Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions logarithmes

Exercice 1 : 35 min 6 pts

1°) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1+x-x\ln x$.

a) Étudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3{,}5< x_0 <3{,}6$.

c) En déduire le signe de g.

2°) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f\left(\sqrt{x_0}\right)=\dfrac{1}{2x_0}$.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$. (on prendra $x_0 \approx 3{,}6$).

3°) Soit (a_n) la suite définie sur IN^* par : $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Monter que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \le f(x) \le \dfrac{1}{2}\ln x$.

c) En déduire que $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\ln n}{n}\right) \le a_n \le 1-\dfrac{1+\ln n}{n}$.

d) Monter alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

.

Exercice 2 : 25 min 4 pts

Soient les intégrales suivantes : $I=\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J=\int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

1°) Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

b) En déduire que $I=\dfrac{\ln\left(\sqrt{3}+2\right)}{2}$.

2°) a) Vérifier que $J+2I=K$.

b) Montrer que $K=\sqrt{3}-J$. (On pourra faire un intégration par parties).

c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 3 : 25 min 6 pts

1°) On considère la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{\ln x}$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe.

représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-1}{x-1}=-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{\sqrt{x\ln x}-1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

2°) Ci-dessous, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes :

C_1 d'équation : $y=\sqrt{x}$, C_2 d'équation : $y=\sqrt{\ln x}$ et Γ d'équation : $y=\sqrt{x\ln x}$.

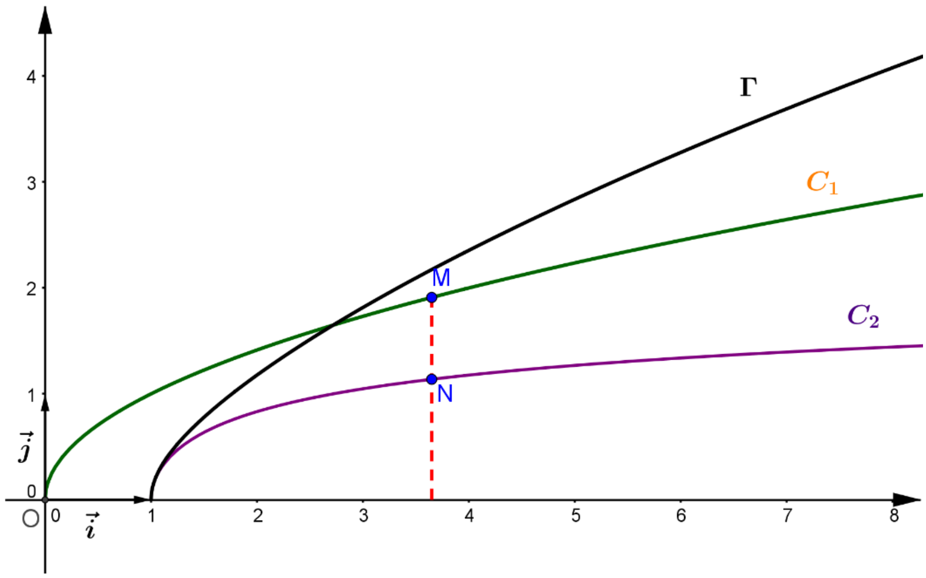
On considère les points M et N de même abscisse x et appartenant respectivement à C_1 et C_2 .

a) Exprimer la distance MN en fonction de x.

b) Construire le point A tel que la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point est horizontale.

On notera α son abscisse.

c) Dresser le tableau de variation de f, puis construire $\mathcal{C}$.



Taki Academy
www.takiacademy.com

Magazines

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba