Mathématiques

Classe : BAC Mathématiques

Session Principale 2022

Exercice 1 : 36 min 3 pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit $\theta \in \left]0,\pi\right[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right): z^2 - 2e^{i\theta}z + \left(e^{2i\theta} - 4\right) = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right)$. On note z_1 et z_2 les solutions de $\left(E\right)$.
   z_1 est tel que $\mathrm{Re}\left(z_1\right) < 0$.
2) On considère les points
   a) Montrer que I est le milieu du segment $\left[M_1M_2\right]$.
   b) Vérifier que : $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$.
   c) Dans la figure 1 de l'annexe jointe, on a placé dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, les points A, B et I.
      Construire les points : M_1 et M_1.
3)
   a) Montrer que les droites $\left(AM_2\right)$ et $\left(BM_1\right)$ se coupent au point J d'affixe $\left(-e^{i\theta}\right)$.
   b) Déterminer la valeur du réel θ telle que l'aire du triangle JM_1M_2 soit maximale.

Exercice 2 : 66 min 5,5 pts

Le plan est orienté. Dans la figure 2 de l'annexe jointe.

- OAB est un triangle rectangle et isocèle en O tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$.
- CBA est un triangle isocèle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\left[2\pi\right]$.

1) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
   a) Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$.
   b) On note $D = R\left(C\right)$. Justifier que les points O, D et B sont alignés et construire le point D.
   c) Montrer que le triangle ACD est rectangle et isocèle en C.

2) Soit f la similitude direct telle que $f\left(B\right) = A$ et $f\left(O\right) = C$.
   a) Montrer que $f\left(A\right) = D$.
   b) Montrer qu'une mesure de l'angle de f est $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.
   c) Soit $E = f\left(D\right)$. Vérifier que le point E est un point de la droite $\left(AC\right)$.

d) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ puis construire le point E.

e) Soit Ω le centre de f. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3) On suppose $OA = OB = 1$ et on rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

a) On note z_C l'affixe du point C. Montrer que $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Soit $z' = az + b$ l'expression complexe de f où a et b sont deux nombres complexes.
Montrer que si : $ai + b = 1$ et que $z_C = b$.

c) On note z_Ω l'affixe de Ω. Vérifier que $z_\Omega \neq 0$ et montrer que $\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \frac{1-i}{b}$.

En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

4) Montrer que le point Ω est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OE) et le construire.

Exercice 3 : 66 min 5,5 pts

Partie A :

Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 19u + 11v = 1$.

1)

a) Vérifier que $(-4,7)$ est une solution de (E)

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2)

a) Montrer que $u = 7$ est l'unique entier appartenant à $\{1,2,......10\}$ tel que $19u \equiv 1(\text{mod}\,11)$.

b) Montrer de même que $v = 7$ est l'unique entier appartient à $\{1,2,......18\}$ tel que $11u \equiv 1(\text{mod}\,19)$

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_{209}): x^2 \equiv x(\text{mod}\,209)$.

Partie B :

1) Vérifier que les entiers 0 et 1 sont des solutions de (E_{209}).

2) Décomposer 209 en produit de facteurs premiers.

3) Montrer que 133 et 77 sont des solutions de (E_{209}).

4) Soit x une solution de (E_{209}).

a) Montrer que 19 divise $x(x-1)$ et 11 divise $x(x-1)$.

b) Vérifier que x et $(x-1)$ sont premiers entre eux.

5) Soit x une solution de (E_{209}) appartenant à $\{2,3,......,208\}$.

a) Montrer que 19 divise x ou 11 divise x.

b) On suppose que $x=19k$ où k est un entier.

Montrer que 11 divise $(x-1)$ puis déduire que $x=133$.

c) On suppose que 11 divise x montrer que $x=77$.

6) Déterminer les solutions de (E_{209}) appartenant à $\{0,1,......,208\}$.

Partie C :

Soit y un entier et x son reste modulo 209.

1) Montrer que y est une solution de (E_{209}) si et seulement si x est une solution de (E_{209}).

2) Donner alors les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_{209}).

Exercice 4 : 78 min 6,5 pts

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

2)

a) Montrer que pour tout $x>1$; $f'(x)=\dfrac{-1}{x\ln^2 x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer (C).

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ possède sur $]1,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha<e$.

Partie B :

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x>1$, on pose $F(x)=\int_\alpha^x (f(t))^n\,dt$ et $H(x)=\int_{\ln\alpha}^{\ln x}\dfrac{e^t}{t^n}\,dt$.

a) Montrer que H est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x>1$, $H(x)=F(x)$.

2) On pose pour tout entier $n\geq1$, $U_n=\int_\alpha^e (f(t))^n\,dt$.

a) Vérifier que pour tout $n\geq1$, $U_n=\int_{\ln\alpha}^{1}\dfrac{e^t}{t^n}\,dt$.

b) En déduire que pour tout $n\geq2$, $\dfrac{\alpha^n-\alpha}{n-1}\leq U_n\leq\dfrac{e}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n} = +\infty$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{\alpha^n}$

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} (k-2)U_k$.

a) En intégrant par partie, montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n = e - \alpha^{n+1} + nU_{n+1}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $S_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-n)e - U_n$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\alpha^n}$.


Q
Magazines