Mathématiques

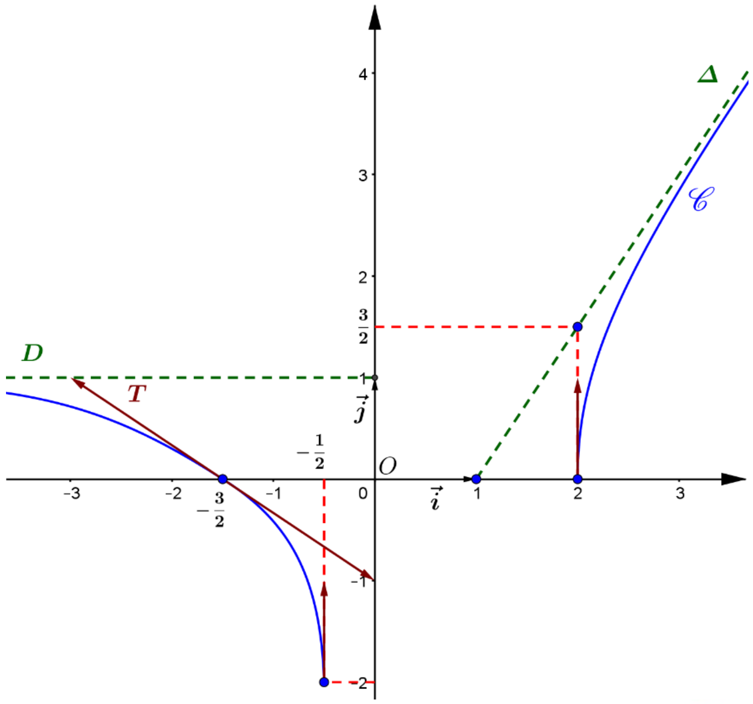
Classe : BAC

Chapitre : Fonctions Réciproques

Exercice 1 — 25 min — 5 pt

Le plan P étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ le graphique ci-joint représente $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction *f* définie sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty[$.

- Les droites *D* et *Δ* deux asymptotes à $\mathcal{C}$.
- La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-\frac{3}{2}$.



1°) Par une lecture graphique :

Déterminer :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{3}f(x)-x\right]$;

$\lim\limits_{x\to(2)^+}\dfrac{f(x)}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\dfrac{2f(x)+4}{2x+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)}{2f(x)-3x+3}$

2°) Soit *g* la restriction de la fonction *f* à l'intervalle $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

a) Montrer que *g* admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle *J* que l'on précisera.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur *J*.

c) Montrer qu'il existe un unique réel $x_0\in[-2\,;1[$ tel $g^{-1}(x_0)=x_0$ et vérifier que $x_0\in]-2,0[$.

d) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$ et tracer la courbe de g^{-1} dans le même plan *P*.

3°) On considère la fonction *F* définie sur $]0,\pi]$ par : $F(x)=g^{-1}(\cos x)$.

a) Montrer que *F* est dérivable sur $]0,\pi]$.

b) Montrer que *F* réalise une bijection de $]0,\pi]$ sur un intervalle *K* que l'on précisera.

Exercice 2 — 30 min — 6 pt

Soit *f* une fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan(x)$.

1°) a) Montrer que *f* admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur IR.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR et que pour tout $x \in IR$, $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$.

2°) Soit *g* une fonction définie sur IR par $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$.

a) Calculer $g'(x)$.

b) En déduire que f^{-1} est une fonction impaire.

3°) Soit le nombre complexe $z = 1 + xi$, avec x un réel, fixé, strictement positif et $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\beta = x$.

a) Prouver que $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; En déduire $\sin(\beta)$ en fonction de *x*.

b) Ecrire z sous la forme exponentielle.

c) En déduire que $\arg(1+xi) \equiv f^{-1}(x)[2\pi]$.

4°) a) Ecrire $(1+2i)(1+3i)$ sous la forme algébrique et sous la forme exponentielle.

b) En déduire $f^{-1}(2) + f^{-1}(3)$.

Exercice 3 — 30 min — 6 pt

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sqrt{1+tg(x)}$.

(C_f) désigne la courbe de *f* dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que *f* est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $f'(x)$.

b) Etudier la dérivabilité de *f* à droite en $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

2°) Montrer que *f* réalise une bijection de *I* dans un intervalle *J* à préciser.

3°) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}$.

4°) Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} f^{-1}(k)$; pour tout $n \in IN$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$; $f^{-1}(n) \leq U_n \leq f^{-1}(2n)$.

b) En déduire que (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.