Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : 4ème Mathématiques

Devoir de synthèse N°1

Exercice 1 — 40 min — 4 pts

Soit a un réel de $]1;+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$.

1)a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$, on a : $\sqrt[n]{a}-1\leq\frac{a-1}{n}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$..

2)a) Montrer que, pour tout $b\in]0;+\infty[$ on a : $(1+b)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}b^2$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)^2=0$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.

Exercice 2 — 50 min — 4.5 pts

Dans le plan orienté, on donne un parallélogramme ABCD tel que AD = BD et BIC, DCJ sont deux triangles équilatéraux direct. Soit f le déplacement du plan tel que f(A) = I et f(D) = C.

1)a) Montrer que $f=r_C\circ t_{\overrightarrow{AB}}$ avec r_C est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Déduire que f est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

c) On note par K le point tel que ADK soit un triangle équilatéral direct.
Montrer que f(K) = B.

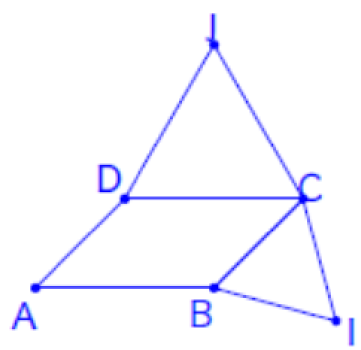
d) Soit F le symétrique de J par rapport au point B et on note $E=f^{-1}(F)$.
Montrer que les droites (JK), (EF) et (AB) sont concourantes

2) On note G l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) Montrer qu'il existe un unique anti-déplacement g tel que g(B) = A et g(G) = J.

b) Déterminer les images de A et F par la transformation $g\circ t_{\overrightarrow{AB}}$

c) Déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.



Exercice 3 | 60 min | 5.5 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit m un nombre complexe non nul.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-2(m+i)z+2m^2-2im-5=0$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2°) On désigne par M, J, N et N' les points d'affixes respectives m, -1+2i, (1+i)m+2+i et (1-i)m-2+i.

Soit f l'application du plan qui au point N associe le point N'.

a) Montrer que l'écriture complexe associée à f est $z'=-iz-3+3i$.

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera l'angle et l'affixe du centre Ω .

c) Soit I le milieu de [NN'].

Montrer que I est l'image du point M par une translation t que l'on caractérisera.

d) Etant donné un point M du plan, Construire les point N et N'.

5°)a) Déterminer puis construire l'ensemble (ζ) des points M pour lesquels les points M, N et N' sont alignés.

b) Monter que si $M\in(\zeta)$ alors les vecteurs $\overrightarrow{J\Omega}$ et $\overrightarrow{JN}$ sont colinéaires.

c) Montrer que lorsque M décrit (ζ), le point N'=f(N) décrit une droite que l'on précisera.

Exercice 4 | 70 min | 6 pts

Soit g la fonction définie sur $[0;\pi[$ par g(x)= $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1°)a) Justifier que g réalise une bijection de $[0;\pi[$ dans $[0;+\infty[$.

On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer que $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x\in[0;+\infty[$.

2°) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par f(x)= $\begin{cases} g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=\pi & \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivables sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x > 0.

c) Montrer que pour tout x > 0, il existe $c\in]0;x[$ tel que $\frac{f(x)-\pi}{x}=\frac{-2}{1+c^2}$.

d) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$.

3°)a) Montrer que, pour tout $x\in[0;+\infty[$ on a $f(x)=\pi-g^{-1}(x)$.

b) Montrer que la courbe représentative (C_f) de f est l'image de (C_g) par une isométrie que l'on déterminera.

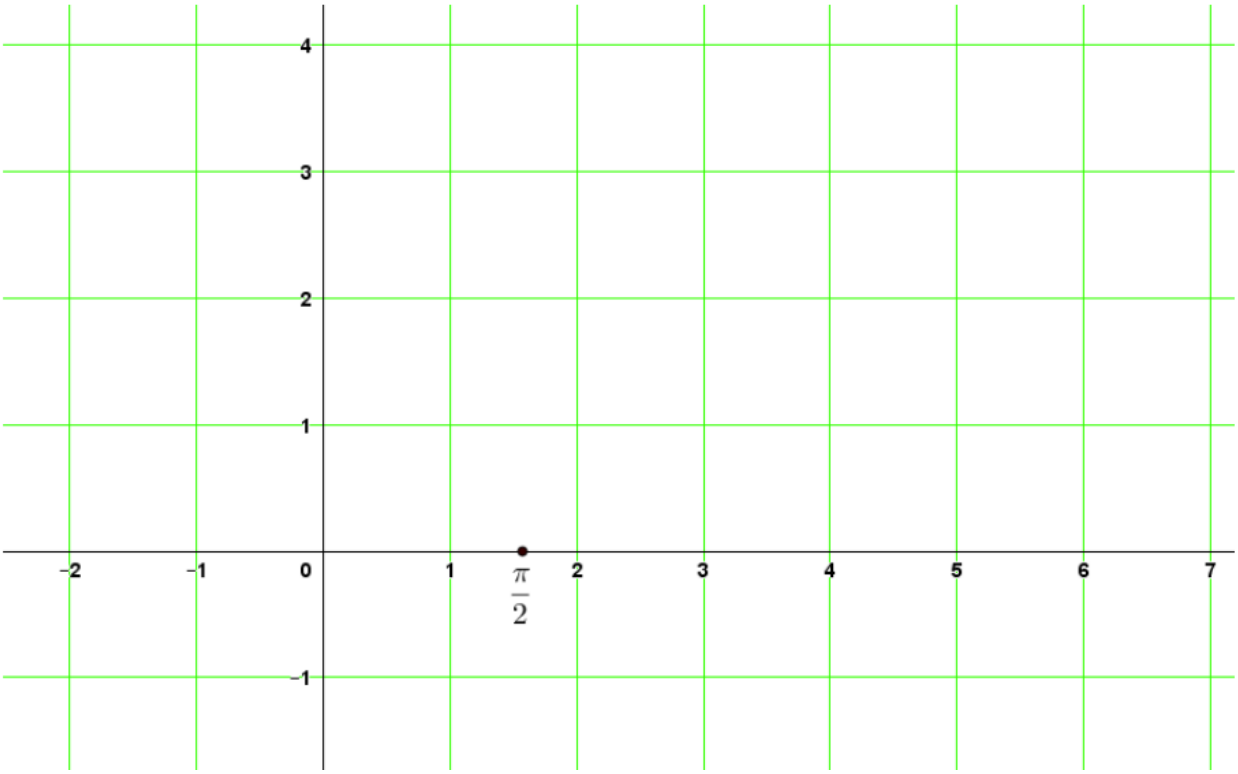
Dresser le tableau de variations de f puis tracer (C_g) et (C_f) sur le graphique ci-dessous.

4°) Soit $\varphi(x)=\tan\left(\frac{f(x)}{2}\right)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

a) Montrer que φ est n fois dérivable sur $]0;+\infty[$,et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

b) soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (u_n) définie par $u_n = \varphi^{(2n)}\left(\sqrt{3}\right)$. calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.



Taki Academy
www.takiacademy.com

تهنى على قرايتك

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000