Mathématiques

Classe : 4ème Mathématiques

Devoir de synthèse N°1

Exercice 1 — 60 min — 6 pts

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1. *D et Δ sont deux droites strictement parallèles, A est un point de D et B est un point de Δ tels que (AB) n'est pas perpendiculaire à D. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des isométries du plan qui transforme D en Δ et A en B.*
   - a) *$\mathscr{E}$ contient une translation*
   - b) *$\mathscr{E}$ contient une rotation*
   - c) *$\mathscr{E}$ contient une symétrie orthogonale*
   - d) *$\mathscr{E}$ contient une symétrie glissante.*
2. ABDC *est un parallèlogramme de centre* O.
   $S_{(AD)} \circ S_O = S_{(BC)}$ *si et seulement si* ABDC *est un losange*
3. *Si f est une isomètrie qu n'admet aucun point fixe alors $f \circ f$ est une translation*
4. ABCD *est un carré.*
   L'isométrie $S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BC)}$ est la symétrie glissante de vecteur $2\overrightarrow{AB}$ et d'axe (AB).
5. ABC *est un triangle équilatéral et f l'isométrie du plan telle que $f(A) = B, f(B) = C$ et $f(C) = A$ alors $f \circ f \circ f$ est l'identité du plan.*
6. *Δ et Δ' sont deux droites perpendiculaires.*
   Si f et g sont deux symétries glissantes d'axes respectifs Δ et Δ' alors $f \circ g$ est symétrie centrale.

Exercice 2 — 50 min — 5 pts

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z = 2\bar{z} - 8$.

2°) Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 2$; $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = \overline{z_B}$.

3°)a) Montrer que les points B et C appartiennent au cercle (ζ) de centre O et passant par A.

b) Soit M un point du cercle (ζ) d'affixe $2e^{i\theta}$; où θ est un réel de l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Construire le point M' image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

c) Justifier que le point M' a pour affixe $z' = z_B e^{i\theta}$.

4°) Soient I et J les milieux respectifs des segments [BM]et [CM'].

a) Montrer que les points I et J ont pour affixes respectives

$z_I = \frac{z_B}{2} + e^{i\theta}$ et $z_J = \frac{e^{i\theta} z_B + z_C}{2}$.

b) Montrer que $\frac{z_J - 2}{z_I - 2} = \frac{z_B}{2}$. En déduire que le triangle AIJ est équilatéral.

5°) a) Montrer que $AI^2 = 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)$.

b) Déterminer la position du point M pour laquelle la longueur du coté [AI] du triangle AIJ
est minimale.

Exercice 3 — 60 min — 5 pts

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABCD un losange de centre O tels que

- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
- I, J, K, L et Ω sont les milieux respectifs des segments [AB] ; [AD] ; [DC] ; [BC] et [AO]
- La droite (LJ) coupe la droite (KB) en H.

1°) Soit l'isométrie $g=r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}\circ t_{\overrightarrow{JI}}$. Déterminer g (J) puis caractériser g.

2°) Soit $f = r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}\circ t_{\overrightarrow{KB}}$.

a) Déterminer la droite Δ telle que $t_{\overrightarrow{KB}} = S_{(AB)}\circ S_{\Delta}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

3°)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h qui envoie B sur A et A sur D.

b) Montrer que h est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

c) En déduire que $g\circ h = r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}\circ S_{(IJ)}$.

4°) On donne AB = 2 et on considère le repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\overrightarrow{OD}\right)$ avec $\vec{u}=\frac{1}{OC}\overrightarrow{OC}$.

Soit φ l'application du plan qui à tout point M (z) associe le point M′ (z′) tel que $z' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\bar{z}-\sqrt{3}$.

a) Vérifier que $z_I = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$.

b) Montrer que φ est un antidéplacement qui transforme I en J et O en A.

c) On note par $\Omega' = r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(\Omega)$. Montrer que φ = g ∘ h . En déduire l'image de Ω par φ.

d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Exercice 4 — 50 min — 4 pts

Soit f *la fonction définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :* $f(x)=\sqrt{3+\frac{1}{x}}$.

1. a) *Etudier le sens de variation de* f.

   b) *Montrer que pour tout réel* $x\in]1,2[$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

2. *Montrer que l'équation* $f(2x)=2x$ *admet une solution unique* $\alpha>0$ *et que* $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

3) *On considère la suite* (U_n) *définie par :* $U_0 = \frac{3}{4}$ *et pour tout* $n \geq 0$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}f\left(2U_n\right)$

a) *Montrer que pour tout* $n \geq 0$, $\frac{1}{2} < U_n < 1$.

b) *Montrer que pour tout* $n \geq 0$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}|U_n - \alpha|$.

c) *Montrer que* (U_n) *converge vers* α.

4) *Pour tout réel* x, *on pose :* $P(x) = 4x^3 - 3x$

a) *Montrer que l'équation* $P(x) = \frac{1}{2}$ *possède une solution unique* β *dans l'intervalle* $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

b) *Montrer qu'il existe un réel unique* t *dans l'intervalle* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $\beta = \cos t$.

c) *Montrer que* $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ *(On pourra utiliser la formule d'Euler).*

d) *Déduire que* $\alpha = \cos\frac{\pi}{9}$.

Taki Academy
www.takiacademy.com

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000