2023-2024

Classe : Bac Maths

Série 12 : Exemple 1 : (Devoir de contrôle n° 1)

Nom du Prof : Lahbib Ghaleb

Exercice 1 | 30 min | 4 pts

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit la fonction f_n sur IR par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 2 + (x-2)sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & \text{si } x > 2 \\ f_n(x) = \dfrac{1}{4}(x^3 + nx - 2n) & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$$

On désigne par C_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 3$. Interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Montrer que pour tout $x > 2$; on a $4 - x \leqslant f_n(x) \leqslant x$. Déduire $\lim\limits_{x\to 2^+} f_n(x)$.

   b) Etudier la continuité de f_n en 2.

3. a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]1, 2[$ une unique solution u_n.

   b) Vérifier que $f_{n+1}(u_n) = \dfrac{1}{4}(u_n - 2)$.

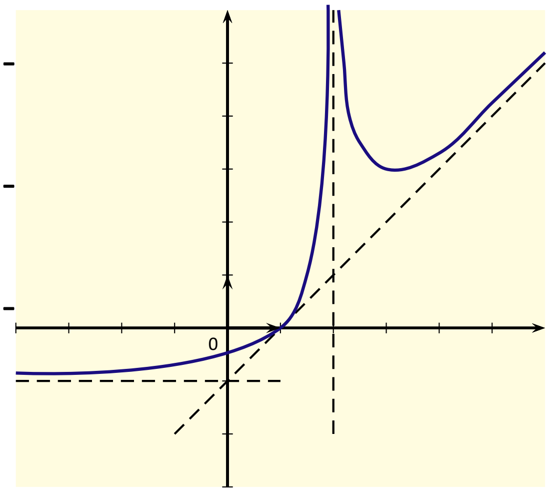
   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante puis qu'elle est convergente.

4. a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$; on a : $u_n = \dfrac{2n}{n + u_n^2}$.

   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

5. La courbe C_g ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g définie sur IR \ $\{2\}$.

   - $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à C_g au voisinage de $+\infty$.
   - $\Delta' : y = -1$ est une asymptote à C_g au voisinage de $-\infty$.
   - $D : x = 2$ est une asymptote verticale à C_g .



   a) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x)$.

   b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} [g(-f_n(x)) + f_n(x)]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(-f_n(x))}{x}$.

Exercice 2 | 45 min | 5 pts

I) Pour tout nombre complexe m, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_m) : z^2 - (2m-1)z + 2m^2 - (1+i)m = 0$$

1. Calculer le discriminant Δ de (E_m) et vérifier que $\Delta = (2im+1)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

II) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour tout nombre complexe m, on donne les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{-1+i}{2}\,,\quad z_B = \frac{1+i}{2}\,,\quad z_M = m\,,\quad z_1 = (1-i)m - 1 \quad \text{et} \quad z_2 = (1+i)m\,.$$

1. a) Montrer que si $m \neq \frac{i}{2}$ alors $\frac{z_2 - z_A}{z_1 - z_A} = i$.

   b) En déduire que si $m \neq \frac{i}{2}$ alors le triangle AM_1M_2 est rectangle et isocèle de sens direct.

2. a) Soit C le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ et Γ le cercle de centre B et de rayon 2.
   Montrer que : M_1 appartient à C si et seulement si M appartient à Γ.

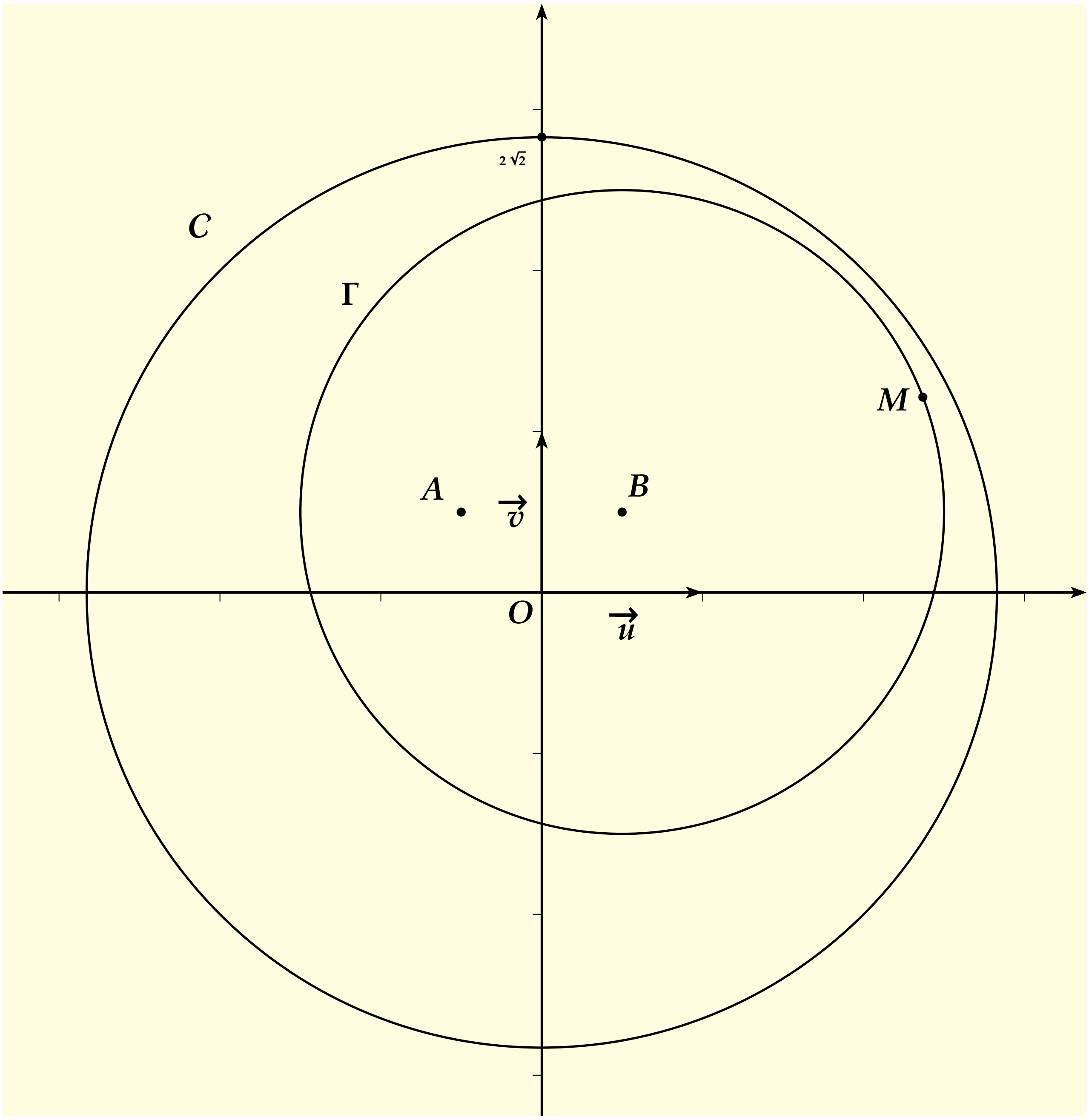
   b) Soit $m \neq \frac{1+i}{2}$. Vérifier que $z_1 = (1-i)(m - z_B)$ et en déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{OM_1}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

   c) Dans la page annexe on a placé un point M du cercle Γ. Construire les points M_1 et M_2.

3. On pose $m = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Vérifier que $z_1 - z_A = \left(\frac{1-i}{2}\right)(e^{i\theta} - i)$. En déduire la forme exponentielle de $z_1 - z_A$.

   b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire du triangle AM_1M_2 est maximale.



$2\sqrt{2}$
C
Γ
M
A
B
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$

Exercice 3 45 min 5 pts

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_n + \dfrac{2}{u_n} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \geqslant 1$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant 3$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n + 1 \leqslant u_n \leqslant 3n + 1$.

   c) Calculer la limite de la suite (u_n).

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{u_k} = \frac{(-1)^0}{u_0} + \frac{(-1)^1}{u_1} + \cdots + \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n}}$ et $w_n = v_n - \dfrac{1}{u_{2n+1}}$.

   a) Vérifier que $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{2n+2}} - \dfrac{1}{u_{2n+1}}$ et que $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{u_{2n+2}} - \dfrac{1}{u_{2n+3}}$.

   b) En déduire que la suite (v_n) est décroissante et que la suite (w_n) est croissante.

   c) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

   d) On pose $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

   Montrer que $\dfrac{3}{4} \leqslant \ell \leqslant 1$.