Mathématiques

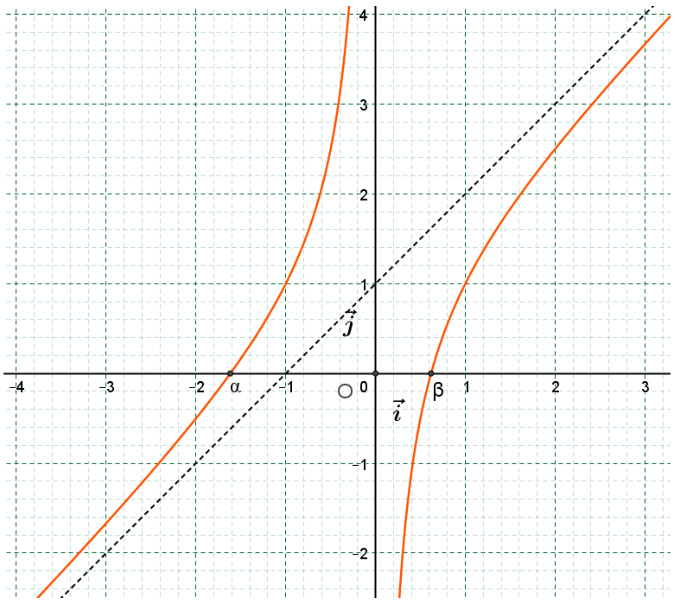
Classe : Bac Maths

Série : Série N°14

Thème : Prototype devoir de contrôle 1

Nom du Prof : BENMBAREK MAHMOUD

Exercice 1 — 35 min — 6 pts



Dans la figure ci-contre Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.

- f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
- Γ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses α et β.
- L'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D} : y = x+1$ sont deux asymptotes à Γ.

1 En s'aidant du graphique, déterminer:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x)-x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (f(x)+x^2)$

c) Etudier la limite de $\dfrac{f(\sin x)}{x}$ en 0.

2 Soit la fonction φ définie par $\varphi(x) = f\circ f(x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{E}$ de φ.

b) Déterminer, en justifaint: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f\circ f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (f\circ f(x) - x)$.

c) En déduire la branche infinie à la courbe de φ au voisinage de $+\infty$.

3 Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $[\beta\,;1]$ tel que $f(c) = f\left(\dfrac{c+\beta}{2}\right)$.

4 Soit la fonction g définie par $g(x) = x.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b) Calculer $g(-1)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

c) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$.

d) Déterminer alors $g\left(\left]-\infty\,;-1\right]\right)$

Exercice 2 — 43 min — 7 pts

Partie A: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \leqslant S_n < 1 - \frac{1}{n+1}$.

c) Montrer que la suite (S_n) converge vers un réel l de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_{2n} = S_n$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_{2n+1} = S_n + \frac{1}{2n+1}$.

c) Montrer que (U_n) converge vers l.

Partie B: n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\,;1]$ par $f_n(x) = (x+n)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

1

a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $]0\,;1[$ une solution unique α_n.

b) Montrer que (α_n) est décroissante.

c) Montrer que (α_n) converge vers 0.

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = \frac{2}{\pi}$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\alpha_k + k}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\frac{1}{2n+1} + S_n \leqslant W_n \leqslant S_n + \frac{1}{n}$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$

Exercice 3 — 42 min — 7 pts

m étant un nombre complexe **différent** de i.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z définie par: $(E) : z^2 - i(\overline{m} + 2 + i)z - 2(\overline{m} + i) = 0$.
On désigne par Δ le discriminat de (E).

   a) Vérifier que $\Delta = -(\overline{m} - 2 + i)^2$.

   b) Résoudre alors l'équation (E).

   On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) où z_1 est la solution indépendante de m.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2. On désigne par I, M et P les points d'affixes respectives i, m et $z_P = \dfrac{z_1}{z_2}$.

   a) Vérifier que $\dfrac{z_{\overrightarrow{OP}}}{z_{\overrightarrow{IM}}} = \dfrac{2}{|m - i|^2}$.

   b) On note par z_Q l'affixe du point Q, le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.
   Vérifier que $z_Q = -\overline{m}$.

3. A et B désignent les points d'affixes respectives $2i$ et $-i$.
Montrer que pour tout point M distinct de A et B on a: $(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}})[2\pi]$.

4. Dans la suite, on prendra $m = \dfrac{i}{2} + \dfrac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et soit J le milieu du segment $[AB]$.

   a) Montrer que BMA est un triangle rectangle en M et que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{JM}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

   b) Construire M puis déduire une construction du point P.