Mathématiques

Classe : 4ème Mathématiques

Devoir de contrôle N°1

Exercice 1 — 40 min — 4.5 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} - \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + x.\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1)a) Montrer que pour tout réel x < 0, on a : $|f(x) - 1| \leq |x|$.

b) Montrer que f est continue en 0

c) Montrer que l'équation f(x) = 0 possède une solution unique α dans l'intervalle]0,1[.

2) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous,

et telle que g(0) = 1 et $0 < g(-1) < \alpha$.

x	$-\infty$	$+\infty$
g	0 ↗	$+\infty$

On considère la fonction h définie par $h(x) = (f \circ g)(x)$

a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $h(-1) > 0$.

c) Montrer que l'équation h(x) = 0 possède une solution unique β dans l'intervalle] − 1, 0[.

d) Montrer que $\alpha = g(\beta)$.

Exercice 2 — 40 min — 4.5 pts

Soit la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^2+n}$.

1)a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente. Soit a= $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2)a) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{k^2+k} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$. En déduire la valeur de a.

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-1)^n(u_n - 2)$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

c) En déduire que la suite (S_n) est convergente vers un réel α et que $\dfrac{35}{60} \leq \alpha \leq \dfrac{47}{60}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{6}$ et (C') le cercle de centre O et de rayon 6.
Soit $a = \sqrt{5}+i$ et A le point d'affixe a.

1) Calculer $|a|$. Placer alors le point A sur l'annexe.

2) Soit B le point d'affixe $b = a - 3ie^{i\frac{\pi}{3}}$.
Calculer AB et donner une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{AB})$. Placer alors le point B sur l'annexe.

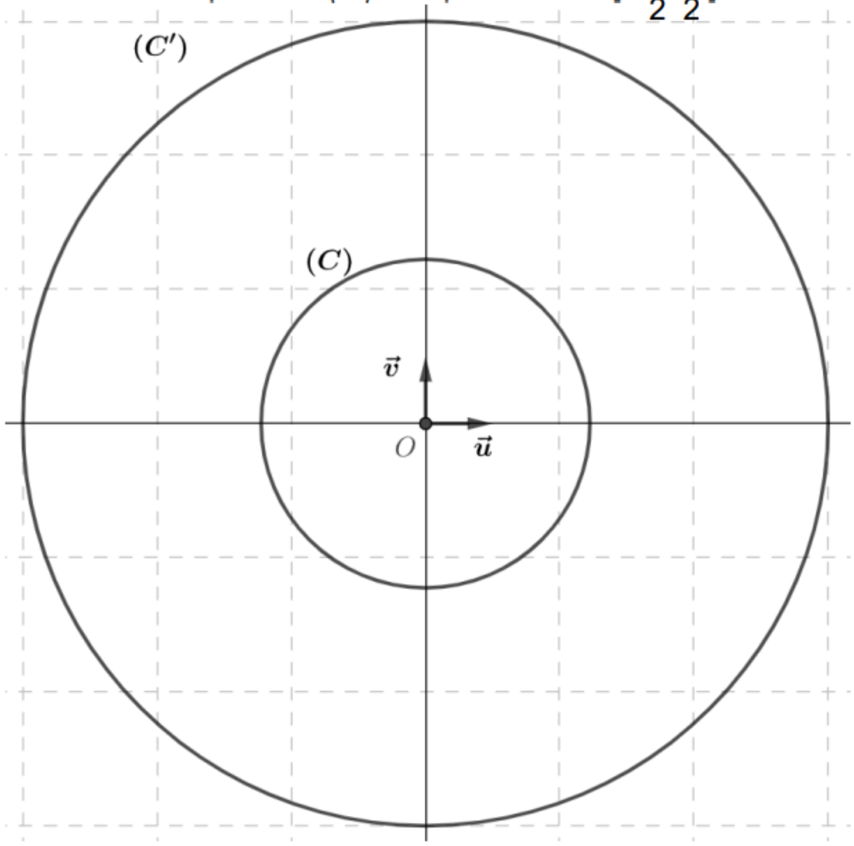
3) Soit β un argument de a .
Déterminer en fonction de β les solutions de l'équation (E) : $z^5 = a\overline{z}^{4}$.

4) Soit Q le point du cercle (C') tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OQ}) \equiv \beta[2\pi]$.
a) Placer sur l'annexe le point Q.
b) Déterminer l'affixe q du point Q.

5)a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_q) : $z^4 - i\left(iq + 4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z^2 - 4iqe^{i\frac{\pi}{3}} = 0$.

b) Placer sur l'annexe les points M_1, M_2, M_3 et M_4 d'affixes resp. z_1, z_2, z_3 et z_4 les solutions de (E_q).

6) Soit $Z = a + 3e^{-i\frac{\pi}{6}} - 2e^{i\theta}$ avec θ un réel de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Déterminer et construire sur l'annexe l'ensemble Γ des points $M(Z)$ lorsque θ décrit $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.



Exercice 4 — 50 min — 5 pts

1 Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_\theta) : z^2 - \frac{1}{2}(1+3i)e^{i\theta}z - e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

a Vérifier que $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2 = 2+\frac{3}{2}i$.

b Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2 Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = (1+i)e^{i\theta}$ et $z_B = \frac{1}{2}(-1+i)e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

a Donner la forme exponentielle de z_A et z_B.

b Montrer que le triangle OAB est rectangle en O.

3 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $M\left(e^{i2\theta}\right)$.

a Montrer que : $e^{i2\theta} - 1 = 2i\sin(\theta)e^{i\theta}$.

b Montrer que : $MA \times MB = \left|e^{i2\theta} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\theta}\right|$.

c En déduire que : $MA \times MB = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\theta\right)^2}$.

d Déterminer, lorsque θ varie , les coordonnées des points M pour lesquels le produit $MA \times MB$ est minimal.

Taki Academy
www.takiacademy.com

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000