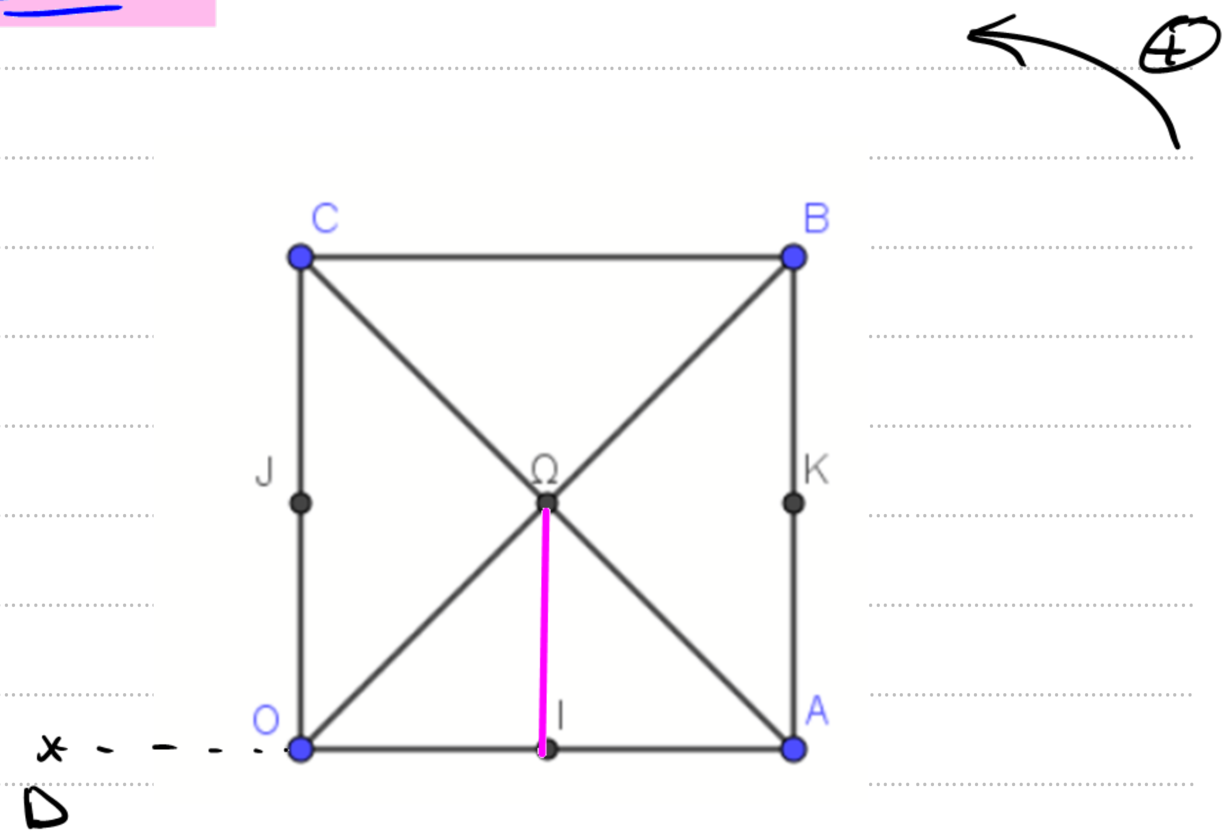
*** Ex 4 :** (S08)



1) $f = S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}$

$(\Omega I) \cap (OB) = \{\Omega\}$.

$f = R(\Omega, \theta)$,

$\theta \equiv 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO})\ [2\pi]$

$\equiv -\pi/2\ [2\pi]$.

$$\boxed{\rho = R_{(\Omega, -\frac{\pi}{2})}}$$

2) $g : O \longrightarrow C$ sans pts fixe
$\quad\quad I \longrightarrow J$

a) $g(A) = ?$ soit $g(A) = A'$.

on a : $\left.\begin{array}{l} g(O) = C \\ g(A) = A' \\ I = O * A \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow g(I) = C * A' \\ \rightarrow J = C * A' \end{array}$

donc $A' = S_J(C) = O$

donc $\boxed{g(A) = O}$

b) g isom sans pts fixes

$\rightarrow \underbrace{g = t_{\vec{u}}}$ ou g symétrie glissante

imp car $\left\{\begin{array}{l} g(O) = C \\ g(I) = J \end{array}\right.$ et $\vec{OC} \neq \vec{IJ}$

donc g symétrie glissante

$$g = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}.$$

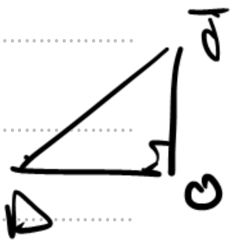
c) $g(K) = D$

$O \longrightarrow C$
$I \longrightarrow J$
$A \longrightarrow O$
$K \longrightarrow D$

$O = I * D$?

AKI isocèle rectangle en A

$\Rightarrow$ ODJ isocèle rectangle en O



$$\left.\begin{array}{l} \text{donc } OJ = OD \\ \text{or } OJ = OI \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow OI = OD$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} (OJ) \perp (OI) \\ (OJ) \perp (OD) \end{array}\right\} \Rightarrow (OI) \parallel (OD) \Rightarrow O, I, D \text{ alignés}$$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $O = I * D$

d) $g = t_{\vec{AO}} \circ S_{(AC)}$?

* g antidéplacement.

$t_{\vec{AO}} \circ S_{(AC)}$ composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc antidéplacement

* $t_{\vec{AO}} \circ S_{(AC)}(A) = t_{\vec{AO}}(A) = O = g(A)$

$t_{\vec{AO}} \circ S_{(AC)}(O) = t_{\vec{AO}}(B) = C = g(O)$

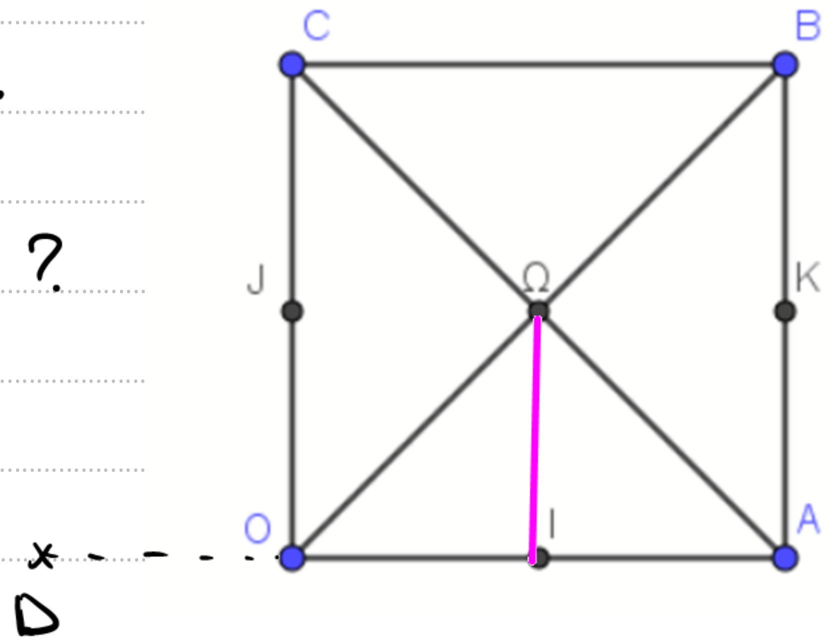
car $\vec{AO} = \vec{BC}$

g et $t_{\vec{AO}} \circ S_{(AC)}$ deux antidéplacements qui coïncident en 2 pts (≠).

donc $g = t_{\vec{AO}} \circ S_{(AC)}$.

$g = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$?

$= S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$?



on a : $g = t_{\vec{AO}} \circ S_{(AC)}$

$= t_{(\vec{A\Omega} + \vec{\Omega O})} \circ S_{(AC)}$

$= t_{\vec{A\Omega}} \circ t_{\vec{\Omega O}} \circ S_{(AC)}$

S_{Δ} $\quad$ $S_{(AC)}$

$\Delta = t_{\frac{\vec{\Omega O}}{2}}(AC) = (IJ)$

donc $g = t_{\vec{A\Omega}} \circ S_{(IJ)}$.

$\vec{A\Omega}$ directeur de (IJ).

donc g symétrie glissante

d'axe (IJ) et de vecteur $\vec{A\Omega}$

3) $u = g^{-1} \circ f$

a) $u(O) = g^{-1} \circ f(O) = g^{-1} \circ R_{(\Omega, -\frac{\pi}{2})}(O)$

$= g^{-1}(C) = O$

$u(I) = g^{-1} \circ f(I) = g^{-1} \circ R_{(\Omega, -\frac{\pi}{2})}(I)$

$= g^{-1}(J) = I$.

* $u = Id$ ou $u = S_{(OI)}$

$u \neq I$ car sinon $g = f$ impossible

donc $\boxed{\varphi = S_{(OI)}}$

b) Γ : $f(M) = g(M)$

$\Leftrightarrow g^{-1}\circ f(M) = g^{-1}\circ g(M) = M$

$\Leftrightarrow g^{-1}\circ f(M) = M$

$\Leftrightarrow S_{(OI)}(M) = M$

$\Leftrightarrow M \in (OI)$

$\boxed{\Gamma = (OI)}$

Bijection.

* si f est continue sur I et strictement monotone

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$

- $f^{-1} : J \longrightarrow I$ et aussi.

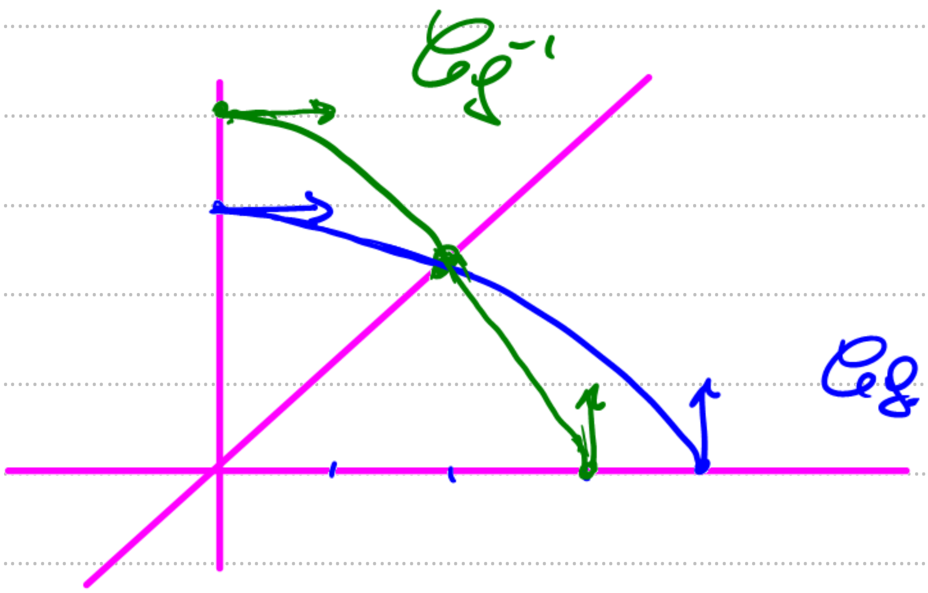
- f^{-1} continue et garde le même sens de variation que f.

- $\begin{pmatrix} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(y) = x \\ y \in I \end{pmatrix}$

- $f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in I$

$f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in J$

- $\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_{(y=x)}(\mathcal{C}_f)$



* Dérivabilité en b ? $b \in J$

$f^{-1}(b) = ?\ a$

1 cas : si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$

théorème : f^{-1} est dérivable en b

et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

$2^{\text{ème}}$ cas : si f est dérivable en a
et $f'(a) = 0$

$\Longrightarrow$ f^{-1} n'est pas dérivable en b

Cor : C_f admet au pt (a, b) une demi-tg horizontale (R.O.N)

$\overset{S(y=x)}{\Longrightarrow}$ $C_{f^{-1}}$ admet au pt (b, a) une demi-tg verticale.

3 cas : si f n'est pas dérivable en a
$\left(\lim_{x \to a^{\pm}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty \right)$

$\Longrightarrow$ f^{-1} dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = 0$

Cor : - - - - .

* Dérivabilité de f^{-1} sur J ?

si f est dérivable sur I et
si f' ne s'annule pas sur I

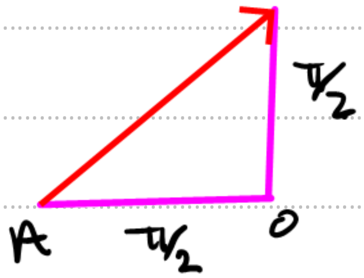
$\Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur J et

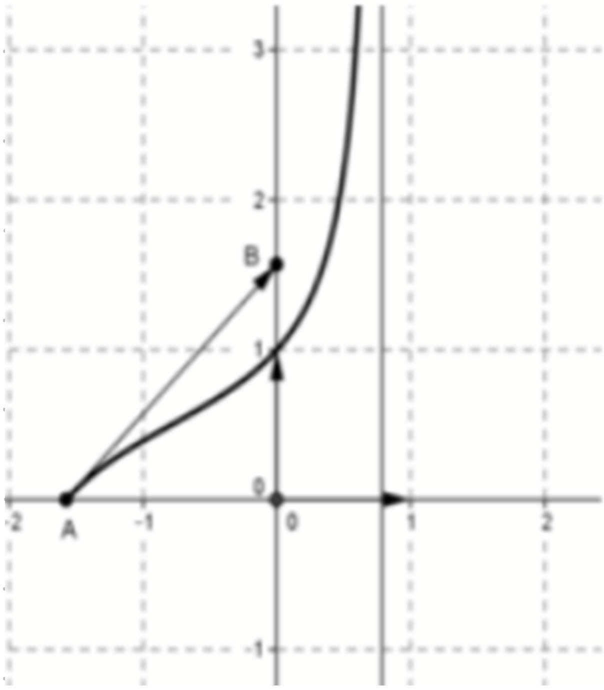
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Formule pour les Fcts Trig
en général
($f^{-1}(x)$ inconnue).

$*$ Ex 1 :

1) $*$ $f_d'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$?





$$f_d'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi/2}{\pi/2} = \boxed{1}$$

$$* \lim_{n \to +\infty} n\, f\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = ?$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\, f\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{f\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

car on pose $y = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\frac{\pi}{2}$.

$$\left(\frac{1}{x} = y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{y \to -\frac{\pi}{2}} \frac{f(y)}{y+\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{y \to -\frac{\pi}{2}} \frac{f(y) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{y+\frac{\pi}{2}} = f_d'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \boxed{1}$$

Rq :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{f\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)+\frac{\pi}{2}} = 1$$

Car
$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} -\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}. \\ \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+\frac{\pi}{2}} = \dots = f_d'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

2) a)

x	$-\pi/2$		$\pi/4$
$f'(x)$	1	$+$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

f continue et strict $\nearrow$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$

donc f réalise une bijection

de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ sur $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[)$

$$= [f(-\tfrac{\pi}{2}), \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x)[$$

$$= [0, +\infty[\; = J$$

$$f^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{4}[$$

b) f^{-1} $[0, +\infty[$ $\qquad$ f $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$

f dérivable et f' ne s'annule pas

sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ donc f^{-1}

est dérivable sur $[0, +\infty[= J$.

x	0		$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	1	$+$	
f^{-1}	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{1} = 1$$