LES MATHÉMATIQUES EN 3ème ANNÉE SECONDAIRE

XY Plus 3

Éd-2022

Section : Mathématiques - Tome I

Résumé de cours - Exercices et problèmes corrigés

Lassâad KALLEL
Professeur Principal émérite

Zied BELHADJ
Professeur Principal émérite

دار محمد علي الحامي

Collection : XY

Titre : Les mathématiques en 3ème Année secondaire

Section : Mathématiques - Tome I

Auteurs : Zied Belhadj – Lassaad Kallel

Edition 2022

© Tous Droits réservés

CAEU Med Ali ©

Rue Med Chaabouni Sfax 3027

Tél: +216/74407440 / Fax: +216/ 74407441

Email : edition.medali@tunet.tn

Site : www.edition-medali.tn

N° Editeur : 886-614/17

ISBN : 978-9973-33-514-2

AVANT –PROPOS

Dans le cadre de la nouvelle collection XY nous mettons à la disposition de nos élèves de troisième année secondaire, section Mathématiques, le premier tome de XY3 plus.

Ce manuel, dont le contenu est conforme aux programmes du Ministère de l'Education comporte :

- **un rappel de cours**
- **des exercices et des problèmes corrigés.**

Les exercices et les problèmes couvrent toutes les notions du cours et sont présentés selon une progression qui permet aux élèves l'**assimilation**, l'**entraînement** et la **maîtrise** de la matière, tout en développant chez eux des capacités de raisonnement et de synthèse.

Nous avons aussi œuvré pour que ce manuel soit utile à des élèves de niveaux différents, permettant l'amélioration des capacités des uns et des performances de ceux qui sont en quête de l'excellence.

Ce travail est dédié à la mémoire de notre défunte collègue **Lobna Mallouli Ajili** en reconnaissance à l'accompagnement qu'elle a prodigué à des générations d'apprenants, ainsi qu'à son implication, dans notre groupe, pour l'élaboration de parascolaires.

Bon travail et bonne chance à nos élèves.

Les auteurs

Chapitre 1

Généralités sur les Fonctions

I. Sens de variation d'une fonction

⇨ Définitions

- Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si, et seulement si :

  pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$.

- Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si, et seulement si :

  pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$

- Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si et seulement si, pour tous réels a et b de I on a $f(a) = f(b)$.

- Une fonction est dite ***monotone*** sur un intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

II. Fonctions paires – Fonctions impaires

Soit une fonction f définie sur un ensemble D **symétrique par rapport à zéro**, c'est à dire que pour tout x de D, (-x) appartient à D.

Parité de f	Définition	Elément de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$
Paire	$f(-x) = f(x)$	L'axe des ordonnées
Impaire	$f(-x) = -f(x)$	L'origine du repère

Conséquence :
Si f est paire ou impaire, alors on peut réduire l'étude de f à $\mathbb{R}_+ \cap D$.

III. Restriction d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D une partie de E.
On appelle **restriction** de la fonction f à D,

la fonction g définie sur D par $g(x) = f(x)$, pour tout $x \in D$.

IV. Variations et opérations sur les fonctions

⇨ **Opérations sur les fonctions :** Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Opérations	Les fonctions f et g sont définies sur D	Définitions (pour tout $x \in D$)
Addition	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Multiplication	$f \times g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Multiplication par un réel non nul	λf	$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

⇨ **Variations de la somme de deux fonctions**

Si les fonctions f et g ont **le même** sens de variation sur un intervalle I, alors leur **somme a le même** de variation que chacune d'elles.

V. Majorant – minorant

⇨ **Maximum, minimum**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

- S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \leq f(x_0)$. On dit que la fonction f admet sur D un maximum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un maximum de f sur D.

- S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \geq f(x_0)$. On dit que la fonction f admet sur D un minimum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un minimum de f sur D.

⇨ **Définition :**

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

- La fonction f est dite **majorée** sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D, $f(x) \leq M$
- La fonction f est dite **minorée** sur D s'il existe un réel m tel que pour tout x de D, $f(x) \geq m$.
- La fonction f est dite **bornée** sur D s'il existe deux réels m et M tel que pour tout x de D, $m \leq f(x) \leq M$.

Une fonction f est bornée sur un ensemble D, si elle est à la fois majorée et minorée.

VI. Construction d'une courbe à partir de celle d'une fonction de référence

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et représentée dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Fonctions définies par	Conditions d'existence	Transformations permettant de passer de $\mathscr{C}_f$ à $\mathscr{C}_g$
$g(x) = f(x) + b$	$x \in D$	Translation de vecteur $b\vec{j}$
$g(x) = f(x - a)$	$(x - a) \in D$	Translation de vecteur $a\vec{i}$
$g(x) = -f(x)$	$x \in D$	Symétrie d'axe $(O, \vec{i})$
$g(x) = \lvert f(x) \rvert$	$x \in D$	• $\mathscr{C}_f = \mathscr{C}_g$ lorsque $f(x) \geq 0$ • Symétrie d'axe $(O, \vec{i})$ lorsque $f(x) \leq 0$
$g(x) = f(\lvert x \rvert)$	$\lvert x \rvert \in D$	g est paire, donc : • sur $D \cap \mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}_f = \mathscr{C}_g = \Gamma_1$ • sur $D \cap \mathbb{R}_-$, symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$

VII. Fonctions affines par intervalles

⇨ **Définition :**

On appelle fonction affine par intervalles toute fonction définie sur une réunion d'intervalles et telle que sa restriction à chacun de ces intervalles soit affine.

La courbe représentative d'une fonction affine par intervalles est une réunion de demi-droites ou de segments de droites.

⇨ **Fonction Partie entière :**

- On appelle partie entière d'un réel x et on note E(x), le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- On appelle fonction partie entière la fonction qui à tout réel associe sa partie entière.
- Soit E la fonction partie entière.

  Pour tout réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que : $n \leq x < n + 1$ et on a $E(x) = n$.

VIII. La fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I alors $\sqrt{f}$ est croissante sur I.
- Si f est décroissante sur I alors $\sqrt{f}$ est décroissante sur I.
- Si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I.

ENONCES

1 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{6x^2 + x - 2}{|1 - x^2| + x^2 - 1}$$

1) Montrer que le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

2) Simplifier f(x) pour tout $x \in D$.

3) a) Vérifier que pour tout $x \in D$, $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x-1}$

b) Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{-x+3}{x-1}$.

1) a) Etudier le sens de variations de f sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$

b) Tracer Cf la courbe de f dans un r.o.n $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Tracer la parabole P d'équation $y = x^2 - 3$ sur le même repère que Cf.

3) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de Cf et P.

b) Résoudre graphiquement : $-1 < f(x) \leq x^2 - 3$

4) Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = x^2 - 3 & \text{si } x \in]-\infty, 2] \\ g(x) = f(x) & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$

a) Tracer la courbe Cg de g.

b) Montrer que g est minorée sur $]-\infty, 2]$ et qu'elle est majorée sur $[2, +\infty[$.

3

Soit f une fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $3f(x) + f(-x) = 4x^3 + 2x$.

1) Montrer que f est impaire.

2) a) Donner l'expression de f(x) sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier le sens de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3$.

c) En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3) Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

a) Déterminer le domaine de définition Dh de h et étudier son sens de variations de h sur Dh.

b) Montrer que la fonction h est bornée sur $[1, +\infty[$.

4 Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1) Montrer que pour tout $x \in IR$: $2|x| \leq x^2 + 1$.

2) En déduire que f est bornée sur IR.

3) Etudier le sens de variations de f sur $[1, +\infty[$.

4) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

a) Vérifier que pour tout $x \in IR$: $g(x) = f(x) + 1$.

b) Etudier le sens de variations de g sur $[1, +\infty[$.

c) On désigne par Cf et Cg les courbes respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que Cg se déduit de Cf par une transformation simple que l'on déterminera

5 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{x^2 - 4x + 3}$.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(\sqrt{x-2}+1)}$.

2) Soit g la restriction de f sur $[4, +\infty[$.

a) Montrer que g est minorée sur $[4, +\infty[$.

b) Montrer que g est décroissante sur $[4, +\infty[$ et en déduire qu'elle est bornée.

6 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = E(x) - 2E(\frac{x}{2})$.

1) Donner les expressions de f(x) sur l'intervalle $[-1; 2]$.

2) Tracer la courbe (C_0) de la restriction de f à l'intervalle $[-1; 2]$.

7 Soit f la fonction définie par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

1) Montrer que f est définie sur IR.

2) Tracer la courbe (C_0) de la restriction de f à l'intervalle $[0, 1]$.

3) Montrer que pour tout réel x, $f(x+k) = k + f(x)$. $(k \in \mathbb{Z})$

4) En déduire le tracé de la restriction de f à l'intervalle $[-2, 3]$.

8 On considère la fonction f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \cdot E(\frac{1}{x})$.

1) Montrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = nx$.

2) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

CORRIGES

1 $f(x)=\dfrac{6x^2+4x-2}{\left|1-x^2\right|+x^2-1}$

1) f est définie si et seulement si $\left|1-x^2\right|+x^2-1\neq 0$

Or $\left|1-x^2\right|+x^2-1=0$ signifie $\left|1-x^2\right|=1-x^2$ signifie $1-x^2\geq 0$

signifie $x\in[-1,1]$.

$E=D_f=\mathbb{R}\setminus[-1,1]=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

2) Pour tout $x\in D_f$ on a $1-x^2<0$ d'où $\left|1-x^2\right|=x^2-1$

$$f(x)=\frac{6(x+1)(x-\frac{1}{3})}{x^2-1+x^2-1}=\frac{(x+1)(6x-2)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{3x-1}{x-1}$$

3) a) Pour tout $x\in E$, $f(x)=\dfrac{3(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{3(x-1)}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}=3+\dfrac{2}{x-1}$.

b) Soient a et b deux réels de $]1,+\infty[$ tel que $a<b$.

$1<a<b$ donc $0<a-1<b-1$

d'où $\dfrac{1}{a-1}>\dfrac{1}{b-1}$ car $a-1$ et $b-1$ sont de même signe.

$3+\dfrac{1}{a-1}>3+\dfrac{1}{b-1}$ donc $f(a)>f(b)$ d'où f est décroissante sur $]1,+\infty[$.

De même on trouve que f est décroissante sur $]-\infty,-1[$.

2

1) a) On vérifie que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ que $f(x)=-1+\dfrac{2}{x-1}$ et on montre comme à l'exercice n 1 que f est décroissante sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$

b) et 2) on trace l'allure de Cf et P en utilisant un tableau de valeurs

3) a) $M(x,y) \in Cf \cap P$ ssi $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} y = f(x) \\ \dfrac{-x+3}{x-1} = x^2 - 3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} y = f(x) \\ x(x^2 - x - 2) = 0 \end{cases}$

On trouve que $Cf \cap P = \{M_1(-1,-2), M_2(0,-3), M_3(2,1)\}$.

b) On cherche les abscisses des points de Cf situés au dessus de l'asymptote horizontale et au dessous ou sur la parabole P

Donc l'ensemble des solutions est l'intervalle $[2,+\infty[$

4) a) Voir figure

b) Pour tout $x \in]-\infty,2]$, $x^2 \geq 0$ signifie que $x^2 - 3 \geq -3$ donc g est minorée par -3 sur $]-\infty,2]$

Sur $[2,+\infty[$ g est décroissante car f est décroissante sur $]1,+\infty[$

d'ou pour tout $x \in [2,+\infty[$ $g(x) \leq g(2)$

donc g est majorée sur $[2,+\infty[$ par $g(2) = 1$

3

1) On a pour tout $x \in IR$: $f(-x) = 4x^3 + 2x - 3f(x)$ donc $f(x) = -4x^3 - 2x - 3f(-x)$

d'ou pour tout $x \in IR$: $f(-x) + f(x) = -3(f(-x) + f(x))$

ce qui implique que pour tout $x \in IR$: $f(-x) = -f(x)$ d'ou f est impaire

2) a) On a pour tout $x \in IR$: $f(-x) + 3f(x) = 4x^3 + 2x$ or f est impaire,

donc pour tout $x \in IR$: $-f(x) + 3f(x) = 4x^3 + 2x$

d'ou pour tout $x \in IR$: $f(x) = 2x^3 + x$

b) On montre que g est croissante sur IR.

c) On a g est croissante sur IR et la fonction $x \mapsto x$ est aussi croissante sur IR

(fonction affine de coefficient $1 > 0$) d'ou f est croissante sur IR.

3) a) h est définie ssi $f(x) > 0$ ssi $x(2x^2+1) > 0$ ssi $x > 0$

car pour tout $x \in IR$ $2x^2+1 > 0$ d'ou $Dh =]0,+\infty[$

On a f est croissante sur IR donc sur $]0,+\infty[$ d'ou $\sqrt{f}$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et par suite $h = \dfrac{1}{\sqrt{f}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

b) On a pour tout $x \in]0,+\infty[$ $h(x) > 0$ et h est décroissante sur $]0,+\infty[$

donc pour tout $x \in [1,+\infty[$ $0 < h(x) \leq h(1)$ d'ou h est bornée sur $[1,+\infty[$

4

1) Pour tout $x \in IR$: $(|x|-1)^2 \geq 0$ ça signifie que $2|x| \leq x^2+1$.

2) Pour tout $x \in IR$: $2|x| \leq x^2+1$ ça signifie que $|f(x)| \leq 1$

donc Pour tout $x \in IR$: $-1 \leq f(x) \leq 1$ d'ou f est bornée sur IR

3) Soient a et b deux réels de $[1,+\infty[$ tel que $a < b$

On a $f(a)-f(b) = \dfrac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$ et puisque $1 \leq a < b$ alors $1-ab \leq 0$ et $a-b<0$

et on a $(a^2+1)(b^2+1) > 0$ d'ou $f(a)-f(b) \geq 0$ donc f est décroissante sur $[1,+\infty[$

4) a) pour tout $x \in IR$: $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1+2x}{x^2+1} = 1+\dfrac{2x}{x^2+1} = 1+f(x)$

b) On a f est décroissante sur $[1,+\infty[$ donc g est décroissante sur $[1,+\infty[$

c) Soient $M(x,f(x)) \in Cf$ et $M'(x,g(x)) \in Cg$: $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Donc Cg est l'image de Cf par la translation de vecteur $\vec{U}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

5

1) a) $Df = \{ x \in IR \text{ tel que: } x-2 \geq 0 \text{ et } x^2-4x+3 \neq 0 \} = [2,+\infty[\setminus \{3\}$

b) Pour tout $x \in [2,+\infty[\setminus \{3\}$: $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x-2}+1)} = \dfrac{1}{(x-1)(\sqrt{x-2}+1)}$

2) a) pour tout $x \in [4,+\infty[$: $x-1>0$ et $\sqrt{x-2}+1>0$ donc g est minorée par 0

b) Soient a et b deux réels de $[4,+\infty[$ tel que a<b

Donc $0 < a-1 < b-1$ et $0 < \sqrt{a-2}+1 < \sqrt{b-2}+1$

d'ou $(a-1)(\sqrt{a-2}+1) < (b-1)(\sqrt{b-2}+1)$ par suite $g(a) > g(b)$

On conclut donc que g est décroissante sur $[4,+\infty[$

On à montré que g est décroissante sur $[4,+\infty[$

D'ou pour tout $x \in [4,+\infty[$: $g(x) \leq g(4)$ et par suite g est majorée par $g(4)$

Conclusion pour tout $x \in [4,+\infty[$: $0 < g(x) \leq g(4)$ donc g est bornée

6

1) Si $-1 \leq x < 0$ alors $\dfrac{-1}{2} \leq \dfrac{x}{2} < 0$ d'où $E(x) = -1$ et $E(\dfrac{x}{2}) = -1$

Donc $f(x) = -1-2(-1) = 1$.

Si $0 \leq x < 1$ alors $0 \leq \dfrac{x}{2} < \dfrac{1}{2}$, $E(x) = E(\dfrac{x}{2}) = 0$.

Donc $f(x) = 0$

Si $1 \le x < 2$ donc $\frac{1}{2} \le \frac{x}{2} < 1$, on a $E(x) = 1$ et $E(\frac{x}{2}) = 0$ Donc $f(x) = 1$.

Si $x = 2$, on a $f(x) = 2 - 2 \times 1 = 0$.

En résumé, sur $[0,2]$ la fonction f est définie ainsi :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in [-1;0[\\ f(x) = 0 & \text{si } x \in [0;1[\\ f(x) = 1 & \text{si } x \in [1;2[\\ f(2) = 0 \end{cases}.$$

2) Tracé de (C_0)

7

1) f est définie sur IR car : Pour tout $x \in IR$ on a : $E(x) \le x$ donc $x - E(x) \ge 0$

2) Si $x \in [0,1[$, on a $E(x) = 0$ et $f(x) = 0 + \sqrt{x - 0} = \sqrt{x}$.

(C_0) est la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$.

3) $k \in \mathbb{Z}$ donc $E(x+k) = E(x) + k$.

$$f(x+k) = E(x+k) + \sqrt{x+k-E(x+k)} = E(x) + k + \sqrt{x+k-E(x)-k}$$
$$= E(x) + k + \sqrt{x - E(x)}$$

d'où $f(x+k) = k + f(x)$

Soient $M(x, f(x))$ et $M'(x+k, f(x+k))$ deux points de la courbe $\mathscr{C}$ de f.

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ car $f(x+k) = k + f(x)$ et par suite $t_{\vec{u}}(M) = M'$ où $\vec{u} = k(\vec{i} + \vec{j})$ et $k \in \mathbb{Z}$.

En appliquant à (C_0) les translations de vecteurs $\vec{i} + \vec{j}$, $2(\vec{i} + \vec{j})$, $3(\vec{i} + \vec{j})$, $-(\vec{i} + \vec{j})$, $-2(\vec{i} + \vec{j})$: on obtient (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) tracés des restrictions de f respectivement aux intervalles $[1;2]$, $[2;3]$, $[-1;0]$ et $[-2,-1]$.

8

1) Pour tout réel $x > 1$ on a $0 < \frac{1}{x} < 1$ d'où $E(\frac{1}{x}) = 0$ donc $f(x) = 0$ (1)

Pour tout $x \in]0,1[$ on a $\frac{1}{x} > 1$ et la présence du facteur $E(\frac{1}{x})$ donne l'idée de subdiviser l'intervalle $]0,1]$ en intervalle $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

Si $\frac{1}{2} < x \leq 1$ alors $1 \leq \frac{1}{x} < 2$ donc $E(\frac{1}{x}) = 1$ et par suite $f(x) = x$.

Si $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$ alors $2 \leq \frac{1}{x} < 3$ donc $E(\frac{1}{x}) = 2$ et $f(x) = 2x$.

Si $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$ alors $3 \leq \frac{1}{x} < 4$ donc $E(\frac{1}{x}) = 3$ et $f(x) = 3x$

.....

Si $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ alors $n \leq \frac{1}{x} < n+1$ donc $E(x) = n$ et par suite

$f(x) = nx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Conclusion :

De (1) et (2), pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier naturel n, $f(x) = nx$.

2) La représentation graphique est donc formée d'une demi droite de l'axe des abscisses ($y = 0$ et $x > 1$) et d'une infinité de segments portés sur les droites d'équations $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$, ..., $y = nx$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Chapitre 2

Continuité

1. Continuité en un réel graphiquement

- Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I, met en évidence un tracé continu de la courbe, la fonction f est continue en tout réel a de I.

- Lorsqu'on observe une rupture (ou un saut) dans le tracé de f de part et d'autre d'un point A (a, f(a)) bien que d'abscisse appartenant à son ensemble de définition, alors la fonction f est discontinue en a.

2. Continuité de certaines fonctions usuelles

⇨ ***Théorème***

- Toute fonction constante est continue en tout réel a.
- La fonction $x \mapsto x$ est continue en tout réel a.
- Toute fonction linéaire est continue en tout réel a.
- Toute fonction affine est continue en tout réel a.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel a.
- Toute fonction polynôme est continue en tout réel a.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul a.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel où elle est définie.

3. Opérations algébriques sur les fonctions continues

⇨ ***Théorème***

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. Soit a un réel de I et k un réel.

- Si f et g sont continues en a alors les fonctions $f+g$, fg et kf sont continues en a.
- Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en a.
- Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.

4. Continuité à droite – Continuité à gauche

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est continue en a, si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en a.

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I et a un réel de I.

- Si f est continue à droite en a, alors $\sqrt{f}$ est continue à droite en a.
- Si f est continue à gauche en a, alors $\sqrt{f}$ est continue à gauche en a.

5. Continuité sur un intervalle

⇨ ***Définition***

- Une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ est dite continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$.
- Une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ est dite continue sur $]a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à gauche en b.
- Une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ est dite continue sur $[a,b[$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a.

f est continue à gauche en b
f n'est pas continue
à droite en a

f est continue à droite en a
f n'est pas continue à
gauche en b

f est continue sur
$]a,b[$

- Soient a et b deux réels.
  Une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

⇨ ***Conséquences***

- Si une fonction est continue sur un intervalle I, alors elle est continue sur tout intervalle inclus dans I.
- Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle contenu dans $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

6. Continuité de la fonction | |

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est continue sur I, alors $|f|$ est continue sur I.

7. Continuité de la fonction $\sqrt{\ }$

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I.
Si f est continue sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

8. Image d'un intervalle par une fonction continue

⇨ ***Théorème***

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque :

La continuité est une condition suffisante mais n'est pas nécessaire pour que l'image d'un intervalle soit un intervalle.

9. Résolution d'équations de la forme f(x) = k

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que < .
Pour tout réel k **compris** entre f(a) et f(b), l'équation possède **au moins** une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

ENONCES

1

Dans chacun des cas suivants, justifier que la fonction f est continue au réel a indiqué :

1) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-x+1$, $a=-\sqrt{2}$

2) $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$ $a=0,7$

3) $f(x)=\left|\frac{x-3}{x^2-1}\right|$ $a=3$

4) $f(x)=|x|^2-4|x|-\frac{2}{x}$ $a=15$

5) $f(x)=\frac{x}{2x-|x+1|}$ $a=-1$

6) $f(x)=\sqrt{4x^2-4x-3}$ $a=2$

7) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x+1}}$ $a=3$

2 Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=x-1 & \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=2x-4 & \text{si } 0<x<3 \\ f(x)=\sqrt{x+1} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) a) Justifier que la fonction f est continue sur $]-\infty,0]$.

b) Justifier que la fonction f est continue sur $]0,3[$

c) Justifier que la fonction f est continue sur $[3,+\infty[$

3) Justifier à l'aide du graphique, que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé tracer la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[-3;3]$.

2) Etudier la continuité de f sur $[-3;3]$.

4 Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=-x^3+x^2-x+4$

2) $f(x)=\frac{x+3}{2x^2+5}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}+x^3+1$

4) $f(x)=|x^2-3x+2|$

5) $f(x)=|x+3|-|5-x|$

6) $f(x)=\frac{|x+5|}{\sqrt{x^2+1}}$

5

La figure ci-contre est la représentation graphique Cf dans un repère orthonormé de la fonctionf définie sur IR par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1) En utilisant le graphique :

a) Déterminer les images des intervalles [-1, 0], [-1, 2] et [0, 1] par f.

b) Justifier que :

→ L'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans IR.

→ L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions dans IR.

→ L'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans IR.

2)a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans]0, 1[une solution α.

b) Donner un encadrement de α à d'amplitude 10^{-1}.

6

Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} -x+2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty,-1]$, $]-1,2[$ et $[2,+\infty[$.

2)a) Tracer Cf la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Justifier graphiquement que f n'est pas continue sur IR.

c) Déterminer graphiquement les images par f des intervalles [-4, -2] et]-1, 2[

7 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 2|x+2| - x + 2 & \text{si } x \in]-\infty,-1[\\ (2x-1)E(x) + x & \text{si } x \in [-1,2[\end{cases}$

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles.

2) Tracer (C) la courbe de f dans un repère orthonormé.

3- Etudier graphiquement la continuité de f en -2 , -1 , 0 et 1.

CORRIGES

1

1) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-x+1$

f, étant une fonction polynôme, d'où f est continue en $a=-\sqrt{2}$.

2) $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

f, étant une fonction rationnelle, $0,7\in D_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$ donc f est continue en 0,7

3) $f(x)=\left|\frac{x-3}{x^2-1}\right|$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

On pose $g:x\mapsto\frac{x-3}{x^2-1}$.

La fonction g est rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ donc g est continue en 3

d'ou $f=|g|$ est continue en 3.

4) $f(x)=|x|^2-4|x|-\frac{2}{x}$; $D_f=\mathbb{R}^*$

$f_1:x\mapsto-4|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, $f_2:x\mapsto|x|^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$f_3:x\mapsto\frac{-2}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

D'où $f=f_1+f_2+f_3$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ d'où f est continue en 15.

5) $f(x)=\frac{x}{2x-|x+1|}$

$f_1:x\mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en -1.

car $x\mapsto-|x+1|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$f_2:x\mapsto 2x-|x+1|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f_2 est continue en -1.

De plus $f_2(-1)=-2\neq 0$ d'où $f=\frac{f_1}{f_2}$ est continue en -1.

6) $f(x)=\sqrt{4x^2-4x-3}$

$u:x\mapsto 4x^2-4x-3$ est une fonction polynôme donc continue en 2 et

$u(2)\geq 0$ d'où f est continue en 2

7) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x+1}}$, on pose $u(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

La fonction u est rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc continue en 3 et

$u(3)\geq 0$ d'ou f est continue en 3

2 1)

La restriction de f à l'intervalle $]-\infty,0]$ est représentée par une demi droite $[AB)$ où $A(0,-1)$ et $B(-2,-3)$.

La restriction de f à l'intervalle $]0,3[$ est représentée par un segment $[CD]$ privé des points extrémités $C(0,-4)$ et $D(3,2)$.

La restriction de f à l'intervalle $[3,+\infty[$ est représentée par (C_1).

2) a) La fonction $x \mapsto x-1$ est un polynôme donc continue sur IR en particulier sur $]-\infty,0]$ d'où f est continue sur $]-\infty,0]$.

b) La fonction $x \mapsto 2x-4$ est un polynôme donc continue sur IR en particulier sur $]0,3[$ d'où f est continue sur $]0,3[$.

c) La fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $[3,+\infty[\subset [1,+\infty[$ donc f est continue sur $[3,+\infty[$.

3) La représentation graphique de f sur IR met en évidence un saut du tracé à droite du point $A(0,f(0))$, la fonction est discontinue en 0.
Donc f n'est pas continue sur IR.

3

1) Pour tout $x \in [n,n+1[$, on a $f(x)=x-n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(x)=x-n$.

Si $x \in [-3;-2[$, on a $E(x)=-3$ et $f(x)=x+3$.

Si $x \in [-2;-1[$, on a $E(x)=-2$ et $f(x)=x+2$.

Si $x \in [-1;0[$, on a $E(x)=-1$ et $f(x)=x+1$.

Si $x \in [0;1[$, on a $E(x)=0$ et $f(x)=x$.

Si $x \in [1;2[$, on a $E(x)=1$ et $f(x)=x-1$.

Rappel
Pour tout réel x, il existe un seul entier n tel que $n \leq x < n+1$ et $E(x)=n$

Si $x \in [2;3[$, on a $E(x) = 2$ et $f(x) = x - 2$

Si $x = 3$ on a $E(x) = 3$ et $f(x) = 0$

2) La courbe de f présente une rupture aux points d'abscisses entiers.
f est continue sur chacun des intervalles $]n, n+1[$ où $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2,\}$.
f est continue à droite pour les valeurs entières de x.

4

1) $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 4$
f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \dfrac{x+3}{2x^2+5}$
f est rationnelle et définie sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+5} + x^3 + 1$
- La fonction $f_1 : x \mapsto x^3 + 1$ est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto x^2 + 3x + 5$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x, $x^2 + 3x + 5 > 0$ ($\Delta < 0$ et $a > 0$) donc la fonction
$f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2+3x+5}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$f = f_1 + f_2$ somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$
La fonction $g : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto |x^2 - 3x + 2|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
f est continue sur $\mathbb{R}$.

5) $f(x) = |x+3| - |5-x|$
La fonction $x \mapsto x + 3$ est affine donc continue sur $\mathbb{R}$ d'où la fonction
$f_1 : x \mapsto |x+3|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto 5 - x$ est affine donc continue sur $\mathbb{R}$ d'où la fonction
$f_1 : x \mapsto |5-x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$f = f_1 + f_2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

6) $f(x) = \dfrac{|x+5|}{\sqrt{x^2+1}}$

- La fonction $x \mapsto x+5$ est affine donc continue sur $\mathbb{R}$ d'où la fonction $f_1 : x \mapsto |x+5|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto x^2+1$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.
  De plus, pour tout réel x, $x^2+1>0$ donc la fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  De plus, pour tout réel x, $f_2(x) \neq 0$ donc $f = \frac{f_1}{f_2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5

1)a) $f([-1,0]) = [-3,1]$, $f([-1,2]) = [-3,1]$ et $f([0,1]) = [-1,1]$.

b) → La droite d'équation $y = 4$ coupe Cf en un unique point donc l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans IR

→ La droite d'équation $y = -1$ coupe Cf en deux points donc l'équation $f(x) = -1$ admet deux solutions dans IR

→ La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) coupe Cf en 3 points donc l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions dans IR

2)a) f est une fonction polynôme donc continue sur IR, $f(0) \times f(1) < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]0,1[$

b) On utilise la méthode dichotomique qui consiste à découper l'intervalle $[0,1]$ en dix intervalles de même amplitude 10^{-1}

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	1	0,97	0,88	0,75	0,58	0,37	0,13	-0,12	-0,4	-0,7	-1

On a $f(0,6) \times f(0,7) < 0$ d'ou $0,6 < \alpha < 0,7$

6

1) la fonction $x \mapsto -x+2$ est une fonction affine donc continue sur IR en particulier sur $]-\infty,-1]$, d'ou f est continue sur $]-\infty,-1]$

La fonction $x \mapsto x^2-2x$ est une fonction polynôme donc continue sur IR en particulier sur $]-1,2[$ d'ou f est continue sur $]-1,2[$

La fonction $x \mapsto x+2$ est une fonction affine donc continue sur IR en particulier sur $[2,+\infty[$ et pour tout $x \in [2,+\infty[$: $x+2 \geq 0$

d'ou f est continue sur $[2,+\infty[$

2)a)

b) Cf présente une rupture au niveau du point d'abscisse 2 d'ou f n'est pas continue en 2 par suite f n'est pas continue sur IR

c) $f([-4,-2]) = [4,6]$ et $f(]-1,2[) = [-1,3[$

7

1) Pour $x \in]-\infty,-1[$:

x	$-\infty$	-2	-1
$x+2$	$-$	0	$+$
$\lvert x+2 \rvert$	$-x-2$	0	$x+2$

Donc si $x \in]-\infty,-2]$ alors $f(x) = 2(-x-2)-x+2 = -3x-2$

si $x \in]-2,-1[$ alors $f(x) = 2(x+2)-x+2 = x+6$

Pour $x \in [-1,2[$:

si $x \in [-1,0[$ $E(x) = -1$ alors $f(x) = -x+1$

si $x \in [0,1[$ $E(x) = 0$ alors $f(x) = x$

si $x \in [1,2[$ $E(x) = 1$ alors $f(x) = 3x-1$

$$\text{donc } f(x) = \begin{cases} -3x-2 & \text{si } x \in]-\infty,-2] \\ x+6 & \text{si } x \in]-2,-1[\\ -x+1 & \text{si } x \in [-1,0[\\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 3x-1 & \text{si } x \in [1,2[\end{cases}$$

Donc f est une fonction affine par intervalles

2) Traçage de f

3) La courbe de f :

* n'a pas de rupture au point d'abscisse -2 donc f est continue en -2
* présente des ruptures aux points d'abscisses -1 , 0 et 1 donc f n'est pas continue en -1 , 0 et 1

Limites et Continuité

1. Limite en un réel a d'une fonction continue en a

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

f est continue en a, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel a de I.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$

2. Calcul de limites

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel a de I et soit g une fonction définie sur l'intervalle I.

Si g est continue en a et si $g(x) = f(x)$ pour $x \neq a$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

3. Prolongement par continuité

⇨ ***Théorème et définition***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf en un réel a de I, et admettant une limite ℓ en a.

Alors la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$

est continue en a.

⇨ ***Vocabulaire***

On dit que la fonction g est le prolongement par continuité en a de la fonction f

On dit aussi que f est prolongeable par continuité en a.

4. Opérations sur les limites finies

⇨ ***Théorème***

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I et telles que f et g admettent pour limites respectives ℓ et ℓ' en a.

Alors

- $\lim\limits_{a}(f+g)=\ell+\ell'$
- $\lim\limits_{a}|f|=|\ell|$
- Si $\ell\neq 0$ alors $\lim\limits_{a}\frac{1}{f}=\frac{1}{\ell}$
- $\lim\limits_{a}kf=k\ell \quad (k\in\mathbb{R})$
- $\lim\limits_{a}fg=\ell\ \ell'$
- Si $\ell'\neq 0$ alors $\lim\limits_{a}\frac{f}{g}=\frac{\ell}{\ell'}$

5. Limite et ordre

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel a de I et admettant pour limite ℓ en a.

- Si $f(x)$ est positif pour tout réel x de I distinct de a, alors $\ell\geq 0$.
- Si $f(x)$ est négatif pour tout réel x de I distinct de a, alors $\ell\leq 0$.

⇨ ***Remarque***

- L'inégalité donnant le signe de f(x) peut être stricte ou large.
- En passant à la limite l'inégalité stricte devient large.

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel a de I et admettant pour limite ℓ en a.

Si $f(x)$ est positif pour tout réel x distinct de a, alors $\lim\limits_{a}\sqrt{f}=\sqrt{\ell}$.

6. Limite à droite (ou à gauche) en a et continuité à droite (ou à gauche) en a

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- La fonction f est continue à droite en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$.
- La fonction f est continue à gauche en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$.

⇨ ***Théorème***

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ sauf peut être en a et g une fonction définie sur un intervalle contenant $[a,b[$.

  Si g est continue à droite en a et si $g(x)=f(x)$ pour tout x de $]a,b[$ alors $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=g(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ sauf peut être en b et g une fonction définie sur un intervalle contenant $]a,b]$.

  Si g est continue à gauche en b et si $g(x)=f(x)$ pour tout x de $]a,b[$ alors $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=g(b)$.

EXERCICES

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f au réel x_0 indiqué.

1) $f(x) = 3x^6 - 5x^3 + 1$ $\qquad x_0 = -1$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 5}$ $\qquad x_0 = 2$

3) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$ $\qquad x_0 = \dfrac{1}{2}$

4) $f(x) = \sqrt{-2x + 1} + \dfrac{4}{x + 3}$ $\qquad x_0 = -10$

5) $f(x) = (x - 4)^4 + \dfrac{{}^{2}- \quad +}{x^3 - 2x + 4}$ $\qquad x_0 = 1$

2 Calculer la limite de la fonction f au réel x_0 indiqué :

1) $f(x) = \left|\dfrac{1 - 2x}{x^2 - 3}\right|$ $\qquad x_0 = -1$

2) $f(x) = \dfrac{|x^2 + x| + 2}{|x| + 3}$ $\qquad x_0 = 0$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ } +}{|x| - 25}$ $\qquad x_0 = 9$

3 Calculer la limite de la fonction f au réel x_0 indiqué :

1) $f(x) = \dfrac{{}^{2}-}{2x^2 + 6x}$ $\qquad x_0 = -3$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{-}$ $\qquad x_0 = 2$

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + 125}{x + 5}}$ $\qquad x_0 = -5$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 5} - 3}{x - 2}$ $\qquad x_0 = 2$

5) $f(x) = \dfrac{\dfrac{x + 1}{x - 4} + 4}{x - 3}$ $\qquad x_0 = 3$

6) $f(x) = \left|\dfrac{(x + 1)^3 - 1}{x}\right|$ $\qquad x_0 = 0$

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2-16x+48}{x^2-16} & \text{si } x\neq 4 \text{ et } x\neq -4\\ a & \text{si } x=4\\ b & \text{si } x=-4\end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 4.
2) Déterminer la valeur de b pour que f soit continue en -4.

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x<2\\ \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si } x>2\end{cases}$$

1) Déterminer la limite de f à gauche en 2.
2) Déterminer la limite de f à droite en 2.
3) La fonction f admet-elle une limite en 2 ?
4) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

6

1) Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\,E(x)$
2) Etudier la continuité de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{4}{E(x)}$.

7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{(x-2)|x+1|}\\ f(2)=-1\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 2.
2) Etudier la limite de f en - 1.
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $g(x)=8E(-x)-f(x)$.
   Déterminer la limite de la fonction g en - 1.

8 I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{3x^3-3x^2+x-1}{x-1}$.

1)a- Montrer que f admet un prolongement par continuité F en 1.
   b- Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $F(x)=3x^2+1$.

2)a- Tracer la courbe (C_F) de F et la courbe (C_h) de la fonction h définie par :

$h(x) = \frac{1}{x}$ sur un r.o.n $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

b- Justifier graphiquement que l'équation : $F(x) = \frac{1}{x}$ admet dans IR une unique solution α.

c- En déduire que α est l'unique solution de l'équation : $3x^3 + x - 1 = 0$.

d- Montrer que $\alpha \in \left]0,1\right[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

II- Soit g la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1} - 1 - x^3}{x^2} \\ g(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout réel x : $g(x) = \dfrac{3}{1+\sqrt{3x^2+1}} - x$.

2) Montrer que g est continue en zéro.

3)a- Montrer que g est décroissante sur IR_+.

b- En déduire que g est bornée sur $\left[0,1\right]$.

c- L'équation $g(x) = 3$ admet-elle une solution dans $\left[0,1\right]$? Justifier votre réponse.

9 Exercice d'un devoir de contrôle n°1

A Soit f la fonction définie sur $\left[-3,3\right]$ par : $f(x) = x\sqrt{3-|x|}$.

1) Etudier la parité de f.

2)a- Montrer que pour tout $x \in \left[-3,3\right]$: $(f(x))^2 - 4 = -(|x|-2)^2(|x|+1)$.

b- En déduire que pour tout $x \in \left[-3,3\right]$: $-2 \leq f(x) \leq 2$.

c- Déterminer alors l'image de l'intervalle $\left[-3,3\right]$ par f.

B Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.

1) Calculer $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$.

2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans IR.

3) Soit α la solution de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $]0,1[$, donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

$\boxed{C}$ Soit h la fonction définie sur IR par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 8x + 15}{6 - x - x^2} & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{x\sqrt{3 - |x|} - 2}{x - 2} & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ x^3 - x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1) Montrer que h est continue en -3.

2)a- En utilisant $\boxed{A}$ /2/a, montrer que pour tout $x \in [0,2[$: $h(x) = \dfrac{(2-x)(x+1)}{f(x)+2}$

b- Etudier alors la continuité de h en 2.

CORRIGES

1

1) $f(x)=3x^6-5x^3+1$, $x_0=-1$

La fonction f , étant une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est, en particulier, continue en $x_0=-1$ d'où $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=f(-1)=9$.

2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+5}$, $x_0=2$

La fonction f est rationnelle donc continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$ en particulier en $x_0=2$ d'où $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)=\dfrac{3}{7}$.

3) $f(x)=\sqrt{3x^2+5x+7}$, $x_0=\dfrac{1}{2}$

Signe de $3x^2+5x+7$: $\Delta=25-84<0$ donc pour tout réel x , $3x^2+5x+7>0$

La fonction $u: x\mapsto 3x^2+5x+7$, étant polynôme, est continue sur $\mathbb{R}$ et puisque $3x^2+5x+7>0$ pour tout réel x alors f : $x\mapsto\sqrt{3x^2+5x+7}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier f est continue en $x_0=\dfrac{1}{2}$. D'où

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f(\frac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

4) $f(x)=\sqrt{-2x+1}+\dfrac{4}{x+3}$; $x_0=-10$ .f est définie sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\setminus\{-3\}$.

- La fonction $x\mapsto -2x+1$ est continue et positive sur $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ (fonction polynôme)donc la fonction $x\mapsto\sqrt{-2x+1}$ est continue sur $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$

d'où en -10

- La fonction $x\mapsto\dfrac{4}{x+3}$ est rationnelle et définie en $x_0=-10$ donc elle est continue en tout point de cet ensemble en particulier en $x_0=-10$

d'où f est continue en -10 et par suite

$\lim\limits_{x\to-10} f(x)=f(-10)=\sqrt{21}-\dfrac{4}{7}$.

5) $f(x)=(x-4)^4+\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x+4}$, $x_0=1$.

f est la somme d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle donc f est continue sur son contenant 1 et par suite $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=81+\dfrac{2}{3}=\dfrac{245}{3}$

2

1) $f(x)=\left|\dfrac{1-2x}{x^2-3}\right|$ et $x_0=-1$

$x \mapsto \dfrac{1-2x}{x^2-3}$ est rationnelle et définie en -1 donc continue en -1 d'où f est continue en -1 et par suite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)=\dfrac{3}{2}$.

2) $f(x)=\dfrac{|x^2+x|+2}{|x|+3}$, $x_0=0$

- La fonction $x \mapsto x^2+x$, étant polynôme, est continue en tout réel donc la fonction $\mapsto |\ ^2 + |\ 2$ est continue sur IR
- La fonction $x \mapsto |x|+3$ est continue et ne s'annule pas sur IR

donc f est continue sur IR et par suite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=\dfrac{2}{3}$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{|x|-25}$, $x_0=9$

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}+1$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc continue en 9,
- La fonction $x \mapsto |x|-25$ est continue et ne s'annule pas en 9 donc f est continue en 9 et par suite $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=f(9)=-\dfrac{1}{4}$.

3

1 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2x^2+6x}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{2x(x+3)}=\dfrac{x-3}{2x}$

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par $g(x)=\dfrac{x-3}{2x}$, g est rationnelle et définie en (-3) donc g est continue en (-3) et de plus $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in]-\infty,0[\setminus\{-3\}$ donc $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=g(-3)=1$.

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$. La fonction f est définie sur $[0,+\infty[\setminus\{2\}$.

Pour tout $[0,+\infty[\setminus\{2\}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$.

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$.

La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}+\sqrt{2}$ est continue et ne s'annule pas en 2 et donc g est continue en 2 ; de plus $g(x)=f(x)$ pour tout $x\neq 2$ donc

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=g(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+125}{x+5}}$.

Pour tout $x \neq -5$, on a : $\dfrac{x^3+125}{x+5}=\dfrac{(x+5)(x^2-5x+25)}{x+5}=x^2-5x+25$

la fonction $x \mapsto x^2-5x+25$ .est continue et positive en tout réel donc la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{x^2 5x+25}$ est continue en -5 d'où $\lim\limits_{x\to(-5)} f(x)=g(-5)=5$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$. La fonction f est définie sur $\left[\frac{-5}{2},+\infty\right[\setminus\{2\}$.

Pour tout $\left[\frac{-5}{2},+\infty\right[\setminus\{2\}$,

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}=\frac{2x+5-9}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}=\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$

$f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3}$ .On pose $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3}$

La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+5}+3$ est continue et ne s'annule pas sur $\left[\frac{-5}{2},+\infty\right[$ donc g est continue en 2 et par conséquent $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=g(3)=\dfrac{1}{3}$.

5) $f(x)=\dfrac{\frac{x+1}{x-4}+4}{x-3}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3,4\}$.

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{3,4\}$,

$$f(x)=\frac{\frac{x+1}{x-4}+4}{x-3}=\frac{x+1+4(x-4)}{(x-4)(x-3)}=\frac{5x-15}{(x-4)(x-3)}=\frac{5}{x-4}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par $g(x)=\dfrac{5}{x-4}$.

La fonction g est rationnelle donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ et $[0,4[\ \subset \mathbb{R}\setminus\{4\}$

La fonction g est donc continue en 3 et de plus $g(x)=f(x)$ pour tout $[0,4[\setminus\{3\}$ donc $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=g(3)=-5$.

6) $f(x)=\left|\dfrac{(x+1)^3-1}{x}\right|$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^*$,

$$f(x)=\left|\frac{(x+1)^3-1}{x}\right|=\left|\frac{x^3+3x^2+3x+1-1}{x}\right|=\left|\frac{x(x^2+3x+3)}{x}\right|=\left|x^2+3x+3\right|$$

Soit $h(x)=\left|x^2+3x+3\right|$.

La fonction h est continue en tout réel d'où h est continue en 0. De plus $f(x)=h(x)$ pour tout $x\neq 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=h(3)=3$.

4 Pour tout $x \neq 4$ et $x \neq -4$, on a :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16x + 48}{x^2 - 16} = \frac{x(x^2 - 16) - 3(x^2 - 16)}{x^2 - 16} = \frac{(x-3)(x^2-16)}{x^2-16} = x - 3$$

1) La fonction g_1 définie sur $]0,+\infty[$ par $g_1(x) = x - 3$ est affine donc continue en tout réel d'où g_1 est continue en 4.

Aussi pour tout $x \in]0,+\infty[\setminus \{4\}$ on a $g_1(x) = f(x)$ donc $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = g_1(4) = 1$.

La fonction f est continue en 4 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4) = a$.

Ainsi : pour $a = 1$, f continue en 4.

2) La fonction g_2 définie sur $]-\infty,0[$ par $g_2(x) = x - 3$ est affine donc continue en tout réel de $]-\infty,0[$ d'où g_2 est continue en -4.

Aussi pour tout $x \in]-\infty,0[\setminus \{-4\}$ on a $g_2(x) = f(x)$ donc $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = g(-4) = -7$.

La fonction f est continue en -4 si et seulement si $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = f(-4) = b$ c'est à

Ainsi : pour $b = -7$, f est continue en -4.

5 $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1) Pour tout $x < 2$ on a : $f(x) = \dfrac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,2]$ par $g(x) = x^2 + 2x + 4$.

g est une fonction polynôme donc continue sur $]-\infty,2]$ d'où g est continue à gauche en 2.

Pour tout $x \in]-\infty,2[$, $g(x) = f(x)$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = g(2) = 12$.

2) Pour tout $x > 2$ on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \frac{x - 2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1}$$

Soit h la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1} + 1}$.

la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1} + 1$ est continue et ne s'annule pas sur $[2,+\infty[$, donc la fonction h est continue sur $[2,+\infty[$ et en particulier h est continue à droite en 2 et pour tout $x \in]2,+\infty[$, $h(x) = f(x)$ donc

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = h(2) = \frac{1}{\sqrt{2-1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 2.

4) Puisque f n'admet pas de limite en 2 donc f n'est pas prolongeable par continuité en 2.

6 ***Rappel :***
Pour tout x réel, il existe un entier relatif unique n tel que $n \leq x < n+1$
La partie entière de x est $E(x) = n$.

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour toute valeur x d'un intervalle $[n, n+1[$ on a $E(x) = n$ et
Il en résulte que pour tout réel x de $[n, n+1[$, $f(x) = n \cdot x$.
La fonction f est une fonction polynôme (linéaire) sur tout intervalle $[n, n+1[$ donc f est continue sur tout intervalle $[n, n+1[$ (avec $n \in \mathbb{Z}$)
c'est à dire f est continue sur chaque intervalle $]n, n+1[$ et continue à droite pour $x_0 = n$.
La fonction $x \mapsto n \cdot x$ étant continue sur IR donc $\lim\limits_{x\to(n+1)^-} n \cdot x = n(n+1)$ et par suite $\lim\limits_{x\to(n+1)^-} f(x) = n(n+1)$.
D'autre part, dans $[n+1, n+2[$ on a $f(x) = (n+1) \cdot x$.
$\lim\limits_{x\to(n+1)^+} f(x) = f(n+1) = (n+1)^2$
or $n(n+1) = (n+1)^2 \Leftrightarrow (n+1)(n-n-1) = 0 \Leftrightarrow n = -1$
donc $\lim\limits_{x\to(n+1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(n+1)^+} f(x)$ si et seulement si $n = -1$ et en remplaçant n par -1 on trouve $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ c'est à dire f est continue en 0.
Conclusion :
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f est continue sur tout intervalle $]n, n+1[$ c'est à dire f est continue pour toute valeur <u>réelle non entière</u>.
- f est continue <u>en 0</u>.
- f est continue <u>à droite</u> pour les valeurs entières non nulles de x.

2) $g(x) = \dfrac{4}{E(x)}$
La fonction g est définie pour les valeurs de x telles que $E(x) \neq 0$ donc l'ensemble de définition de f est $D =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$
Pour toute valeur x d'un intervalle $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}^*$, on a $E(x) = n$ et par suite $f(x) = \dfrac{4}{n}$ donc f est constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$ et par conséquent continue pour toute valeur de l'intervalle $]n, n+1[$ et continue à droite pour $x_0 = n$.

On a aussi $\lim\limits_{x\to(n+1)^-} f(x)=\frac{4}{n}$ (fonction constante sur $[n,n+1[$).

D'autre part dans $[n+1,n+2[$ on a $f(x)=\frac{4}{n+1}$ (constante donc continue)

d'où $\lim\limits_{x\to(n+1)^+} f(x)=\frac{4}{n+1}$.

Pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, on a $\frac{4}{n}\neq\frac{4}{n+1}$ donc, les limites à gauche et à droite en $x_0=n+1$ étant différentes, f n'est pas continue en $x_0=n+1$.

Conclusion :

- f est continue sur tout intervalle $]n,n+1[$ où $n\in\mathbb{Z}^*$.
- f est continue à droite pour les valeurs entières non nulles de x.

7 1) Pour tout

$x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ on a $f(x)=\frac{(x-2)(x^2-2x-3)}{(x-2)|x+1|}=\frac{x^2-2x-3}{|x+1|}$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x-3}{|x+1|}=-1=f(2)$ donc f est continue en 2

2)

$x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ on a $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{|x+1|}=\frac{(x+1)(x-3)}{|x+1|}$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x-3)=-4$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}-(x-3)=4$

Donc f n'admet pas de limite en -1.

3) Pour $x\in]-1;0[$ on a $-x\in]0;1[$ donc $E(-x)=0$ d'ou $g(x)=-f(x)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}-f(x)=4$

Pour $x\in]-2;-1[$ on a $-x\in]1;2[$ donc $E(-x)=1$ d'ou $g(x)=8-f(x)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(8-f(x))=4$ donc $\lim\limits_{x\to-1} g(x)=4$

8

I) 1) a- Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $f(x)=\frac{(x-1)(3x^2+1)}{x-1}=3x^2+1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(3x^2+1)=4\in\mathbb{R}$

Donc f est prolongeable par continuité en 1. On note ce prolongement F.

b-

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=f(x)=3x^2+1 \text{ si } x\neq 1 \\ F(1)=4 \end{array}\right\} \text{donc } F(x)=3x^2+1 \text{ pour tout réel } x$$

2) a-

b- La courbe de h coupe la courbe de F en un seul point donc l'équation $F(x)=\frac{1}{x}$ admet une seule solution α dans IR.

c- $F(x)=\frac{1}{x}$ éq à $3x^2+1=\frac{1}{x}$ éq à $3x^3+x-1=0$ donc α est la seule solution de l'équation $3x^3+x-1=0$

d- On pose $S(x)=3x^3+x-1$

On a S est continue sur $[0,1]$; S(0)=-1 ; S(1)=1

S(0) x S(1) < 0 donc $\alpha\in]0,1[$

S(0.5)=-0.125 et S(0.6)=0.248 donc $0.5<\alpha<0.6$

II) 1) Pour tout $x\in IR^*$ on a $g(x)=\frac{3x^2+1-1}{x^2\left(\sqrt{3x^2+1}+1\right)}-x=\frac{3}{\sqrt{3x^2+1}+1}-x$

2) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3x^2+1}+1}-x=\frac{3}{2}=g(0)$ donc g est continue en 0

3) a-

a et b $\in IR_+$ tel que a < b. On a $3a^2+1<3b^2+1$ donc

$1+\sqrt{3a^2+1}<1+\sqrt{3b^2+1}$ d'où $g(a)>g(b)$

Donc g est décroissante sur IR_+

b-

$0 \le x \le 1$ et g est décroissante donc $g(1) \le g(x) \le g(0)$

d'où $0 \le g(x) \le \frac{3}{2}$ donc g est bornée sur $[0,1]$

c) Pour tout $x \in [0,1]$ on a $0 \le g(x) \le \frac{3}{2}$ donc l'équation g(x)=0 n'admet pas des solutions dans $[0,1]$.

9

$\boxed{A}$ 1) Pour tout $x \in D_f = [-3,3]$ on a $-x \in D_f$

et $f(-x) = -x\sqrt{3-x} = -f(x)$ d'où f est impaire.

2) a)

Pour tout $x \in [-3,3]$; $(f(x))^2 - 4 = x^2(3-|x|) - 4 = -|x|^3 + 3|x|^2 - 4$

$= -(|x|+1)(|x|-2)^2$

b)

Pout tout $x \in [-3,3]$ on a $(f(x))^2 - 4 \le 0$ donc $f(x)^2 \le 4$ d'où $-2 \le f(x) \le 2$

c) $x \mapsto 3-|x|$ est continue et positive sur $[-3,3]$ donc $x \mapsto \sqrt{3-|x|}$ est continue sur $[-3,3]$ d'où f est continue sur $[-3,3]$ et par suite $f([-3,3]) = [m,M]$ où m=minf et M=maxf.

Or pout tout $x \in [-3,3]$ on a $-2 \le f(x) \le 2$ et f(2)=2 et f(-2)=-2 donc $f([-3,3]) = [-2,2]$.

$\boxed{B}$ 1) g(-2)=-7 , g(0)=1 , g(1)=-1 et g(2)=1

2) g est continue sur $[-2,0]$ / g(-2)xg(0) < 0 donc l'équation g(x)=0 admet au moins une solution dans $[-2,0]$.

De même l'équation g(x)=0 admet au moins une solution dans chacun des intervalles $[0,1]$ et $[1,2]$ or g est un polynôme de degré 3 donc l'équation g(x)=0 admet dans IR exactement 3 solutions.

3) g est continue sur $[0,1]$ tel que g(0.4)=0.104 et g(0.5)=-0.125 donc $0.5 < \alpha < 0.6$.

$\boxed{C}$ 1) $\lim\limits_{x \to (-3)^+} f(x) = \frac{2}{5} = f(-3)$ et $\lim\limits_{x \to (-3)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-3)^-} \frac{x+5}{2-x} = \frac{2}{5} = f(-3)$ donc f est continue en -3.

2) a- $x \in [0,2[$ on a $h(x) = \frac{f(x)-2}{x-2}$

or $\left(f(x)\right)^2 - 4 = -(x-2)^2(x+1)$

donc $h(x) = \dfrac{(2-x)(x+1)}{f(x)+2}$

b- $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(2-x)(x+1)}{f(x)+2} = 0 \neq h(2)$

$\lim\limits_{x \to 2+} h(x) = 1 = h(2)$

donc h est continue à droite en 2 n'est pas continue à gauche en 2.

Chapitre 4

Limites et comportements asymptotiques

1. Limites infinies en un réel

⇨ ***Définition***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.

- On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = +\infty$.

  On note $\lim\limits_{a} f = +\infty$.

- On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ en a si, $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = -\infty$.

  On note $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

⇨ ***Théorème***

Pour tout réel a et pour tout entier naturel n non nul, on a :

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{(x-a)^{2n}} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^{2n-1}} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^{2n-1}} = +\infty$

2. Opérations sur les limites

Les résultats suivants concernent les limites en un réel, ou en l'infini, de la somme, du produit et du quotient et de la valeur absolue.

lim f	lim g	lim(f + g)
ℓ	ℓ	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

lim f	lim g	lim(f × g)
ℓ	ℓ	$\ell \times \ell'$
$+\infty$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$\ell' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' < 0$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(\frac{f}{g})$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$+\infty$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$\ell' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' < 0$	$+\infty$
ℓ	$+\infty$	0
ℓ	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0	∞ (règle de signes)

$\lim f$	$\lim \lvert f \rvert$
ℓ	$\lvert \ell \rvert$
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$

3. Limites d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle

⇨ ***Théorème***

- La limite d'une fonction polynôme, quand la variable tend vers l'infini, est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle quand la variable tend vers l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

7. Limites de $\sqrt{f}$

⇨ ***Théorème***

- Soit f une fonction positive, a un réel et ℓ un réel.
  Si $\lim\limits_{x \to a} f = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$
- Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle voisinage de $+\infty$ et ℓ un réel. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$
- Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle voisinage de $-\infty$ et ℓ un réel. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$.

4. Asymptotes

Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Rechercher les limites de f définie sur un intervalle I et représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal conduit à déterminer la (ou les) asymptote(s) Δ à $\mathscr{C}$ dans les cas suivants :

⇨ ***Asymptote verticale***

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I .

Si $(\lim\limits_{a^+} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = -\infty)$

alors la droite $\Delta : x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

La courbe aura l'une des formes suivantes :

Remarque : Si f n'est pas définie en a, pour que la droite d'équation $x = a$ soit asymptote verticale il faut que la limite de f en a soit infinie.

⇨ ***Asymptote horizontale***

- f est une fonction définie sur un intervalle voisinage de $+\infty$
  Si $\lim\limits_{+\infty} f = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
  La courbe aura l'une des 2 formes suivantes :

- f est une fonction définie sur un intervalle voisinage de $-\infty$
  Si $\lim\limits_{-\infty} f = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
  La courbe aura l'une des 2 formes suivantes :

⇨ ***Asymptote oblique***

- f est définie sur un intervalle de type $[a,+\infty[$ (voisinage de $+\infty$)
  Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\alpha x+\beta)]=0$ on dit que la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

- f est définie sur un intervalle de type $]-\infty,a]$ (voisinage de $-\infty$)
  Lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\alpha x+\beta)]=0$ on dit que la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

Remarque :

- ***Courbes asymptotes***
  $\mathscr{C}_f$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, ce qui signifie que, lorsque x devient de plus en plus grand, les courbes représentatives de f et g sont de plus en plus proches.

$\mathscr{C}_f$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0$, ce qui signifie que, lorsque x devient de plus en plus petit (en valeur absolue de plus en plus grand), les courbes représentatives de f et g sont de plus en plus proches.

- On remarque qu'il n'est pas indispensable qu'une asymptote soit une droite, et qu'il n'est pas interdit qu'une asymptote coupe la courbe à condition que ceci se passe à distance finie, comme l'indique la figure ci-dessous.

EXERCICES

1

1) $f(x)=\frac{x}{2}-3\sqrt{x}$ .Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) $g(x)=\frac{x-2\sqrt{x}}{3x-1}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

3) $h(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

   a) Déterminer le domaine de définition de h

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to1} h(x)$

4) $k(x)=\sqrt{x^2+4}-x+2$

   Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

5) Soit $j(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}+x$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} j(x)$

6) $\ell(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x-2}$. Calculer $\lim\limits_{x\to-1} \ell(x)$

2

Dans la figure ci-dessous $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_5$ sont les représentations graphiques de cinq fonctions f_1 , f_2 , f_3 , f_4 et f_5 respectivement.

Par lecture graphique, donner pour chacune de ces fonctions : le domaine de définition, les limites aux bornes du domaine de définition et la nature et une équation de chacune des asymptotes.

3 Soit $f(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$
2) En déduire l'existence d'une asymptote oblique pour la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.
   Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à cette asymptote.
3) La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une autre asymptote ? Si oui la préciser.

4

La fonction f est définie par $f(x)=\sqrt{x^2+6x+8}$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) a) Donner le domaine de définition de f.
   b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+(x+3))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+3))$.
   En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes obliques au voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.
3) a) Montrer que pour tout réel x : $x^2+6x+8<(x+3)^2$
   b) En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à ses asymptotes.

5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Ecrire $4x^2-4x+3$ sous forme canonique.
3) Etudier la limite en $-\infty$ puis en $+\infty$ de la fonction h donnée par
   $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$
   En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes obliques au voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.
4) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de chacune de ces asymptotes.

6

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 4}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x}$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

3) Montrer que la droite $\Delta : y = -2x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

7 Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x - \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1-a- Déterminer le domaine de définition de f.

b- Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

2-a- Montrer que f est majorée par 1 et minorée par (-1) sur $]-\infty\ ; 1]$.

b- Montrer que $f(]-\infty\ ; 1]) = [-1, 1]$.

3- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$

4- Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

8

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ x\sqrt{x^2 + x + 1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est continue sur IR.

3) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4)a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b- En déduire que la droite $\Delta : y = 2x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

9

I/ Soit la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{x}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et Interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une solution α appartenant à $[6, 8]$.

II/ Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{-2x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$

1) Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction g.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$. Conclure.

4)a- Montrer que pour tout $x \in D_g$, on a : $g(x) = -2x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$

b- Montrer que la droite $\Delta : y = -2x + 1$ est une asymptote à la courbe (ζ) de g.

III/ Soit la fonction h définie sur IR par $\begin{cases} h(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \\ h(x) = -2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ h(1) = -1 \end{cases}$

1- Etudier la continuité de h sur IR.

2- Soit F la fonction définie par $F(x) = |x-1|h(x)$

a- Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} F(x)$, conclure.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{F(x)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{F(x)}{x-1}$, conclure.

c- Déterminer graphiquement $h\left(\left]-\infty,-2\right]\right)$.

CORRIGES

1

1) $f(x)=\frac{x}{2}-3\sqrt{x}$, $D_f=[0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\frac{\sqrt{x}}{}-3)=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\frac{\sqrt{x}}{2}-3=+\infty$)

2) $g(x)=\frac{-\sqrt{\ }}{3x-1}$, $D_g=[0,+\infty[\setminus\left\{-\right\}$

Pour tout $x\in]\frac{1}{3},+\infty[$, $g(x)=\frac{x-2\sqrt{x}}{3x-1}=\frac{x(1-\frac{2}{\sqrt{x}})}{x(3-\frac{1}{x})}=\frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{3-\frac{1}{x}}$

On a $\underset{x\to+\infty}{\ }\frac{2}{\sqrt{x}}=\ \Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{2}{\sqrt{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}3-\frac{1}{}=3$

On obtient donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-$.

3) $h(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{-}$, $_h=[-\ \ +\infty[\ \ \{\ \}$

Pour tout $x\in D_h$, $h(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$$=\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

- $\underset{x\to+\infty}{\ }=\underset{x\to+\infty}{\ }\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=$
- $\lim\limits_{x\to1}h(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{}$.

4) $k(x)=\sqrt{x^2+4}-x+2$, $_k=\ \ .$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+4=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-x+2=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}k(x)=+\infty$$

Pour tout $x>0$ on a $\sqrt{\ ^2+\ }+\ >$

$$k(x)=\sqrt{x^2+4}-x+2=2+(\sqrt{x^2+4}-x)=2+\frac{\sqrt{\ ^2+\ }-\ \sqrt{\ ^2+\ }+}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$$=2+\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}=2+\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$ on a $k(x) = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}\right) = 2$$

5) $j(x) = \sqrt{2x^2-5x+3}+x$, $D_j =]-\infty,1]\cup[\frac{3}{2},+\infty[$

Pour tout $x \in]-\infty,0[$

$$j(x) = \sqrt{2x^2-5x+3}+x = \sqrt{x^2(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2})}+x = \sqrt{x^2}\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+x$$

$$= |x|\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+x = -x\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+x \quad (\text{car } |x| = -x \text{ lorsque } x<0)$$

$$= -x\left(\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} j(x) = \lim_{x\to-\infty} -x\left(\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right) = +\infty$$

6) $\ell(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2-x-2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$, $\ell(x) = \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x}{x-2}$

donc $\lim\limits_{x\to-1} \ell(x) = \dfrac{1}{3}$.

2

1) • La courbe $\mathscr{C}$ ne coupe pas la droite $\Delta : x = 3$ donc f_1 n'est pas définie en 3.

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} {}_1$ =

• $\lim\limits_{x\to3^+} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^-} f_1(x) = +\infty$

• Asymptote horizontale : $\Delta : y = 4$ en $+\infty$

Asymptote verticale : Δ = .

2) • La courbe $\mathscr{C}_2$ ne coupe pas la droite $\Delta : x = -1$ donc n'est pas définie en -1.

De plus f_2 n'est pas définie sur $]-\infty -[$

Donc $D_{f_2} =]-1,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f_2(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$

• Asymptote verticale : Δ = –

3) • f_3 n'est pas définie en 1 et en 0. $D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f_3(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f_3(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f_3(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f_3(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f_3(x) = -1$
- Asymptote horizontale: la droite des abscisses« $y = 0$ »

  Asymptote verticale: la droite des ordonnées « $x = 0$

Attention : le réel 1 n'appartient pas à D_f mais la droite d'équation $x = 1$ ***n'est pas asymptote*** puisque $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ est finie ainsi que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

4) • Le tracé de f_4 est continu sur $\mathbb{R}$ donc $D_{f_4} = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = 0$
- Asymptote horizontale : la droite des abscisses « $y = 0$ »

5) • Le tracé de f_5 présente une rupture au niveau de $x = 0$ donc $D_{f_5} = \mathbb{R}^*$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_5(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
- Asymptote verticale : la droite des ordonnées « $x = 0$ ».

3

1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2} \Leftrightarrow$

$$\frac{x^2+3x+4}{x+2} = \frac{ax(x+2)+b(x+2)+c}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+3x+4}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2} \Leftrightarrow$$

par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ 2a+b = 3 \\ 2b+c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3-2 = 1 \\ c = 4-2 = 2 \end{cases}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$: $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x+2}$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x} = 0$

Donc la droite $D : y = x+1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Position de $\mathscr{C}$ par rapport à D :

Il faut étudier le signe de $f(x)-(x+1) = \frac{\quad}{x+2}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$\frac{2}{x+2}$	$-$	‖	$+$
Position de $\mathscr{C}$ par rapport à D	$\mathscr{C}$ est au dessous de D	‖	$\mathscr{C}$ est au dessus de D

3) $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où f_1 et f_2 deux fonctions polynômes donc continues en 2 et par suite $\lim\limits_{x\to(-2)} f_1(x) = f_1(-2) = 2$ et $\lim\limits_{x\to(-2)} f_2(x) = f_2(-2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x^2+4x+3) = 2\\ \lim\limits_{x\to(-2)^+}(x+2) = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x^2+4x+3) = 2\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-}(x+2) = 0^-\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \mathscr{C} \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = -2$$

4

1) a) $D_f =]-\infty,-4]\cup[-2,+\infty[$

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
x^2+6x+8		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+6x+8) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+6x+8} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+6x+8) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x+8} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) • Calcul de $\underset{x\to-\infty}{\quad}$ $+ \quad +$

On a : pour tout $x \in]-\infty,-4]$, $\sqrt{\ ^2 + \quad + \quad - \quad + \quad >}$

donc $\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3) \neq 0$.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+(x+3)) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3))$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3))(\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3))}{\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+6x+8-x^2-6x-9}{\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)}$$

or $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x+8}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ d'où

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+(x+3))=0$ donc $\underset{x\to-\infty}{\quad - \quad - \quad - \quad = \quad}$ la droite $D: y=-x-3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

- Calcul de $\underset{x\to+\infty}{\quad - \quad + \quad :}$

Pour tout $x\in[-2,+\infty[$, $\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)\neq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+3)) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3))$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3))(\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3))}{\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+8-x^2-6x-9}{\sqrt{x^2+6x+8}-(x+3)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+6x+8}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+3))=0$ donc la droite $D': y=x+3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) $x^2+6x+8=(x+3)^2-9+8=(x+3)^2-1<(x+3)^2$

Pour tout réel x, $x^2+6x+8<(x+3)^2$.

b) Pour tout réel x, $x^2+6x+8<(x+3)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+6x+8}<\sqrt{(x+3)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+6x+8}<|x+3|$

Donc pour tout réel x, $f(x)<|x+3|$

Si $x\in[-2,+\infty[$, $f(x)<x+3$ alors $\mathscr{C}$ est au dessous de l'asymptote D'.

Si $x\in]-\infty,-4]$, $f(x)<-x-3$ alors $\mathscr{C}$ est au dessous de l'asymptote D.

5

1) a) $D_f = \mathbb{R}$ car $4x^2 - 4x + 3 > 0$ $(\Delta' = 4 - 12 = -8 < 0$ et $a = 4 > 0)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty}(4x^2 - 4x + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt{4x^2 - 4x + 3} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty}(4x^2 - 4x + 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{4x^2 - 4x + 3} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) $4x^2 - 4x + 3 = (2x-1)^2 - 1 + 3 = (2x-1)^2 + 2$.

3) $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$

$$\lim_{x \to -\infty}\sqrt{4x^2 - 4x + 3} - \sqrt{(2x-1)^2} = \lim_{x \to -\infty}\sqrt{(2x-1)^2 + 2} - \sqrt{(2x-1)^2}$$
$$= \lim_{x \to -\infty}\frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$

or $\lim\limits_{x \to -\infty}(2x-1)^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{(2x-1)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{(2x-1)^2 + 2} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2} = +\infty$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{2}{\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2}} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty}\sqrt{4x^2 - 4x + 3} - \sqrt{(2x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty}\frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$

or $\lim\limits_{x \to +\infty}(2x-1)^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt{(2x-1)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt{(2x-1)^2 + 2} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2} = +\infty$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{2}{\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \sqrt{(2x-1)^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - |2x-1| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x-1) = 0$

  Donc la droite $D_1 : y = 2x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \sqrt{(2x-1)^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - |2x-1| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-2x+1) = 0$

  Donc la droite $D_2 : y = -2x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

4) Pour tout réel x, $f(x) - \sqrt{(2x-1)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2}} > 0$

D'où pour tout réel x, $f(x) > \sqrt{(2x-1)^2}$ donc $f(x) > |2x-1|$

- Si $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f(x) > 2x - 1$ et si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ on a $\underbrace{f(x)}_{>0} > \underbrace{2x-1}_{<0}$

  Donc pour tout réel x, $f(x) > 2x - 1$ d'où $\mathscr{C}$ est au dessus de D_1.

- $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $|2x-1| = -2x+1$ d'où $f(x) > -2x+1$ et d'autre part si $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ alors $\underbrace{f(x)}_{>0} > \underbrace{-2x+1}_{<0}$ d'où pour tout réel x $f(x) > -2x+1$ donc $\mathscr{C}$ est au dessus de D_2.

Conclusion : La courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de ses asymptotes.

6 $f(x) = -x + \sqrt{x^2-4}$, $D_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2-4) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2) a) Pour tout $x \in [2, +\infty[$, $\sqrt{x^2-4} + x \neq 0$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} - x = \frac{(\sqrt{x^2-4} - x)(\sqrt{x^2-4} + x)}{\sqrt{x^2-4} + x} = \frac{-4}{\sqrt{x^2-4} + x}$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4} + x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-4) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-4} + x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4} + x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Interprétation graphique :
La droite des abscisses « $y = 0$ » est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

3) $$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2-4} + x\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2-4} + x\right]\left[\sqrt{x^2-4} - x\right]}{\sqrt{x^2-4} - x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4} - x} = 0 \text{ car } \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2-4} - x) = +\infty$$

D'où la droite $D : y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

7 1)a-

Pour tout $x \leq 1$ on a $x^2 + 1 \neq 0$ et pour tout $x > 1$ ona $x^2 - x > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$

b- $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 1]$

$x \mapsto x^2 - x$ est continue et strictement positive sur $]1, +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x^2-x}$ est continue et ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$ d'où f est continue sur $]1, +\infty[$, or $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x - \dfrac{(x+1)\sqrt{x^2-x}}{x}\right) = 1 = f(1)$ donc f est continue à droite en 1 d'où est continue sur $\mathbb{R}$.

2)a- $f(x)-1=-\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\leq 0$ donc $f(x)\leq 1$ et $f(x)+1=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$ donc $f(x)\geq -1$

Donc f est majorée par 1 et minorée par -1 sur $]-\infty,1]$

b- f est continue sur $]-\infty,$]et pour tout x de $]-\infty,1]$ on a $-1\leq f(x)\leq 1$

Comme f(-1)=-1 et f(1)=1 donc $f(]-\infty,1])=[-1,1]$.

3) f est continue sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$ $f\left(\frac{3}{2}\right)\simeq 0.056$ et $f(2)\simeq -0.121$

$f\left(\frac{3}{2}\right)\text{x}\, f(2)<0$ donc l'équation f(x)=0 admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2},2\right]$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x^2}\right)}=-\frac{1}{2}$$

8

1) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=1=f(0)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0+} x+\sqrt{x^2+x+1}=1=f(0)$ donc f est continue en 0.

2) $x\mapsto\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$ est continue sur $]-\infty,0]$ et $x\mapsto x^2+x+1$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ donc $x\mapsto x+\sqrt{x^2+x+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ or f est continue en 0 donc f est continue sur IR

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

4) a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b-

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}-\frac{1}{2}\right)=0$$

donc $\Delta; y=2x+\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

9

I) 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=0$ donc la droite y=0 est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

2) Pour $x\geq 0$ on a $\sqrt{3+x}+\sqrt{x}\geq\sqrt{3}$ donc $0\leq f(x)\leq\sqrt{3}$

3) f est continue sur $[6,8]$, $f(6)\approx 0,55$ et $f(8)\approx 0,48$. $f(8)<0,5<f(6)$ donc l'équation f(x)=0,5 admet au moins une solution dans $[6,8]$

II) 1) $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$

2) $\lim_{x\to 1} g(x)=-\frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2-x+2}{x+1}=2$

$\lim_{x\to(-1)^-} g(x)=-\infty$; $\lim_{x\to(-1)^+} g(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x=-1est une asymptote verticale à la courbe de f.

III) 1) $x\mapsto\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ est continue sur $]1,+\infty[$; $x\mapsto -2x+1$ est continue sur $]-\infty,1[$

$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}(-2x+1)=-1=h(1)$ et $\lim_{x\to 1^+} h(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=1\neq h(1)$

donc h est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.

2) a- $\lim_{x\to 1^+} F(x)=\lim_{x\to 1^-} F(x)=0$ donc $\lim_{x\to 1} F(x)=0$

b- $\lim_{x\to 1^+}\frac{F(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+} h(x)=1$ et $\lim_{x\to 1^-}\frac{F(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-h(x)=1$ donc $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{x-1}=1$

c- $h(]-\infty,-2])=[5,+\infty[$

Chapitre 5

Nombre Dérivé

Dérivabilité d'une fonction en un point

⇨ ***Définition***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

On dit que f est dérivable en x_0, si et seulement si, **il existe un nombre réel** ℓ tel que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \ .$$

Le réel ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en x_0 et il est noté $f'(x_0)$.

⇨ ***Autre écriture :*** En posant $x - x_0 = h$

f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell \ (\ell \in \mathbb{R})$.

Tangente à une courbe

⇨ ***Théorème :*** Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

f est dérivable en x_0 si et seulement si la courbe $\mathscr{C}$ de f admet au point $A(x_0, f(x_0))$ une tangente Δ de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Cette tangente est d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Un vecteur directeur de cette tangente $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$.

Remarque : *Si* $f'(x_0) = 0$ *alors la tangente à* $\mathscr{C}$ *au point d'abscisse* x_0 *est parallèle à* $(O, \vec{i})$.

Construction de la tangente :

$f'(x_0) < 0$ $\qquad$ $f'(x_0) > 0$ $\qquad$ $f'(x_0) = 0$

⇨ ***Tangente parallèle à l'axe des ordonnées :***

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 et la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0 est parallèle à $(O, \vec{j})$ a pour équation $x = x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ est infinie}$$

Nombre dérivé de fonctions usuelles

⇨ ***Théorème***

Fonction f	f est dérivable en a où	f'(a)
$f : x \mapsto \beta$ (constante)	$a \in \mathbb{R}$	0
$f : x \mapsto \alpha x + \beta$	$a \in \mathbb{R}$	α
$f : x \mapsto (x-\alpha)^2 + \beta$	$a \in \mathbb{R}$	$2(a-\alpha)$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{\alpha x + \beta}$	$a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\beta}{\alpha}\right\}$	$f'(a) = \dfrac{-\alpha}{(a\alpha+\beta)^2}$
$f : x \mapsto \sqrt{x+\alpha}$	$a \in]-\alpha, +\infty[$	$f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a+\alpha}}$
$f : x \mapsto \dfrac{\alpha x + \beta}{\lambda x + \gamma}$	$a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\gamma}{\lambda}\right\}$	$f'(a) = \dfrac{\alpha\gamma - \lambda\beta}{(\lambda a + \gamma)^2}$

Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en a

⇨ Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. α et β deux réels.

- Si f et g sont dérivables en a alors $f+g$, fg, $\alpha f + \beta g$ sont dérivables en a et on a :
  $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
  $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$

- Soit k un entier naturel strictement supérieur à 1.
  Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f^k est dérivable en a et on a : $(f^k)'(a) = kf'(a)f^{k-1}(a)$

- Si a est un réel et f est une fonction polynôme définie par :
  $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_kx^k$ alors f est dérivable en a et on a
  $f'(a) = b_1 + 2b_2a + \cdots + kb_ka^{k-1}$.

⇨ Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si g ne s'annule pas en a alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en a et on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

⇨ Si f est dérivable en a et $f(a) > 0$ alors $\sqrt{f}$ est dérivable en a $\left(\sqrt{f}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}$

Nombre dérivé à droite – Nombre dérivé à gauche

⇨ ***Définition***

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b;a]$
  On dit que f est dérivable à gauche en a, si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^-.
  Cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à gauche en a.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,b[$.
  On dit que f est dérivable à droite en a, si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^+.
  Cette limite est alors notée $f'_d(a)$.

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
La fonction f est dérivable en a, si et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche et $f'_g(a) = f'_d(a)$. On a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Demi tangentes à une courbe

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- f est dérivable à droite en a, si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi tangente déterminée par :

$$T^+ \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

Un vecteur directeur de cette demi tangente est $\vec{u}_d\begin{pmatrix}1\\ f'_d(a)\end{pmatrix}$

- f est dérivable à gauche en a, si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi tangente déterminée par :

$$T^- : \begin{cases} y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

Un vecteur directeur de cette demi tangente est $\vec{u}_d\begin{pmatrix}-1\\ -f'_g(a)\end{pmatrix}$.

Remarque :

Si T^+ et T^- sont sécantes alors f n'est pas dérivables en a.

Si T^+ et T^- sont portées par la même droite alors f est dérivable en a.

Approximation affine d'une fonction

⇨ ***Définition***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

Si f est dérivable en x_0, alors le réel $f(x_0)+f'(x_0)h$ est une approximation affine de $f(x_0+h)$ et on écrit $f(x_0+h) \simeq f(x_0)+f'(x_0)h$, pour h voisin de zéro.

Dérivabilité et continuité

⇨ ***Théorème***

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

☞ ***Remarque :*** La réciproque n'est pas toujours vraie : c'est-à-dire si f n'est pas dérivable en x_0 alors elle peut être continue en x_0 comme elle peut ne pas l'être. Mais si f n'est pas continue en x_0 alors elle n'est pas dérivable en x_0.

f est continue mais n'est pas dérivable en a.

EXERCICES

1 Etudier la dérivabilité de chacune des fonctions suivantes au point d'abscisse x_0 et donner l'équation de la tangente ou demi-tangente à $\mathscr{C}$ en ce point, $\mathscr{C}$ est la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) $f(x)=x^3-x^2+2x+1 \qquad x_0=1$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+3} \qquad x_0=0$

3) $f(x)=\sqrt{x^2-2x} \qquad x_0=3\ ;\ x_0=2$

4) $f(x)=x^2+2|x| \qquad x_0=0$

2 Soit h un réel proche de zéro. Montrer que :

a) $(1+h)^2 \simeq 1+2h$ b) $(1+h)^3 \simeq 1+3h$

c) $(1+h)^n \simeq 1+nh \quad (n\geq 2)$ d) $\sqrt{1+h} \simeq 1+\dfrac{1}{2}h$ e) $\dfrac{1}{1+h} \simeq 1-h$

3 Soit $f : x \mapsto x^2$

1) Montrer que f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et calculer $f'(x_0)$.

2) Soient A, B et M_0 trois points de la courbe $\mathscr{C}$ de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'abscisses respectives a, b et x_0 (A et B distincts).

   a) Trouver une relation entre a, b et x_0 pour que la tangente à $\mathscr{C}$ au point M_0 soit parallèle à la droite (AB).

   b) En déduire une construction géométrique de la tangente à $\mathscr{C}$.

4 Soit $f : x \mapsto ax+\dfrac{b}{x+1}$, $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, montrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0)=a-\dfrac{b}{(x_0+1)^2}$

2) Déterminer a et b pour que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0=1$ soit la droite D d'équation $3x-4y+3=0$

3) On pose $a=b=1$ $\left(f(x)=x+\dfrac{1}{x+1} \text{ et } f'(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$

   Soient M et N deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-2-\alpha$.

   Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points M et N sont parallèles.

5 Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2+x-6 & \text{si } x\leq 2 \\ \sqrt{x^2-4}+x-2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

$\mathscr{C}$ désigne la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 2.
2) Etudier la dérivabilité de f en 2.
3) Déterminer le point M_0 d'abscisse $x_0 < 2$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est horizontale.
4) a) Soit $x_0 > 2$, Montrer que f est dérivable en x_0 et calculer $f'(x_0)$.
   b) Déterminer le point N_0 d'abscisse x_0 $(x_0 > 2)$ de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)x - 2$

6 Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que pour tout x_0 réel, f est dérivable en x_0 et calculer $f'(x_0)$.
2) Déterminer les réels a, b et c pour que $\mathscr{C}_f$ passe par A(0,1) et B(1,4) et admette en A une tangente de coefficient directeur 1.
3) On pose $f(x) = 2x^2 + x + 1$.
   Déterminer le point de $\mathscr{C}_f$ où la tangente Δ est perpendiculaire à la droite d'équation $x - 7y + 7 = 0$ et donner une équation de Δ.

7 La courbe (C) ci-contre est celle d'une fonction définie sur IR.

- L'axe $(O, \vec{i})$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(-\infty)$.
- L'axe $(O, \vec{j})$ est une asymptote à (C).
- D: $y = 2x + 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(+\infty)$.
- La droite T est tangente à (C) au point d'abscisse (-1)

Par une lecture graphique :

1) Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)}$.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x - 2$

3) Déterminer : $f'(-2)$, $f_d'(-4)$ et $\lim\limits_{x \to -4^-} \frac{f(x) + 2}{x + 4}$.

4)a) Donner une approximation affine de $f(-0{,}99999)$.

b) Soit g la fonction définie sur $]-4, 0[$ par : $g(x) = x^2 f(x)$.

Calculer $g'(-1)$.

8 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (ζ)

et (ζ') les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies

par : $f(x) = x + 5 + \dfrac{4}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x + 3$

1)a) Montrer que f est dérivable en tout élément a de IR \ $\{1\}$ et calculer $f'(a)$.

b) Déterminer les points de (ζ) où la tangente est parallèle à la droite des abscisses.

c) Déterminer les points de (ζ) où la tangente est perpendiculaire à la droite Δ d'équation $4x + 3y - 3 = 0$

2)a) Montrer que la droite Δ' d'équation $y = 2x + 3$ est une asymptote oblique à

(ζ') au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position de (ζ') par rapport à Δ'.

3) Soit h la fonction définie sur IR

$$\text{par} : \begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ h(x) = x^3 - 2x + 1 & \text{si } x \in [0, 2[\qquad (m \in IR) \\ h(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x + m & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (ζ'') sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier la continuité de h en 0.

b) Etudier la dérivabilité de h en 0 et interpréter géométriquement le résultat.

c) Déterminer m pour que h soit continue en 2.

4) On prend pour la suite m 3.

a) Etudier la dérivabilité de h en 2 et interpréter géométriquement les 1résultats.

b) Montrer que h est dérivable en tout réel a de $]2, +\infty[$ et calculer $h'(a)$

c) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe (ζ'') au point d'abscisse $2\sqrt{2}$.

CORRIGES

1

1) $f(x)=x^3-x^2+2x+1$, $D_f=\mathbb{R}$, $x_0=1$, $f(1)=3$.
f est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel a et
$f'(a)=3a^2-2a+2$. Il en résulte que f est dérivable en 1 et $f'(1)=3$.
Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0=1$.
$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$, donc $(T): y=3x$.

2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+3}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $x_0=0\in D_f$, $f(0)=-\dfrac{2}{3}$.

Pour tout $x\in D_f$, $f(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$ où $f_1(x)=x^2+x-2$ et $f_2(x)=x+3$.

Les fonctions f et f sont deux fonctions polynômes donc dérivables en tout réel a et on a : $f_1'(a)=2a+1$ et $f_2'(a)=1\neq 0$ donc f est dérivable en tout réel a appartenant à D et $f'(a)=\dfrac{f_1'(a)f_2(a)-f_1(a)f_2'(a)}{(f_2(a))^2}$ d'où $f'(0)=\dfrac{5}{9}$

Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $_0=$

$(T): y=f'(0)\cdot x+f(0)$, donc $(T): y=\dfrac{5}{9}x-\dfrac{2}{3}$.

3) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$, $D_f=]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$,

- $x_0=3$ et $f(3)=\sqrt{3}$.

La fonction $u: x\mapsto x^2-2x$, étant polynôme, est dérivable en $x_0=3$ et $u'(3)=2\times 3-2=4$ et $u(3)=3>0$ donc $f=\sqrt{u}$ est dérivable en 3 et

$$f'(3)=\frac{u'(3)}{2\sqrt{u(3)}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{}$$

Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0=3$.

$(T): y=f'(3)(x-3)+f(3)$ donc $(T): y=\dfrac{2\sqrt{3}}{}x-\sqrt{3}$.

- $x_0=2$ et $f(2)=0$.

Pour tout $x\in D_f\setminus\{2\}$ on a: $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$

La fonction $u: x\mapsto x^2-2x$, étant polynôme, est continue sur et pour tout réel de $[2,+\infty[$ on a $x^2-2x\geq 0$ donc $v: x\mapsto\sqrt{x^2-2x}$ est continue sur $[2,+\infty[$

et par suite v est continue à droite en 2 et $\lim\limits_{x\to 2^+} v(x) = v(2) = 0^+$ d'où

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}} = +\infty$.

f n'est pas dérivable à droite en 2.

Dans un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}_f$, représentation graphique de f, admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2.

4) $f(x) = x^2 + 2|x|$, $_f =$, $_0 =$, $=$.

- Expressions de f(x) sans "| |" : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

  Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{}$

  f est dérivable en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ est un réel.

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi(x) = \dfrac{x^2+2x}{x} = x+2$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = 2$ .d'ou f est donc dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 2$.

- Pour tout $x \in]-\infty,0[$, $\varphi(x) = \dfrac{x^2-2x}{} = x-2$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x) = -2$ d'ou f est donc dérivable à gauche en 0 et $_g' \quad = -$.

  On a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

  $\mathscr{C}$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

$$T_d : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = f'_d(0)\cdot x + f(0) \end{cases} \Rightarrow T_d : \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$T_g : \begin{cases} x \leq 0 \\ y = f'_g(0)\cdot x + f(0) \end{cases} \Rightarrow T_g : \begin{cases} \leq \\ = - \end{cases}$$

2 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I

Approximation affine : $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$ où h est voisin de 0.

a) On considère la fonction f $x \mapsto x$.

f est dérivable pour tout réel x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$.

On pose $a = 1$, $f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1)$ donc $(1+h)^2 \simeq 1+2h$.

b) On considère la fonction f $x \mapsto x$.

f est dérivable pour tout réel x_0 et $f'(x_0) = 3{x_0}^2$.

On pose $a = 1$, $f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1)$ où $\quad = \quad$ donc $(1+h)^n \simeq 1+3h$.

c) On considère la fonction f $x \mapsto x$. $(n \geq 2)$

f est dérivable pour tout réel $_0$ et $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

On pose $a = 1$, $f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1)$ où = donc $(1+h)^n \simeq 1 + nh$.

d) On considère la fonction f $x \mapsto \sqrt{x}$.

f est dérivable pour tout réel strictement positif x et $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

On pose $a = 1$, $f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1)$ où $f'(1) = -$ donc $\sqrt{1+h} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}h$.

e) On considère la fonction f $x \mapsto -$ $(x \neq 0)$.

f est dérivable pour tout réel $x_0 \neq 0$ et $f'(x_0) = -\dfrac{}{x_0}$.

On pose $a = 1$, $f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1)$ où $= -$ donc $\dfrac{1}{1+h} \simeq 1 - h$.

3

1) $f(x) = x^2$, soit $x_0 \in \mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable en $_0$ et $f'(x_0) = 2x_0$.

2) a) $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ car A et B appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$ de f.

Donc $A(a, a^2)$ et $B(b, b^2)$.

Le coefficient directeur de la droite est :

$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$ (on a $\neq$ car sont distincts).

M_0 d'abscisse $_0$ donc le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_0 est $f'(x_0)$.

D'où $(T)//(AB) \Leftrightarrow f'(x_0) = b + a \Leftrightarrow 2x_0 = b + a \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{b+a}{2}$.

b) Soit $M_0(x_0, f(x_0)) \in \mathscr{C}$.

- On construit deux points A et B de $\mathscr{C}$ d'abscisses $a = x_0 - \alpha$, $b = x_0 + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Donc $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{x_0 - \alpha + x_0 + \alpha}{2} = x_0$.
- On construit (T) tangente à $\mathscr{C}$ en d'abscisse $_0$: c'est la droite parallèle à (AB) passant par M_0.

4 $f(x) = ax + \frac{b}{+}$.

1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

La fonction $u : x \mapsto ax$ est dérivable en tout réel $_0$ et $_0 = .$

La fonction $v : x \mapsto \frac{b}{+}$ est dérivable $x_0 \neq -1$ et $v'(x_0) = \frac{-b}{_0 + \ ^2}$

Donc $f = u + v$ est dérivable en $x_0 \neq -1$ et $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$.

$f'(x_0) = a - \frac{b}{(x_0+1)^2}$.

2) $D : 3x - 4y + 3 = 0$ donc $D : y = -x + -$.

D tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $_0 =$ donc $D : y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$D : y = f'(1)x + f(1) - f'(1)$ et $y = \frac{}{4}x + \frac{}{4}$.

$$\begin{cases} f'(1) = \frac{3}{4} \\ f(1) - f'(1) = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{b}{4} = \frac{3}{4} \\ a + \frac{b}{2} - a + \frac{b}{4} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} + \frac{b}{4} \\ \frac{3}{4}b = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.

3) T_M tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $M(\alpha, f(\alpha))$ de coefficient directeur $f'(\alpha)$.

T_N tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $N(-2-\alpha, f(-2-\alpha))$ de coefficient $f'(-2-\alpha)$.

$f'(-2-\alpha) = 1 - \frac{1}{(-2-\alpha+1)^2} = 1 - \frac{1}{(-1-\alpha)^2} = 1 - \frac{1}{(\alpha+1)^2} = f'(\alpha)$.

Donc $T_M // T_N$.

5 $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} + x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

1) $f(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$.

La restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 2]$ est une fonction polynôme donc continue sur cet intervalle d'où f est continue à gauche en .

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x^2 - 4} + x - 2 = 0 = f(2)$, donc f est continue à droite en 2.

f est continue à gauche et à droite en 2 donc f est continue en 2.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, on pose $\varphi(x) = \frac{-}{x-2}$

- Dérivabilité de f à gauche en 2 :

Pour tout $\in]-\infty\ [$, $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{x^2 + x - 6}{x-2} = x + 3$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \varphi(x) = 5$. f est donc dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = 5$.

- Dérivabilité de f à droite en 2 : Pour tout $x \in]2, +\infty[$

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}+x-2}{x-2} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} + 1 = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} + 1$$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \varphi(x) = +\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite en 2.

Conclusion : f n'est pas dérivable en 2.

3) Pour tout < , $f(x) = x^2 + x - 6$.

f est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel d'où pour tout réel x , $f'(x_0) = 2x_0 + 1$.

La tangente à $\mathscr{C}$ en $M_0(x_0, f(x_0))$ est horizontale si et seulement si

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = --$.

4) a) Pour tout $x > 2$, $f(x) = \sqrt{x^2-4} + x - 2$.

Les fonctions $u : x \mapsto x^2 - 4$ et $v : x \mapsto x - 2$ sont polynômes donc dérivables en tout réel x_0 et $u'(x_0) = 2x_0$ et $_0 =$ et pour tout $_0 >$

on a $_0 >$ donc $f = \sqrt{u} + v$ est dérivable en tout $x_0 > 2$ et

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}} + v'(x_0) = \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2-4}} + 1 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-4}} + 1.$$

b) (T) est tangente à $\mathscr{C}$ au point $_0$ d'abscisse x_0 de coefficient directeur $f'(x_0)$. $D : y = (\frac{2}{\sqrt{3}} + 1)x - 2$ de coefficient directeur $\frac{2}{\sqrt{3}} + 1$.

$$(T) // D \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \Leftrightarrow \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-4}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{x_0^2-4} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 = 4x_0^2 - 16 \quad \Leftrightarrow x_0^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 4 \text{ ou } x_0 = -4 \quad (\text{à rejeter car } x_0 > 2)$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 4$$

d'où $N_0(4, f(4))$ c'est-à-dire $N_0(4, 2+2\sqrt{3})$.

6

1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

2) $\mathscr{C}_f$ passe par $A(0,1) \Rightarrow f(0) = 1$

$\mathscr{C}_f$ passe par $B(1,4) \Rightarrow f(1) = 4$

$\mathscr{C}_f$ admet une tangente en A de coefficient directeur 1 $\Rightarrow$ $f'(0)=1$

On a donc $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=4 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=4 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

Donc $f(x)=2x^2+x+1$.

3) $f(x)=2x^2+x+1$; $f'(x_0)=4x_0+1$.

$D: x-7y+7=0 \Rightarrow D: y=\frac{1}{7}x+1$

Δ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 \Rightarrow f'(x_0)$ est le coefficient directeur de Δ.

$\Delta \perp D \Leftrightarrow f'(x_0)\times\frac{1}{7}=-1 \Leftrightarrow 4x_0+1=-7$

$\Leftrightarrow x_0=-2$

$\Delta: y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

$\Delta: y=-7x-7$.

Rappel : Soient $D: y=mx+p$ et $D': y=m'x+p'$.

$D \perp D' \Leftrightarrow mm'=-1$

$D // D' \Leftrightarrow m=m'$.

7

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)}=-\infty$ car : sur $]-\infty,-4]$ la courbe (C) est au dessous de l'axe des abscisses et par suite $f(x)<0$ au voisinage de $-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x-2=0$ car : la droite $D: y=2x+2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

3) $f'(-2)=0$, $f_d'(-4)=4$

$\lim\limits_{x\to-4^-} \frac{f(x)+2}{x+4} = \lim\limits_{x\to-4^-} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4}=-\infty$

4)a) $f(-0,99999)=f(-1+0,00001)\approx f(-1)+0,00001\times f'(-1)$

On a d'prés le graphique :

$f(-1)=1$

$f'(-1)=-2$ c'est le coefficient directeur de la tangente T

d'ou $f(-0,99999)\approx 0,99998$

b) Sur $]-4,0[$: $g'(-1)=2(-1)f(-1)+(-1)^2f'(-1)=-4$

8

1)a) $u : x \mapsto x+5$ est une fonction affine donc dérivable en tout réel a et $u'(a)=1$

$v : x \mapsto \dfrac{4}{x-1}$ est une fonction rationnelle définie en tout réel a de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

donc dérivable en tout réel a de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $v'(a) = -\dfrac{4}{(a-1)^2}$

D'ou $f = u+v$ est dérivable en tout réel a de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $f'(a) = u'(a)+v'(a)$

$= 1 - \dfrac{4}{(a-1)^2}$

b) Soit T une tangente à (ζ) au point d'abscisse a de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

T parallèle à l'axe des abscisses ssi $f'(a)=0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{4}{(a-1)^2}=0$

$\Leftrightarrow a=3$ ou $a=-1$

Donc la courbe (ζ) admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses : 3 et -1

c) Soit T une tangente à (ζ) au point d'abscisse a de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, donc de coefficient directeur $f'(a)$.

$\Delta : 4x+3y-3=0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{4}{3}x+1$ donc de coefficient directeur $-\dfrac{4}{3}$

$T \perp \Delta \Leftrightarrow f'(a)\times\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow a=5$ ou $a=-3$

Donc la courbe (ζ) admet deux tangentes perpendiculaires à la droite Δ aux points d'abscisses 5 et -3

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(2x+3)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}-x = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0$

Donc la droite Δ' est une asymptote à la courbe (ζ') au voisinage de $+\infty$

b) g est définie sur $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$:

Sur $]-\infty,-2]$: $g(x)-(2x+3) = \sqrt{x^2-4}-x > 0$ donc (ζ') est au dessus de Δ'

Sur $[2,+\infty[$: $g(x)-(2x+3) = \dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} < 0$ donc (ζ') est au dessous de Δ'

3)a) On a $h(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0) = 1 = \lim\limits_{x\to0^+} h(x) = h(0)$

Donc h est continue en 0.

b) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f_g'(0) = f'(0) = -3$ car f est dérivable en 0

D'ou h est dérivable à gauche en 0 et $h'_g(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^2-2=-2$$

Donc h est dérivable à droite en 0 et $h'_d(0)=-2$

On a $h'_g(0)\neq h'_d(0)$ donc h n'est pas dérivable en 0

D'ou $(\zeta")$ admet deux demi-tangentes sécantes au point d'abscisse 0

(un point anguleux)

c) On a h est continue à droite en 2 et $h(2)=m+2$.

h est continue en 2 ssi h est continue à gauche en 2

ssi $\lim_{x\to 2^-}h(x)=h(2)$

ssi $\lim_{x\to 2^-}x^3-2x+1=m+2$

ssi $m+2=5$

ssi $m=3$

4)a) Soit w $x\mapsto x^3-2x+1$ c'est une fonction polynôme donc dérivable en tout réel a et $w'(a)=3a^2-2$ donc $w'(2)=10$

$\lim_{x\to 2^-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{w(x)-w(2)}{x-2}=w'(2)=10$, donc h est dérivable à gauche en 2 et $h'_g(2)=10$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}+x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}+1$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}+1==\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}+1=+\infty$$

Donc h n'est pas dérivable à droite en 2

$(\zeta")$ admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse 2 de coefficient directeur $h'_g(2)=10$

$(\zeta")$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite au point d'abscisse 2

b) les fonctions $\begin{matrix} x\mapsto x^2-4 \\ x\mapsto x+3\end{matrix}$ sont des fonctions polynômes donc dérivables en tout réel a et pour tout réel a de $]2,+\infty[$ on $a^2-4>0$

D'ou h est dérivable en tout réel a de $]2,+\infty[$ et $h'(a)=\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}+1$

c) $2\sqrt{2}\in]2,+\infty[$ donc $h(2\sqrt{2})=\sqrt{8-4}+2\sqrt{2}+3=2\sqrt{2}+5$

$$h'(2\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8-4}}+1=\sqrt{2}+1$$

Soit T la tangente à $(\zeta")$ au point d'abscisse $2\sqrt{2}$

Donc T a pour équation : $y=h'(2\sqrt{2})\left(x-2\sqrt{2}\right)+h(2\sqrt{2})=(\sqrt{2}+1)x+1$

Fonction Dérivée

1. Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à tout réel x, appartenant à I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.

2. Opérations sur les fonctions dérivées

⇨ Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, α et β deux réels.

- Les fonctions $f+g$, fg, $\alpha f+\beta g$ sont dérivables sur I et on a :
  $(f+g)'=f'+g'$; $(fg)'=f'g+g'f$; $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$.
- Pour tout entier naturel $k \geq 2$, la fonction f^k est dérivable sur I et on a $(f^k)'=kf'f^{k-1}$.
  En particulier toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

⇨ Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que g ne s'annule pas sur I.

- Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2} \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

- Pour tout entier naturel $k \geq 1$, la fonction $\frac{1}{g^k}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{g^k}\right)'=\frac{-kg'}{g^{k+1}}$$

3. Dérivée de la fonction $\sqrt{f}$

Théorème

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{f})'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

4. Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soient a et b deux réels.
Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable en tout réel x tel que $ax+b$ appartient à I. De plus la fonction g' est définie par $g'(x)=af'(ax+b)$.

5. Sens de variation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est constante sur I, si et seulement si, pour tout x a $\in$ I, $f'(x) = 0$
- La fonction f est croissante sur I, si et seulement si, pour tout $x \in$ I, $f'(x) \geq 0$.
- La fonction f est décroissante sur I, si et seulement si, pour tout $x \in$ I, $f'(x) \leq 0$

6. Extrema

Extremum local : Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- On dit que f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout $x \in J$; $f(x) \leq f(x_0)$
- On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle J contenant x_0 et inclus dans I tel que pour tout $x \in J$; $f(x) \geq f(x_0)$

Lorsque f admet un minimum ou un maximum local en x_0 on dit que f admet un extremum local en x_0.

Exemple

x	$-\infty$		-1		1		2		3		4	
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	4	↘		↘	-1	↗		$+\infty$

- les extrema sont représentés par des sommets

→ sur $]-1,2[$, pour tout $x \in]-1,2[$; $f(x) \leq f(1)$ donc f admet un maximum local en 1 qui est égal à $f(1) = 4$

→ Sur $]2,4[$: pour tout $x \in]2,4[$; $f(x) \geq f(3)$ donc f admet un minimum local en 3 qui est égal à $f(3) = -1$.

Extremum absolu

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in$ I

- On dit que f admet un maximum absolu en x_0 ssi pour tout $x \in$ I, $f(x) \leq f(x_0)$

- On dit que f admet un minimum absolu en x_0 ssi pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$

⇨ ***Exemple :***

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	4

On a f définie sur $]-\infty,0]$ pour tout $x \in]-\infty,0], f(x) \geq f(-2)$ donc f admet un minimum absolu en -2 qui est égal à $f(-2) = 1$

Le minimum absolu représenté par un

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

On a pour tout $x \in D_f = \mathbf{R}$, $f(x) \leq f(1)$ donc f admet un maximum absolu en 1 qui est égal à $f(1) = -1$

Le maximum absolu est représenté par un

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle et $x_0 \in I$

- Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extremum local en x_0.

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

$(\alpha > 0)$

EXERCICES

Déterminer les i

6

Soit f une fonction dont la représentation graphiquement donnée par la figure ci – contre :

1) Interpréter graphiquement la dérivabilité de f aux points d'abscisses 0, -3 et 4
2) Dresser le tableau de variation de f
3) f admet – t – elle un extremum en 4 ?
4) Préciser alors les extremums de f

7

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	–	‖	–			-3	–	0	+	
f(x)	1	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↘	0	↘	-2	↗	-1

1) Donner les ensembles de définition de f et de f'.
2) Quelles sont les limites aux bornes de la fonction f ? Donner les équations des asymptotes à la courbe représentative de f.
3) Ecrire les équations des tangentes à la courbe représentant f que le tableau de variation permet de connaître.
4) Quel est le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$? Donner pour chaque racine un encadrement par deux entiers consécutifs.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

8 Le graphique donné ci-dessous est celui de Γ courbe représentative d'une fonction définie sur $[0,4]$ et de ses tangentes aux points d'abscisses 1 et $\frac{3}{2}$.

1) Lire graphiquement f(1), f'(1) et $f'(\frac{3}{2})$.
2) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
3) Parmi les trois courbes données ci-dessous laquelle est la représentation graphique de f'.

9 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et calculer $f'(x)$
2) a) Dresser le tableau de variations de f.

   b) En déduire les solutions du système : $\begin{cases} f(x) < 1 \\ f(x) > -3 \end{cases}$

3) Soit $g : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{|x-1|}$

   a) Dresser le tableau de variations de g

   b) En déduire que pour tout $x, y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$: si $x < y$ alors $g(\cos x) > g(\cos y)$.

10 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit le point A(1,8) et α un réel différent de 0 et de 8.

Soit D_α la droite passant par A et de coefficient directeur α.

1) Vérifier que D_α a pour équation $y = \alpha x + 8 - \alpha$.
2) On désigne par M et N les points d'intersection de D_α respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   a) Déterminer les coordonnées des points M et N en fonction de α.

   b) Montrer que $MN^2 = (\alpha-8)^2(\frac{1}{\alpha^2}+1)$ en fonction de α.

   c) Déterminer α pour que la distance MN soit minimale.

11 Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = x^3 + 3x - 2$.

1-a- Dresser le tableau de variation de g.

b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une solution unique α et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

c- En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2- Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = ax - \dfrac{x+b}{x^2+1}$; a et b sont deux réels.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a- Déterminer a et b pour que (C) passe par A(0,1) et admette en ce point une tangente horizontale.

b- Pour les valeurs de a et b trouvées, montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.

c- Dresser le tableau de variations de f.

d- Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{3(1-\alpha)}{\alpha^2+1}$.

10

I- Soit g la fonction définie sur $IR \setminus \{-1,1\}$ par : $g(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{1 - x^2}$

où a et b des réels.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'(x)		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
g(x)	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

1- Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in IR \setminus \{-1,1\}$.

2- En utilisant le tableau de variations de g.

Déterminer les réels a et b.

II- Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $h(x) = 1 - 4x^2\sqrt{2x}$.

1- Etudier la dérivabilité de h à droite en 0.

2- Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$h'(x) = -10x\sqrt{2x}$.

3- Dresser le tableau de variations de h.

4- Calculer $h\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire le signe de h(x).

III- Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{1-x^2} & \text{si } x \in]-\infty,0] \setminus \{-1\} \\ h^2(x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$$

1- Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

2- Dresser le tableau de variations de f.

CORRIGES

1

1) $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 6x$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2) $f : x \mapsto (3x+2)^2$.
On pose $u : x \mapsto 3x+2$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où $f = u^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2 \cdot u'(x) \cdot u(x) = 2 \times 3 \times (3x+2) = 6(3x+2)$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ c'est une fonction rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{(x^2-2x+2)'(x-1) - (x-1)'(x^2-2x+2}{(x-1)^2}$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

4) $f : x \mapsto \sqrt{2x-1}$; $D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
On pose $u(x) = 2x-1$ fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $u(x) > 0$. D'où $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
Pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

5) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 6}$, $D_f =]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$.
On pose
- $u(x) = x^2 - x - 6$ c'est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $u'(x) = 2x - 1$.
- pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$ on a $u(x) > 0$.

Donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$.
Pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-6}}$

6) $f : x \mapsto (x^2+x)\sqrt{x+1}$, $D_f = [-1,+\infty[$.

On pose • $\left.\begin{array}{l} u(x) = x^2+x \\ v(x) = x+1 \end{array}\right\}$ deux fonctions polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, $u'(x) = 2x+1$ et $v'(x) = 1$

• Pour tout $x \in]-1,+\infty[$ $v(x) > 0$ d'où $\sqrt{v}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $(\sqrt{v})' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$.

Donc $f = u \cdot \sqrt{v}$ dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$f'(x) = (u(x)\cdot\sqrt{v(x)})' = u'(x)\sqrt{v(x)} + u(x)(\sqrt{v(x)})' = u'(x)\cdot\sqrt{v(x)} + u(x)\cdot(\sqrt{v(x)})'$$
$$= (2x+1)\sqrt{x+1} + (x^2+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$
$$= \frac{5x^2+7x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

7) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $D_f = \mathbb{R}$ (car pour tout réel x, $x^2+x+1 > 0$)

On pose • $\left.\begin{array}{l} u(x) = x^2-1 \\ v(x) = x^2+x+1 \end{array}\right\}$ deux fonctions polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2x+1$

• Pour tout réel x, $v(x) > 0$ d'où $\sqrt{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc $f = \dfrac{u}{\sqrt{v}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot\sqrt{v(x)} - (\sqrt{v(x)})'\cdot u(x)}{(\sqrt{v(x)})^2}$$
$$= \frac{2x\sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}(x^2-1)}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{2x^3+3x^2+6x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)}$$

$$(\sqrt{v(x)})' = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

8) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(5-3x)^3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

La fonction $x \mapsto (5-3x)$ est affine donc dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où $x \mapsto (5-3x)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$, $5-3x \neq 0$ donc la fonction f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{(5-3x)^3}\right)' = \frac{-3(-3)}{(5-3x)^{3+1}} = \frac{9}{(5-3x)^4}$$

$$\left(\frac{1}{g^k}\right)' = \frac{-kg'}{g^{k+1}}$$

9) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+3)^2}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ et $f'(x) = \dfrac{-2(2)}{(2x+3)^{2+1}} = \dfrac{-4}{(2x+3)^3}$

10) $f : x \mapsto \dfrac{5-3x}{x+2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

f est rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition

$f(x) = \dfrac{-3x+5}{x+2}$ donc $f'(x) = \dfrac{-3\times 2 - 5\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{-11}{(x+2)^2}$

11) $f(x) = \left(\dfrac{5-3x}{x+2}\right)^2$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = \dfrac{5-3x}{x+2}$. On a : $(u^2)' = 2u'u$

$f'(x) = 2 \times \dfrac{-11}{(x+2)^2} \times \left(\dfrac{5-3x}{x+2}\right)$ d'où $f'(x) = \dfrac{-22(5-3x)}{(x+2)^3}$.

12) $f(x) = (2x+3)^2(3x-5)^3$, $D_f = \mathbb{R}$.

f est polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f = u^2v^3$ donc $f' = 2u'uv^3 + u^2(3v'v^2) = uv^2(2u'v + 3uv')$

$u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3$.

$f'(x) = (2x+3)(3x-5)^2[2\times 2(3x-5) + 3(2x+3)\times 3]$

$f'(x) = (2x+3)(3x-5)^2(30x+7)$.

2

$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2ax + b$.

On suppose que $\begin{cases} f'(x') = 0 \\ f'(x'') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax' + b = 0 \\ 2ax'' + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x' = x'' = -\dfrac{b}{2a}$

Or d'après les hypothèses x' et x'' sont deux racines distinctes de $f(x)$ donc $f'(x') \neq 0$ et $f'(x'') \neq 0$.

2) $\dfrac{x'}{f'(x')} + \dfrac{x''}{f'(x'')} = \dfrac{x'}{2ax'+b} + \dfrac{x''}{2ax''+b} = \dfrac{2ax'x'' + bx' + 2ax'x'' + bx''}{(2ax'+b)(2ax''+b)}$

$= \dfrac{4ax'x'' + b(x'+x'')}{4a^2x'x'' + 2ab(x'+x'') + b^2}$

$$= \frac{4a\cdot\frac{c}{a}+b(-\frac{b}{a})}{4a^2\cdot\frac{c}{a}+2ab(-\frac{b}{a})+b^2} \qquad \text{car} \begin{cases} x'x''=p=\frac{c}{a} \\ x'+x''=S=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

$$= \frac{4c-\frac{b^2}{a}}{4ac-b^2} = \frac{4ac-b^2}{a(4ac-b^2)}$$

$$= \frac{1}{a}$$

3

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2\sqrt{x}-1}{x-1} = ?$

on pose $f(x)=x^2\sqrt{x}$, $D_f=\mathbb{R}_+$, $f(1)=1$

- $u : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

  $v : x \mapsto x^2$ polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $v'(x)=2x$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $u(x)>0$.

$\Rightarrow$ $f=v\cdot u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^*\cap\mathbb{R}$.

$$f'(x)=v'(x)\cdot u(x)+u'(x)\cdot v(x)=2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x\sqrt{x}}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{5}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-4}$, on pose $f(x)=x-\sqrt{x}$, $D_f=\mathbb{R}_+$, $f(4)=2$.

$u : x\mapsto\sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v : x\mapsto x$ polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x)=1$.

Donc $f=v-u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=v'(x)-u'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

3) Calcul de $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{3}}{x^2-5x+6}=?$

On pose $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$, $D_f=]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$.

$g(x)=x^2-5x+6 \quad D_g=\mathbb{R}$

$D_f\cap D_g=]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$

$3\in D_f\cap D_g$; $f(3)=\sqrt{3}$ et $g(3)=0$.

- Soit $u(x)=x^2-2x$ polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2x-2$

pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ on a : $u(x) > 0$.

D'où $f = \sqrt{u}$ dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$; $f'(3) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

- $g(x) = x^2 - 5x + 6$ polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

  $g'(x) = 2x - 5$ et $g'(3) = 1$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{3}}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{3}}{x-3}}{\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}}{\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}} = \frac{f'(3)}{g'(3)} \text{ (car } g'(3) = 1 \neq 0)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

4) Calcul de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1} - 1}{\sqrt{x^2+3} - 2} = ?$

on pose $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$; $g(x) = \sqrt{x^2+3}$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$ et $x^2 + 3 > 0$

$f(0) = 1$ et $g(0) = 1$

- On pose $\left.\begin{array}{l} u(x) = x^2 - x + 1 \\ v(x) = x^2 + 3 \end{array}\right\}$ deux fonctions polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$

  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u'(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

  Donc $f = \sqrt{u}$ et $g = \sqrt{v}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$

$g'(x) = \dfrac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1} - 1}{\sqrt{x^2+3} - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2-x+1} - 1}{x-1}}{\dfrac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1}} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{f(x)-1}{x-1}}{\dfrac{g(x)-1}{x-1}} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = 1$$

4

$$f : x \mapsto \frac{x^2+ax-10}{x-2} \; ; \; a \in \mathbb{R}$$

1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+ax-10)'(x-2)-(x-2)'(x^2+ax-10)}{(x-2)^2} = \frac{(2x+a)(x-2)-x^2-ax+10}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+10-2a}{(x-2)^2}$$

2) f admet deux extremums si et seulement si $f'(x)$ s'annule deux fois et change de signe. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+10-2a=0$:
C'est une équation du second degré qui s'annule et change de signe deux fois si et seulement si $\Delta' = b'^2 - ac > 0$ signifie :

$$2^2-(10-2a)>0 \Leftrightarrow -6+2a>0 \Leftrightarrow \boxed{a>3}$$

3) $a=5 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2+5x-10}{x-2}$ et $f'(x) = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$

x	$-\infty$		0		2		4	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-7	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to2} x^2+5x-10 = 4 \text{ et } \lim_{x\to2} x-2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$$

car :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

5 $f : x \mapsto x^3-3x+2$

1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$
pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = 3x^2-3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0$

$\Leftrightarrow x^2=1$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$	-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$			+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	-0	+	4	+	0	+	$+\infty$

2) $f(-2)=(-2)^3-3\times(-2)+2=-8+6+2=0$
donc d'après le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	+	

3) $g : x \mapsto \frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x$: c'est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$
pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x)=x^3-3x^2+2=f(x)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$g'(x)=f(x)$		−	0	+	0	+	
$g(x)$	$+\infty$		-6				$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{4}x^4=+\infty$

$h(x)=g(-3x-8)$. On pose $u : x \mapsto -3x-8$, fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$

et on a : $h'(x)=-3g'(-3x-8)$ or $g'(x)$ s'annule en -2 et en 1.

$-3x-8=-2 \Leftrightarrow -3x=6 \Leftrightarrow x=-2$ d'où $g'(-3x-8)=0$ et par suite $h'(-2)=0$

$-3x-8=1 \Leftrightarrow -3x=9 \Leftrightarrow x=-3$ d'où pour $x=-3$, $g'(-3x-8)=0$ et par suite $h'(-3)=0$.

On a : $-3x-8 \geq -2 \Leftrightarrow x \leq -2$ donc pour tout $x \in]-\infty,-2]$ on a $-3x-8 \geq -2$ et par suite $g'(-3x-8) \geq 0$. Il en résulte que $h'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty,-2]$.

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
h'(x)		–	0	–	0	+	
h(x)	$+\infty$	↘		↘	6	↗	$+\infty$

6

1) • $\mathscr{C}$ admet aux points d'abscisses -3 et 4 deux tangentes horizontales donc f dérivable en -3 et en 4 et $f'(-3) = f'(4) = 0$

• $\mathscr{C}$ admet deux demi – tangentes sécantes au point d'abscisse 0 donc f n'est pas dérivable en zéro (c'est un point anguleux) .

→ $\mathscr{C}$ admet une demi tangente à droite au point O de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc f dérivable à droite à zéro et $f'_d(0) = \frac{1}{2}$

→ $\mathscr{C}$ admet une demi tangente à gauche en O de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$

donc f dérivable à gauche en zéro et $f'_g(0) = -2$ car $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\ -f'_g(0)\end{pmatrix}$

2)

x	$-\infty$		-3		0		2		4		$+\infty$
f'(x)		+	0	–	-2 ‖ $\frac{1}{2}$	+	‖	–	0	–	
f(x)	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$

3) $f'(x)$ s'annule en 4 mais ne change pas de signe donc f n'admet pas un extremum en 4.

4) f admet deux extremums
• Un maximum local en $x = -3$ égal à $f(-3) = 3$
• Un minimum local en $x = 0$ égal à $f(0) = 0$.

7

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−			-3	−	0	+	
f(x)	1	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↘	0	↘	-2	↗	-1

1) f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. f est dérivable est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite $x = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

3) • f est dérivable en -2 et $f'(-2) = 0$ donc au point A(-2,3) la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = 3$.

• f est dérivable en 1 et $f'(1) = -3$ donc au point B(1,0) la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente de coefficient directeur -3. $T_B : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ (et $f(1) = 0$)

donc $T_B : y = -3x + 3$

• $f'(2) = 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ au point C(2,-2) une tangente parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = -2$.

4) L'équation $f(x) = 0$ admet deux racines. L'une $\alpha \in [-2,-1[$ et l'autre $1 \in]-1,2]$

5) D'après les particularités de la fonction f déduites de son tableau de variation, on peut tracer l'allure de la courbe de f :

8 1) $f(1) = 1$,

(T) est la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse 1.

La tangente (T) a pour coefficient directeur $f'(1)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$

$f'(\frac{3}{2})=0$ car la courbe Γ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

2) $(T): y=1\cdot x+p$ où p est l'ordonnée à l'origine. On lit sur la figure l'ordonnée du point d'intersection de (T) avec l'axe des ordonnées.
D'où $(T): y=x$.

3) f est croissante sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ donc $f'(x)\geq 0$ pour tout $x\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$ d'où la courbe de f' est située au dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.
Les courbes ① et ③ ne conviennent pas.
f est décroissante sur $\left[\frac{3}{2},4\right]$ donc $f'(x)\leq 0$ pour tout $x\in\left[\frac{3}{2},4\right]$ d'où la courbe de f' est située au dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2},4\right]$.
$f'(\frac{3}{2})=0$ donc la courbe de f' coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.
La courbe ② convient.

Conclusion : la courbe ② est la représentation graphique de la fonction dérivée de f.

9 $f: x\mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

1) f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et

$$f'(x)=\frac{(x^2-3x+3)'(x-1)-(x^2-3x+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{(2x-3)(x-1)-x^2+3x-3}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

2) a) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$		0		1		2		
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to1} x-1 = 0 \text{ et } \lim_{x\to1}(x^2-3x+3) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$$

car :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

b) D'après le tableau de variations de f on a :

1 est un minimum local à l'intervalle $]1,+\infty[$ de $f(x)$

-3 est un maximum local à l'intervalle $]-\infty,1[$ de $f(x)$

donc pour tout $x \in]1,+\infty[; f(x) \geq 1$ et $x \in]-\infty,1[; f(x) \leq -3$

L' ensemble de solutions de $f(x) < 1$ est $S_1 =]-\infty,1[$

L'ensemble de solutions de $f(x) > -3$ est $S_2 =]1,+\infty[$

l'ensemble des solutions du systèmes $\begin{cases} f(x) < 1 \\ f(x) > -3 \end{cases}$ est $S = S_1 \cap S_2 = \varnothing$

3) a) $g : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{|x-1|}$ donc $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x > 1 \\ g(x) = -f(x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

en utilisant le tableau de variations de f

b) x et y de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ Si $x < y$ alors $\cos x > \cos y$

or $\cos x$ et $\cos y$ appartiennent à $[0,1[$ et

g est croissante sur $[0,1[$ donc

$\cos x > \cos y \Rightarrow g(\cos x) > g(\cos y)$

10

1) D_α et de coefficient directeur α donc $y = \alpha x + \beta$.

$A(1,8) \in D_\alpha$ donc $8 = \alpha + \beta$ ce qui donne $\beta = \alpha - 8$.

Par conséquent : $D_\alpha : y = \alpha x + \alpha - 8$.

2) a) $M(x,y) \in D_\alpha \cap (xx') \Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha x + \alpha - 8 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \alpha - 8 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8-\alpha}{\alpha} \\ y = 0 \end{cases}$

D'ou $M(\frac{8-\alpha}{\alpha}, 0)$

$N(x,y) \in D_\alpha \cap (yy') \Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha x + \alpha - 8 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha - 8 \\ x = 0 \end{cases}$

$N(0, \alpha - 8)$

b) $MN^2 = (0 - \frac{8-\alpha}{\alpha})^2 + (\alpha - 8 - 0)^2 = \left(\frac{\alpha - 8}{\alpha}\right)^2 + (\alpha - 8)^2 = (\alpha - 8)^2(\frac{1}{\alpha^2} + 1)$

c) On pose $f(\alpha) = (\alpha - 8)^2(\frac{1}{\alpha^2} + 1)$

Pour tout α de $\mathbb{R}^*$, $f'(\alpha) = 2(\alpha - 8)(\frac{1}{\alpha^2} + 1) + (\alpha - 8)^2(\frac{-2}{\alpha^3})$

$f'(\alpha) = (\alpha - 8)\left(\frac{2}{\alpha^2} + 2 - \frac{2}{\alpha^3}(\alpha - 8)\right)$

On a $\alpha \neq 8$ donc $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha^2} + 2 - \frac{2}{\alpha^3}(\alpha - 8) = 0$

$\Leftrightarrow 2\alpha + 2\alpha^3 - 2\alpha + 16 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 = -8$

$\Leftrightarrow \alpha = -2$

α	$-\infty$		-2		0		$8 + \infty$
$f'(\alpha)$		−	0	+	‖	−	‖ +
$f(\alpha)$		↘		↗	‖	↘	‖ ↗

Lorsque $\alpha = -2$ la distance MN est minimale

11

1) $(\ ) = \ ^2 + \ >$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g'(x)			+		
g(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

b- g est continue et strictement croissante sur IR g(IR)=IR donc l'équation g(x)=0 admet une seule solution α dans IR.

$(5) = -\ 5^{e}\ (\ ) = \ ^{1}$ donc g(0.5) x g(0.6)<0 d'où 0.5< α <0.6

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

2) a- A(0,1) $\in \xi$ f donc f(0)=1 d'où b=-1

$$f'(x) = a - \frac{x^2+1-2x(x+b)}{(x^2+1)^2}$$ f'(0)=0 donc a-1=0 donc a=1

b- $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$ f est dérivable sue IR et

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2+x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

c-

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

d) $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha^3 = 2-3\alpha$ et $f(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha-1}{\alpha^2+1} = \frac{\alpha^3+1}{\alpha^2+1} = \frac{3(1-\alpha)}{\alpha^2+1}$

12

I) 1) $g'(x) = \frac{(2x+a)(1-x^2)-2x(x^2+ax+b)}{(1-x^2)^2}$

2) g'(0)=0 donc a=0
g(0)=1 donc b=1

II) 1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} -4x\sqrt{2x} = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $h'_g(0) = 0$.

2) $x \mapsto \sqrt{2x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc h est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$h'(x) = -8x\sqrt{2x} - 4x^2\frac{2}{2\sqrt{2x}} = -8x\sqrt{2x} - \frac{4x^2}{\sqrt{2x}} = -8x\sqrt{2x} - 2x\sqrt{2x} = -10x\sqrt{2x}$$

3)

x	$-\infty$		$+\infty$
h'(x)	0	-	
h(x)	1	↘	$-\infty$

4) $\mathbf{h'}\left(\frac{1}{2}\right)=0$

x		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
h(x)	+	0	-	

III)

1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^2+1}{1-x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x}{1-x^2}=0=f'_g(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{h^2(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{h(x)-1}{x}(h(x)+1)=h'_d(0)x2=0=f'_d(0)$

Donc f est dérivable en 0 et f'(0)=0.

2) pour tout $x\in\,]0,+\infty[\;\; f'(x)=\alpha h(x)h'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1/2	$+\infty$
f'(x)	+	-		0 +	
f(x)	$-\infty$	$+\infty$		↗	$+\infty$

Exemples d'étude de fonctions

1. Eléments de symétries d'une courbe

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

⇨ *Axe de symétrie*

La droite $\Delta : x = a$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$, si et seulement si,
pour tout x appartenant à D, $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = f(x)$

⇨ *Centre de symétrie*

La droite $I(a, b)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$, si et seulement si,
pour tout x appartenant à D, $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = 2b - f(x)$

2. Branches paraboliques

⇨ **Fonction polynôme**

Théorème

Soit f un fonction polynôme de degré n, $n \geq 2$. Alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

On dit que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une **branche parabolique de direction** $(O, \vec{j})$, au voisinage de l'infini.

La courbe $\mathscr{C}$ aura l'une des 4 formes suivantes :

⇨ **Fonction $\sqrt{f}$**

Théorème

Soit f la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax + b}$, $a \neq 0$. Alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

On dit que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une **branche parabolique de direction** $(O, \vec{i})$ au voisinage de l'infini.

La courbe $\mathscr{C}$ aura l'une des 4 formes suivantes :

EXERCICES

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x$.

$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier f et tracer $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $x^4 + 4x^2 + k = 0$.
2) Soit $F(-2, -\frac{15}{4})$ et Δ la droite d'équation $y = -\frac{17}{4}$.
   a) Montrer que $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow MF = MH$ avec H le projeté orthogonal de M sur Δ.
   b) Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe $\mathscr{C}$ et H son projeté orthogonal sur la droite Δ.
   Montrer que la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en M est la médiatrice du segment [FH]
   c) En déduire un procédé pour construire la tangente à la parabole au point M.
3) Soit la fonction $g : x \mapsto (x+1)^2 - 2|x+1| - 3$.
   On désigne par $\mathscr{C}'$ sa représentation graphique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Montrer que la droite D d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}'$.
   b) Tracer $\mathscr{C}'$ en utilisant la courbe $\mathscr{C}$.
   c) Interpréter graphiquement la dérivabilité de g en -1.
   d) Dresser le tableau de variation de g en utilisant $\mathscr{C}'$.

2 Soient les fonctions $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ et $g : x \mapsto -x^2 - 4x + 2$.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives de f et g sur un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier f et g.
   b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tangentes au point d'abscisse 0.
   c) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2) Soit $h : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 - 4x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   a) Vérifier que h est dérivable en zéro.
   b) Tracer la courbe (Γ) de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   c) Montrer que $\Omega(0, 2)$ est un centre de symétrie de (Γ).
3) Soit D_a la droite d'équation $y = ax + 2$, $a \in \mathbb{R}$.
   Déterminer suivant a le nombre de points d'intersection de (Γ) et D_a.

3 Soit la fonction f définie, pour tout x réel, par : $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 2$

1) Etudier f et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) Montrer que $\omega(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ est un centre de symétrie $\mathscr{C}$.
3) Donner l'équation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$. Retrouver le résultat de la question 2.
4) Ecrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0. Déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ issues du point $A(2, -2)$.
5) Déterminer graphiquement et suivant m le nombre de solutions de l'équation $(E_m) : 2x(x-3) = \frac{2-m}{x}$ (où m est un paramètre réel).

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.
$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I/

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Donner une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point $I(2,0)$.
   Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport sa tangente Δ en I.
3) a) Tracer $\mathscr{C}$ et Δ.
   b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions 2, x_1 et x_2 et faire le tableau de signe de f(x).
   (On ne cherchera pas à déterminer x_1 et x_2).
4) Soit D_k la droite de coefficient directeur k ($k \in \mathbb{R}$) et passant par le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse zéro.
   a) Donner une équation cartésienne de D_k.
   b) Déterminer k pour que D_k coupe $\mathscr{C}$ en deux points distincts M' et M" autre que $A(0,-2)$.
   c) Lorsque D_k coupe $\mathscr{C}$ en deux points distincts autre que A déterminer l'ensemble des points I_k milieu de $[M'M"]$ lorsque k varie.

II/ Soit g la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x - 2 & \text{si } x \leq 3 \\ (x-3)^2(x-6) - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue en 3.
2) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.
3) Soient $\Omega(3,-2)$ et Γ la représentation graphique de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Monter que Ω est un centre de symétrie de Γ.
4) En déduire la construction de Γ.

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un centre de symétrie que l'on précisera.
   c) Tracer $\mathscr{C}$.
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = |x|^3 - 3x^2 + 2$.
   $\mathscr{C}'$ la courbe de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Tracer $\mathscr{C}'$ en utilisant $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $(E_k) : |x|^3 - 3(x^2 + k) - 2 = 0$.
3) Soit $h : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$.
   Γ est la courbe représentative de h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Montrer que pour tout réel x, on a : $h(2x) = 2f(x)$.
   b) En déduire que Γ est l'image de $\mathscr{C}$ par une homothétie de centre O et de rapport qu'on précisera.

6 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et soit $g = -f$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2) a) Déterminer la forme canonique de $x^2 + x + 1$.
   b) Montrer que les droites $\Delta_1 : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
   c) Préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ_1.
   d) Montrer que la droite $\Delta : x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.
3) Etudier f et tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4) Vérifier que $\mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g$ a pour équation $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$.
5) On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\Omega(-\frac{1}{2}, 0)$.
   a) Déterminer une équation de $(\Gamma) = \mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
   b) Conclure.

7 Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier les variations de f.
2) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 3. Interpréter graphiquement le résultat.
3) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de f admet la droite D : $x = 1$ comme axe de symétrie.
4) a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de f admet la droite $\Delta : y = x - 1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
   b) Montrer que pour tout réel x, $x^2 - 2x - 3 < (x-1)^2$
   c) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
6) Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$
   En utilisant la courbe $\mathscr{C}$, tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère.
7) Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{|x^2 - 2x| - 3}$
   Tracer la courbe de $\mathscr{C}''$ en utilisant la courbe $\mathscr{C}$.

8 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x-2}$ pour tout x différent de 2 et –2.
   a) Calculer $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)f(x)$ et en déduire la valeur de c.
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -2} (x+2)f(x)$ et en déduire la valeur de b.
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.
2) Etudier f.
3) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
4) Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = m$.
5) a) Déterminer l'abscisse du point où $\mathscr{C}$ coupe son asymptote parallèle à (Ox).
   En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.
6) En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ tracer la courbe de la fonction $g : x \mapsto f(-|x|)$.

9 1) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$ et préciser les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$ de f.

2) a) Construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   b) Soit $\Omega\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Ecrire l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
   En déduire que Ω est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

10 On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{6+x-x^2}{2-x}$

1) Etudier f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x)=\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|(x+2)$

   a) En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ tracer la courbe $\mathscr{C}'$ dans le même repère.

   b) Déterminer le tableau de variation de g.

11 On appelle f la fonction numérique de la variable réelle définie sur $]-2,+\infty[$:

$$f(x)=\frac{x^2+4x+2}{2(x+2)}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Etudier la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2.
   En déduire l'existence d'asymptote D à la courbe $\mathscr{C}$.
   Donner une équation de cette asymptote.

2) a) Etudier la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout x appartenant à $]-2,+\infty[$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.

   c) Montrer que la droite Δ : $y=\dfrac{x}{2}+1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

3) a) Montrer que pour tout x appartenant à $]-2,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

   b) En déduire les variations de la fonction f et dresser le tableau de variation de cette fonction sur $]-2,+\infty[$.

4) Tracer les asymptotes D et Δ et la courbe $\mathscr{C}$.

5) Soit $\delta_m : y=\dfrac{1}{2}x+m$ où m est un paramètre réel.
   Déterminer, graphiquement le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et la droite δ_m.

6) a) Tracer sur le même graphique la courbe représentative $\mathscr{H}$ de la fonction de la variable réelle définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{x}$.

   b) Déterminer graphiquement une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution de l'équation $f(x)=h(x)$.

7) a) Montrer que sur $]0,+\infty[$ l'équation $f(x)=h(x)$ est équivalente à $x^3+4x^2-4=0$.

   b) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^3+4x^2-4$.

Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $[0,5\,;1]$.

c) Déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près par défaut.

8) Soit k la fonction définie par $\begin{cases} k(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{2(x+2)} & \text{si } -2<x<x_0 \\ k(x)=\dfrac{1}{x} & \text{si } x\geq x_0 \end{cases}$

Donner le tracé de la courbe de k en utilisant les courbe $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$.
Donner le tableau de variation de k.

12 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ où a , b et c des réels à déterminer.

b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

c) Montrer que $\Omega(1,4)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

2) a) Etudier les variations de f.

b) Tracer $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit D la droite de coefficient directeur k ($k\in\mathbb{R}$) et passant par Ω.

a) Donner une équation de D_k.

b) Déterminer suivant les valeurs de k le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_k.

c) Dans le cas où D_k coupe $\mathscr{C}$ en deux points M' et M" :

- Vérifier que Ω est le milieu de $[M'M"]$.
- Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M' et M" sont parallèles .

4) Soit $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{|x|-1}$

a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$, $g(x)=f(x)-2$.

b) En déduire la construction de $\mathscr{C}'$ courbe de g.

c) Dresser alors le tableau de variations de g.

13 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier les variations de f.

2) a) Montrer que la droite $D : y = x-1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$

b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D

c) Construire $\mathscr{C}$.

d) Ecrire une équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{j})$ avec $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$; et en déduire que Ω est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

3) Soit D_a la droite d'équation $y = -3x + a$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à D_a et faire la construction.

b) Montrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_a sont les solutions de l'équation : $(E) : 4x^2 - (9+a)x + 3 + 2a = 0$

c) Déterminer suivant les valeurs de a le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_a.

d) Vérifier les résultats graphiquement.

4) la droite D_a coupe l'asymptote verticale en P et l'asymptote oblique en Q, on suppose que D_a coupe $\mathscr{C}$ en deux point M' et M''.

a) Déterminer les coordonnées de P et Q

b) Montrer que $\overrightarrow{PM'} \cdot \overrightarrow{QM'}$ est constante qu'on précisera

5) Soit $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 3}{|x-2|}$

a) Utiliser $\mathscr{C}$ pour tracer $\mathscr{C}'$ courbe de g

b) Dresser le tableau de variations de g

c) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions ainsi que leurs signes de l'équation
$(E_m) : x^2 - 3(x + m|x-2|) + 3(1 - |x-2|) = 0$

CORRIGES

1

$f : x \mapsto x^2 + 4x$

1) a) f est une fonction polynôme donc dérivables sur IR :

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f'(x)		–	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$

b) $x^4 + 4x^2 + k = 0 \quad (E_k)$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 = -k$

on pose $X = x^2 \geq 0$ l'équation devient :

$X^2 + 4X = -k$ et $X \geq 0 \qquad (E'_k)$

$f(X) = -k$ avec $X \geq 0$

Soit Δ_k la droite d'équation $y = -k$.

Le nombre de solutions de $\begin{cases} f(X) = -k \\ X \geq 0 \end{cases}$ est égal au nombre de points d'intersections de la droite Δ_k et la branche $\mathscr{C}_+$ de $\mathscr{C}$ définie par les abscisses positives.

Donc :

Si $-k < 0 \Leftrightarrow k > 0$ alors $\mathscr{C}_+ \cap \Delta_k = \varnothing$

$\Rightarrow$ nombre de solutions $= 0$

Si $k = 0$ alors $\mathscr{C}_+ \cap \Delta_k = \{O\}$

$\Rightarrow$ nombre de solutions de E'_k = nombre de solutions de $E_k = 1$

Si $-k > 0 \Leftrightarrow k < 0$ alors $\mathscr{C}_+ \cap \Delta_k = \{1 \text{ pt}\}$

$\Rightarrow$ nombre de solutions de E'_k = une solution α strictement positive

$\Rightarrow$ nombre de solutions $E'_k = 2$ solutions $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$

2) a) <u>1er sens</u> :

soit $M(x,f(x)) \in \mathscr{C} \Rightarrow H\left(x,-\frac{17}{4}\right)$

$$MF^2 = (x+2)^2 + \left(y+\frac{15}{4}\right)^2 \quad \text{avec } y = f(x) = x^2+4x$$
$$= x^4 + 8x^3 + \frac{49}{2}x^2 + 34x + \frac{289}{16}$$
$$MH^2 = (x-x)^2 + \left(y+\frac{17}{4}\right)^2$$
$$= x^4 + 8x^3 + \frac{49}{2}x^2 + 34x + \frac{289}{16}$$

donc $MF^2 = MH^2$ d'où $MF = MH$.

<u>2ème sens</u> : $M(x,y) \in P$ tq $MF = MH$

$H\left(x,-\frac{17}{4}\right)$ et $MF^2 = MH^2$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + \left(y+\frac{15}{4}\right)^2 = \left(y+\frac{17}{4}\right)^2$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4+\cancel{y^2}+\frac{15}{2}y+\frac{225}{16} = \cancel{y^2}+\frac{17}{2}y+\frac{289}{16}$$
$$\Rightarrow y = x^2+4x$$
$$\Rightarrow M \in \mathscr{C}$$

Conclusion : $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow MF = MH$.

b) $M(a,f(a))$ et $H(a,-\frac{17}{4})$.

$T : y = f'(a)(x-a)+f(a)$ d'où $T : y = (2a+4)(x-a)+a^2+4a$

$T : y = (2a+4)x - a^2$. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2a+4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.

$F(-2,-\frac{15}{4})$ $H(a,-\frac{17}{4})$ donc $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}a+2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{FH} = (a+2)+(-\frac{1}{2})(2a+4) = a+2-a-2 = 0$.

Soit I le milieu de $[FH]$. On a : $I(\frac{-2+a}{2},-4)$.

Vérifions que $I(\frac{-2+a}{2},-4)$ appartient à T : $y = (2a+4)x - a^2$,

$(2a+4)(\frac{-2+a}{2}) - a^2 = (a+2)(a-2) - a^2 = a^2-4-a^2 = -4$

D'où I appartient à la tangente T.

Conclusion : La droite T est la perpendiculaire à $[FH]$ passant par son milieu donc T est la médiatrice de $[FH]$.

c) Méthode de construction d'une tangente à la parabole $\mathscr{C}$ en un point M:
Soit M un point d'une parabole $\mathscr{C}$.

On projette orthogonalement M sur $\Delta : y = -\frac{17}{4}$. On obtient un point H.

La médiatrice de [FH] est la tangente en M à $\mathscr{C}$.

3) $g : x \mapsto (x+1)^2 - 2|x+1| - 3$.

a) $D_g = \mathbb{R}$ $D : x = -1$ axe de symétrie de $\mathscr{C}'$ ssi $g(2a - x) = g(x)$ avec $a = -1$

$2a - x = -2 - x$

$g(-2-x) = (-2-x+1)^2 - 2|-2-x+1| - 3 = (-1-x)^2 - 2|-1-x| - 3 = g(x)$

Donc D est un axe de symétrie de $\mathscr{C}'$.

b) Si $x \leq -1$ alors $|x+1| = -x-1$

Donc $g(x) = (x+1)^2 + 2(x+1) - 3 = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 - 3 = x^2 + 4x = f(x)$

Donc sur $]-\infty, -1] : \mathscr{C}' = \mathscr{C}$.

On trace la partie de $\mathscr{C}'$ de sur $[-1, +\infty[$ par symétrie par rapport à D.

c) Le point d'abscisse -1 est un point anguleux pour la courbe $\mathscr{C}'$ de g donc g n'est pas dérivable en -1.

La courbe $\mathscr{C}'$ admet, à gauche, au point d'abscisse -1 une demi tangente

d) Tableau de variations de g à partir de $\mathscr{C}'$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
g'(x)		–	0	+	2 | -2	–	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

2

1) a) $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$: f polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2x - 4$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$g : x \mapsto -x^2 - 4x + 2$: g polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $g'(x) = -2x - 4$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = \lim_{|x| \to +\infty} -x^2 = -\infty$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = g'(0) = -4 \\ f(0) = g(0) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{C}_f \text{ et } \mathscr{C}_g \text{ admettent la même tangente au point d'abscisse zéro : } T : y = -4x + 2$$

$\Rightarrow \mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tangentes au point d'abscisse zéro

2) a) $h : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

h dérivable à droite en zéro et $h'_d(0) = f'(0) = -4$

h dérivable à gauche en zéro et $h'_g(0) = g'(0) = -4$

$h'_g(0) = h'_d(0) = -4 \Rightarrow$ h dérivable en zéro et $h'(0) = -4$

b) Voir figure.

c) h étant définie sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

- Si $x > 0$, on a $-x < 0$:
  $h(x) + h(-x) = f(x) + g(-x) = x^2 - 4x + 2 - x^2 - 4(-x) + 2 = 4 = 2 \times 2$
- Si $x < 0$, on a $-x > 0$:
  $h(x) + h(-x) = g(x) + f(-x) = -x^2 - 4x + 2 - x^2 + 4x + 2 = 4 = 2 \times 2$
- Si $x = 0$, $h(2 \times 0 - 0) + h(0) = 2h(0) = 4$

On conclut que pour tout réel x, $h(-x) + h(x) = 2 \times 2$ donc le point $\Omega(0, 2)$ est un centre de symétrie pour la courbe (Γ).

3) $M(x, y) \in D_a \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + 2 \\ y = f(x) \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = ax + 2 \\ y = g(x) \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = ax + 2$ ou $g(x) = ax + 2$ * donc le nombre de points d'intersection de D_a et Γ est égal au nombre de solutions des équations *

donc : * $x^2 - 4x + 2 = ax + 2$ ou $-x^2 - 4x + 2 = ax + 2$

$\Rightarrow x^2 - (4 + a)x = 0$ ou $-x^2 - (4 + a)x = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 4 + a$ ou $x = -4 - a$

donc
- Si $a = -4$ alors on a une seule solution : $x = 0$
  $\Rightarrow$ un seul point d'intersection
- Si $a \neq -4$ alors on a trois solutions $\Rightarrow D_a \cap \Gamma = \{3 \text{ points}\}$

3

1) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction polynôme.

Pour tout réel x, $f'(x) = -6x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(-x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(2\times\frac{1}{2}-x) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(2\times\frac{1}{2}-x) = f(1-x) &= -2(1-x)^3+3(1-x)^2+2 \\ &= -2(1-3x+3x^2-x^3)+3(1-2x+x^2)+2 \\ &= -2+6x-6x^2+2x^3+3-6x+3x^2+2 \\ &= 2x^3-3x^2+3 \end{aligned}$$

$$2\times\frac{5}{2}-f(x) = 5-(-2x^3+3x^2+2) = 5+2x^3-3x^2-2 = 2x^3-3x^2+3$$

Donc $f(2\times\frac{1}{2}-x) = 2\times\frac{5}{2}-f(x)$.

D'où le point $\omega\,(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$ de f.

3) On écrit l'équation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\omega,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $M(x,y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $M(X,Y)$ dans le repère $(\omega,\vec{i},\vec{j})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{2}\vec{i}+\frac{5}{2}\vec{j}+X\vec{i}+Y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$ donc $\begin{cases} x = \frac{1}{2}+X \\ y = \frac{5}{2}+Y \end{cases}$

$= (\frac{1}{2}+X)\vec{i}+(\frac{5}{2}+Y)\vec{j}$

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\mathscr{C} &\Leftrightarrow f(x) = y \\ &\Leftrightarrow y = -2x^3+3x^2+2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{5}{2}+Y = -2(\tfrac{1}{2}+X)^3+3(\tfrac{1}{2}+X)^2+2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{5}{2}+Y = -2(\tfrac{1}{8}+2\times\tfrac{1}{4}X+2\times\tfrac{1}{2}X^2+X^3)+3(\tfrac{1}{4}+2\times\tfrac{1}{2}X+X^2)^2+2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{5}{2}+Y = -\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{2}X-3X^2-2X^3+\tfrac{3}{4}+3X+3X^2+2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{5}{2}+Y = \tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}X-2X^3 \\ &\Leftrightarrow Y = -2X^3+\tfrac{3}{2}X \\ &\Leftrightarrow G(X) = Y \end{aligned}$$

Dans le repère $(\omega,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(X) = -2X^3+\frac{3}{2}X$.

Cette fonction est impaire, ω l'origine du repère est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ admet deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{j})$, l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$

4) Soit (T) une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0.

$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ d'où $(T): y = (-6x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + (-2x_0^3 + 3x_0^2 + 2)$

$(T): y = (-6x_0^2 + 6x_0)x + 4x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

(T) est issue du point A(2;–2) c'est à dire (T) passe par A(2;–2) si et seulement si $\quad -2 = (-6x_0^2 + 6x_0)2 + 4x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

$$4x_0^3 - 15x_0^2 + 12x_0 + 4 = 0 \quad (E)$$

On remarque que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2;-2)$.

Donc $x_0 = 2$ est une racine de l'équation (E). Par conséquent :

$(E) \Leftrightarrow (x_0 - 2)(4x_0^2 + bx_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow 4x_0^3 + (b-8)x_0^2 - 2(b+1)x_0 + 4 = 0$.

Cette égalité est vraie pour tout réel x_0 si et seulement si

$$\begin{cases} b - 8 = -15 \\ b + 1 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow b = -7$$

L' équation (E) est équivalente à $(x_0 - 2)(4x_0^2 - 7x_0 - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = 2 \text{ ou } 4x_0^2 - 7x_0 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{7-9}{8} = \frac{-1}{4} \text{ ou } x_0 = \frac{7+9}{8} = 2$$

Deux tangentes (T_1) et (T_2) sont issues de A, l'une au point d'abscisse $x_0 = 2$ c'est le point A, et l'autre (T_2) au point d'abscisse $-\frac{1}{4}$. La tangente (T_2) correspond à la tangente au point $B(-\frac{1}{4}, \frac{71}{32})$.

5) Pour tout x différent de 0, l'équation $2x(x-3) = \frac{2-m}{x}$ est équivalente à :

$$2x^2 - 3x = \frac{2-m}{x}$$

$$2x^3 - 3x^2 = 2 - m$$

$$-2x^3 + 3x^2 + 2 = m$$

$$f(x) = m$$

Donc le nombre de solutions de l'équation $2x(x-3) = \frac{2-m}{x}$ est le nombre de points, d'abscisses non nulles, d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $D_m : y = m$ où m est un paramètre réel.

On remarque que $f(0) = 2$ donc au niveau de $m = 2$, il faut tenir compte de la condition exigée sur x.

m	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Nombre de points communs à D_m et $\mathscr{C}$		1	1	3	2	1	

4 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

I /

1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{c}{a} = 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

2) Δ : tangente à $\mathscr{C}$ en $I(2,0)$

$\Rightarrow \Delta : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$\Delta : y = -3x + 6$

Position relative de Δ et $\mathscr{C}$:

$f(x) - y_\Delta = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 + 3x - 6 = x^3 - 6x + 12x - 8$

$= (x-2)^3 = (x-2)(x-2)^2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
Position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ		$\mathscr{C}$ au dessous de Δ	$\mathscr{C} \cap \Delta = \{I\}$	$\mathscr{C}$ au dessus de Δ	

3) a) Construction :

La courbe ($\mathscr{C}$) admet deux branches paraboliques l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.

b) $\mathscr{C}$ coupe l'axe de abscisse en trois points d'abscisses x_1, x_2 et 2 $(x_1 < x_2)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes x_1, x_2 et 2.

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\begin{pmatrix} \mathscr{C} \text{ au dessous de} (O,\vec{i}) \Rightarrow f(x) < 0 \\ \mathscr{C} \text{ au dessus de} (O,\vec{i}) \Rightarrow f(x) > 0 \end{pmatrix}$$

4) a) D_k de coefficient directeur $k \Rightarrow D_k : y = kx + b$

D_k passe par $A(0,-2) \Rightarrow b = -2 \Rightarrow D_k : y = kx - 2$

b) $M(x,y) \in D_k \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx - 2 \\ y = f(x) \end{cases}$

$$f(x) = kx - 2 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = kx - 2$$
$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + (9-k)x = 0 \quad (E_k)$$

le nombre de points d'intersections de $\mathscr{C}$ et Δ_k est égal au nombre de solutions de l'équation (E_k)

$(E_k) \Leftrightarrow x\left[x^2 - 6x + 9 - k\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - 6x + 9 - k = 0$

Δ_k coupe $\mathscr{C}$ en deux points distincts M′ et M″ autre que A si l'équation $(E'_k) : x^2 - 6x + 9 - k = 0$ admet deux solutions distinctes et non nulles ; or zéro est solution de (E'_k) lorsque $k = 9$ et dans ce cas Δ_k coupe $\mathscr{C}$ en deux points $A(0,7)$ et $B(6, f(6))$.

Ainsi, Δ_k coupe $\mathscr{C}$ en deux points distincts M′ et M″ autre que A si et seulement si $\begin{cases} k \neq 9 \text{ (solution non nulle)} \\ \Delta' = 9 - 9 + k > 0 \text{ (le discriminant réduit de } E'_k) \end{cases}$

ce qui équivaut à $\begin{cases} k \neq 9 \\ k > 0 \end{cases}$

Conclusion :

Δ_k coupe $\mathscr{C}$ en deux points distincts M′ et M″ autre que A lorsque $k \in]0, +\infty[\setminus \{9\}$

c) $M'(x', y'), M''(x'', y'')$; x' et x'' solution de l'équation (E'_k)

$I_k(x,y)$ tel que $\begin{cases} x = \dfrac{x' + x''}{2} \\ y = kx - 2 \text{ (car } I_k \in D_k) \end{cases}$

$$\frac{x'+x''}{2}=\frac{S}{2}=\frac{-b}{2a} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{S : Somme des solutions d'une équation}\\ \text{du second degré} \Rightarrow S=\frac{-b}{a} \text{ dans } (E'_k)\begin{cases}a=1\\ b=-6\end{cases}\end{array}\right)$$

$$=\frac{6}{2}=3$$

$$\Rightarrow I_k : \begin{cases}x=3\\ y=3k-2\end{cases} \text{ avec } k>0 \text{ et } k\neq 9$$

$$\Rightarrow 3k-2>-2 \text{ et } 3k-2\neq 25$$

donc l'ensemble des points I_k est défini par : $\begin{cases}x=3\\ y\in\,]-2,+\infty[\,\setminus\{25\}\end{cases}$

ou bien l'ensemble des points I_k est $[EF)\setminus\{E,F\}$ avec $E(3,-2)$ et $F(3,25)$

II / $g : x \mapsto \begin{cases}f(x) \text{ si } x\leq 3\\ (x-3)^2(x-6)-2 \text{ si } x>3\end{cases}$

1) Continuité de g :

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue à gauche en 3 et $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in[3,+\infty[$ donc $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=f(3)=-2$

La fonction $h : x\mapsto (x-3)^2(x-6)$ est polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier h est continue à droite en 3.

Pour tout $x\in\,]3,+\infty[$, $g(x)=h(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=h(3)=-2$

$\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=-2$ donc g est continue en 3

2) • Sur $]-\infty,3[$: $g(x)=f(x)\Rightarrow$ g est dérivable sur $]-\infty,3[$, $g'(x)=f'(x)$

• Sur $]3,+\infty[$: $g(x)=(x-3)^2(x-6)-2$.

g est dérivable sur $]3,+\infty[$ (opérations sur les fonctions dérivables)

et $g'(x)=\left[(x-3)^2\right]'(x-6)+(x-6)'(x-3)^2=2(x-3)(x-6)+(x-3)^2$

$$=(x-3)(3x-15)$$

• Dérivabilité en 3 :

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'_g(3)=0$$

$\Rightarrow$ g dérivable à gauche en 3 et $g'_g(3)=0$

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)^2(x-6)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x-3)(x-6)=0$$

$\Rightarrow$ g dérivable à droite en 3 et $g'_d(3)=0$

On a $g'_g(3)=g'_d(3)\Rightarrow$ g dérivable en 3 et $g'(3)=0$

Conclusion : g dérivable sur $\mathbb{R}$

3) $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow 2a - x \in \mathbb{R}\,;\, 2a - x = 6 - x$ car $\Omega(3,-2) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$

il faut montrer que $g(2a-x) + g(x) = 2b = -4$

- Si $x < 3$ alors $6 - x > 3$

$$\begin{aligned} g(2a-x)+g(x) &= \underbrace{g(6-x)}_{\text{car } 6-x>3} + g(x) \\ &= \underbrace{(6-x-4)^2(6-x-6)-2}\ \underbrace{+x^3-6x^2+9x-2} \\ &= -x(3-x)^2 + x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \\ &= \cancel{-9x} + \cancel{6x^2} - \cancel{x^3} + \cancel{x^3} - \cancel{6x^2} + \cancel{9x} - 4 \\ &= -4 \\ &= 2b \end{aligned}$$

- Si $x > 3$ alors $6 - x < 3$

$$\begin{aligned} g(2a-3)+g(x) &= (6-x)^3 - 6(6-x)^2 + 9(6-x) - 2 + (x-3)^2(x-6) - 2 \\ &= (x-6)\left[-(x-6)^2 + 6(x-6) - 9 + (x-3)^2\right] - 4 \\ &= (x-6)\underbrace{\left(-x^2 + 12x - 36 - 6x + 36 - 9 + x^2 - 6x + 9\right)}_{=0} - 4 \\ &= -4 \\ &= 2b \end{aligned}$$

- Pour $x = 3$, $g(2\times 3 - 3) + g(3) = 2g(3) = 2f(3) = 2(-2)$

  Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}\,;\, g(2a-x) + g(x) = 2b$.

  $\Rightarrow \Omega(3,-2)$ est un centre de symétrie de Γ.

4) Construction de Γ :

sur $]-\infty, 3]$, $g(x) = f(x) \Rightarrow \Gamma = \mathscr{C}_f$ sur $]-\infty, 3]$ et puis on termine la Construction

de Γ par la symétrie centrale de centre Ω

5 $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$

1) a) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

b) $I(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2a - x \in \mathbb{R}$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

$f(2a - x) + f(x) = 2b \Leftrightarrow (2a - x)^3 - 3(2a - x)^2 + 4 + x^3 - 3x^2 + 4 = 2$

$\Leftrightarrow 8a^3 - 12a^2x + 6ax^2 - x^3 - 12a^2 + 12ax - 3x^2 + 4 + x^3 - 3x^2 + 4 = 2$

$\Leftrightarrow 6(a-1)x^2 - 12a(a-1)x + 8a^3 - 12a^2 + 8 - 2b = 0$

L'égalité $f(2a - x) + f(x) = 2b$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ équivaut à

$$\begin{cases} 6(a-1) = 0 \\ -12a(a-1) = 0 \\ 8a^3 - 12a^2 + 8 - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Conclusion : $I(1, 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

c) La courbe $\mathscr{C}$ admet deux branches paraboliques l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.

2) $g : x \mapsto |x|^3 - 3x^2 + 2$

a) • Si $x \geq 0$ alors $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2 = f(x) - 2 \Rightarrow \mathscr{C}' = t_{-2\vec{j}}(\mathscr{C})$ sur $[0, +\infty[$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(-x) = g(x)$

D'où g est paire donc on construit $\mathscr{C}'$ sur $]-\infty,0]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

b) $(E_k): |x|^3 - 3(x^2+k) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow |x|^3 - 3x^2 - 3k - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow |x|^3 - 3x^2 + 2 = 3k + 4$$
$$\Leftrightarrow g(x) = 3k + 4$$

Soit D_k la droite d'équation $y = 3k+4$

le nombre de solutions de l'équation (E_k) est égal au nombre de points d'intersections de $\mathscr{C}'$ et D_k (parallèle à $(O,\vec{i})$).

$3k+4$	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
k	$-\infty$		-2		$\frac{-2}{3}$		$+\infty$
Nombre de solutions de l'équation (E_k)	pas de solution		2 solutions	4 solutions	3 solutions	2 solutions	

3) $h: x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

a) $h(2x) = \frac{1}{4}(2x)^3 - \frac{3}{2}(2x)^2 + 8$

$$= \frac{1}{4}\times 8x^3 - \frac{3}{2}\times 4x^2 + 8 = 2x^3 - 6x^2 + 8$$
$$= 2(x^3 - 3x^2 + 4)$$
$$= 2f(x)$$

b) Soit $M(x,f(x)) \in \mathscr{C}$; $M'(2x,h(2x)) \in \Gamma$

$\overrightarrow{OM'} = 2x\vec{i} + h(2x)\vec{j} = 2x\vec{i} + 2f(x)\vec{j}$ (d'après a)) $= 2(x\vec{i} + f(x).\vec{j})$

$= 2\overrightarrow{OM}$

donc $M' = h_{(0,2)}(M)$ d'où $\Gamma = h_{(0,2)}(\mathscr{C})$

6

1) f est définie si et seulement si $x^2+x+1 \geq 0$ ce qui est vérifiée pour tout réel x car le discriminant de x^2+x+1 est strictement négatif.

$D_f = \mathbb{R}$.

2) a) $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

b) Pour tout $x \in [\frac{-1}{2},+\infty[$, $x+\frac{1}{2} = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+\tfrac{1}{2})\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}}-\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{2})^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}=+\infty$ et par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$$

La droite $\Delta_1 : y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

a) Position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ_1 :

D'après ce qui précède : $f(x)-(x+\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}}>0$

Donc la courbe de $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de l'asymptote $\Delta_1 : y=x+\frac{1}{2}$

pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

d) Montrons que la droite $\Delta : x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.

- Pour tout réel x, on a $2\times(-\frac{1}{2})-x\in\mathbb{R}$.
- $f(2\times(\frac{-1}{2})-x)=f(-1-x)=\sqrt{(-1-x)^2+(-1-x)+1}=\sqrt{1+2x+x^2-1-x+1}$

$$=\sqrt{x^2+x+1}$$
$$=f(x)$$

D'où la droite $\Delta : x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie.

3) La fonction $x\mapsto x^2+x+1$ est polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2+x+1>0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+1$.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(x^2+x+1\right)=\lim_{|x|\to+\infty}x^2\Rightarrow\lim_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$$

- Construction de $\mathscr{C}_f$: On construit (C_1) la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{-1}{2},+\infty\right[$ et on termine la deuxième partie (C_2) par symétrie par rapport à la droite $\Delta : x = -\frac{1}{2}$.
  $(C_1)\cup(C_2) = \mathscr{C}_f$.
- Construction de $\mathscr{C}_g$: Puisque $g(x) = -f(x)$ alors $\mathscr{C}_g$ est la symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

4) Equation de $(\Gamma) = \mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$:

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathscr{C}_f \cup \mathscr{C}_g &\Leftrightarrow y = f(x) \text{ ou } y = -f(x) \\ &\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2+x+1} \text{ ou } y = -\sqrt{x^2+x+1} \\ &\Leftrightarrow y^2 = x^2+x+1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $(\Gamma) : x^2 - y^2 + x + 1 = 0$.

5) Equation de (Γ) dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$:

Soit M de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (X,Y) dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ce qui équivaut à dire

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{i} + X\vec{u} + Y\vec{v} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{i} + X(\vec{i}+\vec{j}) + Y(-\vec{i}+\vec{j}) \\ &= (-\frac{1}{2} + X - Y)\vec{i} + (X+Y)\vec{j} \end{aligned}$$

Par conséquent : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + X - Y \\ y = X + Y \end{cases}$ (1)

or l'équation de (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$ (2) donc l'équation de (Γ) dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$, obtenue en remplaçant dans l'équation (2) x et y par leurs valeurs en fonction de X et Y données par (1), est :

$$(-\frac{1}{2} + X - Y)^2 - (X+Y)^2 + (-\frac{1}{2} + X - Y) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - (X-Y) + (X-Y)^2 - (X+Y)^2 - \frac{1}{2} + X - Y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4XY + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow XY = \frac{3}{16} \quad \text{(le produit est non nul donc } X \neq 0)$$

On obtient donc $(\Gamma) : y = \dfrac{\frac{3}{16}}{X}$ $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

b) La courbe (Γ) est donc une hyperbole qui a pour asymptotes les axes du repère : les droites passant par Ω et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour centre de symétrie Ω l'origine du repère.

7

1) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ est définie sur $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$.

Pour tout $x < -1$ et $x > 3$, $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$						$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0				0	↗	$+\infty$

$$\lim_{|x| \to +\infty} x^2 - 2x - 3 = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) Dérivabilité de f à droite en 3 : $f(3) = 0$

Pour tout $x > 3$, on a :

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x-3}=\frac{x^2-2x-3}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}}$$
$$=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3}(x+1)=4\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-2x-3}=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}=+\infty\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty .$$

La fonction f n'est pas dérivable à droite en 3 et au point A d'abscisse 3 la courbe $\mathscr{C}$ admet une demi tangente verticale.

3) • Pour tout $x\in D_f$ on a $x\geq 3$ ou $x\leq -1$ donc $-x\leq -3$ ou $-x\geq 1$ et par suite $2-x\leq -1$ ou $2-x\geq 3$ d'où $2-x\in D_f$.

• $f(2-x)=\sqrt{(2-x)^2-2(2-x)-3}=\sqrt{4+x^2-4x-4+2x-3}=\sqrt{x^2-2x-3}=f(x)$

Donc la droite $D: x=1$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

4) a)

Pour tout $x\geq 3$, $\sqrt{x^2-2x-3}+x-1\neq 0$ donc

$$f(x)-(x-1)=\sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)=\frac{x^2-2x-3-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1}=\frac{-4}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1}=0 .$$

Donc la droite $\Delta: y=x-1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ représentant f au voisinage de $+\infty$

b) $x^2-2x-3=(x-1)^2-1-3=(x-1)^2-4$ d'où $x^2-2x-3<(x-1)^2$.

c) • Pour tout réel x, $x^2-2x-3<(x-1)^2$ donc pour tout $x\geq 3$ on a $\sqrt{x^2-2x-3}<\sqrt{(x-1)^2}$ et par suite $f(x)<|x-1|$; or $x>3\Rightarrow x-1>2>0$ donc $f(x)<x-1$. Par conséquent, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de l'asymptote oblique $\Delta: y=x-1$.

• Si $x\leq -1$, on a $x-1\leq -2<0$ et par suite $\underbrace{\sqrt{x^2-2x-3}}_{(+)}>\underbrace{x-1}_{(-)}$ donc la courbe est au dessus de Δ sur $]-\infty,-1]$.

5)

6) $g(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

Si $x \leq -1$ ou $x \geq 3$ on a $g(x) = f(x)$, $\Gamma_1(g) = \mathscr{C}$.

Si $-1 \leq x \leq 3$ on a $g(x) = \sqrt{-(x^2 - 2x - 3)}$

La restriction de g à l'intervalle $[-1,3]$ a pour équation $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$.

Elle est représentée par $\Gamma_2(g)$.

Pour tout $-1 \leq x \leq 3$, on a $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3} \Leftrightarrow y^2 = -x^2 - 2x + 3$ et $y \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ et $y \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$ et $y \geq 0$

L'ensemble des points M(x,y) de $\Gamma_2(g)$ est un demi cercle de centre I(1,0) et de rayon 2 située au dessus de l'axe des abscisses. $\mathscr{C}' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

7) $h(x)=\sqrt{|x^2-2x|-3}$

X	$-\infty$ -1	0 2	3 $+\infty$
$\lvert x^2-2x\rvert$	x^2-2x	$-x^2+2x$	x^2-2x
$\lvert x^2-2x\rvert-3$	x^2-2x-3	$-x^2+2x-3$	x^2-2x-3

Si $x\in]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$, $|x^2-2x|-3=x^2-2x-3$ qui n'est positif que si $x\leq -1$ ou $x\geq 3$.

Si $x\in[0,2]$, $|x^2-2x|-3=-x^2+2x-3$, le discriminant de ce trinôme est $\Delta=4-12=-8<0$, donc pour tout $x\in[0,2]$, on a $-x^2+2x-3<0$.

Conclusion : h n'est définie que sur $]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$, et pour tout x de cet ensemble de définition, $h(x)=f(x)$ et la représentation graphique de h est la même que celle de f.

8

1) a) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\cancel{(x-2)}\left(\dfrac{2x^2-3x+2}{\cancel{(x-2)}(x+2)}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x+2}{x+2}=1$

D'autre part $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)a+\dfrac{b(x-2)}{x+2}+c=c$

donc $c=1$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\cancel{(x+2)}\left(\dfrac{2x^2-3x+2}{(x-2)\cancel{(x+2)}}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-3x+2}{x-2}=-4$

D'autre part $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)f(x)=(x+2)a+b+\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)c=b$,

donc $b=-4$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$.

Or $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}a+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{x-2}=a$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{b}{x+2}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{c}{x-2}=0$.

Il en résulte $a=2$.

Conclusion : Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, $f(x)=2-\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}$.

2) f est rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ et on a

$$f'(x)=\frac{(4x-3)(x^2-4)-2x(2x^2-3x+2)}{(x^2-4)^2}=\frac{3x^2-20x+12}{(x^2-4)^2}$$

On pose $N(x)=3x^2-20x+12$, $\Delta'=100-36=64$.

$x'=\dfrac{10-8}{3}=\dfrac{2}{3}$ et $x''=\dfrac{10+8}{3}=6$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{-1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{7}{4}$	↗	2

3) Asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$ de f :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2 - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2 - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-2} = -\infty$$

donc la droite $\Delta : x = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

d'où $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-3}{x+2} = -\infty$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} 2 - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} 2 - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-2} = +\infty$$

Donc la droite $\Delta' : x = -2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

- $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ d'où la droite $\Delta'' : y = 2$ est asymptote à au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

4)

Soit N le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Delta_m : y = m$

k	$-\infty$		$\frac{-1}{4}$		$\frac{7}{4}$		2		$+\infty$
Nombre de points communs à Δ_m et $\mathscr{C}$		2	1	0	1	1	1	2	

5) • L'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'asymptote $\Delta'' : y = 2$ est solution de l'équation $f(x) = 2$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 2 \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} = \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow 4(x-2) = x+2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

6) $g(x) = f(-|x|)$.

- La fonction g est définie si et seulement si $-|x| \neq 2$ (évident) et $-|x| \neq -2$ donc $x \neq 2$ et $x \neq -2$.
  La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$, $(-x) \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$.
  $g(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = g(x)$
  La fonction g est donc paire.
- Pour tout $x \in]-\infty,0] \setminus \{-2\}$, $g(x) = f(-(-x)) = f(x)$ la restriction de la fonction g à l'intervalle $]-\infty,0]$ est représentée par Γ_1 la partie de la courbe $\mathscr{C}$ correspondante à cet intervalle.
  Puisque g est paire, la restriction de g à l'intervalle $[0,+\infty[$ est représentée par Γ_2 symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe des ordonnées.
  On pose Γ la courbe de g. On a donc $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (voir figure).

9

1) • $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$

or $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$ $(a + b + c = 0)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$.

f est rationnelle donc f est dérivable sur son domaine de définition.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 6x - 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $n(x) = -2x^2 + 6x - 5$:

$\Delta' = 9 - 10 < 0$ donc le signe de $n(x)$ est le signe de (-2).

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, $n(x) < 0$.

• Limites aux bornes du domaine de définition de f :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Delta : y = 0$ l'axe des abscisses est uneasymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+} x^2-3x+2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to2} 2x-3 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} x^2-3x+2 = 0^- \\ \lim\limits_{x\to2} 2x-3 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$$

D'où la droite $\Delta : x = 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} x^2-3x+2 = 0^- \\ \lim\limits_{x\to1} 2x-3 = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty \text{ et}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} x^2-3x+2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to1} 2x-3 = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

D'où la droite $\Delta' : x = 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

2) a)

b) Montrons que le point $\Omega(\frac{3}{2},0)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

On écrit l'équation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $M(x,y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $M(X,Y)$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}=\frac{3}{2}\vec{i}+X\vec{i}+Y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ donc $\begin{cases} x=\frac{3}{2}+X \\ y=Y \end{cases}$

$=(\frac{3}{2}+X)\vec{i}+Y\vec{j}$

$$M(x,y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow f(x)=y \Leftrightarrow y=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{2(\frac{3}{2}+X)-3}{(\frac{3}{2}+X)^2-3(\frac{3}{2}+X)+2}$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{3+2X-3}{\frac{9}{4}+X^2+3X-\frac{9}{2}-3X+2}$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{8X}{4X^2-1}$$

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction G définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ par $G(X)=\frac{8X}{4X^2-1}$. Cette fonction est impaire, donc sa courbe admet Ω, l'origine du repère, comme centre de symétrie.

10

1) $f(x)=\dfrac{6+x-x^2}{2-x}$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

f est rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$,

$$f'(x)=\frac{(1-2x)(2-x)-(-1)(6+x-x^2)}{(2-x)^2}=\frac{2-4x-x+2x^2+6+x-x^2}{(2-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+8}{(2-x)^2}$$

Le numérateur de $f'(x)$ est un trinôme dont le discriminant réduit $\Delta'=4-8=-4<0$ donc $x^2-4x+8>0$ pour tout réel x, et par suite $f'(x)>0$ pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)	+	‖	+
f(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{-x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{-x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2} 6+x-x^2=8\\ \lim\limits_{x\to2^+}(2-x)=0^-\end{array}\right\}\text{ d'où } \lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2} 6+x-x^2=8\\ \lim\limits_{x\to2^-}(2-x)=0^+\end{array}\right\}\text{ d'où } \lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
2 − x	+	0	−

D'où la droite $\Delta : x=2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$ de f.

- Recherche de l'asymptote oblique de $\mathscr{C}$.

  Cherchons a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2-x}$

$$ax+b+\frac{c}{2-x}=\frac{ax(2-x)+b(2-x)+c}{2-x}=\frac{-ax^2+(2a-b)x+c+2b}{2-x}$$

L'égalité $\dfrac{6+x-x^2}{2-x}=\dfrac{-ax^2+(2a-b)x+c+2b}{2-x}$ est vérifiée pour tout réel

$x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ si et seulement si $\begin{cases} -a=-1 \\ 2a-b=1 \\ c+2b=6 \end{cases} \Leftrightarrow a=1\ ,\ b=1$ et $c=4$.

$f(x)=x+1+\dfrac{4}{2-x}$.

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{4}{2-x}=0$ d'où la droite $\Delta' : y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Courbe représentative de f :

2) $g(x)=\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|(-x-2)$, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

x		2		3	
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x-3}{x-2}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Pour tout $x \in]2,+\infty[\cup[3,+\infty[$

$g(x)=\dfrac{x-3}{x-2}(x+2)=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}=\dfrac{-x^2+x+6}{2-x}=f(x)$

donc $\mathscr{C}'$ est confondue avec $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $]-\infty,2[$.

Pour tout $x \in]2,3]$:

$g(x)=-\dfrac{x-3}{x-2}(x+2)=\dfrac{-x^2+x+6}{x-2}=-\dfrac{-x^2+x-6}{2-x}=-f(x)$

donc $\mathscr{C}'$ est confondue avec la symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty, 2[$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
g'(x)		+	‖	−		+	
g(x)	$-\infty$	↗	2 ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

11

1) $\lim\limits_{x \to -2} x^2 + 4x + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$, $\lim\limits_{x \to -2} 2(x+2) = 0^+$ (comme $x > -2$, $2(x+2) > 0$)

d'où $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite D d'équation $x = -2$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.

b) Pour tout $x \in]-2, +\infty[$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2 + (b+2a)x + 2b + c}{x+2}$$

On remplace $f(x)$ par son expression, donnée, dans le texte :

$$\frac{x^2 + 4x + 2}{2(x+2)} = \frac{2ax^2 + 2(b+2a)x + 4b + 2c}{2(x+2)}$$

Cette égalité est vérifiée pour tout $x \in]-2,+\infty[$ et les dénominateurs étant les mêmes, on compare, aux numérateurs, les coefficients des termes de même degré :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(b+2a) = 4 \\ 4b+2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b+2a = 2 \\ 2b+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2},\ b = 1,\ c = -1.$$

c) D'après la question précédente on peut écrire :

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{x+2}$, on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (\frac{x}{2}+1) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$.

La droite d'équation $y = \frac{x}{2}+1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ, on étudie le signe de la différence $f(x) - (\frac{x}{2}+1)$.

$x \in]-2,+\infty[$ alors $x+2 > 0$ et $f(x) - (\frac{x}{2}+1) < 0$.

La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite Δ sur $]-2,+\infty[$.

3) a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{1}{x+2}$ $\qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{-1}{(x+2)^2}$ d'où $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(x+2)^2}$.

b) $f'(x)$ est la somme de deux réels strictement positifs donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]-2,+\infty[$. La fonction f est donc croissante sur $]-2,+\infty[$.

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4)

5) Les droites δ_m sont parallèles à Δ et lorsque $m=1$ on a $\Delta=\delta_1$ or d'après l'étude de la position relative de δ et $\mathscr{C}$ on conclut que $\mathscr{C}\cap\delta_1=\varnothing$

Si $m>1$ les droites δ_m sont au dessus de δ_1 or la courbe est au dessous de δ_1 donc $\delta_m\cap\mathscr{C}=\varnothing$

Si $m<1$, δ_m est au dessous de Δ, $\mathscr{C}$ et δ_m se coupent en un point.

6) a) voir figure

b) Graphiquement, l'abscisse du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$ est environ 0,9.

7) a) Sur $]0,+\infty[$, $f(x)=h(x)\Leftrightarrow\dfrac{x^2+4x+2}{2(x+2)}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x(x^2-x+2)=2(x+2)$

$f(x)=h(x)\Leftrightarrow x^3+4x^2+2x=2x+4\ \Leftrightarrow\ x^3+4x^2-4=0$

Sur $]0,+\infty[$, l'équation $f(x)=h(x)$ est équivalente à $x^3+4x^2-4=0$.

b) $g(x)=x^3-4x^2-4$, g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=3x^2+8x$

Comme $x>0$, $g'(x)>0$ et g est une fonction croissante sur $]0,+\infty[$.

x	0	0,5	x_0	1	$+\infty$
g'(x)			+		
g(x)	-4		0		$+\infty$

Par lecture du tableau de variation de g, l'image de l'intervalle $g(0,5)\simeq-2,875$ et $g(1)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ est continue sur } [0,5\,;1] \\ g(0,5)<0 \\ g(1)>0 \end{array}\right\} \text{d'où 0 est compris entre } g(0,5) \text{ et } g(1)$$

donc l'équation $g(x)=0$ admet dans $[0,5\,;1]$ une solution x_0.

Cette solution est unique (d'après le tableau de variation de g).

c) $g(0,9)\simeq -0,031$ et $g(0,91)\simeq 0,0659$ soit $g(0,9)<g(x_0)=0<g(0,91)$

alors, puisque la fonction g est croissante $0,9<x_0<0,91$.

$x_0\simeq 0,9$ à 10^{-1} près par défaut.

8) • $k(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in\,]-2,x_0] \text{ et } \mathscr{C}_k=\mathscr{C} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\in[x_0,+\infty[\text{ et } \mathscr{C}_k=\mathscr{H} \end{cases}$

x	-2		x_0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	|	$-$	
$k(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{x_0}$	↘	0

12

1) a) Pour tout $x\in D_f$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

1ère méthode :

• $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[(ax+b)(x-1)+c]=c$

D'autre part $\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)f(x)]=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-2)=1$. Donc $c=1$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x(x-1)}\right]=a$

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$. Donc $a=1$.

• $f(0)=b+\dfrac{c}{-1}$ et $c=1$ donc $f(0)=b-1$

D'autre part $f(0)=\dfrac{-2}{-1}=2$ d'où $b-1=2$ et par suite $b=3$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x-1}$.

2ème méthode :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}\Leftrightarrow\frac{x^2+2x-2}{x-1}=\frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$$

Cette égalité est vérifiée pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=2 \\ c-b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases} \text{ Donc pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} : \ f(x)=x+3+\frac{1}{x-1}.$$

b) • $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$

D'où la droite $D : y=x+3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $\pm\infty$.

• $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+3+\frac{1}{x-1})=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x+3+\frac{1}{x-1})=-\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

D'où la droite $D' : x=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

c) $\Omega(1,4)$, $a=1$ et $b=4$, $2a-x=2-x$.

• on a $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq1 \Leftrightarrow -x\neq-1 \Leftrightarrow 2-x\neq1 \Leftrightarrow 2-x\in D_f$

• $f(2-x)+f(x)=2-x+3+\frac{1}{2-x-1}+x+3+\frac{1}{x-1}=8-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=8$
$=2b$

Le point Ω est donc centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

2) a) f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc dérivable

et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)=1+\frac{-1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$

$(x-1)^2=1 \Leftrightarrow x-1=1$ ou $x-1=-1 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

b) On trace $\mathscr{C}$ sur $]-\infty,1[$ par symétrie par rapport à Ω.

3) a) D_k de coefficient directeur $k \Rightarrow D_k : y = kx + b$

or $\Omega(1,4) \in D_k \Rightarrow 4 = k \times 1 + b \Rightarrow b = 4 - k$.

D'où $D_k : y = kx + 4 - k$.

b) $M(x,y) \in D_k \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \text{ et } x \neq 1 & (1) \\ y = kx + 4 - k & (2) \end{cases}$

D'après (1) et (2), $\dfrac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = kx + 4 - k \quad (x \neq 1)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 2 = (kx + 4 - k)(x - 1)$

$\Leftrightarrow \quad (k-1)x^2 - 2(k-1)x + k - 2 = 0 \quad (E_k)$

Le nombre de solutions de (E_k) est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_k.

1ère cas : $k = 1$, l'équation devient $1 - 2 = 0$ impossible.

Donc (E_k) n'a pas de solution et par suite $\mathscr{C} \cap D_k = \varnothing$.

2ème cas : $k \neq 1$, (E_k) du second degré.

$a = k - 1$, $b = -2(k-1) \Rightarrow b' = -(k-1)$ et $c = k - 2$

$\Delta' = b'^2 - ac = (k-1)^2 - (k-2)(k-1) = k - 1$

k	$-\infty$	-1	$+\infty$
Δ'	–		+
Nombre de points d'intersection	Aucun		2 points

c) 1ère idée :

D_k coupe $\mathscr{C}$ en deux points M' et M" donc $k > 1$.

On sait que Ω est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

On a M', M" et Ω sont alignés et M' et M" $\in \mathscr{C}$

D'où M' et M" sont symétriques par rapport à Ω et par conséquent Ω est le milieu de [M'M"].

2ème idée :

$$M'(x',y') \in D_k \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} x' \text{ solution de } (E_k) \\ y' = kx' + 4 - k \end{cases}$$

$$M''(x'',y'') \in D_k \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' \text{ solution de } (E_k) \\ y'' = kx' + 4 - k \end{cases}$$

Soit I le milieu de [M'M"]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x'+x''}{2} \\ y_I = kx_I + 4 - k \quad (\text{car } I \in D_k \text{ puisque M' et M" sont sur } D_k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{S}{2} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2(k-1)}{2(k-1)} = 1 \\ y_I = k \times 1 + 4 - k = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1,4) \Rightarrow I = \Omega .$$

M' d'abscisse x' et M" d'abscisse x" où x' et x" sont solutions de (E_k)

Donc $\dfrac{x'+x''}{2} = \dfrac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow x'' = 2 - x'$

$$f'(x'') = 1 - \frac{1}{(x''-1)^2} \quad \left(\text{on rappelle que } f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(2-x'-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x'-1)^2}$$

$$= f'(x')$$

d'où la tangente à $\mathscr{C}$ en M' et M" sont parallèles.

a) Si $x \in [0,+\infty[\setminus \{1\}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$$f(x) - 2 = \frac{x^2+2x-2}{x-1} - 2 = \frac{x^2+2x-2-2x+2}{x-1}$$

$$= g(x)$$

b) $\mathscr{C}' = t_{-2\vec{j}}(\mathscr{C})$ sur $[0,+\infty[\setminus\{1\}$.

On a aussi pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $-x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

$$g(-x) = \frac{(-x)^2}{|-x|-1} = \frac{x^2}{|x|-1} = g(x)$$

Donc g est paire d'où $\mathscr{C}'$ symétrique par rapport à $(O,\vec{j})$.

c)

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g(x)	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

13 $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$

1) f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-2)-x^2+3x-3}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$ car $a+b+c = 1$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'(x)		$+$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$+$	
f(x)	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$

car :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

2) a) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \left[f(x)-(x-1)\right] = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \left[\dfrac{x^2-3x+3}{x-2} - \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}\right]$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow D : y = x-1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

b) $f(x)-(x-1)=\dfrac{1}{x-2}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-(x-1)$	$-$	‖	$+$
Position relative de $\mathscr{C}$ et D	$\mathscr{C}$ au dessous en D	‖	$\mathscr{C}$ au dessus de D

c) Construction de $\mathscr{C}$ (page suivante)
$\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique : $D : y = x - 1$ et une asymptote verticale $\Delta : x = 2$

d) $M(x,y)_R \to M(X,Y)_{R'}$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega M} &= X\vec{u} + Y\vec{j}\\ &= X\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+Y\vec{j}\\ &= X\vec{i}+(X+Y)\vec{j}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = X+2\\ y = X+Y+1\end{cases}$$

Or $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$

$$\text{Donc } x\vec{i}+y\vec{j} = 2\vec{i}+\vec{j}+X\vec{i}(X+Y)\vec{j}$$
$$= (X+2)\vec{i}+(X+Y+1)\vec{j}$$

D'après 2) a), on vérifie facilement que $f(x) = x-1+\dfrac{1}{x-2}$

donc $M(x,y)_R \in \mathscr{C} \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = x-1+\dfrac{1}{x-2}$

$$\Leftrightarrow X+Y+1 = X+2-1+\frac{1}{X+2-2} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{X}$$

d'où l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère R' est $Y = \dfrac{1}{X}$.

Si on considère $F(x) = Y = \dfrac{1}{X}$ dans R'.

Le domaine de F est $\mathbb{R}^*$.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^*$, $-X \in \mathbb{R}^*$ et $F(-X) = \dfrac{1}{-X} = -F(X)$

D'où F est impaire donc sa représentation graphique $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à Ω l'origine du repère.

3) $D_a : y = -3x + a$.

T est tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x donc de coefficient directeur $f'(x)$.

D_a est de coefficient directeur -3.

$D_a // T \Leftrightarrow f'(x) = -3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = -3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 15 = 0$$

$a = 4$; $b = -16$; $b' = -8$; $c = 15$

$$x = \frac{8-2}{4} \text{ ou } x = \frac{8+2}{4}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{5}{2}$$

Equation des tangentes

$T_{\frac{3}{2}} : y = -3(x-\frac{3}{2}) + f(\frac{3}{2}) \longrightarrow f(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2}$ donc $T_{\frac{3}{2}} : y = -3x+3$

$T_{\frac{5}{2}} : y = -3(x-\frac{5}{2}) + f(\frac{5}{2}) \longrightarrow f(\frac{5}{2}) = \frac{7}{2}$ donc $T_{\frac{5}{2}} : y = -3x+11$

Construction des tangentes : voir figure .

b) Soit $M(x,y) \in \mathscr{C} \cap D_a \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \text{ et } x \neq 2 & (1) \\ y = -3x+a & (2) \end{cases}$

De (1) et (2) on obtient $\dfrac{x^2-3x+3}{x-2} = -3x+a$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+3 = (x-2)(-3x+a)$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+3 = -3x^2+ax+6x-2a$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-(9+a)x+3+2a = 0 \quad (E_a)$$

c) Le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_a est égal au nombre de solutions de l'équation (E_a).

$\Delta = (9+a)^2 - 4\times 4(3+2a)$ (le discriminant de (E_a))

$\Delta = a^2 - 14a + 33$.

Δ'_a = le discriminant réduit de Δ (pour étudier le signe de Δ)

$\Delta'_a = 49 - 33 = 16$

$a = 7+4 = 11$ ou $a = 7-4 = 3$

a	$-\infty$		3		11		$+\infty$
Δ		+		−		+	
Nombre de points de $\mathscr{C} \cap D_a$	2 solutions ⇓ $\mathscr{C} \cap D_a = \{2 \text{ pts}\}$		1 solution ⇓ $\mathscr{C} \cap D_a = \{1 \text{ pts}\}$	pas de solution ⇓ $\mathscr{C} \cap D_a = \varnothing$	1 solution ⇓ $\mathscr{C} \cap D_a = \{1 \text{ pts}\}$	2 solutions ⇓ $\mathscr{C} \cap D_a = \{2 \text{ pts}\}$	

d) Graphiquement

$D_a // T_{\frac{3}{2}} // T_{\frac{5}{2}}$

- Si D_a est au dessous de $T_{\frac{3}{2}}$ ou au dessus de $T_{\frac{5}{2}}$ $(a \in]-\infty, 3[\cup]11, +\infty[)$

  alors elle coupe $\mathscr{C}$ en deux points distincts.
- Si $D_a = T_{\frac{3}{2}}$ ou $D_a = T_{\frac{5}{2}}$ $(a = 3$ ou $a = 11)$

  alors elle est tangente à $\mathscr{C}$ d'où $\mathscr{C} \cap D_a = \{1 \text{ point}\}$
- Si D_a entre $T_{\frac{3}{2}}$ et $T_{\frac{5}{2}}$ $(a \in]3, 11[)$

  alors $\mathscr{C} \cap D_a = \varnothing$

4) On se place dans le cas où D_a coupe $\mathscr{C}$ en deux points $M'(x',y')$ et $M''(x'',y'')$.

Donc $a \in]-\infty,3[\cup]11,+\infty[$ et x' et x'' sont les solutions de l'équation (E_a)

a) $P(x,y) \in D_a \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3x+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=a-b \end{cases} \Rightarrow P(2,a-b)$

$$Q(x,y) \in D_a \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ y=-3x+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-3x+1 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+1}{4} \\ y=\dfrac{a-3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{a+1}{4},\frac{a-3}{4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PM'}\begin{pmatrix} x-x_P \\ y'-y_P \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PM'}\begin{pmatrix} x'-2 \\ -3(x'-2) \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{QM'}\begin{pmatrix} x'-y_Q \\ y'-y_Q \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{QM'}\begin{pmatrix} x'-\dfrac{a+1}{4} \\ -3\left(x'-\dfrac{a+1}{4}\right) \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{on prend : } y'=-3x'+a \\ \text{car } M' \in D_a \text{ aussi} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM'}\cdot\overrightarrow{QM'} &= (x'-2)\left(x'-\frac{a+1}{4}\right)+9(x'-2)\left(x'-\frac{a+1}{4}\right) \\ &= 10(x'-2)\left(x'-\frac{a+1}{4}\right) \\ &= \frac{10}{4}(x'-2)(4x'-a-1) \\ &= \frac{5}{2}\left[4x'^2-(9+a)x'+2a+2\right] \end{aligned}$$

Or x' solution de $(E) \Rightarrow 4x'^2-(9+a)x'+3+2a=0$ (x' vérifie l'équation E)

$$\Rightarrow 4x'^2-(9+a)x'+2a+2=-1$$

donc $\overrightarrow{PM'}\cdot\overrightarrow{QM'}=\frac{5}{2}\times(-1)=\frac{-5}{2}$ indépendant de a.

5) $g : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{|x-2|}$; $D_g = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

a) Si $x \in]2,+\infty[$ alors $g(x)=f(x) \Rightarrow \mathscr{C}'=\mathscr{C}$ dans $]2,+\infty[$

Si $x \in]-\infty,2[$ alors $g(x)=-f(x) \Rightarrow \mathscr{C}'=S_{(O,\vec{i})}(\mathscr{C})$ dans $]-\infty,2[$

Remarque :

On trace $D'=S_{(O,\vec{i})}(D)$ avant de tracer $\mathscr{C}'$

$D : y=x-1$

(voir figure)

b) Tableau de variations de g :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↙	$+\infty$

c) $(E_m) : x^2 - 3(x + m|x-2|) + 3(1 - |x-2|) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 3m|x-2| + 3 - 3|x-2| = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = |x-2|(3m+3)$

vérifions si $x = 2$ solution de $(E_m) : 2^2 - 3\times 2 + 3 = 0$ impossible

$1 = 0$

Pour $x \neq 2$, $E_m \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 3}{|x-2|} = 3m + 3 \Leftrightarrow g(x) = 3(m+1)$.

Soit $D_m : y = 3m + 3$ ce sont des droites parallèles à l'axe des abscisses

Le nombre de solutions de l'équation (E_m) est égal au nombre de points d'intersections de $\mathscr{C}'$ et D_m.

m	$-\infty$	$\frac{-2}{3}$		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$3m+3$	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
Nombre de solution de (E_m)	$\mathscr{C}' \cap D_m = \varnothing$ ⇓ pas de solution	$\mathscr{C}' \cap D_m = \varnothing$ ⇓ 2 solutions (+)	$\mathscr{C}' \cap D_m = \{1 \text{ pts}\}$ ⇓ 1 solution (+)	$\mathscr{C}' \cap D_m = \{2 \text{ pts}\}$ ⇓ 2solutions (+) et (-)	$\mathscr{C}' \cap D_m = \{2 \text{ pts}\}$ ⇓ 2 solution (+) et (-)	$\mathscr{C}' \cap D_m = \{3 \text{ pts}\}$ ⇓ 3 solutions (-) ; (+) et (+)	$\mathscr{C}' \cap D_m = \{4 \text{ pts}\}$ ⇓ 4 solutions (+), (+), (+) et (-)	

Remarque : la solution négative si le point d'intersection de $\mathscr{C}'$ et D_m a pour abscisse négative.

Fonctions trigonométriques

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Fonctions périodiques

Définition

On dit qu'une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ est périodique si et seulement s'il existe un réel non nul a tel que :

① Pour tout $x \in D$; $x+a \in D$.

② $f(x+a) = f(x)$

Le réel a est dit une période pour f.
Le plus petit réel a strictement positif qui est une période pour f est dit la période de f. On la note en général T.

Construction

Soit f une fonction et soit T sa période.

Soit g la restriction de f à $[a,a+T]$, la courbe représentative de f se déduit à partir de celle de g par des translations de vecteurs $kT\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Fonction cosinus

Soit M un point du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos x, \sin x)$ avec $(\vec{i},\overrightarrow{OM}) \equiv x\,[2\pi]$

- La fonction cosinus, notée cos, est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel $\cos x$. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \cos x$
- La fonction cosinus est paire.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\cos)'(x) = -\sin x$.
- La fonction cosinus est croissante sur $[-\pi,0]$ et décroissante sur $[0,\pi]$.
- La courbe représentative de la fonction cosinus est invariante par :
  - les translations de vecteur $k2\pi\,\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$
  - les symétries de centre $B_k(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$, $k \in \mathbb{Z}$
  - les symétries d'axes d'équation $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3. Fonction sinus

- La fonction sinus, notée sin, est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel $\sin x$. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \sin x$
- La fonction sinus est impaire.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\sin)'(x) = \cos x$.
- La fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
- La courbe représentative de la fonction sinus est invariante par :
  - les translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$
  - les symétries de centre $B_k(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$
  - les symétries d'axes d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

4. Fonction tangente

On appelle fonction tangente et on note tan la fonction $\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

- La fonction tangente est définie pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- La fonction tangente est impaire et périodique de période π.
- La fonction tangente est dérivable pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$.
- La fonction tangente est croissante sur tout intervalle $\left]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- La courbe représentative de la fonction tangente est invariante par :
  - les translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$
  - les symétries de centre $B_k(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$

5. Limites remarquables

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

6. Fonctions $x\mapsto\cos(\omega x+\varphi)$; $x\mapsto\sin(\omega x+\varphi)$ où $\omega\in\mathbb{R}^*$ et $\varphi\in\mathbb{R}$

- Les fonctions $f:x\mapsto\sin(\omega x+a)$ et $g:x\mapsto\cos(\omega x+\varphi)$ sont périodiques de période $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.
- Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\omega\cos(\omega x+\varphi) \text{ et } g'(x)=-\omega\sin(\omega x+\varphi)$$

EXERCICES

1 Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer sa fonction dérivée dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \sin 2x + 2\cos x$
2) $f : x \mapsto 1 + \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3) $f : x \mapsto \cos^3 x - \sin^3 x$
4) $f : x \mapsto \sin|x| - \sin^2 x$

2 Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x}$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos^2 x - \cos x + 2}{x\sin x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(4\sin x - \sin 4x)}{1-\cos x}$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin 2x}{\sin 3x}$
6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$
7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-\cos x + \sin 4x}$

3 En utilisant le nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{x\cos x + \pi}{x-\pi}$
2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x-\pi}$
3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{\pi - 3x}$
4) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos x - \sqrt{3}}{4\cos^2 x + 4\sin x - 1}$
5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1}$
6) $\lim\limits_{x\to \frac{5\pi}{6}} \frac{\cos(2x+\frac{\pi}{3}) - 1}{2\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 1}$

4 Soit $f : x \mapsto \cos 2x - 2\sin x$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$.
   b) Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$.
   c) En déduire qu'il suffira d'étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
3) a) Tracer C_0 la courbe de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
   b) Expliquer comment tracer la courbe complète $\mathscr{C}$ de f.

5 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthogonal et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

$\mathscr{C}_0$ la courbe de la restriction de f à $[0, \pi]$.

1) Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

2) a) Tracer $\mathscr{C}_0$.
   b) Expliquer comment tracer la courbe complète $\mathscr{C}$ de f.
3) Soit $\mathscr{C}'$ représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$
   a) Exprimer $g(x + \frac{\pi}{2})$ à l'aide de f(x).
   b) En déduire que $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par une translation dont on précisera le vecteur.
   c) Construire $\mathscr{C}'_0$ courbe de la restriction de la fonction g sur $[0, \pi]$.

6 Etudier la fonction numérique f d'une variable réelle x :

$$f : x \mapsto f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$$

1) Tracer la courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Déterminer les équations des axes de symétrie.
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \cos^2 x - \cos x + 2$
   En utilisant la courbe de f, tracer la courbe de g (expliquer).

7 Soit $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$; $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en $\frac{\pi}{2}$.
2) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
3) Calculer $f(\pi - x) + f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.
4) Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales qu'on précisera.
5) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \pi[$ et calculer $f'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Donner une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
6) Tracer Δ et $\mathscr{C}$
7) a) Résoudre dans $]0, \pi[$ l'équation $f(x) = 1$.
   b) Résoudre graphiquement $-1 \leq f(x) \leq 1$.

8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$

$\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathscr{C}_0$ la représentation graphique de la restriction de f à $[0, \pi]$.

1) Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.
2) a) Tracer $\mathscr{C}_0$. b) Expliquer comment on trace $\mathscr{C}$.
3) Soit g : $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin|2x|$
   a) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, $g(x) = f(x)$.
   b) Etudier la dérivabilité de g en zéro.
   c) Soit $\mathscr{C}'$ la courbe de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Construire $\mathscr{C}'$ en utilisant $\mathscr{C}_0$.
   d) Résoudre dans $[0,\pi]$, $g(x) = 0$
   e) En déduire graphiquement les solutions dans $[-\pi,\pi]$ les solutions de l'inéquation $\sqrt{3}\sin|2x| \leq 2\cos^2 x$.

9 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin 2x + 2\sin x$
1) Etudier les variations de f
2) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
   a) Donner une équation de la tangente Δ à (C) en O.
   b) Tracer Δ et (C).
3) Soit h un réel. Calculer $f(\pi+h)$ et $f(\pi-h)$. Que peut-on déduire pour (C) ?

10 la fonction f définie sur $[-3\pi,3\pi]$ par $f(x) = x + \sin x$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1) Etudier la parité de la fonction f. Que peut on déduire pour (Γ).
2) Démontrer que pour tout réel x, $f(x+2\pi) = f(x) + 2\pi$.
   Interpréter géométriquement ce résultat.
3) Etudier les variations de f. Donner son tableau de variation.
4) Préciser l'équation de chacune des tangentes à (Γ) aux points d'abscisses 0 et 2π.
5) Montrer que la courbe (Γ) est comprise entre les droites D et D' d'équations respectives $y = x+1$ et $y = x-1$.
   Préciser les abscisses des points de contact de (Γ) avec D et D'.
6) Construire la courbe (Γ) ainsi que les droite D et D'.

11 1) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \cos 5x + 5\cos x$.
   a) Montrer que $g'(x) = -10\sin x\cos 2x(4\cos^2 x - 1)$
   b) Etudier les variations de g et en déduire que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) \geq 0$.
2) Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$
   a) Montrer que la droite $D : x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie.
   b) Montrer que l'intervalle d'étude peut être réduit à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Montrer que pour tous réels a et b on a :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad \text{et} \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

d) Etudier les variations de f et construire la représentation graphique (C_1) de la restriction de f à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Comment déduire les autres parties de la représentation graphique de f à partir de (C_1).

CORRIGES

1

1) $f : x \mapsto \sin 2x + 2\cos x$

$\left.\begin{array}{l} u : x \mapsto \sin 2x \\ v : x \mapsto \cos x \end{array}\right\}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f = u + 2v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x) + 2v'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x$.

2) $f : x \mapsto \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + 1$

$u : x \mapsto \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sqrt{2}\, u'(x) = 2\sqrt{2}\, \cos(2x - \frac{\pi}{4})$.

3) $f : x \mapsto \cos^3 x - \sin^3 x$

$\left.\begin{array}{l} u : x \mapsto \cos x \\ v : x \mapsto \sin x \end{array}\right\}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f = u^3 - v^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = 3u'(x)u^2(x) - 3v'(x)v^2(x) = -3\sin x\cos^2 x - 3\cos x\sin^2 x$

$= -3\sin x\cos x(\cos x + \sin x)$

4) $f : x \mapsto \sin|x| - \sin^2 x$, $f(x) = \begin{cases} \sin x - \sin^2 x & \text{si } x \geq 0 \\ -\sin x - \sin^2 x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

- Sur $]0, +\infty[$, $f(x) = \sin x - \sin^2 x$

  $u : x \mapsto \sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

  $f = u - u^2$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

  Pour tout $x > 0$,

  $f'(x) = u'(x) - 2u'(x)u(x) = \cos x - 2\cos x\sin x = \cos x(1 - 2\sin x)$.

  Pour tout $x < 0$,

  $f'(x) = -u'(x) - 2u'(x)u(x) = -\cos x - 2\cos x\sin x = -\cos x(1 + 2\sin x)$

- Dérivabilité en 0 :

*) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x - \sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}(1 - \sin x) = 1$

D'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

*) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-\sin x - \sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}(-1 - \sin x) = -1$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.

On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0.

2

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}=\dfrac{2^2}{1^2}=4$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos^2 x-\cos x+2}{x\sin x}=?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x-\cos x+2}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(1-\cos x)(2+\cos x)}{x^2}}{\dfrac{x\sin x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)\cdot(2+\cos x)}{\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{\frac{1}{2}\times 3}{1}=\frac{3}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(4\sin x-\sin 4x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{4\sin x}{x}-\dfrac{\sin 4x}{x}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=\dfrac{4-4}{\frac{1}{2}}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\tan x}{x}-\dfrac{\sin 2x}{x}}{\dfrac{\sin 3x}{x}}=\dfrac{1-2}{3}=\dfrac{1}{3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{|x|}}{\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{|x|}}{\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}4\left[\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\right]=4\lim_{X\to 0}\left[\frac{1-\cosh}{h^2}\right]=4\times\frac{1}{2}=2$$

(on a posé $h=2x$). Donc $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}}=\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-\sin 3x}{x}}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}=\frac{-3}{\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{x^2}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Remarque : On pose $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ donc f n'a pas de limite en zéro

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1-\cos x+\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x}+\frac{\sin 4x}{x}}=\dfrac{1}{4}$

3

1) $\lim\limits_{x\mapsto\pi}\dfrac{x\cos x+\pi}{x-\pi}=?$

Soit : $f : x\mapsto x\cos x$; $f(\pi)=-\pi$

$\Rightarrow$ f = dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=-x\sin x+\cos x$

en particulier en f est dérivable $x_0=\pi$ donc :

$$\lim_{x\mapsto\pi}\frac{x\cos x+\pi}{x-\pi}=\lim_{x\mapsto\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$
$$=f'(\pi)$$
$$=-1$$

2) $\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{2x-\pi}=?$

Soit $f : x\mapsto \sin 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2\cos 2x$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\pi=-2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi=0$

donc $\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{2x-\pi}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x-\sin 2\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-2}{2}=-1$$

3) $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{\pi - 3x}$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{3}\cos x - \sin x$; $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

$$\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{\pi - 3x} = -\frac{1}{3}\left(\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}\right) = \frac{-1}{3} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{3} \times (-2) = \frac{2}{3}$$

4) $\lim\limits_{x \mapsto \frac{-\pi}{6}} \dfrac{2\cos x - \sqrt{3}}{4\cos^2 x + 4\sin x - 1}$

Soient les fonctions : $f : x \mapsto 2\cos x - \sqrt{3}$; $f\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) = 0$

$$g : x \mapsto 4\cos^2 x + 4\sin x - 1 \quad ; \quad g\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 0$$

f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (d'après opérations sur les fonctions dérivables)

$$f'(x) = -2\sin x \to f'\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 1$$

$$g'(x) = -8\sin x\cos x + 4\cos x \to g'\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \mapsto -\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos x - \sqrt{3}}{4\cos^2 x + 4\sin x - 1} = \lim_{x \mapsto -\frac{\pi}{6}} \frac{\dfrac{f(x) - f\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{x + \frac{\pi}{6}}}{\dfrac{g(x) - g\left(\frac{-\pi}{6}\right)}{x + \frac{\pi}{6}}} = \frac{f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{g'\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \left(\text{car } g'\left(\frac{-\pi}{6}\right) \neq 0\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

5) $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1} = ?$

Soient : $f : x \mapsto \sqrt{2}\sin x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$g : x \mapsto \tan x - 1$, $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ donc dérivable en $\dfrac{\pi}{4}$.

$$f'(x)=\sqrt{2}\cos x \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$g'(x)=1+\tan^2 x \to g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2 \quad \left(\tan\frac{\pi}{4}=1\right)$$

$$\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\tan x-1}=\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\frac{\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{x-\frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}}=\frac{f'(\frac{\pi}{4})}{g'(\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{2}$$

6) $$\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}}\frac{\cos(2x+\frac{\pi}{3})-1}{2\cos(2x-\frac{\pi}{3})+1}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}}\frac{u(x)-u(\frac{5\pi}{6})}{v(x)-v(\frac{5\pi}{6})}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}}\frac{\dfrac{u(x)-u(\frac{5\pi}{6})}{x-\frac{5\pi}{6}}}{\dfrac{v(x)-v(\frac{5\pi}{6})}{x-\frac{5\pi}{6}}} \quad (1)$$

où $u(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ et $v(x)=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$ et $u(\frac{5\pi}{6})=1$ et $v(\frac{5\pi}{6})=-1$

les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=-2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$;

$v'(x)=-4\sin(2x-\frac{\pi}{3})$. On a $u'(\frac{5\pi}{6})=0$ $v'(\frac{5\pi}{6})=2\sqrt{3}\neq 0$ (2)

D'après (1) et (2) on déduit $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{6}}\dfrac{\cos(2x+\frac{\pi}{3})-1}{2\cos(2x-\frac{\pi}{3})+1}=0$

4 $f : x \mapsto \cos 2x-2\sin x$

1) a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x+2\pi\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(x+2\pi)&=\cos[2(x+2\pi)]-2\sin(x+2\pi)\\&=\cos(2x+4\pi)-2\sin x\\&=\cos 2x-2\sin x\\&=f(x)\end{aligned}$$

Donc f est périodique de période 2π.

b) $$\begin{aligned}f(\pi-x)&=\cos[2(\pi-x)]-2\sin(\pi-x)\\&=\cos(2\pi-2x)-2\sin x\\&=\cos(-2x)-2\sin x\\&=\cos 2x-2\sin x\\&=f(x)\end{aligned}$$

$\sin(\pi-x)=\sin x$
$\cos(-2x)=\cos 2x$

c) f est périodique de période 2π donc on pourra l'étudier sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ un intervalle d'amplitude 2π. On a $f(2a-x)=f(x)$ avec $a=\frac{\pi}{2}$ (d'après 1/b/)

donc la droite $D : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

Donc il suffit d'étudier f sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = -2\sin 2x - 2\cos x = -4\sin x\cos x - 2\cos x = -2\cos x(2\sin x + 1)$.

Sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\sin x = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6}$$

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	+		+	
$2\sin x + 1$		−	0	+	
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3

3) a) Voir figure.
b) f périodique de période $T = 2\pi$ donc on trace $\mathscr{C}$ par la translation de $\mathscr{C}_0$ de vecteurs $2k\pi\,\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

5 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})-1$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,\pi]$.

$f'(x)=2\sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ pour tout $x\in[0,\pi]$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{4})=0$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$

$k=0$, $x=\frac{3\pi}{8}\in[0,\pi]$

$k=1$, $x=\frac{7\pi}{8}\in[0,\pi]$

x	0		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$X=2x-\frac{\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	$\sqrt{2}-1$	↘	$-\sqrt{2}-1$	↗	-2

2) a)

$f'_d(0)=2$ donc au point d'abscisse 0, $\mathscr{C}$ admet une demi tangente de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

$f'_g(\pi)=2$ donc au point d'abscisse π, admet une demi tangente de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

b) f est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|} = \pi$.

$\mathscr{C}_0$ la courbe de la restriction de f à l'intervalle $[0,\pi]$ d'amplitude π donc on trace $\mathscr{C}$ par les translations de $\mathscr{C}_0$ de vecteurs $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $g(x) = -\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$

a) $g(x+\frac{\pi}{2}) = -\sqrt{2}\sin\left[2(x+\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4}\right] - 1 = -\sqrt{2}\sin(2x+\pi-\frac{\pi}{4}) - 1$

$= \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$

$= f(x)$

b) Soit $M(x, f(x)) \in \mathscr{C}$ et $M'(x+\frac{\pi}{2}, g(x+\frac{\pi}{2})) \in \mathscr{C}'$

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x+\frac{\pi}{2}-x \\ g(x+\frac{\pi}{2})-f(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \frac{\pi}{2}\vec{i} \Rightarrow M' = t_{\frac{\pi}{2}\vec{i}}(M)$$

donc $\mathscr{C}' = t_{\frac{\pi}{2}\vec{i}}(\mathscr{C})$.

c)

6

1) • Domaine de définition: $f : x \mapsto f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

• Périodicité : Pour tout x réel : $f(x+2\pi) = f(x)$. Donc f a pour période 2π. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle d'amplitude 2π et de construire la représentation graphique correspondant à cet intervalle, on aura les autres parties de la courbe par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ (où $k \in \mathbb{Z}$).

• Axe de symétrie : On a aussi, $f(\pi - x) = f(x)$ donc $f(2\times\frac{\pi}{2} - x) = f(x)$. Il en résulte que la droite $D : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$ de f.

Il suffit alors d'étudier f sur un intervalle d'amplitude π, l'une des bornes est $\frac{\pi}{2}$, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

- Variation de f : f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\sin x\cos x - \cos x = \cos x(2\sin x - 1)$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	+	|	+	0
$2\sin x - 1$	-3	–	0	+	
$f'(x)$	0	–	0	+	0
$f(x)$	4 ↘		$\frac{7}{4}$	↗	2

- Tracé de la courbe de f : Soit (Γ_1) la représentation graphique de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, (Γ_2) la symétrique de (Γ_1) par rapport à D, alors $(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$ est la représentation graphique de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ qui est un intervalle d'amplitude 2π, les autres parties de la courbe représentant f se déduisent de $(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$ par les translations de vecteur $2k\pi\,\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Nous avons aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour $k \in \mathbb{Z}$, $f(\pi + k2\pi - x) = f(x)$ donc les droites $D_k : x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sont des axes de symétrie pour la courbe de f

2) Pour tout réel x, $g(x)=\cos^2 x-\cos x+2=\sin^2(x+\frac{\pi}{2})-\sin(x+\frac{\pi}{2})+2=f(x+\frac{\pi}{2})$

D'où $g(x-\frac{\pi}{2})=f(x)$, pour tout réel x.

Soit $M(x,f(x))\in\mathscr{C}_f$ et $M'(x-\frac{\pi}{2},g(x-\frac{\pi}{2}))\in\mathscr{C}_g$

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2}\\0\end{pmatrix}$, il en résulte que M' se déduit de M par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

7 $f:]0,\pi[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x} & \text{si } x\neq\frac{\pi}{2}\\ f(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$

1) Pour tout $x\in]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$

Soient $u:x\mapsto 1+\cos 2x$ et $v:x\mapsto\sin 2x$. On a $u(\frac{\pi}{2})=0$ et $v(\frac{\pi}{2})=0$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$,

$u'(x)=-2\sin 2x$ et $v'(x)=2\cos 2x$ d'où $u'(\frac{\pi}{2})=0$ et $v'(\frac{\pi}{2})=-2\neq 0$

donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{u(x)-u(\frac{\pi}{2})}{v(x)-v(\frac{\pi}{2})}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{u(x)-u(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}}{\dfrac{v(x)-v(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{u'(\frac{\pi}{2})}{v'(\frac{\pi}{2})}=0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=f(\frac{\pi}{2})$ donc continues en $\frac{\pi}{2}$

2) Pour tout $x \in]0,\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $f(x) = \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0 = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}$.

Conclusion : Pour tout $x \in]0,\pi[$, $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

3) $f(\pi - x) + f(x) = \frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\cos x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 0$

- pour $x \in]0,\pi[$ on a $-x \in]-\pi,0[$ d'où $\pi - x \in]0,\pi[$
- $f(2a - x) + f(x) = 2b$ avec $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = 0$.

D'où le point $A(\frac{\pi}{2},0)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

4)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \cos\ (x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ d'où } D_1 : x = 0 \text{ est asymptote verticale à } \mathscr{C}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \pi^-} \cos(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to \pi^-} \sin x = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to \pi^-} f(x) = -\infty \text{ d'où } D_2 : x = \pi \text{ est asymptote verticale à } \mathscr{C}.$$

5) a) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \in]0,\pi[$

f est dérivable sur $]0,\pi[$.

Pour tout $x \in]0,\pi[$, $f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0$

b)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	-1	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

c) $\Delta : y = f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$

$\Delta : y = -x + \frac{\pi}{2}$

6) Voir figure.

7) a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = \sin x$, dans $]0, \pi[$, $x = \frac{\pi}{4}$.

b) Soit $\Delta_1 : y = 1$, $\Delta_2 : y = -1$.

On a $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ centre de symétrie de $\mathscr{C}$

Donc $f(\pi - x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\pi - x) = -f(x)$.

On prend $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(\pi - \frac{\pi}{4}) = -f(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow f(\frac{3\pi}{4}) = -1$.

Les solutions de $-1 \leq f(x) \leq 1$ sont les abscisses de la partie de $\mathscr{C}$ située entre les droites Δ_1 et Δ_2 donc $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

8 $f : x \mapsto 1 - 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4\cos(2x - \frac{\pi}{6})$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Dans $[0, \pi]$, $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$X = 2x - \frac{\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	2	↘	-1	↗	3	↘	2

2) a)

b) f est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$.

$\mathscr{C}_0$ est la représentation de la restriction de f à $[0,\pi]$ d'amplitude π donc on trace $\mathscr{C}$ par les translations de $\mathscr{C}_0$ de vecteurs $k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3) $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin|2x|$

a) Si $x \in [0,\pi]$ alors $g(x) = 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) \\ &= 1 - 2(\sin 2x \cos\frac{\pi}{6} - \cos 2x \sin\frac{\pi}{6}) \\ &= 1 - \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x \\ &= 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x \\ &= g(x) \end{aligned}$$

$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $g(0) = 2$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=-2\sqrt{3}$$

car f est dérivable en 0 et on a $f'(x)=-4\cos(2x-\frac{\pi}{6})$.

Donc g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=-2\sqrt{3}$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left[-2(1+\cos x)\right]\left[\frac{1-\cos x}{x}+\sqrt{3}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)\right]$$

Donc g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0)=2\sqrt{3}$.

$g'_g(0)\neq g'_d(0)$ d'où g n'est pas dérivable en 0.

c) Si $x\in[0,\pi]$, $g(x)=f(x)$ alors $\mathscr{C}_0$ est aussi la courbe de la restriction de g sur $[0,\pi]$. D'autre part, pour tout $x\in[-\pi,\pi]$, $-x\in[-\pi,\pi]$ et

$$\begin{aligned}g(-x)&=2\cos^2(-x)-\sqrt{3}\sin|-2x|\\&=2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin|2x|\\&=g(x)\end{aligned}$$

Donc g est une fonction paire d'où on trace la courbe de la restriction de g à $[-\pi,0]$ par symétrie de $\mathscr{C}_0$ par rapport à l'axe des ordonnées.

d) $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \quad , x\in[0,\pi]$

$$\Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi & \text{ou}\\ 2x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+k\pi & \text{ou}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Dans $[0,\pi]$, $k=0$ $\begin{cases} \nearrow x=\frac{\pi}{6} \\ \searrow x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ donc $S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\}$.

e) $\sqrt{3}\sin|2x|\leq 2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin|2x|\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$.

Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}'$ situé au dessus de l'axe des abscisses.

Remarque : Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées les solutions de $g(x)=0$ sur $[-\pi,0]$ sont $x=-\frac{\pi}{6}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}$.

$$S=\left[-\pi,\tfrac{-\pi}{2}\right]\cup\left[\tfrac{-\pi}{6},\tfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\tfrac{\pi}{2},\pi\right]$$

9

1) • Domaine de définition : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

• Périodicité : La fonction $x\mapsto \sin 2x$ a pour période π.
La fonction $x\mapsto 2\sin x$ a pour période 2π.
Donc 2π qui est multiple de π et 2π est une période de f.

• Parité : On a , pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et
$f(-x)=\sin(-2x)+2\sin(-x)=-\sin 2x-2\sin x=-f(x)$
f es impaire.

• Domaine d'étude : Puisque f est périodique et de période 2π alors il suffit de l'étudier sur $[-\pi,\pi]$ qui se réduit à $[0,\pi]$ car f est impaire.
Le domaine d'étude est réduit à $[0,\pi]$.

•

$$\begin{aligned} f'(x)&=2\cos 2x+2\cos x=2(\cos 2x+\cos x)\\ &=2(2\cos^2 x-1+\cos x)\\ &=2(2\cos^2 x+\cos x-1)\end{aligned}$$

Soit $P(x)=2X^2+X-1$ qui s'annule pour $X'=-1$ et $X''=\frac{1}{2}$.

Donc $P(X)=2(X+1)(X-\frac{1}{2})$

Par conséquent $f'(x)=2\left[2(\cos x+1)(\cos x-\frac{1}{2})\right]$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos x-\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	

x	0		π
$\cos x+1$	0	$+$	0

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	4	+	0	−	0
f(x)	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

$f(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2,6$.

2) a) Une équation de Δ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Comme $f'(0) = 4$ et $f(0) = 0$, on obtient $y = 4x$.

b) Représentation graphique : Le repère étant orthonormé, il est conseillé de graduer l'axe des abscisses avec des multiples de $\frac{\pi}{3} \simeq 1,05$.

On trace d'abord (C_1) correspondante à la restriction de f à l'intervalle $[0,\pi]$, puis $S_O(C_1) = C_2$ car f est impaire.

On obtient $(C) = (C_1) \cup (C_2)$.

On fait ensuite des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z}^*)$

3) f est définie sur $\mathbb{R}$.

$f(\pi+h) = \sin(2(\pi+h) + 2\sin(\pi+h) = \sin 2h - 2\sin h$

$f(\pi-h) = \sin 2(\pi-h) + 2\sin(\pi-h) = -\sin 2h + 2\sin h$

D'où $f(\pi+h) = f(\pi-h)$.

Soient $M(\pi+h, f(\pi+h))$ et $M'(\pi-h, f(\pi-h))$ deux points de la courbe $\mathscr{C}$ de f.

Soit I le milieu de $[MM']$, on a $I(\pi, 0)$ indépendant de h.

Donc pour tout réel h, les points M et M' de la courbe $\mathscr{C}$ sont symétriques par rapport à $I(\pi, 0)$.

I est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

10

1) Pour tout $x \in [-3\pi, 3\pi]$, $-x \in [-3\pi, 3\pi]$

et $f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x = -(x + \sin x) = -f(x)$

f est impaire, la courbe (Γ) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

2) On a $f(x+2\pi) = x+2\pi+\sin(x+2\pi) = x+2\pi+\sin x = 2\pi+f(x)$.

Interprétation géométrique :

Considérons les points M et N de la courbe (Γ) d'abscisses respectives x et $x+2\pi$.

$M(x, f(x))$ et $N(x+2\pi, f(x+2\pi))$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi+f(x)-f(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$

Le vecteur $\overrightarrow{MN} = (2\pi)\vec{i}+(2\pi)\vec{j}$ est donc un vecteur constant (ne dépend pas de x).

Le point N est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$.

Ceci prouve que (Γ) est invariante par cette translation.

3) Pour tout $x \in [-3\pi, 3\pi]$, $f'(x) = 1+\cos x$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1$ donc $f'(x) \geq 0$ et par suite f est croissante sur $[-3\pi, 3\pi]$

Or pour tout réel x, $\cos x \geq -1$ donc $1+\cos x \geq 0$.

L'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $\cos x = -1$.

Sur l'intervalle $[0, \pi]$, $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$.

D'où le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$:

x	0		π
$f'(x)$	2	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	π

x	0		π		2π		3π
$f'(x)$	2	$+$	0	$+$	2	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	π	$\nearrow$	2π	$\nearrow$	3π

4) $f'(0) = f'(2\pi) = 2$.

$T_0 : y = 2x$

$T_{2\pi} : y = 2(x-2\pi)+2\pi = 2x-2\pi$

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$x-1 \leq x-\sin x \leq x+\sin x$$
$$x-1 \leq f(x) \leq x+1$$

La courbe (Γ) est située entre les droites $D : y = x+1$ et $D' : y = x+1$.

(Γ) est tangente à D pour tout $x \in [-3\pi, 3\pi] \Leftrightarrow x+\sin x = x+1$ et $x \in [-3\pi, 3\pi]$

$\sin x = 1$ et $x \in [-3\pi, 3\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{5\pi}{2}$ ou $x = -\frac{3\pi}{2}$

(Γ) est tangente à D' pour tout $x \in [-3\pi, 3\pi] \Leftrightarrow x + \sin x = x - 1$ et $x \in [-3\pi, 3\pi]$

$\sin x = -1$ et $x \in [-3\pi, 3\pi] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$ ou $-\frac{5\pi}{2}$

6) On trace d'abord la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$, on obtient (C_1).
Puisque f est impaire, O est un centre de symétrie pour la courbe de f.
On trace alors la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, 0]$ par symétrie de (C_1) par rapport à O, on obtient $S_O(C_1) = (C_2)$.
$(\Gamma) = (C_1) \cup (C_2)$ est la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
On effectue ensuite une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\pi\\2\pi\end{pmatrix}$ puis une translation de vecteur $-\vec{u}$.

11

1) a) $g(x) = \cos 5x + 5\cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (somme de fonctions dérivables).

$g'(x) = -5\sin 5x - 5\sin x = -5(\sin x + \sin 5x)$

$$\begin{aligned}\sin x+\sin 5x &= \sin x+\sin(x+4x)=\sin x+\sin x\cos 4x+\cos x\sin 4x\\ &= \sin x(1+\cos 4x)+2\sin 2x\cos 2x\cos x\\ &= \sin x(2\cos^2 2x)+2\cdot 2\sin x\cos x\cos 2x\cos x\\ &= 2\sin x\cos 2x(\cos 2x+2\cos^2 x)\\ &= 2\sin x\cos 2x(2\cos^2 x-1+2\cos^2 x)\\ &= 2\sin x\cos 2x(4\cos^2 x-1)\end{aligned}$$

$$g'(x)=-10\underbrace{\sin x}_{+}\cos 2x\underbrace{(2\cos x+1)}_{+}(2\cos x-1)$$

b)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$2x$	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos 2x$		$+$	0	$-$	

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\cos x-1$		$+$	$\frac{\pi}{2}$	$-$	

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	6	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

La lecture du tableau permet de conclure que 0 est un minimum absolu de f atteint en $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)\geq 0$ et $g(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$

2) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$

a) f est définie si et seulement si $\sin 3x\neq 0$.

On a : $\sin 3x=0 \Leftrightarrow 3x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

- Pour tout $x\neq\frac{k\pi}{3}$ alors $(\pi-x)\neq\frac{k\pi}{3}$

  Justification : Si $\pi-x=\frac{k\pi}{3}\Rightarrow x=\pi-\frac{k\pi}{3}=\frac{(3-k)\pi}{3}=\frac{k'\pi}{3}$ ce qui impossible.

- $f(\pi-x)=\dfrac{\cos 2(\pi-x)}{\sin 3(\pi-x)}=\dfrac{\cos(2\pi-2x)}{\sin(3\pi-3x)}=\dfrac{\cos(-2x)}{\sin(\pi-3x)}=\dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}=f(x)$

  $f(\pi-x)=f(x)$.

Donc la droite $D : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$ de f.

b) La fonction $u : x \mapsto \cos 2x$ est périodique de période π

La fonction $v : x \mapsto \sin 3x$ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

2π est le plus petit multiple de π et $\frac{2\pi}{3}$ f est périodique de période 2π.

Donc il suffit d'étudier f sur un intervalle d'amplitude 2π. Puisque f est impaire ($f(-x) = f(x)$) alors cet intervalle est réduit à $]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$.

O est un centre de symétrie de la représentation graphique de f.

D'autre part la droite $D : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie donc l'intervalle se réduit à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

c) • $\cos(a-b) - \cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b - \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$= 2 \sin a \sin b$

d'où $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

• $\cos(a-b) + \cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b + \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$= 2 \cos a \cos b$

d'où $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

d) Les fonctions $u : x \mapsto \cos 3x$ et $v : x \mapsto \sin 3x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ on a $v(x) \neq 0$ donc $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

et la fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{-2\sin 2x \sin 3x - 3\cos 2x \cos 3x}{\sin^2 3x} = -\frac{2 \times \sin 2x \sin 3x + 3 \times \cos 2x \cos 3x}{\sin^2 3x}$$

En utilisant les égalités établies dans la question c) on obtient :

$$\sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(2x-3x) - \cos(2x+3x)] = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x)$$

$$\cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}[\cos(2x+3x) + \cos(2x-3x)] = \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x)$$

Donc $f'(x) = -\frac{\cos 5x + 5\cos x}{2\sin^2 3x} = -\frac{g(x)}{2\sin^2 3x}$

Le signe de $f'(x)$ est le contraire de celui de g(x).

• Calcul de limites :

La fonction $u : x \mapsto \cos 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue à droite en 0 et en $\frac{\pi}{3}$ et on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos 2x = u(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos 2x = u(\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

La fonction $v : x \mapsto \sin 3x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue à droite en 0 et en $\frac{\pi}{3}$. En utilisant le tableau de signe de $\sin 3x$, on obtient :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \sin 3x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^+} \sin 3x = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^-} \sin 3x = 0^+$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \cos 2x = \cos 0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \sin 3x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

La droite d'équation des ordonnées est une asymptote à la courbe (Γ).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^+} \sin 3x = 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^-} \sin 3x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$$

La droite $\Delta : x = \frac{\pi}{3}$ est une asymptote à (Γ)

- Tableau de variation de f sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

D'où la représentation graphique (C_1) :

4) On obtient toute la représentation graphique de f de la façon suivante :

$S_D(C_1) = C_2$ donc $(C_1) \cup (C_2) = (\Gamma_1)$ est la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.

Par symétrie de (Γ_1) par rapport à O on obtient (Γ_2). $(\Gamma_1) \cup (\Gamma_2) = (\Gamma)$ représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

On fait des translations de (Γ) de vecteurs $2k\pi\,\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

Suites réelles

1. Suites réelles : rappel

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition : ***relation de récurrence***	Il existe un réel r tel que pour tout n, $U_{n+1} = U_n + r$	Il existe un réel $q \neq 0$ tel que pour tout n, $U_{n+1} = qU_n$
Terme général	$U_n = U_p + (n-p)\cdot r$	$U_n = U_p \cdot q^{n-p}$
Somme $S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ $(p \leq n)$	$S_n = \frac{(n-p+1)}{2}(U_p + U_n)$	$S_n = U_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)(q \neq 1)$
Sommes particulières	$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$	Si $a \neq 1$, $1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

2. Variation d'une suite

Définition : sens de variation d'une suite

Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq n_0 \geq 0$.

⇨ La suite (U_n) est dite croissante si $U_{n+1} \geq U_n$ pour tout $n \geq n_0$.
Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant :
$U_{n_0} \leq U_{n_0+1} \leq \cdots \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \cdots$

⇨ La suite (U_n) est dite décroissante si $U_{n+1} \leq U_n$ pour tout $n \geq n_0$.
Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant :
$U_{n_0} \geq U_{n_0+1} \geq \cdots \leq U_n \geq U_{n+1} \geq \cdots$

⇨ Une suite est dite monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Méthode :

Trois méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite :

① **Suite définie par $U_n = f(n)$**, soit p un entier naturel.

- Si f est croissante sur $[p,+\infty[$ alors la suite (U_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[p,+\infty[$ alors la suite (U_n) est décroissante.

Attention : la réciproque est fausse : Une suite peut être croissante sans que la fonction associée le soit.

② Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$

③ Pour une suite à termes strictement positifs, comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1.

Définition : Suite majorée, minorée et bornée

Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$ $(p \in \mathbb{N})$

⇨ La suite (U_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq p$, $U_n \leq M$.

⇨ La suite (U_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq p$, $U_n \geq m$.

⇨ La suite (U_n) est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

4. Suites récurrentes : $U_{n+1} = f(U_n)$

- On trace dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.
- Le réel U_0 étant donné, on obtient $U_1 = f(U_0)$ comme ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse U_0 Soit A_0 ce point.
- Le point d'intersection de la droite $\Delta : y = x$ et la droite d'équation $y = U_1$ a pour abscisse U_1
- Ayant ainsi reporté U_1 sur l'axe des abscisses, on peut obtenir U_2 comme l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse U_1, soit A_1 ce point.

  On reporte alors U_2 sur l'axe des abscisses, et on continue...

ENONCES

1 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2U_{n+1} = U_n - 2n - 3 \end{cases}$$

1) Calculer U_1 et U_2 et vérifier que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n + pn - 1$, $p \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que la suite V est géométrique pour un entier p qu'on déterminera.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Exprimer, en fonction de n, les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ puis $S'_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

2 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ tel que $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = -3n^2 - n + 2$

1) Calculer U_0, U_1 et U_2 et exprimer U_n en fonction de n.
2) Montrer que la suite U est arithmétique dont on précisera la raison.

3 Soit U une suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 6 \text{ et } U_{n+1} = U_n - 2n + 3 \quad (n \in \mathbb{N})$$

1) Vérifier que U n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
2) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_{n+1} - U_n$.
   a) Montrer que V est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} V_k$ en fonction de n et en déduire U_n en fonction de n.

4 Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on pose $U_n = \dfrac{1}{n(n-1)(n+1)}$

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: $U_n = \dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2(n+1)}$
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: $\sum_{k=2}^{n} U_k = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\dfrac{1}{k}$
3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: $\sum_{k=2}^{n} U_k = \dfrac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$

5 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 2 - \dfrac{4}{U_n - 6} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Montrer que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Vérifier Montrer que pour tout entier non nul n : $U_n < 4$
3) Montrer que pour tout entier non nul n : $U_{n+1} > U_n$ et en déduire un encadrement de U_n
4) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 4}$
   a) Montrer que V est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
5) Soit n un entier non nul, exprimer à l'aide de n chacune des sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=1}^{n} kU_k \quad \text{et} \quad S' = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} U_k + \frac{1}{k+1} \right)$$

6 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 1}{1 + U_n} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $U_n > 1$.
2) Montrer que U est une suite décroissante.
3) Soit V la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n - 1}$
   a) Montrer que V est une suite arithmétique.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \dfrac{1}{V_0} \cdot \dfrac{1}{V_1} \cdot \dfrac{1}{V_2} \cdots\cdots \dfrac{1}{V_n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$.
   a) Calculer W_0, W_1 et W_2.
   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
   c) En déduire que $S_n < 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

7 Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = n^2 - 2n + 4$ et $V_n = 4 - n^2 + 3n$.
Montrer que (U_n) est minorée par 3 et que (V_n) est majorée par 7.

8 Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier n : $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 1}{U_n + 3}$.

1) Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3}$ est croissante sur $[0,1]$.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier n : $0 \leq U_n \leq 1$.
3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

9 Pour chacune des suites suivantes, étudier son sens de variation puis dites si elle est majorée, minorée bornée.

1) $U_n = \dfrac{2n-5}{n+1}$ 2) $V_n = (2n-5)^2$

3) $W_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$

4) $T_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$. $(n \in \mathbb{N}^*)$

5) $Z_n = \dfrac{1}{n+1} - \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$

10

1) Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 3$ pour $n \geq 1$.
Montrer que cette suite est bornée.
2) Soit la suite (V_n) par $V_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $(n > 0)$

a) Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a $V_n = 1 - \dfrac{1}{(1+n)^2}$

b) En déduire que la suite (V_n) est bornée.

c) Quel est le sens de variation de la suite (V_n) ?

11 On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} \leq U_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2) En déduire que la suite (U_n) est bornée.

12 Soit les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^3}$$

1) Montrer que (U_n) et (V_n) sont croissantes.

2) Montrer que si $p \geq 2$: $\dfrac{1}{p^2} < \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p}$

   En déduire que (U_n) est majorée.

3) Montrer que si $p \geq 1$: $\dfrac{1}{p^3} \leq \dfrac{1}{p^2}$

   En déduire que (V_n) est majorée.

13 La suite U est définie par :

$U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, par $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

1) a) Calculer les trois premiers termes de la suite U .
   b) Montrer que la suite est majorée par 2.
   c) Montrer par récurrence que la suite U est croissante.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $U_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

   En déduire $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

CORRIGES

1

1) $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n - 2n - 3)$

$U_1 = \frac{1}{2}(U_0 - 2\times 0 - 3) = -\frac{1}{2}$; $U_2 = \frac{1}{2}(U_1 - 2\times 1 - 3) = -\frac{11}{4}$

* Si U est une suite arithmétique alors $U_0 + U_2 = 2U_1$.

$$\left.\begin{array}{l} U_0 + U_2 = 2 - \frac{11}{4} = -\frac{3}{4} \\ 2U_1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow U_0 + U_2 \neq 2U_1$$

d'où U n'est pas une suite arithmétique.

* Si U est une suite géométrique alors $U_0 \times U_2 = U_1^2$

$$\left.\begin{array}{l} U_0 \times U_2 = 2(-\frac{11}{4}) = -\frac{11}{2} \\ U_1^2 = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow U_0 \times U_2 \neq U_1^2$$

donc U n'est pas une suite géométrique.

2) $V_n = U_n + pn - 1$

a) $V_{n+1} = U_{n+1} + p(n+1) - 1 = \frac{1}{2}(U_n - 2n - 3) + p(n+1) - 1$

$= \frac{1}{2}U_n - n - \frac{3}{2} + p(n+1) - 1$

$= \frac{1}{2}V_n - \frac{n}{2}p + \frac{1}{2} - n + p(n+1) - \frac{5}{2}$ (car $U_n = V_n - pn + 1$)

$= \frac{1}{2}V_n - 2 - n + \left(\frac{n+2}{2}\right)p$

V est une suite géométrique si et seulement si, $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ ssi

$(\frac{n+2}{2})p - 2 - n = 0$ ssi $p = 2$.

Si $p = 2$, V est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 + 2\times 0 - 1 = 1$.

b) $V_n = V_0 q^n = \frac{1}{2^n}$

$U_n = V_n - 2n + 1 = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 + V_1 + \cdots + V_n \quad (n+1 \text{ termes})$$

$$= V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \qquad (\text{on a } q \neq 1)$$

$$= 1\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2(1-\frac{1}{2^{n+1}})$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n}(V_k - 2k+1) = \left(\sum_{k=0}^{n} V_k\right) + \sum_{k=0}^{n}(-2k+1)$$

On pose $t_n = -2n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

c'est une suite arithmétique car $t_{n+1} - t_n = -2(n+1)+1+2n-1 = -2$.

Donc de raison $r = -2$ et de premier terme $t_0 = 1$. D'où

$$\sum_{k=0}^{n} -2k+1 = \sum_{k=0}^{n} t_k = t_0 + t_1 + \cdots + t_n = \frac{n+1}{2}(t_0 + t_n) = \frac{n+1}{2}(1-2n+1)$$

$$= \frac{-(n+1)(2n-2)}{2} = 1 - n^2$$

Conclusion : $S'_n = \sum_{k=0}^{n} V_k + \sum_{k=0}^{n} t_k = 2(1-\frac{1}{2^{n+1}}) + 1 - n^2$.

2 $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = -3n^2 - n + 2$

1) Pour $n = 0$, $S_0 = \sum_{k=0}^{0} U_k = U_0$ or $S_0 = 2$ donc $U_0 = 2$

Pour $n = 1$, $S_1 = \sum_{k=0}^{1} U_k = U_0 + U_1$ or $S_1 = -3-1+2 = -2$

donc $U_1 = S_1 - U_0 = -2-2 = -4$.

Pour $n = 2$, $S_2 = \sum_{k=0}^{2} U_k = U_0 + U_1 + U_2$ or $S_2 = -3\times 4 - 2 + 2 = -12$

Donc $U_2 = S_2 - (U_0 + U_1) = -12 - (-2) = -10$

Pour $n \geq 1$, on a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \underbrace{U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}}_{S_{n-1}} + U_n = S_{n-1} + U_n$

Donc $U_n = S_n - S_{n-1} = -3n^2 - n + 2 - \left[-3(n-1)^2 - (n-1) + 2\right] = 2 - 6n$.

Pour tout $n \geq 1$, $U_n = 2 - 6n$ et on a $U_0 = 2$. Ainsi :

Pour tout $n \geq 0$, $U_n = 2 - 6n$.

2) $U_{n+1} - U_n = 2 - 6(n+1) - 2 + 6n = -6$ donc U est une suite arithmétique de raison $r = -6$.

3 $U_0 = 6$, $U_{n+1} = U_n - 2n + 3$

1) $U_1 = U_0 - 2\times 0 + 3 = 9$

$U_2 = U_1 - 2\times 1 + 3 = 10$

$U_0 + U_2 = 16 \neq 2U_1$ donc U n'est pas une suite arithmétique.

$U_0 \times U_1 = 60 \neq U_1^2$ donc U n'est pas une suite géométrique.

2) a) $V_n = U_{n+1} - U_n = -2n + 3$

$V_{n+1} - V_n = -2(n+1) + 3 + 2n - 3 = -2$

Donc V est une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $V_0 = 3$.

b)

$$\sum_{k=0}^{n-1} V_k = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1} = \frac{n}{2}(V_0 + V_{n-1}) \qquad \text{(nombre de termes = n)}$$

$$= \frac{n}{2}(3 - 2(n-1) + 3) = n(4-n) \qquad V_{n-1} = -2(n-1) + 3$$

D'autre part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} V_k = U_1 - U_0 + U_2 - U_1 + U_3 - U_2 + \cdots + U_{n-1} - U_{n-2} + U_n - U_{n-1}$$

$$= \cancel{(U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1})} - U_0 - \cancel{(U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1})} + U_n$$

$$= U_n - U_0$$

Donc $U_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} V_k\right) + U_0 = n(4-n) + 6$

$U_n = -n^2 + 4n + 6$

4 $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $U_n = \dfrac{1}{n(n-1)(n+1)}$

1) $\dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2(n+1)} = \dfrac{1}{n(n-1)(n+2)}$

2) $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=2}^{n} U_k = \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)}\right] = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2(k-1)} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$

3)

$$\sum_{k=2}^{n} U_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \cancel{\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)} + \cancel{\frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$$

5

1) $U_1 = 2$, $U_2 = 2 - \dfrac{4}{U_1 - 6} = 2 - \dfrac{4}{2-6} = 2 - \dfrac{4}{-4} = 2+1 = 3$,

$U_3 = 2 - \dfrac{4}{U_2 - 6} = 2 - \dfrac{4}{3-6} = 2 - \dfrac{4}{-3} = \dfrac{10}{3}$

$U_1 + U_3 \neq 2U_2$ donc la suite U n'est pas arithmétique.

$U_1 \times U_3 \neq U_2^2$ donc la suite U n'est pas géométrique.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < 4$

- Vérification pour $n = 1$, $U_1 = 2 < 4$ (l'inégalité est vraie pour $n = 1$)
- Supposons que $U_n < 4$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $U_{n+1} < 4$.

$$U_n < 4 \Rightarrow U_n - 6 < 4 - 6 \Rightarrow U_n - 6 < -2 \Rightarrow \frac{1}{U_n - 6} > \frac{-1}{2} \Rightarrow -\frac{4}{U_n - 6} < \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{4}{U_n - 6} < 2 + 2 \Rightarrow U_{n+1} < 4$$

La propriété est vraie pour $n+1$.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n < 4$.

3) Montrons que $U_{n+1} > U_n$:

$$U_{n+1} - U_n = 2 - \frac{4}{U_n - 6} - U_n = \frac{2U_n - 12 - 4 - U_n^2 + 6U_n}{U_n - 6} = \frac{-U_n^2 + 8U_n - 16}{U_n - 6}$$

$$= \frac{-(U_n - 4)^2}{U_n - 6}$$

or $U_n < 4$ donc $U_n - 6 < 0$ et $(U_n - 4)^2 > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$ et par suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} > U_n$.

Encadrement de U_n :

La suite U est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > U_1$ donc $U_n > 2$.
De plus $U_n < 4$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 < U_n < 4$.

4) $V_n = \dfrac{1}{U_n - 4}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

a) $$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 4} = \frac{1}{2 - \dfrac{4}{U_n - 6} - 4} = \frac{1}{\dfrac{2U_n - 12 - 4 - 4U_n + 24}{U_n - 6}} = \frac{U_n - 6}{-2U_n + 8}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n - 6}{-2U_n + 8} - \frac{1}{U_n - 4} = \frac{U_n - 6}{-2(U_n - 4)} + \frac{2}{-2(U_n - 4)} = \frac{U_n - 4}{-2(U_n - 4)}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

La suite V est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de 1er terme $V_1 = -\dfrac{1}{2}$.

$(V_1 = \dfrac{1}{U_1 - 4} = \dfrac{1}{2 - 4} = -\dfrac{1}{2})$.

b) V est une suite arithmétique de 1er terme V_1 donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_n = V_1 + (n-1)r = -\frac{1}{2} + (n-1)(-\frac{1}{2}) = \frac{-1 - n + 1}{2} = \frac{-n}{2}.$$

$$V_n = \frac{1}{U_n - 4} \quad \Rightarrow U_n - 4 = \frac{1}{V_n} \Rightarrow U_n = 4 + \frac{1}{V_n} = 4 + \frac{1}{\dfrac{-n}{2}} = 4 + \frac{2}{-n} = \frac{-4n + 2}{-n}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{4n - 2}{n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

5) $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kU_k = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4k-2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(4k-2)$.

On pose $w_k = 4k - 2$ terme général d'une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $W_1 = 2$.

$$S = \sum_{k=1}^{n}(4k-2) = \frac{n}{2}(W_1 + W_n) = \frac{n}{2}(2 + 4n - 2) = 2n^2.$$

$$S' = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}U_k + \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} \times \frac{4k-2}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = 2n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = 2n - (1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}) + (\cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1})$$
$$= 2n - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{2n^2 + 2n - n - 1 + 1}{n+1} = \frac{2n^2 + n}{n+1}$$

6 $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 1}{1 + U_n}$

1) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

- Vérifions pour $n = 0$: $U_0 = 3 > 1$ d'où l'inégalité est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 1$ et montrons que $U_{n+1} > 1$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{3U_n - 1 - 1 - U_n}{1 + U_n} = \frac{2(U_n - 1)}{1 + U_n}$$

or d'après la supposition on a $U_n > 1$ donc $U_n - 1 > 0$ et $1 + U_n > 0$

D'où $U_{n+1} - 1 > 0$ donc $U_{n+1} > 1$. Ainsi, la propriété est vraie pour $n + 1$.

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

2) $$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n - 1}{1 + U_n} - U_n = \frac{3U_n - 1 - U_n(1 + U_n)}{1 + U_n}$$

$$= \frac{-U_n^2 + 2U_n - 1}{1 + U_n}$$

$$= -\frac{(U_n - 1)^2}{1 + U_n} < 0 \text{ car } \begin{cases} U_n > 1 \Rightarrow (U_n - 1)^2 > 0 \\ \text{et } 1 + U_n > 0 \end{cases}$$

donc $U_{n+1} - U_n < 0$ d'où U est décroissante.

3) a) $$V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+1} + 1}{U_{n+1} - 1} - \frac{U_n + 1}{U_n - 1} = \frac{\dfrac{3U_n - 1}{1 + U_n} + 1}{\dfrac{3U_n - 1}{1 + U_n} - 1} - \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{3U_n - 1 + 1 + U_n}{1 + U_n}}{\dfrac{3U_n - 1 - 1 - U_n}{1 + U_n}} - \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$$

$$= \frac{4U_n}{2U_n - 2} - \frac{U_n + 1}{U_n - 1} = \frac{2U_n}{U_n - 1} - \frac{U_n + 1}{U_n - 1} = \frac{U_n - 1}{U_n - 1} = 1$$

Donc la suite V est arithmétique de raison $r = 1$ de premier terme $V_0 = 2$

$\left(V_0 = \dfrac{U_0 + 1}{U_0 - 1} = \dfrac{3 + 1}{3 - 1} = 2\right)$.

b) Pour tout entier naturel n : $V_n = V_0 + nr = 2 + n$.

On a : $V_n = \dfrac{U_n+1}{U_n-1} \Rightarrow U_nV_n - V_n = U_n+1$

$\Rightarrow U_n(V_n-1) = 1+V_n$

$\Rightarrow U_n = \dfrac{1+V_n}{V_n-1}$

Remarque : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_n \neq 1$ car si $V_n = 1$ alors $\dfrac{U_n+1}{U_n-1} = 1$ ce qui donne $1 = -1$ impossible.

D'où $U_n = \dfrac{1+2+n}{2+n-1} = \dfrac{n+3}{n+1}$

4) $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \dfrac{1}{V_0} \cdot \dfrac{1}{V_1} \cdot \dfrac{1}{V_2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{V_n}$

a) $W_0 = \dfrac{1}{V_0} = \dfrac{1}{2}$ $\quad (V_0 = 2+0 = 2)$

$W_1 = \dfrac{1}{V_0} \cdot \dfrac{1}{V_1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ $\quad (V_1 = 2+1 = 3)$

$W_2 = \dfrac{1}{V_0} \cdot \dfrac{1}{V_1} \cdot \dfrac{1}{V_2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{24}$ $\quad (V_2 = 2+2 = 4)$

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

- Vérifions pour $n = 0$, $W_0 = \dfrac{1}{2} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$, l'inégalité est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $W_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $W_{n+1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a : $W_{n+1} = \dfrac{1}{V_0} \cdot \dfrac{1}{V_1} \cdot \dfrac{1}{V_2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{V_n} \cdot \dfrac{1}{V_{n+1}} = W_n \cdot \dfrac{1}{V_{n+1}}$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $W_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On a aussi, $n \in \mathbb{N}$ donc $n+1 > 0 \Rightarrow n+3 > 2$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n+3} < \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{V_{n+1}} < \dfrac{1}{2}$ $\quad$ (car $V_{n+1} = n+3$)

On a donc

$$\left.\begin{array}{l} 0 < W_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ 0 < \dfrac{1}{V_{n+1}} < \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow W_n \cdot \frac{1}{V_{n+1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow W_{n+1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$. Donc la propriété est vraie pour $n+1$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k = W_0 + W_1 + \cdots + W_n$$

On a :

$$\begin{array}{l} W_0 < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ W_1 < \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ W_2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \oplus \ \vdots \\ W_{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ W_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \hline S_n < \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{array}$$

Soit $t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. On a $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{2}$ d'où la suite (t_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $t_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

$q = \dfrac{1}{2} \neq 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} t_k = t_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \quad \text{(où } n+1 \text{ est le nombre de termes)}$$

$$= 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Conclusion : $S_n < 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

7 On a : $U_n = n^2 - 2n + 4$.

1ère méthode :

On pose $f : x \mapsto x^2 - 2x + 4$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 2x - 2$.

f admet un minimum absolue en $x_0 = 1$ de valeur $f(1) = 3$.

Donc $f(x) \geq 3$ pour tout réel x.

$U_n = f(n)$ d'où $U_n \geq 3$ pour tout entier naturel n.

2ème méthode :

$U_n - 3 = n^2 - 2n + 4 - 3 = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geq 0$ donc $U_n - 3 \geq 0$ pour tout entier n et par suite la suite U est minorée par 3.

- $V_n = 4 - n^2 + 3n$

  Soit $g(x) = 4 - x^2 + 3x$.

  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -2x + 3$. On a $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

  g admet un maximum absolue en $x_0 = \frac{3}{2}$ de valeur $g(\frac{3}{2})$.

  $g(\frac{3}{2}) = 4 - \frac{9}{4} + 3 \times \frac{3}{2} = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} = 6{,}125$

  D'où , pour tout réel x, $g(x) \leq g(\frac{3}{2})$ donc $g(x) \leq 6{,}25 < 7$.

  Ainsi , pour tout réel x, $g(x) \leq 7$.

  $V_n = g(n)$ donc $V_n \leq 7$ pour tout entier naturel n.

  (V_n) est majorée par 7.

8

1) $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$, $x \in [0;1]$.

   f est rationnelle et définie sur $[0;1]$ donc dérivable sur $[0;1]$.

   Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = \frac{x+3-x-1}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2} > 0$

   f est croissante sur $[0;1]$.

2) Montrons par récurrence que $0 \leq U_n \leq 1$.

   - Vérification : $U_0 = 1$ donc $0 \leq U_0 \leq 1$ (vérifiée)
   - Supposons que $0 \leq U_n \leq 1$ pour un entier naturel n, montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.

     D'après l'hypothèse de récurrence : $0 \leq U_n \leq 1$

     Puisque f est croissante sur $[0;1]$ $f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$

     $0 < \frac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{4} < 1$

$$0 \leq U_{n+1} \leq 1.$$

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$.

3) On a $U_{n+1} = f(U_n)$. Montrons par récurrence que la suite U est décroissante :

- $U_0 = 1$ et $U_1 = \frac{1}{2}$ donc $U_1 < U_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_{n+1} < U_n$ et montrons que $U_{n+2} < U_{n+1}$.
  L'hypothèse de récurrence : $U_{n+1} < U_n$
  f est croissante sur $[0,1]$ et tous les termes de la suite (U_n) appartiennent à l'intervalle $[0,1]$, donc
  $$f(U_{n+1}) < f(U_n)$$
  $$U_{n+2} < U_{n+1}$$
- Conclusion : Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} < U_n$
  La suite U est décroissante.

9

1) $U_n = f(n)$ tel que $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$ où $x \in \mathbb{R}_+$.

f est rationnelle, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$,

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{2\times1-(-5)\times1}{(x+1)^2} = \frac{7}{(x+1)^2} > 0$

- f est croissante sur $[0,+\infty[$ et $U_n = f(n)$ pour tout entier naturel n.

D'où (U_n) est croissante.

x	0	$+\infty$
f(x)	-5 ↗	2

- Pour tout réel x, on a : $f(x) \in [-5;2[$ donc $-5 \leq U_n < 2$. (U_n) est bornée.

2) $V_n = (2n-5)^2$, $V_n = g(n)$ tel que $g(x) = (2x-5)^2$ où $x \in \mathbb{R}_+$.

g est polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $g'(x) = 2\times2\times(2x-5)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

g est croissante sur $[3,+\infty[$.

Donc la suite V est strictement croissante à partir du rang 3.

g admet un minimum absolue en $x_0 = \frac{5}{2}$ de valeur $g(\frac{5}{2}) = 0$

D'où, pour tout $x \geq 0$ on a : $g(x) \geq 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $V_n \geq 0$. La suite V est minorée par 0.

3) W_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\frac{1}{2} \neq 1$ donc $W_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Pour tout entier n, $W_n = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$ donc (W_n) est majorée par 2.

D'autre part W_n est la somme de $n+1$ termes positifs donc $W_n > 0$ d'où $0 < W_n < 2$. La suite (W_n) est donc bornée.

4) Pour tout $n > 0$ et pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $n+k > n$ et par conséquent

$$\left.\begin{array}{l} n+1 > n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \\ n+2 > n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \\ \vdots \\ n+n > n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+n} < \frac{1}{n} \end{array}\right\} \text{n termes}$$

et en additionnant membre à membre on obtient :

$$0 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$0 < T_n < n \times \frac{1}{n}$ d'où $0 < T_n < 1$.

(T_n) est donc minorée par 0 et majorée par 1 donc bornée.

5) $Z_n = \frac{1}{n+1} - \sqrt{n}$

$Z_n = f(n)$ où $f(x) = \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}$ pour $x \in [0, +\infty[$.

$f(x) = \frac{1}{x+1} + (-\sqrt{x})$,

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $f_2 : x \mapsto -\sqrt{x}$

f_1 est décroissante sur $[0, +\infty[$ $\left(f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0\right)$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ donc f_2 est décroissante sur cet intervalle.

f est donc la somme de deux fonctions décroissante sur $[0, +\infty[$ donc f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

Il en résulte que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n+1 \geq 1$ d'où $\frac{1}{n+1} \leq 1$ et $-\sqrt{n} \leq 0$ et par somme on obtient $Z_n \leq 1$. La suite (Z_n) est majorée par 1.

10

1) $U_n = \frac{(-1)^n}{n} + 3$ pour $n \geq 1$.

1ère idée :

Pour tout entier naturel n, $(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si n est pair} \\ -1 \text{ si n est impair} \end{cases}$ d'où pour tout entier n, $(-1)^n \leq 1$ et $(-1)^n \geq -1$.

- $(-1)^n \leq 1$ et pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{1}{n} > 0$ donc en multipliant par $\frac{1}{n}$ les deux membres de l'inégalité, on obtient $\frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ or $n \geq 1$ donc $\frac{1}{n} \leq 1$ ce qui entraîne $\frac{(-1)^n}{n} \leq 1$ et par somme, $\frac{(-1)^n}{n} + 3 \leq 1 + 3$.
  Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $U_n \leq 4$. La suite U est majorée par 4.
- $(-1)^n \geq -1$ donc $\frac{(-1)^n}{n} \geq \frac{-1}{n}$ or $n \geq 1$ donc $\frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \geq -1$ ce qui entraîne $\frac{(-1)^n}{n} \geq -1$ et par somme, $\frac{(-1)^n}{n} + 3 \leq -1 + 3$.
  Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $U_n \geq 2$. La suite U est minorée par 2.
  La suite (U_n) est bornée puisque $2 \leq U_n \leq 4$ pour tout entier n.

2ème idée :

On sait que pour tous réels a et b $|a+b| \leq |a| + |b|$

$\left|\frac{(-1)^n}{n} + 3\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + 3$ c'est-à-dire $|U_n| \leq \frac{1}{n} + 3$ et puisque $\frac{1}{n} \leq 1$ alors $|U_n| \leq 4$. La suite (U_n) est bornée, en effet $-4 \leq U_n \leq 4$.

Remarque : $2 \geq -4$ donc le premier encadrement entraîne l'encadrement de la deuxième idée. Le premier encadrement est plus précis.

2) $V_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $(n > 0)$

a) $V_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

b) Pour tout entier $n > 0$, on a : $1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ car $-\frac{1}{(n+1)^2} < 0$.

Donc $V_n < 1$.

D'autre part tous les termes de la suite (V_n) sont strictement positifs donc $V_n > 0$.

On obtient donc : $0 < V_n < 1$ d'où la suite (V_n) est bornée.

c) $V_n = f(n)$ où $f(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ avec $x \in]0,+\infty[$.

$f(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x) = -\dfrac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{2}{(x+1)^3}$ d'où f est croissante sur $]0,+\infty[$,

puisque $V_n = f(n)$ alors la suite (V_n) est donc croissante.

11

1) On a pour tout entier naturel n :

$$U_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

• Pour tout entier naturel non nul n, $n+2 > n$ donc

$$\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$$
$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n+2} > \sqrt{n+2}+\sqrt{n} > 0$$
$$\frac{1}{2\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

On obtient donc : $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} < U_n$ ce qui entraîne $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} \leq U_n$ (1)

• Pour tout entier naturel non nul n, $n+2 > n$ donc $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$

$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n} > 2\sqrt{n} > 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
$$\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On obtient donc $U_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ce qui entraîne $U_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (2)

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n : $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} \leq U_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2) Pour tout entier non nul n, on a $n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow U_n \leq 1$.

D'autre part, pour tout entier n, $\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} > 0$. D'où $0 < U_n \leq 1$.

(U_n) est minorée par 0 et majorée par 1 donc (U_n) est bornée d'où (U_n) est bornée.

Remarque : Un majorant d'une suite doit être indépendant de n.

12

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

Donc (U_n) est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p^3} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^3} = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$

Donc (V_n) est croissante.

2) Si $p \geq 2$, $p^2 > (p-1)p$ donc $\frac{1}{p^2} < \frac{1}{p(p-1)}$

D'autre part : $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \frac{p-(p-1)}{p(p-1)} = \frac{1}{p(p-1)}$ donc $\frac{1}{p^2} < \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

$p = 1 \qquad \frac{1}{1^2} \leq \frac{1}{1^2}$

$p = 2 \qquad \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$p = 3 \qquad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$\vdots$

$p = n \qquad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} < 1 + 1 - \frac{1}{n}$ donc $U_n < 2 - \frac{1}{n}$.

La suite (U_n) est majorée par 2.

3) Si $p \geq 1$, $p^3 \geq p^2$ donc $\frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{p^2}$ donc : $V_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^3} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = U_n < 2$.

13

1) a) On a $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$ donc :

$U_1 = \sqrt{U_0 + 2} = \sqrt{2} \qquad U_2 = \sqrt{U_1 + 2} = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$

b) Montrons que la suite U est majorée par 2 c'est-à-dire montrons P_n : « $U_n \leq 2$ pour tout entier n »

- Vérification : $U_0 = 0 \leq 2$ donc P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vérifiée pour un entier $n \geq 0$ et montrons que P_{n+1} est alors vérifiée.

  L'hypothèse de récurrence $U_n \leq 2 \Rightarrow U_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{U_n + 2} \leq 2$ d'où $U_{n+1} \leq 2$. Donc P_{n+1} est vérifiée.
- Conclusion : pour tout entier naturel n : U_n est majorée par 2.

c) Montrons que (U_n) est croissante : Montrons que $U_{n+1} \geq U_n$.
Les termes de la suite étant positifs donc on peut comparer U_{n+1}^2 et U_n^2
$U_{n+1}^2 - U_n^2 = U_n + 2 - U_n^2 = -U_n^2 + U_n + 2$.
Le signe de $U_{n+1}^2 - U_n^2$ et celui de $-U_n^2 + U_n + 2$
On considère le trinôme $T(x) = -x^2 + x + 2$ (où x est un réel)
$(a = -1,\ b = 1$ et $c = 2)$. On a $a - b + c = 0$ d'où $x' = -1$ et $x'' = -\frac{c}{a} = 2$
$-x^2 + x + 2 = -(x+1)(x-2) = (x+1)(2-x)$ pour tout réel x.
D'où, pour tout entier n, $-U_n^2 + U_n + 2 = (U_n + 1)(2 - U_n)$.
Or $U_n \leq 2 \Rightarrow 2 - U_n \geq 0$ et de plus on sait que $U_n \geq 0$ donc $U_n + 1 > 0$
d'où $(U_n + 1)(2 - U_n) \geq 0$.
Ainsi, pour tout entier naturel n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 \geq 0$
Donc $U_{n+1} \geq U_n$ et par suite la suite (U_n) est croissante.

2ème méthode : par récurrence
On note P_n : "$U_{n+1} \geq U_n$"
1ère étape : on vérifie que P_0 est vraie
$U_0 = 0$ et $U_1 = \sqrt{2}$ donc $U_1 \geq U_0$
2ème étape : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel n quelconque, et sous cette hypothèse, on démontre que P_{n+1} est vraie.
Soit n un entier naturel quelconque, supposons que $U_{n+1} \geq U_n$
et on doit alors montrer que $U_{n+2} \geq U_{n+1}$
On utilise l'hypothèse de récurrence $U_{n+1} > U_n$ et on transforme la conclusion. Démontrer que $U_{n+2} \geq U_{n+1}$ revient à démontrer que
$\sqrt{2 + U_{n+1}} \geq \sqrt{2 + U_n}$
D'après l'hypothèse de récurrence, on a :
$U_{n+1} \geq U_n$ donc $2 + U_{n+1} \geq 2 + U_n$ et par définition tous les termes de la suite sont positifs, on obtient : $\sqrt{2 + U_{n+1}} \geq \sqrt{2 + U_n}$ c'est-à-dire
$U_{n+2} \geq U_{n+1}$.
Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} \geq U_n$ et donc la suite U est croissante.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

- Vérification pour $n = 0$, On a $U_0 = 0$ et $2\cos\frac{\pi}{2^1} = 0$ (vérifiée)

- Soit n un entier quelconque, supposons que $U_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ et montrons que $U_{n+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

  $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$ et d'après l'hypothèse de récurrence on obtient

  $$U_{n+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}})} = \sqrt{2\times 2\cos^2(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2})} \quad \text{car } (1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2})$$

  $$= \sqrt{2\times 2\cos^2(\tfrac{\pi}{2^{n+1}}\times\tfrac{1}{2})} = 2\left|\cos(\tfrac{\pi}{2^{n+2}})\right| = 2\cos(\tfrac{\pi}{2^{n+2}}) \qquad \text{car } \frac{\pi}{2^{n+2}} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

  D'où la propriété est vraie pour $n+1$.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

  Déduction de $\cos\frac{\pi}{8}$:

  On prend $n=2$, $U_2 = 2\cos\frac{\pi}{2^3} = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $U_2 = \sqrt{\sqrt{2}+2}$

  Donc $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

Limites de suites réelles

1. Suite convergente

Définition

Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.

On dit que la suite (U_n) **converge** vers un nombre réel ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $|U_n - \ell| < \varepsilon$.

Théorème : Unicité de la limite

Si (U_n) converge vers un réel ℓ alors ce réel est unique.

Conséquence : Une suite (U_n) converge vers un nombre réel ℓ, si et seulement si, la suite $|U_n - \ell|$ converge vers zéro.

Notation et vocabulaire

Si une suite (U_n) converge vers un nombre réel ℓ, on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

On dit que ℓ est la limite de la suite (U_n).

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Théorème

Soit une suite réelle (U_n) convergente vers un réel non nul. Alors il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $U_n \neq 0$.

2. Limite d'une suite définie par $U_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$.

ℓ désigne un nombre ou $+\infty$ ou $-\infty$, on admet le théorème suivant :

- ⇨ Si la fonction f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors la suite (U_n), définie par $U_n = f(n)$, a pour limite ℓ. Autrement dit,
- ⇨ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

3. Limite infinie d'une suite

Définition :

Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.

⇨ On dit que la suite (U_n) tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $U_n > A$.

⇨ On dit que la suite (U_n) tend vers $-\infty$ si pour tout $A < 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $U_n < A$.

4. Limite par comparaison

⇨ ***Théorème :*** Soit (U_n) une suite réelle définie pour tout entier $n \geq p$.

- Si, à partir d'un certain rang, $U_n \geq V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, $U_n \leq V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, $|U_n| \leq V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

5. Limite d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite géométrique définie par $U_n = q^n$ $(n \geq 0)$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ (la suite (U_n) est divergente)
- Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ (la suite (U_n) est convergente)
- Si $q \leq -1$ alors la suite (U_n) n'a pas de limite (la suite (U_n) est divergente)

6. Opérations sur les limites (finies ou infinies) d'une suite

Les théorèmes sur la limite en $+\infty$ d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions s'appliquent dans le cas des suites.

⇨ ***Théorème :***

Soit deux suites réelles (U_n) et (V_n) convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'. Soient a et b deux réels. Alors :

- la suite $(aU_n + bV_n)$ converge vers $a\ell + b\ell'$,
- la suite $(U_n V_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

⇨ ***Théorème***

Soit une suite réelle $((U_n)$ convergente vers un réel ℓ non nul.

Alors la suite $\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

⇨ ***Théorème***

- Soit une suite réelle $(U_n)_{n\geq p}$ telle que $U_n > 0$.

  $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n} = 0$.

- Soit une suite réelle $(U_n)_{n\geq p}$ telle que $U_n < 0$.

  $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n} = 0$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n + V_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n V_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell\,\ell'$
$+\infty$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	∞ (*)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$

EXERCICES

1 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = 2U_n - 3$

1) a) Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

b) Représenter graphiquement U_0, U_1, U_2 et U_3 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Soit la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - 3$.

a) Montrer que V est une suite géométrique.

b) Exprimer U_n en fonction de n, et en déduire la limite de U_n en $+\infty$.

2 Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 9$ et $U_{n+1} = \dfrac{8U_n - 6}{U_n + 1}$

1) a) Montrer que la suite U est minorée par 6.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - 6 \leq \dfrac{2}{7}(U_n - 6)$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n - 6 \leq 3\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$

c) Déterminer alors la limite de la suite U en $+\infty$.

Interpréter le résultat.

3 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_1 = \frac{3}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right)$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n > \sqrt{2}$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}(U_n - \sqrt{2}) + \dfrac{1}{U_n} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2^n}$.

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

4 Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = U_n^{\,2} + 1$

1) a) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$: $U_n \geq 2^n$.

2) En déduire la limite de la suite U lorsque n tend vers $+\infty$.

5 Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 1$; $U_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $V_n = 2U_{n+1} - U_n$ et $W_n = 2^n U_n$.

1) Montrer que la suite V est géométrique et exprimer V_n en fonction de n.
2) Montrer que la suite W est arithmétique et exprimer W_n en fonction de n.
3) En déduire U_n en fonction de n.
4) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $t_n = \frac{6n+2}{n^2-n}$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$: $\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n^2-n}$.
   b) En déduire que pour tout $n \geq 2$: $U_n < t_n$.
   c) Montrer alors que la suite U est convergente et calculer sa limite.
5) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 4(U_1 - U_{n+2})$
   b) En déduire S_n en fonction de n.

6 Etudier les limites de :

$\frac{\sin 2n}{5n}$; $\frac{n \sin n}{n^2+1}$; $n^2 - \cos^2 \pi n$; $\frac{3^n - 4}{2}$; $\frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}$

7 On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \frac{3^n}{n!}$

1) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$
   a) Exprimer V_n en fonction de n.
   b) Justifier que pour tout $n \geq 3$, on a : $V_n \leq \frac{3}{4}$
   c) En déduire que la suite (U_n) est décroissante à partir du rang 3.
2) a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 3$: $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} U_3$ (1)
   b) Calculer U_3 et en utilisant (1) montrer que pour tout $n \geq 3$, $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{32}{3}$
   c) Déduire, des résultats précédents, le comportement à l'infini de la suite U.

8 On considère le triangle équilatéral T_1, et la suite des triangles équilatéraux $T_2, T_3, \cdots, T_n, \cdots$ tels que chacun d'eux ait pour sommet s les milieux des côtés du triangle précédent.

1) Calculer l'aire S_n du triangle T_n en fonction de l'aire S_{n-1} du triangle T_{n-1}, puis en fonction de celle de S_1 du triangle T_1.

2) Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} S_k = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

3) Montrer que l'on peut trouver un entier naturel n_0 tel que $0 < \frac{4}{3}S_1 - \sum_{k=1}^{n} S_k < 10^{-4}S_1$ pour tout $n \geq n_0$.

9 On donne la suite (U_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $U_n = \frac{n!}{n^n}$.

Le but de l'exercice est de montrer que la suite (U_n) est convergente.

1) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 < U_n \leq \frac{1}{n}$

   b) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

2) a) Montrer par récurrence que pour tout réel $a \geq 0$ et pour tout entier naturel n: $(1+a)^n \geq 1 + na$

   b) En déduire que $\frac{U_n}{U_{n+1}} \geq 2$ pour tout $n \geq 1$.

   En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

   c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 < U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

   d) Retrouver la limite de (U_n).

CORRIGES

1

1) a) f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite D.
Construction de $D : y = 2x - 3$

x	0	3
f(x)	-3	3

b) $U_0 = 1$; $U_1 = f(U_0)$; $U_2 = f(U_1)$; $U_3 = f(U_2)$.
On trace la droite $\Delta : y = x$ qui nous permet de représenter les termes de la suite U.
On constate, graphiquement, que la suie U est décroissante et qu'elle tend vers $-\infty$.

2) a) $V_n = U_n - 3 \quad n \in \mathbb{N}$. $\quad V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = 2U_n - 3 - 3 = 2(U_n - 3) = 2V_n$.
Donc V est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 3 = 1 - 3 = -2$.

b) $V_n = V_0 \cdot q^n = -2 \times 2^n = -2^{n+1}$
$U_n = V_n + 3 = 3 - 2^{n+1}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3 - 2^{n+1}$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ car $q = 2 > 1$ et $V_0 = -2 < 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (V_n + 3) = -\infty$.

2

1) a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 6$.

- Vérifions pour $n = 0$, $U_0 = 9 \geq 6$. Vraie.
- Supposons que $U_n \geq 6$ et montrons que $U_{n+1} \geq 6$

$$U_{n+1} - 6 = \frac{8U_n - 6}{U_n + 1} - 6 = \frac{8U_n - 6 - 6U_n - 6}{U_n + 1} = \frac{2(U_n - 6)}{U_n + 1}$$

D'après la supposition on a : $U_n \geq 6 \Rightarrow U_n - 6 \geq 0$ et $U_n + 1 > 0$

d'où $U_{n+1}-6\geq 0 \Rightarrow U_{n+1}\geq 6$ vraie pour $n+1$.

- Conclusion : pour tout entier $n\in\mathbb{N}$: $U_n\geq 6$.

b) $$U_{n+1}-U_n=\frac{8U_n-6}{U_n+1}-U_n$$
$$=\frac{8U_n-6-U_n^2-U_n}{U_n+1}$$
$$=\frac{-U_n^2+7U_n-6}{U_n+1}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{(U_n-1)(6-U_n)}{U_n+1} \text{ or d'après 2) a)} \quad U_n\geq 6\Rightarrow\begin{cases}6-U_n\leq 0\\ U_n-1\geq 5>0\\ U_n+1\geq 7>0\end{cases}$$

donc $U_{n+1}-U_n\leq 0$ d'où U est décroissante.

2) a) D'après 2) a) $U_{n+1}-6=\frac{2}{U_n+1}(U_n-6)$

or $U_n\geq 6 \Rightarrow U_n+1\geq 7\Rightarrow \frac{1}{U_n+1}\leq\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{2}{U_n+1}\leq\frac{2}{7}$ et $U_n-6\geq 0$

$$\Rightarrow\frac{2(U_n-6)}{U_n+1}\leq\frac{2}{7}(U_n-6)\Rightarrow U_{n+1}-6\leq\frac{2}{7}(U_n-6)$$

b) Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n-6\leq 3\times\left(\frac{2}{7}\right)^n$

- Vérifions pour $n=0$: $U_0-6=3\leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^0$ vraie pour $n=0$.
- Supposons que $U_n-6\leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$ et montrons que $U_{n+1}-6\leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$

on a d'après 3) a) : $\Rightarrow U_{n+1}-6\leq\frac{2}{7}(U_n-6)$

et d'après la supposition : $\frac{2}{7}(U_n-6)\leq\frac{2}{7}\times\left(\frac{2}{7}\right)^n\times 3$

d'où $U_{n+1}-6\leq 3\times\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$. La propriété est donc vraie pour $n+1$.

- Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n-6\leq 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$.

c) On a $U_n\geq 6 \Rightarrow U_n-6\geq 0 \Rightarrow 0\leq U_n-6\leq 3\times\left(\frac{2}{7}\right)^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$ car $-1<\frac{2}{7}<1$. Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le U_n - 6 \le 3\times\left(\frac{2}{7}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n - 6 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 6$$

3 $U_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{2}{U_n})$

1) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n > \sqrt{2}$.

- Vérifions pour $n = 1$: on a $U_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$ (vraie)
- Supposons que $U_n > \sqrt{2}$ et montrons que $U_{n+1} > \sqrt{2}$.

$$U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{2}{U_n}) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(\frac{U_n^2 + 2 - 2U_n\sqrt{2}}{U_n}) = \frac{(U_n - \sqrt{2})^2}{2U_n}$$

or d'après la supposition $U_n > \sqrt{2} \Rightarrow U_n > 0$.

D'où $U_{n+1} - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow U_{n+1} > \sqrt{2}$ donc la propriété est vraie pour $n+1$.

- conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n > \sqrt{2}$

2) a)

$$\begin{aligned} U_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}(U_n + \frac{2}{U_n}) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} - \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2}U_n - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{U_n} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b) Montrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$

- Vérifions pour $n = 1$, $U_1 - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^1}$ (vraie)
- Supposons que $U_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$ et montrons que $U_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^{n+1}}$

On a : $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Or d'après 1) on a : $U_n > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{U_n} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{2})$$

D'autre part, de l'hypothèse de récurrence $U_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$, on obtient :

$U_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} \Rightarrow U_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2^{n+1}}$.

D'où la propriété est vraie pour $n+1$.

Conclusion : $U_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2^n}$.

c) On a d'après la question 1) $U_n>\sqrt{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ donc

$U_n-\sqrt{2}>0$ d'où $0<U_n-\sqrt{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ car $-1<\frac{1}{2}<1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-\sqrt{2})=0$.

Donc (U_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\sqrt{2}$

4

1) a) $U_1=U_0+1=1$; $U_2=U_1+1=1+1=2$; $U_3=U_2^2+1=4+1=5$

$U_4=U_3^2+1=25+1=26$.

b) • Pour $n=4$, $U_4=26$ et $26\geq 2^4$ donc $U_4\geq 2^4$ (vérifiée)

• Supposons que $U_n\geq 2^n$ et montrons que $U_{n+1}\geq 2^{n+1}$.

$U_{n+1}=U_n^2+1$ or $U_n\geq 2^n$ donc $U_n^2\geq 2^{2n}$ d'où $U_n^2\geq 2^{2n}+1$

Ainsi, $U_{n+1}\geq 2^{2n}+1$

$2^{2n}+1-2^{n+1}=2^n(2^n-2)+1$ or $n\geq 4$ donc $2^n-2>0$

donc $2^{2n}+1\geq 2^{n+1}$.

On obtient donc : $U_{n+1}\geq 2^{2n}+1$ et $2^{2n}+1\geq 2^{n+1}$ d'où $U_{n+1}\geq 2^{n+1}$.

• Conclusion : Pour tout $n\geq 4$, $U_n\geq 2^n$

2) On a : $2>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ et puisque $U_n\geq 2^n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

5 $U_0=1$; $U_1=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $U_{n+2}=U_{n+1}-\frac{1}{4}U_n$

1) $V_n=2U_{n+1}-U_n$

$V_{n+1}=2U_{n+2}-U_{n+1}=2(U_{n+1}-\frac{1}{4}U_n)-U_{n+1}=U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n$

$=\frac{1}{2}(2U_{n+1}-U_n)=\frac{1}{2}V_n$

Donc V est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0=3$

$(V_0=2U_1-U_0=2\times 2-1=3)$.

Par suite $V_n=V_0\cdot q^n=3\times\frac{1}{2^n}$ d'où $V_n=\frac{3}{2^n}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) $W_n=U_n\times 2^n$

$W_{n+1}-W_n=U_{n+1}\cdot 2^{n+1}-U_n\cdot 2^n=2^n(2U_{n+1}-U_n)=2^nV_n$

$=2^n\times\frac{3}{2^n}=3$

Donc W est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $W_0 = 1$ $(W_0 = 2^0 \cdot U_0 = 1 \times 1 = 1)$.

4) a) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 3$, $\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n^2 - n}$

- On vérifie pour $n = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \\ \frac{2}{3^2 - 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{2}{3^2 - 3}$$ donc la propriété est vraie pour $n = 3$.

- Supposons que $\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n^2 - n}$ pour $n \geq 3$ et montrons que

$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2}{(n+1)^2 - (n+1)}$ donc montrons que $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2}{n^2 + n}$

car $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n$)

D'après la supposition on a : $\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n^2 - n} \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{n^2 - n}$ (1)

Donc montrons que $\frac{1}{n^2 - n} < \frac{2}{n^2 + n}$

Pour cela cherchons le signe de $\frac{1}{n^2 - n} - \frac{2}{n^2 + n}$

$$\frac{1}{n^2 - n} - \frac{2}{n^2 + n} = \frac{n + 1 - 2(n-1)}{n(n+1)(n-1)} = \frac{3 - n}{n(n+1)(n-1)}$$

or $n \geq 3 \Rightarrow 3 - n \leq 0$ et $n(n+1)(n-1) > 0$ d'où $\frac{1}{n^2 - n} - \frac{2}{n^2 + n} \leq 0$ Ainsi :

$\frac{1}{n^2 - n} \leq \frac{2}{n^2 + n}$ (2)

D'après (1) et (2), $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{n^2 - n} < \frac{2}{n^2 + n}$ ce qui donne $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2}{n^2 + n}$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geq 3$, $\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n^2 - n}$.

b) On a : $W_n = U_n \cdot 2^n \Rightarrow U_n = \frac{W_n}{2^n} = \frac{1 + 3n}{2^n}$

or d'après la question précédente : pour $n \geq 3$, on a $\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n^2 - n}$

on obtient $\frac{1 + 3n}{2^n} < \frac{2 + 6n}{n^2 - n}$ $(1 + 3n > 0$ pour tout entier n)

Donc $U_n < t_n$ pour tout entier $n \geq 3$.

Pour $n = 2$, $U_2 = U_1 - \frac{1}{4} U_0 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ et $t_2 = \frac{12 + 2}{4 - 2} = \frac{7}{2}$

D'où $U_2 < t_2$.

Conclusion : Pour tout $n \geq 2$, $U_n \leq t_n$.

c) $U_n = \dfrac{1+3n}{2^n} > 0$ donc $0 < U_n < t_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

On a donc $0 < U_n < t_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

D'où U est convergente vers 0.

5) $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier n, $U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$ donc $U_n = 4(U_{n+1} - U_{n+2}) = 4U_{n+1} - 4U_{n+2}$

$$\oplus \left\downarrow \begin{array}{l} U_0 = 4U_1 - \cancel{4U_2} \\ U_1 = \cancel{4U_2} - \cancel{4U_3} \\ U_2 = \cancel{4U_3} - \cancel{4U_4} \\ \vdots \\ U_{n-1} = \cancel{4U_n} - \cancel{4U_{n+1}} \\ U_n = \cancel{4U_{n+1}} - 4U_{n+2} \\ \hline \end{array}\right.$$

$$S_n = 4U_1 - 4U_{n+2} = 4(U_1 - U_{n+2})$$

b) $U_{n+2} = \dfrac{1+3(n+2)}{2^{n+2}} = \dfrac{3n+7}{2^{n+2}}$ donc $S_n = 4(2 - \dfrac{3n+7}{2^{n+2}})$

$S_n = 8 - \dfrac{3n+7}{2^n}$.

6

- On sait que, pour tout entier n, $|\sin 2n| \leq 1$

  donc pour tout entier non nul n : $0 \leq \left|\dfrac{\sin 2n}{5n}\right| \leq \dfrac{1}{5n}$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin 2n}{5n} = 0$

- On sait que, pour tout entier n, $|\sin n| \leq 1$ donc: $0 \leq \left|\dfrac{n \sin n}{n^2+1}\right| \leq \dfrac{n}{n^2+1}$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sin n}{n^2+1} = 0$ La suite est convergente vers 0.

- Pour tout entier n : $0 \le \cos^2 \pi n \le 1$ d'où $-1 \le -\cos^2 \pi n \le 0$

  $n^2 - \cos^2 \pi n \ge n^2 - 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2 - \cos^2 \pi n) = +\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 4}{2} = +\infty$ car $3 > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

  La suite est divergente.

- $\dfrac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n} = \dfrac{\dfrac{3^n - 7^n}{7^n}}{\dfrac{3^n + 7^n}{7^n}} = \dfrac{\dfrac{3^n}{7^n} - 1}{\dfrac{3^n}{7^n} + 1} = \dfrac{\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1}$ or $-1 < \dfrac{3}{7} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$

  et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1} = -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n} = -1$.

7

1) On remarque que tous les termes de la suite U sont strictement positifs.

a) $V_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et $U_n = \dfrac{3^n}{n!}$ | $(n+1)! = (n+1)\times n!$

$$V_n = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n} = \frac{3\times n!}{(n+1)\times n!} = \frac{3}{n+1}$$

b) Pour tout $n \ge 3$ on a $n+1 \ge 4$ donc $0 < \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{4}$ d'où $\dfrac{3}{n+1} \le \dfrac{3}{4}$

On obtient ainsi, pour tout $n \ge 3$, $V_n \le \dfrac{3}{4}$.

c) Déduction : sens de variation de la suite U :

Pour tout $n \ge 3$, $V_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et $V_n \le \dfrac{3}{4}$ donc $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \le \dfrac{3}{4} < 1$.

Les termes de la suite U sont strictement positifs et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ donc

$U_{n+1} < U_n$ et par suite la suite U est décroissante.

2) a) Montrons par récurrence, que pour tout $n \ge 3$, $U_n \le \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3} U_3$:

- Pour $n = 3$, $U_3 \le \underbrace{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3-3}}_{1} U_3$ (vérifiée)

- Soit $n \ge 3$, supposons que $U_n \le \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3} U_3$ et montrons que $U_{n+1} \le \left(\dfrac{3}{4}\right)^{(n+1)-3} U_3$

On a, pour tout $n \geq 3$, $U_{n+1} \leq \frac{3}{4}U_n$

l'hypothèse de récurrence $\Rightarrow$ donne $\frac{3}{4}U_n \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} U_3$

donc $U_{n+1} \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} U_3 \Rightarrow U_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} U_3$

- Conclusion : Pour tout $n \geq 3$, $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} U_3$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 3$, $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{32}{3}$

- $U_3 = \frac{3^3}{3!} = \frac{9}{2}$ et $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{32}{3} = \frac{27}{4^3} \times \frac{16 \times 2}{3} = \frac{9 \times 2}{4} = \frac{9}{2}$ donc $U_3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{32}{3}$ vérifiée.
- Supposons que pour $n \geq 3$, $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{32}{3}$

  et montrons que $U_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{32}{3}$

  $U_{n+1} \leq \frac{3}{4}U_n$ et $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{32}{3} \Rightarrow \frac{3}{4}U_n \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{32}{3}$

  donc $U_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{32}{3}$.
- Conclusion : Pour tout $n \geq 3$, $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{32}{3}$

c) $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{32}{3}$ et $U_n > 0$ donc $|U_n| = U_n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$. Ainsi,

$$\left.\begin{array}{l} |U_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{32}{3} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{32}{3} = 0 \end{array}\right\} \text{d'où } \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

8 La suite U est convergente vers 0.

1) Le côté du triangle T_n étant égal à la moitié de celui du triangle précédent T_{n-1}, l'aire du triangle T_n est le quart de celle du triangle T_{n-1}. On a donc $S_n = \frac{1}{4}S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

La suite $(S_k)_{k\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$S_n = S_1 \cdot q^{n-1}$ donc $S_n = \frac{1}{4^{n-1}} S_1$.

2) Calcul de $\sum_{k=1}^{n} S_k$

(S_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4} \neq 1$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = S_1 \left(\frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{4}{3} S_1 (1 - \frac{1}{4^n})$$

4) Il est immédiat que pour tout $n > 0$, on a : $\frac{4}{3} S_1 - \sum_{k=1}^{n} S_k > 0$

Déterminons un entier n_0 tel que pour tout $n \geq 0$: $\frac{4}{3} S_1 - \sum_{k=1}^{n} S_k < 10^{-4} S_1$

On a : $\frac{4}{3} S_1 - \sum_{k=1}^{n} S_k < 10^{-4} S_1$ si et seulement si $\frac{4}{3} S_1 - \frac{4}{3} S_1 (1 - \frac{1}{4^n}) < 10^{-4} S_1$

c'est-à-dire $\frac{4}{3} S_1 \times \frac{1}{4^n} < 10^{-4} S_1$ soit encore $4^{n-1} > \frac{10^4}{3}$.

Or, les puissances de 4 sont 16, 64, 256, 1024, 4096.

On a donc $0 < \frac{4}{3} S_1 - \sum_{k=1}^{n} S_k < 10^{-4} S_1$ pour tout $n \geq 7$ (pour $n \geq 7$ on a $4^6 > \frac{10^4}{3}$).

On voit que lorsque n devient de plus en plus grand, la somme $\sum_{k=1}^{n} S_k$ croît en se rapprochant de $\frac{4}{3} S_1$. On conclut que $\sum_{k=1}^{n} S_k$ tend vers $\frac{4}{3} S_1$ quand n tend vers $+\infty$.

9

1) a) Montrons que pour tout $n \geq 1$, $0 < U_n \leq \frac{1}{n}$

On a $\frac{1!}{1^1} > 0$. On montre donc que $U_n < \frac{1}{n}$.

$$U_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n} \right).$$

Pour tout $2 \leq k \leq n$ on a $0 < \frac{k}{n} \leq 1$

$k = 2 \qquad 0 < \frac{2}{n} \leq 1$

$k = 3 \qquad 0 < \frac{3}{n} \leq 1$

$\vdots$

$k = n-1 \quad 0 < \frac{n-1}{n} \leq 1$

$k = n \qquad 0 < \frac{n}{n} \leq 1$

En multipliant membre à membre on obtient :

$\frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} \leq 1$. D'où $U_n = \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, $0 < U_n \leq \frac{1}{n}$.

b) $0 < U_n \leq \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

2) a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n: $(1+a)^n \geq 1 + na$

- Pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0$ (vérifiée)
- Supposons que $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour un entier n, montrons que $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$. D'après l'hypothèse de récurrence on a $(1+a)^n \geq 1 + na$ donc $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$ d'où $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2$ *or* $na^2 \geq 0$ donc $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$. Donc la propriété est vraie pour $n+1$.
- Conclusion : Pour tout entier n, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

b) Montrons que pour tout $n \geq 1$, $\frac{U_n}{U_{n+1}} \geq 2$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ;$$

or $\frac{1}{n}$ est un réel positif donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n(\frac{1}{n})$ d'où $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

Par conséquent, $\frac{U_n}{U_{n+1}} \geq 2$ et par suite $\frac{U_n}{U_{n+1}} > 1$ ce qui entraîne que $U_n > U_{n+1}$. La suite (U_n) est donc décroissante.

c) Montrons que : $0 < U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

On a $\frac{U_n}{U_{n+1}} \geq 2$ d'où $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$ pour tout $n \geq 1$.

$U_2 \leq \frac{1}{2} U_1$

$U_3 \leq \frac{1}{2} U_2$ Les membres de l'inégalité étant strictement positifs

$\vdots$ en multipliant membre à membre

$U_n \leq \frac{1}{2} U_{n-1}$

$U_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} U_1$ avec $U_1 = \frac{1!}{1^1} = 1$ donc

$U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Tous les termes de la suite sont strictement positifs donc

$0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

d) $|U_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Statistiques

I- Paramètres d'un caractère statistique :

On distingue deux types de paramètres sur un caractère statistique.

- Les paramètres de position $\begin{cases} \text{Le mode} \\ \text{La médiane} \\ \text{La moyenne} \\ \text{Quartile} \end{cases}$
- Les paramètres de dispersion $\begin{cases} \text{L'étendue} \\ \text{L'écart type} \\ \text{Variance} \\ \text{Intervalles, Interquartiles} \end{cases}$

1. Médiane et quartiles

Définition 1 :

Soit X une série statistique de valeurs $(x_1, x_2, ..., x_N)$ rangées dans l'ordre croissant. On désigne par $\left[\frac{N}{4}\right]$, $\left[\frac{N}{2}\right]$ et $\left[\frac{3N}{4}\right]$ les parties entières, respectivement de $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{2}$ et $\frac{3N}{4}$.

Le réel $x_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}$ est dit premier quartile de X.

Le réel $x_{\left[\frac{N}{2}\right]+1}$ est dit médiane de X (ou deuxième quartile)

Le réel $x_{\left[\frac{3N}{4}\right]+1}$ est dit troisième quartile de X.

Q_1 est tel que au moins 25% des valeurs lui sont inférieures et 75% des valeurs lui sont supérieures.

Q_3 est tel que au moins 75 % des valeurs lui sont inférieures et 25% des valeurs lui sont supérieures.

Définition 2

Soit X une série statistique de valeurs $(x_1, x_2, ..., x_N)$ rangées dans l'ordre croissant. Soit Q_1 le premier quartile et Q_3 le troisième quartile.

On appelle écart interquartile la différence $Q_3 - Q_1$.

2. Moyenne et écart type

Définitions

Soit X une série statistique de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ d'effectifs respectifs $n_1, \ldots, n_p$.

On désigne par N l'effectif total ($N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$).

Moyenne : Le réel $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$ est la moyenne de la série.

Variance : $V = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \overline{X}^2$ est la variance de la série.

Ecart type : Le réel $\sigma = \sqrt{V}$ est l'écart type de la série.

L'écart type d'une série statistique est une mesure de la plus ou moins grande dispersion des valeurs de la série par rapport à la moyenne de la série.

Un écart-type important signifie que les valeurs de la série s'éloignent souvent et de façon importante de la moyenne.

Ecart type et moyenne :

Soit X une série statistique de moyenne $\overline{X}$ et d'écart type σ.

Le réel $\frac{\sigma}{\overline{X}}$ est dit écart-type relatif de X. Il peut être exprimé en pourcentage.

II/ Séries Chronologiques

- Le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'année b à l'année n est égal au quotient de la valeur de l'année n par la valeur de l'année b.

$$C = \frac{\text{valeur de l'année n}}{\text{valeur de l'année b}}$$

- L'indice I de l'année n, base 100 en l'année b est égal à

$$I = C \times 100$$

III/ Série statistique à deux variables

⇨ ***Définition :***

On dit qu'un couple (X, Y) de variables statistiques définit une série double si les deux variables X et Y sont observées simultanément sur une même population.

Dans le cas où X et Y sont quantitatives, la série double correspondante est l'ensemble des couples de valeurs numériques prises par X et Y.

⇨ Si l'étude est portée sur une population de n **individus** (unité statistique), l'ensemble des couples (x_i, y_i) avec $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ est une série statistique **double en données individuelles**.

⇨ ***Distribution marginale***

Soient X et Y deux variables statistiques définies sur une population d'effectif total N. On désigne par $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_p$ les valeurs de X et par $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_q$ celles de Y. Le nombre d'individus de la population vérifiant simultanément $X = x_i$ et $Y = y_j$ est noté n_{ij} associés aux couples (x_i, y_j) sont présentés à l'aide d'un tableau à double entrée de la forme :

X \ Y	y_1	y_2	.....	y_j	.....	y_q	**Distribution marginale de X**
x_1	n_{11}	n_{12}	.....	n_{1j}	.....	n_{1q}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	.....	n_{2j}	.....	n_{2q}	$n_{2.}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
x_i	n_{i1}	n_{i2}	.....	n_{ij}	.....	n_{iq}	$n_{i.}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
x_p	n_{p1}	n_{p2}	.....	n_{pj}	.....	n_{pq}	$n_{p.}$
Distribution marginale de Y	$n_{.1}$	$n_{.2}$	.....	$n_{.j}$	.....	$n_{.q}$	n

Distributions marginales :

- La distribution marginale de la variable X est la distribution des différentes valeurs prises par la variable X.
  La distribution marginale de la variable Y est la différence des différentes valeurs prises par la variable Y .
- Les totaux inscrits en marge du tableau à double entrée définissent deux distribution marginales, l'une associée à la première variable statistique et l'autre associée à la deuxième variable statistique.

⇨ ***Moyenne – Variance – Ecart type***

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_{i.} x_i}{N} \quad , \quad V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_{i.} x_i^2}{N} - \overline{X} \; ; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{q} n_{.j} y_j}{N} \quad , \quad V(Y) = \frac{\sum_{j=1}^{q} n_{.j} y_j^2}{N} - \overline{Y}^2 \; ; \quad \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$$

⇨ **Point moyen :**

On appelle point moyen d'un nuage de points le point $G(\overline{X},\overline{Y})$

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\ ,\quad \overline{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$$

$\overline{X}$ est **la moyenne arithmétique** des réels x_i

$\overline{Y}$ est **la moyenne arithmétique** des réels y_i

⇨ **Nuage de points :**

Le plan est muni d'un repère. Soit (X,Y) une série statistique double.
Le nuage de points représentant la série (X,Y) est l'ensemble des points M(x,y) où (x,y) est un couple de valeurs numériques prises respectivement par X et Y.

IV. Ajustement affine

Soit (X,Y) une série statistique double et G son point moyen.
On divise le nuage de point de (X,Y) en deux parties, contenant à peu près le même nombre de points obtenant ainsi deux nuages de points.
On désigne par G_1 et G_2 les points moyens de ces deux nuages.

Graphiquement, la répartition des points du nuage nous permet de voir s'il existe une relation entre les deux caractères étudiés.
Si le nuage de points représentant la série statistique double (X,Y) a une forme allongée et si les points qui le forment se répartissent sensiblement autour d'une droite passant par le point moyen G, cela permet de dire que l'on peut lier Y et X à l'aide d'une fonction affine.

EXERCICES

1 Une enquête sur 1000 personnes porte sur la durée passée chaque jour devant la télévision, les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Durées	[0;1[	[1;2[	[2;4[	[4;6[	[6;10[	Total
Effectifs	100	200	500	150	50	1000

1) Dresser un tableau dans lequel figurent pour chaque classe : L'effectif, le centre et la fréquence, ainsi que les fréquences cumulées croissantes.
2) Préciser la population sur laquelle porte l'étude statistique, ainsi que le type du caractère étudié.
3) Déterminer l'étendue et la classe modale de ce caractère.
4) Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes, puis déterminer la médiane du caractère et l'intervalle interquartile .
5) Représenter, à l'aide d'un histogramme, les effectifs de chaque classe.
6) Calculer la moyenne et l'écart type du caractère étudié.

2 Les notes obtenues par les élèves de deux classes A et B dans un même devoir de mathématiques sont les suivantes :

Notes de la classe A :

14 , 15, 04 , 07 , 11 , 14, 09 , 10 , 12 , 12, 16, 10 , 18 , 13 , 12 , 3 , 11, 14 , 12 , 10 13 , 06, 12, 10 ; 07.

Notes de la classe B :

11, 13, 08, 09 , 10, 07 , 08 , 09 , 11, 14, 17 , 06, 05 , 09 12, 07, 13, 11, 10 , 08, 04, 09, 10, 13, 12.

Calculer pour chaque classe :

a) la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ .
b) Le pourcentage d'élèves ayant une note appartenant à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma,\overline{x}+\sigma]$.
c) Calculer les quartiles de chaque série de notes.
d) Tracer les diagrammes en boites de chaque série de notes. Conclure.

3 Le tableau suivant donne le pourcentage de la population de la Tunisie vivant sous le seuil de pauvreté.

Années	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Pourcentage	22%	12,9%	7%	6,7%	6,2%	4,2%

D'après INS

1) En l'an 2000, la population de la Tunisie était de 9563500 habitants. Quel est le nombre d'individus vivant sous le seuil de pauvreté en l'an 2000.
2) Sachant qu'en 1990 la population de la Tunisie est 8154400, quel était en 1990 le nombre d'individus vivant en Tunisie sous le seuil de pauvreté.
3) En prenant pour base l'année 1975, traduire en termes d'indices l'évolution de ces pourcentages (les résultats seront donnés à 10^{-1} près).

4 Le tableau suivant donne les dépenses moyennes en Tunisie par personne et par an entre 1975 et 2000 en dinars.

Année	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Dépenses (DT)	147	218	471	716	966	1329

D'après INS

1) Calculer le coefficient multiplicateur qui permet de passer de 1975 à 1980. Interpréter.
2) Calculer les coefficients multiplicateurs qui permettent de passer de l'année 1975 à chacune des autres années. (les résultats seront donnés à 10^{-3} près)
3) En prenant pour base 100 l'année 1975, traduire en termes d'indices l'évolution des dépenses.
4) Construire le graphique des indices des dépenses moyennes par personne en Tunisie.

5 On donne la série statistique suivante à deux variables :

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	13	12	14	16	a

La droite Δ de l'ajustement affine du nuage de points de la série double (X,Y) a pour équation: $y = 9x + 0,6$

a) Calculer la moyenne $\overline{X}$
b) Exprimer la moyenne $\overline{Y}$ en fonction de a.
c) En déduire la valeur de a.

6 Dans le tableau ci-dessous on reporte le chiffre d'affaires annuel (en milliers de dinars) d'une librairie (de 1998 à 2005).

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires (y_i)	80	83	78	78	78	73	72	70

1) Représenter le nuage de points de la série double (X,Y).
2) Donner un ajustement affine du nuage de points de la série double (X,Y).
3) Déterminer graphiquement le chiffre d'affaires de la librairie pour l'année 2008.
4) Déterminer par le calcul en quelle année le chiffre d'affaires sera-t-il inférieur à 60.

7 Le tableau suivant donne l'âge (X) et la tension artérielle (Y) de 7 personnes.

Age X	36	42	48	54	60	66	68
Tension	12	13,5	12,6	14,3	15,4	15	15,5

1) Représenter le nuage de points M(x,y) dans un repère orthogonal.
On prendra pour unités graphique 0,5 cm pour 1 an en abscisses et 3 cm en ordonnées pour l'unité de tension artérielle. L'origine correspond au point I(10 ;10).
2) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine du nuage de points de cette série.
3) Quelle serait la tension d'une personne de 70 ans ?

8 Le tableau suivant donne la distance de freinage d (en mètre) d'une voiture, en fonction de sa vitesse y (en kilomètres par heure) :

v (Km/h)	30	40	50	60	70	80
d (mètres)	42	60	80	90	95	110

On note $\overline{v}$ et $\overline{d}$ les moyennes respectives de v et d.
On note $V(v)$ et $V(d)$ les variances respectives de v et d.

1) Calculer $\overline{v}, \overline{d}, V(v)$ et $V(d)$
2) Soit Δ la droite d'ajustement affine du nuage de points de la série (v,d).
On considère qu'une équation cartésienne de Δ est : $d = 1,3v + 8$. Calculer la distance de freinage lorsque la voiture roule à 100 Km/h.

3) La vitesse de la voiture est de 140 Km/h, lorsque le conducteur, roulant suivant une ligne droite, aperçoit un obstacle situé à une distance de 200 mètres. Pourrait – il alors éviter cet obstacle sachant qu'il met une seconde pour appuyer sur les freins ?

9 Pour un immeuble de 20 appartements, on veut étudier deux critères : le nombre de personnes par appartement (caractère X) et le nombre de pièces de l'appartement (caractère Y).
Le tableau suivant donne la répartition des 20 appartements dans l'immeuble en fonction des deux caractères X et Y.

x_i \ y_j	2	3	4	5
1	3	1	0	0
2	2	3	1	0
3	1	2	2	0
4	0	2	1	1
5	0	0	0	1

1) Combien y a-t-il d'appartements à 3 pièces occupés par des familles de 3 personnes ?
Combien y a-t-il de familles occupant des appartement à 2 pièces ?
Combien y a-t-il de d'appartements occupés par des familles à 4 personnes ?
2) Donner les distributions marginales pour chaque caractère.
3) Quelle est en moyenne le nombre de pièces par appartement de cet immeuble ?
Quelle est en moyenne, le nombre de personnes par appartement de cet immeuble ?

10 Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 élèves suivant leurs notes de mathématiques (Math) et sciences physiques (Ph). Les notes ont été regroupées par classe.
X désigne la note en mathématiques et Y désigne la note en sciences physiques.

Math \ Phy	[0,4[	[4,8[	[8,12[	[12,14[	[14,18[
[0,4[	2	1	0	0	0
[4;8[	2	15	5	0	0
[8;12[	0	4	40	10	0
[12;14[	0	0	5	6	5
[14;18[	0	0	0	4	1

1) Représenter la série (X,Y).
2) Déterminer la distribution marginale de X et calculer $\overline{X}$ et $V(X)$.
   Déterminer la distribution marginale de Y et calculer $\overline{Y}$ et $V(Y)$.
3) Quelle est la moyenne des élèves en mathématiques lorsque leur note en physique appartient à la classe $[8;12[$.

11 Le tableau suivant donne la répartition de 150 personnes selon le nombre d'années d'études après baccalauréat (X) et l'âge (Y).

	22	25	28	35	Distribution Marginale de X
2	10	4	9	2	
3					24
4	0	26	23	25	
5	0	8	6	8	
6	0		3	1	5
Distribution Marginale De Y	17		46	40	

1) Compléter le tableau.
2) Déterminer les distributions marginales de X et de Y.
3) Quel est le nombre moyen d'années d'étude après baccalauréat de ces personnes.
   Quel est la moyenne d'âge de la population étudiée.
4) Quel est l'âge moyen des personnes ayant un niveau « bac+4 ».
5) Quel est en moyenne le niveau d'étude des personnes ayant l'age de 25 ans.

CORRIGES

1

1.

Classes	Centres	Effectifs	Fréquences	Fréquences cumulées croissantes
[0;1[	0,5	100	0,1	0,10
[1;2[	1,5	200	0,2	0,30
[2;4[	3	500	0,5	0,80
[4;6[	5	150	0,15	0,95
[6;10[	8	50	0,05	1
Total		1000	1	

2. La population est constituée de l'ensemble des 1000 personnes sur lesquelles porte l'enquête. Le caractère étudié sur ces personnes est leur durée journalière de présence devant le téléviseur. Ce caractère est **quantitatif** (car on l'exprime à l'aide d'un nombre traduisant une quantité) et **continu** car ce caractère peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 10.

3. **L'étendue de ce caractère est 10 - 0 = 10 (heures)**. La classe modale est celle dont l'effectif est le plus élevé. Ici, **la classe modale est la classe [2;4[**

(Le plus grand nombre de personnes passent entre 2 heures et 4 heures devant la télévision)

4. **Le polygone des fréquences cumulées croissantes :**

Par lecture graphique sur le polygone ci-après, on obtient la médiane de ce caractère en lisant l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5. Me ≃ 2,8 (heures), c'est-à-dire 2 heures 48 minutes. Cela signifie que la moitié des 1000 personnes interrogées regardent chaque jour la télévision pendant une durée inférieure à 2heures 48 minutes.
Sur le même graphique, on lit $Q_1 \simeq 1{,}7$ (abscisse du point dont l'ordonnée est 0,25) et $Q_2 \simeq 3{,}8$ (abscisse du point dont l'ordonnée est 0,75).
L'intervalle interquartile est $[1{,}7\,;\,3{,}8]$ et l'écart interquartile est $3{,}8 - 1{,}7 = 2{,}1$ (heures), c'est-à-dire 2 heures 6 minutes.
On peut en déduire que la moitié des 1000 personnes interrogées ont une différence de présence devant la télévision moins de à 2 h 6 min.
Comme on peut déduire que la durée de présence devant la télévision est entre 1,7 et 3,8 heures pour 500 personnes.

5. On représente les effectifs de chaque classe avec un histogramme, constitué de rectangles, dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe.
On prend une aire ■ qui représente 25 personnes.

6)

Classes	Centres x_i	Effectifs n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[0;1[	0,5	100	50	25
[1;2[	1,5	200	300	450
[2;4[	3	500	1500	4500
[4;6[	5	150	750	3750
[6;10[	8	50	400	3200
Total		1000	3000	11925

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 + n_5x_5}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5} = \frac{3000}{1000} = 3$$

$$V = \frac{n_1{x_1}^2 + n_2{x_2}^2 + n_3{x_3}^2 + n_4{x_4}^2 + n_5{x_5}^2}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5} - \overline{x}^2 = \frac{11925}{1000} - 3^2 = 2{,}925$$

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{2{,}925} \simeq 1{,}71 \text{ heures} \simeq 1 \text{ heure } 43 \text{ min}$$

2

a) Pour la classe A : $\overline{x} = 11$; $V = 12{,}83$; $\sigma = 3{,}58$.
Pour la classe B : $\overline{x} = 10{,}08$; $V = 11{,}43$; $\sigma = 3{,}37$.

b) • Dans la classe A, les élèves dont la note est située dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$, c'est-à-dire dans [8 ; 14] puisqu'il s'agit de valeurs entières, sont au nombre de 17.

Le pourcentage correspondant est : $\frac{17}{25} \times 100 = 68$.

Dans la classe A :
Il y a 68% des élèves dont la note se situe dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$.

• Dans la classe B, les élèves dont la note est située dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$, c'est-à-dire dans [7 ; 13] puisqu'il s'agit de valeurs entières, sont au nombre de 20.

Le pourcentage correspondant est : $\frac{20}{25} \times 100 = 80$.

Dans la classe B :
Il y a 80% des élèves dont la note se situe dans l'intervalle $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$.

c) **Pour la classe A :** $N = 25$.

1er quartile : $\frac{N}{4} = 6{,}25$ donc le 1er quartile est la 7ème valeur de la série.

$Q_1 = 10$

2ème quartile : $N = 25$. N est impair donc la médiane de cette série est la 13ème valeur de la série. $Me = 12$.

3ème quartile : $\frac{3}{4}N = 18{,}75$ donc le 3ème quartile est la 19ème valeur de la série. $Q_3 = 13$.

Pour la classe B : $N = 25$.

1er quartile : $\frac{N}{4} = 6{,}25$ donc le 1er quartile est la 7ème valeur de la série.

$Q_1 = 8$

2ème quartile : $N = 25$. N est impair donc la médiane de cette série est la 13ème valeur de la série. $Me = 10$.

3ème quartile : $\frac{3}{4}N = 18{,}75$ donc le 3ème quartile est la 19ème valeur de la série. $Q_3 = 13$.

d) ***Construction du diagramme en boites :***

- Pour la classe A : L'intervalle interquartile est $[10,13]$.

  Pour la classe B : L'intervalle interquartile est $[8,13]$.

  Interprétation :

  La moitié des élèves de la classe A ont des notes entre 10 et 13 alors que dans la classe B la moitié des élèves ont des notes entre 8 et 13.
- Pour la classe A : $Q_1 = 10$.

  Pour la classe B : $Q'_1 = 8$

  Interprétation :

  Au moins, 25% des élèves de la classe A ont des notes inférieures à 10 alors que dans la classe B , 25% des élèves ont des notes inférieures à 8.
- Pour la classe A : La médiane est égale à 12

  Pour la classe B : La médiane est égale à 10

  Interprétation :

  Dans la classe A, la moitié des élèves ont des notes inférieures à 12, tandis que pour la classe B, la moitié des élèves ont des notes inférieures à 10.
- Pour les deux classes, le 3ème quartile est égal à 13.

  Interprétation :

  Au moins 75% des élèves ont des notes inférieures à 13.

  Les deux classes ont la même proportion d'élèves bons en mathématiques (25% des élèves)

3

1) La population est de 95636500 en 2000.
$0,042 \times 9563500 = 401667$ personnes
Il y avait 401667 personnes vivant sous le seuil de pauvreté en l'an 2000.
2) La population est de 8154400 en 1990.
$8154400 \times 0,067 = 546344,8$ arrondi à 546345 .
Il y avait 546345 habitants vivant sous le seuil de pauvreté en 1990.
3) L'année de base est 1975.
Soit I_0 l'indice de l'année de base $I_0 = 100$.
Soit I_1 l'indice de l'année 1980: $I_1 = \frac{0,129}{0,22} \times 100 = 58,6$ à 10^{-1} près.
On calcule de même les autres indices , on obtient :

Années	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Indices	100	58,6	31,8	30,5	28,2	19,1

4

1) On note $C_{1980/1975} = \frac{218}{147} = 1,4829$.
$C_{1980/1975}$ est arrondi à 1,483 à 10^{-3} près
$C_{1980/1975} > 1$. Il s'agit d'une augmentation.
Le pourcentage de cette augmentation est $t = (1,483 - 1) \times 100 = 48,3$.
2) $C_{1985/1975} = \frac{471}{147} = 3,204$. $C_{1990/1975} = \frac{716}{147} = 4,871$
$C_{1995/1975} = \frac{966}{147} = 6,571$ $C_{2000/1975} = \frac{1329}{147} = 9,041$
3) Si N_i désigne l'indice de l'année i, on a $N_i = C_{i/1975} \times 100$, on obtient le tableau suivant :

Année	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Dépenses (DT)	147	218	471	716	966	1329
Indices	100	148,3	320,40	487,1	657,1	904,1

4) Construction du graphique des indices des dépenses moyennes :

5

a) $\overline{x}=\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)=\frac{8}{5}=1,6$ b) $\overline{y}=\frac{55+a}{5}$

c) $G(\overline{x},\overline{y})\in\Delta : y=-9x+0,6$; $\overline{y}=9\overline{x}+0,6$

$\frac{55+a}{5}=9\times1,6+0,6\Rightarrow 55+a=5\times9\times1,6+0,6\times5\Rightarrow a=20$

6

1)

2) Coordonnées des points G_1 et G_2

Le point G_1 du nuage formé par les quatre premiers points a pour coordonnées $(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ avec :

$\overline{x}_1=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{10}{4}=2,5$

$\overline{y}_1=\frac{80+83+78+78}{4}=\frac{319}{4}=79,75$ $G_1(2,5\,;79,75)$.

Le point moyen G_2 du sous nuage formé par les quatre derniers points a pour coordonnées $(\overline{x}_2,\overline{y}_2)$ avec :

$\overline{x}_2=\frac{5+6+7+8}{4}=\frac{26}{4}=6,5$

$\overline{y}_2=\frac{78+73+72+70}{4}=\frac{293}{4}=73,25$ $G_2(6,5\,;73,25)$

Equation de la droite (G_1G_2) :

La droite d'ajustement affine de y en x est de la forme $y=\alpha x+\beta$ (car G_1 et G_2 ne sont pas de même abscisse).

$G_1(2,5\,;79,75)$ appartient à (G_1G_2) donc $79,75=2,5\alpha+\beta$.

$G_2(6,5\,;73,25)$ appartient à (G_1G_2) donc $73,25=6,5\alpha+\beta$.

On résout alors le système $\begin{cases}2,5\alpha+\beta=79,75\\6,5\alpha+\beta=73,25\end{cases}$

$\begin{cases}4\alpha=-6,5\\\beta=79,75-2,5\alpha\end{cases}$ d'où $\alpha=-1,625$ et $\beta=83,8125$.

$(G_1G_2) : y=-1,625x+83,8125$.

3) L'année 2008 est l'année de rang 11.

A l'aide de la droite (G_1G_2) on peut déterminer le chiffre d'affaires prévu pour 2008 en considérant l'abscisse du point de (G_1G_2) d'abscisse 11, on lit $y \simeq 66$.

5) On cherche x tel que $y < 60$.

$$y < 60 \Leftrightarrow -1,625x + 83,8125 < 60 \Leftrightarrow 1,625x > 23,8125 \Leftrightarrow x > \frac{23,8125}{1,625}$$

or $\frac{23,8125}{1,625} \simeq 14,654$

Le premier nombre entier supérieur à ce nombre est 15.
Donc c'est en l'année de rang 15 que le chiffre d'affaire est au dessous de 60 milles dinars (pour la première fois). L'année de rang 15 est 2112.

7

1)

2) Coordonnées des points G_1 et G_2

Le point G_1 du nuage formé par les quatre premiers points a pour coordonnées $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ avec :

$$\overline{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4} = 45 \quad \text{et} \quad \overline{y}_1 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4} y_i = 13,1$$

donc $G_1(45\,;13,1)$.

Le point moyen G_2 du nuage formé par les quatre derniers points a pour coordonnées $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ avec :

$$\overline{x}_2 = \sum_{i=5}^{7} x_i = 64,666 \quad , \quad \overline{y}_2 = \sum_{i=5}^{7} y_i = 15,3 \qquad \text{donc} \quad G_2(64,666\,;15,3)$$

Equation de la droite (G_1G_2) :

La droite d'ajustement affine de y en x est de la forme $y = \alpha x + \beta$ (car G_1 et G_2 ne sont pas de même abscisse).

$G_1(45\,;13,1)$ appartient à (G_1G_2) donc $13,1 = 45\alpha + \beta$.

$G_2(64,666\,;15,3)$ appartient à (G_1G_2) donc $15,3 = 6,5 \times 64,666 + \beta$.

On résout alors le système $\begin{cases} 45\alpha + \beta = 13,1 \\ 64,666\alpha + \beta = 15,3 \end{cases}$

$\begin{cases} 19,666\alpha = 2,2 \\ \beta = 13,1 - 45\alpha \end{cases}$ d'où $\alpha \simeq 0,11187$ et $\beta \simeq 8,066$.

$$(G_1G_2) : y = 0,11187x + 8,066.$$

3) On remplace $x = 70$ dans l'équation $(G_1G_2) : y = 0,11187x + 8,066$, on trouve $y = 15,8969$.

la tension artérielle estimée d'une personne de 70 ans est environ 15,9.

8

1) • $\bar{v} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} v_i = \frac{1}{6}(30+40+50+60+70+80) = \frac{330}{6} = 55$

• $V(v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} v_i^2 - (\bar{v})^2 = 291,66667$

• $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} d_i = \frac{1}{6}(42+60+80+90+95+110) = 79,5$

• $V(d) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} d_i^2 - (\bar{d})^2 = 511,25$

2) $\Delta : d = 1,3V + 8,$

pour $V = 100\,Km/h$ on trouve $d = 138$ mètres.

3) La distance d (en mètres) nécessaire pour stopper le véhicule dès qu'il voit le danger est égale à la somme des distances parcourue pour une seconde de reflexe et la distance de freinage.

Pour $V = 140\,Km/h$ on a : $d = 1,3 \times 140 + 8 = 190$ mètres,

140 km = 140 000 mètres	1 heure = 3600 secondes
	1 seconde

la voiture parcoure la distance $\frac{140000}{3600} = 38,88$ mètres.

d'où la distance de freinage est $190 + 38,88 = 228,88 > 200$mètres d'où le conducteur ne peut pas éviter l'obstacle.

9

Comment lire ce tableau ?

• Pour obtenir les distributions marginales on ne tient compte que des totaux en ligne et en colonne.

x_i \ y_j	2	3	4	5	Distribution Marginale de X $n_{i.}$
1	3	1	0	0	4
2	2	3	1	0	6
3	1	2	2	0	5
4	0	2	1	1	4
5	0	0	0	1	1
Distribution marginale de Y $n_{.j}$	6	8	4	2	20

- $n_{43} = 1$ signifie qu'une seule famille de 4 personnes habite un appartement à 4 pièces.
  $n_{31} = 1$ signifie qu'une seule famille de 3 personnes occupent un appartemant de 2 pièces.
  $n_{33} = 2$ signifie que 2 familles de 3 personnes occupent un appartement de 4 pièces.
- Les totaux en lignes $n_{i.}$ et colonnes $n_{.j}$ donne l'effectif d'une modalité d'un caractère indépendamment de sa répartition en fonction de l'autre caractère.
  Exemple : $n_{.2} = 8$, cela signifie que l'immeuble compte 8 familles occupant des appartement à 3 pièces.
  $n_{3.} = 5$ signifie que l'immeuble compte 5 familles composées de 3 personnes.

1) « 3 pièces » correspond à la deuxième valeur de Y dans le tableau et « 3 personnes » correspond à la 3ème valeur de X. $n_{32} = 2$.
   Le nombre de familles occupant des appartements à 2 pièces est $n_{.2} = 6$.
   Cette valeur est obtenue de la 1ère colonne totale du tableau.
   Le nombre d'appartements occupés par des familles de 3 personnes est $n_{3.} = 5$. Cette valeur est obtenue de la 3ème ligne totale.

2) Distribution marginales de X :
   Les marges d'un tableau d'effectifs à double entrée sont la ligne total et la colonne totale.

x_i	1	2	3	4	5
Effectif $n_{i.}$	4	6	5	4	1

y_j	2	3	4	5
Effectif $n_{.j}$	6	8	4	2

3) $\overline{X}$: le nombre moyen de personnes par appartement et $\overline{Y}$ est le nombre moyen de pièces par appartement.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_{i.}x_i}{20} = 2,6 \qquad \overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{4} n_{.j}y_j}{20} = 2,8$$

10

1)

2)

x_i \ y_j	2	6	10	13	16	Distribution Marginale de X $n_{i.}$
2	2	1	0	0	0	3
6	2	15	5	0	0	22
10	0	4	40	10	0	54
13	0	0	5	6	5	16
16	0	0	0	4	1	5
Distribution marginale de Y $n_{.j}$	4	20	50	20	6	100

Distribution marginale de X :

x_i	2	6	10	13	16
Effectif $n_{i.}$	3	22	54	16	5

Moyenne arithmétique $\overline{X}$ et V(X) :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_{i.}x_i}{100} = 9,66 \qquad V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_{i.}x_i^2}{100} - \overline{X}^2 = 8,5644$$

Distribution marginale de Y :

y_j	2	6	10	13	16
Effectif $n_{\cdot j}$	4	20	50	20	6

Moyenne arithmétique $\overline{Y}$ et V(Y) :

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{5} n_{\cdot j} y_j}{100} = 9,84 \qquad V(Y) = \frac{\sum_{j=1}^{5} n_{\cdot j} y_j^2}{100} - \overline{Y}^2 = 9,6944$$

3) La classe $[8,12[$ correspond à la 3ème valeur prise par Y : $Y_3 = 10$.

On note $\overline{X}_3$ la moyenne en mathématiques des élèves ayant la note en Physique appartenant à la classe $[8,12[$.

Il y a 50 élèves ayant la note de physique entre 8 et 12.

Note de Math des élèves ayant la note de Physique dans $[8,12[$	2	6	10	13	16
Effectif n_{i3}	0	5	40	5	0

$$\overline{X}_3 = \frac{0\times2+5\times6+40\times10+5\times13+0\times16}{50} = 9,9$$

11

X \ Y	22	25	28	35	Distribution Marginale de X
2	10	4	9	2	(1) 25
3	(2) 7	(5) 8	(3) 5	(4) 4	24
4	0	26	23	25	(6) 74
5	0	8	6	8	(7) 22
6	0	(8) 1	3	1	5
Distribution Marginale De Y	17	(9) 47	46	40	150

X : le nombre d'années d'étude après le bac et Y : l'âge.

1) $10+4+9+2=25$ (1) $\qquad 17-(0+0+0+10)=7$ (2)

$46-(9+23+6+3)=5$ (3) $\qquad 40-(2+25+8+1)=4$ (4)

$24-(7+5+4)=8$ (5) $\qquad 0+26+23+25=74$ (6)

$0+8+6+8=22$ (7) $\qquad 5-(3+1)=1$ (8)

$4+8+26+8+1=47$ (9)

2)

x_i	2	3	4	5	6
Effectif $n_{i.}$	25	24	74	22	5

y_j	22	25	28	35
Effectif $n_{.j}$	17	47	46	40

3) $\overline{X} = 3,72$

$\overline{Y} = 28,24$

4) « Bac + 4 » correspond à la 3ème valeur de X. Il y a 74 personnes ayant le niveau « Bac+4 ». On désigne par $\overline{Y}_3$ est l'âge moyen des personnes ayant un niveau « Bac + 4 »

On ne tient compte que de la ligne correspondante à la modalité 4 du caractère X.

Age des personnes ayant Bac + 4	22	25	28	35
Effectif $n_{.j}$	0	26	23	25

$$\overline{Y}_3 = \frac{0 \times 22 + 26 \times 25 + 23 \times 27 + 25 \times 32}{74} \simeq 27,986$$

5) « l'âge 25 ans » est la 2ème valeur prise par Y. Il y a 47 personnes d'âge 25 ans dans cette population.

On désigne par $\overline{X}_2$ le nombre moyen d'année d'étude après bac des personnes ayant l'âge 25 ans. On ne tient compte que de la colonne correspondante à la modalité 25 du caractère Y.

Nombre d'années après bac pour les personnes d'âge 25 ans.	2	3	4	5	6
Effectif $n_{.j}$	4	8	26	8	1

$$\overline{X}_2 = \frac{4 \times 2 + 8 \times 3 + 26 \times 4 + 8 \times 5 + 1 \times 6}{47} \simeq 3,872$$

Probabilité

I / Langage ensembliste – Langage probabiliste

Définitions

- Lorsqu'on fait une expérience aléatoire, le résultat est appelé issue.
- L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles.
- Un évènement est une partie de l'univers des possibles.

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience, on a :
(Ω) est l'ensemble des parties ou évènements de Ω.

Langage ensembliste	*Langage probabiliste*
A : une partie de Ω	A est un évènement
$A = \Omega$	A est l'évènement certain
$A = \varnothing$	A est l'évènement impossible
: un élément de Ω, $e \in \Omega$	est une éventualité ou un cas possible
$\{\ \}$ est un singleton, $\{e\} \subset \Omega$	$\{\ \}$ est un évènement élémentaire
$A \cup B$ est la réunion de A et B	$A \cup B$ est l'évènement « A ou B »
$A \cap B$ est l'intersection de A et B	$A \cap B$ est l'évènement « A et B »
$\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$ est le complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$ est l'évènement contraire de A
Si $A \cap B = \varnothing$, A et B sont deux parties disjointes de Ω	A et B sont deux évènements incompatibles.

II/ Probabilité d'un événement

Définition :

⇨ Soit Ω un ensemble fini, on appelle probabilité définie sur (Ω) toute application : $p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ tel que :

- $p(\Omega) = 1$
- pour tout A et B de (Ω). Si $A \cap B = \varnothing$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

⇨ On dit que p est une équiprobabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ ou probabilité uniforme si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

⇨ Soit Ω un ensemble fini, p l'équiprobabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ pour tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$, la probabilité de A est : $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Notation : le cardinal d'un ensemble A noté card(A) est le nombre d'éléments de A.

III/ Propriétés

Soit Ω un ensemble fini, p équiprobabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

① pour tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

② $p(\varnothing) = 0$

③ Pour tout A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

IV/ Epreuves successives et évènements indépendants

On considère une expérience, constituée de n épreuves successives.
Soit A_1 un évènement réalisé avec la probabilité p_1 lors de la première épreuve, A_2 un évènement réalisé avec la probabilité p_2 lors de la deuxième épreuve et A_n est un évènement réalisé avec la probabilité p_n lors de la $n^{\text{ième}}$ épreuve.
On dit que les évènements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant. Dans ce cas la probabilité pour que les évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ soient successivement réalisés est égale à $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$.

Exemple : Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires.
On tire une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne.
On effectue ensuite un second tirage et on note la couleur de la boule tirée.
Puisqu'il y a deux boules blanches parmi les cinq , la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{2}{5}$, et celle de tirer une boule noire est donc $\frac{3}{5}$.
On peut associer à cette expérience l'arbre suivant :

La probabilité, par exemple, de réaliser l'évènement :
« obtenir une boule blanche et une boule noire »
est $p = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$.

V/ Epreuves successives et évènements dépendants

On considère une expérience, constituée de n épreuves successives.
Soit A_1 un évènement réalisé avec la probabilité lors de la première épreuve,
$_2$ un évènement réalisé avec la probabilité $_2$ lors de la deuxième épreuve et
$_n$ est un évènement réalisé avec la probabilité p_n lors de la $n^{ième}$ épreuve.
On dit que les évènements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant. Dans ce cas la probabilité pour que les évènements $_1$ $_2$ $_n$ soient successivement réalisés est égale à $_1 \times {}_2 \times \cdots \times {}_n$.

Exemple :
Avec la même urne de l'exemple précédent, on fait deux tirages successivement de deux boules sans les remettre dans l'urne.
On peut associer à cette expérience l'arbre suivant:

Si la 1ère boule tirée est blanche, il reste dans l'urne 4 boules donc la probabilité de tirer une boule noire dans le deuxième tirage est $\frac{3}{4}$.
La probabilité, par exemple, de réaliser l'évènement « une boule blanche et une boule noire » est $p' = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

ENONCES

1 Une urne contient quatre boules rouges, cinq boules vertes et trois boules blanches indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément deux boules de l'urne, calculer la probabilité des événements suivants :
   A : « avoir deux boules blanches » B : « avoir deux couleurs »
   C : « avoir au moins une boule verte »
2) On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   D : « avoir deux boules de même couleur »
   E : « avoir une seule boule verte »
3) On inscrit le numéro (1) sur les boules rouges, (–1) sur les vertes et (0) sur les blanches. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.
   On pose S : « la somme des numéros inscrits sur les boules tirées ».
   a) Donner les valeurs possibles de S.
   b) Calculer la probabilité de chaque valeur de S.
   c) Vérifier que la somme de toutes ces probabilités est égale à 1.

2 Une urne contient dix boules : six noires numérotées 1 , 1, 2, 2, , 2, 3 et quatre blanches numérotées 1, 1, 2, 3. Ces boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   A : « obtenir trois boules noires »
   B : « la somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est paire ».
   C : « obtenir trois boules noires ou une somme paire »
   D : « obtenir exactement deux boules blanches et une seule boule numérotée 1 ».
2) On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   E : « avoir exactement deux noires et une blanches »
   F : « avoir au moins une noire »
   G : « la boule n° 2 est tirée pour la première fois au deuxième tirage ».

3 Une urne contient sept boules rouges et trois vertes.

1) On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne, calculer la probabilité des événements suivants :
   A : « obtenir deux boules de même couleur »
   B : « la première boule est rouge et la deuxième est verte »
2) On suppose que le nombre de boules vertes est $(n \geq 2)$ et l'urne contient toujours 10 boules : vertes et rouges. Déterminer n pour que la probabilité de réaliser l'événement A soit égal à $\frac{7}{15}$.

4 Une urne contient cinq jetons : deux blancs numérotés 1 et -1 ; trois jetons noirs numérotés 1, 1 et -1.

1) On tire simultanément deux jetons de l'urne, calculer la probabilité des événements suivants :
   a) « obtenir deux jetons de même couleur »
   b) « obtenir deux jetons de même numéro »
   c) « obtenir deux jetons de même couleur ou de même numéro »
2) On tire l'un après l'autre les cinq jetons sans remise.
   a) Calculer la probabilité des événements suivants :
      A_1 : « le premier jeton noir apparaît au 1er tirage »
      A_2 : « le premier jeton noir apparaît au 2ème tirage »
      A_3 : « le premier jeton noir apparaît au 3ème tirage »
   b) Calculer $p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)$ et interpréter le résultat.
3) Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les plans P et P' d'équations : $P: x+ay+b=0$ et $P': x+by-a=0$
   On tire successivement et avec remise, deux jetons de l'urne et on pose a le numéro du premier jeton tiré et b le numéro du second jeton tirée.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   E : « $P//P'$ » F : « $P \perp P'$ ».

5 Une urne contient quatre boules blanches numérotées : $-1,0,0,1$ et cinq boules noires numérotées : $-1,1,1,2,2$.

1) On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   A : « obtenir trois boules de deux couleurs ».
   B : « obtenir trois boules dont le produit des numéros est nul »
   $C = A \cup B$
   D : « il reste dans l'urne le même nombre de boules blanches que de boules noires ».
2) On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   E : « obtenir exactement deux boules blanches »
   F : « obtenir une somme nulle »
3) On répartit les neuf boules dans neufs cases, chaque case pouvant contenir de zéro, jusqu'à neuf boules.
   a) Calculer le nombre de répartitions possibles.
   b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
      G : « deux cases et deux seulement sont non vides »
      H : « aucune case n'est vide »
      K :« chaque couleur est dans une case »

6 Dans une usine, un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueuse à cause de deux défauts seulement désignés par a et b.
Dans un lot de 1000 pièces on constate que 100 présentent le défaut a (et peut être le défaut b), 80 présentent le défaut b (et peut être le défaut a) et 40 présentent le défaut a et b.
Un client achète un appareil de ce lot, calculer la probabilité des événements suivants :

E_1 : « l'appareil présente le défaut a ou b »

E_2 : « l'appareil présente seulement le défaut a »

E_3 : « l'appareil présente seulement le défaut b »

E_4 : « l'appareil ne présente aucun défaut »

7 Une boite B_1 contient trois jetons numérotés : 0, 0 et 2.
Une boite B_2 contient quatre jetons numérotés : 1, 2, 3, 4.

1) On tire au hasard un jeton de chaque boite, on pose X le produit des numéros inscrits sur les jetons.
   a) Quelles sont les valeurs possibles de X.
   b) Calculer la probabilité des événements suivants : $A = \{X = 0\}$ et $B = \{X > 5\}$
2) On effectue trois fois le tirage décrit leurs urnes respectives.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   C : « avoir exactement deux fois un produit supérieur strictement à 5 »
   D : « avoir au moins une fois un produit supérieur strictement à 5 »
3) On tire successivement et avec remise n jetons de B_1 ($n \in \mathbb{N}^*$)
   On désigne par p_k la probabilité d'avoir le n° 2 pour la première fois au $k^{\text{ième}}$ tirage.
   a) Calculer p_1, p_2, p_3, p_k (où $1 \leq k \leq n$) et p_n
   b) Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} p_k$.

8 On lance cinq fois une pièce de monnaie.
La probabilité d'avoir pile est la même que d'avoir face.
On pose p_k la probabilité d'obtenir k fois « face » après les cinq lancers (k étant un entier compris entre 0 et 5).

1) Calculer p_0, p_1, p_k.
2) Calculer $S = \sum_{k=0}^{5} p_k$.
3) Calculer la probabilité des événements suivants :
   a) « obtenir au moins une fois "face" »
   b) « obtenir au plus quatre fois "face" »

10 On considère une classe de 28 élèves: 16 garçons (6 internes et 10 externes) et 12 filles (4 interne et 8 externes).

On choisit au hasard cinq élèves pour former un comité.

1) Quel est le nombre de comités possibles ?
2) Calculer la probabilité de former des comités où :
   C_1 : * siègent exactement deux garçons
   C_2 : * siègent exactement deux internes
   C_3 : * siègent exactement deux garçons et deux internes
   C_4 : * siègent exactement deux garçons ou deux internes.
3) On suppose dans cette question que le nombre de filles est égal à n ($n \geq 2$) (le nombre de garçons est toujours 16 garçons).
   Déterminer le nombre de filles pour que le nombre de comités où siègent exactement deux filles soit égal à 25200.
4) On suppose qu'un comité est formé par : un président, un vice président et trois membres (la classe est formée comme dans la 1ère question).
   a) Quel est le nombre de comités possibles ?
   b) Calculer la probabilité d'avoir un comité où le président et le vice président soient l'un interne et l'autre externe.

11 Dans le jeu télévisé « Des chiffres et des lettres », on dispose de trois roulettes murales, alignées, identiques, sur chacune desquelles sont inscrits les chiffres de 0 à 9.

À chaque tirage on obtient un nombre de trois chiffres. Dans ces tirages, on considère les résultats du type : 012, 001, 000 comme des nombres à trois chiffres.

1) Combien y – a – t – il de tirages possibles ?
2) Déterminer la probabilité de chacun des événement suivants :
   A : « Le résultat obtenu est un nombre de trois chiffres égaux »
   B : « Le résultat obtenu est un nombre de trois chiffres différents »
   C : « Le résultat obtenu est un nombre commençant par 0 et comportant un seul 0 »
   D : « Le résultat obtenu est un nombre comportant un seul 0 »
3) Déduire des questions précédents les probabilités des événement :
   $E = A \cup D$, $F = B \cup C$

12 1) On jette 2 dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Soient :
   A l'événement « somme des points ≤ 6 »
   B l'événement : « somme des points divisible par 3 »
   Trouver la probabilité de chacun des événements A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

2) On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées :

$$(-1), (-1), (-1), (0), (1), (1).$$

On jette ce dé deux fois de suite et on note à chaque fois le numéro de la face supérieure.
Déterminer la probabilité de chacun des événements A et B suivants :
C : « les deux numéros obtenus sont différents »
D : « la somme des deux numéros obtenus est égale à 0 »

13 On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) Déterminer l'ensemble des issues de l'expérience.
2) On suppose que les probabilité d'apparition d'un nombre pair sont égales et que les probabilités d'apparition d'un nombre impair sont égales, et que la probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de la probabilité d'apparition d'un nombre impair. On note p_n la probabilité d'apparition du nombre n.
   a) Calculer $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$.
   b) Quelle est la probabilité d'apparition d'un nombre strictement supérieur à 3 ?

CORRIGES

1

1)

- $A = \{b,b\}$ d'où $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{C_3^2}{66} = \dfrac{3}{66} = \dfrac{1}{22} \simeq 0{,}045$
- $B = \{b,v\}$ ou $\{b,r\}$ ou $\{r,v\}$ d'où

  $p(B) = \dfrac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{C_3^1 \times C_5^1 + C_3^1 \times C_4^1 + C_4^1 \times C_5^1}{66} = \dfrac{15+12+20}{66} = \dfrac{47}{66} \simeq 0{,}712$
- C : « avoir au moins une boule verte : c'est l'événement contraire de l'événement « avoir aucune boule verte »

  $\overline{C}$: « avoir aucune verte »

  $p(\overline{C}) = \dfrac{C_7^2}{66} = \dfrac{21}{66} = \dfrac{7}{22}$. D'où $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \dfrac{7}{22} = \dfrac{15}{22} \simeq 0{,}681$.

2) $\text{card}(\Omega) = A_{12}^2 = 132$.

Types de tirages réalisant D : (r,r) ou (b,b) ou (v,v)

$p(D) = \dfrac{A_4^2 + A_3^2 + A_5^2}{132} = \dfrac{12+6+20}{132} = \dfrac{38}{132} \simeq 0{,}287$

E : « avoir une seule boule verte » $\rightarrow$ $(v,\overline{v})$ ou $(\overline{v},v)$ où

$\overline{v}$: non verte = rouge ou blanche. $\text{card}(E) = A_5^1 \times A_7^1 \times 2 = 70$

$p(E) = \dfrac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{70}{132} = \dfrac{35}{66} \simeq 0{,}53$

3) $\text{card}(\Omega) = 12^2$

a) Les valeurs possibles de S:

Type de tirage	*Valeur de S*	*Remarque*
(-1,-1)	$S = -2$	
(-1,0)	$S = -1$	*l'ordre intervient*
(-1,1) ou (0,0)	$S = 0$	*l'ordre intervient*
(0,1)	$S = 1$	*l'ordre intervient*
(1,1)	$S = 2$	

b) $p(\{S=-2\}) = \dfrac{5^2}{12^2} = \dfrac{25}{144} \simeq 0{,}173$

$p(\{S=-1\}) = \dfrac{5 \times 3 \times \overset{\text{l'ordre}}{2}}{12^2} = \dfrac{30}{144} \simeq 0{,}208$

$$p(\{S=0\})=\frac{\overbrace{5^1\times 4^1\times 2}^{(1,-1)\text{ ou }(-1,1)}}{12^2}+\frac{\overbrace{3^2}^{(0,0)}}{12^2}=\frac{49}{144}=0,34$$

$$p(\{S=1\})=\frac{3^1\times 4^1\times 2}{12^2}=\frac{24}{144}=\frac{1}{6}\simeq 0,166$$

$$p(\{S=2\})=\frac{4^2}{12^2}=\frac{16}{144}\simeq\frac{1}{9}\simeq 0,111$$

c) $p(\{S=-2\})+p(\{S=-1\})+p(\{S=0\})+p(\{S=1\})+p(\{S=2\})$

$$=\frac{25}{144}+\frac{30}{144}+\frac{49}{144}+\frac{24}{144}+\frac{16}{144}=1$$

2

1) $\text{card}(\Omega)=C_{10}^3=120$.

$A=\{N,N,N\}$ d'où $p(A)=\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\dfrac{C_6^3}{120}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}=0,166$

$B=\{\text{pair, pair, pair}\}$ ou $\{\text{impair, impair, pair}\}$

$$p(B)=\frac{C_4^3+C_6^2\times C_4^1}{120}=\frac{4+60}{120}=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}\simeq 0,533$$

$C=A\cup B$ donc $p(C)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$A\cap B$: « obtenir trois boules noires et dont la somme des numéros est paire»

Types de tirages réalisant $A\cap B$: $\{N_{pair},N_{pair},N_{pair}\}$ ou $\{N_{impair},N_{impair},N_{pair}\}$

$$p(A\cap B)=\frac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_3^3+C_3^2\times C_3^1}{120}=\frac{1+9}{120}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}\simeq 0,083$$

Donc $p(C)=\dfrac{24}{120}+\dfrac{64}{120}-\dfrac{10}{120}=\dfrac{78}{120}=\dfrac{13}{20}=0,65$

Types de tirages réalisant D : $\{b_{(x)},b_{(x)},\overline{b}_{(1)}\}$ ou $\{b_{(1)},b_{(x)},\overline{b}_{(x)}\}$

Où $\overline{b}$: désigne la boule tirée n'est pas blanche donc noire N.

$$\text{donc } p(D)=\frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_2^2\times C_2^1+C_2^1\times C_2^1\times C_4^1}{120}=\frac{2+16}{120}=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}\simeq 0,15$$

2) Ω' est l'ensemble des applications d'un ensemble de 3 éléments vers un ensemble de 12 éléments.

$\text{card}(\Omega')=10^3=1000$.

- Type de tirages réalisant E : (n,n,b) avec respect de l'ordre d'où

$$p(E)=\frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega')}=\frac{6^2\times 4^1\times 3}{10^3}=\frac{432}{1000}=0,432$$

- F : « avoir au moins une noire »

$\overline{F}$: « avoir aucune noire » . Type de tirages réalisant $\overline{F}$: (b,b,b)

$$p(\overline{F}) = \frac{card(\overline{F})}{card(\Omega)} = \frac{4^3}{10^3} = \frac{64}{1000} = 0,064 \quad p(F) = 1 - p(\overline{F}) = 1 - \frac{4^3}{10^3} = 0,936$$

- Type de tirages réalisant G : ($\cancel{(2)}$,(2),??)

  $\cancel{(2)}$ différent de 2.

  ?? le numéro ne nous intéresse pas.

  $$p(G) = \frac{6^1 \times 4^1 \times 10}{10^3} \quad \longleftarrow \text{l'ordre est fixé (par la question)}$$

3

1) $card(\Omega) = A_{10}^2 = 90$

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{A_7^2 + A_3^2}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{A_7^1 \times A_3^1}{90} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

2) L'une contient maintenant 10 boules $\begin{cases} \text{n boules vertes} \\ \text{10-n boules rouges} \end{cases}$

$$card(A) = A_{10-n}^2 + A_n^2 = (10-n)(9-n) + n(n-1)$$
$$= 2n^2 - 20n + 90$$

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} \text{ donc } p(A) = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{2n^2 - 20n + 90}{90} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow n^2 - 10n + 45 = \frac{7}{15} \times 45$$
$$\Leftrightarrow n^2 - 10n + 24 = 0$$

$\Delta' = b'^2 - ac = 5^2 - 24 = 1$, $n = 5 + 1 = 6$ ou $n = 5 - 1 = 4$.

Donc le nombre de boules vertes est 4 ou 6.

4

1) $card(\Omega) = C_5^2 = 10$.

a) $p(A) = \dfrac{C_2^2 + C_3^2}{10} = \dfrac{4}{10} = 0,4$

b) $p(B) = \dfrac{C_2^2 + C_3^2}{10} = 0,4$

c) $C = A \cup B$ donc $p(C) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$A \cap B$: deux jetons de même couleur <u>et</u> de même numéro $\rightarrow (N_1, N_1)$

$$p(A \cap B) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10} \text{ donc } p(C) = 0,4 + 0,4 - 0,1 = 0,7$$

2) On tire successivement sans remise les cinq jetons. On va donc former des permutations de 5 éléments. $\text{card}(\Omega) = 5! = 120$

A_1 : « le 1er jeton est noir » $\rightarrow$ (n,?,?,?,?) (? : quelconque n ou b)

$p(A_1) = \dfrac{A_3^1 \times A_4^4}{120} = \dfrac{72}{120} = \dfrac{3}{5}$ (l'ordre est fixé)

A_2 : « le 2ème jeton est noir et le 1er blanc » $\rightarrow$ (b,n,?,?,?) (ordre fixé)

$p(A_2) = \dfrac{A_2^1 \times A_3^1 \times A_3^3}{120} = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$

A_3 : « le 1er jeton est blanc et le 2ème aussi, le 3ème est noir » (ordre fixé)

$p(A_3) = \dfrac{A_2^2 \times A_3^1 \times A_2^2}{120} = \dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10}$

b) $p(A_1)+p(A_2)+p(A_3) = \dfrac{72}{120}+\dfrac{36}{120}+\dfrac{12}{120} = 1 = p(\Omega)$ car $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

Si, en faisant cet épreuve, on s'intéresse au rang de la 1ère fois la boule noire apparaît on trouve seulement ces trois événements dans l'univers Ω des possibles . Donc A_1, A_2 et A_3 représentent tous les cas possibles il ne reste aucun cas pour cette question car on a deux jetons blancs.

3) On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne : on va former des applications d'un ensemble de deux éléments vers un ensemble de 5 éléments donc $\text{card}(\Omega) = 5^2 = 25$.

$P : x + ay + b = 0$, $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

$P' : x + by - a = 0$, $\vec{n}'\begin{pmatrix}1\\b\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P'.

- E : « $P // P'$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\vec{n},\vec{n}') = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & 1\\a & b\end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix}a & b\\0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow b = a$$

a est le numéro du 1er jeton tiré et b est le numéro du 2ème jeton tiré.

Donc $E = (1,1)$ ou $(-1,-1)$ et $p(E) = \dfrac{3^2+2^2}{25} = \dfrac{13}{25}$.

- F : « $P \perp P'$ » $\Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow 1\times1 + ab + 0\times0 = 0 \Leftrightarrow ab = -1$

donc F est réalisé si on obtient $(1,-1)$ ou $(-1,1)$, $p(F) = \dfrac{3\times2+2\times3}{25} = \dfrac{12}{25}$.

5

1) $\text{card}(\Omega) = C_9^3 = 84$

- $A = \{b, b, n\}$ ou $\{n, n, b\}$ (b : blanche et n : noire)

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_4^2 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_5^2}{84} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}$$

- B : le produit des numéros est nul $= \{0, \bar{0}, \bar{0}\}$ ou $\{0, 0, \bar{0}\}$ où $\bar{0}$: différent de 0

$$p(B) = \frac{C_2^1 \times C_7^2 + C_2^2 \times C_7^1}{84} = \frac{49}{84} = \frac{7}{12}$$

- $C = A \cup B \Rightarrow p(C) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$A \cap B$:avoir deux couleurs <u>et</u> un produit nul $\longrightarrow \begin{cases} \{b_{(0)}, b_{\not(0)}, n\} \text{ ou} \\ \{b_{(0)}, b_{(0)}, n\} \text{ ou} \\ \{b_{(0)}, n, n\} \end{cases}$

$b_{(0)}$: blanc portant le numéro 0

$b_{\not(0)}$: blanc portant un numéro différent de 0

$$p(A \cap B) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_5^1 + C_2^2 \times C_5^1 + C_2^1 \times C_5^2}{84} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

d'où $p(C) = \frac{70}{84} + \frac{49}{84} - \frac{45}{84} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$.

- D : « il reste dans l'urne le même nombre de boules blanches que de boules noires ». Donc il faut tirer deux noires et une blanche.

$$D = \{n, n, b\} \quad \text{donc} \quad p(D) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{85} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

2) $\text{card}(\Omega) = A_9^3 = 504$.

E : obtenir deux boules blanches exactement.

$(b, b, n) \leftarrow$ en respectant l'ordre de tirage

$$p(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{A_4^2 \times A_5^1 \times \overset{\nearrow}{3}}{504} = \frac{180}{504} = \frac{5}{14}$$

F : obtenir une somme nulle $\xrightarrow{\text{type}}$ $(-1, 1, 0)$ ou $(-1, -1, 2)$ en respectant l'ordre du tirage.

$$p(F) = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{A_2^1 \times A_3^1 \times A_2^1 \times 3! + A_2^2 \times A_2^1 \times 3}{504} = \frac{84}{504} = \frac{1}{6}$$

3) a)

c'est une répartition possible des neufs boules dans les neuf cases donc c'est le schéma d'une application d'un ensemble de 9 éléments vers un ensemble de neuf éléments.

D'où le nombre de répartitions possibles est égal au nombre d'applications possibles réalisés entre ces deux ensembles qui est égal à $9^9 = \text{card}(\Omega)$

b) G : deux cases et deux seulement sont non vides.

Donc le nombre de possibilités pour que ces deux cases choisies soient <u>non vides</u> est égal à $2^9 - 2$.

Remarque importante : On a retranché 2 car il y a parmi ces 2^9 applications deux applications tel que toutes les boules sont dans l'une des deux cases choisies.

C'est-à-dire on aura : une case contenant les neuf boules et huit cases vides qui ne répond pas à la question.

Conclusion : $\text{card}(G) = C_9^2(2^9 - 2)$ d'où

$$p(G) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_9^2(2^9 - 2)}{9^9} \simeq 0{,}00004739$$

- H : $p(H) = \dfrac{card(H)}{card(\Omega)} = \dfrac{9!}{9^9}$
- K : « chaque couleur est dans une case ».
  On choisit deux cases parmi neuf : il y a C_9^2 choix.
  Les couleurs seront placées $\boxed{N}\boxed{B}$ ou $\boxed{B}\boxed{N}$

$$card(K) = 1^5 \times 1^4 \times 2 \times C_9^2$$

- C_9^2 : choix de cases
- 2 : placement des couleurs (ordre)
- 1^4 : 4 blanches dans une case
- 1^5 : 5 noires dans une case

D'où $p(K) = \dfrac{1^5 \times 1^4 \times 2 \times C_9^2}{9^9} = \dfrac{C_9^2 \times 2}{9^9} = \dfrac{72}{9^9}$

6

Ω est l'ensemble des 1000 pièces donc $card(\Omega) = 1000$.

A : « l'appareil présente le défaut a »

B : « l'appareil présente le défaut b »

- $E_1 = A \cup B$.
  $p(E_1) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
  $= \dfrac{100}{1000} + \dfrac{80}{1000} - \dfrac{40}{1000} = 0,14$
- E_2 : l'appareil présente seulement le défaut A
  $A = E_2 \cup (A \cap B)$, on a $E_2 \cap (A \cap B) = \varnothing$
  $p(A) = p(E_2) + p(A \cap B)$
  $p(E_2) = p(A) - p(A \cap B) = \dfrac{100}{1000} - \dfrac{40}{1000} = 0,06$
- E_3 : l'appareil présente seulement le défaut B même raisonnement que E_2.
  $p(E_3) = p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{80}{1000} - \dfrac{40}{1000} = 0,04$.
- E_4 : l'appareil ne présente aucun défaut
  $E_4 = \overline{E}_1$ donc $p(E_4) = 1 - p(E_1) = 0,86$.

7

Une boite B_1 contient 3 jetons numérotés 0, 0 et 2.

Une boite B_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

1) a) D'après le tableau ci-contre

$\otimes$	1	2	3	4
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
2	2	4	6	8

$\leftarrow B_2$

$\uparrow B_1$

les valeurs possibles de X sont: 0, 2, 4, 6 et 8 .

b) $p(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

$B = \{X > 5\} = \{X = 6\} \cup \{X = 8\}$

deux ensembles disjoints

$p(B) = p(X = 6) + p(X = 8) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

Remarque :

L'épreuve de la question 1) est réalisée 3 fois de suite. Les épreuves sont indépendantes.

C'est-à-dire réaliser l'événement B à la deuxième épreuve ne dépend pas du résultat de la première de même pour la 3ème épreuve.

2) Chaque expérience a deux issues : réaliser B ou réaliser $\overline{B}$.

On réalise 2 fois l'évènement B et 1 fois l'évènement $\overline{B}$: $BB\overline{B}$ (en tenant compte de l'ordre) :

$$p(C) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} \times \underbrace{C_3^2}_{\text{ordre}} = \frac{5}{72}$$

D : avoir au moins une fois un produit $X > 5$

$\overline{D}$: avoir aucun produit $X > 5$: à l'issue de trois épreuves répétées on n'obtient aucune fois l'évènement B donc on réalise 3 fois $\overline{B}$.

$\overline{D} = (\overline{B}, \overline{B}, \overline{B})$

$$p(D) = 1 - p(\overline{D}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

3) On tire successivement et avec remise n jetons de B_1 ($n \in \mathbb{N}^*$).

Le nombre de tirages possibles est le nombre d'applications d'un ensemble de n éléments vers un ensemble de 3 éléments. Donc $\text{card}(\Omega) = 3^n$.

On pose A_k : « avoir le numéro 2 pour la première fois au $k^{\text{ième}}$ tirage » $1 \leq k \leq n$.

a) Type de tirages réalisant A_1 :

(2)	.....
1er tirage	(n-1) tirages quelconques

$$p_1 = \frac{1 \times \overbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}^{n-1 \text{ fois}}}{3^n} = \frac{1}{3}$$

Type de tirages réalisant A_2 :

$\neq(2)$	(2)	.....
	2ème tirage	(n-2) tirages quelconques

$$p_2 = \frac{2\times1\times3^{n-2}}{3^n} = \frac{2}{9}$$

Types de tirages réalisant A_3 :

$\neq(2)$	$\neq(2)$	(2)	.....
		3ème tirage	(n-3) tirages quelconques

$$p_3 = \frac{2^2\times1\times3^{n-3}}{3^n} = \frac{4}{27}$$

Type de tirages réalisant A_k :

$\neq(2)$	$\neq(2)$	...	$\neq(2)$	(2)	.....
			(k-1)ième tirage	$k^{ème}$ tirage	(n-k) tirages quelconques

$$p_k = \frac{2^{k-1}\times1\times3^{n-k}}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\times\frac{1}{3}$$

Type de tirages réalisant A_n :

$\neq(2)$	...	$\neq(2)$	(2)
n − 1 tirages			$n^{ième}$ tirage

$$p_n = \frac{2^{n-1}\times1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}$$

b) $S = \sum_{k=1}^{n} p_k$

On a $p_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}p_n$

Donc (p_n) est une suite géométrique de premier terme $p_1 = \frac{1}{3}$ et de raison $q = \frac{2}{3} \neq 1$.

Ainsi : $S = p_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

8

On désigne par F : face et par P : pile.
La probabilité d'avoir face est la même que d'avoir pile.
Les résultats possibles d'un lancé est pile ou face.

On a : $\begin{cases} p(F) = p(P) \\ p(F)+p(P) = 1 \end{cases}$ d'où $p(F) = p(P) = \frac{1}{2}$

1) A l'issue de 5 lancers, chaque résultat est un 5-uplet (a,b,c,d,e)
Chaque composante a deux possibilités pile ou face c'est-à-dire P ou F.
$\text{card}(\Omega) = 2^5$

p_0 : la probabilité de ne pas avoir face après les cinq lancers c'est-à-dire réaliser un résultat du type (P,P,P,P,P)

$p_0 = p(P,P,P,P,P) = [p(P)]^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ d'où $p_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

p_1 : probabilité d'avoir une seule fois F, c'est-à-dire avoir (F,P,P,P,P) en tenant compte de l'ordre donc $p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times C_5^1$

pour tenir compte de l'odre

p_k : probabilité d'avoir k fois F $(0 \le k \le 5)$ donc avoir aussi $(5-k)$ fois P.

$p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} \times C_5^k$.

pour tenir compte de l'odre

2) ***Rappel :*** formule du binôme de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \text{ avec } a = \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{2}$$

$$S = \sum_{k=0}^{5} p_k = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5 = 1$$

3) a) A : « obtenir au moins une fois face »

$\overline{A}$: « obtenir aucune fois face = obtenir 5 fois pile »

$p(\overline{A}) = p_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}03125$ d'où $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}96875$

b) B : « obtenir au plus quatre fois face »

$\overline{B}$: « obtenir cinq fois face »

Donc $p(\overline{B}) = p_5 = C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}03125$

D'où $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}96875$

9

1) $U_n = n(n+1)(2n+1)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$

- Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} U_k = U_1 = 1(1+1)(2\times1+1) = 6$

  or pour $n=1$, $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2} = \frac{1(1+1)^2(1+2)}{2} = 6$

  donc $U_1 = \frac{1(1+1)^2(1+2)^2}{2}$

  d'où la propriété est vraie pour $n=1$.

- Supposons que la propriété est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire supposons que $\sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$ et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$ c'est-à-dire montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} U_k = \frac{(n+1)((n+1)+1)^2((n+1)+2)}{2}$

  Pour cela on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} U_k = \underbrace{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}_{\sum_{k=1}^{n+1} U_k} + U_{n+1}$$

$$= \underbrace{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}}_{\text{hypothèse de récurrence}} + \underbrace{(n+1)(n+2)(2n+3)}_{U_{n+1}}$$

$$= (n+1)(n+2)\left[\frac{n(n+1)}{2} + 2n + 3\right] = \frac{(n+1)(n+2)(n^2+5n+6)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+2)(n+3)}{2} \quad \text{ce qu'il fallait démontrer}$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$.

- Conclusion : La propriété est vraie pour n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$.

2) Une urne contient 30 boules $\begin{cases} n \text{ blanches} \\ n+1 \text{ noires} \\ 30-(2n+1) \text{ rouges} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

a) N le nombre maximal de boules blanches.
$N+1$ le nombre maximal de boules noires.
Pour que N soit maximal et N+1 aussi il faut que le nombre de boules rouges soit minimal car le nombre total de boules dans l'urne est fixe : 30 boules.

Le nombre de boules rouges n'est pas égal à zéro car :

Si le nombre de boules rouges est zéro on aurait $\overbrace{\underset{\text{blanches}}{N} + \underset{\text{noires}}{N+1} + \underset{\text{rouge}}{0}}^{2N+1} = 30$

or $2N+1$ est impair donc ce cas est impossible . Donc le nombre de boules rouges doit être minimal $=1$.

Conclusion : $N+N+1+1=30 \Rightarrow N=14$.

b) Tirer successivement et avec remise trois boules de l'urne c'est former des applications d'un ensemble de 3 éléments vers un ensemble de 30 éléments.

$\text{card}(\Omega)=30^3$.

- Type de résultats réalisant A : $(b,n,n) \leftarrow$ dans cet ordre

$$p(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{n^1(n+1)^2}{30^3}=\frac{n(n+1)^2}{30^3}.$$

- Type de résultats réalisant B : (b,n,n) ou (n,b,n) ou (n,n,b)

$$p(B)=3p(A)=\frac{3n(n+1)^2}{30^3} \leftarrow \text{ on tient compte de l'ordre.}$$

c) A_n : les trois boules tirées sont blanches et noires

Type de résultats réalisant A_n : (b,b,n) ou (n,n,b) $\leftarrow$ en tenant compte de l'ordre.

$$p(A_n)=p_n=\frac{3n^2(n+1)}{30^3}+\frac{3n(n+1)^2}{30^3}$$

$$=\frac{3}{30^3}\left[n^2(n+1)+n(n+1)^2\right]$$

$$=\frac{3}{30^3}[n(n+1)(2n+1)]$$

On a $p_n=\frac{3}{30^3}U_n$.

donc $S=\sum_{k=1}^{14}p_k=\sum_{k=1}^{14}\frac{3}{30^3}U_k$ car $N=14$

$$=\frac{3}{30^3}\left(\sum_{k=1}^{14}U_k\right)=\frac{3}{30^3}\times\frac{14\times15^2\times16}{2} \text{ (d'après la 1}^{\text{ère}}\text{ question)}$$

10

1) $\text{card}(\Omega)=C_{28}^5=98280$.

2) C_1 : former un comité où siègent exactement deux garçons

Type de résultats réalisant C_1 : $\{G,G,F,F,F\}$,

$$p(C_1)=\frac{\text{card}(C_1)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_{16}^2\times C_{12}^3}{C_{28}^5}=\frac{220}{819}$$

C_2 : former un comité où siègent exactement deux internes

Type de résultats réalisant C_2 : $\{I,I,E,E,E\}$, $p(C_2)=\dfrac{C_{10}^2\times C_{18}^3}{C_{28}^5}=\dfrac{34}{91}$

C_3 : exactement deux garçons et deux internes :

C_3 : $\{G_I,G_I,F_E,F_E,F_E\}$ ou $\{G_I,G_E,F_I,F_E,F_E\}$ ou $\{G_E,G_E,F_I,F_I,F_E\}$

$$p(C_3)=\frac{C_6^2\times C_8^3+C_6^1\times C_{10}^1\times C_4^1\times C_8^2+C_{10}^2\times C_4^2\times C_8^1}{C_{28}^5}=\frac{9}{91}$$

G_E : garçon externe
G_I : garçon interne
F_E : fille externe
F_I : fille interne

$C_4=C_1\cup C_2$: comité où siègent 2 garçons ou 2 internes.

$p(C_4)=p(C_1)+p(C_2)-p(C_1\cap C_2)=p(C_1)+p(C_2)-p(C_3)$ car $C_1\cap C_2=C_3$

$$p(C_4)=\frac{220}{819}+\frac{34}{91}-\frac{9}{91}=\frac{445}{819}$$

3) On pose n le nombre de filles, le nombre de garçons est 16 donc le nombre total des élèves est égal à $16+n$.
On pose C_5 : un comité de 5 élèves où siègent exactement deux filles.

$C_5=\{F,F,G,G,G\}$

$$\text{card}(C_5)=C_n^2\times C_{16}^3=25200 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!\times(n-2)!}\times\frac{16!}{3!\times 13!}=25200$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}\times 16\times 15\times 14\times \cancel{13!}}{2\cancel{(n-2)!}\times 3\times 2\times \cancel{13!}}=25200$$

$\Leftrightarrow 280\times n\times(n-1)=25200 \Leftrightarrow n(n-1)=90=10\times 9 \Leftrightarrow n=10$

Il y a 10 filles.

4) Un comité est formé par $\left\{\underbrace{\text{un président, vice président,}}_{\substack{\text{arrangements}\\ \text{on choisit 2 parmi 28}}}\ \underbrace{\text{3 membres}}_{\substack{\text{combinaisons}\\ \text{on choisit 3 parmi le}\\ \text{reste 26 élèves}}}\right\}$

a) Le nombre de comités possibles est $A_{28}^2\times C_{26}^3$.

b) C_6 : le président et le vice président l'un interne et l'autre externe.

I	E	3 membres
président	vice président	

Ou

E	I	3 membres
président	vice président	

$$p(C_6)=\frac{2\times A_{10}^1\times A_{18}^1\times C_{26}^3}{A_{28}^2\times C_{26}^3}=\frac{10}{21}\simeq 0,476$$

11

1) Il y a $10\times 10\times 10=10^3=1000$ tirages possibles.

Choix du 3e chiffre
Choix du 2e chiffre
Choix du 1er chiffre
} pris parmi les 10 chiffres 0, 1, 2,....,9.

2) $\text{Card}\Omega = 1000$.

$$p(A) = \frac{10}{10^3} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$p(B) = \frac{10 \times 9 \times 8}{10^3} = 0.72$$

$$p(C) = \frac{9 \times 9}{10^3} = 0.081$$

$$p(D) = \frac{3 \times 9^2}{10^3} = 0.243$$

On a donc $p(D) = \frac{243}{1000} = 0,243$

On peut donc remarquer que $p(D) = 3p(C)$. Le facteur 3 correspond à la place du 0 parmi les chiffres.

3) Les événements A et D sont incompatibles car $A \cap D \neq \varnothing$

$p(A \cup D) = p(A) + p(D) = 0,01 + 0,243 = 0,253$

Les événements B et C ne sont pas incompatibles car $B \cap C \neq \varnothing$

$B \cap C$ est l'événement : le résultat obtenu commence par un 0 et est composé de 3 chiffres différents.

$\text{Card}(B \cap C) = 9 \times 8 = 72$

Choix du 3e chiffre (différent de 0 et du 2e)

Choix du 2e chiffre (différent de 0)

Par suite $p(B \cap C) = \frac{72}{1000} = 0,072$.

$p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0,72 + 0,081 - 0,072 = 0,729$

12 Chaque résultat est un couple (a, b) où a est le numéro de l'un des deux dés et b le numéro qui apparaît sur la face supérieure de l'autre dé.
Chacun des numéros a ou b possède six choix pris de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\text{card}(\Omega) = 6^1 \times 6^1 = 36$

- La probabilité de l'événement A : « somme des points ≤ 6 » est celle de la réalisation de l'un des couples : (1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (2,1) , (2,2) (2,3) , (2,4) , (3,1) , (3,2) , (3,3) , (4,1) , (4,2) , (5,1)

  Il y a alors 15 cas favorables pour réaliser l'événement A. $p(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

- Les cas favorables pour réaliser l'événement B :
  (1,2) , (1,5) , (2,1) , (2,4) , (3,3) , (3,6) , (4,2) , (4,5) , (5,1) , (5,4) , (6,3) , (6,6)
  Il y a 12 cas favorables et $p(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$
- Parmi les couples précédents, ceux qui forment $A \cap B$ sont :
  (1,2) , (1,5) , (2,4) , (3,3) , (2,1) , (5,1) , (4,2)
  $p(A \cap B) = \frac{7}{36}$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{15}{36} + \frac{12}{36} - \frac{7}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

Remarque :
Les couples possibles du lancé des deux dés sont donnés dans le tableau suivant : On a 36 couples possibles , c'est $\text{card}\Omega = 36$.

2ème dé \ 1er dé	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Tableau donnant la somme des numéros obtenus des deux dés :

2ème dé \ 1er dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Le nombre de cases en gris est le nombre de résultats donnant une somme inférieure ou égale à 6 . On a 15 cases. Donc $p(A) = \frac{15}{36}$

Le nombre de cases où la somme des numéros est divisible par 3 est égal à 12. Donc $p(B) = \frac{12}{36}$

2) Chaque résultat est un couple (a,b) où a est le numéro du 1er lancé et b est le numéro du 2ème lancé où a et b ont chacun 6 chances.

$\text{card}(\Omega) = 6^1 \times 6^1 = 36$.

- Pour réaliser l'événement C on doit obtenir l'un des couples suivants :

$$(-1,0)\ ,\ (0,-1)\ ,\ (-1,1)\ ,\ (1,-1),\ (0,1)\ ,\ (1,0)$$

Il y a : 3 faces portant le numéro (-1) , 2 faces portant le numéro (1) et 1 seule face portant le numéro (0).

Pour obtenir $(-1,0)$, il y a $3^1 \times 1^1$ chances. De même pour le couple $(0,-1)$.

Pour obtenir $(0,1)$ il y a $1^1 \times 2^1$ chances. De même pour le couple $(1,0)$.

Pour obtenir $(-1,1)$, il y a $3^1 \times 2^1$ chances. De même pour le couple $(1,-1)$.

$$p(C) = \frac{2\times3+2\times2+2\times3\times2}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

$$p(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- La probabilité de l'événement D : « la somme des numéros est nulle » est celle d'obtenir l'un des couples $(-1,1)$, $(1,-1)$ ou $(0,0)$.

  Pour réaliser le couple (0,0) il y a 1 possibilité.

  Pour réaliser chacun des couples $(-1,1)$ ou $(1,-1)$ il y a $3^1 \times 2^1$ possibilités

$$p(D) = \frac{2\times3\times2+1}{36} = \frac{13}{36}$$

13

1) L'univers des possibles est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

2) D'après les données : $p_1 = p_3 = p_5$; $p_2 = p_4 = p_6$, $p_2 = 2p_1$.

On a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

On obtient alors $3p_1 + 3p_2 = 1$ donc $3p_1 + 6p_1 = 1$.

Il en résulte $p_1 = \frac{1}{9}$ et $p_2 = \frac{2}{9}$.

$p_1 = p_3 = p_5 = \frac{1}{9}$ et $p_2 = p_4 = p_6 = \frac{2}{9}$.

3) L'évènement E : « apparition d'un nombre strictement supérieur à 3 » peut s'écrire $E = \{4,5,6\}$.

D'où $p(E) = p_4 + p_5 + p_6 = \frac{5}{9}$.

4) On s'intéresse à la réalisation de l'évènement E lorsqu'on fait une expérience

Chaque expérience a deux issues : réaliser E ou réaliser $\overline{E}$

Pour obtenir A on réalise 4 fois l'évènement E et deux fois l'évènement $\overline{E}$ à l'issue des 6 épreuves répétées .

Puisqu'on répète 6 fois la même expérience de manière indépendante, on multiplie les probabilités (en respectant l'ordre).

$p(A) = p(E) \times p(E) \times p(E) \times p(E) \times p(\overline{E}) \times p(\overline{E}) \times C_6^4 \leftarrow$ choix des places de E

$$p(A) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ordre}}}{C_6^4} \left(\frac{5}{9}\right)^4 \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{50000}{177147} \simeq 0,282 .$$

Pour obtenir p(B) on calcule $p(\overline{B})$ or réaliser $\overline{B}$ c'est n'obtenir aucune fois l'évènement E à l'issue de 6 expériences ou obtenir une seule fois E et 5 fois $\overline{E}$.

$$p(\overline{B}) = p(\overline{E},\overline{E},\overline{E},\overline{E},\overline{E},\overline{E}) + C_6^1 p(E,\overline{E},\overline{E},\overline{E},\overline{E},\overline{E}) = \left(\frac{4}{9}\right)^6 + 6 \times \left(\frac{5}{9}\right) \times \left(\frac{4}{9}\right)^5$$

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) \simeq 0,934 .$$

14

1) Soient les évènements suivants :

a : « la pièce est correcte après le passage en A »

$\overline{a}$: « la pièce est endommagée après le passage en A.

De même

b : « la pièce est correcte après le passage en B »

$\overline{b}$: « la pièce est endommagée après le passage en B.

c : « la pièce est correcte après le passage en C »

$\overline{c}$: « la pièce est endommagée après le passage en C »

La figure ci-dessous est l'arbre donnant les 8 évènements.

2) $p_1 = p\{(a,b,c)\} \simeq 0,97 \times 0,98 \times 0,96 = 0,913$

3) La probabilité pour qu'une pièce soit endommagée après le passage en B au moins est la somme des probabilités de tous les triplets contenant $\overline{b}$.

$p_2 = p\{(a,\bar{b},c)\} + p\{(a,\bar{b},\bar{c})\} + p\{(\bar{a},\bar{b},c)\} + p\{(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\}$

c'est-à-dire :

$p_2 = 0,97 \times 0,02 \times 0,96 + 0,97 \times 0,02 \times 0,04 + 0,03 \times 0,02 \times 0,96 + 0,03 \times 0,02 \times 0,04$

$p_2 = 0,02$.

4) La probabilité pour qu'une pièce soit endommagé après le passage en A, B, C est $1 - p_1 = 1 - 0,913 = 0,087$.

15

1) Réaliser le mot bac revient à placer dans 3 cases 1 fois la lettre b, 1 fois la lettre a et une fois la lettre c, dans cet ordre.
Chaque lettre tapée a 40 possibilités donc $\text{card}\Omega = (40)^3$.
$p(S) = \frac{1 \times 1 \times 1}{40^3} = \frac{1}{40^3} = \frac{1}{64000}$

2) Réaliser $\bar{S}$ c'est ne pas obtenir le mot « bac »
$p(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{(40)^3} = \frac{63999}{64000}$.

3) a) Chaque expérience a deux résultats : réaliser S ou $\bar{S}$.
A l'issue de n expériences on peut réaliser :
« au moins 1 fois l'évènement S» ou bien « aucune fois l'évènement S »
Or, réaliser aucune fois l'évènement S à l'issue des n expériences c'est réaliser n fois l'évènement $\bar{S}$.
On note p_n la probabilité de l'évènement E_n « réaliser au moins 1 fois l'évènement A »
On note q_n la probabilité de l'évènement F_n « réaliser aucune fois A après n expériences » .
Les expériences sont indépendantes l'une de l'autre.
Donc $q_n = (p(\bar{A}))^n$ et $p_n = 1 - (p(\bar{A}))^n$ donc $p_n = 1 - \left(\frac{6399}{4000}\right)^n$

b) $p_{100} = 1 - \left(\frac{63999}{6400}\right)^{100} \simeq 0,001561$ à 10^{-6} près

$p_{1000} \simeq 0,015504$ à 10^{-6} près

$p_{10^5} \simeq 0,790391$

La valeur réelle de $p_{10^6} = 0,999999836...$ donc $p_{10^6} \simeq 1$.

La calculatrice ***affiche*** la valeur 1 pour p_{10^7}.

Lorsque n devient très grand la probabilité de réaliser au moins une fois le mot bac s'approche de 1.

SOMMAIRE

Chapitre		Résumé	Exercices	Corrigés
1	Généralités sur les fonctions	5	8	10
2	Continuité	15	18	20
3	Limites et Continuité	26	28	32
4	Limites et comportements asymptotiques	41	46	50
5	Nombre dérivé	59	63	66
6	Fonction Dérivée	74	77	82
7	Exemples d'étude de fonctions	96	97	104
8	Fonctions trigonométriques	142	145	149
9	Suites réelles	171	173	177
10	Limites de suites réelles	193	196	199
11	Statistiques	209	213	218
12	Probabilité	230	233	238

XY Plus 3 Éd-2022

La nouvelle collection en mathématique
de Med Ali Editions
Plus de rigeur
Plus d'efficacité
Pour une réussite assurée

XY Plus 3 LES MATHÉMATIQUES EN 3ème ANNÉE SECONDAIRE

Section : Mathématiques - Tome 1

كل نسخ لهذا الكتاب أو لجزء منه إعتداء صارخ على الملكية الأدبية. وهو خرق لحقوق المؤلف. يعاقب عليه القانون التونسي عدد 36 لسنة 1994 والقوانين الدولية.

الناشرين التونسيين الناشرين التونسيين

Éd-2022

Prix: 13.000 dt

2 022300 830031

www.edition-medali.tn