| | | |
|---|---|---|
| ***Lycée Secondaire Bouargoub*** | ***Série n°1*** | ***Prof : Daaloul Sahbi*** |
| ***Année scolaire : 2023 / 2024*** | ***Limites et continuité*** | ***Niveau : 4ème Sciences*** |

## ***Exercice n°1 :***

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+x}}\ ;\ \lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2-1}{x}}\ ;\ \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+5}+2x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{2x^2+x}}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-x|x|}{x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}2x-\sqrt{4x^2+x+1}\ .$$

## ***Exercice n°2 :***

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{tg^2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7tgx}{2\sin x}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin x}{1-\cos x}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{tgx}$ 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2x}$

## ***Exercice n°3 :***

Soit la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=x^2+2x & si\ x\le0 \\ f(x)=\dfrac{x-1}{x+2} & si\ x>0\end{cases}$

1) Justifier que $f$ est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ $et$ $]0;+\infty[$ .

2) Tracer la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

3) $f$ est-elle continue sur IR ?

## ***Exercice n°4 :***

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x^2-x^3} & si\ \ x<1 \\ \dfrac{3x+1}{x+3} & si\ \ x\ge1\end{cases}$

1) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ .

2) Soit $g$ la fonction définie par $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ .

Montrer que $g$ est prolongeable par continuité en 1 est définir ce prolongement .

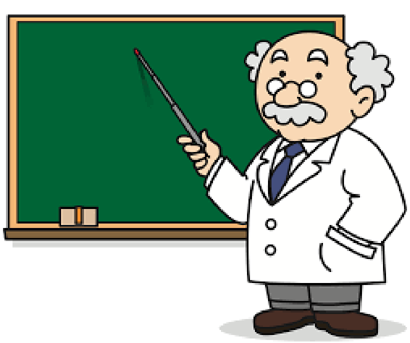
## ***Exercice n°5 :***

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3x^2} & si\ \ x\ge1 \\ \dfrac{6\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\pi(1-x^3)} & si\ \ x<1\end{cases}$

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$ . b) Etudier la continuité de $f$ en 1 .

2) a) Montrer que pour tout $x<1$ on a : $-\dfrac{6}{\pi(1-x^3)}\le f(x)\le\dfrac{6}{\pi(1-x^3)}$ .

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ .



***Exercice n°6 :***

On donne ci-dessous , les courbes représentatives $\zeta_f$ et $\zeta_g$ des fonctions $f$ et $g$ définies sur leurs domaines de définition $D_f$ et $D_g$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

La droite $\Delta: y = x - 3$ est une asymptote à $\zeta_f$ au voisinage de $+\infty$.

La courbe $\zeta_g$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite $\Delta': y = x$ au voisinage de $+\infty$.

La droite $D: y = 2$ est une asymptote à $\zeta_f$ au voisinage de $-\infty$ et la droite $D': x = 2$ est une asymptote à $\zeta_f$ .

1) Déterminer graphiquement :

a) Le domaine de définition $D_f$ de la fonction $f$ et $D_g$ de la fonction $g$ .

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-x\right]$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x)-x\right]$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{g(x)}$.

2) Déterminer les limites suivantes :

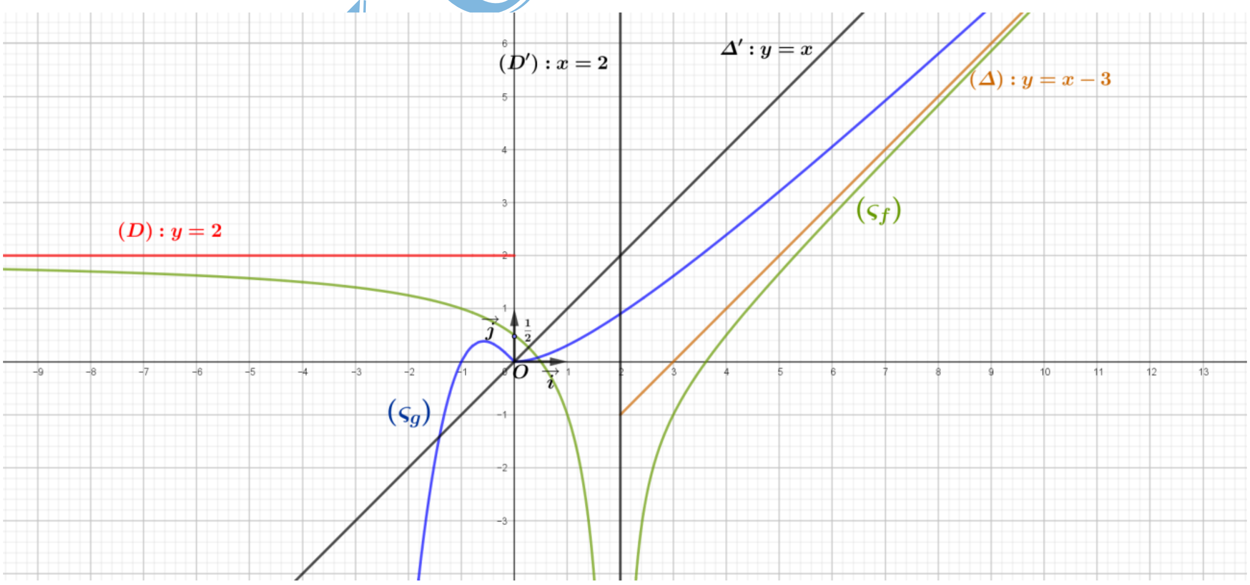
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f^2(x)}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)-3x}{x}$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-f(x)}{2-f(x)}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\circ g(x)}{2g(x)-1}$.

3) a) La fonction $\dfrac{1}{f}$ est elle prolongeable par continuité en 2 ? Si oui définir son prolongement .

b) Déterminer : $f\left(\left]-\infty;2\right[\right)$ ; $f\left(\left[-1;1\right]\right)$.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $\left[-1;1\right]$ .

d) Soit n un entier naturel non nul , montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une solution unique $\alpha_n$ dans l'intervalle $\left[-1;1\right]$ ; donner alors $\alpha_2$.



***Exercice n°7 :***

***Partie I :***

On considère la fonction $f$ définie $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x+1}-2-x}{x} & si\ \ x>0 \\ x^2\left[1-\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right] & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, on a : $f(x)=\dfrac{2}{1+\sqrt{x+1}}-1$.

2) Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$ ; on a : $0\le f(x)\le 2x^2$

3) a) Montrer que $f$ est continue en 0 .

b) Montrer que $f$ est continue sur $\left]0;+\infty\right[$.

c) Montrer que $f$ est strictement décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$ puis déterminer $f\left(\left]0;+\infty\right[\right)$.

4) a) Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat .

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{\pi^2}{2}$ et interpréter graphiquement le résultat .

5) On considère la fonction $u$ définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $u(x)=f\left(\tan^2 x\right)$ pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $u(0)=0$.

a) Montrer que $u$ est continue à droite en 0 .

b) Montrer que pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ; on a : $u(x)=\dfrac{-1+\cos x}{1+\cos x}$.

***Partie II :***

On donne dans ***ci-dessous*** la courbe représentative $\zeta_g$ d'une fonctions $g$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

- La courbe $\zeta_g$ passe par les points $A(-3;-1)$; $B\left(-\dfrac{1}{2};-1\right)$ *et* $C(1;-1)$.
- La droite $\Delta: y=x+1$ est une asymptote à $\zeta_g$ au voisinage de $-\infty$.
- La courbe $\zeta_g$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite $\Delta': y=-2x$ au voisinage de $+\infty$.
- La droite $D: x=-1$ est une asymptote à $\zeta_g$ .

1) a)Déterminer graphiquement :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left[g(x)+2x\right]\ .\ \lim_{x\to-\infty} g(x)\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}\ ;\ \lim_{x\to-\infty} g(x)-x\ .$$

b) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\sin\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)$

et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\cos\left(1+g(x)\right)}{\left(1+g(x)\right)^2}$.

2) Soient la fonction $k = g \circ g$ et $\zeta_k$ sa courbe représentative dans un repère .

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $k$ .

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} k(x)$ et interpréter graphiquement le résultat .

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{k(x)}{g(x)} = 1$ et déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{k(x)}{x} = 1$ .

d) Montrer que la courbe $\zeta_k$ admet au voisinage de $(-\infty)$ une asymptote oblique que l'on précisera .

e) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k(x)}{x} = -2$ .

f) Montrer que la courbe $\zeta_k$ admet au voisinage de $(+\infty)$ une direction asymptotique que l'on précisera

3) On considère la fonction $h = g \circ f$ . Avec $f$ la fonction définie dans la ***Partie I***

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h$ .

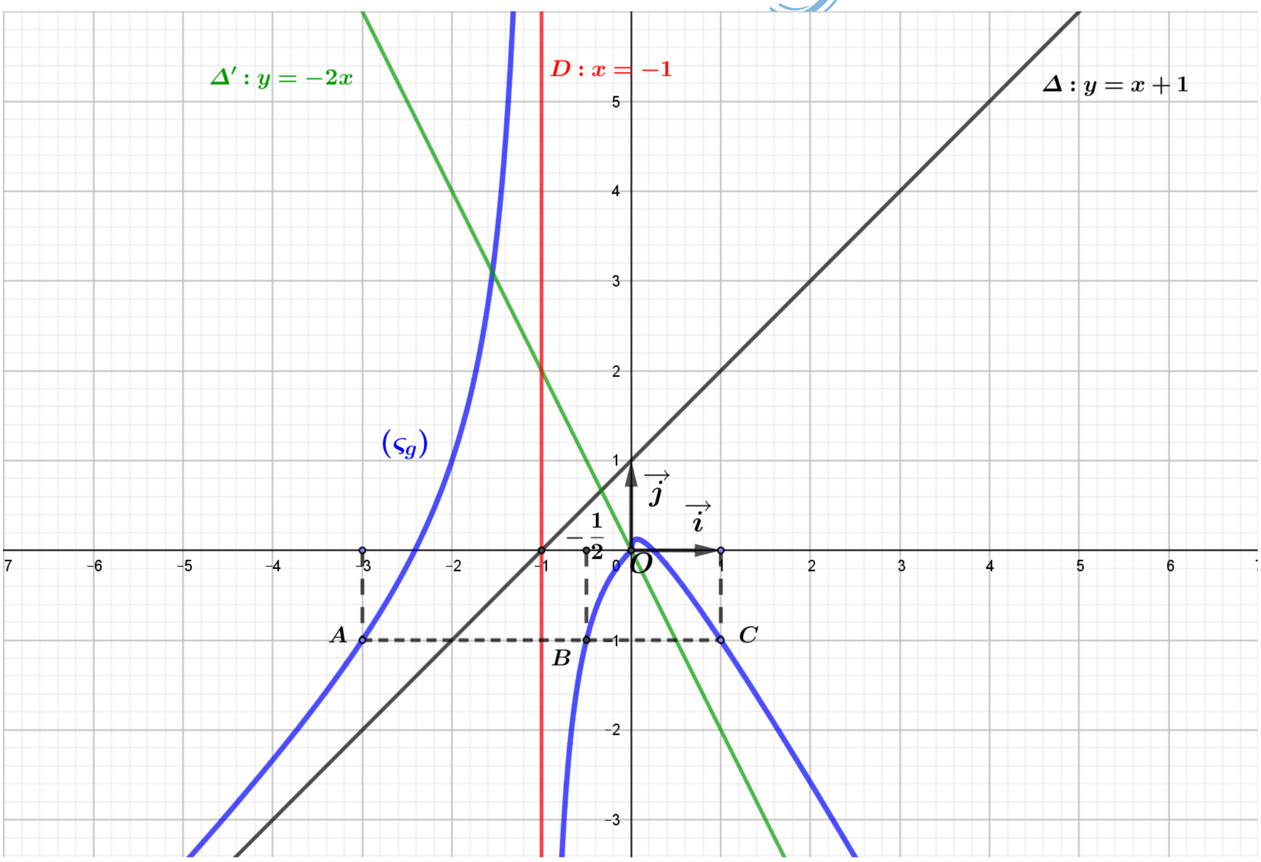
b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g \circ f(x) = -\infty$ .

c) Montrer que la fonction $h$ est continue sur $[0;+\infty[$ .

d) Montrer que la fonction $h$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ .

e) Montrer que l'équation $h(x) = -\dfrac{1}{2}$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[0;8]$.





***Exercice n°8 :***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\sin x}{x} & si \quad x<0 \\ f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x\in \left]-\infty;0\right[$, on a : $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ .

b) Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ . c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que $f$ est continue en $0$ .

3) Soit $g$ la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\begin{cases} f(\cot an\, x) & si \quad x\neq 0 \\ 3 & si \quad x=0 \end{cases}$

a) Montrer que $g$ est continue à droite en $0$ . b) Montrer que $g$ est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Montrer que pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ; on a : $g(x)=3\cos x$ .

d) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet dans l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ une solution unique $\alpha$ .

e) Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $\dfrac{\pi}{4}$.

***Exercice n°9 :***

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{2x}$.

1) a) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$ .

b) $f$ est-elle prolongeable par continuité en $0$ , si oui définir son prolongement noté $F$ .

2) On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ par : $g(x)=\dfrac{2}{1+\sqrt{1+4x}}$

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Montrer que $g$ est continue et strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ et Déterminer $g\left(\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right[\right)$.

3) a) Montrer que l'équation $g(x)-x+1=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[1;2]$.

b) Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,5 .

4) Soit la fonction $G$ définie sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ par $G(x)=\begin{cases} g\left(\dfrac{1}{4}\tan^2 x\right) & si \quad x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right] \\ 0 & si \quad x=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

a) Montrer que la fonction $u : x\mapsto \dfrac{1}{4}\tan^2 x$ est décroissante sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

b) Montrer que $G$ est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

c) Vérifier que : pour tout $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ on a : $G(x)=\dfrac{2\cos x}{-1+\cos x}$.