Mathématiques

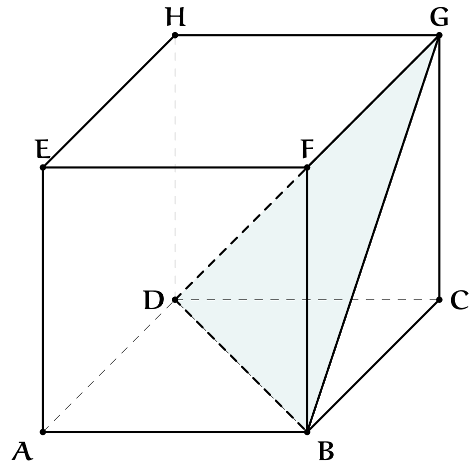
Classe : Bac Maths

Série : Série N°33

Thème : Préparation Synthèse II

Nom du Prof : BENMBAREK MAHMOUD

Exercice 1 — 50 min — 3.5 pts



Dans la figure ci-contre:

- $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.
- $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé direct.
- $\alpha \in [0;1]$.
- M un point de coordonnées $(\alpha, \alpha, 1-\alpha)$.

1
a) Montrer que M est un point du segment $[EC]$.

b) Montrer que la distance du point M à la droite (BD) est égale à $\sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2}}$.

c) Déterminer α pour que la distance de M à la droite (BD) soit minimale.

d) Soit Ω le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Montrer que Ω est le centre de gravité du triangle BGD.

2 Soit S la sphère de centre C et de rayon 1.
Montrer que S coupe le plan (BGD) suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

3 On désigne par h l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{2}{3}$. Soit $S' = h(S)$, $\Omega' = h(\Omega)$ et $\mathscr{Q}$ le plan passant par Ω' et perpendiculaire à la droite (EC).

a) Montrer que $\mathscr{Q}$ est l'image du plan (BGD) par h.

b) Déterminer $S' \cap \mathscr{Q}$.

Exercice 2 — 30 min — 4 pts

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(1,-1,2)$, $B(-2,2,0)$ et $C(-1,1,1)$.

1
a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P} = (ABC)$.

2 a) Déterminer le centre I et le rayon R de la sphère S dont une équation est $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2=0$.

b) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ coupe la sphère S suivant un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre H et le rayon r.

3 Soit S' la shpère qui contient le point $J(-1,0,1)$ et coupée par le plan $\mathcal{P}$ suivant le cercle $\mathcal{C}$.
Déterminer les coordonnées de Ω centre de S' et préciser son rayon R'.

4 Déterminer l'homothétie h de rapport 3 qui transforme S et S'.

Exercice 3 — 60 min — 5 pts

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (Unité $2\ cm$).

1 a) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Interpréter le résultat graphiquement.

2 Déetrminer le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

3 Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et que $10.1<\alpha<10.2$

c) Déterminer le signe de $g(x)$.

4 Soit h la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $x\in]1;+\infty[$, $h'(x)=\dfrac{g\left(x^2\right)}{x^2\left(x^2-1\right)}$.

b) Déterminer le signe de $h'(x)$.

5 a) Vérifier que que pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a $f(x)=h\left(e^x\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer $\mathcal{C}_f$.

6 a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a: $f'(x)+f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

b) Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \ln(2)$ et $x = \ln(3)$.

Exercice 4 — 60 min — 5 pts

I- Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a^3 + b^3 \equiv 0\,[173]$.

1) Vérifier que 173 est premier.

2) Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171}\,[173]$

3) a) Montrer que 173 divise a si et seulement si, 173 divise b.

   b) Montrer que si 173 divise a alors 173 divise $a + b$.

4) On suppose que 173 ne divise pas a.

   a) Montrer que $a^{172} \equiv b^{172}\,[173]$.

   b) Montrer que $a^{171}(a + b) \equiv 0\,[173]$.

   c) Montrer que 173 divise $a + b$.

II- Soit $\mathcal{E} = \{\ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $x^3 + y^3 = 173\,(xy + 1)\ \}$.

1) Soit $(x, y) \in \mathcal{E}$.

   a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x + y = 173k$.

   b) Montrer que $k\,(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$.

   c) En déduire que $k = 1$.

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.