Mathématiques

Thème : Géométrie dans l'espace

Exercices type devoir

Exercice N°21

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

$= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AE}$

$\boxed{G(2, 4, 1)}$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = 4\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AE}$

$\boxed{H(0, 4, 1)}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ}$

$\boxed{C(2, 4, 0)}$

$L\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+4}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$

Donc $\boxed{L(1, 4, 1)}$

on a $B(2, 0, 0)$; $E(0, 0, 1)$

Donc $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{BL} = \begin{pmatrix}-4\\1\\-8\end{pmatrix} = -4\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} - 8\,\overrightarrow{AE}$

Ainsi

$\boxed{\overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{BL} = -4\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} - 8\,\overrightarrow{AE}}$

on a $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0\\8\\1\end{pmatrix}$

On

$$\overrightarrow{BK} \cdot \left(\overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{BL} \right)$$

$$= \det\left(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BL} \right)$$

$$= -4 \times 0 + 1 \times 8 + (-8 \times 1)$$

$$= 8 - 8 = 0$$

D'où $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont coplanaires

Ainsi K, E, L et B sont coplanaires.

$$d(E,(BL)) = \frac{\|\vec{BE} \wedge \vec{BL}\|}{\|\vec{BL}\|}$$

$\vec{BE}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{BL}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{BE} \wedge \vec{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$d(E,(BL)) = \frac{\sqrt{4^2+1^2+8^2}}{\sqrt{1^2+4^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

soit $M(x, y, z)$

$C(2, 4, 0)$ et $\vec{CB}\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$

$\vec{CM} = (x-2)\vec{AI} + (y-4)\cdot\vec{AJ} + z\,\vec{AE}$

$a\,\vec{CB} = -4\cdot a\,\vec{AJ}$

on $\vec{CM} = a\,\vec{CB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-4=-4a \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4-4a \\ z=0 \end{cases}$

$\boxed{M(2,\ 4-4a,\ 0)}$

$$\mathcal{V}_{(MBEL)} = \frac{1}{6} \left| \left(\vec{BE} \wedge \vec{BL}\right) \cdot \vec{BM} \right|$$

avec $\vec{BM} \begin{pmatrix} 0 \\ 4-4a \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\vec{BE} \wedge \vec{BL}\right) \cdot \vec{BM} = -4 \times 0 + 1 \times (4-4a) + 0 \times (-8)$$

$$= 4 - 4a$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} \cdot |4-4a| = \frac{2}{3} |1-a|$$

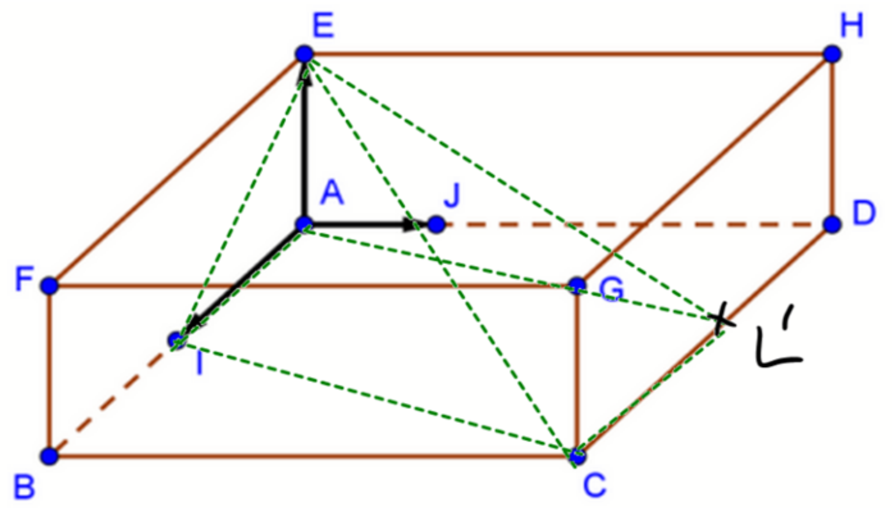
$$\mathcal{V} = \frac{2}{3}(1-a) \quad \text{car} \quad a \in]0;1[$$

or

$$\mathcal{V}_{MBEL} = \frac{1}{6} \iff \frac{2}{3}(1-a) = \frac{1}{6}$$

$$\iff 1 - a = \frac{1}{4}$$

$$\iff \boxed{a = \frac{3}{4}}$$



$$\mathcal{A}_{AICL'} = \|\vec{AI} \wedge \vec{AL'}\|$$

On $C(2,4,0)$ et $D(0,4,0)$

Donc $L'\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+4}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$

$L'(1,4,0)$

$\vec{AI}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{AL'}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$

Donc

$$\vec{AI} \wedge \vec{AL'} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathcal{A}_{(AJCL')} = \sqrt{0^2+0^2+4^2} = 4$

. $\mathcal{V}_{(AJCL'E)} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{(AJCL')} \times AE$

$= \frac{1}{3} \times 4 \times 1$

$= \boxed{\frac{4}{3}}$