Taki Academy
www.takiacademy.com

# Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

# Exercice 1 — 30 min — 6 pt

Soit $f$ la fonction définie sur $IR$ par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1°)** Montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

**2°) a)** Montrer que pour tout réel $x$ , $f'(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

**b)** Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ d'abscisse 0.

**3°)** Dans le graphique de la feuille annexe, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\Delta : y=x$.

La droite $\Delta$ coupe $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse $\alpha$ .

**a)** Vérifier que $\sqrt{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

**b)** En déduire que $\int_0^\alpha f(x)\,dx=\dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$.

**4°) a)** Montrer que $f$ réalise une bijection de $IR$ sur un intervalle $J$ à préciser.

**b)** On note $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$.

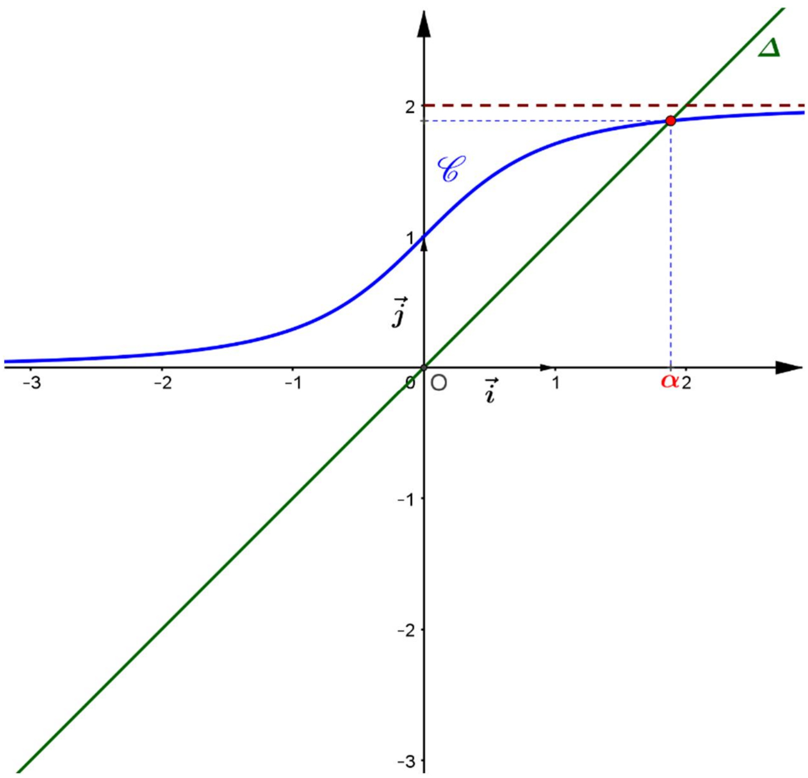
On désigne par $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de $f^{-1}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ dans le même repère.

**5°)** On pose $I_\alpha=\int_1^\alpha f^{-1}(x)\,dx$ .

**a)** Que représente graphiquement le nombre $I_\alpha$ ?

**b)** Calculer, $I_\alpha$ en fonction de $\alpha$ .



Exercice 2 | 35 min | 6 pt

Dans le graphique ci-dessous on a tracé un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction $f$ continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$ telle que pour tout $x\in[0,1[$ :

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $f(0)=0$.

**1°)** Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

**2°) a)** Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

**b)** En déduire, à l'aide d'une intégration par partie la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{2} f(x)dx$.

**3°) a)** Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On désigne par $f^{-1}$ la fonction réciproque de *f*.

**b)** Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

**c)** Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de $f^{-1}$ dans le même repère.

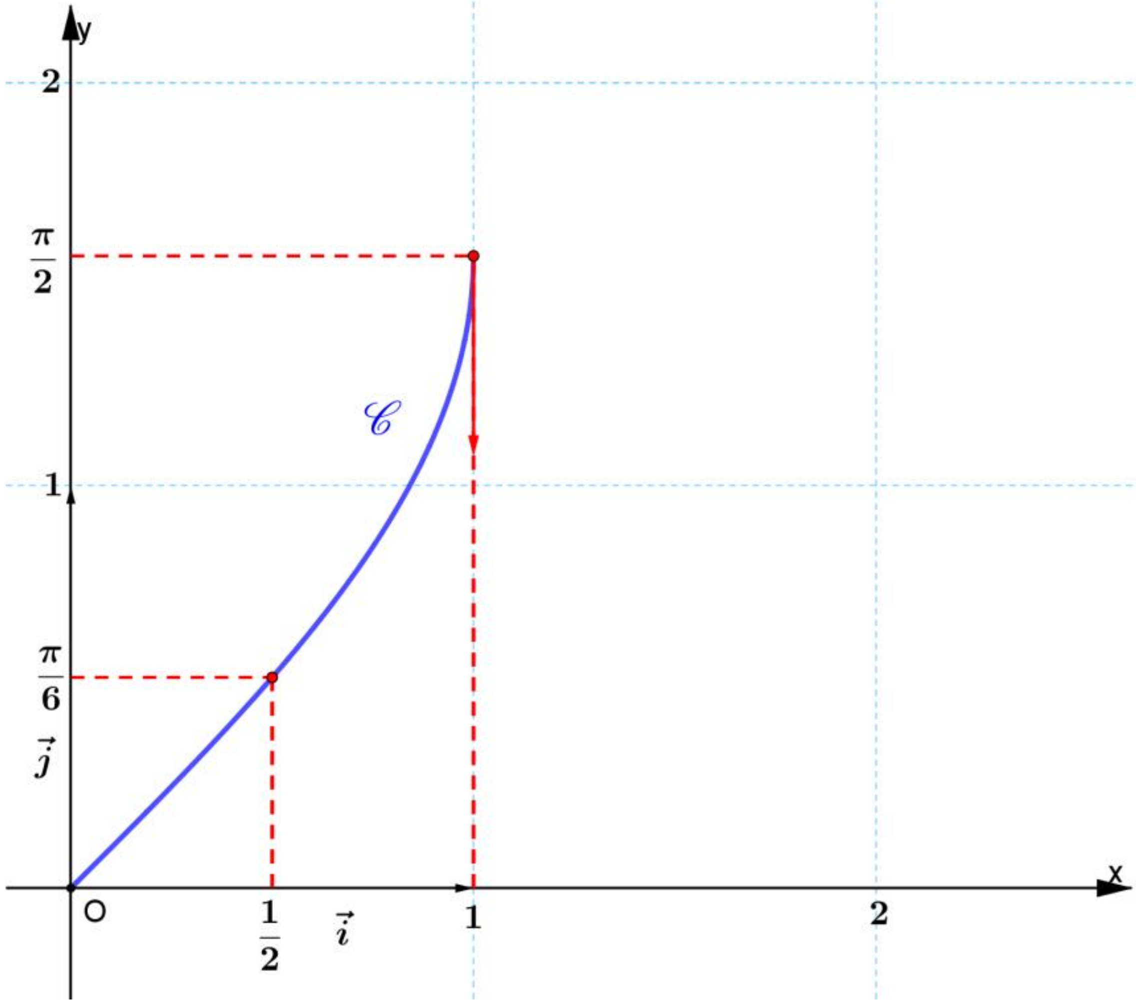
**4°)** Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=f(\sin x)$.

**a)** Montrer que *g* est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ : $g'(x)=1$.

**b)** En déduire que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ , $g(x)=x$.

**c)** Montrer que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x)=\sin x$.

**d)** En déduire $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,dx$




## Exercice 3 — 30 min — 6 pt

Soit f la fonction définie sur [0,1[ par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par $C_f$ sa courbe représentative dans
un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1) (a) Vérifier que $f'(x) = \frac{2x - x^3}{\sqrt{1-x^2}^3}$.

En déduire que f est une bijection de [0,1[ sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$$

2) Soit $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}dt \quad ; x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

(a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et calculer F'(x).

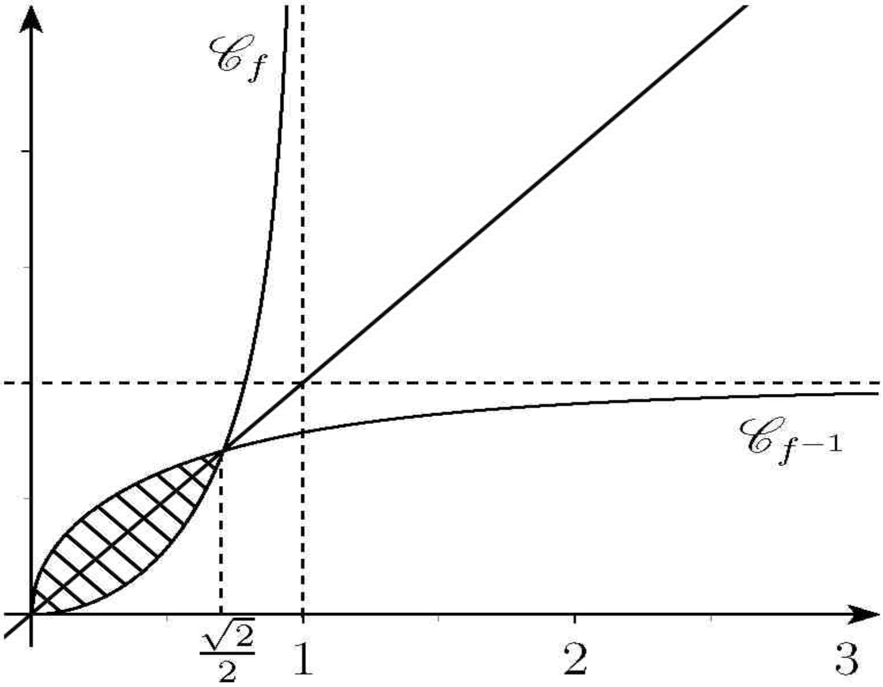
(b) En déduire que $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$ ; pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

(c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

(d) En déduire que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx = \frac{\pi-2}{8}$

3. On donne ci-dessous Cf et Cf−1 Calculer l'aire de la partie du plan limit´e par Cf et Cf−

et les droites d'´equations x = 0 et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ( la partie hachurée ).



## Exercice 4 — 25 min — 5 pt

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (unité graphique $2\ cm$).

**1** a) Etudier la dérivabilité de f à droite en $0$ et interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer $\mathscr{C}_f$ .

**2** On désigne par F la primitive de f sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en $0$.
Soit G la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F\left(\tan^2(x)\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $G'(x)=4\tan^x(x)$.

b) Calculer $G(0)$ puis expreimer $G(x)$ en fonction de $x$.

c) Déterminer alors l'aire $\mathscr{A}$ en $cm^2$ de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$ les droites $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

## Exercice 5 — 25 min — 5 pt

Soit f la fonction définie sur $]0;4[$ par $f(x)=\dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1** a) Montrer que le point $A(2,0)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ .

b) Montrer que pour tout $x\in\,]0;4[$, on a : $f'(x)=\dfrac{-4}{\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^3}$.

c) Déterminer une équation de la tangente $(T)$ à $\mathscr{C}_f$ au point $A$. Etudier la position relative de $(T)$ et $\mathscr{C}_f$ .

d) Dresser le tableau de variartion de f.

e) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha$ et que $0.7<\alpha<0.8$.

f) Tracer $\mathscr{C}_f$ .

**2** a) Montrer que f réalise une bijection de $]0;4[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ de $f^{-1}$.

c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les axes de repère.
Montrer que $\mathscr{A}=\alpha^2+4-2\sqrt{4\alpha-\alpha^2}\ (u.a)$