Mathématiques

Classe : $4^{ème}$ Mathématiques

Résumé : Géométrie dans l'espace

Produit scalaire dans l'espace :

Définition :

Soit A, B et C des points. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et le réel défini par :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ si $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC.\cos BAC$ si $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$

Propriétés :

Pour tout vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{v}$ et tous réels α et β, on a :

- ✓ $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- ✓ $\vec{u}\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$
- ✓ $\left(\alpha\vec{u}\right)\vec{v}=\vec{u}\left(\alpha\vec{v}\right)=\alpha\left(\vec{u}\vec{v}\right)$
- ✓ $\left(\alpha\vec{u}\right)\left(\beta\vec{v}\right)=\alpha\beta\left(\vec{u}\vec{v}\right)$

Théorème :

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.

Pour tout vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

- ✓ $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et on a :
  $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- ✓ Pour tous points $M\left(x,y,z\right)$ et $M'\left(x',y',z'\right)$
  $MM'=\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2}$

Produit vectoriel :

Définition :

Soit A, B et C des points de l'espace.

Le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et défini par :

- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires, alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaire alors :
  - $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$
  - $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ est une base directe
  - $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=AB\times AC\times\sin\left(BAC\right)$

Propriétés :

Pour tout vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous réel α et β.

- $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right)$
- $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)+\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)$
- $\alpha\vec{u}\wedge\beta\vec{v}=\alpha\beta\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$.

Propriétés : :

L'espace est muni d'une base orthonormée $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Pour tout vecteur $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right).\vec{u}=\left(\vec{w}\wedge\vec{u}\right).\vec{v}=\det\left(\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}\right)$

Aire de parallélogramme :

L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est égale à $A=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$

Composantes du produit vectoriel : :

L'espace est muni d'une base orthonormé directe $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

Volume d'un tétraèdre-volume d'un parallélépipède :

L'aire d'un triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est égale à : $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$

Equations d'une droite, d'un plan et d'une sphère :

Droite :

Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble D des points M tel que $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ où k est un réel est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Plan :

Soit A un point, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble P des points M tels que : $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ où α et β sont des réels est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

$p=\left\{M;\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=0\right\}$.

Sphère :

Soit A un point et R un réel strictement positif. La sphère S de centre A et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $AM=R$.

Distance d'un point à un plan :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ un point de l'espace. La distance de A au plan P est égale à :

$$d\left(A,P\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Théorème :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit S la sphère de centre A et de rayon R. Soit un plan P et H le projeté orthogonal de A sur P.

- ✓ $S\cap P=\varnothing$ si $d\left(A,P\right)>R$.
- ✓ $S\cap P=\left\{H\right\}$ et $d\left(A,P\right)=R$.
- ✓ $S\cap P$ est un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d\left(A,P\right)^2}$ si $d\left(A,P\right)<R$

Distance d'un point à une droite :

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D. La distance d'un point M de l'espace à la droite D est :

$$d\left(M,D\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

Translation :

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM}=\vec{u}$ est appelée translation de vecteur $\vec{\mu}$ et notée $t_{\vec{u}}.t_{u}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

Théorème :

L'image par une translation t :

- D' une droite est une droite qui lui es parallèle.
- D' un plan est un plan qui lui est parallèle.

Définition :

Toute translation conserve, les distances, le produit scalaire les milieux, le barycentre, le parallélisme et l'orthogonalité.

Pyramide régulière :

Une pyramide $IABCD$ de sommet I et dite régulière si, sa base $ABCD$ est un carré et le projeté orthogonal de I sr le plan $(ABCD)$ est le centre du carré $ABCD$.

Expérience analytique d'une translation :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace si $M(x,y,z)$ est un point de l'espace et $M'(x',y',z')$ est son image par la translation de vecteur $\vec{u}$ alors $\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\z'=z+c\end{cases}$

L'application qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ est tel que $\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\z'=z+c\end{cases}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$.

Homothétie de l'espace :

Définition :

Soit I un point de l'espace et k un réel non nul. L'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ est appelée homothétie de centre I et de rapport k, elle est notée $h_{(I,k)}$

Pour tout points M et M' de espace

$h_{(I,k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$.

Définition :

Toute homothétie conserve :

- Les milieux, le barycentre, le parallélisme et l'orthogonalité.
- Le contact.

Théorème :

- Toute homothétie de centre I et de rapport non nul k est une bijection de l'espace et sa réciproque est une homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$.
- Soit h une homothétie. Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par h on a : $M'N'=|k|MN$.

Théorème :

L'image par une homothétie h de rapport k :

- D' une droite est une droite qui lui es parallèle.
- D' un plan est un plan qui lui est parallèle.

Expérience analytique d'une translation :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- Soit h l'homothétie de centre $I\left(a,b,c\right)$ et de rapport non nul k.

  Soit $M\left(x,y,z\right)$ est nul de l'espace et $M'\left(x',y',z'\right)$ est on image par h ors $\begin{cases} x'=kx+(1-k)a \\ y'=ky+(1-k)b \\ z'=kz+(1-k)c \end{cases}$

- L'application qui à tout point $M\left(x,y,z\right)$ associe le point $M'\left(x',y',z'\right)$ tel que $\begin{cases} x'=kx+\alpha \\ y'=ky+\beta \\ z'=kz+\gamma \end{cases}$ où

  $k\neq 1$ est l'homothétie de centre $I\left(\frac{\alpha}{1-k},\frac{\beta}{1-k},\frac{\gamma}{1-k}\right)$ et de rapport k

Taki Academy
www.takiacademy.com

تهنى على قرايتك

Magazines

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba