2023-2024

Classe : Bac Maths

Série 23 : Révision :

complexe et isométrie

-----------------

Nom du Prof : Lahbib Ghaleb

## Exercice 1 — 40 min — 5 pts

Le plan est orienté dans le sens direct.
On considère les points $A, B$ et $\Omega$ distincts deux à deux et d'affixes respectives $a, b$ et $\omega$.

1. Soit le point $P$ d'affixe $p = ae^{i\frac{\pi}{3}} + \omega e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

   a. Déterminer une forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{\omega - p}{\omega - a}$.

   b. En déduire que $\Omega AP$ est un triangle équilatèral direct.

2. Soit $Q$ l'image de $B$ par la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Montrer que $Q$ est d'affixe $q = \omega + (b - \omega)e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3. a. Vérifier que $\dfrac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

   b. Montrer que $\dfrac{p - a}{q - b} = \dfrac{\omega - a}{\omega - b} e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

4. a. Montrer que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ} \Longleftrightarrow \dfrac{\omega - a}{\omega - b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

   b. Montrer que $APQB$ est un rectangle si et seulement si $\dfrac{\omega - a}{\omega - b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

5. Construire le rectangle $APQB$ dans le cas où $a = 6$ et $\omega = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

## Exercice 2 — 40 min — 5 pts

Soit $a \in \mathbb{C} \backslash \{-i; i\}$
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Soit les points $\mathrm{M}, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$ et $\Omega$ d'affixes respectifs : $a$ , $z_1 = (1 + i)a + 2i$, $z_2 = (1 - i)a + 2i$ et $2i$.

1. Vérifier que $z_2 - 2i = -i\,(z_1 - 2i)$ , en déduire que $M_2 = r\,(M_1)$ où $\mathrm{r}$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

2. On suppose que $a \neq 0$ et on note I le milieu du segment $[M_1M_2]$.

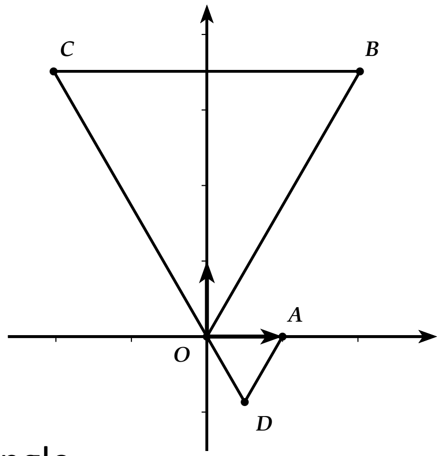
   a. Montrer que : $\mathrm{I} = t\,(M_1)$ où t est une translation dont on déterminera l'affixe de son vecteur.

   b. Montrer que : $(I\Omega) \perp (M_1M_2)$.

3. a. Montrer que : $\dfrac{z_1 - a}{z_2 - a} \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $|a| = 2$.

   b. En déduire l'ensemble des points $M(a)$ du plan complexe pour tel que $M$ appartient au cercle circonscrit au triangle $\Omega M_1 M_2$

**Exercice 3** 40 min 5 pts




Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On donne les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $1$ et $be^{i\frac{\pi}{3}}$ avec $b$ un réel strictement positifs.
On considère les points $C$ et $D$ tels que $OBC$ et $AOD$ soient deux triangles équilatéraux directs.
Soit $R = R_C \circ R_D$ où $R_C$ et $R_D$ sont les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre respectifs $C$ et $D$.

A)
1. Montrer que $R$ est une rotation que l'on précisera l'angle.
2. Déterminer $R(A)$.
3. Montrer que l'écriture complexe de $R$ est $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + e^{i\frac{\pi}{3}}\left(b - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$.

B)
1. Soit $\Omega$ le centre de $R$. Montrer que l'affixe de $\Omega$ est $z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{3}i\left(b - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$.
2. Vérifier que $A\Omega = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$, puis montrer que $\Omega$ est le centre du cercle circonscrit du triangle $OAB$.
3. $b$ étant donné. Donner un procédé de construction de $\Omega$.
4. On note $G$ le centre de gravité du triangle $OAD$.
   a. Montrer que $z_G = \frac{1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3}$ puis que $z_{\overrightarrow{G\Omega}} = \frac{\sqrt{3}}{3}ib$.
   b. Déterminer alors l'ensemble des points $\Omega$ lorsque $b$ varie dans $\left]0, +\infty\right[$.
5. Montrer que $\Omega$ est le milieu de $[OB]$ si et seulement si $b = 2$.

C) Dans la suite $b = 2$. On pose $f = R \circ S$ où $S$ est la symétrie orthogonale d'axe $(OA)$
1. Vérifier que $\Omega$ et $D$ sont symétriques par rapport à $(OA)$.
2. Déterminer $f(A)$ et $f(D)$ puis montrer que $f$ est une symétrie glissante.
3. Construire l'axe $\delta$ de $f$.
4. Pour tout $M$ d'affixe $z$, on considère le points $M'$ d'affixe $z'$ telle que :
   $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   a. Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{3}}\left(2 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   b. Montrer que lorsque $M$ varie alors le milieu du segment $[MM']$ varie sur une droite fixe que l'on précisera.