Taki Academy
www.takiacademy.com

2023-2024

Classe : Bac Maths

Série 14 : Isométrie du plan

Nom du Prof : Lahbib Ghaleb

Exercice 1 — 30 min — 5 pts

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. On note I le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport à O.

1. Montrer que $AO = DB$ et que I est milieu de $[OD]$.
2. Soit f une isométrie qui envoie A sur D et O sur B.
   On pose $g = t_{\overrightarrow{BO}} \circ f$ et K le point d'intersection des médiatrices des segments $[AD]$ et $[BO]$.
   a) Déterminer $g(O)$ et $g(A)$. En déduire que $g = S_{(BO)}$ ou $g = r_{(O,-\frac{2\pi}{3})}$.
   b) Montrer $f = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(OB)}$ ou $f = r_{(K,-\frac{2\pi}{3})}$.
3. On désigne par $f_1 = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(OB)}$ et $f_2 = r_{(K,-\frac{2\pi}{3})}$.
   a) Déterminer $f_2^{-1} \circ f_1(O)$ et $f_2^{-1} \circ f_1(A)$.
   b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $f_1(M) = f_2(M)$.

Exercice 2 — 30 min — 5 pts

Dans le plan orienté, on donne un losange $ABKI$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
On note : $J = A * I$, $O = I * K$ et $B' = S_I(K)$. On se propose de caractériser les isométries f qui transforment A en I et I en K.

1. On pose $g = f \circ t_{\overrightarrow{BA}}$.
   a) Déterminer $g(B)$ et $g(K)$.
   b) Caractériser alors les isométries g.
   c) En déduire que $f = S_{(AK)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ ou $f = R_{(K,-\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.
2. On pose $f_1 = R_{(K,-\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$. On désigne par H le projeté orthogonal de K sur la droite (AB).
   a) Déterminer les droites Δ et Δ' telles que :
   $$R_{(K,\frac{\pi}{3})} = S_\Delta \circ S_{(BK)} \text{ et } R_{(B,-\frac{\pi}{3})} = S_{(BK)} \circ S_{\Delta'}.$$
   b) En déduire que $R_{(K,\frac{\pi}{3})} \circ R_{(B,-\frac{\pi}{3})} = t_{\overrightarrow{AB}}$.
   c) Identifier alors l'isométrie f_1.
3. On pose $f_2 = S_{(AK)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ et $\varphi = f_2^{-1} \circ f_1$.

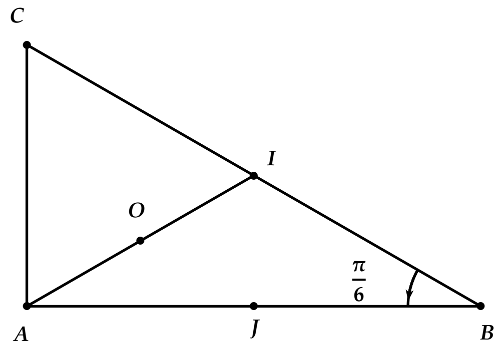
(a) Prouver que $f_2(B') = B$.

(b) Déterminer $\varphi(A)$, $\varphi(I)$ et $\varphi(B)$ puis caractériser φ.

(c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $f_1(M) = f_2(M)$.

Exercice 3 — 30 min — 5 pts

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC rectangle en A de sens direct et tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.
On désigne par I, J et O les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et $[AI]$.



1. Montrer que le triangle ACI est équilatéral.

2. (a) Caractériser l'application $f = S_{(AI)} \circ S_{(IC)}$.

   (b) Montrer que $f \circ R_{(C,\frac{\pi}{3})}$ est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

3. On pose $D = S_{(BC)}(A)$.

   (a) Montrer que les points I, J et D sont alignés.

   (b) Caractériser l'application $S_{(IJ)} \circ S_{(AC)}$.

   (c) On pose $g = t_{\overrightarrow{AB}} \circ R_{(A,\frac{\pi}{3})}$.
   Montrer que g est une rotation de centre D, préciser son angle.