Exercice 1 — 45 min — 4.5 pts

a étant un réel strictement positif.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $(E) : z^2 - (1+2ia)z + a(i-a) = 0$

   a) Vérifier que (ia) est une solution de (E) .

   b) Résoudre alors (E).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

2) On considère les points I et A d'affixes respectives $z_I = 1$ et $z_A = i\tan\theta$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AI) .

   a) Déterminer l'ensemble des points A , lorsque θ varie.

   b) Vérifier que $\dfrac{1-i\tan\theta}{1+i\tan\theta} = e^{-2i\theta}$.

   c) Montrer que : $h-1 = e^{-2i\theta}\left(\bar{h}-1\right)$ et $\bar{h} = -e^{2i\theta}h$ où h l'affixe de H.

   d) Déduire que : $h = \dfrac{1-e^{-2i\theta}}{2}$.

   e) Déterminer l'ensemble Γ des points H lorsque θ varie.

3) Soit J le point d'affixe $z_J = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}(1+i)$.

   a) Justifier que l'affixe du vecteur $\vec{JI}$ est : $z_{\vec{JI}} = \dfrac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta+\cos\theta+1}e^{-i\frac{\theta}{2}}$.

   b) Déterminer la forme exponentielle de $z_{\vec{IA}}$.

   c) Montrer que : $\left(\vec{IA},\vec{IO}\right) \equiv 2\left(\vec{IJ},\vec{IO}\right)(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

   d) Montrer que J est le centre du cercle inscrit au triangle IOA .

Exercice 2 — 40 min — 4.5 pts

A. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$

1)a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{2} \leq S_n < 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

c) Montrer que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2) Pour tout $n \geq 1$, on pose : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $U_{2n} = S_n$.

b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $U_{2n+1} = S_n + \frac{1}{2n+1}$.

c) Montrer que (U_n) converge vers ℓ.

B. n est un entier naturel non nul.

1)a) Montrer que l'équation $(x + n)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$ admet dans $]0, 1[$ une solution unique α_n.

b) Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

c) Montrer que (α_n) converge vers 0.

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = \frac{2}{\pi}$.

2) Pour tout $n \geq 1$, on pose : $\sigma_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\alpha_k + k}$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2n+1} + S_n \leq \sigma_n \leq S_n + \frac{1}{n}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$.

Exercice 3 | 40 min | 4 pts

I. On considère la suite (U_n) définie sur IN* par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1) Déterminer les quatre premiers termes de la suite (U_n).

2) Démontrer que la suite (U_n) est croissante sur IN*.

3)a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) En déduire que la suite (U_n) est majorée par 2.

4) Justifier que la suite (U_n) converge. (Euler a démontré en 1748 que cette suite converge vers $\frac{\pi^2}{6}$)

II On considère les suites (V_n) et (W_n) définies sur IN* par : $V_n = U_n + \frac{1}{n+1}$ et

$W_n = U_n + \frac{1}{n}$

1) a) Montrer que pour tout entier n ≥ 1, $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$

b) En déduire le sens de variations de la suite (V_n).

2) Montrer que les suites (V_n) et (W_n) sont adjacentes

3) En déduire que pour tout entier n ≥ 1, $V_n \le \frac{\pi^2}{6} \le W_n$.

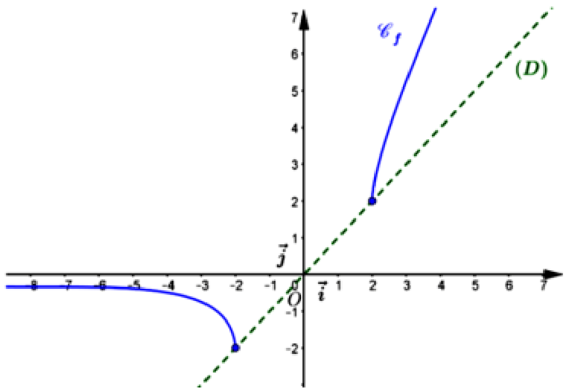
4) Montrer que pour tout entier n ≥1, $0 \le W_n - V_n \le \frac{1}{n^2}$

5) En déduire un encadrement de $\frac{\pi^2}{6}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-4}

Exercice 4 — 50 min — 6 pts

Dans la figure ci-contre C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$.

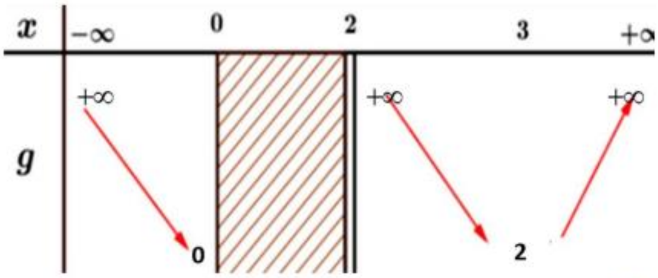
- C_f admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) au voisinage de $+\infty$
- L'axe des abscisses est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.



1) Par lecture graphique déterminer en justifiant les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin(f(x))}{f(x)}$.

2) On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction g définie et continue sur $]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[$



a) Montrer que l'équation g(x) = 2 admet dans l'intervalle $]-\infty, 0]$ une solution unique α.

b) Montrer que $f \circ g$ est définie sur $]-\infty, \alpha] \cup]2, +\infty[$.

c) Déterminer $(f \circ g)(\alpha)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \circ g)(x)$.

d) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty, \alpha]$ par la fonction $f \circ g$.

e) Etudier le sens de variation de $f \circ g$ sur l'intervalle $]2, +\infty[$.