Mathématiques

Classe : Bac maths

Série n°4 : **Complexes - Limites - Suites**

Nom du Prof : Aguir Imed

Exercice 1	50 min	5 pt

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit θ un réel de $]0,\pi[$

On considère les points A , B et I d'affixes respectives $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ et $\cos\theta$.

A tout point M distinct de I d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z^2-1}{2z-2\cos\theta}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que z' = z.

2) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{\cos\theta , e^{i\theta}\}$: $\dfrac{z'-e^{-i\theta}}{z'-e^{i\theta}} = \left(\dfrac{z-e^{-i\theta}}{z-e^{i\theta}}\right)^2$

b) Montrer que pour tout $M \in P\setminus\{I, A, B\}$ on a :

$$\frac{BM'}{AM'}=\left(\frac{BM}{AM}\right)^2 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM'})\equiv 2(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})[2\pi]$$

c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

3) Montrer que si $M\in(O,\vec{u})\setminus\{I\}$ alors M' est le centre du cercle circonscrit au triangle ABM.

4) Soient les points M_1 , M_2 et H d'affixes respectives $z_1 = e^{2i\theta}$ et $z_2 = e^{3i\theta}$ et $z_H = z_A + z_1 + z_2$.

a) Montrer que les points A , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

b) Montrer que H est l'orthocentre du triangle AM_1M_2

c) Déterminer la valeur de θ pour que H soit le centre du cercle circonscrit au triangle AM_1M_2

Exercice 2 :	35 min	4 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit l'équation (E_m) : $z^2+2iz+m=0$ où m est un réel de $]-\infty,-1]$.

On désigne par z_0 une solution de (E_m).

1) a) Montrer que $-\overline{z_0}$ est une solution de (E_m) pour tout $m \in]-\infty,-1]$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(z_0) = -1$ et que $|z_0| = \sqrt{-m}$.

c) Résoudre alors l'équation (E_m).

2) On désigne par A et B des points d'affixes respectives $-m$ et -1, le demi-cercle de diamètre [AB] coupe l'axe des ordonnées au point C. (voire figure)

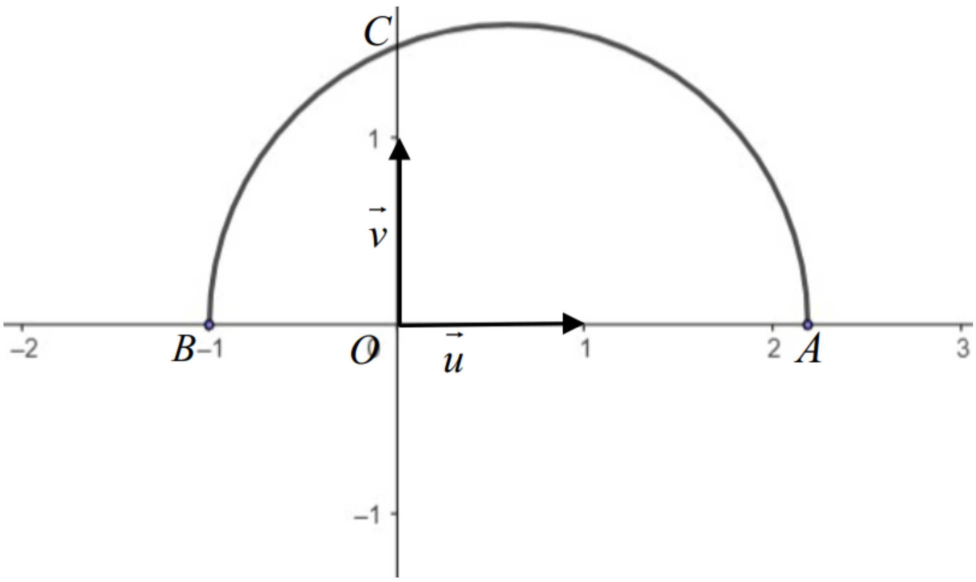
a) Calculer OC en fonction de m.

b) Construire sur la figure les points M_1 et M_2 d'affixes les solutions de (E_m).

3) On donne les points M , P et Q d'affixes respectives z , $-m+2z$ et z^2.

a) Montrer que le triangle AQP est rectangle isocèle et direct en A, si et seulement si, z est une solution de (E_m).

b) Construire alors les points P et Q pour $z = \sqrt{-m-1} - i$.



Exercice 3 — 15 min — 3 pt

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1) Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

2) a) Justifier que $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$.

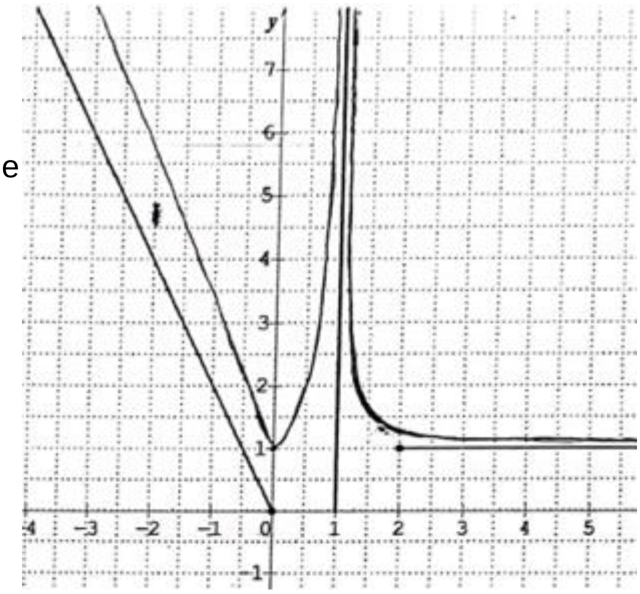
b) Vérifier que $1-e^{i\frac{\pi}{n}}=-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$.

3) Prouver alors que $u_n=\dfrac{1}{n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$

Exercice 4 — 30 min — 4 pt

La courbe (C) représente une fonction f .

Les droites D et D' d'équations x = 1 et y = 1 sont des asymptotes à (C) et la droite Δ d'équation y = -2x est une direction asymptotique à (C) au voisinage de $-\infty$.



A) Par lecture graphique, déterminer :

$$\lim_{x\to1} f\left(1-f(x)\right)-2f(x)$$

$$\lim_{x\to0^+} f\left(2\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}\right)\ ,\ \lim_{x\to1^-}(x-1)f\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

B) Dans la suite on donne f(x) = $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $\forall\ x\in\left]1,+\infty\right[$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=f(x)-x^n$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\left]1,+\infty\right[$ et vérifier que $\alpha_n\in\left]1,2\right[$

2) a) Etudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ sur $\left]1,+\infty\right[$

b) En déduire que la suite (α_n) est décroissante.

3) a) Montrer que la suite (α_n) converge vers un réel L.

b) Montrer que si L > 1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=f(L)$. En déduire que L = 1.