



Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Isométries-Déplacements-
Antidéplacements

📍 Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina /
Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir /
Gabes / Djerba



Isométries

Définition

Une isométrie du plan est une application du plan dans lui-même qui conserve les distances.

Isométrie et produit scalaire

f est une isométrie du plan ssi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.
Pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C' par f .

Propriétés

- ♣ Les images de deux points distincts par une isométrie sont deux points distincts.
- ♣ Les images de 3 points non alignés par une isométrie sont 3 points non alignés.
- ♣ Une isométrie conserve les mesures des angles géométriques.
- ♣ Soit f une isométrie

$$\left. \begin{array}{l} (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ est un repère orthonormé} \\ \text{Si } \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \\ f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C', f(M) = M' \end{array} \right\} \text{ Alors } \left\{ \begin{array}{l} (A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \text{ est un repère orthonormé} \\ \overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'} \end{array} \right.$$
- ♣ Soit f une isométrie.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{EF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{CD} \\ f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C', f(E) = E' \text{ et } f(F) = F' \end{array} \right\} \text{ Alors } \overrightarrow{E'F'} = \alpha\overrightarrow{A'B'} + \beta\overrightarrow{C'D'}$$
- ♣ Une isométrie conserve : Les barycentres en particulier les milieux, le parallélisme, l'orthogonalité et le contact.

Théorème

Toute isométrie est une application bijective et sa réciproque est une isométrie.

Théorème

Soit \vec{u} un vecteur non nul et D une droite.
Si \vec{u} est vecteur directeur de D alors : $t_{-\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$

Définition

La composée d'une translation de vecteur non nul \vec{u} et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que \vec{u} est directeur de Δ est appelée symétrie glissante.

Composition d'isométries

Théorème

- ♡ La composée de deux isométries est une isométrie.
- ♡ Soit f et g deux isométries $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- ♡ Soit f et g deux isométries $S_{\Delta} \circ f \circ t_{-\vec{u}} = g$ signifie $f = S_{\Delta} \circ g \circ t_{-\vec{u}}$

1. **Composée de deux translations :** $t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$
2. **Composée de deux symétries orthogonales :**
 Soit Δ et Δ' deux droites de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{u}'
 - Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{2\vec{IJ}}$ où I est un point de Δ et J son projeté orthogonal sur Δ' .
 - Si Δ et Δ' sont sécantes en I alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = R_{\left(I, 2\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}\right) \right)}$.
 - Si $\Delta = \Delta'$ alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = Id_p$
 - Si Δ et Δ' sont perpendiculaires en I alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ S_{\Delta'} = S_I$
3. **Composée de deux rotations**
 La composée de deux rotations est soit une translation si la somme des angles est nulle soit une rotation si la somme des angles n'est pas nulle.



4. Composée de deux symétries centrales

La composée de deux symétries centrales est une translation : $S_B \circ S_A = t_{\overrightarrow{2AB}}$

5. Composée de deux symétries glissantes

- Soit f une symétrie glissante de vecteur \vec{u} alors $f \circ f = t_{2\vec{u}}$.
- Soient f et g deux symétries glissantes d'axes respectifs Δ et Δ' .
 - ✓ Si $\Delta // \Delta'$ alors $f \circ g$ est une translation
 - ✓ Si Δ et Δ' sont sécants alors $f \circ g$ est une rotation.

6. Composée d'une translation et d'une rotation

- La composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\theta \neq 2k\pi$ est une rotation d'angle θ .
- La composée d'une translation et d'une symétrie centrale est une symétrie centrale.

7. Composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale

Soit D une droite et \vec{u} un vecteur non nul.

- Si \vec{u} est normal à D alors : $S_D \circ t_{\vec{u}} = S_{D'}$ avec $D' = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$
- Si \vec{u} est directeur de D alors : $S_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_D$ symétrie glissante.
- Si \vec{u} n'est ni directeur ni normal à D alors : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ où \vec{v} directeur et \vec{w} normal à D et $S_D \circ t_{\vec{u}} = S_{D'} \circ t_{\vec{v}}$, $D' = t_{-\frac{1}{2}\vec{w}}(D)$: symétrie glissante d'axe D' et de vecteur \vec{v} .

8. Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale (à démontrer)

Soit I un point et D une droite. On désigne par R la rotation de centre I et d'angle $\theta \neq 0$ et par S_D la symétrie orthogonale d'axe D .

- Si $I \in D$ alors $R \circ S_D$ et $S_D \circ R$ sont des symétries orthogonales. ($R \circ S_D \neq S_D \circ R$)
- Si $I \notin D$ alors $R \circ S_D$ et $S_D \circ R$ sont des symétries glissantes. ($R \circ S_D \neq S_D \circ R$)

Théorème

- ✓ Toute translation est la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles.
- ✓ Toute rotation est la composée de deux symétries axiales d'axes sécants.
- ✓ Toute isométrie est la composée d'au plus trois symétries axiales.

Isométries et points fixes

Théorème

- Soit f une isométrie distincte de l'identité. Soit A un point d'image A' par f tel que $A \neq A'$. Si M est invariant par f alors M est un point de la médiatrice de $[AA']$.
- Une isométrie qui fixe 3 points non alignés est égale à l'identité.
- Deux isométries qui coïncident en trois points non alignés sont égales.
- Une isométrie distincte de l'identité qui fixe deux points distincts A et B est $S_{(AB)}$.
- Une isométrie qui fixe un seul point I est une rotation de centre I .
- Une isométrie qui fixe un point est soit l'Idp, soit une rotation soit une symétrie orthogonale.

Théorème

Soit O un point du plan. Toute isométrie du plan se décompose d'une manière unique en la composée d'une translation et d'une isométrie g qui fixe O .

Conséquences

Une isométrie est soit l'identité soit une rotation soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante.

Théorème

Une isométrie sans point fixe est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissante.



Déplacements - Antidéplacements

Théorème

Toute symétrie orthogonale transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.
On dit qu'une symétrie orthogonale change l'orientation.

Conséquences

- La composée d'un nombre pair de symétries orthogonales conserve les mesures des angles orientés.
- La composée d'un nombre impair de symétries orthogonales transforme les mesures des angles orientés en leurs opposés.

Théorème

Soit f une isométrie du plan

- La composée de 2 déplacements est un déplacement.
- La composée de 2 antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
- Les déplacements sont : l' idp les rotations et les translations.
- La réciproque d'un déplacement est un déplacement et la réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Définition

On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés.
On appelle antidéplacements toute isométrie qui transforme les mesures des angles orientés en leurs opposés.

Conséquences

Soit f une isométrie du plan

- f est un déplacement si et seulement si f est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales.
- f est un antidéplacement si et seulement si f est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales.
- Toute isométrie du plan est soit un déplacement, soit un antidéplacement.
- Les déplacements sont : l' idp les rotations et les translations.
- Les antidéplacements sont : les symétries axiales et les symétries glissantes.

Les déplacements

Théorème

- Un déplacement qui fixe deux points distincts est égal à l'identité.
- Deux déplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.

Théorème

Soit A, B, C et D 4 points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ et $AB \neq 0$ alors il existe un unique déplacement tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

Attention

Soit A, B, C et D , 4 points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ alors il existe deux déplacements qui envoient le segment $[AB]$ au segment $[CD]$.

Angle d'un déplacement

Définition

Soit A, B, C et D , 4 points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ et $AB \neq 0$ Si A', B', C' et D' sont les images respectives de A, B, C et D par f alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) [2\pi]$$

En désignant par θ une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$,
On dit que f est un déplacement d'angle θ

Théorème

- Un déplacement d'angle nul est une translation.
- Un déplacement d'angle non nul est une rotation.
- Si f est un déplacement d'angle θ et g un déplacement d'angle θ' alors :
 - f^{-1} est un déplacement d'angle $-\theta$
 - $f \circ g$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$



Théorème

L'écriture complexe d'un déplacement f est : $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $|a| = 1$

- Si $a = 1$ alors f est une translation de vecteur \vec{u} d'affixe b .
- Si $a \neq 1$ alors f est une rotation de centre I d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\arg(a)$

Théorème

Soit f une rotation de centre I d'affixe z_0 et d'angle θ . L'écriture complexe de f est : $z' = e^{i\theta} (z - z_0) + z_0$

Les antidéplacements

Théorème

Soit f une isométrie.

- f est un antidéplacement ssi f est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales..
- f est un antidéplacement ssi f est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries.

Théorème

- Deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.
- Soit A, B, C, D , 4 points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ alors il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

Conséquences

- Une isométrie est un antidéplacement ssi c'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.
- Un antidéplacement est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante.

Attention

Soit A, B, C, D , 4 points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ alors il existe deux antidéplacements qui envoient le segment $[AB]$ au segment $[CD]$.

Théorème

Un antidéplacement qui fixe un point est une symétrie orthogonale

Symétrie glissante

Théorème et Définition

Soit f une symétrie glissante. Il existe un unique vecteur non nul \vec{u} et une droite D unique tels que $f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ où \vec{u} est un vecteur directeur de D . Cette décomposition est appelée forme réduite de f . \vec{u} et D sont les éléments caractéristiques de f .

Propriétés

- Soit f une symétrie glissante de vecteur \vec{u} et d'axe D . Soit M un point d'image M' par f
- ✓ $M * M' \in D$.
- ✓ Si $M \in D$ alors $M' \in D$ et $\overline{MM'} = \vec{u}$.
- ✓ $f \circ f = t_{2\vec{u}}$.

DETERMINATION DES ELEMENTS CARACTÉRISTIQUES D'UNE SYMÉTRIE GLISSANTE

Soit f une symétrie glissante de vecteur \vec{u} et d'axe Δ

1. Soient A, B et C trois points. Si $f(A) = B$ et $f(B) = C$ alors $\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ et $\Delta = (IJ)$ avec $I = A * B$ et $J = B * C$
2. Soient A, B et C trois points. $I = A * B$
Si $f(A) = B$ et $f(I) = C$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{IC}$ et $\Delta = (IC)$
3. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I .
Si $f(A) = C$ et $f(B) = D$ alors Δ est la perpendiculaire à (AB) issue de I et $\vec{u} = \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de A sur (CD) (à démontrer).



Taki Academy
www.takiacademy.com



Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina /
Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir /
Gabes / Djerba



www.takiacademy.com



73.832.000