Mathématiques

Classe : Bac MATHS (TOP 50-2)

Série 12 : Révision DC 1

Nom du Prof : M. ZOGHBI Naoufel

Exercice 1 — 30 min — 5 pts

Soit f la fonction définie et continue sur $]0;+\infty[$ et possédant les propriétés suivantes :

- pour tous réels strictement positifs a et b ; $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$
- pour tout réel x de]0; 1[; f (x) < 0

1°)a) Montrer que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

b) Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a : f (x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = 1:

2°)a) Montrer pour tous réels strictement positifs a et b ; f (ab) = f (a) + f (b) :

b) Montrer que f n'est pas majorée sur $]0;+\infty[$.

c) Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et en déduire $\lim\limits_{0^+} f$

3°) Soit g la fonction définie par $g(x) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Montrer que g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

c) Montrer que $g(]1;+\infty[) =]-\infty;0[$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; l'équation g (x) + n = 0 admet, dans $]1;+\infty[$ une unique solution α_n.

4°) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général α_n définie précédemment.

a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel L.

c) Montrer que L = 1.

Exercice 2 — 35 min — 4 pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; (unité 5 cm)

Soit $\theta \in [0;\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.On considère les points A;B et C d'affixes respectives

1; $b = ie^{i\theta}$ et $c = -e^{i2\theta}$.

1°)a) Mettre les nombres complexes b et c sous forme exponentielle .

b) Justifier que les points A, B et C forment un triangle.

2°) Soit H le point d'affixe $h = 1+b+c$.

a) Montrer que le nombre complexe $\frac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}}$ est imaginaire pur.

b) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3°) Donner alors un procédé de construction puis construire le point $\Omega\left(1+ie^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

4°)a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - iz - 1 = 0$.

b) On note par G; le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe de G.
c) Déterminer les valeurs de θ pour que H et G soient confondus.

Exercice 3 — 35 min — 6 pt

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie A

1°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $0 < u_n < 1$.

2°)a) Montrer que (u_n) est monotone.

b) En déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

3°) Soit (v_n) la suite définie sur N par $v_n = nu_n$.

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x - x^2$ est strictement croissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $un < \frac{1}{n+1}$.

c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} - v_n = u_n\left[1-(n+1)u_n\right]$.

d) Montrer que la suite (v_n) est convergente vers un réel $L \in]0;1]$.

Partie B

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_n = n\,(v_{n+1} - v_n)$.

1°) Montrer que (w_n) converge vers le réel $(L - L^2)$:

2°) On suppose que $L \neq 1$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$;

on a : $\frac{L-L^2}{2} < w_n < \frac{3}{2}(L-L^2)$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$; on a : $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq n_0$, on a : $\frac{L-L^2}{4} < v_{2n} - v_n$.

3°) Déterminer alors le réel L.