Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions Exponentielles

Exercice 1 : 25 min 5 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier les variation de f.
2. Montrer que $A(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.
3. Déterminer l'équation de la tangente T au point A.
4. Soit $g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$.
   (a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $g'(x)=\dfrac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de g.
   (c) Déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.
   (d) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T. Que représente le point A pour $\mathscr{C}_f$.
5. Tracer T et $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2 : 30 min 6 pts

(I) Soit la fonction f définie sur $[-2,+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ avec a et b deux réels.
$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(unité 1cm)
Déterminer a et b tel que le point $A(-1,1)$ un point de la courbe où la tangente à pour coefficient directeur $(-e)$.

(II) Soit la fonction g définie sur $[-2,+\infty[$ par $f(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ avec a et b deux réels.
$\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(unité 1cm).

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$. Interpréter le résultat graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Montrer que $\mathscr{C}_g$ admet un point d'inflexion I qu'on déterminera.

4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point I.

5. Tracer $\mathscr{C}_g$.

6. Soit H la fonction définie sur $[-2,+\infty[$ par $H(x) = (\alpha x+\beta)e^{-x}$ avec α et β deux réels.

   (a) Déterminer α et β pour que H soit une primitive de $x \longmapsto g(x)-1$.

   (b) Déduire une primitive de g qui s'annule en 0.

(III) Soit la fonction k définie sur $[-2,+\infty[$ par $k(x) = g(x^2)$.

1. Déterminer $k'(x)$.

2. Dresser le tableau de variation de k.

Exercice 3 : 35 min 7 pts

(I) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^x$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2. Étudier g et dresser son tableau de variation.

3. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

   (b) Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$, puis déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(II) Soit f définie sur $]-\infty;2]$ par : $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.
$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2. (a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty;2]$ on a : $f'(x) = -g(x)$

   (b) Déduire le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variation.

3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$ puis donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

4. (a) Montrer que $\Delta : y = -x-1$ est une droite asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $(-\infty)$.

   (b) Étudier la position relative de Δ et $\mathscr{C}_f$.

5. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 tel que : $-1,6 < x_1 < -1,5$ et $1,5 < x_2 < 1,6$.

   (b) Tracer Δ et $\mathscr{C}_f$.

6. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (ax+b)e^x$.

   (a) Déterminer les deux réels a et b de tel sorte que h soit une fonction primitive de $x \longmapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Déduire une fonction primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : 35 min 7 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-x}+x-1$.
   (a) Dresser le tableau de variation de g.
   (b) Montrer que pour tout réel x, $g(x)\geq 0$.
2. (a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement les résultats.
   (b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{\left(x+e^{-x}\right)^2}$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
3. (a) Montrer que la droite $T: y=x$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point O.
   (b) Vérifier que $x-f(x)=\dfrac{x\,g(x)}{g(x)+1}$.
   (c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et T.
4. Dans l'annexe ci-jointe on a tracé la courbe représentative de la fonction u définie sur $]-\infty\ ,\ 0]$ par : $u(x)=\dfrac{1}{x+e^{-x}}$.
   (a) Construire le point $A\left(-1, \dfrac{1}{1-e}\right)$, ainsi que la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
   (b) Tracer $\mathscr{C}$ et T.
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-1,+\infty[$.
   (a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $\left[\dfrac{1}{1-e},+\infty\right[$.
   (b) Tracer dans le même repère la courbe de h^{-1}.

Taki Academy
www.takiacademy.com