Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : géométrie dans l'espace

Exercice 1 — 30 min — 5 pt

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1°) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

2°) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.

a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b) Montrer que $P\cap S$ est un cercle $\mathcal{C}$ de centre $J(2,3,0)$ dont on déterminera le rayon.

c) Déterminer $Q\cap S$.

3°) On donne les points $A(0,0,1)$ e, $B(0,1,2)$ et $C(2,2,5)$.

a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que pour tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=2(x+y-z+1)$.

4°) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels $ABCM$ est un tétraèdre de volume

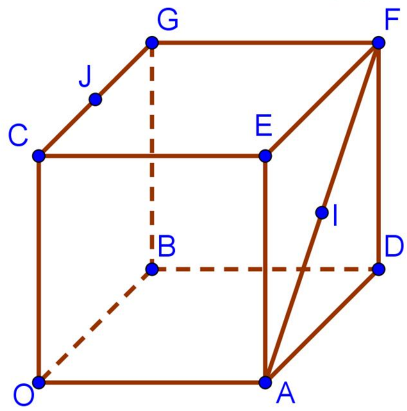
égal à 2.

Exercice 2 — 30 min — 4 pt

L'espace est rapporté à un repère direct $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Soit $OADBCEF$ le cube tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AF]$ et $[CG]$.



1°) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

b) Vérifier que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w})$.

2°) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

b) Calculer le volume du tétraèdre $OIJE$.

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les coordonnées de H, justifier que $EH=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3°) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-2z+\frac{11}{7}=0$.

Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ) .

Exercice 3 — 35 min — 5 pt

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,0,2)$, $B(-2,1,-1)$ et $C(0,0,1)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x-z+1=0$.

2°) On considère les points $I(1,-1,-1)$ et $J\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$.

Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire à P.

a) Montrer que la droite Δ coupe le plan P en J.

b) Calculer la distance IJ.

3°) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant :

$x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R que l'on déterminera.

b) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle de centre J et de rayon $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4°) Pour $\theta\in[0,2\pi[$, on considère le point $N(1+\cos\theta,-1+\sin\theta,-3)$.

a) Vérifier que N est un point de la sphère S.

b) Justifier que le point N n'appartient pas au plan P.

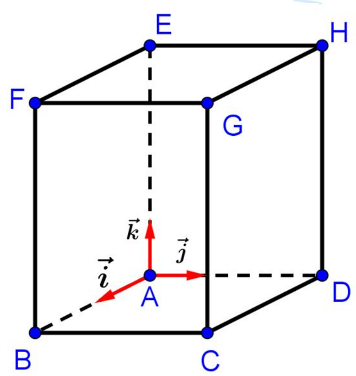
c) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AN}=-5-\cos\theta$.

d) En déduire la valeur de θ pour laquelle le volume du tétraèdre $ABCN$ est minimal.

Exercice 4 — 20 min — 4pt

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut **1** point, une réponse fausse ou l'absence d'une réponse fausse vaut **0** point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que : $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=3\vec{j}$, $\overrightarrow{AE}=4\vec{k}$.



1°) Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}$ est égal à :

a) $-8\vec{k}$, **b)** $-8\vec{i}$, **c)** $-8\vec{j}$.

2°) Soit P le plan (FHC). La droite (BD) est :

a) Strictement parallèle à P, **b)** Perpendiculaire à P, **c)** Contenue dans P.

3°) Le produit mixte $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)$ est égal à :

a) 0, b) –24, c) 24.

4°) L'intersection de la sphère S de centre A et de rayon 4 avec le plan Q d'équation cartésienne $y=3$ est

le cercle :

a) de centre C et de rayon $\sqrt{7}$, **b)** de centre D et de rayon $\sqrt{7}$, **c)** de centre D et de rayon 4.