Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC Mathématiques

Session Principale 2017

Exercice 1 : 40 min 5 pts

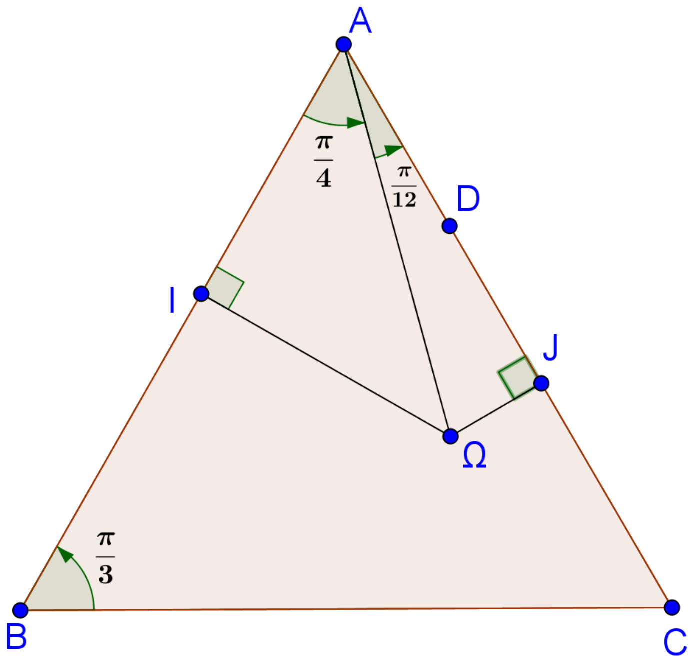
Le plan est orienté.

Dans la figure ci-dessous, *ABC* est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Ω est un point intérieur au triangle *ABC* tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

I et *J* sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC).

D est le point de la droite (AC) tel que $DA=D\Omega$.



1°) Montrer que $\left(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega D}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2°) Soit $R=S_{(\Omega D)}\circ S_{(\Omega J)}$.

a) Justifier que *R* est une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit $F=R(J)$.

Montrer que *F* est un point de la demi-droite $[\Omega I)$. Construire le point *F*.

3°) Soit *h* l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F)=I$. On pose $f=h\circ R$.

a) Vérifier que $f(J)=I$.

b) Montrer que *f* est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer $\frac{\Omega I}{\Omega A}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}$ $\left(\text{On donne }\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$.

En déduire que le rapport de *f* est égal à $1+\sqrt{3}$.

4°) Soit *g* la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J)=I$.

a) Montrer que $g = f \circ S_{(\Omega J)}$.

b) Déterminer le rapport de *g*.

c) Montrer que l'axe de *g* est la droite (ΩD).

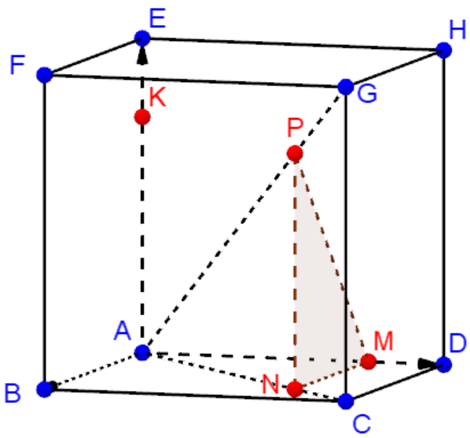
d) Montrer que $g = h \circ S_{(\Omega D)}$.

e) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point *K*. On pose $K' = g(K)$.

Vérifier que $h(K) = K'$. Construire alors le point K'.

Exercice 2 : 30 min 3,5 pts

L'espace est orienté.
Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.
$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct de l'espace



1°) a) Montrer que $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$.

b) Montrer que l'aire du triangle *ECD* est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Calculer le volume du tétraèdre $AECD$.

2°) Soit *h* l'homothétie de centre *A* et de rapport $\frac{3}{4}$.

On pose $M = h(D)$.

a) Le plan passant par *M* et parallèle au plan (DCG) coupe les segments $[AC]$ et $[AG]$ respectivement en *N* et *P*. Montrer que $h(C) = N$ et $h(G) = P$.

b) Le plan passant par *M* et parallèle au plan (ECD) coupe la droite (AE) en un point *K*.

Calculer le volume du tétraèdre *AKNM*.

3°) Soit (S) la sphère de centre le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer que la sphère coupe le plan (DCG) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Soit (S') l'image de la sphère (S) par l'homothétie *h*.

Montrer que (S') coupe le plan (MNP) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3 : 35 min 4 pts

1°) Soit *x* un entier non nul premier avec 53.

a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}.

b) En déduire que pour tout entier naturel k, $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$.

2°) Soit l'équation $(E_1) : x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$, où $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1).

3°) Soit x une solution de l'équation (E_1).

a) Montrer que x est premier avec 53.

b) Montrer que $x^{261} \equiv x(\mathrm{mod}\ 53)$.

c) En déduire que $x \equiv 2^9(\mathrm{mod}\ 53)$.

4°) a) Montrer que $2^9 \equiv 35(\mathrm{mod}\ 53)$.

b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5°) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E_2): 71u-53v=1$.

a) Vérifier $(3,4)$ est une solution de l'équation (E_2).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34(\mathrm{mod}\ 71) \\ x^{29} \equiv 2(\mathrm{mod}\ 53) \end{cases}$.

Exercice 4 : 70 min 7,5 pts

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{e^x-1}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

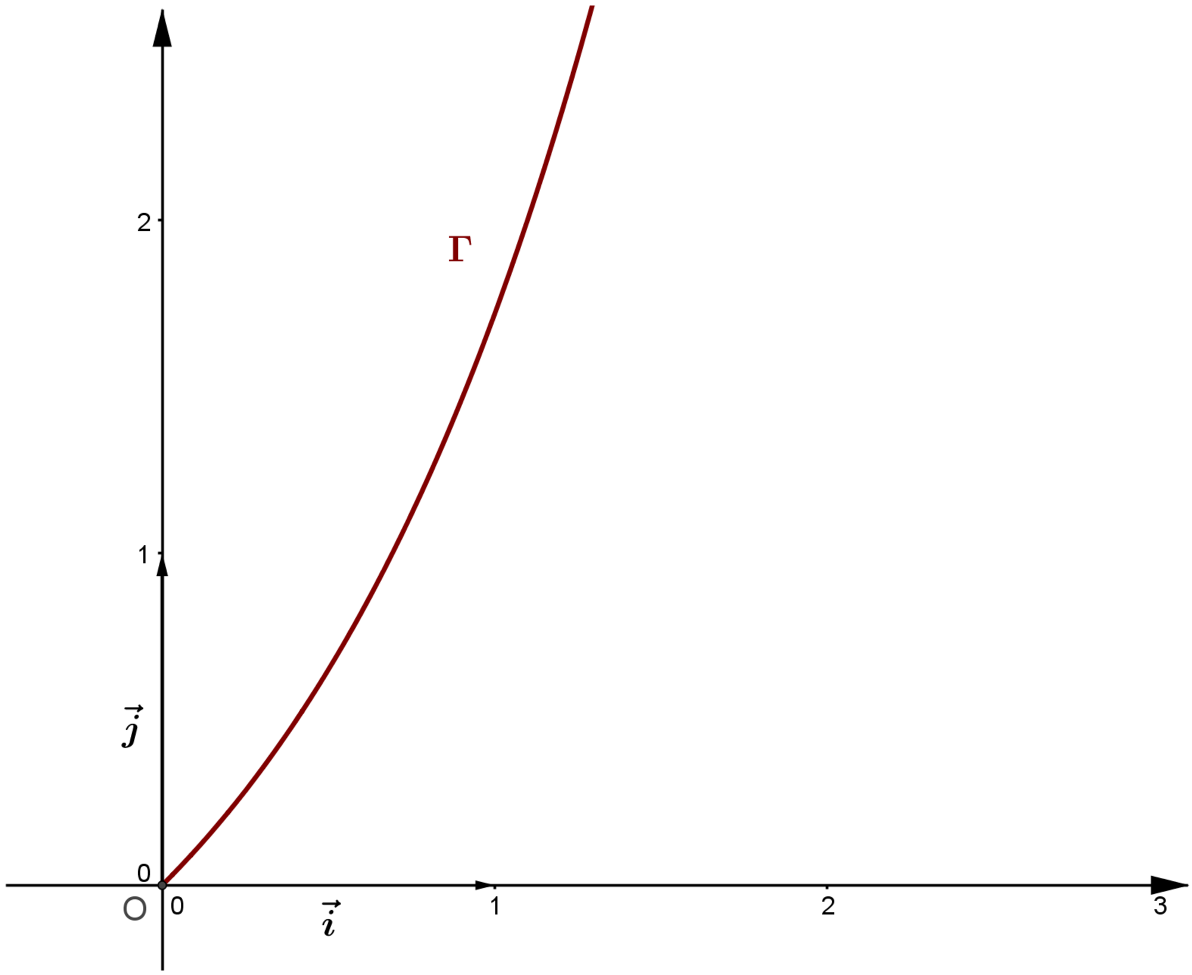
b) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) En déduire que $e^x-1 \le \sqrt{e^x-1}$, si et seulement si, $0 \le x \le \ln 2$.

3°) Montrer que le point $B(\ln 2,1)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

4°) Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x \mapsto e^x-1$.



a) Etudier la position relative de C_f par rapport à Γ.

b) Tracer la courbe C_f.

5°) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan x$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) calculer $\left(g^{-1}\right)(0)$ et $\left(g^{-1}\right)(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que $\lim_{x\to 0^+}\frac{g^{-1}(x)}{x}=1$.

6°) On pose pour tout $x\in[0,+\infty[$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x)=2\left(f(x)-\left(g^{-1}\circ f\right)(x)\right)$.

a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $F'(x)=G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$ $F(x)=G(x)$.

c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, La courbe Γ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$. Montrer que $\mathcal{A}=1+\ln 2-\dfrac{\pi}{2}$.

7°) Soit *n* un entier tel que $n \geq 2$.

On désigne par f_n la fonction définie sur $\left[\ln(n),+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{e^x-n}$.

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $\left[\ln(n),+\infty\right[$ par $G_n(x)=2\left(f_n(x)-\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\dfrac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Montrer que pour tout $x \in \left[\ln(n),+\infty\right[$, $G_n(x)=\int_{\ln(n)}^{x} f_n(t)\,dt$.

b) Vérifier que pour tout $x \geq \ln(n)$, $\sqrt{e^x-n}<\sqrt{e^x-1}$.

En déduire que pour tout $x \geq \ln(n)$, $f_n(x) \leq e^x-1$.

c) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_n$, la courbe Γ et les droites d'équations $x=\ln(n)$ et $x=\ln(n+1)$. Montrer que $\mathcal{A}_n=2\sqrt{n}\,g^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)-1$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$.

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000