Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Définition et conséquences

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. a et b deux réels de I.
On appelle : intégrale de f entre a et b le réel noté :
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Conséquences

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . a et b deux réels de I.

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b cte\ dx = (b-a) \times cte$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. a , b et c trois réels de I.

Propriétés algébriques

1. Relation de Chasles
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
2. Pour tous réels α et β
$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
3. Intégrations par parties
$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$
u et v sont des fonctions dérivables et leurs fonctions dérivées sont continues.

Intégrales et inégalités

1. Si $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ \forall x \in I, f(x) \geq 0 \end{array}\right\}$ Alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. Si f est positive sur $[a,b]$, $(a < b)$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de réel , alors $\int_a^b f(x)dx > 0$.
3. Si $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ \forall x \in I, f(x) \leq g(x) \end{array}\right\}$ Alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
4. Si f est continue sur $[a,b]$ alors :
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, $(a < b)$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Théorème (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, $(a < b)$. Soit m et M deux réels.
Si pour tout x de $[a,b]$
$m \leq f(x) \leq M$ alors $m \leq \overline{f} \leq M$

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
Il existe $c \in [a,b]$ tel que $\overline{f} = f(c)$.

Fonction définie à l'aide d'une intégrale

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Alors la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Conséquences

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Alors la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J. Si
$\left.\begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } I \\ f \text{est continue sur} J \\ \forall x \in I, \quad u(x) \in J \\ a \in J \end{array}\right\}$ Alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$

Taki Academy
www.takiacademy.com

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et $a \in I$.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

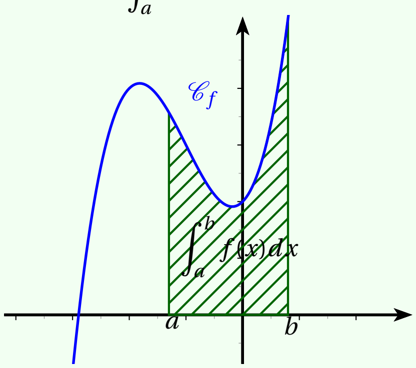
Théorème

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$,périodique de période T .
Pour tout réel a, $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

Calcul d'aire

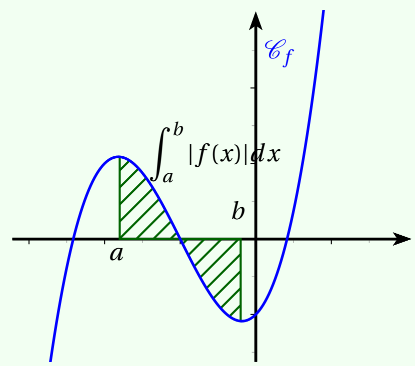
Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b],(a<b)$.
L'aire (en ua) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$ est le réel $\int_{a}^{b} f(x)dx$



Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.Soit f une fonction continue sur $[a,b],(a<b)$. L'aire (en ua) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$ est le réel $\int_{a}^{b} |f(x)|dx$



Interprétation de la valeur moyenne

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$, $(a<b)$.
L'aire de la surface du plan limitée par la courbe de f, les droites $x=a$, $x=b$ et $y=0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b-a)$ et $\overline{f}$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b],(a<b)$. L'aire (en ua) de la partie du plan limitée par la courbe de f, celle de g et les droites $x=a$ et $x=b$ est le réel $\int_{a}^{b} |f(x)-g(x)|dx$

Calcul de volume

Définition

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe de f dans le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$autour de l'axe $\left(O, \vec{i}\right)$est le réel $\mathcal{V} = \pi \int_{a}^{b} f^2(x)dx$

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000