Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : 4ème Mathématiques

Devoir de synthèse N°2

Exercice 1 — 60 min — 5 pts

1. Etudier suivant $n \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n$.
   a. Montrer que : $4S_n = 5^{n+1} - 1$
   b. Soit $a \in \mathbb{Z}$, montrer que : $4S_n \equiv a \pmod 7 \iff S_n \equiv 2a \pmod 7$
   c. En déduire le reste de la division euclidienne de S_{2010} par 7.
3. Soit n un entier naturel donné.
   On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations $(E_0) : 5^n x - S_n y = 0$ et (E) : $5^n x - S_n y = 7$.
   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, S_n et 5^n sont premiers entre eux.
   b. Résoudre l'équation (E_0).
   c. Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) de la forme :

$$x = 35 + kS_n \text{ et } y = 28 + k5^n \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 2 — 60 min — 5 pts

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{1-x} - \ln x$.

1. a. Dresser le tableau de variations de f.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$.
   c. Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$.
2. Soit $\lambda \in]0;1]$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.
   a. Montrer que $A(\lambda) = e^{1-\lambda} + \lambda\ln(\lambda) - \lambda$.
   b. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A(\lambda)$.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
   a. Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$;

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant A\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n - \frac{1}{n}$.

c) Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e$.

4) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{n}}$$

a) Etablir les égalités : $u_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ et $v_n = \dfrac{e-1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 2$: $S_n = v_n - u_n$.

c) Utiliser les résultats précédents pour démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.

d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

Exercice 3 | 75 min | 6 pts

Le plan est orienté.
Dans la figure de l'annexe jointe, ABC est un triangle équilatéral direct de centre O.
I, J et K sont les milieu respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].
Soit S la similitude direct de centre B telle que S(J) = C.

1) *Déterminer l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.*

2) *Soit Γ le cercle de diamètre [AB] et Γ' le cercle circonscrit au triangle ABC.*
   a) *Montrer que S(K) = O.*
   b) *En déduire que $S(\Gamma) = \Gamma'$.*
   c) *Déterminer et construire le point $A' = S(A)$.*

3) *La droite (OC) recoupe Γ' en P et la droite (BP) recoupe Γ en Q.*
   On note S^{-1} l'application réciproque de S.
   a) *Donner la nature et les éléments caractéristiques de S^{-1}.*
   b) *Montrer que $S^{-1}(A) = Q$.*

c) *Quelle est la nature du triangle* BJQ ?

d) *Prouver que* K *est le milieu du segment* [QI].

4) *Soit* $\sigma = S \circ S_{(AB)}$ *où* $S_{(AB)}$ *est la symétrie orthogonale d'axe* (AB).

a) *Justifier que* σ *est une similitude indirecte et déterminer ses éléments caractéristiques.*

b) *Déterminer* $\sigma(Q)$ *et* $\sigma(J)$.

c) *La droite* (IJ) *coupe la droite* (QB) *en un point* M.
Déterminer et construire le point $M' = \sigma(M)$.