



Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Dérivabilité

📍 Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina /
Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir /
Gabes / Djerba



Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Retenons

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f \times g$	$f'g + fg'$
f^n	$nf'f^{n-1}$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
\sqrt{f}	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\sqrt[n]{f}$	$\frac{1}{n} \frac{f'}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{f^{n-1}}} = \frac{1}{n} \frac{f'}{\sqrt[n]{f^{n-1}}}$
$g(x) = f(ax + b)$	$g'(x) = a \cdot f'(ax + b)$

Retenons

Fonction	Fonction dérivée
λf	$\lambda f'$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$f(\sin x)$	$(\cos x) \cdot f'(\sin x)$
$f(\cos x)$	$(-\sin x) \cdot f'(\cos x)$
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	$-\frac{1}{x^2} \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln u(x) $	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
$g(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$	$g'(x) = u'(x)f(u(x))$

Dérivée de la fonction composée

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(a)$.

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

- Si $\begin{cases} f & \text{est dérivable sur } I \\ g & \text{est dérivable sur } J \\ \forall x \in I & f(x) \in J \end{cases}$
Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors f est continue en a .

Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur intervalle I . La fonction f' est la dérivée première de f .

Si f' est dérivable sur I , sa fonction dérivée notée f'' ou $f^{(2)}$ est la dérivée seconde de f .

Si $f^{(n-1)}$, ($n \geq 2$) est dérivable sur I , sa fonction dérivée est la fonction dérivée n -ième de f , ou dérivée d'ordre n de f on la note $f^{(n)}$.

Dérivée et extremum local

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I :

- On dit que f admet un maximum local en a , s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : pour tout $x \in J$ on a : $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un minimum local en a , s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : pour tout $x \in J$ on a : $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un extremum local en a . Si f admet un maximum ou un minimum local en a .

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a :

- Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$
- Si f' s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extremum local en a .



Accroissements finis

Théorème de Rôle

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $a < b$. Si

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation graphique

Si les conditions du théorème de Rôle sont justifiées pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ alors la courbe de f admet au moins une tangente horizontale.

Théorème (Égalité des accroissements finis)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $a < b$. Si

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interprétation graphique

Si les conditions du (T.A.F) sont justifiées pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ alors la courbe de f admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB) tel que $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Théorème (Inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $a < b$. Si

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$

Alors : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

corollaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si

- f est dérivable sur I
- il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$
- a et b sont deux réels de I

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.

Accroissements finis et suites récurrentes

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction dérivable sur un intervalle I . Si

- il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$
- il existe un réel α de I tel que $f(\alpha) = \alpha$
- $\forall n, u_n \in I$

Alors : $\forall n, |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$

Théorème (Signe de la dérivée et sens de variation)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si la fonction dérivée f' est nulle, alors la fonction est constante sur I .
- Si la fonction dérivée est strictement positive (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- Si la fonction dérivée est strictement négative (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

Alors : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Si $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$ alors la fonction f est constante sur $[a, b]$.
- Si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$ alors la fonction f est croissante sur $[a, b]$.
- Si $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur $[a, b]$.
- Si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$ alors la fonction f est décroissante sur $[a, b]$.
- Si $\forall x \in]a, b[, f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur $[a, b]$.





Taki Academy
www.takiacademy.com



Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina /
Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir /
Gabes / Djerba



www.takiacademy.com



73.832.000