Mathématiques

Classe : BAC Mathématiques

Session Contrôle 2021

Exercice 1 : 36 min 3 pts

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1) Déterminer les restes possibles modulo 6 de l'entier a^2 .
2) Vérifier que $a^3 \equiv a(\bmod 6)$.
3)
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n+1} \equiv a(\bmod 6)$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $a^{2n} \equiv a^2 (\bmod 6)$.
4) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système $\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0(mod\, 6) \\ x^3 y^2 \equiv 1(\bmod 6) \end{cases}$

Exercice 2 : 60 min 5 pts

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct, le point O est le milieu du segment $[BC]$ et les triangles AEB et ACF sont équilatéraux directs.

1) Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{5\pi}{6}$. Montrer que $r_1(B) = F$ et $r_1(E) = C$.
2) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA).
   a) Montrer que $S([BE]) = [CF]$.
   b) Les droites (BE) et (CF) se coupent en un point Ω .
   Montrer que les points A, O et Ω sont alignés.
3) Soit f un déplacement qui envoie le segment $[BE]$ sur le segment $[CF]$.
   a) Montrer que $f = r_1$ ou f est la rotation r_2 d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de centre Ω .
   b) Construire le point $A' = r_2(A)$ et montrer que $ACA'F$ est un losange.
4) Soit g l'antidéplacement qui envoie B sur F et E sur C .
   a) Montrer que g est une symétrie glissante.
   b) Montrer que : $g(A) = A'$.
   c) Soit I le milieu du segment $[BE]$ et $J = g(I)$. Montrer que $g = S_{(IJ)} o\, t_{\overrightarrow{IJ}}$.

Exercice 3 : 54 min 4,5 pts

Le plan est apporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1)
   a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z + \frac{1}{3} = 0$.
   On note z_1 et z_2 les solutions avec $\text{Im}(z_1) > 0$
   b) Ecrire z_1 sous forme exponentielle.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, Δ est la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$.

2) La droite Δ coupe la droite (OB) au point C .

Montrer que l'affixe du point C est égale à z_1 .

3) Soit D le point d'affixe $z_D=\frac{1}{3\sqrt{3}}i$.

a) Vérifier que : $z_D=z_1^3$

b) Montrer que $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{2}{3}$

c) Construire le point D .

4) Soit $z\in\mathbb{C}$.

Montrer que $\left(z^2+z\in\mathbb{R}\right)$ équivaut à $\left(z\in\mathbb{R}\ ou\ \operatorname{Re}(z)=-\frac{1}{2}\right)$

5) Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, on désigne par M et N les points d'affixes respectives z et z^3 .

a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

b) Dans la figure 2 de l'annexe, on a placé un point P de la droite Δ d'affixe α .
Construire, en justifiant, le point Q d'affixe α^3 .

Exercice 4 : 90 min 7,5 pts

Partie A :

Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe représentative $\left(C_g\right)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^x$.

α et β sont les réels tels que $g(\alpha)=1$ et $g(\beta)=\frac{1}{2}$.

1) En utilisant le graphique,

a) Donner le tableau de signe de la fonction dérivées g' de g .

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

$$g(x)<\frac{1}{2} \text{ et } g(x)<1$$

2) Montrer que : $\alpha>\frac{1}{2}$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=g(x)-\left(g(x)\right)^2$.

On désigne par $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Calculer $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter e résultat.

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4)

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2g'(x)\left(\frac{1}{2} - g(x)\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \int_0^{\alpha} xe^{2x}dx$.

b) En déduire que $\mathcal{A} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}$.

Partie B :

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $J_n = \int_0^{\alpha} (g(x))^n \, dx$.

1)

a) Montrer que $0 \leq J_n \leq \frac{\alpha}{n+1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$

2)

a) Montrer que $\int_{\alpha - \frac{1}{n}}^{\alpha} (g(x))^n \, dx \leq J_n$.

b) Montrer que $\frac{1}{n}\left[g\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)\right]^n \leq J_n \leq 1$.

c) Justifier que $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$ puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{J_n} = 1$.

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

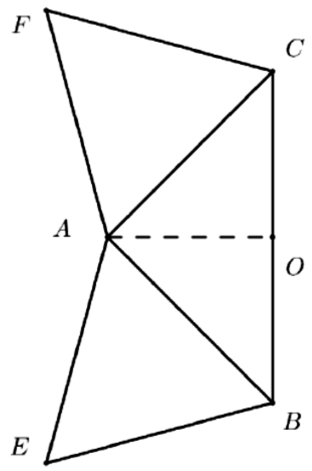
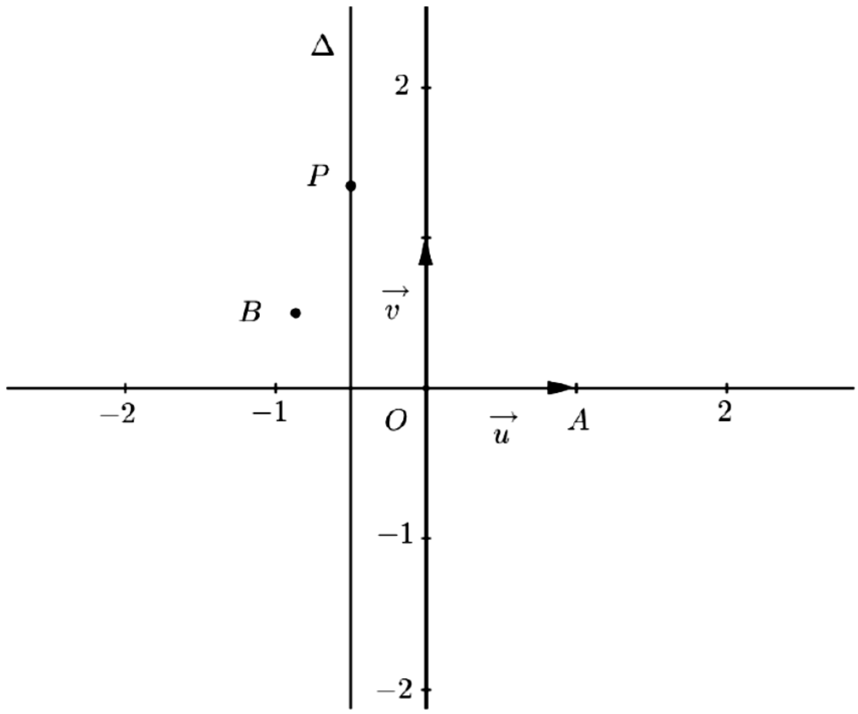
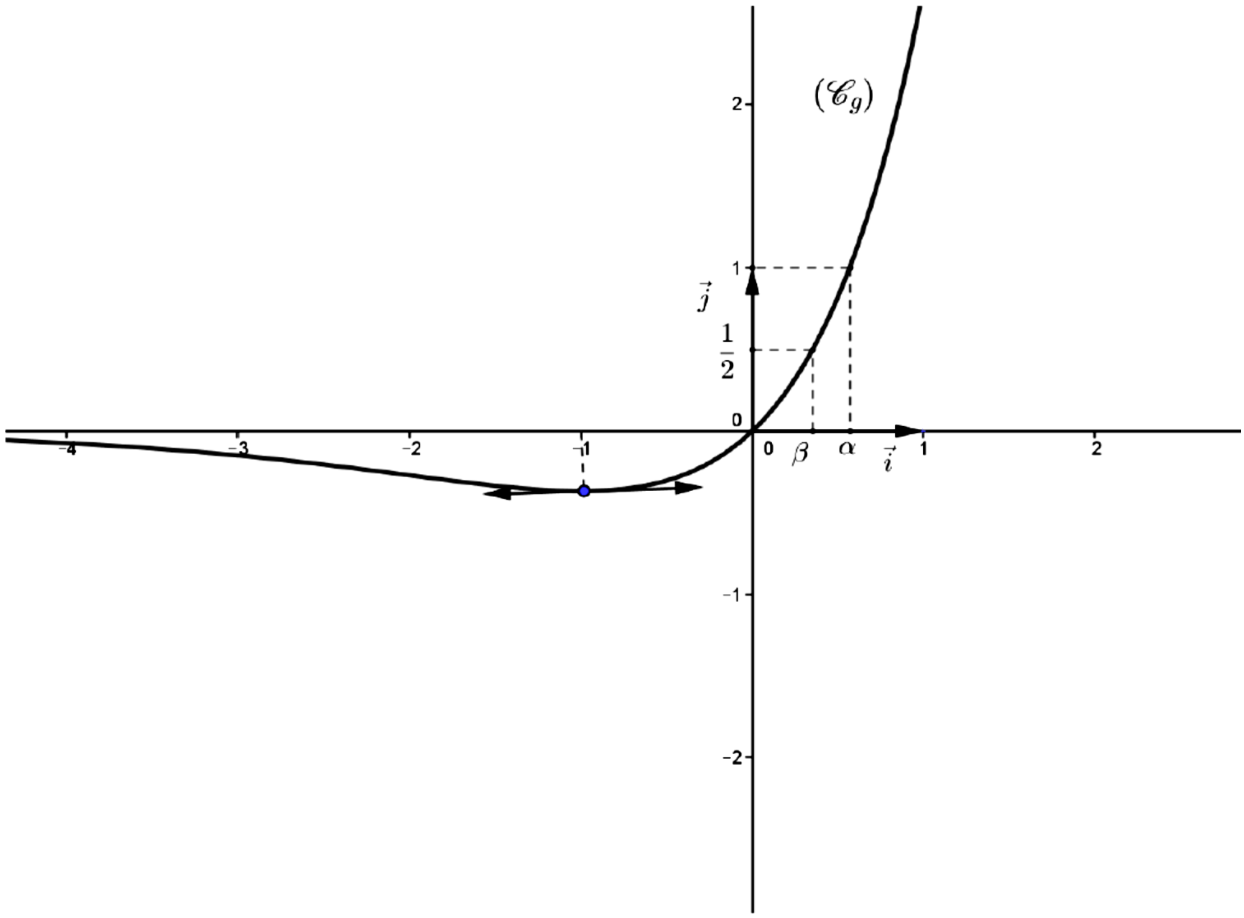


Figure 2




$(\mathscr{C}_g)$
2
1
$\vec{j}$
$\frac{1}{2}$
0
β
α
$\vec{i}$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
-1
-2

Taki Academy
www.takiacademy.com

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000