Mathématiques

Thème : Nombres complexes

Exercices de synthèse

Exercice N°2

Soit l'équation : $(E): iz^2-(1+i)z+2=0$.

1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des complexes suivants : i ; 2 ; $1+i$; $z_0=(1-i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2)
   a) Donner la forme algébrique et la forme exponentielle de z_0 .
   b) Donner alors les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3)
   a) Vérifier z_0 est une solution de (E) .
   b) Trouver alors l'autre solution de (E).

Soit l'équation : $(E): iz^2-(1+i)z+2=0$.

1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des complexes suivants : i ; 2 ; $1+i$; $z_0=(1-i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

*) $|i|=1$ et $\arg(i)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc $\boxed{i=e^{i\frac{\pi}{2}}}$

*) $|2|=2$ et $\arg(2)=0[2\pi]$

donc $\boxed{2=2.e^{i0}}$

*) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

donc $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \boxed{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$

*) $|z_0| = |1-i|\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$= \sqrt{1^2+(-1)^2} \times \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{2} \times 1$

$= \sqrt{2}$

$\arg(z_0) = \arg(1-i) + \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[2\pi]$

$= \arg(1-i) + \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

On a $1-i=\overline{1+i}$

donc $\arg(1-i) \equiv -\arg(1+i)[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

d'où $\arg(z_0) \equiv -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

et par suite $\boxed{z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$

2)

a) Donner la forme algébrique et la forme exponentielle de z_0 .

*) $z_0=(1-i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

*) $\boxed{z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$

b) Donner alors les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \\ \boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \end{cases}$$

3)

a) Vérifier z_0 est une solution de (E) .

$(E) : iz^2 - (1+i)z + 2 = 0$

$iz_0^2 - (1+i)z_0 + 2$

$= i(1-i)^2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (1+i)(1-i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2$

$= i\times(-2i)\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2$

$= 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 - i\sqrt{3} + 2$

$= \cancel{-1} \cancel{+i\sqrt{3}} \cancel{-1} \cancel{-i\sqrt{3}} \cancel{+2} = \boxed{0}$

Donc $\boxed{z_0 \text{ est une solution de } (E)}$

$$\boxed{z_0 \times z_1 = \frac{c}{a} \qquad z_0 + z_1 = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}}$$

b) Trouver alors l'autre solution de (E).

$\frac{1}{i} = -i$

Soit z_1 l'autre solution de (E)

On a $z_0 \times z_1 = \frac{c}{a} = \frac{2}{i} = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

donc $z_1 = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{z_0}$

$= \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}}$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}$$

Ainsi $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$