Mathématiques

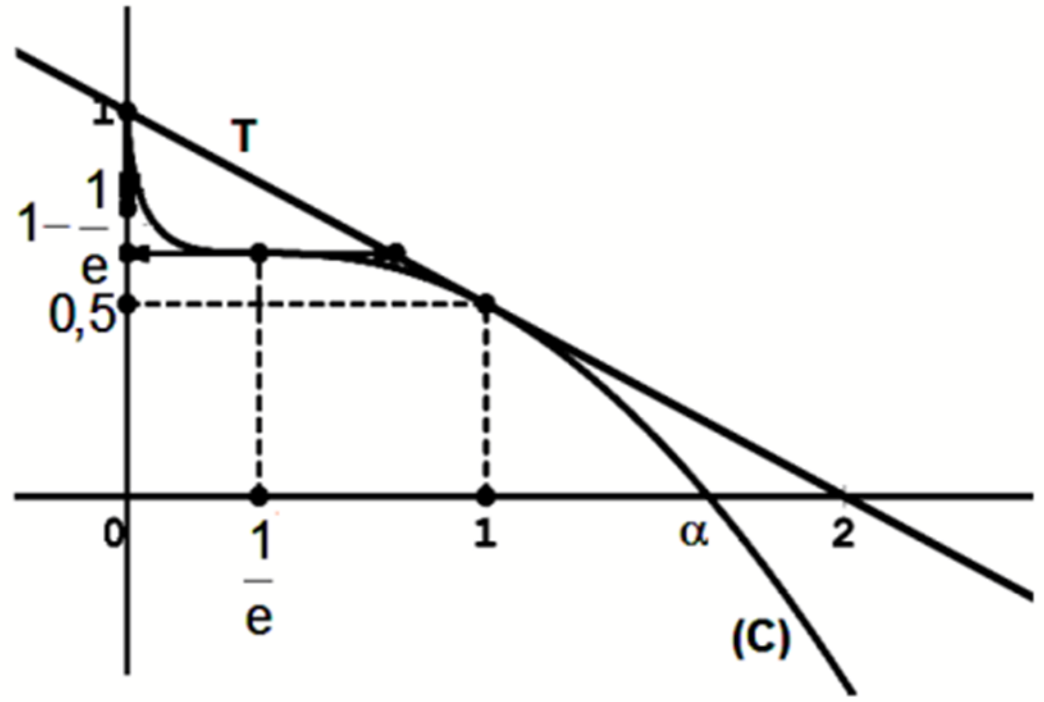
Thème : Fonctions logarithmes

Exercices type devoir

Exercice N°21

A/ La courbe (C) de la figure ci-dessous : est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable Sur $]0,+\infty[$.

- La droite T est la tangente à (C) au point d'abscisse 1 .
- La courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de $(O,\vec{j})$.
- La courbe (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse α .



1) Par une lecture graphique , donner :

a) $f(1)$, $f'(1)$, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Le signe de $f(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[$.

2) On suppose que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $f(x)=a+\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}cx\ln^2(x)$.

a) A l'aide de la question (1) , montrer que $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$.

b) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $f'(x)=-\frac{(1+\ln x)^2}{2}$.

c) Prouver que pour tout $x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$, on a : $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$.

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution β dans $[0,+\infty[$ et que : $\frac{1}{e}\le\beta\le1$.

4) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases}U_0=\frac{1}{2}\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{e}\le U_n\le1$.

b) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|U_{n+1}-\beta|\le\frac{1}{2}|U_n-\beta|$.

c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|U_n-\beta|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|\frac{1}{2}-\beta\right|$.

d) Déterminer alors la limite de la suite (U_n) .

B/ On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=1-\frac{1}{2x}-\frac{\ln^2(x)}{2x}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) En déduire que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $g'(x)=\frac{(1-\ln x)^2}{2x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de g .

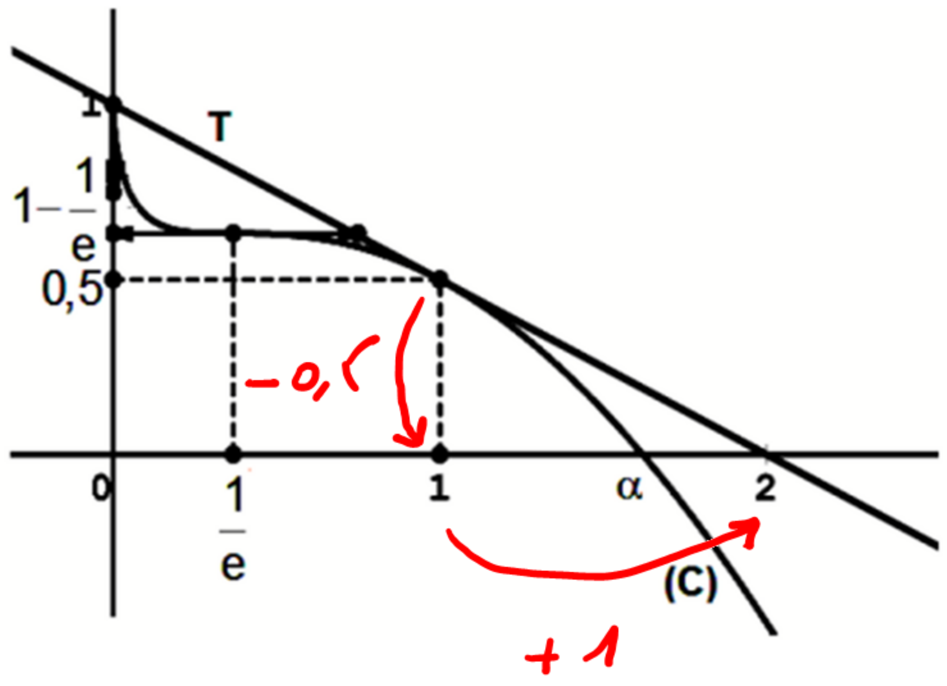
d) Vérifier que $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

2) a) Tracer Γ . (on prendra $\alpha\simeq 1{,}6$) .

b) Calculer l'aire du domaine du plan limité par : Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x=1$ et $x=e$.

1) Par une lecture graphique , donner :

a) $f(1)$, $f'(1)$, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.



$f(1) = \boxed{0,5}$

1ère méthode :

$$f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0,5}{1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

2ème méthode :

$A(1, 0,5) \in T$ et $B(0,1) \in T$

donc $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-0,5}{0-1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\boxed{-\infty}$$

car $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ avec $x>0$ et $f(x)<0$ au $V(+\infty)$ donc $\frac{f(x)}{x}<0$ au $V(+\infty)$

b) Le signe de $f(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2) On suppose que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f(x)=a+\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}cx\ln^2(x)$.

a) A l'aide de la question (1) , montrer que $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$.

On a $f(1)=0,5$

$\Rightarrow a+\frac{1}{2}b=0,5=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{2a+b=1}$ (1)

*) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$f'(x)=\frac{1}{2}b+\frac{1}{\cancel{2}}c\left(1.\ln^2 x+\cancel{x}\times\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{x}}\times\ln x\right)$

$=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\ln^2 x+c\ln x$

$f'(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}b=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{b=-1}$

(1) $\Rightarrow 2a=1-b=1-(-1)=2$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$

$\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-\underbrace{\ln e}_{=1}=-1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)+c\underbrace{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}_{=-1}=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{b}_{=-1}+\frac{1}{2}c-c=0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow \boxed{c=-1}$

Ainsi

$$\begin{cases} f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\ln^2 x \ , \ \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

b) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = -\dfrac{(1+\ln x)^2}{2}$.

$\forall x>0,\ f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x$

$= -\frac{1}{2}\left(1+\ln^2 x + 2\ln x\right)$

$= \boxed{-\dfrac{(1+\ln x)^2}{2}}$

c) Prouver que pour tout $x \in \left[\frac{1}{e},1\right]$, on a : $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$.

On a $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e} \le x \le 1$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{e}\right) \le \ln x \le \ln 1$ car $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow -1 \le \ln x \le 0$

$\Leftrightarrow 0 \le 1 + \ln x \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le (1+\ln x)^2 \le 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}(1+\ln x)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le f'(x) \le 0 \le \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |f'(x)| \le \frac{1}{2}$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right], \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{2}}$

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution β dans $[0,+\infty[$ et que : $\frac{1}{e}\le\beta\le 1$.

On pose $\boxed{h(x)=f(x)-x}$

$f(x)=x \iff h(x)=0$

h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$h'(x)=f'(x)-1$

$=-\frac{(1+\ln x)^2}{2}-1<0$

donc h est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$

sur $h([0,+\infty[)=]\lim\limits_{+\infty} h, h(0)]$

$=]-\infty,1]$

car $\lim\limits_{+\infty} h=\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{f(x)}_{-\infty}\underbrace{-x}_{-\infty}=-\infty$

et comme $0 \in h([0,+\infty[)$

alors 0 admet un unique antécédent

$\beta \in [0,+\infty[$ c.à.d $\boxed{\beta \text{ est l'unique}}$

$\boxed{\text{solution de l'équation } h(x)=0 \iff f(x)=x}$

$$h\left(\frac{1}{e}\right)\cdot h(1)=\left(f\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{e}\right)\cdot\left(f(1)-1\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\underbrace{\left(1-\frac{2}{e}\right)}_{>0}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{<0}<0$$

T.V.I
$\Rightarrow$ $\boxed{\beta \in \left[\frac{1}{e},1\right]}$

4) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{e} \leq U_n \leq 1$.

•) Pour $n = 0$, $\frac{1}{e} \leq U_0 = \frac{1}{2} \leq 1$ (vraie)

•) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$\frac{1}{e} \leq U_n \leq 1$

et montrons que $\boxed{\frac{1}{e} \leq U_{n+1} \leq 1}$

On a $\frac{1}{e} \leq U_n \leq 1$ et f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{e}, 1]$

donc $f(1) \leq f(U_n) \leq f(\frac{1}{e})$

$\Rightarrow \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1 - \frac{1}{e} \leq 1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{e} \leq U_{n+1} \leq 1}$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{e} \leq U_n \leq 1}$

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_{n+1}-\beta| \leq \frac{1}{2}|U_n-\beta|$.

•) f est dérivable sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

•) $\forall t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, $|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall a, b \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, on a :

$$|f(b)-f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$$

et comme $\underbrace{u_n \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]}_{\forall n \in \mathbb{N}}$ et $\beta \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} - \underbrace{f(\beta)}_{\beta}| \leq \frac{1}{2}|u_n-\beta|$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a :}}$

$$\boxed{|u_{n+1}-\beta| \leq \frac{1}{2}|u_n-\beta|}$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \beta\right|$.

·) Pour $n=0$, $|u_0 - \beta| = \left|\frac{1}{2} - \beta\right|$

$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left|\frac{1}{2} - \beta\right|$

(vraie)

·) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \beta\right|$

et montrons que

$|u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left|\frac{1}{2} - \beta\right|$

On a $\boxed{|u_{n+1} - \beta|} \leq \boxed{\frac{1}{2}|u_n - \beta|}$

et $\boxed{\frac{1}{2}|u_n - \beta|} \leq \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left|\frac{1}{2} - \beta\right|}$

donc $|u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left|\frac{1}{2} - \beta\right|$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \beta\right|}$

d) Déterminer alors la limite de la suite (U_n).

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |U_n - \beta| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \beta\right|}_{\to 0}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \beta\right| = 0$

car $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |U_n - \beta| = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \beta = 0$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \beta}$

B/ On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=1-\frac{1}{2x}-\frac{\ln^2(x)}{2x}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\forall x>0,\ g(x)=1-\frac{1}{2x}-\frac{\ln^2 x}{2x}$

$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$

$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$

$=\boxed{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\ln^2 x$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

$\Leftrightarrow \ln x=-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

b) En déduire que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $g'(x)=\dfrac{(1-\ln x)^2}{2x^2}$

$\forall x>0,\ g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=f\circ u(x)$

avec $u(x)=\frac{1}{x}$

$\cdot)$ u est dérivable sur $]0,+\infty[$

$\cdot)$ $\forall x>0,\ \frac{1}{x}>0$

donc $\forall x\in]0,+\infty[,\ \frac{1}{x}\in]0,+\infty[$

u dériv sur I et v dériv sur $u(I)$

$\Rightarrow v\circ u$ est dériv sur I

donc $u(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$

$\cdot)$ f est dérivable sur $]0,+\infty[$

d'où $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$

$\forall x>0,\ g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$

$= -\frac{1}{x^2} \cdot \left(- \frac{\left(1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2}{2} \right)$

$= \boxed{\frac{(1-\ln x)^2}{2x^2}}$

$v \circ u(x) \xrightarrow{d} u'(x) \cdot v'(u(x))$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

c) Dresser le tableau de variation de g .

le signe de $g'(x)$ est celui de $(1-\ln x)^2$

$$g'(x)=0 \iff 1-\ln x=0$$
$$\iff \ln x = 1 = \ln e$$
$$\iff x=e$$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1

$$\lim_{0^+} g = \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

or $\begin{cases} \lim\limits_{0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 = \lim_{+\infty} g$$

$$g(e) = 1 - \frac{1}{2e} - \frac{\ln^2(e)}{2e}$$

$\ln e = 1$

$$= 1 - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e}$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

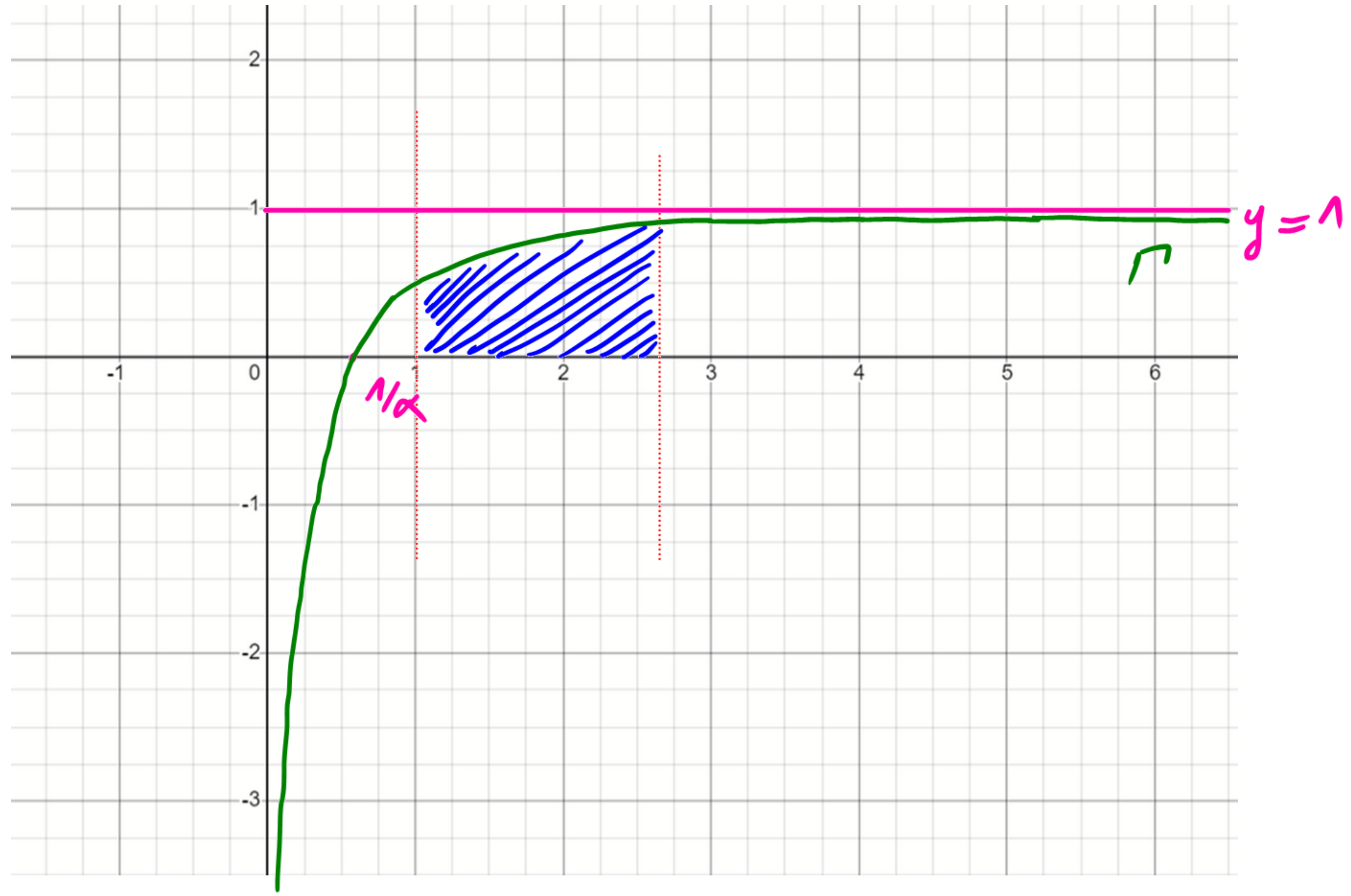
d) Vérifier que $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}\right) = f(\alpha) = \boxed{0}$$

x	0		$1/\alpha$		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$			0	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$- - -$	0	$+ +$	$1-\frac{1}{e}$	$+ + +$	1

x	0		$1/\alpha$		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2) a) Tracer Γ . (on prendra $\alpha \simeq 1{,}6$) .



x	0		$1/\alpha$		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$			0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$		0		$1-\frac{1}{e}$		1

$x=0$ $\quad$ $y=1$

$$\alpha \simeq 1,6 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \simeq 0,625$$

b) Calculer l'aire du domaine du plan limité par : Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = e$.

$$\mathcal{A} = \int_1^e |g(x)|\,dx$$

$$= \int_1^e g(x)\,dx$$

$$= \int_1^e 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\ln^2 x}_{u^2(x)}\,dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e$$

$$= e - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - (1) = \boxed{e - \frac{5}{3}\,(u.a)}$$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{P} \ln|x|$$

$$\frac{u'(x)}{u(x)} \xrightarrow{P} \ln|u(x)|$$

$$u'(x)\cdot u^n(x) \to \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$$

4ème année

4ème année

4ème année