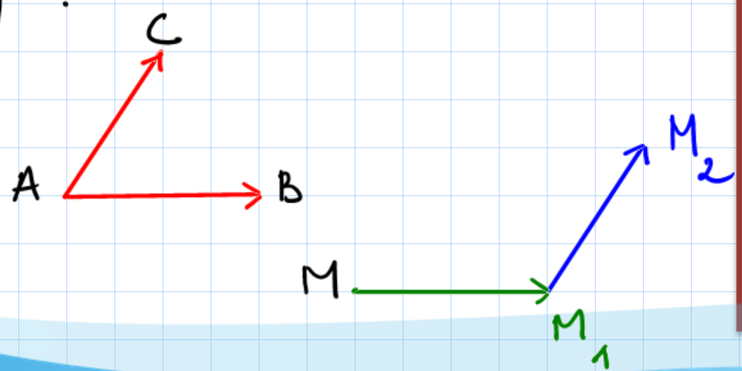
Composition et décomposition de deux isométries

Activité :

Soit A, B et C trois points non alignés et M quelconque du plan.

Construire le point $M_1 = t_{\vec{AB}}(M)$ puis $M_2 = t_{\vec{AC}}(M_1)$.



$$t_{\vec{AB}}(M) = M_1 \iff \vec{AB} = \vec{MM_1}$$

$$t_{\vec{AC}}(M_1) = M_2 \iff \vec{AC} = \vec{M_1M_2}$$

$$M_2 = t_{\vec{AC}}(M_1) = t_{\vec{AC}}\left(t_{\vec{AB}}(M)\right)$$

$$= \boxed{t_{\vec{AC}} \circ t_{\vec{AB}}(M)}$$

Retenons :

Lorsqu'on a deux isométries f et g

L'application définie par :

$$\boxed{g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)}$$

$g \circ f$ est dite Composée des isométries f et g.

Ce qu'on doit retenir :

La Composée de deux isométries est une isométrie (c'à d si f et g Sont deux isométries alors $f \circ g$ et $g \circ f$ Sont deux isométries).

Exemple :

$$M \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M_2$$

$$N \xrightarrow{f} N_1 \xrightarrow{g} N_2$$

on a : $M_1N_1 = M_2N_2$ (Car g est une isométrie)

aussi : $M_1N_1 = MN$ (Car f est une isométrie)

Ainsi $g \circ f(M) = M_2$ et $g \circ f(N) = N_2$ $\boxed{M_2N_2 = MN}$

alors $g \circ f$ est une isométrie.

Très important :

Théorème : Soit f et g deux isométries

$$g = f^{-1} \Longleftrightarrow f\circ g = id_P$$

Exemple :

$$A \xrightarrow{g} B$$

$$M \xrightarrow{g} M_1$$

$t_{\vec{AB}}(M) = M_1$ tel que $g = t_{\vec{AB}}$

Si $g = f^{-1}$

$$f\circ g(M) = f\circ f^{-1}(M) = f(M_1)$$
$$= g^{-1}(M_1)$$
$$= M.$$

Ainsi $f\circ g(M) = M$

Par suite $\boxed{f\circ g = id_P}$.

Propriété :

Si f et g deux isometries, alors :

$$\boxed{(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}}$$

Exemple : f et g deux isometries.

$$M \xrightarrow{g} M_1 \xrightarrow{f} M_2$$

$$N \xrightarrow{g} N_1 \xrightarrow{f} N_2$$

$$L \xrightarrow{g} L_1 \xrightarrow{f} L_2$$

$f(M_1) = M_2$ et $g(M) = M_1$

donc $f\circ g\,(M) = f(M_1) = M_2$

et Par Suite $(f\circ g)^{-1}(M_2) = M$

$g^{-1}(M_1) = M$ et $f^{-1}(M_2) = M_1$

Ainsi $g^{-1}\circ f^{-1}(M_2) = g^{-1}(M_1)$
$= M$

on procède de la même façon Pour les points N et L Ainsi

$$\boxed{(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}}$$