Mathématiques

Classe : Bac maths

Série n°1 : **Nombres complexes**

Nom du Prof : Aguir Imed

Exercice 1 : 25 min 5 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

Les questions sont indépendantes.

1) z étant un nombre complexe . Montrer l'équivallence :

$|z+1|=|z|+1$, si et seulement si , z est un nombre réel positif .

2) Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Montrer que si $|z|=|z-1|$ alors arg (z) + arg (z-1) $\equiv\pi[2\pi]$.

3) Soient $z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}$ tels que $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ et $z_1+z_2+z_3\neq 0$.

Montrer que $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3}{z_1+z_2+z_3}\right|=1$

4) Soient a et b deux nombres complexes. Montrer l'équivallence :

$$|a-b|=|1-\bar{a}b| \quad\Leftrightarrow\quad |a|=1 \text{ ou } |b|=1.$$

5) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, montrer que $\left(\dfrac{z+|z|}{\sqrt{\mathrm{Re}(z)+|z|}}\right)^2=2z$

Exercice 2 25 min 5 pt

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; on considère le point A d'affixe

(-1) et les points M , N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des points M tels que le triangle MNP est rectangle en P par deux méthodes .

1) <u>1ère Méthode</u> :

a) Montrer que : (le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur)

b) On pose z = x + i y où x et y sont des réels . Montrer que $\frac{1+z}{z}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$

c) En déduire que l'ensemble (E) est le cercle de diamètre [OA], privé des points O et A

2) $2^{ème}$ Méthode :

a) Montrer que : MNP est rectangle en P $\Leftrightarrow$ $|z+1|^2+|z|^2=1$

b) Montrer que : $|z+1|^2+|z|^2=1$ $\Leftrightarrow$ $\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}$

c) En déduire l'ensemble E .

Exercice 3 — 25 min — 4 pt

Dans la figura ci-dessous, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan , $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 2 et B est un point d'affixe z_B

1) a) Déterminer par une lecture graphique le module et un argument de z_B

b) En déduire que $z_B=-1+i\sqrt{3}$

2) a) Placer sur la figure le point C d'affixe $z_C=1+i\sqrt{3}$

b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange

3) On se propose de déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que z^3 soit un réel positive ou nul .

a) Vérifier que les points O , A et B appartiennent à E

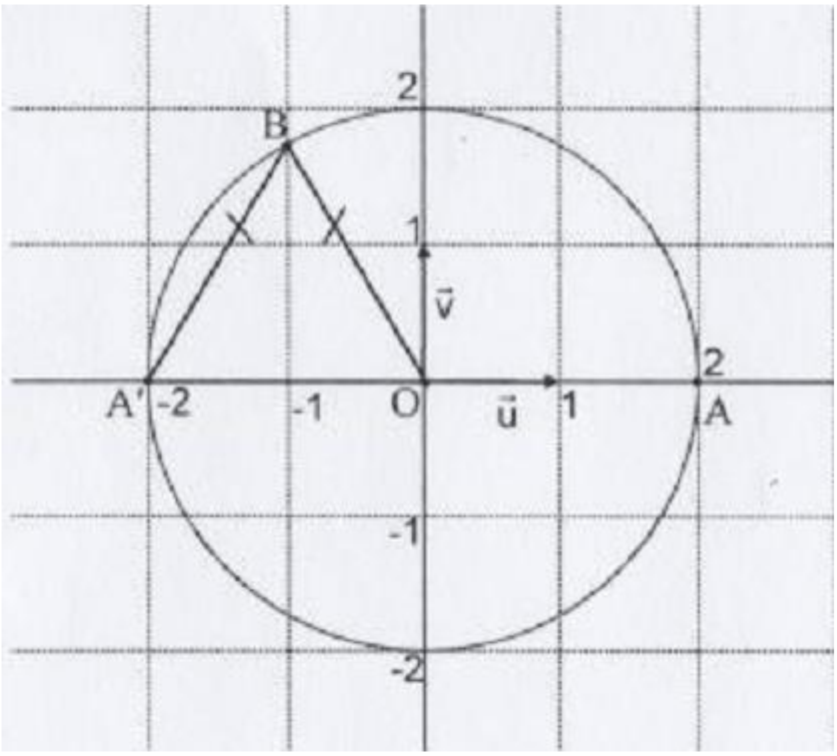
b) Prouver que tout point M de la demi-droite [OB) appartient à E

c) Soit z un nombre complexe non nul , de module r et d'argument θ

Montrer que z^3 est un réel positif si et seulement si $\theta=\frac{2k\pi}{3}$; $k\in\mathbb{Z}$.

d) En déduire que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera

Représenter E sur la figure .



Exercice 4 : 30 min 8 pts

Les questions sont indépendantes

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit z un nonmbre complexe tel que $|z|=1$ et $z^2 \neq 1$; Montrer que $\dfrac{z^2+1}{z^2-1} \in i\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$: $\mathrm{Im}(z)>0 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|<1$

3) Soit u un nombre complexe tel que u $\neq$ 1 et $|u|=1$

a) Montrer que $\mathrm{Ré}\left(\dfrac{1}{1-u}\right)=\dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ alors $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ est un réel.

4) Soit z un nombre complexe non nul.

a) Montrer que : $\dfrac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z=\bar{z}$ ou $z+\bar{z}=2z\bar{z}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R}$.

5) Soit z un nombre compplexe tel que $z \notin \mathbb{R}^-$.

Montrer que $2\arg\left(z+|z|\right) \equiv \arg(z)\left[2\pi\right]$

6) Soient a et b deux nombres complexes distincts.

Montrer que $|a| = |b| \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} \in i\mathbb{R}$

7) Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$ alors $|z| = 1$.

8) Soient a , b et c 3 nombres complexes tels que A(a) , B(b) et C(c) sont les sommets d'un triangle.

Montrer que : ABC est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ac$