Taki Academy
www.takiacademy.com

Classe : Bac Maths

Série : Fonctions réciproques

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Exercice 1 — 25 min — 4 pts

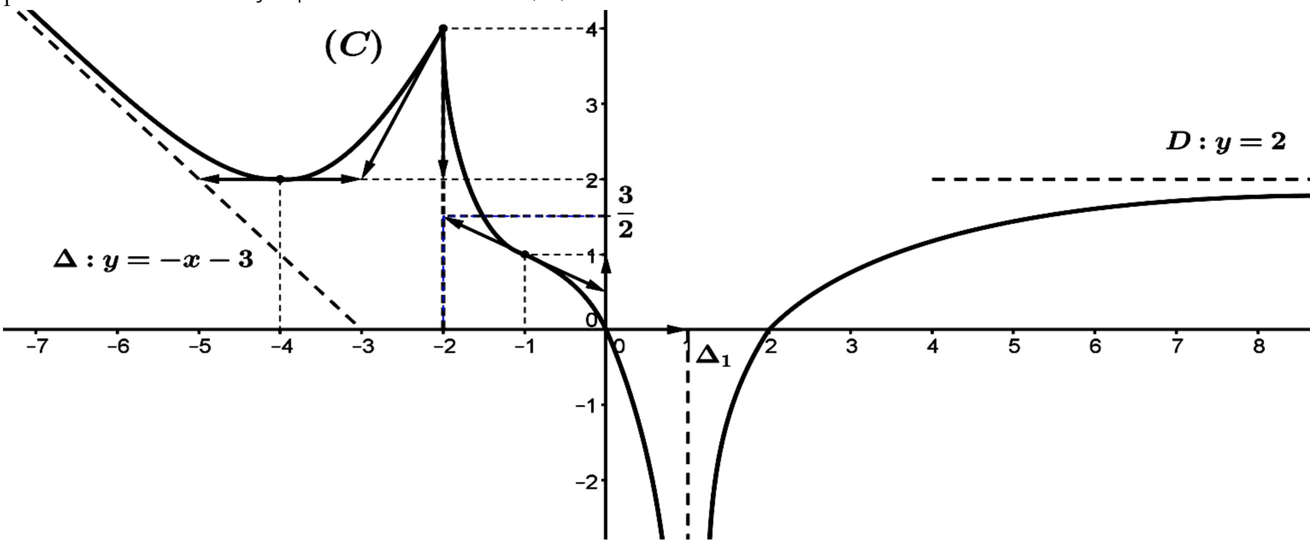
Dans la figure ci-dessous :

. (C) est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

. $\Delta : y = -x - 3$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

. D : $y = 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

. $\Delta_1 : x = 1$ est une asymptote à la courbe (C) .



A)(1) (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{f(-x)}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x) - 2}$ et $\lim\limits_{x \to 1} f \circ f(x) + f(x)$.

(b) $f'(-1)$; $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{f(x) - 4}{x + 2}$; $\lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{f(x) - 4}{x + 2}$ et $\lim\limits_{x \to (-4)} \dfrac{x + 4}{f(x) - 2}$.

(c) f est deux fois dérivable en (-1) déterminer $\lim\limits_{x \to (-1)} \dfrac{2f'(x) + 1}{x + 1}$

(2) (a) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse (-1).

(b) Dresser le tableau de variation de f .

B) Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left[-2\ ,\ 1\right[$.

(1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

(2) Justifier que h^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $\left(h^{-1}\right)'(1)$.

(3) Déterminer $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{h^{-1}(x)+2}{x-4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}\left(\dfrac{2^n - n3^n}{3^n + 2^n}\right)$

(4) Tracer la courbe de h^{-1}

Exercice 2 — 30 min — 6 pts

On considère la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\sqrt{\sin 2x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{4}]$ et calculer f '(x).

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) En déduire que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur [0,1]

3) a) Calculer $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ puis $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Montrer que f-1 est dérivable sur]0,1[et que pour tout x∈]0,1[;

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

c) Etudier la dérivabilité de f-1 à droite en 0.

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation : $f(x)=\frac{1}{n}$

admet, dans]0,],une solution unique an . Calculer a_1.

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 3 — 35 min — 5 pts

A) 1- Soit h la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $h(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Etudier les variations de h et en déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[\,;\ -\dfrac{1}{2}\le h(x)<0$

2- Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=1-x+\sqrt{x^2+3}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f est une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera .

3- On désigne par f^{-1} sa fonction réciproque .

a) Construire (C) et (C') les courbes respectives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

4- a) Montrer que pour tout $n\in IN^*\setminus\{1\}$, l'équation f(x)= 2-$f(x)=2-\dfrac{1}{n}$ admet une solution unique α_n dans $[1,+\infty[$.

b) Vérifier que pour tout $n\in IN^*\setminus\{1\}$; $f(\alpha_n)<f(\alpha_{n+1})$.

c) En déduire que la suite (α_n) est convergente.

d) Soit L la limite de (α_n), montrer que f(L)=2 et en déduire la valeur de L

B 1) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans $[1,+\infty[$ une solution unique et que $\alpha\in\left]\dfrac{3}{2},2\right[$

2) Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases}U_0=\dfrac{3}{2} \\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$ **pour tout $n\in IN$**

a) Montrer que pour tout $n\in IN$, $U_n>1$

b) Montrer que pour tout $n\in IN$, $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$

c) En déduire que pour tout $n\in IN$, $|U_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) Montrer que (U_n) est convergente vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 4 | 35 min | 5 pts

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) (a) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x\in]1,+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}.$$

(b) Dresser le tableau de variation de f.

3) (a) Justifier que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note f^{-1} sa fonction réciproque.

(b)Calculer $f(2)$ Justifier que f^{-1} est dérivable en $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et donner $(f^{-1})'\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

4) Soit g la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

(a) Prouver que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $g(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

(b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[1,+\infty[$.

(c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\forall x\in]1,+\infty[$, on a :

$$(g^{-1})'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$