Exercice 1 — 30 min — 5 pt

Soit *f* la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que pour tout réel $x\in]0,+\infty[$, $\ln(x+1)=\ln(x)+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

c) Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Montrer que pour tout réel $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ tout en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.

3°) Montrer que *f* admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,1[$.

4°) Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose $a_n=f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

b) Montrer que a_n est une solution de l'équation $x^n=x+1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n$.

Exercice 2 — 25 min — 4 pt

On considère la fonction *f* définie et dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\ln(\ln(x))$.

1°) a) Déterminer les limites de *f* en 1 et en $+\infty$.

b) Etudier les variation de *f*.

c) Resoudre l'équation $f(x)=0$. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

2°) On considère la suite (u_n) défine, pour tout $n\geq 3$ par : $u_n=\int_e^n f(x)dx$

a) Montrer que pour tout $n\geq 3$, $u_n\geq 0$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) Resoudre l'inéquation $f(x)\geq \ln 2$. Prouver alors, pour tout $n\geq 3$, ona :

$$\int_e^n f(x)\,dx \geq \int_{e^2}^n f(x)dx \geq (\ln 2)(n-e^2)$$

d) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 3 | 45 min | 7 pt

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+x\ln(x)}, \text{ pour tout } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=1+x\ln(x)$.

Dresser le tableau de variation de h et en déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $h(x)>0$.

2°) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et donner une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (T).

c) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1-x}{(1+x\ln(x))^2}$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

e) Tracer (T) et $\mathcal{C}$.

3°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que g possède une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ de g^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Soit u un réel de l'intervalle $]0,1]$. On pose $A(u)=\int_u^1 f(t)dt+\int_{f(u)}^1 g^{-1}(t)dt$.

a) Interpréter graphiquement le nombre $A(u)$.

b) Montrer alors que $\lim\limits_{u\to 0^+} A(u)=1$.

5°) On considère la suite (U_n) définie par $U_0=\dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $0<U_n\leq 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

d) Montrer que pour tout entier naturel n , $\dfrac{1}{U_{n+1}}-\dfrac{1}{U_n}=\ln(U_n)$.

e) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0\times U_1\times\dots\dots\times U_n)=\dfrac{1}{e}$.

f) Pour tout entier naturel n , on note V_n la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[U_n, U_{n+1}]$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.