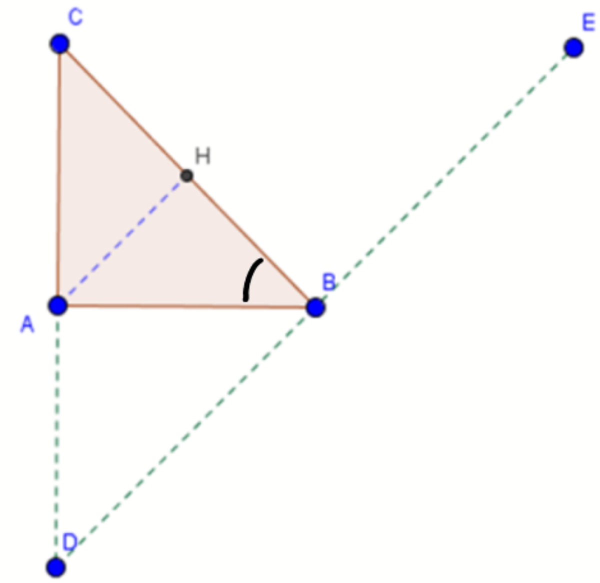
Le 15/01/2024

# Série 24 - Suite

## Exercice 4




1) a) Soit k le rapport et θ une mesure de l'angle de S

$$\left.\begin{array}{l} S(A)=B \\ S(B)=C \end{array}\right\} \Rightarrow k=\frac{BC}{AB}$$

$$= \frac{AB\sqrt{2}}{AB} = \sqrt{2}$$

$$\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}})\ (2\pi)$$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) + \pi\ (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} + \pi\ (2\pi)$$

$$\equiv \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$$

b) $CD = 2AC\quad (D = S_A(C))$

$AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{CD = \sqrt{2}\,CB}$ i)

$$\boxed{\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}}) + \pi\ (2\pi) \\ &\equiv -\pi/4 + \pi\ (2\pi) \equiv \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)\end{aligned}}$$ ii)

i) et ii) $\Longrightarrow$ $S(C) = D$

$S(B) = C$ $\Rightarrow$ $CD = \sqrt{2}\,BC$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

$\Downarrow$

$S(C) = D$

2ème Methode

On a :

i) ABC est un triangle rectangle, isocèle en A et de sens direct

ii) BCD " " " en B et de sens direct

iii) $S(A) = C$ et $S(B) = C$

$\Longrightarrow$ $S(C) = D$

2/ a) $S \circ S(A) = S(S(A)) = S(B) = C$

b) On a $S(\Omega; \sqrt{2}; \frac{3\pi}{4})$ donc

$S \circ S$ est la similitude directe de Centre $\Omega$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Comme $SoS(A) = C \Rightarrow \frac{\Omega C}{\Omega A} = 2$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

c/ $(E) = \{ M \in P ;\ MC = 2MA \}$

$M \in (E) \Leftrightarrow MC^2 = 4MA^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}^2 - 4\overrightarrow{MA}^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\underbrace{\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}}) (\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA}) = 0$

$G_1 = \text{bar} \{ (C,1) ; (A,-2) \}$

$G_2 = \text{bar} \{ (C,1) ; (A,2) \}$

$M \in (E) \Leftrightarrow -\overrightarrow{MG_1} \cdot (3\overrightarrow{MG_2}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$

d'où $(E) = \mathscr{C}_{[G_1G_2]}$.

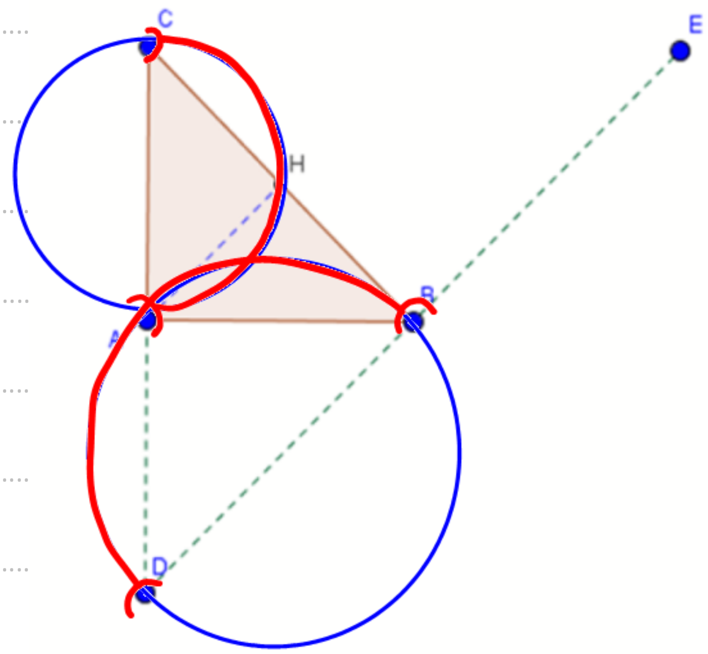
Par suite $\Omega \in (E) \cap \overset{\frown}{AC} \setminus \{A, C\}$ du cercle $\mathscr{C}_{[AC]}$.

On pourra remarquer $SoS(B) = S(C) = D$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega D}}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\Rightarrow \Omega \in \overset{\frown}{BD} \setminus \{B, D\}$ du $\mathscr{C}_{[CD]}$.

Par suite $\{\Omega\} = (\overset{\frown}{CA} \setminus \{A, C\}) \cap (\overset{\frown}{BD} \setminus \{B, D\})$




3-/ a/ L'écriture complexe de $S$ est de la forme $z' = az + b$ où $a = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -1 + i$

On a $S(A) = B \Leftrightarrow z_B = (-1+i)z_A + b$

$\Leftrightarrow b = 1$

Ainsi $z' = (-1+i)z + 1$ est l'écriture complexe de $S$.

b/ $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{2-i} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

4/ $\sigma$ : similitude indirecte tq $\begin{cases} \sigma(A) = B \\ \sigma(B) = C \end{cases}$

Soit $k'$ le rapport de $\sigma$ : $k' = \dfrac{BC}{AB} = \sqrt{2} \neq 1$

$\Rightarrow$ $\sigma$ admet un centre $\omega$

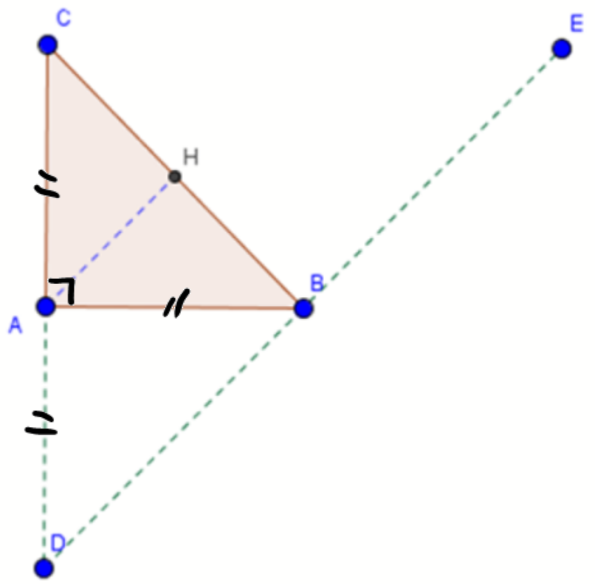
Comme $\sigma \circ \sigma(A) = \sigma(B) = C \Leftrightarrow h_{(\omega, 2)}(A) = C$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\omega C} = 2\overrightarrow{\omega A} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{\omega A} - \overrightarrow{\omega C} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \omega$ : bar $\{(A, 2) ; (C, -1)\}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\omega} = -\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow A =$ milieu de $[\omega C]$

d'où $\omega = D$




1/ i) DBC est un triangle rectangle et isocèle en B et de sens direct

( $(AB) \perp (CD)$ et $A = C * D$ )

d'où $(AB) =$ méd$[CD]$

$AB = AC = AD$

ii) DAB est isocèle, rectangle en A et de sens indirect

iii) $\sigma(A) = B$ et $\sigma(B) = C$

d'où $\sigma(D) = D$ et le rapport de $\sigma = \sqrt{2} \neq 1$

$\Rightarrow D$ : Centre de $\sigma$

Rappel : $G = \text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\alpha+\beta \neq 0$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

i/ $\alpha\beta > 0 \Rightarrow G \in [AB]$.

ii) $\alpha\beta < 0 \Rightarrow G \in (AB) \setminus [AB]$.

iii) $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|} = \dfrac{GB}{GA} > 1 \Rightarrow GB > GA$

5./a) $\varphi = \sigma \circ S^{-1}$

$\varphi$ est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte de rapport $\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$\Rightarrow \varphi$ est un antidéplacement

$\varphi(C) = \sigma \circ S^{-1}(C) = \sigma(B) = C$

$\varphi(B) = \sigma \circ S^{-1}(B) = \sigma(A) = B$

$\varphi$ fixe les pts B et C $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi = S_{(BC)}}$

b/ On a $\varphi = \sigma \circ S^{-1} \Leftrightarrow \sigma = \varphi \circ S$

$\Rightarrow \sigma(C) = \varphi \circ S(C)$

$= \varphi(D) = S_{(BC)}(D) = E$

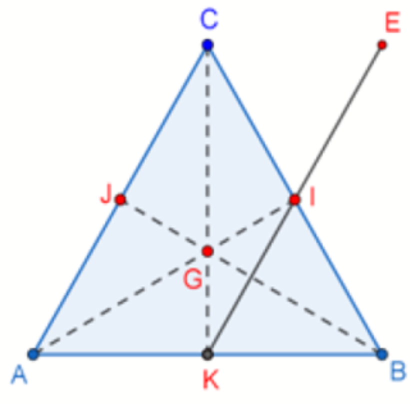
En effet : $\left.\begin{array}{l} B : D * E \\ (BC) \perp (DB) \end{array}\right\} \Rightarrow (BC) : \text{méd}\,[DE]$.

6/ a) L'écriture complexe de $f$ est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $a = (-1+i)$ et $b = 1$

$\Rightarrow$ $f$ est une similitude indirecte.

b) $f$ et $\sigma$ coïncident en deux pts distincts :

## Exercice 3




3/a) On a $EC \neq 0$ et $IG \neq 0$ donc il existe une unique similitude directe $S$ tq $S(E) = I$ et $S(C) = G$.

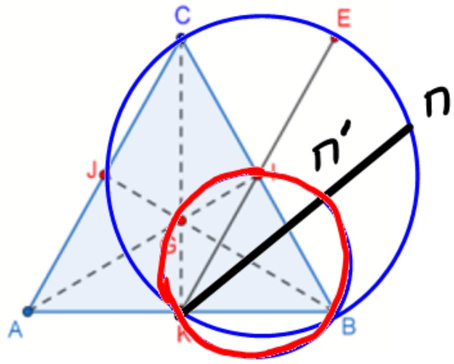
b/ Soit $k$ le rapport et $\theta$ une mesure de son angle

$$\left.\begin{array}{l} S(E) = I \\ S(C) = G \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{IG}{EC} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{a/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta \equiv (\widehat{\vec{EC}, \vec{IG}})\ (2\pi)$$
$$\equiv (\widehat{\vec{IJ}, \vec{IA}})\ (2\pi)$$
$$\equiv (\widehat{\vec{AB}, \vec{AF}})\ (2\pi) \equiv \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$$

c) $\left.\begin{array}{l}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG}}) \equiv \frac{\pi}{6} \ (2\pi) \\ \frac{BG}{BC} = \frac{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}$

alors $B$ est le centre de $S$




4) a) $M \in \Gamma \iff M \in \mathcal{C}_{[BC]}$

$\iff S(M) \in \mathcal{C}_{[S(B)S(C)]}$

$\iff M' \in \mathcal{C}_{[BG]}$

b) Soit $M \in \Gamma \setminus \{B\}$

i) si $M = K \Rightarrow K \in (MM')$

ii) si $M \neq K$

K, M, C et E ∈ Γ

K, C, M' et G ∈ Γ'

$2(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}}) \equiv \boxed{2(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KC}})} + \boxed{2(\widehat{\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KM'}})} \ (2\pi)$

$\equiv \boxed{2(\widehat{\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EC}})} + \boxed{2(\widehat{\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IM'}})} \ (2\pi)$

or $\left.\begin{array}{l} S(E) = I \\ S(M) = M' \\ S(C) = G \end{array}\right\} \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IM'}, \overrightarrow{IG}}) \ (2\pi)$

Alors $2(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EC}}) - 2(\widehat{\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EC}}) \ (2\pi)$

$\equiv 0 \ (2\pi)$

$\Rightarrow K \in (MM')$

c·/ $\boxed{\{M'\} = (KM) \cap D'}$

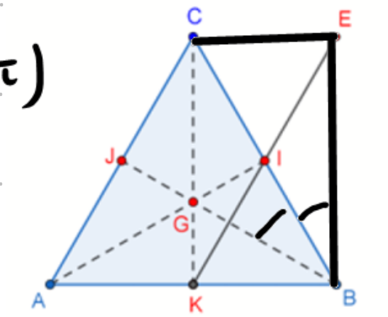
5·/ a) $M_0 = E$.
$$\left.\begin{array}{l} M_0 = E \\ S(M_0) = M_1 = I \\ M_n = S^n(M_0) \end{array}\right\}$$

$$S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_n M_{n+1}$$
$$= M_0M_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} M_0M_1 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n M_0M_1$$
$$= EI\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \cdots + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n\right)$$
$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \left(\sqrt{3}/3\right)^{n+1}}{1 - \sqrt{3}/3}.$$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1} = 0$ Car $-1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{3 - \sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

c·/ On a $(\overrightarrow{BM_0}, \overrightarrow{BM_n}) \equiv \frac{n\pi}{6} (2\pi)$
$(\overrightarrow{BM_0}, \overrightarrow{BM_{2012}}) \equiv 2012\frac{\pi}{6} (2\pi)$




$\boxed{2012 = 6 \times 335 + 2}$

$\equiv 335\pi + \frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{B\Pi_0}, \overrightarrow{B\Pi_{2012}}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} \ (2\pi)$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}}) + (\widehat{\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{B\Pi_{2012}}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} \ (2\pi)$

or $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}}) \equiv \frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{B\Pi_{2012}}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{B\Pi_{2012}}}) \equiv \pi \ (2\pi)$

Ainsi $\boxed{\Pi_{2012} \in (BG)}$

## Série 23 (suite)

### Exercice 10

1°/a) $f$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$ le volume $V$ du solide de révolution engendré par la restriction de (C) autour de l'axe $(O, \vec{\imath})$

est $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos(x)} dx = \pi F(\frac{\pi}{2})$

b/ i/ $t \longmapsto \dfrac{2}{3+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

ii) $x \longmapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $]-\pi, \pi[$

iii) $0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ G est dérivable sur $]-\pi, \pi[$

$\forall x \in ]-\pi, \pi[$ :

$$G'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \frac{\cancel{2}}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1+\tan^2(x/2)}{3+\tan^2(x/2)} = \frac{1/\cos^2(x/2)}{2+\frac{1}{\cos^2(x/2)}} = \frac{1/\cos^2(x/2)}{\frac{2\cos^2(x/2)+1}{\cos^2(x/2)}}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2(x/2)+1} = \frac{1}{\cos(x)+2}$$

c/ F est la primitive de la fct $t \longmapsto \dfrac{1}{2+\cos t}$ sur $]-\pi, \pi[$ qui s'annule de 0

$\Rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{2+\cos(x)} = G'(x) \quad \forall x \in ]-\pi, \pi[$

$\Rightarrow F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in ]-\pi, \pi[$

et $F(0) = G(0) \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow F(x) = G(x) \quad \forall x \in ]-\pi, \pi[$

2/ $H$ est la primitive de la fct $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ tq $H(0)=0 \Rightarrow H$ est derivable sur $\mathbb{R}$

On pose $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \forall x \in ]-\pi, \pi[$

$$\varphi'(x) = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3}}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{3}}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\cancel{\frac{1}{3}}\left(3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = G'(x)$$

$\Rightarrow \varphi(x) = G(x) + C \quad \forall x \in ]-\pi, \pi[$

or $\varphi(0) = G(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Ainsi $G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \forall x \in ]-\pi, \pi[$

5/ On vérifie que la fct $\underbrace{\quad}_{\psi : x \longmapsto \tan(x)}$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$

Soit $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \Rightarrow \psi$ admet une fct reciproque $\psi^{-1}$ definie sur $\mathbb{R}$, $\psi^{-1}$ derivable sur $\mathbb{R}$

$$(\psi^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2} = H'(x)$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(x) = H(x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

de plus $\varphi^{-1}(0) = H(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Ainsi $H$ est la réciproque de la fct tangente définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

c.) $V = \pi F(\frac{\pi}{2})$

$= \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$

$= \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}$ (u.v)