Mathématiques

Classe : BAC Mathématiques

Chapitre : Identité de Bézout

Exercice 1 : 35 min 6 pts

1) Soient a et b deux entiers non nuls , montrer que si $a\wedge b=1$ alors pour tout entier naturel non nul m, on a :$a^m\wedge b^m=1$.

Pour tout entier naturel non nul n. On considère dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S_n):\begin{cases} x\equiv 0 \pmod{5^n} \\ x\equiv 1 \pmod{2^n} \end{cases}.$$

2) Montrer que si x est solution de (S_n) alors :

a) x^2 est solution de (S_{n+1}).

b) $x^2 \equiv x \pmod{10^n}$.

3) Soit $a_n=5^{2^{n-1}}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, a_n est solution de(S_n).

4) Déterminer un entier naturel p tel que p et p^2 ont les mêmes chiffres respectifs des unités, des dizaines et des centaines.

5) Soit dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $125x-8y=1$.

a. Vérifier que (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ puis déterminer une solution particulière de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire que x est solution de (S_3) si et seulement si $x\equiv 625 \pmod{10^3}$.

Exercice 2 : 20 min 4 pts

Soit a un entier naturel tel que: $a \wedge 10=1$.

1)a. Montrer que : $a^4\equiv 1 \pmod 2$ et que $a^4 \equiv 1 \pmod 5$.

b. En déduire que : $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

2) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

$\forall\, k\in\mathbb{N},\ a^{4\times 10^k}\equiv 1 \pmod{10^{k+1}}$

3) En déduire que : $\forall\, k\in\mathbb{N},\ a^{8\times 10^k+1}\equiv a \pmod{10^{k+1}}$.

4) Trouver un entier naturel N tel que l'écriture décimale de N^3 se termine par 123456789.

Exercice 3 : 35 min 5 pts

1)a. Montrer que $6^{30}\equiv 1[\mathrm{mod}\,55]$.

b. En déduire que le reste de la division euclidienne de 6^{33} par 55.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $17x - 40y = 1$

a. Justifier que (E) admet au moins une solution.

b. Vérifier que le couple (33,14) est une solution particulière de (E).

c. résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

d. Déterminer le plus petit entier naturel x_0 vérifiant $17x \equiv 1[\text{mod} 40]$.

3) On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S): $\begin{cases} x^{17} \equiv a[\text{mod} 55] \\ x^{40} \equiv 1[\text{mod} 55] \end{cases}$ où $a \in \mathbb{N}$.

Montrer que si x est une solution de (S) alors $x \equiv a^{33}[\text{mod} 55]$.

4) On suppose dans cette question que $a \wedge 55=1$.

a. Montrer que $a^{40} \equiv 1[\text{mod} 55]$.

b. En déduire que $\{a^{33} + 55k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble de solutions de (S).

c. Déterminer l'ensemble de solutions de $\begin{cases} x^{17} \equiv 6[\text{mod} 55] \\ x^{40} \equiv 1[\text{mod} 55] \end{cases}$.