Classe : Bac Maths

Série : Logharithme.N et espace

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Exercice 1 | 45 min | 7 pts

A/ Soit $\mathbf{n}$ un entier naturel non nul et $\mathbf{f_n}$ la fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\mathbf{f_n}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-1)^{\mathbf{n}}\,\mathbf{Log x}$$

On désigne par $(\mathbf{C_n})$ la courbe représentative de $\mathbf{f_n}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) On pose, pour tout $\mathbf{x}$ de $\varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{n Log x} + 1 - \dfrac{1}{\mathbf{x}}$.
   a) Etudier les variations de $\varphi_{\mathbf{n}}$.
   b) Calculer $\varphi_{\mathbf{n}}(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ pour tout x strictement positif.
2)
   a) Etudier les variations de $\mathbf{f_n}$ et dresser, suivant la partie de $\mathbf{n}$, son tableau de variation.
   b) Tracer, dans le même repère, les courbes $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{C_2})$ en précisant les positions relatives de ces deux courbes.
3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_1) et $(\mathbf{C_2})$.

B/ Dans cette partie on se propose d'étudier la suite $(\mathbf{V_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ définie par : $\mathbf{V_n} = \displaystyle\sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} \frac{(-1)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}+1}$.

1) On considère la suite $(\mathbf{U_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathbf{U_n} = \displaystyle\int_1^2 \mathbf{f_n}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$.

   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(\mathbf{n}+1)\mathbf{u_n} = \mathbf{Ln}(2) - \displaystyle\int_1^2 \frac{(\mathbf{x}-1)^{\mathbf{n}+1}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx}$, en déduire.
   a) La relation : $\dfrac{1}{2(\mathbf{n}+2)} \le \mathbf{Ln}(2) - (\mathbf{n}+1)\mathbf{u_n} \le \dfrac{1}{\mathbf{n}+2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   b) La limite de $(\mathbf{n}+1)\mathbf{U_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2) On pose, pour tout entier $n \ge 1$ et tout réel $x > 0$.
   $$\mathbf{S_n}(\mathbf{x}) = 1 - (\mathbf{x}-1) + \ldots\ldots + (-1)^{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-1)^{\mathbf{n}}$$
   a) Montrer que : $\mathbf{S_n}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\mathbf{x}} - (-1)^{\mathbf{n}-1}\dfrac{(\mathbf{x}-1)^{\mathbf{n}+1}}{\mathbf{x}}$.
   b) En déduire, en utilisant la première question de la partie $\mathbf{B}$, que n élément de $\mathbb{N}^*$.
   $$\mathbf{Ln}(2) - \mathbf{v_n} = (-1)^{\mathbf{n}+1}\left[\mathbf{Ln}(2) - (\mathbf{n}+1)\mathbf{u_n}\right].$$
3) Montrer que la suite $(\mathbf{V_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 — 25 min — 5 pts

On donne les points $A(0\,,1\,,0)$, $B(1\,,0\,,0)$, $C(0\,,2\,,1)$ et $D(1\,,0\,,-4)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan P.

b) Déterminer l'aire du triangle ABC .

c) Donner une équation cartésienne du plan P.

2) a) Montrer que les points A, B , C et D ne sont pas coplanaires

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

3) a) Vérifier que le point $I(1\,,1\,,1)$ est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC

b) Ecrire une représentation paramétrique de l'axe Δ de $\mathcal{C}$.

c) Ecrire une équation cartésienne du plan Q médiateur du segment $[AD]$.

d) Déterminer les coordonnées du point K intersection de Q et Δ.

e) Déterminer une equaion du sp here circonscrit au tetradre $ABCD$