$ puis caractériser φ.

b) Trouver alors l'ensemble (S) des points M du plan tels que f(M)=g(M).

Exercice 2 — 20 min — 4 pts

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. On note O' le symétrique du point O par rapport à (AB).

1°)a) Caractériser les applications $f=S_{(OC)} o S_{(OJ)}$ et $g= S_{(OJ)} o S_{(DC)}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ =fog.

2°) Soit l'application $h=S_{(BD)} o \varphi$.

a) Vérifier que h(C)=A, h(D)=B puis prouver que h(O)=O'.

b) Montrer que h n'a pas de points invariants, puis déduire sa nature.

3°) Soit l'application $S=S_{(BC)} \text{ o } t_{\overrightarrow{AB}}$.

a) Caractériser S.

b) Montrer que h=g o S.

Exercice 3 — 20 min — 4 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit m un nombre complexe différent de 1. On considère l'équation (E) : $z^2-(1-i)(m+1)z-i\left(m^2+1\right)=0$ d'inconnue complexe z .

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2°) On désigne par A , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $(1-i)$, $(m-i)$ et $(1-im)$..

Soit l'application f du plan **P** dans lui-même qui , à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=-iz+2$.

a) Montrer que f est une isométrie .

b) Justifier f admet un unique point invariant que l'on déterminera.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

c) Déterminer la nature du triangle AM_1M_2.

3°) On suppose , dans cette question , que $m=e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi;\pi\right] \setminus \{0\}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 quand θ décrit $]-\pi;\pi]\setminus\{0\}$.
En déduire l'ensemble des points M_2 .

b) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$.
Déterminer l'affixe de M_1 pour que la distance AI soit maximale.

Exercice 4 — 30 min — 4 pts

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un triangle ABC rectangle en C, inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) centre O tel que $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de[BC], D le symétrique de C par rapport à (AB) et E le symétrique de O par rapport à I.

1°) montre que[DE] est un diamètre de ($\mathscr{C}$).

2°) Soit $k=S_{(BC)}oS_{(AB)}$ et $h=S_{(ED)}oS_{(OA)}$.

a) Caractériser chacune des isométries k, h et hok^{-1}

b) Déterminer l'image de la droite (BD) par k.

c) Soit M un point du plan n'appartenant pas à la droite (BD). On pose M'=k(M) et M''=h(M)

i) Montrer que le quadrilatère BM'CM'' est un parallélogramme.

ii) Où faut-il placer M pour que BM'CM'' soit un losange.

3°) On se propose de déterminer les isométries f de P qui vérifient: f(E)=A et f(C)=D.

a) Soit g l'isométrie telle que: $f = t_{\overrightarrow{EA}}og$. Montrer que $g=R_{\left(E,-\frac{2\pi}{3}\right)}$ ou $g = S_{(ED)}$

b) On suppose que $g=R_{\left(E,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.Déterminer les droites Δ et Δ' tels que:

$R_{\left(E,-\frac{2\pi}{3}\right)}=S_{(EB)}oS_{\Delta}$ et $t_{\overrightarrow{EA}}=S_{\Delta'}oS_{(EB)}$. Caractériser alors f.

c) On suppose que $g=S_{(ED)}$.Montrer que f est une symétrie glissante.
(On pourra considérer le point H projeté orthogonal de A sur (ED)).

Exercice 5 — 30 min — 4 pts

Soit AEFD un rectangle tel que AE = 2AD et $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par B et C les milieux respectifs des segments [AE] et [DF] et par I et J les centres respectifs des carrée ABCD et BEFC.

1°) Soit f l'isométrie du plan telle que : f(A) = E ; f(B) = B et f(D) = F.

a) Déterminer les images des droites (AB) ; (BC) et (DC) par f.

b) En déduire que f(C) = C.

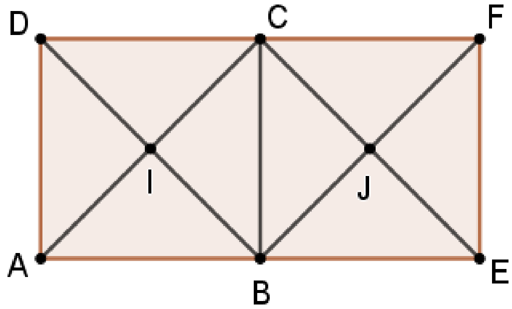
c) Caractériser alors l'isométrie f.

2°) Soit g l'isométrie du plan telle que : g(E) = C ; g(F) = D et g(C) = A et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les images des points E, F et C par l'application R o g.

b) En déduire que g est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) Caractériser l'application : $t = S_{(EF)} \circ S_{(BC)}$.
d) Déterminer les droites Δ et Δ' telles que :
$R = S_{\Delta} \circ S_{(BC)}$ et $t = S_{(BC)} \circ S_{\Delta'}$
e) Caractériser alors l'application $R \circ t$.



3°) Soit h l'isométrie du plan telle que :
$h(A) = C$; $h(B) = F$ et $h(D) = B$.
a) Montrer que h ne fixe aucun point du plan.
b) En déduire que h est une symétrie glissante.
c) Montrer que la droite (IJ) est l'axe de h et $\overrightarrow{IJ}$ est son vecteur.
d) Caractériser alors chacune des applications suivantes : $h \circ S_{(IJ)}$ et $t_{\overrightarrow{JI}} \circ h$.

Exercice 6 — 25 min — 4 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit m un nombre complexe.

I/ On considère l'équation (E) : $(i-1)z^2-(1-i)(m-i)z-2(m-i)^2=0$ d'inconnue complexe z.
On prend dans cette question m un nombre complexe distinct de i.
1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . On note z_1 et z_2 les solutions de (E).
2°) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

Déterminer l'ensemble décrit par chacun des points M_1 et M_2 lorsque $|m|$ varie et $\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

II/ Soit l'application f du plan **P** dans lui-même qui , à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+im)\overline{z} + (1-i)(m-i)$.

1°) Montrer que f est une isométrie du plan si, et seulement si, $m = i + e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi;\pi\right]$.

2°)a) On pose $m = i + e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi;\pi\right]$. Soient M(z) un point de P et $M'' = f \circ f(M)$.

Montrer que l'affixe z'' de M'' est $z'' = z + (1-i)\left(e^{i\theta}-1\right)$.

En déduire que si $\theta \neq 0$ alors f n'admet aucun point invariant.

b) On pose $m = i + e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi;\pi\right] \setminus \{0\}$.

Soit A le point d'affixe 1, déterminer les affixes des points $A' = f(A)$ et $A'' = f'(A')$.

Montrer que f n'est pas une translation puis donner sa nature.

3°) On pose m= 1+i. Déterminer l'ensemble des points invariants par f puis caractériser f.