Taki Academy
www.takiacademy.com

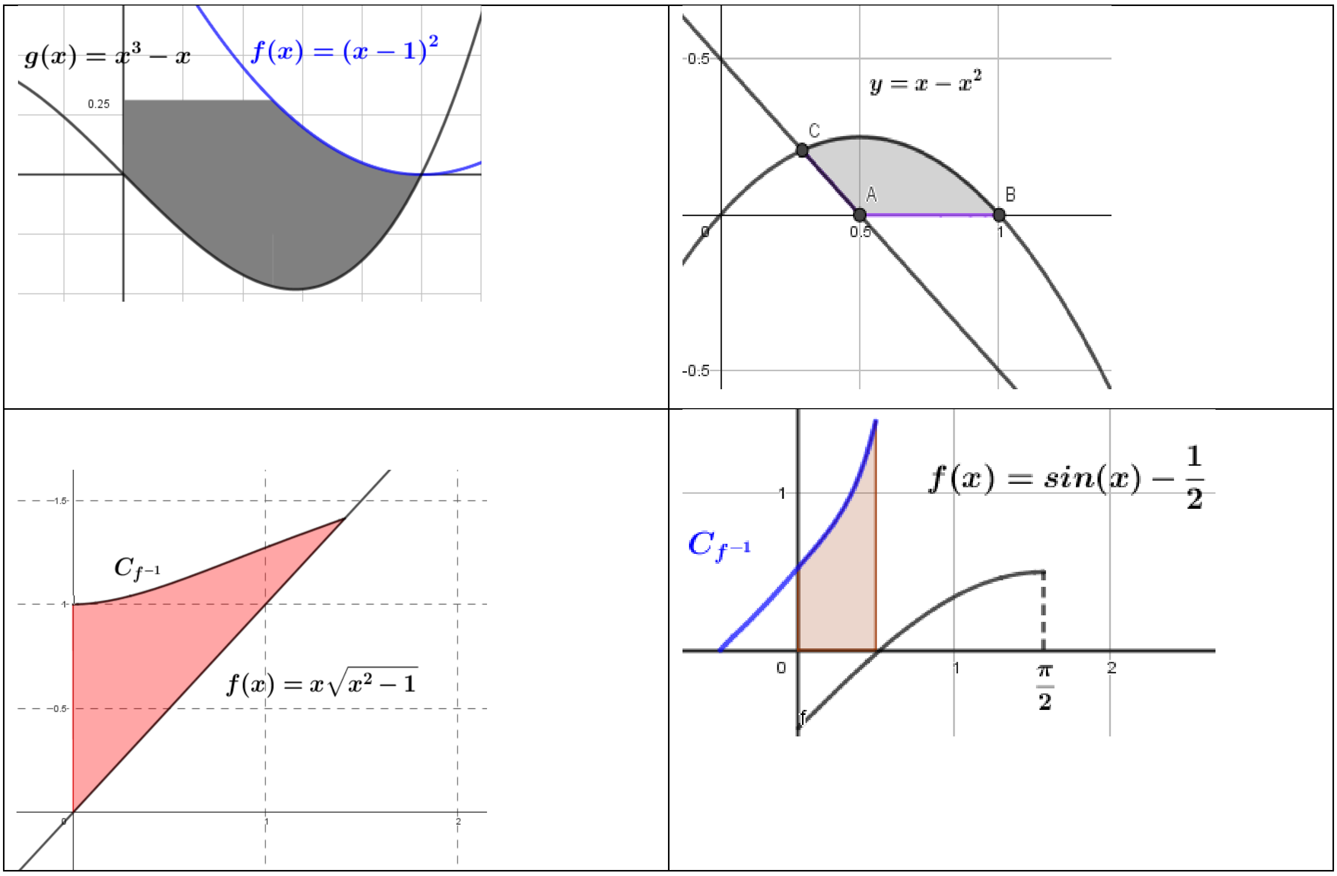
Classe : Bac Maths

Série : Intégrales

Nom du Prof : Mohamed Hedi Ghomriani

Exercice 1 | 25 min | 5 pts

1) Calculer l'aire de la région limitee par la courbe Cf de la fonction f définie par
   $f(x) = x^2 - 6x + 4$ et les droites $\Delta : y = 4 - x$, $x = 0$ et $x = 6$
2) Calculer l'aire de la région colorée



Exercice 2 — 25 min — 4 pts

Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbf{I_n} = \int_0^1 \mathbf{x^n}\sqrt{1-\mathbf{x}^2}\,\mathbf{dx}$.

1)
   a) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, interpréter graphiquement $\mathbf{I_0}$ et donnez sa valeur exacte.
   b) Calculer $\mathbf{I_1}$.

2)
   a) Montrer que : $(\mathbf{I_n})$ est décroissante.
   b) En déduire que $(\mathbf{I_n})$ est convergente.

3)
   a) En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

   On a : $\mathbf{I_n} = \dfrac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}+2}\mathbf{I_{n-2}}$.

   b) Calculer $\int_0^1 \mathbf{x}^3\sqrt{1-\mathbf{x}^2}\,\mathbf{dx}$.

Exercice 3 — 30 min — 5 pts

Soit n un entier ≥ 2. On pose : $\mathbf{U_n} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$.

1) Calculer : $\mathbf{U_2}$

2)
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbf{U_n} \geq 0$.
   b) Montrer que la suite $(\mathbf{U_n})$ est décroissante.

3)
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbf{U_{n+2}} + \mathbf{U_n} = \dfrac{1}{\mathbf{n}+1}$.
   b) En déduire $\lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{U_n}$.

4) On pose, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbf{V_n} = \mathbf{U_{n+4}} - \mathbf{U_n}$ et $\mathbf{S_n} = \sum\limits_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{V_{4k-2}}$.
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbf{V_n} = \dfrac{1}{\mathbf{n}+3} - \dfrac{1}{\mathbf{n}+1}$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbf{S_n} = \mathbf{U}_{4\mathbf{n}+2} - \mathbf{U}_2$.

c) En déduire $\lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+....-\frac{1}{4\mathbf{n}-1}+\frac{1}{4\mathbf{n}+1}\right)$.

Exercice 4 | 35 min | 5 pts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\mathbf{I_n} = \int_0^1 \left(1-\mathbf{x}^2\right)^{\mathbf{n}} \mathbf{dx}$.

1) Vérifier que : $I_1 = \frac{2}{3}$ et que $\mathbf{I}_2 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$.

2) Vérifier que : $\mathbf{I_n} - \mathbf{I_{n+1}} = \int_0^1 \mathbf{x}^2 \left(1-\mathbf{x}^2\right)^{\mathbf{n}} \mathbf{dx}$.

3)

a) Montrer par intégration par partie que : $\mathbf{I_{n+1}} = \frac{2\mathbf{n}+2}{2\mathbf{n}+3}\mathbf{I_n}$.

b) Déduire par récurrence que $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{I_n} = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}....\frac{2\mathbf{n}}{2\mathbf{n}+1}$.

4) On considère les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_0^{\sin\mathbf{x}} \left(1-\mathbf{t}^2\right)^{\mathbf{n}} \mathbf{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} \cos^{2\mathbf{n}+1}(\mathbf{t})\,\mathbf{dt}.$$

a) Montrer que $\mathbf{F}$ et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puis déterminer $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ et $\mathbf{G}'(\mathbf{x})$.

b) Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})$.

c) Montrer alors que : $\mathbf{I_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\mathbf{n}+1}\mathbf{t}\ \mathbf{dt}$.