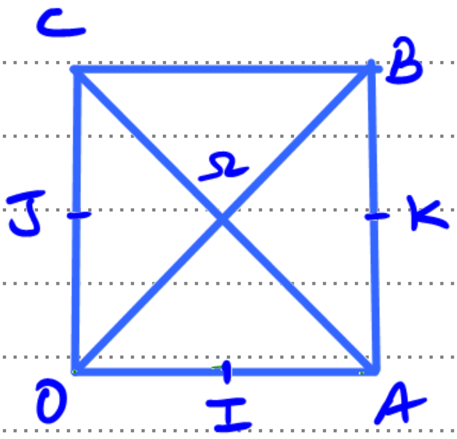
Le 30/10/2023

Série 14 - les Isométries

Exercice 1

1) $f = S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}$



$(OB) \cap (\Omega I) = \{\Omega\}$

$\Rightarrow f$ est une rotation de centre Ω et d'angle $\theta \equiv 2(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega B})\ (2\pi)$

$f(A) = S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}(A)$ $\left((\Omega I) = \text{med } [OA]\right)$

$= S_{(OB)}(O) = O$ $\left(O \in (OB)\right)$

$\Longrightarrow \theta \equiv (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega O})\ (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$\boxed{\text{Ainsi } f = R(\Omega; -\pi/2)}$

2) i) g : isométrie sans points fixes $\begin{cases} \text{tr} \\ \text{sym glissante} \end{cases}$

ii) $g(O) = C$

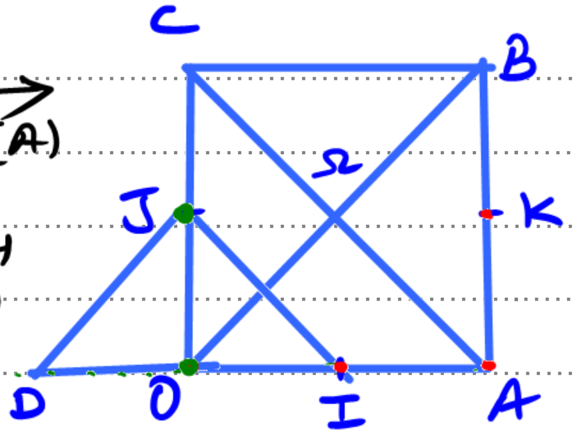
iii) $g(I) = J$

a) On a : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{g(O)g(I)} = \overrightarrow{g(I)g(A)}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{Jg(A)} = \overrightarrow{JO}$

$\Rightarrow \boxed{g(A) = O}$



b) Supposons que g est une translation de vecteur non nul $\vec{u}$.

$t_{\vec{u}}(A) = O \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AO}$
$t_{\vec{u}}(O) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \vec{u}$

$O \overset{g}{\longmapsto} C$
$I \longmapsto J$
$A \longmapsto O$

$\Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} \Rightarrow O$, milieu de $[AC]$ ce qui est Absurde

g est une isométrie, sans points fixes
puis n'est pas une translation

$\Rightarrow$ g est une symétrie Glissante.

c) On pose $g(K) = D$.

On a IAK st un triangle rectangle et isocèle en A
$\Rightarrow$ JOD est un triangle rectangle et isocèle en O

$\Rightarrow D = I$ ou $D = S_O(I)$

Supposons que $g(K) = I$!

On a $K = A * B \Rightarrow g(K) = g(A) * g(B)$

$\Rightarrow I = O * g(B)$

$\Rightarrow g(B) = A$

On a : Ω = milieu de $[OB]$ et g conserve le milieu

$\Rightarrow g(\Omega)$: milieu de $[g(O)g(B)] = [AC]$

$\Rightarrow g(\Omega) = \Omega$ Absurde car g est une isométrie sans points fixes

Par suite $\boxed{g(K) = D = S_O(I)}$

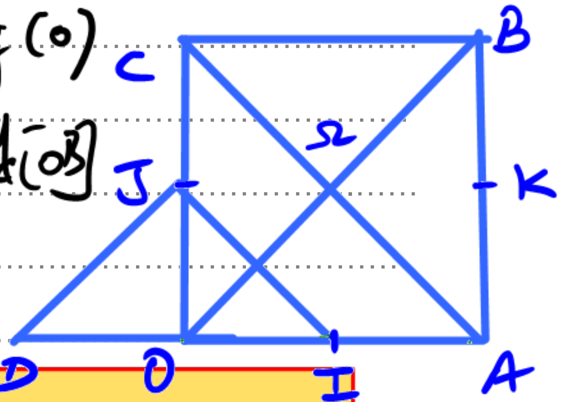
d) $t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}$ est une isométrie comme étant la composée de deux isométries

$t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}(A) = t_{\overrightarrow{AO}}(A) = O = g(A)$

$t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}(O) = t_{\overrightarrow{AO}}(B) = C$ (OABC est un carré)

$= g(O)$

$\left.\begin{array}{l} AO = AB \\ CO = CB \end{array}\right\} \Rightarrow (AC)$: méd $[OB]$



$t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}(K) = t_{\overrightarrow{AO}}(I)$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Car } K = A * B \\ \Rightarrow S_{(AC)}(K) = S_{(AC)}(A) * S_{(AC)}(B) \\ \qquad = A * O = I \end{array}}$

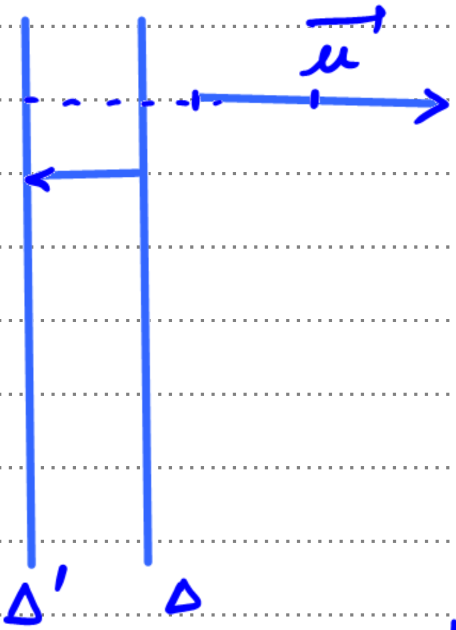
et $t_{\vec{AO}}(I)=D$ car $\vec{AO}=2\vec{IO}=\vec{ID}$ $(O=I*D)$

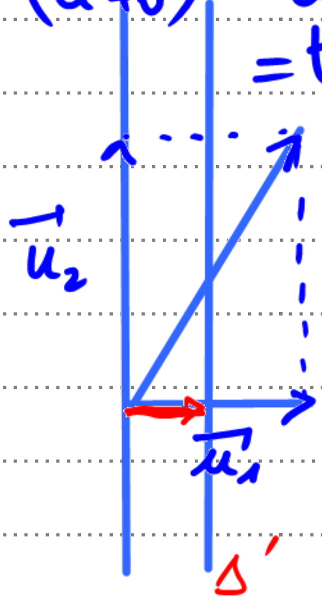
Ainsi $t_{\vec{AC}}\circ S_{(AC)}(K)=D=g(K)$

D'où $g=t_{\vec{AC}}\circ S_{(AC)}$ comme étant deux isométries qui coïncident en trois points non alignés.

$t_{(\vec{u}+\vec{v})}=t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}=t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}$

e)





$S_\Delta\circ t_{\vec{u}}$

$=\underbrace{S_\Delta\circ S_\Delta}\circ S_{\Delta'}$

où $\Delta'=t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$

$=S_{\Delta'}$

$t_{\vec{u}}\circ S_\Delta$: symétrie glissante

$t_{\vec{u}}\circ S_\Delta$

$=t_{(\vec{u_1}+\vec{u_2})}\circ S_\Delta$

$=t_{\vec{u_2}}\circ t_{\vec{u_1}}\circ S_\Delta$

$=t_{\vec{u_2}}\circ S_{\Delta'}\circ S_\Delta\circ S_\Delta$

$\Delta'=t_{\frac{1}{2}\vec{u_1}}(\Delta)$

$g = t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)} = t_{(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega O})} \circ S_{(AC)}$

$= t_{\overrightarrow{A\Omega}} \circ t_{\overrightarrow{\Omega O}} \circ S_{(AC)}$ or $\boxed{t_{\overrightarrow{\Omega O}} = S_{(IJ)} \circ S_{(AC)}}$

$= t_{\overrightarrow{A\Omega}} \circ S_{(IJ)} \circ \underbrace{S_{(AC)} \circ S_{(AC)}}_{Id_P}$ Car $(IJ) \cap (AC) = \emptyset$

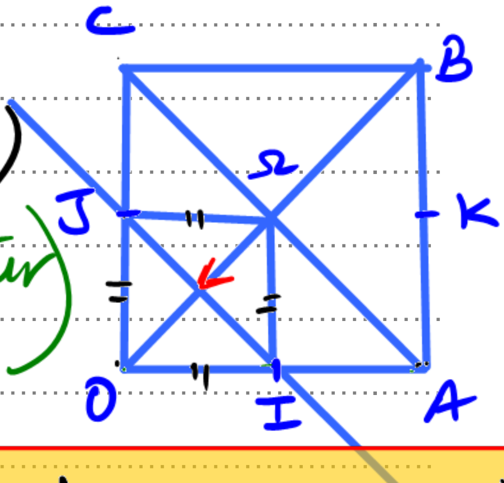
$S_{(IJ)} \circ S_{(AC)}(\Omega)$

$= S_{(IJ)}(\Omega) = O$

$= t_{\overrightarrow{A\Omega}} \circ S_{(IJ)}$

g est la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ et d'axe (IJ)

($\overrightarrow{A\Omega}$ est un vecteur directeur de (IJ))



3) $\varphi = g^{-1} \circ f$

$$\boxed{g^{-1} = \left(t_{\overrightarrow{A\Omega}} \circ S_{(IJ)}\right)^{-1} = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{\Omega A}}}$$

a) $\varphi(O) = g^{-1} \circ f(O) = g^{-1}(C) = O$

$\varphi(I) = g^{-1} \circ f(I) = g^{-1}(J) = I$

$\varphi \neq Id_P$ car $g \neq f$

Par suite $\boxed{\varphi = S_{(OI)}}$

b) $(S) = \{M \in P \,;\, f(M) = g(M)\}$

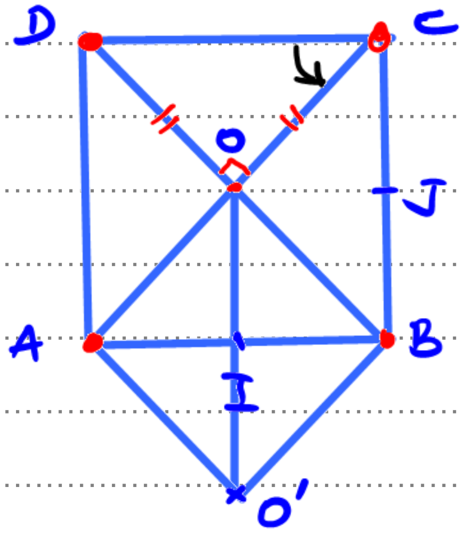
$M \in (S) \iff f(M) = g(M)$

$\iff g^{-1}(f(M)) = g^{-1}(g(M))$

$\iff g^{-1} \circ f(M) = M$

$\iff \varphi(M) = M$ d'où $\boxed{(S) = (OI)}$

Exercice 2



1) a) $(OC) \cap (OJ) = \{O\}$

$S_{(OC)} \circ S_{(OJ)}(B) = S_{(OC)}(C)$
$= C$

$\Rightarrow f$ est la rotation de centre et d'angle
$\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \ (2\pi)$
$= \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

Alors $\boxed{f = r(O; \pi/2)}$

$\left.\begin{array}{l}(OJ) \cap (DC) = \emptyset \\ S_{(OJ)} \circ S_{(DC)}(C) = S_{(OJ)}(C) = B\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{g = t_{\overrightarrow{CB}}}$

b) $\varphi = f \circ g = S_{(OC)} \circ \underbrace{S_{(OJ)} \circ S_{(OJ)}} \circ S_{(DC)}$

$= S_{(OC)} \circ S_{(DC)} = r_{(C;\, 2(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CO}))}$

$= \boxed{r\,(C; \pi/2)}$

2) $h = S_{(BD)} \circ \varphi$

$h(C) = S_{(BD)} \circ \varphi(C) = S_{(BD)}(C) = A$

$h(D) = S_{(BD)} \circ \varphi(D) = S_{(BD)}(B) = B$

On pose $h(O)=E$

OCD est un triangle rectangle et isocèle en O

$\Rightarrow EAB$ " " " " en E

$\Rightarrow E \in \text{méd}[AB] \cap \mathcal{C}_{[AB]}$

$\Rightarrow E=O$ ou $E=O'$

Supposons que $h(O)=O$!

$S_{(BD)} \circ r_{(C;\frac{\pi}{2})}(O)=O$

$\Rightarrow r_{(C;\frac{\pi}{2})}(O)=S_{(BD)}(O)=O$

$\Rightarrow O$ est un pt invariant par $r_{(C;\frac{\pi}{2})}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\varphi(O)=O'}$

b/ Soit M un pt invariant par h $\Leftrightarrow$ $h(M)=M$

$\Rightarrow MC=MA$ et $BM=DM$

$\Rightarrow M \in \text{méd}[AC] \cap \text{méd}[BD]$

$\Rightarrow M \in (BD) \cap (AC)$

$\Rightarrow M=O$ absurde $h(O)=O' \neq O$.

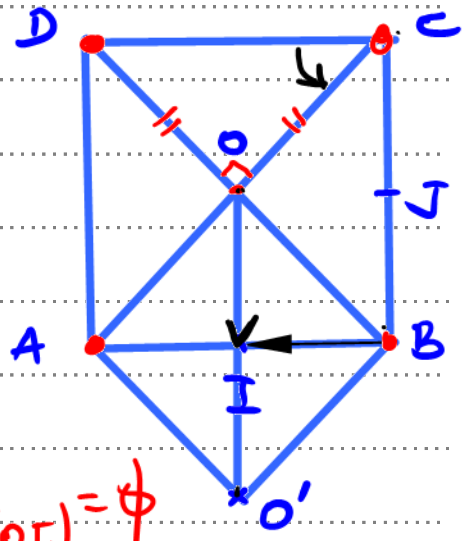
$\Rightarrow h$ n'admet pas de points invariants.

$\Rightarrow h$ est soit une translation ou une symétrie glissante. $\left.\begin{array}{l} h(C)=A \\ h(D)=B \end{array}\right\}$ $\overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow$ h n'est pas une translation

$\Rightarrow$ h est une symétrie glissante

3) a) $S = S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$



$= \underbrace{S_{(BC)} \circ S_{(BC)}}_{I_P} \circ S_{(OI)}$

$= S_{(OI)}$

$\left\{ \begin{array}{l} S_{(BC)} \circ S_{(OI)} = \phi \\ S_{(BC)} \circ S_{(OI)}(A) = S_{(BC)}(B) = B \end{array} \right.$

$S_{(BC)} \circ S_{(OI)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

b) $g \circ s(C) = g(S(C)) = g(D) = A$

$g \circ s(D) = g(S(D)) = g(C) = B$

$g \circ s(O) = g(S(O)) = g(O) = O$

$g \circ s$ et h coïncident en 3 pts non alignés

d'où $g \circ s = h$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u.v = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}\left[(-1)^n + 1\right] \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} \\ v_n = \frac{1}{2}\left[(-1)^{n+1} + 1\right] \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

$u_n . v_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0$