Taki Academy

MATHS

Classe : Bac Maths

Sujet : Prototype N°1

Durée : 4 h

Nom du prof : Profs Takiacademy

Exercice 1 — 36 min — 3 pts

Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant** la réponse.

1. Si X est une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle de paramètre $\ln 2$ alors $\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \frac{1}{4}$. ☐
2. Si x un entier tel que $x \equiv 2(\mathbf{mod}5)$ et $x \equiv 5(\mathbf{mod}7)$ alors $x \equiv 12(\mathbf{mod}35)$. ☐
3. Pour tout entier naturel n, on a $6n^2 + 6n + 1$ et $2(3n + 2)$ sont premiers entre eux. ☐
4. La fonction $x \mapsto \left(\frac{2}{7}\right)^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ☐
5. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \left(\frac{2}{7}\right)^x$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{\imath})$ au voisinage de $-\infty$. ☐
6. Si f est la solution, qui s'annule en 3 , de l'équation différentielle $y' + 2y = 1$ alors la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3 a pour équation $y = -x + 3$. ☐

Exercice 2 — 36 min — 3 pts

Le tableau suivant représente la production Tunisienne, en mille tonnes, des fêves et des petit pois pendant les années 2000 à 2009.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Production des feves en mille tonnes (X)	26.5	13.9	22.3	48	45.6	47.9	39.7	67	60.5	70.2
Production des petit pois en mille tonnes (Y)	15.7	11.3	9.8	17.8	15.2	17.1	15.4	23.4	20.5	19.5

1. Déterminer la production moyenne des fèves et des petit pois pendant les années 2000 à 2009.
2. a) Déterminer le coefficient de corrélation ρ_{XY}.
   b) Que peut-on conclure ?
3. a) Déterminer la droite de régression de Y en X.
   b) Estimer la production des petit pois en 2010 sachant que celle des fèves est 47.8 mille tonnes.
   c) Sachant que la production réelle des petit pois en 2010 est 19 mille tonnes, quel est le pourcentage de la production des petit pois estimé en 2010 par rapport à la production réelle.

Exercice 3 — 36 min — 3 pts

On désigne par x la probabilité qu'un individu d'une population soit atteint par une maladie, $x \in]0;1[$.
On veut tester tous les individus de cette population pour savoir s'ils sont porteurs de la maladie.
Un laboratoire produit un test de dépistage dont les caractéristiques sont les suivantes :

- La probabilité qu'un individu atteint ait un test positif est 0.99.
- La probabilité qu'un individu non atteint ait un test négatif est 0.99.

On note M l'événement « l'individu est atteint » et T l'événement « le test est positif ».
Tous les résultats sont exprinés en fonction de x.

1. Calculer $\mathbb{P}(T)$.
2. Soit $f(x) = \mathbb{P}(M \mid T)$.
   a. Montrer que $f(x) = \dfrac{99x}{98x+1}$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
3. a. Montrer que $\mathbb{P}(\overline{M} \mid \overline{T}) = f(1-x)$.
   b. En déduire que si $x < 0.1$ alors $\mathbb{P}(\overline{M} \mid \overline{T}) > 0.998$.

Exercice 4 — 60 min — 5 pts

Dans cet exercice, on donne 2027 est un **nombre premier**.
Soit p un nombre premier tel que $p = 4k+3$ où k est un entier naturel.
On dit qu'un entier m est un carré parfait modulo p s'il existe un entier d tel que $m \equiv d^2 \pmod{p}$.

1. a. Montrer qu'il existe un unique entier u inverse de 2 modulo p tel que $1 \leqslant u \leqslant p-1$.
   b. Déterminer u lorsque $p = 2027$.
2. Soit m un entier non divisible par p.
   a. Montrer que si m est un carré parfait modulo p alors $m^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.
   b. Montrer que m est un carré parfait modulo p si et seulement si $m^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.
3. Soit b et c deux entiers et soit l'équation dans $\mathbb{Z}$, $(E) : x^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$ et $\Delta = b^2 - 4c$.
   a. Montrer que $(E) \Leftrightarrow (2x+b)^2 \equiv \Delta \pmod{p}$
   b. On suppose que $\Delta = d^2$.
   Montrer que $(E) \Leftrightarrow x \equiv u(d-b) \pmod{p}$ ou $x \equiv u(-d-b) \pmod{p}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 2x - 2017 \equiv 0 \pmod{2027}$.
5. Soit l'équation $(F) : x^2 - 2x - 2017 \equiv 0 \pmod{2027}$.
   a. Vérifier que $\Delta \equiv -36 \pmod{2027}$.

b) Montrer que $\Delta^{1013} \equiv -1 \pmod{2027}$.

c) Déduire que l'équation (F) n'admet pas des solutions.

Exercice 5 — 84 min — 7 pts

I- Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_n) : y' - ny = \dfrac{n}{(1+e^{-nx})^2}$.

1. Soit y une solution de (E_n). On pose $y = z \times e^{n\times}$

   a) Montrer que y est une solution de (E_n) si et seulement si $z' = \dfrac{n.e^{-nx}}{(1+e^{-3x})^2}$.

   b) Calculer : $\displaystyle\int_0^x \frac{n.e^{-nt}}{(1+e^{-nt})^2}\,dt$.

2. Déterminer la solution f_n de (E_n) telle que $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repè orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

2. Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe $\mathscr{C}$.

3. a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $]0;+\infty[$.

   b) Vérifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)$.

   c) tracer dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$la courbe $\mathscr{C}$ ' de g.

4. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

   b) En déduire l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ ', la droite d'équation $y = 1$ et les axes de coordonnées.

II - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction F_n définie sur $[0;+\infty[$ par $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+e^{-nt}}\,dt$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0;+\infty[$; $\dfrac{e^t}{1+e^{-nt}} \leqslant \dfrac{1}{2}e^t$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.

2. a) Montrer que la fonction F_n réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

   b) En déduire que l'équation $F_n(x) = 1$, admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique U_n.

c) Calculer le premier terme U_0 de la suite (U_n).

3 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0\,;+\infty[$, on a : $F_n(x) \leqslant F_{n+1}(x)$.

b) En déduire la monotonie de la suite U, puis justifier qu'elle est convergente.

4 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*; e^{U_n} - 2 = \displaystyle\int_0^{U_n} \frac{e^{(1-n)t}}{1+e^{-nt}}\,dt$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $n \geq 2; 0 < e^{U_n} - 2 \leq \dfrac{1}{1-n}\left(e^{(1-n)U_n} - 1\right)$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

5 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{U_n} e^t \ln\left(1+e^{-nt}\right)dt = n\left(e^{U_n} - 2\right) - \ln 2 + e^{U_n}\ln\left(1+e^{-nU_n}\right).$$

b) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $\ln(1+t) \leqslant t$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(e^{U_n} - 2\right) = \ln 2$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(U_n - \ln 2\right) = \ln\sqrt{2}$