4 ème Maths

Les nombres complexes

Prof : Lahbib Ghaleb

18 août 2023

I) Les nombres complexes

Définition

Définition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la forme algébrique de z.

Vocabulaire

- On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on la note $b = \mathcal{I}m(z)$.
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé imaginaire pur.

Conséquences

- Dire que le nombre complexe z est réel équivaut à dire que $\mathcal{I}m(z) = 0$.
- Dire que le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à dire que $\mathcal{R}e(z) = 0$.

Propriétés

a, b, a' et b' étant des réels.

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

- En particulier :

$$a + bi = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

II) Opérations sur les complexes

Calculs

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$.

Ainsi, en notant $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ avec a, b, a' et b' sont des réels , on a :

- somme :

$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$

- produit :

$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$

- identités remarquables : elles restent valables dans $\mathbb{C}$, en particulier :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

- inverse : si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + bi} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$

Activité 1

1. Calculer : $\mathrm{i}^0, \mathrm{i}^1, \mathrm{i}^2, \mathrm{i}^3$ et i^4.
2. a) En déduire i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2} et i^{4n+3} pour $n \in \mathbb{N}$.

   b) Calculer alors $i^{2020} + i^{2021} + i^{2022} + i^{2023}$.

Activité 2

1. Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (3+2i)(1-5i). \quad z_2 = (1-i)^{10}. \quad z_3 = \frac{5}{3+4i}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

   a) $3z - 4i = 4iz + 3$.

   b) $(z+2)^2 + 1 = 0$.

III) Conjugué

Définition

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$) est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\overline{z}$.

Exemples :

Si $z = 2 + 6i$, alors $\overline{z} = 2 - 6i$;

si $z = 4$ alors $\overline{z} = 4$;
si $z = -2i$ alors $\overline{z} = 2i$.

Conséquences

Conséquence

Soit $z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) , alors :

$z+\overline{z} = 2a = 2\mathcal{R}e(z)$ et $z-\overline{z} = 2ib = 2i\mathcal{I}m(z)$

Il en résulte que :

- " z est réel" équivaut à "$z = \overline{z}$ ".
- " z est imaginaire pur" équivaut à "$z = -\overline{z}$".

Propriétés

Propriétés

$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

$\overline{z^n} = \overline{z}^n$, pour tout naturel n.

si $z' \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

$\overline{\overline{z}} = z$

Activité 3

Soit $a \in \mathbb{C}$. On pose $Z = a^{2024} + (\overline{a})^{2024}$ et $Z' = \dfrac{a^{2024} - (\overline{a})^{2024}}{1 + a \cdot \overline{a}}$.
Montrer que Z est réel et que Z' est imaginaire pur.

Activité 4

Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1. Vérifier que $j^2 = \overline{j}$ puis calculer j^3.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer j^k selon les valeurs de k.
3. Vérifier que : $1 + j + j^2 = 0$.
4. Calculer la somme : $1 + j + j^2 + \ldots + j^{2024}$

Activité 5

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = z^2 - z + 2$.
Déterminer tous les nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$

IV) Représentation géométrique d’un nombre complexe

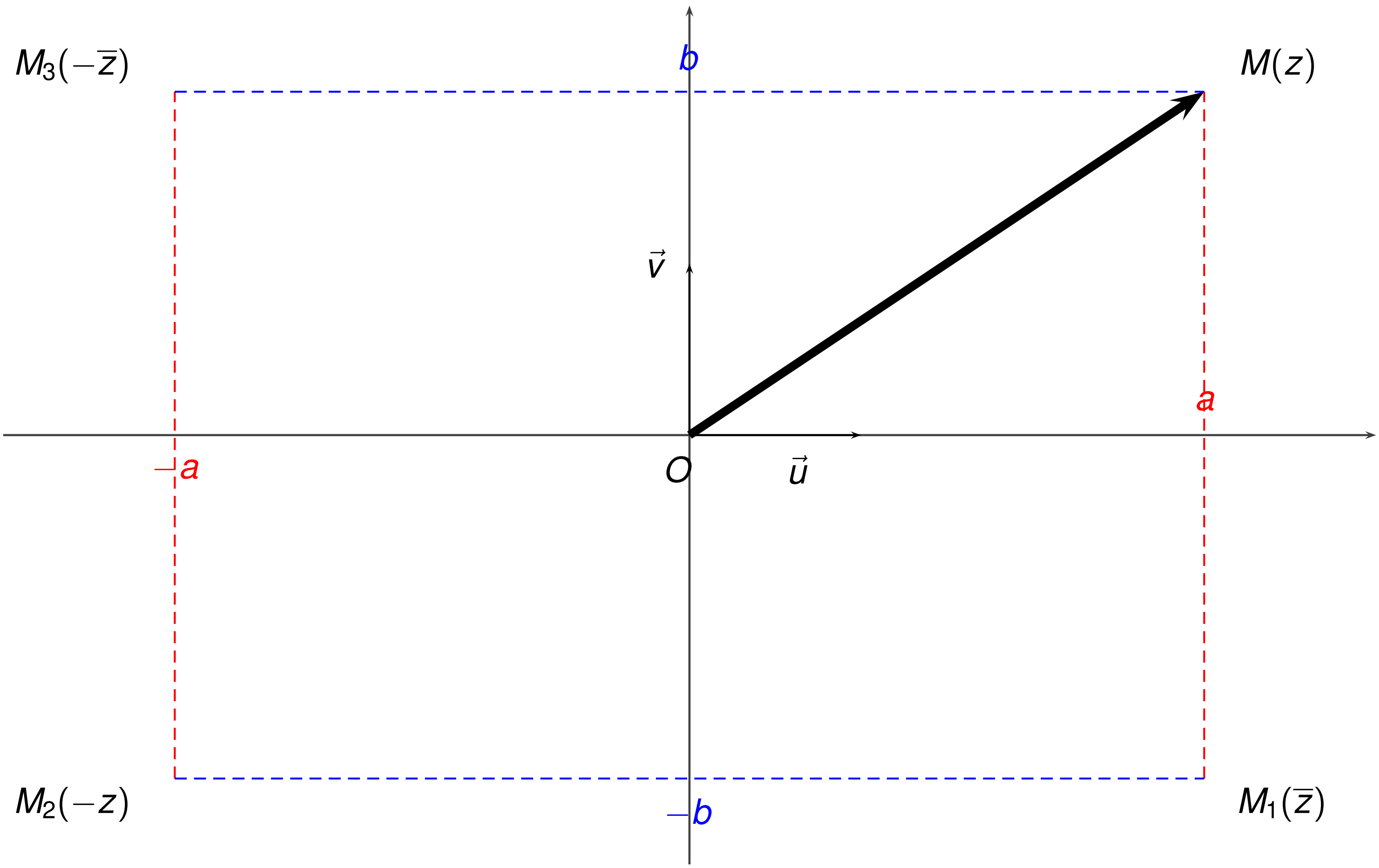
Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

- à tout complexe $z = a + bi$ avec a et b réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ appelés point image et vecteur image de z.

- à tout point $M(a; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}$ $(a; b)$ on associe le nombre complexe $z = a + bi$, appelé affixe de M et affixe de $\vec{w}$.

Le plan est alors appelé plan complexe.


$M_3(-\overline{z})$
b
$M(z)$
$\vec{v}$
a
$-a$
O
$\vec{u}$
$M_2(-z)$
$-b$
$M_1(\overline{z})$

Remarques

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses. Dans le plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels.

- Le point image d'un imaginaire pur appartient à l'axe des ordonnées. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires.

3) Propriétés

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z et z', et le réel λ.

- $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$.

- $\lambda \vec{w}$ a pour affixe λz.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives z_A,z_B et z_C. Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

- Le centre de gravité G du triangle ABC a pour affixe :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

V) Colinéarité-Orthogonalité

Théorème

Soit $\vec{w}$ et $\vec{w}_1$ deux vecteurs tels que $\vec{w}_1$ est non nul.

• Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}_1$ sont colinéaires, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w}_1}}$ est réel.

• Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}_1$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w}_1}}$ est imaginaire pur.

Activité 6

Pour tout point M d'affixe $z \neq -1+2i$ on associe le point

M' d'affixe (z') avec : $z' = \dfrac{z-2+i}{z+1-2i}$.

1. Déterminer alors l'ensemble (E) des points $M(z)$ lorsque z' est réel.
2. Déterminer alors l'ensemble (F) des points $M(z)$ lorsque z' est imaginaire.

Activité 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $-3i$ et $5-i$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et M le point d'affixe $z_M = 5\alpha + (2\alpha - 3)i$.

1. Montrer que pour tout réel α, les points A, B et M sont alignés.
2. Montrer que M est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
3. Dans cette question on suppose que M est le milieu du segment $[AB]$.

   Montrer que les droites (OM) et $(A'B')$ sont perpendiculaires.

Activité 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On désigne par A, B , C et D les points d'affixes respectives $6 + 2i$, $2 - 2i$ et $-2 - 6i$ et -8.

1. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Montrer que le triangle ACD est rectangle.
3. Déterminer l'affixe du point E pour que AEDC soit un rectangle.

Activité 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 5 - i\sqrt{3}$ et $b = 4 + 2i\sqrt{3}$. On note Q le milieu de $[OB]$.

1. Déterminer l'affixe z_K du point K tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.
2.
   1. Démontrer que $\dfrac{z_K - a}{z_K}$ est un imaginaire pur. Que peut-on en déduire pour le triangle OKA ?
   2. Préciser la nature du quadrilatère $OQAK$
3. Soit C le point d'affixe $c = \frac{2a}{3}$.
   1. Calculer $\dfrac{z_K - b}{z_K - c}$
   2. Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ?

VI) Module d'un nombre complexe

Définition

Définition

Soit $z = a + ib$ avec a et b sont deux réels.

On appelle module de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Conséquences

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Conséquences

- Soit z un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.

Le **module** de z, est la distance OM : $|z| = OM$.

- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.

La distance AB est $\left|z_B - z_A\right|$.

Propriétés

Propriétés

- Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Pour tout nombre complexe z, $|-z| = |\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$; $z \neq 0$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$; $z' \neq 0$

Activité 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer les ensembles suivants :

$$(E_1) = \{M(z) \in P / |z - 3i| = |6i - 8|\}$$

$$(E_2) = \{M(z) \in P / |z - 3i| = |\bar{z} + 1 + i|\}$$

$$(E_3) = \{M(z) \in P / |z - 3i| = |iz + 1|\}.$$

Activité 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = \overline{z_B}$.

1 Montrer que le quadrilatère $OBAC$ est un losange.

2 Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que : $|z| = |z - 2|$.

3 A tout point $M(z)$ tel que $z \neq 2$, on associe le point $M'(z')$ défini par $z' = \dfrac{-4}{z-2}$.

a) Prouver que pour tout $z \neq 2$, on a : $|z' - 2| = \dfrac{2\,|z|}{|z-2|}$.

b) En déduire que si $M \in \mathcal{D}$ alors M' appartient à un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

VII) Forme trigonométrique d’un nombre complexe

Argument d'un nombre complexe

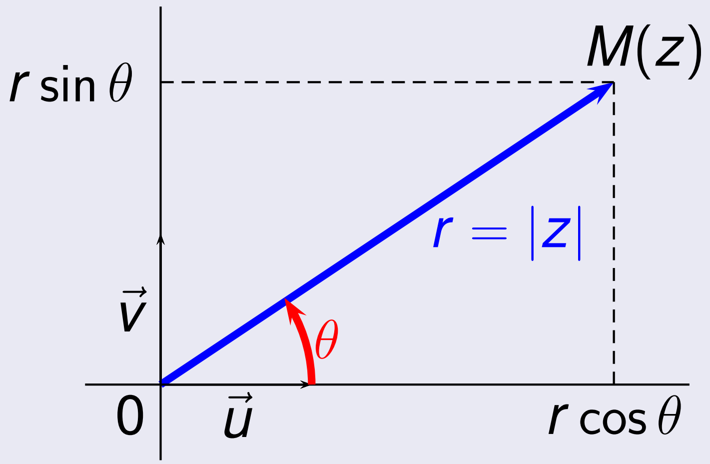
Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$:

$$\arg(z) \equiv \left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OM}}\right) [2\pi]$$



$$z = a + ib$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$$

$$a = r\cos\theta$$

$$b = r\sin\theta$$

Exemples

$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

$\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

$\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

$\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

$\arg(1) \equiv 0[2\pi]$.

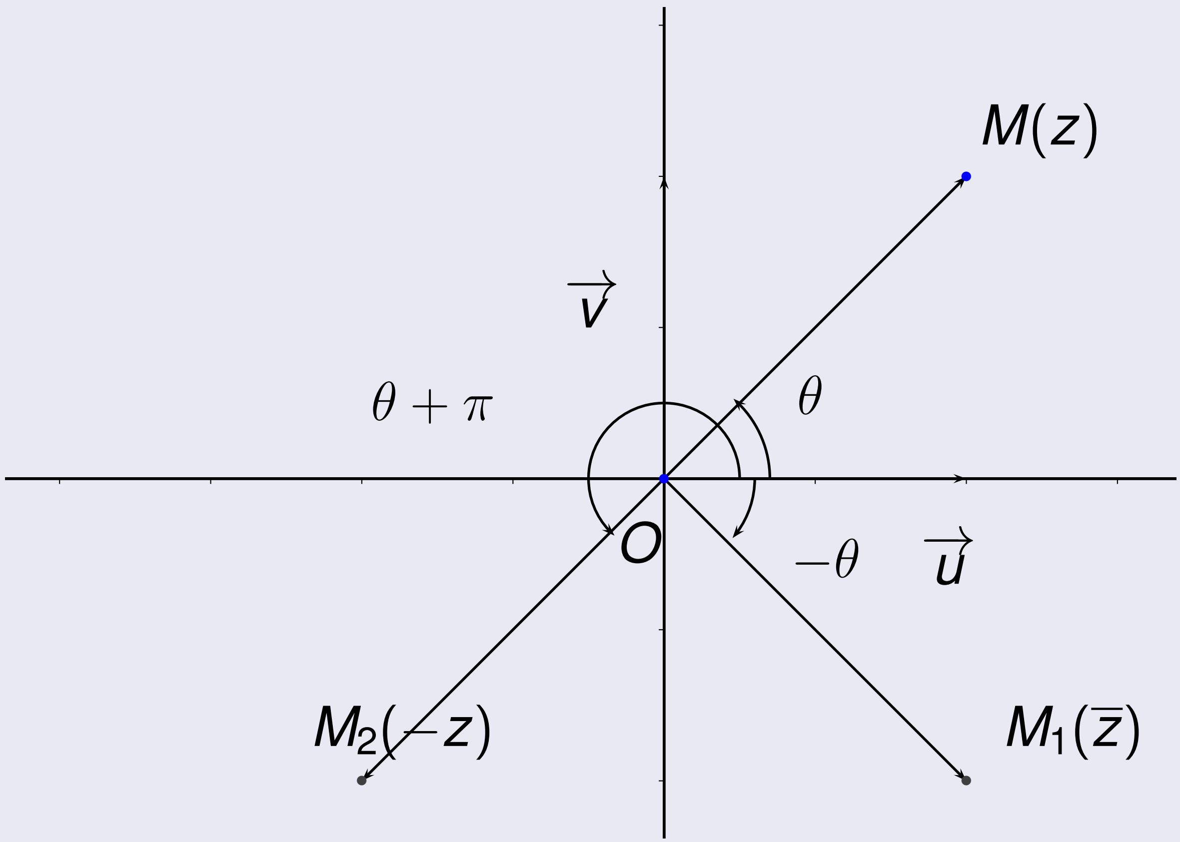
$\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$.

Propriétés

Propriétés

Pour tout nombre complexe non nul z :

- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$ • $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \quad (2\pi)$
- z est un réel, si et seulement si $\arg(z) \equiv 0[\pi]$.
- z est un imaginaire pur, si et seulement si $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.



Forme trigonométrique

Forme trigonométrique

- Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme suivante, dite forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{avec} \qquad r = |z| \text{ et } \theta \equiv \arg(z) \quad [2\pi]$$

- Si la forme algébrique de z est $z = a + bi$, avec $z \neq 0$, alors sa forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, et θ tel que

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et } \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- Si la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors sa forme algébrique est : $z = a + bi$ avec $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.

Exemples

- $z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1-i| &= \sqrt{2} \\ \cos\theta &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

  $\Rightarrow r = \sqrt{2} \text{ et } \theta = -\dfrac{\pi}{4}$

  $\Rightarrow 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right].$

- $z_2 = \sqrt{3} + i : \begin{cases} \left|\sqrt{3}+i\right| &= 2 \\ \cos\theta &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$

  $\Rightarrow r = 2 \text{ et } \theta = \dfrac{\pi}{6}$

  $\Rightarrow \sqrt{3} + i = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right].$

Opérations

Opérations

On considère $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

- Produit

Module : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Argument : $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$

- Puissance

Module : $|z^n| = |z|^n$ Argument : $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \quad (2\pi)$

- Inverse

Module : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ Argument : $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z) \quad (2\pi)$

- Quotient

Module : $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

Argument : $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z) \quad (2\pi)$

Activité 12

Soit $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

Mettre sous forme trigonométrique : $z_1 \times z_2$; $z_1^4 \times z_2^3$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$

Argument et angles orientés

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.

$$\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg\left(z_B - z_A\right)[2\pi]$$

- Soit A , B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A , z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

Activité 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1 Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z - i) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2 Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Activité 14

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + i$ et $b = -1 + i\sqrt{3}$.

1 Écrire a et b sous forme trigonométrique .

2 Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O .

3 Soit C le point de $\mathcal{P}$ d'affixe $c = \left(\sqrt{3} - 1\right) + i\left(\sqrt{3} + 1\right)$.

a) Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$? justifier .

b) Construire les points A , B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

c) Vérifier que $b = ia$ puis donner la forme trigonométrique de c .

d) En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Activité 15

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient $\alpha = 1 + i$ et $\beta = 1 - i$

1. Écrire chacun des nombres α et β sous forme trigonométrique.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et A et B les points d'affixes respectives β et α^n
   a) Donner la forme trigonométrique de $u = \frac{\alpha^n}{\beta}$
   b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles les points O, A et B sont alignés.
   c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le triangle OAB soit rectangle en O .

VIII) Forme exponentielle

Définition

Définition

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et } \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

Conséquences

Conséquences

$e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$; $e^{i0} = 1$

Pour tout réel θ et pour tout entier k, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$

Pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$; $\overline{e^{i\theta}} = -e^{i\theta}$ et $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i(\theta)}$

Propriétés

Propriétés

Pour tout réels θ et θ' :

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Activité 16

Mettre sous forme exponentielle :

$$-2e^{i\frac{\pi}{7}} \ ; \ ie^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad (2\sqrt{3}-2i)e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Formules d'Euler

Formules d'Euler

Formules d'Euler :

Pour tout réel θ on a : $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

Application :

1 Mettre sous forme exponentielle :

$1 + e^{\frac{i2\pi}{5}}$; $-1 + e^{i\frac{2\pi}{5}}$; $1 + e^{i\frac{6\pi}{5}}$; $i + e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2 Linéariser $\sin^3 x$

Formule de Moivre

Formule de Moivre

Formule de Moivre :

Soit $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ et n un entier naturel. On a :

$$\boxed{z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))}$$

Application :

Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.