Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : 4ème Mathématiques

Devoir de contrôle N°2

Exercice 1 — 25 min — 3 pts

Donner la bonne réponse :

1 S est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ Alors $S \circ S$ est :

- **a** Symétrie centrale
- **b** homothétie de rapport -2
- **c** homothétie de rapport 2

2 $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$est un repère orthonormé direct. Soient $A(1)$; $B(2+i)$ et $C(2+2i)$. S est la similitude directe tels que $S(C) = A$ et $S(O) = B$. Alors la forme complexe de S est :

- **a** $z' = -\frac{1}{2}z + 2 + i$
- **b** $z' = -\frac{i}{2}z + 2 + i$
- **c** $z' = -\frac{i}{2}\bar{z} + 2 + i$

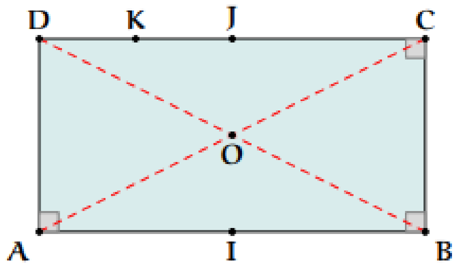
3 Dans le plan orienté, Soit $f = h_{(O;-2)} \circ r_{(O;\frac{\pi}{3})}$

- **a** f est une similitude directe de centre O, de rapport -2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- **b** f est une similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$
- **c** $h_{(O;-2)} \circ r_{(O;\frac{\pi}{3})} = r_{(O;\frac{\pi}{3})} \circ h_{(O;-2)}$

Exercice 2 — 60 min — 6 pts

Dans la figure ci-contre :

- $ABCD$ est un rectangle direct de centre O.
- $AB = 2AD$.
- I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[JK]$.



1 Soit S la similitude directe telle que $S(B) = D$ et $S(C) = K$

- **a** Déterminer le rapport de S et une mesure de son angle.
- **b** Soit Ω le centre de S. Trouver une construction géométrique de Ω.
- **c** Soit E le symétrique de B par rapport à C.
  Montrer que $\Omega E = 2\Omega J$ et que $(\Omega E) \perp (\Omega J)$.

2 On suppose dans cette question que $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan.

- **a** Déterminer la transformation complexe associée à S.
- **b** En déduire l'affixe du centre Ω de S.

3 Soit R la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $h = R \circ S$.

- **a** Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport.
- **b** Déterminer $h(B)$, en déduire le centre de h.

Exercice 3 — 55 min — 5 pts

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx$.

1)
   a) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, interpréter graphiquement I_0 et donnez sa valeur exacte.
   b) Calculer I_1.

2)
   a) Montrer que : (I_n) est décroissante.
   b) En déduire que (I_n) est convergente.

3)
   a) En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
   On a : $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$.
   b) Calculer $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Exercice — 60 min — 6 pts

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dt$ pour $n \in IN^*$.

1) Soit f la fonction définie sur [0,1] par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que pour tout $M(x,y) \in (C)$, on a $x^2 + y^2 = 1$. Caractériser alors (C).

b) Interpréter géométriquement I_0. En déduire la valeur de I_0.

c) Calculer I_1.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} I_n$.

3) a) Montrer que (I_n) est une suite strictement positive et décroissante.

b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a : $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Trouver alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $n(n+1)(n+2)I_n I_{n-1}$ est constante et calculer sa valeur.

c) En remarquant $n(n+1)(n+2)I_n^2 = \frac{\pi}{2}\frac{I_n}{I_{n-1}}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\, I_n$.

Taki Academy
www.takiacademy.com

تهنى على قرايتك

Magazines

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba