Mathématiques

Classe : Bac Maths – Excellent

Série : N 08 – Isométries

Nom du Prof : Abbes Amor

Lycée Pilote Monastir

Exercice 01 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = i\,\overline{z} + 1$.

1) a) Déterminer les images par f des points O, I et J. **b)** Montrer que f est une isométrie.

c) Montrer que f ne fixe aucun point puis déduire sa nature.

2) Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

a) Montrer que l'expression complexe de f o t est $z' = i\ \overline{z} + \frac{1-i}{2}$.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f o t. Déduire la nature de f o t.

c) Déterminer alors la forme réduite de f.

Exercice 02 : Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un carré direct ABCD de centre O. Soit Δ la médiatrice de [AB].

1) Caractériser les isométries suivantes : **a)** $f_1 = R_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ o } S_{(AC)}$. **b)** $f_2 = R_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)} \text{ o } S_C$.

c) $f_3 = R_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ o } R_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}$. **d)** $f_4 = t_{\overrightarrow{CD}} \text{ o } R_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}$. **e)** $f_5 = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \text{ o } t_{\overrightarrow{CB}}$. **f)** $f_6 = R_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ o } R_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}$.

g) $f_7 = S_{(DA)} \text{ o } t_{\overrightarrow{BD}}$. **h)** $f_8 = S_{(BC)} \text{ o } S_{(OC)}$. **i)** $f_9 = S_{(BC)} \text{ o } S_{(AC)} \text{ o } t_{\overrightarrow{BD}}$.

2) On construit extérieurement au carré ABCD les deux triangles équilatéraux ADF et ABE.

a) Montrer qu'il existe une seule rotation r tel que r(A) = D et r(E) = C

b) Déterminer le centre de r. En déduire que FEC est un triangle équilatéral direct.

3) Soit l'application $\varphi = S_{(BD)} \text{ o } S_{(DA)} \text{ o } S_{(AB)}$. Caractériser φ.

Exercice 03 : On considère dans le plan orienté un losange ABCD de centre O tel que

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soient I, J, K et F les milieux respectives des segments [DC], [CB] , [AD] et [AB].

Δ la médiatrice de [FB] coupe [KF] en Ω.

1) Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le losange ABCD.

a) Montrer que f([AC]) = [AC] et en déduire que f(O) = O.

b) Déterminer alors les quatre isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD

2) a) Donner la nature et les éléments caractéristiques des isométries suivantes :

$f_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et $f_2 = S_{(CD)} \circ S_{(CA)}$. **b)** Caractériser alors l'isométrie $g = r_{(C,-\frac{\pi}{3})} \circ r_{(A,\frac{\pi}{3})}$

3) On note E , F' et G les symétriques respectives des points A , D et C par rapport au point B

Soit h l'isométrie telle que h(A) = E , h(B) = F' et h(D) = B. **a)** Montrer que h n'admet aucun point fixe

b) En déduire h est une symétrie glissante. **c)** Montrer que $S_{(BD)} \circ h = t_{\overrightarrow{DB}}$

d) Donner alors l'axe et le vecteur de h.

Exercice 04 : Dans le plan orienté, on considère un carré direct OABC de centre Ω.

On note I, J et K les milieux respectifs de [OA] , [OC] et [AB] . **1)** Soit $f = S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}$. Caractériser f.

2) Soit g une isométrie sans points fixes qui transforme O en C et I en J. **a)** Déterminer g(A).

b) Montrer que g est une symétrie glissante. **c)** Soit D = g(K) . Montrer que O est le milieu de [ID] .

d) Vérifier que $g = t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}$. En déduire les éléments caractéristiques de g.

3) Soit $\varphi = g^{-1} \circ f$. **a)** Déterminer φ(O) et φ(I) puis caractériser φ .

b) Trouver alors l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que f(M) = g(M).

Exercice 05 : Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que AB = 2AD et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC] et K le symétrique de I par rapport à (DC).

1) On pose f = $S_{(IC)}\circ t_{\overrightarrow{AB}}\circ S_{(IJ)}$. **a)** Caractériser l'application $S_{(BC)}\circ S_{(IJ)}$.

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

2) Soit M un point de la demi droite [BA). La perpendiculaire à (CM) en C coupe (IJ) en N.
Montrer que f(M) = N, en déduire la nature du triangle CMN.

3) On pose g = $t_{\overrightarrow{IK}}\circ S_{(IC)}$. **a)** Caractériser l'application $g\circ S_{(AJ)}$.

b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4) Soit φ une isométrie qui fixe un point de la droite (AB) et transforme (AB) en (IJ).

a) Montrer que φ fixe le point I. **b)** Déterminer alors toutes les isométries φ.

Exercice 06 : Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O .On désigne par I le milieu du segment $[BC], D=S_O(A)$. Les droites (BD) et (AC) sont sécantes en un point A', Δ la médiatrice du segment $[AD]$ et Δ' la médiatrice du segment $[OB]$ sont sécantes en un point K.

A/ 1) Montrer que OA = BD et que I est le milieu de $[OD]$.

2) Soit f une isométrie telle que f(A) = D et f(O) = B et $g=t_{\overrightarrow{BO}}of$.

a) Déterminer g(A) et g(O) en déduire que $g=S_{(BO)}$ ou $g=r_{\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

b) En déduire alors que $f=t_{\overrightarrow{OB}}oS_{(BO)}$ ou $f=R_{\left(K,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

3) On pose $f_1=t_{\overrightarrow{OB}}oS_{(BO)}$ et $f_2=R_{\left(K,-\frac{2\pi}{3}\right)}$. **a)** Déterminer $f_2^{-1}of_1(O)$ et $f_2^{-1}of_1(A)$.

b) En déduire l'ensemble des points M tels que $f_1(M)=f_2(M)$.

B/ 1) Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications $S_{(BD)}oS_{(DC)}$ et $S_{(CA)}oS_{(AB)}$.

2) Soit Δ_1 la parallèle à (DC) issue de A.

a) Montrer que $S_{(BD)}oS_{(DC)}=S_{(CD)}oS_{(DA)}$. **b)** Montrer que $S_{(CA)}oS_{(AB)}=S_{(DA)}oS_{\Delta_1}$.

3) a) Caractériser l'application $h=S_{(BD)}oS_{(DC)}oS_{(CA)}oS_{(AB)}$. **b)** En déduire que C est le milieu de $[AA']$.