Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : $4^{\text{ème}}$ Mathématiques

Devoir de synthèse N°1

Exercice 1 — 60 min — 5 pts

1. Soit u la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $u(x)=\dfrac{\pi}{x}$. Déterminer $u(]2,+\infty[)$.

2. Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.
   - a) Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x\in]2,+\infty[$.
   - b) Dresser le tableau de variation de f.

3.
   - a) Montrer que f réalise une bijection de $]2,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   - b) Dresser le tableau de variation de f^{-1} (f^{-1} la fonction réciproque de f).
   - c) Construire les courbes de f et f^{-1} dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.
   - d) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout x de J,

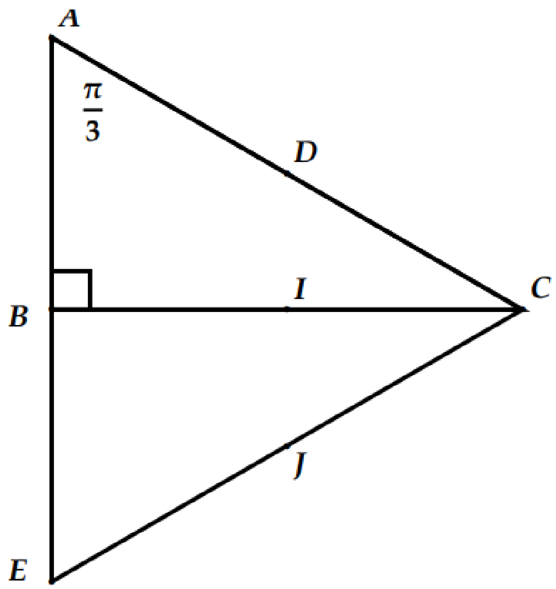
$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-\left(f^{-1}(x)\right)^2}{\pi\left(1+x^2\right)}$$

4.
   - a) Soit p un entier naturel non nul.
     Montrer que l'équation : $\tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=p$ admet dans $]2,+\infty[$ une unique solution α_p.
   - b) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n+k}$.
     Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f^{-1}(2n)\le u_n\le f^{-1}(n)$.
     En déduire la limite de la suite (u_n).

5. Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}$, avec $z=e^{i\frac{\pi}{n}}$.
   - a) Vérifier que $(1-z)S_n=1-z^n$ et montrer que $S_n=\dfrac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}$.
   - b) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de S_n.
   - c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $t_n=\dfrac{1}{f(2n)}$ et Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{t_n}$

Exercice 2 | 60 min | 5 pts



Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par E le symétrique de A par rapport à la droite (BC). Soit D, I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BC]$ et $[EC]$

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que :

$$f(D)=E \text{ et } f(C)=B.$$

   b) Montrer que t est la rotation de centre J et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle JCD et soir M un point de l'arc $\widehat{JC}$ ne contenant pas O et privé de J et C.

   On désigne par $S_I$la symétrie centrale de centre I , On pose $g = S_I \circ f$ et $M' = g(M)$.

   a) Montrer que $S_I = S_{BC} \circ S_{IJ}$ et que $f = S_{IJ}0S_{JC}$ puis caractériser g.

   b) En déduire la nature du triangle CMM'.

   c) Montrer que $g(J)=D$

   d) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M'D}}\right)\equiv\pi[2\pi]$

   e) En déduire que $MJ+MC=MD$

3. Soit L le symétrique de J par rapport à la droite (DC). On pose $\varphi = g \circ S_{(IJ)}$.

   a) Déterminer $\varphi(J)$ et $\varphi(D)$.

   b) Caractériser φ.

Exercice 3 — 75 min — 6 pts

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a) Vérifier que pour tout $x \in [0,1[\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

   b) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera

   c) Tracer les courbes $\mathscr{C}$ de f et $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère en précisant la demi tangente au point d'abscisse 0.

   d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$. par $g(x) = f(\sin 2x)$

   a) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[\ ; g(x) = \tan(2x)$.

   b) Montrer que la fonction g est une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ sur $[0,+\infty[$.

   c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x \in [0,+\infty[$: $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

3. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x) = g^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ h(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

   a) Montrer que h est continue à droite en 0.

   b) Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $h'(x) = -\left(g^{-1}\right)'(x)$

   c) En déduire que pour tout $x \in\ ]0,+\infty[\ :\ g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, en déduire que la courbe de h est l'image de la courbe de g par une isométrie que l'on précisera.

   d) Montrer alors que h est dérivable à droite en 0 et préciser $h'_d(0)$.

4. On considère les suites (S_n) et $\left(S'_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=n}^{2n} g^{-1}(p) \text{ et } S'_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=n}^{2n} g^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)$$

a) Montrer que : $g^{-1}(n) \leq S_n \leq g^{-1}(2n)$.
En déduire que (S_n) converge vers une limite que l'on précisera.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$.

5) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $U_n = g^{-1}\left(\frac{2}{n}\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$

a) Montrer qu'il existe un réel $c_n \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$ tel que $nU_n = \dfrac{1}{2\left(1 + c_n^2\right)}$

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_n$.

Exercice 4 — 50 min — 4 pts

m *étant un nombre complexe non nul.*

1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E) : $z^2 - (1 + i + 2m)z + (1 + m)(i + m) = 0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère othonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points A, B, M, M_1 *et* M_2 *d'affixes respectives* 1, i, m, $1 + m$ *et* $i + m$.

2) a) *Montrer que :* B, M_1 *et* M_2 *sont alignés si et seulement si* $(1 + i)m \in \mathbb{R}^*$.

b) *Déterminer l'ensemble des points* M *lorsque* B, M_1 *et* M_2 *sont alignés.*

Dans la suite on prendra $m = e^{i\theta}$ ***où*** θ ***est un réel***

3) *Soient* Γ_1 *et* Γ_2 *les ensembles des points respectives des points* M_1 *et* M_2, *lorsque* θ *varie.*
Montrer que Γ_1 *et* Γ_2 *sont deux cercles de centres respectives* A *et* B *de rayon* 1.

Dans toute la suite on prendra $0 < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$.

4) a) *Montrer que* AM_1M_2B *est un parallélogramme.*

b) *Déterminer* θ *pour que* AM_1M_2B *soit un rectangle.*

c) *Montrer que :*

La droite (M_1M_2) *est tangente à* Γ_1 *et à* Γ_2 *si et seulement si* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

5) *Déterminer la valeur de* θ *pour laquelle l'aire du parallélogramme* AM_1M_2B *est maxiamale.*


Q
Magazines