Mathématiques

Thème : Géométrie dans l'espace

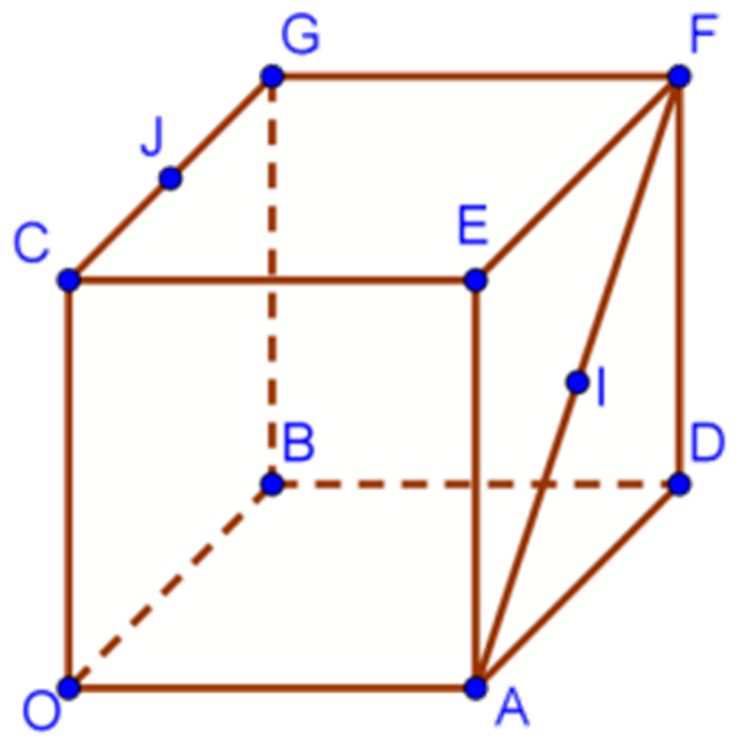
Exercices type devoir

Exercice N°9

L'espace est rapporté à un repère direct $\left(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$.

Soit $OADBCEF$ le cube tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AF]$ et $[CG]$.



1°) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

b) Vérifier que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w}\right)$.

2°) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

b) Calculer le volume du tétraèdre $OIJE$.

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les coordonnées de H, justifier que $EH=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3°) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-2z+\frac{11}{7}=0$

Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ) .

L'espace est rapporté à un repère direct $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

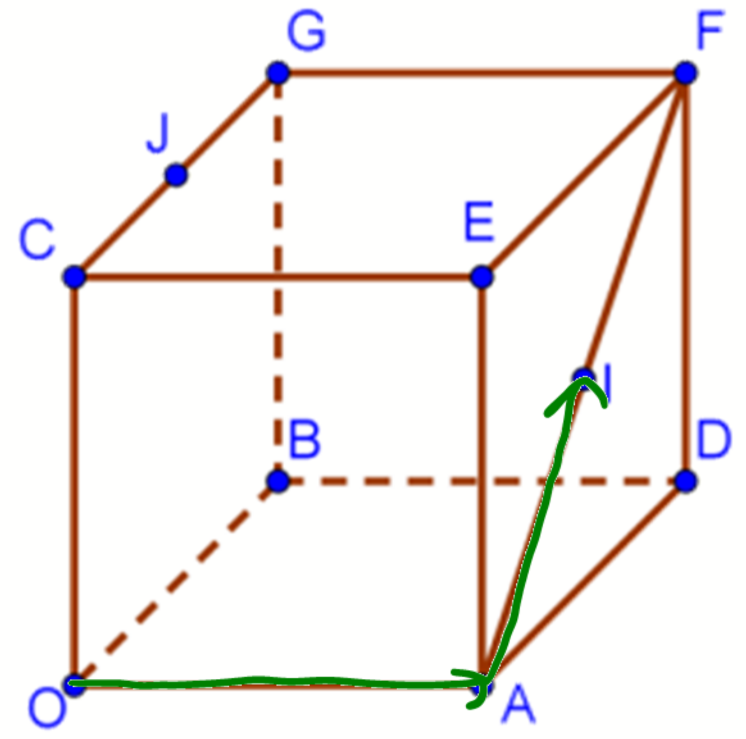
Soit $OADBCEF$ le cube tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AF]$ et $[CG]$.

1°) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$$
$$=\vec{u}+\vec{w}$$
$$=1.\vec{u}+0\vec{v}+1.\vec{w}$$

Donc $\boxed{E(1,0,1)}$



$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$\vec{OI} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}$$

$$= \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$$

Donc $\boxed{I\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

$$\vec{OJ} = \vec{OC} + \vec{CJ}$$

$$= \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{CG}$$

$$= \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{OB}$$

$$\vec{OJ} = 0.\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + 1.\vec{OC}$$

$$= 0.\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + 1.\vec{w}$$

Donc $\boxed{J\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)}$

b) Vérifier que $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}\left(\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w}\right)$.

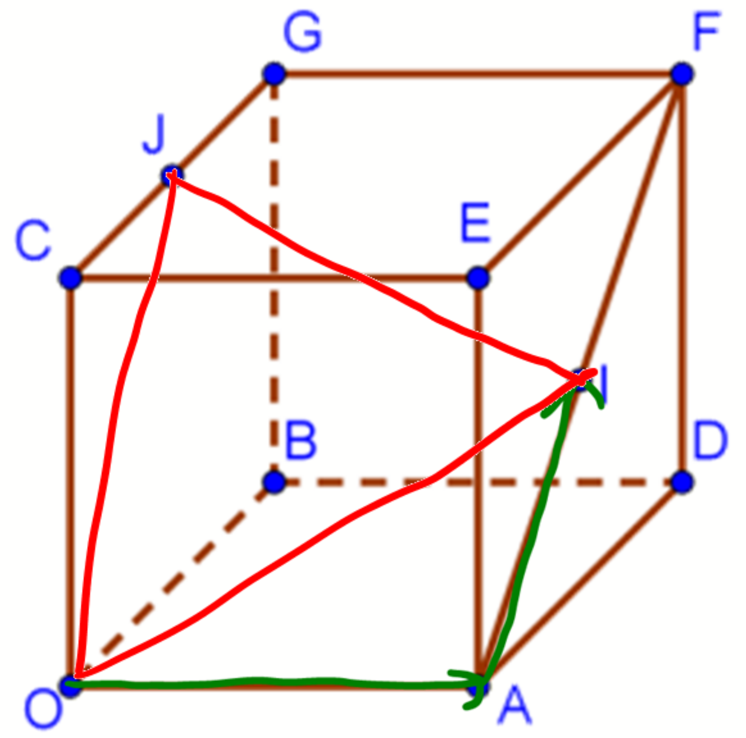
$$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\left(\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w}\right)}$$

2°) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.



$$\mathcal{A}(OIJ) = \frac{\|\vec{OI} \wedge \vec{OJ}\|}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{16} + 1 + \frac{1}{4}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{21}}{4}}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{21}}{8}\ (u.a)}$$

b) Calculer le volume du tétraèdre $OIJE$.

$$\mathcal{V}(OIJE) = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ}\right) \cdot \overrightarrow{OE}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\frac{1}{4} \times 1 + (-1) \times 0 + \frac{1}{2} \times 1\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{\cancel{6}_{\,2}} \times \frac{\cancel{3}^{\,1}}{4}$$

$$= \boxed{\frac{1}{8}\ (u.v)}$$

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les coordonnées de H, justifier que $EH = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

$$\mathcal{V}(OIJE) = \frac{\mathcal{A}(OIJ) \times EH}{3}$$

$$\Rightarrow EH = \frac{3\mathcal{V}(OIJE)}{\mathcal{A}(OIJ)}$$

$$= \frac{\frac{3}{\cancel{8}}}{\frac{\sqrt{21}}{\cancel{8}}}$$

$$\Rightarrow EH = \frac{3\sqrt{21}}{21}$$

$$\Rightarrow \boxed{EH = \frac{\sqrt{21}}{7}}$$

3°) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-2z+\frac{11}{7}=0$

Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ) .

$M(x,y,z)\in(S)$

$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+z^2-2z+\frac{11}{7}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1^2+(y-0)^2+(z-1)^2-1^2+\frac{11}{7}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=-\frac{11}{7}+2$

$=\frac{3}{7}>0$

$S_{(I(x_I,y_I,z_I),R)}$

$S:(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2$

$x^2\pm\alpha x=\left(x\pm\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

Donc (S) est une sphère de centre $I(1,0,1)$ et de rayon $R=\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$$d(E,(OIJ)) = EH = \frac{\sqrt{21}}{7} = R$$

Donc $\boxed{\text{(S) est une sphère tangente au plan (OIJ)}}$