Révisions - Dc 1

Exercice 2 | 30 min | 4 pt

1) a) $b = i e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta} = \boxed{e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}$

c'est la forme exp de b.

$c = -e^{i2\theta} = e^{i\pi} \times e^{i2\theta} = \boxed{e^{i(\pi+2\theta)}}$

c'est la f exp de c.

b) $\forall \theta \in [0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ on a

$a \neq b$; $a \neq c$ et $b \neq c$

alors les points A, B et C sont distincts

$$\frac{z_{\vec{BC}}}{z_{\vec{BA}}} = \frac{c-b}{1-b} = \frac{-e^{i2\theta} - i e^{i\theta}}{1 - i e^{i\theta}}$$

$$= \frac{-e^{i\theta}\cancel{(e^{i\theta}+i)}}{-i\cancel{(e^{i\theta}+i)}} = \frac{e^{i\theta}}{i} = e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$$

$= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

or $\theta \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ et $\theta - \frac{\pi}{2} \neq 0$

$\Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$

$\Rightarrow \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$

alors $\dfrac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} \notin \mathbb{R}$

alors $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C forment un trigle.

$BC < AC + AB$.

2°M : $\left.\begin{array}{l}|z_A| = 1 \\ |z_B| = 1 \\ |z_C| = 1\end{array}\right\} \Rightarrow A, B$ et $C \in \mathcal{C}_{(O,1)}$

et comme A, B et C ~~sont~~ distincts

alors ils forment un triangle.

2 $h = a + b + c$.

a) $\left(\dfrac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}}\right) + \overline{\left(\dfrac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}}\right)}$

$$= \frac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}} + \frac{1-i\bar{e}^{i\theta}}{1+i\bar{e}^{i\theta}}$$

$$= \frac{(1+ie^{i\theta})(1+i\bar{e}^{i\theta}) + (1-ie^{i\theta})(1-i\bar{e}^{i\theta})}{(1-ie^{i\theta})(1+i\bar{e}^{i\theta})}$$

$$= \frac{\cancel{1} + \cancel{i\bar{e}^{i\theta}} + \cancel{ie^{i\theta}} - \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{i\bar{e}^{i\theta}} - \cancel{ie^{i\theta}} - \cancel{1}}{(1-ie^{i\theta})(1+i\bar{e}^{i\theta})}$$

$= 0$

alors $\overline{\left(\dfrac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}}\right)} = -\dfrac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}}$

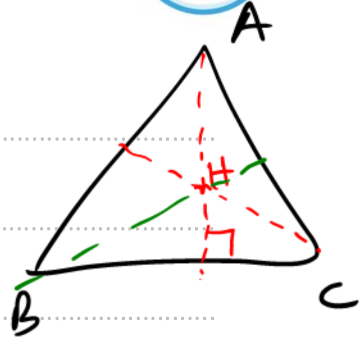
alors $\dfrac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}}$ est imaginaire pur.

2°M : $\dfrac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}} = \dfrac{\cancel{i}(e^{i\theta}-i)}{-\cancel{i}(e^{i\theta}+i)}$

$$= -\frac{e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$= -\frac{\cancel{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)}{\cancel{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)}$$

$$= -\frac{\cancel{2}i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cancel{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \in i\mathbb{R}^*.$$



b) $\dfrac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \dfrac{\cancel{1}+b+c-\cancel{1}}{b-c}$

$= \dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{ie^{i\theta}-e^{i2\theta}}{ie^{i\theta}+e^{i2\theta}}$

$= \dfrac{\cancel{ie^{i\theta}}\left(1+ie^{i\theta}\right)}{\cancel{ie^{i\theta}}\left(1-ie^{i\theta}\right)} \in i\mathbb{R}^*$ d'après a)

alors $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.

• $\dfrac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \dfrac{h-c}{1-b} = \dfrac{1+b+\cancel{c}-\cancel{c}}{1-b}$

$= \dfrac{1+b}{1-b} = \dfrac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}} \in i\mathbb{R}^*$

alors $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux.

et on a $(AH)\cap(CH)=\{H\}$.

d'où H est l'orthocentre du triangle ABC.

③ Pour $\theta = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ on a :

$h = 1 + i e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$= 1 + i e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{2\pi}{3}} = z_\Omega$

alors Ω est l'orthocentre du triangle

ABC pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

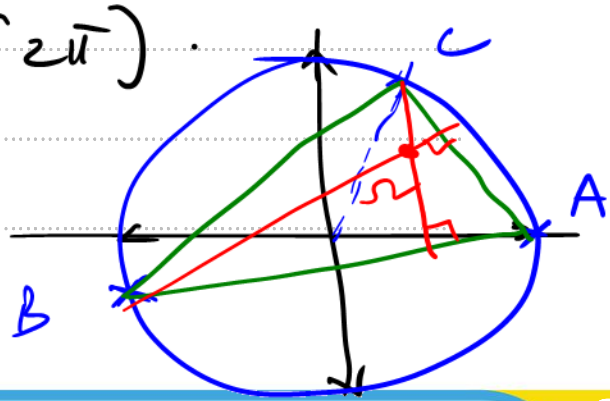
On construit les pts A, B et C

tq A, B et C $\in \mathcal{C}(O, 1)$ avec

$(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \ (2\pi)$

$\equiv -\frac{5\pi}{6} \ (2\pi)$

et $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{3} \ (2\pi)$.



4) a) $\forall z \in \mathbb{C}$ on a :

$$(z - e^{i\frac{\pi}{6}})(z - e^{i\frac{5\pi}{6}}) = z^2 - z(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}) + e^{i\pi}$$

$$= z^2 - z e^{i\frac{\pi}{2}} (e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}) + (-1)$$

$$= z^2 - z i \times 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1$$

$$= z^2 - iz \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} - 1$$

$$= \boxed{z^2 - iz - 1.}$$

b) 1°M : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow z_A - z_G + z_B - z_G + z_C - z_G = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}}$$

ou bien directement :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

$$= \frac{\boxed{1 + b + c}}{3} = \frac{\boxed{h}}{3}.$$

c) H et G sont confondus

$\Leftrightarrow h = \dfrac{h}{3}$

$\Leftrightarrow 3h = h$

$\Leftrightarrow 2h = 0$

$\Leftrightarrow h = 0$

$\Leftrightarrow 1 + i e^{i\theta} - e^{i2\theta} = 0$

$\Leftrightarrow e^{i2\theta} - i e^{i\theta} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (e^{i\theta})^2 - i e^{i\theta} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{i\theta}$ est sol° de $z^2 - iz - 1$

$\Leftrightarrow \quad e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $e^{i\theta} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow \quad \theta \equiv \frac{\pi}{6} \, (2\pi)$ ou $\theta \equiv \frac{5\pi}{6} \, (2\pi)$.

et comme $\theta \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

alors $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{6}}$

Ex 3 : $\begin{cases} u_0 = 1/4 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$

1 ⊙ Pour $n = 0$; $u_0 = \frac{1}{4}$ et $0 < \frac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow \quad 0 < u_0 < 1$ vraie.

⊙ Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $0 < u_n < 1$

et mq $0 < u_{n+1} < 1$.

on a $\quad 0 < U_n < 1$

$\Rightarrow \quad -1 < -u_n < 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{0 < 1-u_n < 1}$

et $\quad \boxed{0 < u_n < 1}$

alors

$$0 < u_n(1-u_n) < 1$$

d'où $\quad 0 < u_{n+1} < 1.$

cl : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{0 < u_n < 1.}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1-u_n) - u_n$$

$$= -u_n^2 < 0$$

alors $u_{n+1} < u_n$

$\Rightarrow (u_n)$ est décroissante.

b) (u_n) est une suite décroissante

et minorée par 0, alors (u_n)

est convergente vers un réel $l \in [0,1]$.

Soit $f(x) = x(1-x)$ $\forall x \in [0,1]$

alors $f(u_n) = u_{n+1}$.

et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ tq $l \in [0,1]$

f est une fct polynôme continue sur $\mathbb{R}$

et en particulier en l

d'où $f(l) = l$.

$\Leftrightarrow l(1-l) = l$

$\Leftrightarrow \cancel{l} - l^2 = \cancel{l}$

$\Leftrightarrow l^2 = 0 \Leftrightarrow l = 0$

c) : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

3) $v_n = n u_n$; $n \in \mathbb{N}$.

a) f est la restriction d'une fct polynome, alors f est dble sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[$ on a

$f'(x) = 1 - 2x > 0 \quad \forall x \in]0, \frac{1}{2}[$

d'où f est strictement croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$.

b) ⊙ Pour $n = 0$; $u_0 = \frac{1}{4} < \frac{1}{0+1} = 1$ vraie.

⊙ Pour $n = 1$; $u_1 = \frac{3}{16} < \frac{1}{2}$ vraie

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2$ on a $u_n < \frac{1}{n+1}$

⊙ Pour $n = 2$: $U_2 = \frac{3}{16} \times \frac{13}{16} = \frac{39}{256} < \frac{1}{3}$ vrai.

⊙ Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; supposons que

$$\boxed{U_n < \frac{1}{n+1}} \text{ et mq}$$

$$U_{n+1} < \frac{1}{n+2}.$$

on a : $n \geq 2 \Rightarrow n+1 \geq 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

Ainsi $U_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\frac{1}{n+1} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

f est st $\nearrow$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

$$U_n < \frac{1}{n+1} \Rightarrow f(U_n) < f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

reste à vérifier que $\forall n \geq 2$ on a

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n}{n^2+2n+1} < \frac{n}{n^2+2n} = \frac{1}{n+2}$$

d'où $\quad u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$.

Cl : d'après P.R.R on a $\forall n \geq 2$

$$U_n < \frac{1}{n+1}$$

Cl : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{U_n < \frac{1}{n+1}.}$

c) $\forall n \geq 0$; $V_{n+1} - V_n$

$= (n+1)\boxed{U_{n+1}} - nU_n$

$= (n+1)\boxed{U_n(1-U_n)} - nU_n$

$= (n+1)U_n - (n+1)U_n^2 - nU_n$

$$= U_n\left[\cancel{n}+1-(n+1)U_n-\cancel{n}\right]$$

$$= \boxed{U_n\left[1-(n+1)U_n\right]}.$$

d) $\forall n\in\mathbb{N}$; $\quad 0 < U_n < \frac{1}{n+1}$

et $n+1>0$, alors $\quad 0 < (n+1)U_n < 1$

$\Rightarrow \quad -1 < -(n+1)U_n < 0$

$\Rightarrow \quad 0 < 1-(n+1)U_n < 1$

et $U_n>0$, alors $\quad 0 < U_n\left[1-(n+1)U_n\right] < U_n$

$\Rightarrow \quad 0 < V_{n+1}-V_n$

$\Rightarrow \quad V_{n+1} > V_n$

$\Rightarrow (V_n)$ est croissante.

et $\quad U_n < \frac{1}{n+1}$

et $n>0$ alors $\quad nU_n < \frac{n}{n+1} < 1$

$\Rightarrow \quad v_n < 1$

Ainsi (v_n) est une suite croissante et majorée par 1, alors elle converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.

or (v_n) est $\nearrow$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n \geq v_1 = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow \quad v_n \geq \frac{3}{16} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$

alors $\ell \geq \dfrac{3}{16} > 0$.

d'où $\ell \in]0,1]$.

2° Méthode : 3) b).

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{U_n - U_{n+1}}{U_n\, U_{n+1}}$

$$= \frac{\cancel{U_n} - \cancel{U_n} + U_n^2}{U_n \times U_n(1-U_n)} = \frac{1}{1-U_n}$$

Soit $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $x \in]0,1[$.

$$0 < x < 1$$

$\Rightarrow \quad -1 < -x < 0$

$\Rightarrow \quad 0 < 1-x < 1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{1-x} > 1$

$\Rightarrow \quad g(x) > 1 \quad \forall x \in]0,1[$

et Comme $U_n \in]0,1[$, alors

$$\boxed{g(U_n) > 1.}$$

d'où $\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} > 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} > \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} - \underbrace{\frac{1}{u_0}}_{=4} > n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} > n+4$$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

et pour $n=0$; $u_0 = \frac{1}{4} < \frac{1}{0+1}$ vraie.

3'M : $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} - 1 = \frac{u_n}{1-u_n} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} > \frac{1}{u_n} + 1 \quad (*)$$

par récurrence : - - - .

. - - -

or $u_n < \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{u_n} > n+1$

$\Rightarrow \frac{1}{u_n} + 1 > n+2$

(*) $\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} > n+2$

$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$

B $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.

1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$w_n = n(v_{n+1} - v_n)$

$\overset{3)c)}{=} n\, u_n \left[1 - (n+1)u_n\right]$

$= v_n \left[1 - v_n - u_n\right]$

$= v_n - v_n^2 - u_n v_n$

par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_n^2 - \underbrace{u_n v_n}_{\to 0}$$

$$= \ell - \ell^2$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}. \end{cases}$

d'où (w_n) converge vers $\ell - \ell^2$.

② Supposons que $\ell \neq 1$.

D'après la définition de la limite d'une suite on a :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell - \ell^2$$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{\forall}}\ \beta > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tq $\forall n \geq n_0$ on a $|w_n - (\ell - \ell^2)| < \beta$

$\Leftrightarrow \quad -\beta < w_n - (\ell - \ell^2) < \beta$

$\Leftrightarrow -\beta + (\ell - \ell^2) < w_n < \beta + (\ell - \ell^2)$

$\forall \beta > 0$.

on peut $\beta = \frac{1}{2}(\ell - \ell^2) > 0$

car $\ell \in]0,1[$

$\ell \neq 1$.

alors

$-\frac{1}{2}(\ell - \ell^2) + (\ell - \ell^2) < w_n < \frac{1}{2}(\ell - \ell^2)$

$+ \ell - \ell^2$

d'où il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$

on a $\frac{\ell - \ell^2}{2} < w_n < \frac{3}{2}(\ell - \ell^2)$.

b) Soit $n \geq 1$ on a

$0 < n \leq k \leq 2n - 1 \leq 2n$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=\boxed{n}}^{\boxed{2n-1}} \frac{1}{2n} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

ne dépend pas de k

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} \times \boxed{n} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} \quad \forall n \geq 1.}$$

c) $\forall n \geq n_0$ ona :

$$\frac{\ell - \ell^2}{2} < w_k \quad \forall k \in \{n, \dots, 2n-1\}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell - \ell^2}{2} < k(V_{k+1} - V_k)$$

et $k > 0 \Rightarrow \left(\frac{\ell - \ell^2}{2}\right)\frac{1}{k} < V_{k+1} - V_k$

$$\frac{\ell-\ell^2}{2}\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{1}{k}\right) < \sum_{k=n}^{2n-1} v_{k+1} - \sum_{k=n}^{2n-1} v_k$$

$\frac{1}{2} \leq$

$$\Rightarrow \frac{\ell-\ell^2}{2\times 2} < \left(v_{n+1}+\dots+v_{2n}\right)-\left(v_n+\dots+v_{2n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\ell-\ell^2}{4} < v_{2n}-v_n} \quad \forall n \geq n_0$$

3 (v_n) est cgte vers ℓ

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \ell$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_{2n}-v_n = \ell-\ell = \boxed{0}$$

or $\frac{\ell-\ell^2}{4} < v_{2n}-v_n$

alors $\frac{\ell-\ell^2}{4} \leq 0$

$\Rightarrow \quad \ell - \ell^2 \leq 0$

$\Rightarrow \quad \ell \leq \ell^2$

$\Rightarrow \quad 1 \leq \ell \quad$ car $\ell \neq 0$

c'est absurde car $\ell \in]0,1[$

la supposition donnée dans

2) est fausse $\Rightarrow$ $\boxed{\ell = 1.}$