Classe : Bac Maths

Série : Intégrales et espace

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

. $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ est Continue sur $]0, +\infty[$

La primitive de $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est la fonction Logarithme népérien, l'image d'un réel est note $\operatorname{Ln}(x)$

Consequences

* La fonction $x \xrightarrow{f} \operatorname{Ln}(x)$ est définie, Continue et d^{ble} sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \operatorname{Ln}(1) = 0$

* $\operatorname{Ln}(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad , x \in]0, +\infty[.$

Signe de $\operatorname{Ln}(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$+$			
$\operatorname{Ln}(x)$			0		

$\Longrightarrow$

x	0		1		$+\infty$
$\operatorname{Ln}(x)$		$-$	0	$+$	

* $x \longrightarrow \operatorname{Ln}(x)$ est strict $\nearrow$ sur $]0; +\infty[$

* $a \in \mathbb{R}^*_+ \qquad b \in \mathbb{R}^*_+$

(P_1) . $\operatorname{Ln}(a) = \operatorname{Ln}(b) \iff a = b.$

. $\operatorname{Ln}(a) = 0 \iff a = 1$

(P_2) . $\operatorname{Ln}(a) > \operatorname{Ln}(b) \iff a > b.$

. $\operatorname{Ln}(a) > 0 \iff a > 1$

. $\operatorname{Ln}(a) < 0 \iff 0 < a < 1$

Limites :

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{Ln}(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{Ln}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \operatorname{Ln}(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \operatorname{Ln}^m(x) = 0 \qquad . \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Ln}^m(x)}{x^n} = 0$$

$m \in \mathbb{N}^*$

$m \in \mathbb{N}^*$

Propriétés :

$a \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad$ $b \in \mathbb{R}_+^*$

- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^2) = 2\ln(a)$
- $n \in \mathbb{Z}$ $\quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.
- $p \geq 2$ $\quad \ln(\sqrt[p]{a}) = \frac{1}{p}\ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

* $x \longrightarrow \ln(U(x))$

* **Théorème**

Si $\begin{cases} ① \ U \text{ est } d^{ble} \text{ sur } I \\ ② \ U(x) > 0 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ Alors $x \xrightarrow{f} \ln(u)$ est d^{ble} sur I et $f'(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$

* **Théorème**

Si $\begin{cases} ① \ U \text{ est } d^{ble} \text{ sur } I \\ ② \ U(x) \neq 0 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ Alors $x \xrightarrow{f} \ln|U|$ est d^{ble} sur I et $f'(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$

* **Corollaire**

① U est d^{ble} sur un Intervalle I

② $U(x) \neq 0$ sur I

Alors la fonction $x \xrightarrow{f} \dfrac{U'(x)}{U(x)}$ admet pour primitive

la fonction $x \xrightarrow{F} \ln|U(x)| + k$.

Théorème

La fonction $x \xrightarrow{F} x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \xrightarrow{f} \ln(x)$.

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln^m(x)}{x^n} = 0 \qquad (m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*)$$

$$* \lim_{+\infty} \underbrace{x}_{+\infty} - \underbrace{\ln(x)}_{-\infty} \quad F.I$$

$$= \lim_{+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$+\infty \times (1 - 0)$$

$$* \lim_{+\infty} \frac{x^2 - 4\ln(x)}{x^3} = \lim_{+\infty} \frac{x^2}{x^3} - 4\frac{\ln(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{1}{x} - 4\frac{\ln(x)}{x^3} \to 0$$

$$0 - 0 = 0$$

$$* \lim_{+\infty} \frac{1 - x^2 \to -\infty}{\ln^3(x) \to +\infty} \quad F.I$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{1}{\ln^3(x) \to +\infty} - \lim \frac{x^2 \to +\infty}{\ln^3(x) \to +\infty} = \lim \frac{1}{\ln^3(x)} - \frac{1}{\frac{\ln^3(x)}{x^2} \to 0^+}$$

$\ln(x) > 0 \quad (x \to +\infty)$

$$= 0 - \infty = -\infty$$

$$* \lim_{+\infty} \frac{1 - 3\ln\sqrt{x}}{x} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} - 3\frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$$

$\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

$$= \lim_{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{\ln x}{x} \to 0$$

$$= 0$$

$$\lim_{0^+} x^m \ln^n(x) = 0$$

$$* \lim_{0^+} \underbrace{x^2}_{0} \underbrace{(\ln x - 1)}_{(-\infty - 1)} \quad F.I \quad = \lim_{0^+} \underbrace{x^2\ln(x)}_{0} - \underbrace{x^2}_{0} = 0$$

$$* \lim_{x \to 0^+} \frac{2 - x^3\ln(x)}{x} \quad \begin{matrix} x^3\ln(x) \to 0 \\ x \to 0^+ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \} \to 2 \\ \} \to 0^+ \end{matrix} \quad = +\infty$$

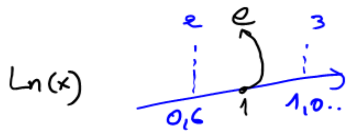
$$* \lim_{0^+} \sqrt{x}\ \ln(x) = \lim_{0^+} 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}\ln(x)$$

$$= \lim_{0^+} 2\sqrt{x}\ \ln\sqrt{x} \qquad t = \sqrt{x}$$

$$= \lim_{0^+} 2 t \ln(t) = 0$$

* e est un réel tel que $2 < e < 3$ $\quad e \simeq 2{,}72$

$$\ln(e) = 1$$



$$\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2 \quad . \quad \ln(e^3) = 3\ln(e) = 3.$$

$$\ln(e^{-4}) = \ln\left(\frac{1}{e^4}\right) = -\ln(e^4) = -4\ln e = -4$$

$$\boxed{\ln(e^n) = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}}$$

$$\ln(x) = Y \iff X = e^Y$$
$x > 0$

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(x) > Y \iff X > e^Y.$$
$x > 0$

* signe de $a\ln(x) + b$. $(a \neq 0)$

$x > 0$ $\quad a\ln(x) + b = 0 \iff a\ln(x) = -b \iff \ln(x) = -\frac{b}{a}$

$$X = e^{-b/a}$$

x	0		$e^{-\frac{b}{a}}$		$+\infty$
$a\ln(x)+b$		$-$signe de a.	0	signe de a	

x	0		e^3		$+\infty$
$2\ln(x) - 6$		$-$	0	$+$	

$*$ $\displaystyle \cdot \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln(t)\right]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

$$\cdot \int_{-\frac{1}{e}}^{-1} \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln|t|\right]_{-\frac{1}{e}}^{-1} = \ln|-1| - \ln\left|-\frac{1}{e}\right| = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$
$$= 0 + \ln e$$
$$= 1$$

$$\cdot \int_{-2}^{-3} \frac{1 \;(\to u')}{1+t \;(\to u)}\,dt = \left[\ln|1+t|\right]_{-2}^{-2}$$
$$= \ln|1-3| - \ln|1-2|$$
$$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\frac{u'}{u} \xrightarrow{\text{Primitive}} \ln|u|$$

$$\frac{1}{t} \longrightarrow \ln|t|$$

$$* \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos x}\,dx.$$

$U(x) = \cos x$

$U'(x) = -\sin x$

$$= -\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0|$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$* \int_e^{e^2} \frac{\ln^2(t)}{t}\,dt = \int_e^{e^2} \underset{\downarrow \atop u'}{\frac{1}{t}}\; \underset{\downarrow \atop u^2}{\ln^2(t)}\,dt \qquad u^2 \longrightarrow \frac{u^3}{3}$$

$$= \left[\frac{\ln^3(t)}{3}\right]_e^{e^2} = \frac{\ln^3(e^2)}{3} - \frac{\ln^3(e)}{3}$$
$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$a\ln^2(x) + b\ln(x) + c$

$\times$ (E) $\ln^2(x) - 5\ln x + 6 = 0$ on pose $t = \ln(x)$

$(E) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$

$\Delta = 1$ $t_1 = 2$ $t_2 = 3$

$\ln(x) = 2$ $\ln x = 3$

$x = e^2$ $x = e^3.$

signe de $\ln^2(x) - 5\ln(x) + 6 = A(x)$ $\Delta > 0$

Factorisation $at^2 + bt + c$

$A(x) = \ln^2(x) - 5\ln x + 6 = (\ln x - e^2)(\ln x - e^3)$ $= a(t - t_1)(t - t_2)$

x	0		e^2		e^3		$+\infty$
$\ln x - e^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\ln x - e^3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) signe de $\ln^2(x) - 6\ln x + 9$ $(\Delta = 0$

$ax^2 + bx + c$

$B(x) = \ln^2(x) - 6\ln x + 9 = (\ln(x) - 3)^2$ $= a(x - x_1)^2$

$x_1 = -\frac{b}{2a}$

	0		e^3	
$B(x)$		$+$	0	$+$

3) $C(x) = \ln^2(x) - \ln(x) + 1$ $(\Delta = 0$

	0		$+\infty$
$C(x)$		signe de $a = +$	