Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Primitive

Exercice 1 — 36 min — 6 pt

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive notée F de $f(x)$ telle que $F(0)=0$.
2) Montrer que la fonction F est impaire.
3) Soit G la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x)=F(\sin x)$.
   a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $G'(x)$.
   b) En déduire que pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$; $G(x)=x$
   c) Calculer $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
4) Soit la fonction $H(x)=F\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, et calculer $H'(x)$.

Exercice 2 — 30 min — 5 pt

Soit $f:[-2;2]\to\mathbb{R}$ $x\to(x-2)\sqrt{4-x^2}$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2) Prouver que f admet une primitive sur $[-2;2]$. Soit F la primitive de f sur $[-2;2]$ telle que $F(0)=0$.
3) Soit g la fonction définie sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=F(2\sin x)$.
   a) Montrer que g est dérivable sur I.
   b) Calculer $g'(x)$et $g(x)$.
4) Déterminer une primitive de chacune des fonctions g_1 et g_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $g_1(x)=\sin x.\cos^2 x$ et $g_2(x)=\cos^2 x$.
5) En déduire $g(x)$ et calculer $F(-2)-F(2)$.

Exercice 3 — 36 min — 6 pt

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1]$ par : $f(x)=\dfrac{-2}{x^2-2x+2}$ et F la primitive de f sur $]-\infty,1]$ qui s'annule en 1.

1) On désigne par G la fonction définie sur $[0,\pi[$ par $G(x)=F\left(1-\tan\dfrac{x}{2}\right)$.
   a) Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi[$ et calculer $G'(x)$.
   b) Déterminer $G(x)$ pour tout $x\in[0,\pi[$ puis calculer $F(0)$.
2) Soit H la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.
   a) Montrer que H est dérivable sur $]-\infty,1[$ et calculer $H'(x)$.
   b) En déduire que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a : $F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\pi-F(x)$.
3) Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}F\left(\dfrac{1}{k}\right)$.
   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\{n,n+1,....,2n\}$ on a :
   $F\left(\dfrac{1}{n}\right)\le F\left(\dfrac{1}{k}\right)\le F\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.
   b) En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

Exercice 4 — 28 min — 4 pt

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$.

1) Montrer que f est une bijection de $[0;\pi]$ sur $\left[0;\sqrt{2}\right]$. (On notera f^{-1} la fonction réciproque de f).
2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$ et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$.
3) Soit g la fonction définie sur $\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$ par $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$ et G la primitive de g sur $\left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$ qui s'annule en zéro.
   a) Calculer le dérivée de la fonction $H:x\to g(x)-g(-x)$. En déduire que g est paire.
   b) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\sqrt{2}\right[$; $G(x)=\pi-f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.

Déterminer une fonction polynôme P dont la fonction dérivée est : $P'(x) = x^2 - 5x + 6$ et dont le maximum relatif est le double du minimum relatif.


Q
Magazines