Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : Bac Maths

Série : Révision DC N°1

Nom du Prof : Masmoudi Radhouane

Exercice 1 — 45 min — 6 pts

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-(3+ia)z+2(1+ia)=0$ où $a\in\mathbb{R}^*$.

2 Le plan complexe est muni d'un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points $A(2)$ et $B(1+ia)$. Soit f l'application du plan dans lui même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z'=(1+ia)z-2ia$.

(a) Montrer que A est l'unique point invariant par f.

(b) Montrer que pour tout point M distinct de A, le triangle AMM' est rectangle en M.

3 Soit Δ la droite d'équation : $y=-ax+2a$.

(a) Montrer que $M\in\Delta$ si et seulement si $M'\in(O,\vec{u})$.

(b) Déterminer l'ensemble Δ' des points $M(z)$ tels que z' soit imaginaire.

(c) Vérifier que Δ et Δ' sont perpendiculaires.

4 Dans la suite on pose : $a=tan(\alpha)$ avec $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$.

(a) Ecrire z_B sous forme exponentielle.

(b) Montrer que pour tout point M distinct de A on a :

$$AM'=\frac{1}{cos(\alpha)}AM \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \alpha \ [2\pi]$$

5 On a représenté dans l'annexe (figure 2), la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et on a placé le point $E(\alpha,0)$.

(a) Placer le point B et construire les droites Δ et Δ'.

(b) On a placé un point M sur le cercle de centre A et de rayon 1. Construire, en justifiant, le point M'.

Exercice 2 — 40 min — 7 pts

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\sqrt{x^2+|x|}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé .

1 (a) Déterminer les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

(b) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(f(tanx)-2tanx) \text{ et } \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{sin(\pi f(x))-2f(x)}{cos\left(\frac{1}{x}\right)-1}.$$

2 Dans la figure 1 de l'annexe, on tracé la courbe Γ d'une fonction g définie et continue en tout

réel distinct de 1. Les droites d'équations $y=0$ et $x=1$ sont des asymptotes à Γ, de plus Γ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y=-x$. On pose $h=g\circ f$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de h.

(b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe de h au voisinage de $+\infty$.

(c) Montrer que h est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$.

3 On considère, pour $n\in\mathbb{N}$, l'équation : $(E_n): h(x)=n$ dans l'intervalle $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation (E_n) admet une solution unique a_n.

(b) Déterminer a_0.

(c) Montrer que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 — 35 min — 7 pts

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0\in\mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=x^2-1$ pour $x\in\mathbb{R}$.

1 On suppose que la suite (u_n) converge, déterminer les valeurs possibles de sa limite.

2 Dans cette question $u_0>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(c) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

3 On suppose que $u_0\in\left[-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[$ et on pose $g(x)=f\circ f(x)$. On note $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$.

(a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-1\leq u_n\leq 0$.

(b) Montrer que g est croissante sur $[-1,0]$.

(c) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=g(v_n)$.

(d) Montrer que pour tout réel x, $g(x)-x=x(x+1)(x^2-x-1)$.

(e) Montrer que la suite (v_n) est décroissante et qu'elle converge.

(f) La suite (u_n) est-elle convergente?

4 On suppose que $u_0\in\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right]$. Donner un encadrement de u_1 puis en déduire que la suite (u_n) est divergente.

Figure 1

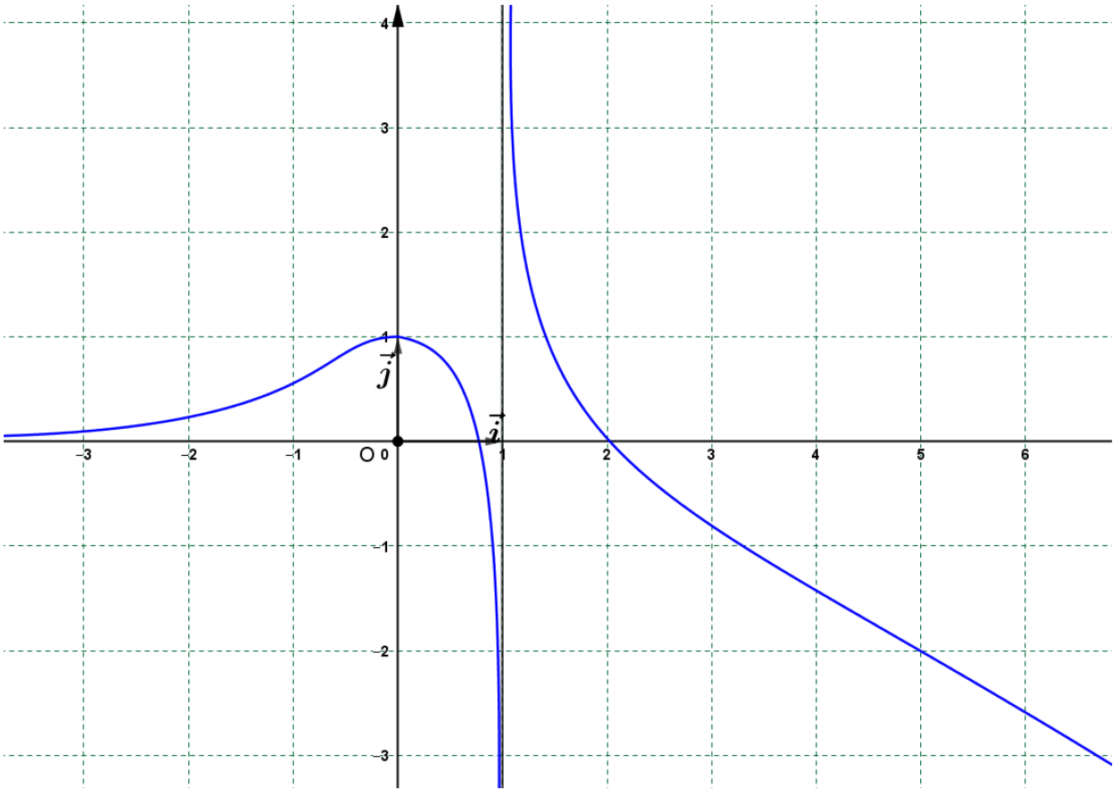

Figure 2