Mathématiques

Thème : Nombres complexes

Exercices de synthèse

Exercice N°3

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : (E_θ) : $z^2 - 2iz - (1 + e^{2i\theta}) = 0$. θ est un paramètre réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Soient x et y deux réels.

2. Montrer que $e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$ et que $e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ), puis écrire les deux solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

4. Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Montrer que O, A et B ne sont pas alignés et que le triangle OAB est rectangle en O.

b) Déterminer la valeur de θ, pour que le triangle OAB soit isocèle en O.

$$2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$$

1. Soient x et y deux réels.

2. Montrer que $e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$ et que $e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$.

$$2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$= \left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$= e^{i\left(\frac{x\cancel{-y}+x\cancel{+y}}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\cancel{-x}+y\cancel{+x}+y}{2}\right)}$$

$$= \boxed{e^{ix} + e^{iy}}$$

$$2i\sin\alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$$

$$2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$= \left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$= e^{i\left(\frac{x-\cancel{y}+x+\cancel{y}}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\cancel{-x}+y+\cancel{x}+y}{2}\right)}$$

$$= \boxed{e^{ix} - e^{iy}}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ), puis écrire les deux solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

$$(E_\theta) : z^2 - 2iz - (1 + e^{2i\theta}) = 0$$

$b = -2i = 2b'$
$(b' = -i)$

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

$$= (-i)^2 + (1 + e^{2i\theta})$$

$$= \cancel{-1} + \cancel{1} + e^{2i\theta}$$

$$= (e^{i\theta})^2$$

$\Rightarrow \delta' = e^{i\theta}$ est une racine carrée de Δ'

$$z_1 = \frac{-b' + \delta'}{a} = i + e^{i\theta}$$

$$z_2 = \frac{-b' - \delta'}{a} = i - e^{i\theta}$$

Ainsi $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{ i + e^{i\theta} \,;\, i - e^{i\theta} \right\}}$

*) $z_1 = i + e^{i\theta}$

$= e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\theta}$

$= \boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}}$

avec $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) > 0$

car $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

*) $z_2 = i - e^{i\theta}$

$= e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\theta}$

$= 2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

$= \boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$

avec $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) > 0$

car $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

4. Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Montrer que O, A et B ne sont pas alignés et que le triangle OAB est rectangle en O.

$$\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}{\cancel{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot \cancel{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}}{\cancel{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}}$$

$$= i\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \in i\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ O, A et B ne sont pas alignés et $(OA) \perp (OB)$

Ainsi $\boxed{\text{le triangle OAB est rectangle en O}}$

b) Déterminer la valeur de θ, pour que le triangle OAB soit isocèle en O.

OAB est isocèle en O

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right) = 1$

avec $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{\theta = 0}$