



Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions logarithmes

📍 Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina /
Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir /
Gabes / Djerba



Exercice 1

 40 min

7 pt



I- Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = x(1 + \ln^2(x)) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = (1 + \ln(x))^2$.

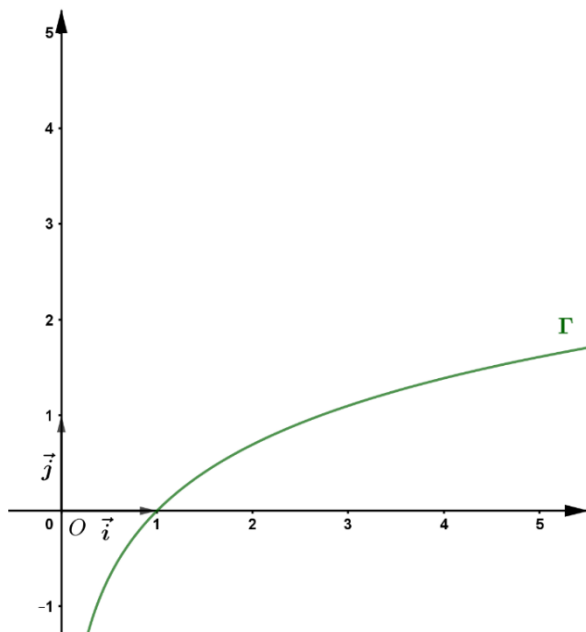
b) Dresser le tableau de variation de f .

4°) a) Montrer que la courbe C de f admet un point d'inflexion d'abscisse e^{-1} .

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.

c) Etudier la position de C par rapport à T .

5°) Dans la figure ci-dessous on a représenté dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe Γ de la fonction $x \mapsto \ln x$.



a) Construire le point $A(e^{-1}, f(e^{-1}))$.

b) Tracer la tangente T ainsi que la courbe C .

6°) a) Justifier que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Tracer dans le même repère la courbe C' représentative de g^{-1} .

II- On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1°) Montrer que pour tout entier n , $e^{-1} \leq u_n < 1$.

2°) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3°) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

III- Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

1°) Montrer que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

2°) a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln(x)$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$: $\int_1^x t \ln^2(t) dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(x) dt$.

c) En déduire que tout $x > 0$, $F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln(x) + \frac{1}{2}x^2 \ln^2(x)$.

3°) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et en déduire $\int_0^1 f(t) dt$.

b) Calculer alors l'aire de la partie du plan limitée par C et C' .

Exercice 2

🕒 35 min

6 pt



Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x+2}{x(x+2)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 = x + 1$.

b) On note α la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\frac{1}{\alpha}$.

c) Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α .

d) Montrer qu'une équation de la tangente T à C au point A est $y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha)$.

e) Vérifier que la tangente T passe par le point $B\left(0, -1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$.

4°) a) Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , tracer la droite (D) d'équation : $y = x + 2$ et la courbe Γ de la fonction : $x \mapsto x^2 + 1$.

b) Construire les points A et B , la tangente T et tracer la courbe C .



Taki Academy
www.takiacademy.com



Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina /
Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir /
Gabes / Djerba



www.takiacademy.com



73.832.000