Taki Academy
www.takiacademy.com

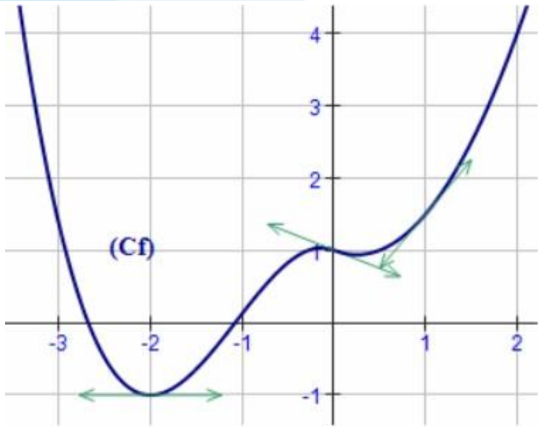
Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Dérivabilité

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

Exercice 1 — 15 min — 3 pts



1 / D'après le graphique :

a) Déterminer $f(-2)$ et $f'(-2)$

b) Justifier que $f'(0)=\frac{1}{2}$

c) Justifier que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-\frac{3}{2}}{x-1}=\frac{3}{2}$

2) Soit la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;x\rightarrow f(x^2-2)$ et $u:x\rightarrow x^2-2$.

a) Prouver que la courbe représentative de g admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 0 .

b) Déterminer $g'(\sqrt{3})$.

Exercice 2 — 25 min — 5 pts

I/ Soit f une fonction vérifiant :

(1) : f est continue sur [a,b] (un intervalle de IR)

(2) : f est dérivable sur]a, b[

(3) : il existe un réel M tel que f(t)≤M pour tout t ∈]a, b[

1) Soit la fonction u : [a, b] → IR ; x ↦ u(t)=f(t)-f(a)-M(t-a)

Etudier les variations de u

2) Déduire que f(b)-f(a)≤M(b-a)

II/ Soit f est une fonction définie, continue sur]0,+∞[et dérivable sur les intervalles]0,2[et [2, +∞[. (C) est la courbe de f dans un repère R. On donne ci-dessous le Tableau de variation de f' de f .

x	0		1		2		4		$+\infty$
f'	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ 1	↘	0	↘	$-\infty$

1/ Déterminer l'extremum de f et l'abscisse du point d'inflexion de (C).

2/ Comparer f(2) et f(4) en justifiant .

3/ Montrer que f(4) ≤2 + f(2).

4/ Dresser le tableau de variation de f sachant que f(1)=2, f(2)=1, f(4)=2, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

5/ On donne de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$. Donner l'allure de (C).

Exercice 3 — 25 min — 5 pts

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction *f* dérivable sur IR et vérifiant : $f(0)=\frac{1}{4}$ et pour tout $x\in[-1,1]$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-2

1°) Justifier que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $[-1,1]$.

2°) Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{4} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN$, $-1\leq u_n\leq 1$.

b) Montrer que pour tout $n\in IN$, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n\in IN$, $|u_n-\alpha|\leq 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

d) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3°) Soit $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$,pour tout $n\in IN$. Montrer pour tout $n\in IN$,

$f\left(\frac{1}{n^2}\right)\leq v_n\leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ et en

déduire la limite de (v_n).

Exercice 4 — 25 min — 5 pts

Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$.

1) Etudier les variations de f sur $]1,+\infty[$ et calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]1,+\infty[$.

2)

a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$.

b) Montrer que : $1<\alpha<2$.

3) Soit la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que : $g(\alpha)=\alpha$.

4)

a) Déterminer l'image de l'intervalle $[1,+\infty[$ par la fonction g

b) Montrer que $\forall x\in[1,+\infty[$ on a : $|g'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$.

c) En déduire que $\forall x\in[1,+\infty[$, on a : $|g(x)-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

5) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=g(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; $1\leq U_n\leq 2$.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; on a : $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $|U_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de suite U.

Taki Academy
www.takiacademy.com

Magazines

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba