

REPUBLIQUE TUNISIENNE  
MINISTÈRE DE L'EDUCATION

# MATHÉMATIQUES

3ème année de l'enseignement secondaire

Section : Mathématiques  
TOME 2

**Hikma Smida**  
*Professeur universitaire*

**Ali Béji Hammas**  
*Inspecteur*

**Imène Ghedamsi**  
*Assistante universitaire*

**Leïla Ben Youssef**  
*Professeur du secondaire*

**Néjiba Mhamdi**  
*Inspectrice*

**Ridha Ben Saad**  
*Inspecteur*

**Béchir Labidi**  
*Inspecteur*

## Evaluateurs

**Belhassen Dehman**  
*Professeur universitaire*

**Khédija Ben Messaoud**  
*Inspectrice principale*

**Ali Rahmouni**  
*Inspecteur principal*

## Remerciements

*Madame Khédiha BEN MESSAOUD, Messieurs Abdennnebi ACHOUR, Belhassen DEHMAN et Ali RAHMOUNI ont évalué ce manuel. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.*

*Messieurs Taoufik CHARRADA, Ali AZIZI, Nabil MZIOU et Mourad ARBI ont lu ce manuel. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leurs remarques judicieuses.*

*Monsieur Abderrazek BERREZIGUE a contribué à l'élaboration des figures proposées dans ce manuel. Nous remercions Monsieur BERREZIGUE pour sa gentillesse et sa disponibilité.*

*La mise en page de ce manuel est l'œuvre de l'équipe d'édition du CNP. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leur grande compétence et leur patience.*

***Les auteurs***

# Préface

*Ce manuel comprend onze chapitres. Chaque chapitre comprend six rubriques.*

## **Pour commencer**

*Cette rubrique vise à permettre aux élèves de consolider leurs acquis antérieurs.*

## **Cours**

*Cette rubrique comprend :*

- *des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à démontrer,*
- *les résultats du cours à retenir.*

## **QCM - Vrai ou faux**

*La rubrique QCM vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.*

*La rubrique Vrai ou faux vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.*

## **Mobiliser ses compétences**

*Cette rubrique est consacrée à la résolution de problèmes, pour la plupart intégratifs, dans des situations mathématiques ou en rapport avec l'environnement.*

## **Exercices et problèmes**

*Cette rubrique comprend deux parties.*

- *Une partie qui comporte des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.*
- *Une partie Avec l'ordinateur, qui vise à permettre aux élèves d'utiliser un logiciel numérique ou géométrique pour chercher, expérimenter ou contrôler un résultat.*

## **Math-culture**

*Cette rubrique propose des éléments d'histoire des mathématiques et des éléments sur la contribution des mathématiques à la compréhension des phénomènes.*

# Sommaire

<b>Chapitre 1</b>	<b>Produit scalaire dans le plan</b>	5
<b>Chapitre 2</b>	<b>Angles orientés</b>	25
<b>Chapitre 3</b>	<b>Trigonométrie</b>	49
<b>Chapitre 4</b>	<b>Rotations</b>	70
<b>Chapitre 5</b>	<b>Nombres complexes</b>	91
<b>Chapitre 6</b>	<b>Dénombrément</b>	109
<b>Chapitre 7</b>	<b>Divisibilité dans <math>\mathbb{N}</math></b>	126
<b>Chapitre 8</b>	<b>Nombres premiers</b>	143
<b>Chapitre 9</b>	<b>Vecteurs de l'espace</b>	156
<b>Chapitre 10</b>	<b>Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace</b>	176
<b>Chapitre 11</b>	<b>Equations de droites et de plans. Equation d'une sphère</b>	197

# Chapitre 1

## Produit scalaire dans le plan

*" J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion. "*

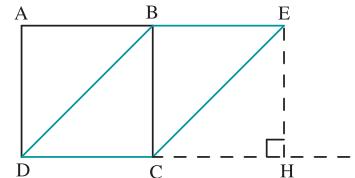
*Stendhal*

## Pour commencer

### Activité 1

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté a, BECD est un parallélogramme et H est le projeté orthogonal de E sur la droite (DC).

1. Calculer en fonction de a les réels  $\|\overrightarrow{DB}\|$ ;  $\|\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}\|$ .



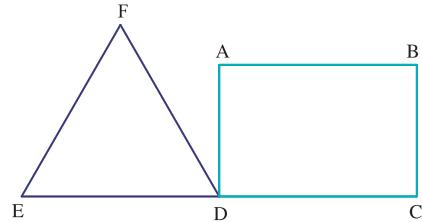
2. Calculer  $\cos \widehat{BDC}$  et  $\cos \widehat{EDH}$ .

3. Calculer  $\|\overrightarrow{DB}\| \|\overrightarrow{DC}\| \cos \widehat{BDC}$  et  $\|\overrightarrow{DE}\| \|\overrightarrow{DC}\| \cos \widehat{EDC}$ .

### Activité 2

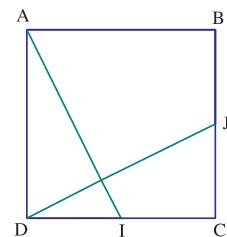
Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle EFD est un triangle équilatéral et E, D et C sont alignés.

Déterminer le signe de  $\cos \widehat{CDF}$ ,  $\cos \widehat{BDF}$  et  $\cos \widehat{AEF}$ .



### Activité 3

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré, I et J sont les milieux respectifs des segments [CD] et [BC]. Montrer que les droites (AI) et (DJ) sont perpendiculaires.



# Cours

## 1. Produit scalaire

### 1.1 Définition

#### Activité 1

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

Soit O, A et B des points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

Soit O', A' et B' des points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{O'A'}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{O'B'}$ .

Montrer que  $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ .

#### Définition

Soit O un point du plan et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

On désigne par A et B les points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , le réel ainsi défini

•  $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$ , si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls.

•  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , si  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est nul.

#### Conséquence

Pour tout vecteur  $\vec{u}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ .

#### Activité 2

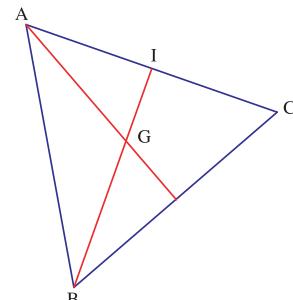
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4 et de centre G.

On désigne par I le milieu du côté [AC].

Calculer les produits scalaires ci-dessous.

$$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{CI} ; \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BI} ;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} ; \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} ; \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AI}.$$



## 1. 2 Propriétés du produit scalaire

### Activité 1

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs et O, A et B trois points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ . Montrer la propriété ci-dessous.

#### Propriété

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

### Activité 2

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs et O, A et B trois points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

On se propose de montrer que pour tout réel  $\alpha$ ,  $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$ .

Soit  $\alpha$  un réel et C le point tel que  $\alpha \vec{u} = \overrightarrow{OC}$ .

1. On suppose que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et que  $\alpha$  est strictement positif.

Justifier que  $\cos \widehat{AOB} = \cos \widehat{COB}$ . Conclure.

2. On suppose que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et que  $\alpha$  est strictement négatif.

Montrer que  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = -\alpha \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cos(\pi - \widehat{AOB})$ . Conclure.

3. En déduire que pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et tout réel  $\alpha$ , on a  $\alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$ .

4. Montrer que pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , on a

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \text{ et } (\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

#### Propriétés

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad (\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

### Activité 3

On considère un parallélogramme OACB.

On note  $\widehat{AOB} = \theta$ .

1. On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (OA).

a. Exprimer OH et BH à l'aide de OB et  $\theta$ .

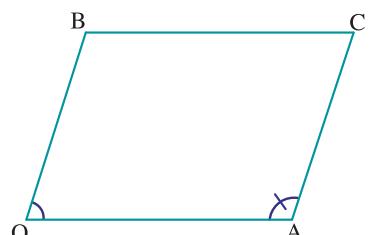
b. Exprimer AH à l'aide de OB, OA et  $\theta$ .

2. Montrer que  $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \theta$ .

3. Montrer que  $OC^2 = OA^2 + AC^2 + 2OA \cdot AC \cos \theta$ .

4. Montrer que  $OC^2 + AB^2 = 2(OA^2 + AC^2)$ .

On a donc obtenu les propriétés ci-dessous.



## Propriétés

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on a

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2).$$

### Activité 4

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de même norme.

Soit O, A, B et C quatre points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ .

On suppose que  $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\widehat{BOC} = \frac{\pi}{4}$  et  $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{12}$ .

Calculer puis comparer  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .

Le résultat qu'on vient de trouver est une propriété du produit scalaire valable pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

### Propriété

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ ,  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .

### Activité 5

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs tels que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 1$  et  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0,5$ .

1. Calculer  $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$  et  $-\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{w})$ .

2. Calculer  $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{v} \cdot (\vec{w} - \vec{u}) + \vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ .

### Activité 6

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

Soit O, A et B trois points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

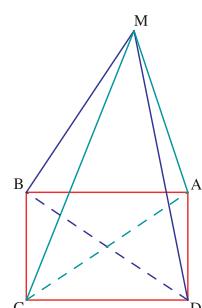
On suppose que  $OA = 2$ ,  $OB = 3$  et  $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$ .

Calculer  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ ,  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$  et  $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$ .

### Activité 7

Soit M un point du plan.

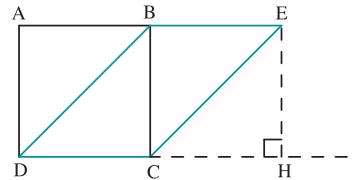
Montrer que la somme des carrés des distances de M à deux sommets opposés d'un rectangle est égale à la somme des carrés des distances de M aux deux autres sommets.



## 1. 3 Vecteurs orthogonaux

### Activité 1

Dans la figure ci-contre , ABCD et BCHE sont des carrés.  
Calculer  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC}$  ;  $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{DC}$  ;  $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .



### Définition

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul et on note  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

### Conséquence

Deux droites sont perpendiculaires, si et seulement si, le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

### Activité 2

Soit A et B deux points distincts.

1. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tel que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ .
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tel que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

## 1. 4 Produit scalaire et projection orthogonale

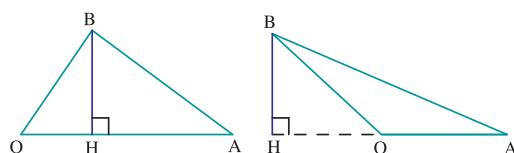
### Activité 1

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

Soit O, A et B trois points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (OA).

Montrer que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ .



### Propriété

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls et O, A et B des points tels  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AO), alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ .

## Activité 2

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

On désigne par O, A, B et C quatre points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ .

On désigne par H et K les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (OA).

Montrer que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HK}$ .

## Activité 3

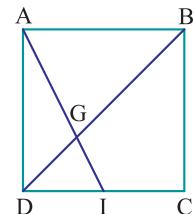
Soit ABCD un carré de côté 3, I le milieu de [DC] et G le point d'intersection de [BD] et [AI].

1. a. Calculer AI, GB, GD, GA et GI.

b. En déduire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GD}$ .

2. a. Calculer  $\cos \widehat{IAB}$  et  $\cos \widehat{DGI}$ .

b. En déduire une valeur approchée à  $10^{-2}$  près en radians de  $\widehat{IAB}$  et  $\widehat{DGI}$ .



## 1. 5 Vecteurs colinéaires

### Activité 1

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

Soit O, A et B trois points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

1. Montrer que  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ .

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $\cos \widehat{AOB}$  pour que O, A et B soient alignés.

### Propriété

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$  (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ , si et seulement si, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

## Activité 2

Soit A et B deux points tels que  $AB = 5$ .

Soit M un point du plan n'appartenant pas à (AB) et H son projeté orthogonal sur (AB).

Construire M dans chacun des cas ci-dessous.

a.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 10$  ; b.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -5$ .

### Activité 3

Soit A et B deux points distincts.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que  $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = AB \times AM$ .
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = -AB \times AM$ .

## 1. 6 Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

### Activité 1

Dans l'ensemble des vecteurs du plan muni d'une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ , on considère les vecteurs  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ .

1. Exprimer à l'aide de x et y chacun des réels  $\vec{u} \cdot \vec{i}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{j}$  et  $\|\vec{u}\|$ .
2. Exprimer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  à l'aide de x, y, x' et y'.

### Théorème

Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de composantes respectives  $(x, y)$  et  $(x', y')$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

### Activité 2

Soit ABCD un carré de côté  $a > 1$  et E le point à l'intérieur du carré tel que EAB est un triangle équilatéral.

On désigne par I et J les points des segments respectifs [AB] et [AD] tels que  $AI = AJ = 1$ .

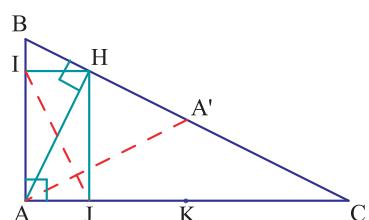
1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D et E dans le repère  $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ .
2. Calculer en fonction de a, les réels  $\overline{CE} \cdot \overline{BE}$ ,  $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$ ,  $\overline{DE} \cdot \overline{EB}$ .

### Activité 3

Dans la figure ci-contre,  $AB = 1$  et ABC est un triangle rectangle en A tel que  $AC = 2AB$ .

On désigne par A' et K les milieux respectifs de [BC] et [AC] et par H, I et J les projets orthogonaux respectifs de A sur (BC), de H sur (AB) et de H sur (AC).

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, K et A' dans le repère  $(A, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AB})$ .
2. Déterminer une équation de la droite (AH).
3. Déterminer les coordonnées du point H puis des points I et J.
4. Calculer  $\overline{AA'} \cdot \overline{IJ}$  et en déduire les positions relatives des droites (AA') et (IJ).



## 2. Lignes de niveau

### Activité 1

Soit A et B deux points du plan et soit f l'application du plan dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant  $f(M) = 0$ .
2. On suppose que  $AB = 2$ .
  - a. Placer le point H de la droite (AB) tel que  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -1.5$ .
  - b. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que  $f(M) = -1.5$  est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H.

### Activité 2

Soit A et B deux points du plan, et g l'application du plan dans  $\mathbb{R}$  définie par  $g(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ .

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que  $g(M) = 0$ .
2. Soit I le milieu de [AB].
  - a. Montrer que  $g(M) = IM^2 - IA^2$ .
  - b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$ .

### Activité 3

Soient A et B deux points du plan, I le milieu de [AB], k un réel et (F) l'ensemble des points M du plan tels que  $MA^2 - MB^2 = k$ .

1. Déterminer (F) lorsque  $k = 0$ .
2. Montrer que pour tout point M du plan, on a  $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$ .
3. Déterminer (F) lorsque  $k = -2$  et  $AB = 2$ .

### Activité 4

Soit A et B deux points du plan, I le milieu de [AB] et h l'application du plan dans  $\mathbb{R}$  définie par  $h(M) = MA^2 + MB^2$ .

1. Montrer que pour tout point M du plan, on a  $h(M) = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2}$ .
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que  $h(M) = AB^2$ .

## Activité 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A(-1, 2) et B(2, 3).

On se propose de déterminer l'ensemble des points M du plan tel que  $MA^2 - 3MB^2 = -2$ .

1. Montrer que  $MA^2 - 3MB^2 = (\overrightarrow{MA} - \sqrt{3}\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \sqrt{3}\overrightarrow{MB})$ .
2. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B,  $-\sqrt{3}$ ), par G' le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B,  $\sqrt{3}$ ).
  - a. Montrer que  $(\overrightarrow{MA} - \sqrt{3}\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \sqrt{3}\overrightarrow{MB}) = -2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG'}$ .
  - b. En déduire l'ensemble des points M du plan tel que  $MA^2 - 3MB^2 = -2$ .

## 3. Produit scalaire et configurations

### Activité 1 (Les hauteurs d'un triangle)

Soient A, B, C et H quatre points du plan.

1. Montrer que  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .
2. Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

### Activité 2 (Théorème de la médiane)

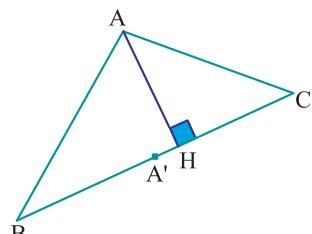
On considère un triangle ABC et on désigne par A' le milieu du segment [BC].

1. a. Montrer que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .  
b. En déduire que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{1}{4}BC^2$ .
2. Soit un triangle ABC tel que  $AC = 2$ ,  $BC = 4$ ,  $AA' = 1.5$  et K est le pied de la hauteur issue de B.
  - a. Calculer AK, BK et AB.
  - b. Donner une valeur approchée en radians à  $10^{-1}$  près de  $\widehat{ABC}$ .

## Activité 3

On considère un triangle ABC et on désigne par H le pied de la hauteur issue de A et par A' le milieu de [BC].

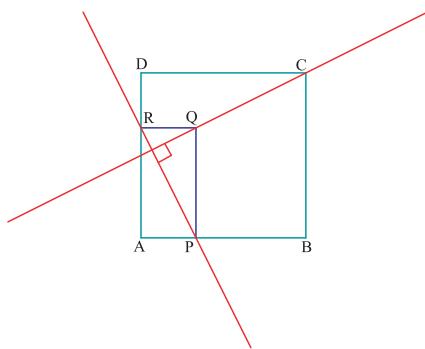
1. Vérifier que  $AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC})$ .
2. En déduire que  $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A'H}$ .



## Activité 4

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré et APQR est un rectangle tel que P est sur le côté [AB], R est sur le côté [AD] et  $AP = DR$ .

Montrer que (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.



## Activité 5

Soit ABCD un carré de côté 6, I et J les points définis respectivement par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

On désigne par K le point d'intersection des droites (ID) et (JC).

1. a. Faire une figure.
  - b. Montrer que les droites (ID) et (JC) sont perpendiculaires.
2. a. En utilisant un produit scalaire, montrer que  $DK \times DI = \frac{1}{3}DA^2$ .
  - b. Calculer DK.
3. Soit L le projeté orthogonal de A sur la droite (DI).
  - a. Calculer IL, puis LK.
  - b. En déduire une construction d'un carré de côté  $\frac{6}{5}\sqrt{10}$ .

## Activité 6 (Projection orthogonale)

Soit O et A deux points du plan tels que  $OA = 1$ .

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point  $M'$  tel que  $\overline{OM}' = (\overline{OM} \cdot \overline{OA}) \overline{OA}$ .

1. Déterminer  $f(O)$  et  $f(A)$ .
2. Montrer que pour tout point M du plan, le point  $M'$  appartient à (OA).
3. Que peut-on dire de l'image d'un point de (OA) ?
4. Montrer que pour tout point M, les vecteurs  $\overline{MM}'$  et  $\overline{OA}$  sont orthogonaux.
5. En déduire la nature de f.

## Mobiliser ses compétences

### Situation 1 Droite et cercle d'Euler

Soit un triangle ABC. On désigne par  $\mathcal{C}$  son cercle circonscrit, de centre O et de rayon r, et par G son centre de gravité.

#### I. Droite d'Euler

Soit H le point tel que  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .

On se propose de montrer que O, H et G sont situés sur une même droite appelée droite d'Euler.

1. a. Calculer  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

b. En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

2. Montrer que  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$  et en déduire que les points O, H et G sont alignés.

#### II. Cercle d'Euler

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [BA], par P, Q et R les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C,

par U, V et W les milieux respectifs de [AH], [BH] et [CH].

On se propose de montrer que les points A', B', C', P, Q, R, U, V et W sont situés sur un même cercle appelé cercle d'Euler.

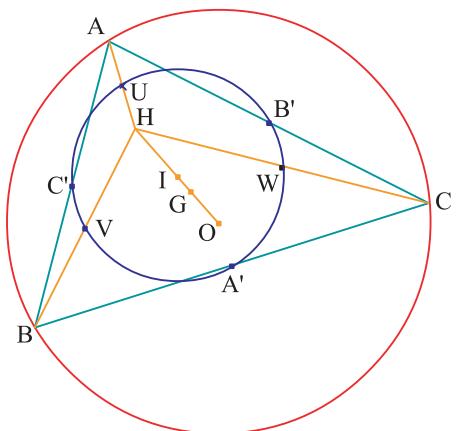
On désigne par I le milieu de [OH].

1. a. Calculer  $\overrightarrow{IU} \cdot \overrightarrow{IA'}$ .

b. Montrer que U et A' appartiennent au cercle  $\mathcal{C}'$  de centre I et de rayon  $\frac{r}{2}$  et que U et A' sont diamétralement opposés sur  $\mathcal{C}'$ .

c. Calculer  $\overrightarrow{PU} \cdot \overrightarrow{PA'}$  et en déduire que P appartient au cercle  $\mathcal{C}'$ .

2. Procéder de même que dans 1. pour montrer que V, B' et Q appartiennent à  $\mathcal{C}'$  et que W, C' et R appartiennent à  $\mathcal{C}'$ .



### Situation 2 Astroïde

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on désigne par  $\mathcal{C}$  le cercle de centre O et de rayon 1. Soit M un point de  $\mathcal{C}$  et P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur  $(O, \vec{i})$  et  $(O, \vec{j})$ .

1. Montrer que  $PQ = 1$  et que  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PM} = OQ^2$ .

2. On désigne par M' le projeté orthogonal de M sur (QP).

Lorsque M décrit le cercle  $\mathcal{C}$ , le point M' décrit une courbe appelée astroïde.

On désigne par  $(x, y)$  les coordonnées de  $M$ .

Montrer que  $M'$  a pour coordonnées  $(x^3, y^3)$ .

### Situation 3 Puissance d'un point par rapport à un cercle

#### A. Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$ , de rayon  $R$  et  $M$  un point n'appartenant pas à  $\mathcal{C}$ .

1. Une droite  $\Delta$  passant par  $M$  rencontre  $\mathcal{C}$  en  $A$  et  $B$ .

On se propose de montrer que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$ .

On désigne par  $E$  le point diamétrallement opposé à  $A$  dans  $\mathcal{C}$ .

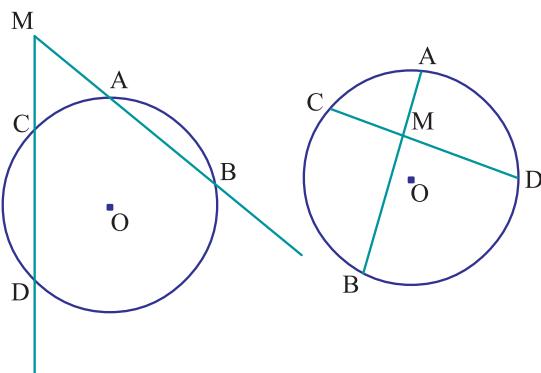
a. Faire un dessin dans les deux cas de figure suivants.

$M$  extérieur à  $\mathcal{C}$ ;  $M$  intérieur à  $\mathcal{C}$ .

b. Montrer que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = MO^2 - R^2$ .

2. Une droite  $\Delta'$  passant par  $M$  rencontre  $\mathcal{C}$  en  $C$  et  $D$ .

Montrer que dans les deux cas de figure ci-dessous,  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ .



Le réel  $MO^2 - R^2$  est appelé puissance du point  $M$  par rapport au cercle  $\mathcal{C}$ .

#### B. Application

Soit un cercle  $\mathcal{C}$  et les points  $A, B, C$  et  $D$  de  $\mathcal{C}$  tels que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  soient perpendiculaires. On désigne par  $M$  le point d'intersection des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .

Montrer que la médiane  $[MI]$  issue de  $M$  dans le triangle  $MAC$  est perpendiculaire à la droite  $(BD)$ .

### Situation 4 Points cocycliques

Soit deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  se coupant en  $M$  tel que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ .

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle passant par  $A, B$  et  $C$ .

La droite  $(CD)$  recoupe  $\mathcal{C}$  en  $D'$ .

1. Montrer que  $D$  et  $D'$  sont confondues.

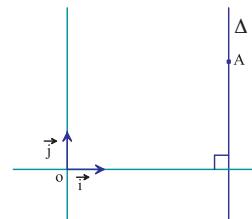
2. Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points  $A, B, C$  et  $D$  soient cocycliques, c'est-à-dire ils appartiennent à un même cercle.

# QCM – VRAI – FAUX

## QCM

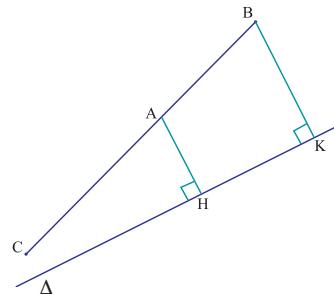
Cocher la réponse exacte.

1. On considère un triangle équilatéral ABC de côté a. Le réel  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  est égal à  
  $\frac{a^2}{2}$        0       a.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ , on considère un point H appartenant à la droite (OI) et un point K appartenant à la droite (OJ). Le réel  $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$  est égal à  
  $HK^2$         $OH \times OK$        0.
3. Dans la figure ci-contre,  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé, A est un point de la droite  $\Delta$ . Tout point M de la droite  $\Delta$  vérifie  
  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{j} = AM$       $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{i} = 0$       $\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = -AM$ .



4. Dans la figure ci-contre, A, B et C sont trois points tels que  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ , H et K sont les projets orthogonaux respectifs de A et B sur  $\Delta$ . Le réel  $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC}$  est égal à

6       5       -6.



## VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux alors  $\vec{u} = \vec{0}$ .
2. Dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ , on considère un vecteur  $\vec{u}$  de composantes  $(1, -2)$ . Alors il existe un unique vecteur  $\vec{v}$  vérifiant  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
3. Pour que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  il faut que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient de composantes  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans une base orthonormée.
4. Si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont orthogonaux et les vecteurs  $\vec{w}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux alors les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.
5. Pour que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires il suffit que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

# Exercices et Problèmes

## Exercice 1

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs.

On se propose de montrer que  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .

1. a. Montrer en utilisant la règle du parallélogramme que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

b. En déduire que

$$8(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}) = 2\left(\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 + \|\vec{w} + \vec{u}\|^2\right) - 2\left(\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 + \|\vec{w} - \vec{u}\|^2\right).$$

2. Utiliser la règle du parallélogramme pour montrer que

$$8(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}) = \left(\|\vec{v} + \vec{w} + 2\vec{u}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2\right) - \left(\|\vec{v} + \vec{w} - 2\vec{u}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2\right).$$

3. En déduire que  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .

## Exercice 2

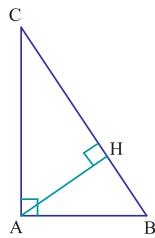
On considère un triangle ABC

rectangle en A et on désigne par

H le pied de la hauteur issue de A.

1. Vérifier que  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AH^2 - HB \cdot HC$ .

2. En déduire que  $AH^2 = HB \cdot HC$ .

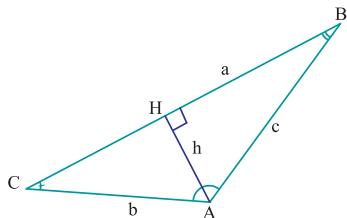


## Exercice 3

Montrer que dans tout triangle, la somme des carrés des côtés est égale aux  $\frac{4}{3}$  de la somme des carrés des médianes.

## Exercice 4 La règle du sinus

On considère un triangle ABC et on désigne par H le pied de la hauteur issue de A.



On note  $AH = h$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$  et  $BC = a$ .

1. a. Montrer que  $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AC} \cdot \vec{AH}$ .

b. En déduire que  $c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C}$ .

2. Montrer que  $\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \hat{A}}$ .

## Exercice 5

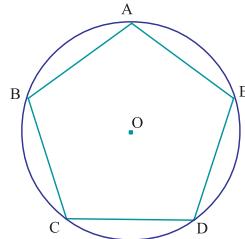
Soit un triangle ABC.

1. Montrer que  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{CA} \cdot \vec{CB} = BC^2$ .

2. En déduire que  $BC = AB \cos \hat{B} + AC \cos \hat{C}$ .

## Exercice 6

Dans la figure ci-dessous, ABCDE est un pentagone régulier de centre O.



1. Calculer en fonction de OA

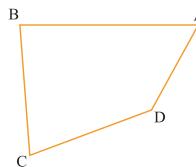
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB}, \vec{OA} \cdot \vec{OE}, \vec{OA} \cdot \vec{OC}.$$

2. Calculer en fonction de AB,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AE}, \vec{AB} \cdot \vec{ED}, \vec{AB} \cdot \vec{AD}, \vec{AB} \cdot \vec{AC}.$$

## Exercice 7

On considère un quadrilatère ABCD.



1. a. Montrer que  $AB^2 - BC^2 = \vec{AC} \cdot (\vec{AB} - \vec{BC})$ .

b. Montrer que  $DC^2 - AD^2 = \vec{AC} \cdot (\vec{DC} - \vec{AD})$ .

2. En déduire que  $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\vec{AC} \cdot \vec{DB}$ .

## Exercice 8

Soit un triangle ABC rectangle et isocèle en A.

On désigne par M et N deux points du plan tels que  $\vec{AM} = -3\vec{AB}$  et  $\vec{AN} = -3\vec{AC}$ .

On désigne par I le milieu du segment [BN].

1. Vérifier que  $\vec{AB} + \vec{AN} = 2\vec{AI}$ .

2. a. Montrer que  $\vec{AI} \cdot \vec{CM} = -\frac{3}{2}(AB^2 - AC^2)$ .

b. En déduire que la droite (AI) porte une hauteur du triangle AMC.

## Exercice 9

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre O et de rayon r et soit [AB] un diamètre de  $\mathcal{C}$ .

1. Placer un point M sur  $\mathcal{C}$  sachant que  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{r^2}{2}$ .
2. Placer un point N sur  $\mathcal{C}$  sachant que  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{ON} = -\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$ .

1. Montrer que  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$ .

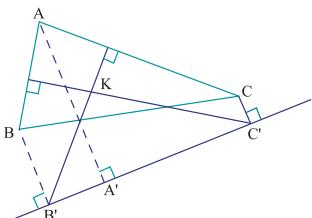
2. Montrer que  $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 = 4R^2$ .

3. Montrer que les droites (MI) et (BC) sont perpendiculaires

**Indication :** On pourrait considérer un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; poser A(a, b) et C(c, d) puis déterminer les coordonnées des points B, D et M.

## Exercice 10

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, A', B' et C' sont les projets orthogonaux respectifs de A, B et C sur la droite  $\Delta$ .



On désigne par K le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par B' et la perpendiculaire à (AB) passant par C'.

1. a. Montrer que  $\overrightarrow{A'K} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'A}$ .
- b. Montrer que  $\overrightarrow{A'K} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'}$ .
2. En déduire que les droites (A'K) et (BC) sont perpendiculaires.

## Exercice 11

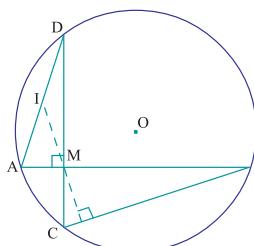
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A(-2, 2), B(4, 0) et C(-1, 2).

1. a. Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ , AB et AC.
- b. En déduire une valeur approchée en radians à l'unité près de  $\widehat{BAC}$ .
2. Déterminer une valeur approchée en radians à l'unité près de chacun des angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACB}$ .

## Exercice 12

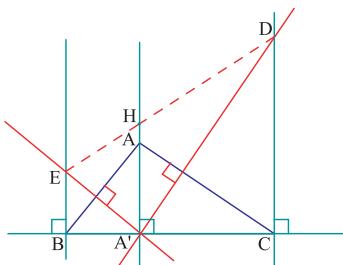
Soit A, B, C et D quatre points d'un cercle de centre O et de rayon R tels que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires et sécantes en M.

On désigne par I le milieu de [AD].



## Exercice 13

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle et A' est le pied de la hauteur issue de A.



On désigne par D le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par A' et la perpendiculaire à (BC) passant par C.

On désigne par E le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par A' et la perpendiculaire à (BC) passant par B.

On désigne par H le point d'intersection de la droite (ED) et la droite (AA').

Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

**Indication :** On pourrait considérer un repère orthonormé  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ ; poser A(0, a), B(b, 0) et C(c, 0).

## Exercice 14

Soit k un réel, A et B deux points tels que  $AB = 6$ .

On désigne par  $\Gamma_k$  l'ensemble des points M du plan tel que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ .

1. Représenter graphiquement  $\Gamma_0, \Gamma_6, \Gamma_{12}, \Gamma_{-6}$  et  $\Gamma_{42}$ .

2. Que représente l'ensemble des points M du plan tel que  $6 < \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \leq 18$  ?

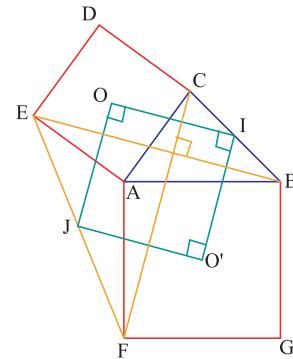
## Exercice 15

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment [AB].

On désigne par  $\Gamma$  l'ensemble des points M du plan tel que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$ .

- Montrer que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ .

- En déduire que  $\Gamma$  est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.



## Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points  $I(1, 0)$  et  $I'(-1, 0)$ .

On désigne par E l'ensemble des points M du plan tel que  $\frac{\overrightarrow{MI}}{\overrightarrow{MI'}} = 2$ .

On désigne par G le barycentre des points pondérés  $(I, 1)$  et  $(I', -4)$ .

- Montrer que  $MI^2 - 4MI'^2 = -3MG^2 + GI^2 - 4GI'^2$ .

- Montrer que E est l'ensemble des points M du plan tel que  $MG^2 = \frac{1}{3}(GI^2 - 4GI'^2)$ .

- En déduire que E est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

## Exercice 17

Soit A, B et C trois points distincts du plan.

On se propose de déterminer l'ensemble E des points M du plan tel que  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$ .

On désigne par I le milieu du segment [AB].

- Montrer que E est l'ensemble des points M du plan tel que  $MC^2 = 4MI^2$ .

- On désigne par G le barycentre des points pondérés  $(I, 4)$  et  $(C, -1)$ .

Montrer que E est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

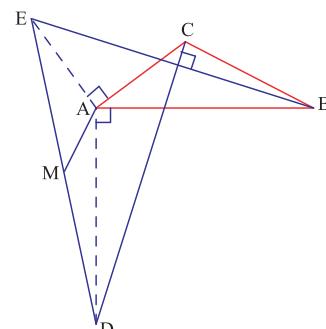
## Exercice 18

Soit ABC un triangle et I le milieu du côté [BC]. On construit les carrés ACDE et ABGF de centres respectifs O et O' comme l'indique la figure ci-après.

- Montrer que  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = -AF \cdot AE \cos \widehat{BAC}$ .
- Calculer  $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BE}$ . En déduire la position relative des droites (FC) et (BE).
- Montrer que  $FC = BE$ .
- Quelle est la nature du triangle  $IOO'$  ?
- Soit J le milieu de [EF]. Montrer que  $OIO'J$  est un carré.

## Exercice 19

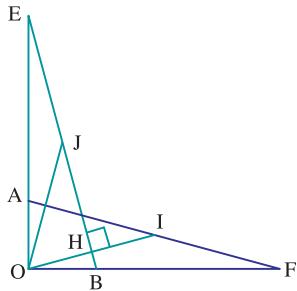
Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle tel que  $\widehat{BAC}$  est aigu,  $AD = AB$  et  $(AD) \perp (AB)$ ,  $AE = AC$  et  $(AE) \perp (AC)$ .



- Comparer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ .
- En déduire que  $(BE) \perp (CD)$  et que  $BE = CD$ .
- Soit M le milieu de [DE]. Montrer que  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM}$ .
- Calculer  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$  et en déduire la position relative des droites (AM) et (BC).

## Exercice 20

Dans la figure ci-dessous, l'angle  $\widehat{EOF}$  est droit,  $OE = OF = r$ , A un point de  $[OE]$  et B un point de  $[OF]$  tels que  $OA = OB = r'$ .



1. Montrer que la médiane issue de O du triangle AOF est la hauteur relative au côté  $[BE]$  du triangle BOE.

2. Soit I le milieu de  $[AF]$  et H le projeté orthogonal de O sur  $(BE)$ .

Exprimer à l'aide de  $r$  et  $r'$  le produit scalaire  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OH}$ .

3. Soit J le milieu de  $[BE]$ .

Exprimer  $\cos \widehat{IOJ}$  en fonction de  $r$  et  $r'$ .

## Exercice 21

Soit O et A deux points du plan tels que  $OA=1$ .

Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{OM}' = 2(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$ .

1. Déterminer  $g(O)$  et  $g(A)$ .

2. Que peut-on dire de l'image d'un point de  $(OA)$  ?

3. Montrer que pour tout point M du plan, le milieu H du segment  $[MM']$  appartient à  $(OA)$ .

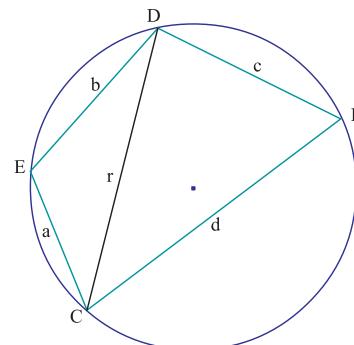
4. Montrer que pour tout point M, les vecteurs

$\overrightarrow{MM'}$  et  $\overrightarrow{OA}$  sont orthogonaux.

5. En déduire la nature de g.

## Exercice 22 Formule de Brahmagupta et Héron

Dans la figure ci-dessous, E, C, F et D sont quatre points d'un même cercle tels que  $ED = b$ ,  $EC = a$ ,  $FC = d$  et  $CD = r$ .



1. a. Montrer que

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{E} = c^2 + d^2 - 2cd \cos \widehat{F}.$$

b. En déduire que  $2(ab - cd) \cos \widehat{E} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ .

2. Montrer que l'aire  $\mathcal{A}$  du quadrilatère ECFD est donnée par  $2(ab + cd) \sin \widehat{E} = 4\mathcal{A}$ .

3. On désigne par  $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ , le demi-périmètre du quadrilatère ECFD.

Etablir la formule de Brahmagupta,

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

4. Retrouver la formule de Héron ;

l'aire  $\mathcal{A}'$  d'un triangle de côtés  $a, b, c$  et de demi-périmètre  $p$  est  $\mathcal{A}' = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ .

# Avec l'ordinateur

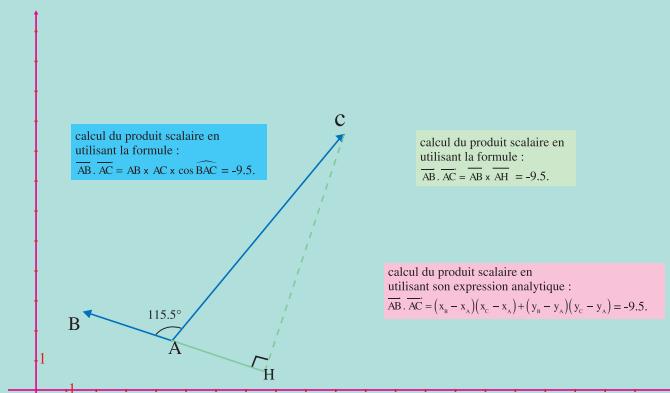
## Séquence 1

Soit A, B et C trois points distincts du plan et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé.

A l'aide d'un logiciel de géométrie, on vérifie en faisant varier les points A, B et C que la valeur de  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  est la même si on utilise l'une des formules suivantes :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$ ,
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ ,
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A)$ .



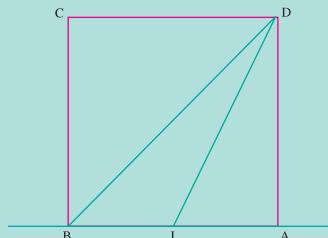
## Séquence 2

ABCD est un carré et I est le milieu du côté [AB].

L'objectif de cette séquence est d'utiliser CABRI pour émettre une conjecture concernant l'angle IDB lorsque le côté du carré varie.

- Construire un carré ABCD.
- Construire I le milieu du côté [AB] et tracer les segments [DI] et [DB].
- Mesurer l'angle IDB.
- Faire varier le côté du carré et observer les valeurs de  $\widehat{IDB}$ .
- Que peut-on conjecturer ?

Démontrer cette conjecture en calculant de deux manières le produit scalaire  $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DB}$ .

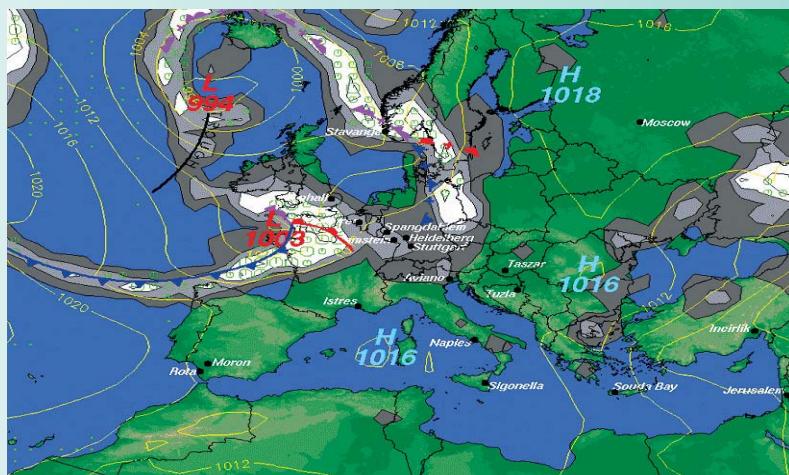




## Les lignes de niveau

Pour représenter le relief d'une région, on relie tous les points de même altitude. La courbe ainsi obtenue est appelée ligne de niveau. A chaque point M d'une carte géographique, on peut associer sa pression  $H(M)$ . Tous les points M ayant la même pression, par exemple 1016, constituent la ligne de niveau  $H1016$  de la fonction  $H$ .

Les isobares, les isothermes, les parallèles et les méridiens sont des lignes de niveau.

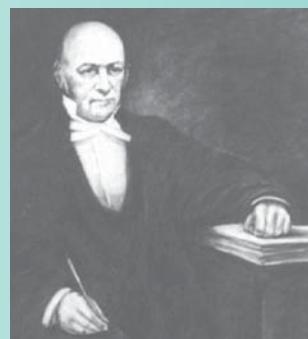


## Le produit scalaire

Au XIX<sup>ème</sup> siècle, le mathématicien allemand Grassmann (1809-1877), étudiant les phénomènes des marées, développe le calcul vectoriel et définit le produit scalaire qu'il appelle produit linéaire. "Il s'agit du produit algébrique d'un vecteur et de la projection du second vecteur sur le premier".

C'est Hamilton qui en 1853, le nomme produit scalaire car scalaire vient du mot latin *scala* qui signifie mesure et le produit scalaire de deux vecteurs est en effet un nombre.

Le produit scalaire se révèle très utile, aussi bien en physique pour le calcul du travail d'une force qu'en géométrie élémentaire pour démontrer des propriétés sur les angles et les distances.



# Chapitre 2

## Angles orientés

*"En mathématique, il n'y a pas de vérité inaccessible."*

*Hilbert*

## Pour commencer

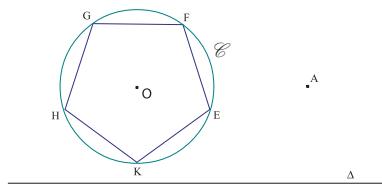
### Activité 1

Dans la figure ci-contre,  $EFGHK$  est un pentagone régulier inscrit dans un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1,  $A$  est un point et  $\Delta$  est une droite.

1. a. Calculer la longueur de l'arc  $\widehat{EG}$  qui contient le point  $F$ .

En déduire la longueur de l'arc  $\widehat{EG}$  qui ne contient pas  $F$ .

- b. Donner une mesure de chacun des angles géométriques  $\widehat{HOG}$ ,  $\widehat{EOG}$  et  $\widehat{EOH}$ .



2. Soit  $S_\Delta$  la symétrie d'axe  $\Delta$  et  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{OA}$ .

On désigne par

$E', F', G', H'$  et  $K'$  les images respectives des points  $E, F, G, H$  et  $K$  par la symétrie  $S_\Delta$ .

$M, N, P, Q$  et  $R$  les images respectives des points  $E, F, G, H$  et  $K$  par la translation  $t$ .

- a. Calculer la longueur de l'arc  $E'G'$  qui contient  $F'$ , puis celle de l'arc  $\widehat{MP}$  qui contient  $N$ .

Comparer les valeurs obtenues à la longueur de l'arc  $\widehat{EG}$  qui contient le point  $F$ .

- b. Soit  $O'$  l'image de  $O$  par  $S_\Delta$ . Donner une mesure de chacun des angles géométriques  $\widehat{E'O'G'}$ ,  $\widehat{MAP}$  et  $\widehat{QAP}$ .

### Activité 2

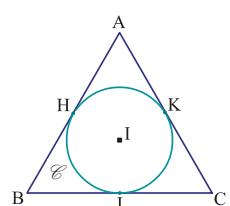
On considère un triangle équilatéral  $ABC$  de côté 4 et on désigne par  $I$  le centre du cercle  $\mathcal{C}$  inscrit dans le triangle. On note par  $H, L$  et  $K$  les points de contact.

1. Calculer le rayon de  $\mathcal{C}$ .

2. a. Donner une mesure de l'arc  $\widehat{HL}$  qui contient  $K$ .

- b. Donner une mesure de l'arc  $\widehat{KL}$  qui ne contient pas  $H$ .

- c. Donner une mesure de l'arc  $\widehat{KH}$  qui contient  $L$ .



# Cours

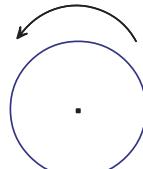
## 1. Arcs orientés

### 1.1 Orientation d'un cercle

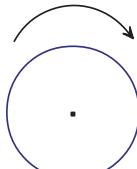
On admet qu'il n'y a que deux orientations possibles sur un cercle donné.

Orienter un cercle, c'est choisir l'une des deux orientations.

Nous conviendrons qu'un cercle est orienté dans le sens direct s'il est orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et qu'il est orienté dans le sens indirect s'il est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.



cercle orienté dans le sens direct



cercle orienté dans le sens indirect

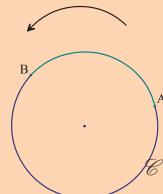
**Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.**

### Définition

Soit  $(A, B)$  un couple de points distincts d'un cercle orienté  $\mathcal{C}$ .

Alors, il y a deux arcs de cercle d'origine  $A$  et d'extrémité  $B$ .

Un et un seul de ces arcs est orienté conformément à l'orientation du cercle.



On l'appelle arc orienté d'origine  $A$  et d'extrémité  $B$  et on le note  $\widehat{AB}$ .

On convient que le couple  $(A, A)$  détermine un arc orienté dont l'origine et l'extrémité sont confondues. On le note  $\widehat{AA}$ .

### Vocabulaire

Tout arc orienté  $\widehat{AB}$  détermine un unique arc géométrique appelé arc géométrique associé à  $\widehat{AB}$ .

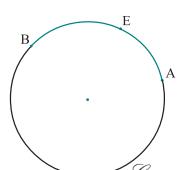
## 1.2 Mesures algébriques d'un arc orienté

### Activité 1

Soit  $A$ ,  $B$  et  $E$  trois points distincts appartenant à un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon 1.

On désigne par  $L$  la longueur de l'arc géométrique d'extrémités  $A$  et  $B$  qui contient  $E$ .

On considère un point mobile  $M$  qui se déplace sur le cercle  $\mathcal{C}$  toujours dans le même sens.



On se propose de mesurer le trajet parcouru par le mobile M, lorsqu'il part de A pour s'arrêter en B.  
On convient que la mesure algébrique  $x$  du trajet parcouru est égale à :

- La longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- L'opposé de la longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.

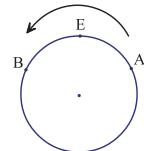
1. On suppose que M se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Déterminer  $x$  dans chacun des cas ci-dessous.

Le mobile M s'arrête en B dès son premier passage par B.

Le mobile M s'arrête en B, à son deuxième passage par B.

Le mobile M s'arrête en B, à son  $n$ ème passage par B ( $n \geq 1$ ).



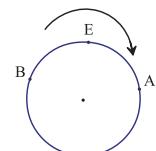
2. On suppose que M se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.

Déterminer  $x$  dans chacun des cas ci-dessous.

Le mobile M s'arrête en B dès son premier passage par B.

Le mobile M s'arrête en B, à son deuxième passage par B.

Le mobile M s'arrête en B, à son  $n$ ème passage par B.



L'activité précédente nous a permis de constater que pour partir de A et s'arrêter en B, le mobile M peut faire  $n$  tours complets sur le cercle avant de s'arrêter en B. Il est donc légitime de donner la définition ci-dessous.

### Définition

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle orienté de rayon 1, (A,B) un couple de points distincts de  $\mathcal{C}$  et L la longueur de l'arc géométrique associé à  $\widehat{AB}$ .

On appelle mesure algébrique de l'arc orienté  $\widehat{AB}$  et on note  $\text{mes } \widehat{AB}$  tout réel de la forme  $L + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

On convient que  $\text{mes } \widehat{AA} = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Les propriétés ci-dessous découlent aisément de la définition précédente.

### Conséquences

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle orienté de rayon 1 et A et B deux points de  $\mathcal{C}$ .

- Si  $x$  et  $y$  sont deux mesures de  $\widehat{AB}$ , alors  $x - y = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- L'arc orienté  $\widehat{AB}$  possède une unique mesure dans  $[0, 2\pi[$ , qui est la longueur de l'arc géométrique associé.
- Pour tout point M de  $\mathcal{C}$  et tout réel  $x$ , il existe un unique point N de  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{mes } \widehat{MN} = x$ .

### Notation

L'égalité  $x - y = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , est notée  $x \equiv y [2\pi]$ .

On lit "x est congru à y modulo  $2\pi$ ".

## Activité 2

Dans la figure ci-contre,  $\mathcal{C}$  est un cercle trigonométrique de centre O, OAB est un triangle équilatéral.

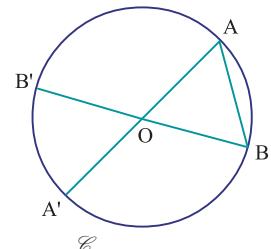
Les points A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à O.

1. Pour chacun des arcs orientés  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{AA'}$ ,  $\widehat{AB'}$ , déterminer la mesure qui appartient à  $[0, 2\pi[$ .

2. Soit K le point de  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{mes } \widehat{AK} \equiv \frac{37\pi}{4}[2\pi]$ .

Ecrire la division euclidienne de 37 par 4. Donner la mesure de  $\widehat{AK}$  qui appartient à  $[0, 2\pi[$  et placer le point K.

3. Placer le point N de  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{mes } \widehat{BN} \equiv \frac{19\pi}{3}[2\pi]$ .



### 1. 3 Propriétés des arcs orientés

## Activité 1

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle trigonométrique et (A, B) un couple de points de  $\mathcal{C}$  tels que  $\text{mes } \widehat{AB} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

1. Faire une figure.

2. Placer sur  $\mathcal{C}$  le point D tel que  $\text{mes } \widehat{BD} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  et le point D' tel que  $\text{mes } \widehat{AD'} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ .

3. En désigne par  $L_1, L_2, L_3, L_4$  et  $L_5$  les mesures respectives qui appartiennent à  $[0, 2\pi[$  des arcs  $\widehat{AB}, \widehat{BD}, \widehat{AD}, \widehat{BD'}$  et  $\widehat{AD'}$ .

a. Comparer  $L_1 + L_2$  et  $L_3$ .

b. Comparer  $L_1 + L_4$  et  $L_5$ .

### Propriétés (admis)

Pour tous points A, B et C d'un cercle orienté  $\mathcal{C}$  de rayon 1, on a  $\text{mes } \widehat{AB} + \text{mes } \widehat{BC} \equiv \text{mes } \widehat{AC} [2\pi]$  (Relation de Chasles).

$$\text{mes } \widehat{AB} \equiv -\text{mes } \widehat{BA} [2\pi].$$

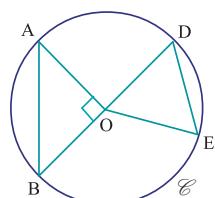
## Activité 2

Dans la figure ci-contre,  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique de centre O.

Les points B, D sont diamétralement opposés, le triangle AOB est rectangle en O et le triangle ODE est équilatéral.

Pour chacun des arcs orientés ci-dessous, donner la mesure qui appartient à  $[0, 2\pi[$ .

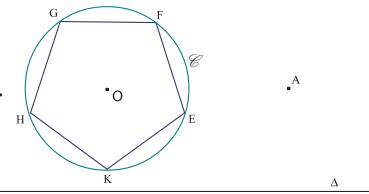
$\widehat{AB}, \widehat{BA}, \widehat{BE}, \widehat{EB}, \widehat{AE}, \widehat{AD}$ .



## Activité 3

Dans la figure ci-contre, EFGHK est un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  de centre O, A est un point et  $\Delta$  est une droite.

1. Pour chacun des arcs orientés  $\widehat{EF}$ ,  $\widehat{FK}$ ,  $\widehat{FE}$ ,  $\widehat{EK}$ , déterminer la mesure qui appartient à  $[0, 2\pi[$ .
2. Soit  $S_\Delta$  la symétrie d'axe  $\Delta$ .



On désigne par  $\mathcal{C}'$  l'image du cercle  $\mathcal{C}$  par  $S_\Delta$  et par  $E', F', G', H'$  et  $K'$  les images respectives des points E, F, G, H et K par  $S_\Delta$ .

- a. Donner la mesure de  $\widehat{E'F'}$  qui appartient à  $[0, 2\pi[$  et la comparer à la mesure de  $\widehat{EF}$  qui appartient à  $[0, 2\pi[$ .
  - b. Reprendre la question pour chacun des arcs orientés  $\widehat{FK'}, \widehat{F'E'} et \widehat{E'K'}$ .
3. Soit  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{OA}$ , MNPQR l'image du pentagone EFGHK par cette translation.
    - a. Donner la mesure de  $\widehat{MN}$  qui appartient à  $[0, 2\pi[$  et la comparer à la mesure de  $\widehat{EF}$  qui appartient à  $[0, 2\pi[$ .
    - b. Reprendre la question pour chacun des arcs orientés  $\widehat{NR}, \widehat{NM}$  et  $\widehat{PR}$ . Que remarque-t-on ?

### Théorème (admis)

Toute symétrie axiale transforme les mesures des arcs orientés en leurs opposés.  
Toute translation conserve les mesures des arcs orientés.

## 2. Angles orientés

### 2.1 Définition d'un angle orienté

On dit que le plan est orienté si tous les cercles du plan sont orientés dans le même sens.

On convient que le plan est orienté dans le sens direct si tous les cercles du plan sont orientés dans le sens direct.

On convient que le plan est orienté dans le sens indirect si tous les cercles du plan sont orientés dans le sens indirect.

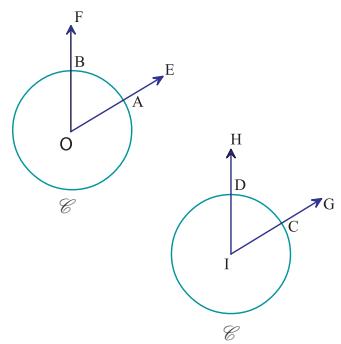
## Activité 1

Dans le plan orienté dans le sens direct, O et I sont deux points distincts. On considère deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on désigne par E et F les points du plan tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{IG}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{IH}$ .

Le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  de centre O coupe les demi-droites  $[OE)$  et  $[OF)$  respectivement en A et B.

Le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}'$  de centre I coupe les demi-droites  $[IG)$  et  $[IH)$  respectivement en C et D.

Montrer que les arcs orientés  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{CD}$  ont le même ensemble de mesures.



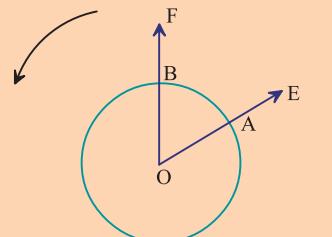
### Définition

Soit O un point du plan orienté dans le sens direct et  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique de centre O.

Soit  $(\vec{u}, \vec{v})$  un couple de vecteurs non nuls.

On désigne par E et F les points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OE}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OF}$  et par A et B les points d'intersection respectifs du cercle  $\mathcal{C}$  et des demi-droites  $[OE)$  et  $[OF)$ .

On appelle mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  toute mesure de l'arc orienté  $\widehat{AB}$ .



$$\vec{u} = \overrightarrow{OE} = a\overrightarrow{OA} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{OF} = b\overrightarrow{OB}$$

Les propriétés ci-dessous découlent de la définition précédente.

### Propriétés

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

- Pour tous réels strictement positifs a et b, les angles orientés  $(\vec{u}, \vec{v})$  et  $(a\vec{u}, b\vec{v})$  ont les mêmes mesures.
- Si  $\alpha$  est une mesure de  $(\vec{u}, \vec{v})$  alors toute mesure de  $(\vec{u}, \vec{v})$  est de la forme  $\alpha + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Toute mesure de  $(\vec{u}, \vec{u})$  est de la forme  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Toute mesure de  $(\vec{u}, -\vec{u})$  est de la forme  $\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  est notée  $(\widehat{u}, \widehat{v})$ .

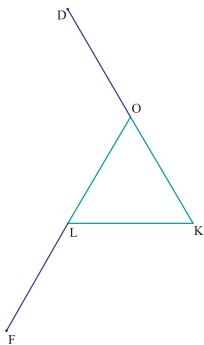
On note  $(\widehat{u}, \widehat{v}) \equiv \alpha[2\pi]$  et on lit  $(\widehat{u}, \widehat{v})$  est congru à  $\alpha$  modulo  $2\pi$ .

## Activité 2

Le plan étant orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral  $OLK$  de côté 1. On désigne par  $D$  le symétrique de  $K$  par rapport à  $O$  et par  $F$  le symétrique de  $O$  par rapport à  $L$ .

Pour chacun des angles orientés ci-dessous, déterminer la mesure qui appartient à  $[0, 2\pi[$ ,

$$(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OK}), (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OD}), (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OF}), (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OL}), (\overrightarrow{LO}, \overrightarrow{LF}), (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{KL}), (\overrightarrow{LF}, \overrightarrow{KO}).$$



## Activité 3

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.

Dans cette activité, on se propose de déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$\widehat{(AB, AM)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique de centre  $A$  et  $B'$  le point d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la demi-droite  $[AB]$ .

1. a. Construire le point  $D$  tel que  $AD = 1$  et  $\widehat{(AB', AD)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .  
b. Soit  $M$  un point de la demi-droite  $[AD)$  privée de  $A$ . Déterminer  $\widehat{(AB, AM)}$ .
2. Soit  $M$  un point du plan tel que  $\widehat{(AB, AM)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ . On note  $M'$  le point d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la demi-droite  $[AM)$ .  
Montrer que  $M'$  et  $D$  sont confondus.
3. En déduire que  $M$  appartient à  $[AD)$ .
4. Soit  $N$  un point du plan tel que  $\widehat{(AB, AN)} \equiv \widehat{(AB, AM)} [2\pi]$ .

Que peut-on dire des vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AN}$  ?

### Propriétés (admises)

- Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul et  $\alpha$  un réel.  
Il existe un unique vecteur unitaire  $\vec{v}$  tel que  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \alpha [2\pi]$ .
- Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  trois vecteurs non nuls. Alors  
 $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v}')} [2\pi]$ , si et seulement si,  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  sont colinéaires et de même sens.

## 2.2 Vecteurs colinéaires – Vecteurs orthogonaux

### Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

1. Montrer que  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$ , si et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens.

2. Montrer que  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi[2\pi]$ , si et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens opposés.

## Propriétés

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$ , si et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens.

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi[2\pi]$ , si et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens opposés.

## Activité 2

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que  $(\widehat{\overrightarrow{MA}}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) \equiv 0[2\pi]$ .

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que  $(\widehat{\overrightarrow{MA}}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) \equiv \pi[2\pi]$ .

## Activité 3

Soit O un point du plan orienté dans le sens direct,  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique de centre O et A un point du plan distinct de O. On désigne par C et D les points de  $\mathcal{C}$  tels que

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi].$$

Soit M un point du plan distinct de O.

Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OM}$  sont orthogonaux, si et seulement si,

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } (\widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi].$$

## Propriété

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux, si et seulement si,  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  ou  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$ .

## Activité 4

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan orienté dans le sens direct.

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, si et seulement si,

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}}, \widehat{\overrightarrow{CD}}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires, si et seulement si,

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}}, \widehat{\overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

## 2. 3 Mesure principale d'un angle orienté

### Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

- Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls tels que  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{128\pi}{3}[2\pi]$ .

Ecrire la division euclidienne de 128 par 3. En déduire que  $\frac{2\pi}{3}$  est une mesure de  $(\vec{u}, \vec{v})$  qui appartient à  $]-\pi, \pi]$ .

- Utiliser un procédé analogue pour déterminer dans chacun des cas ci-dessous une mesure de  $(\vec{u}, \vec{v})$  qui appartient à  $]-\pi, \pi]$ .

$$a. (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{245\pi}{4}[2\pi] \quad ; \quad b. (\vec{u}, \vec{v}) \equiv -\frac{137\pi}{3}[2\pi].$$

### Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls. On se propose de montrer que  $(\vec{u}, \vec{v})$  admet une unique mesure dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ .

- Montrer que si  $y$  et  $z$  sont deux mesures de  $(\vec{u}, \vec{v})$  qui appartiennent à  $]-\pi, \pi]$  alors  $y = z$ .
- On désigne par  $x$  la mesure de  $(\vec{u}, \vec{v})$  qui appartient  $[0, 2\pi]$ .

Montrer que si  $x$  appartient  $]\pi, 2\pi]$ , alors  $x - 2\pi$  est une mesure de  $(\vec{u}, \vec{v})$  qui appartient à  $]-\pi, \pi]$ .

- Conclure.

### Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls. Alors l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  admet une unique mesure dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ , appelée mesure principale de  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

### Activité 3

Soit I un point du plan orienté dans le sens direct. Placer sur le cercle trigonométrique de centre I, les points F, G et H tels que  $\widehat{(\vec{IF}, \vec{IG})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  et  $\widehat{(\vec{IF}, \vec{IH})} \equiv \frac{5\pi}{3}[2\pi]$ .

- Donner les mesures principales de  $(\vec{IF}, \vec{IG})$  et  $(\vec{IF}, \vec{IH})$ .

- Donner les mesures des angles géométriques  $\widehat{FIG}$  et  $\widehat{FIH}$ . Que remarque-t-on ?

### Propriétés

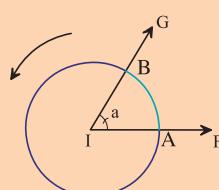
Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère

trois points non alignés I, F et G tels que  $\widehat{FIG} = a$ .

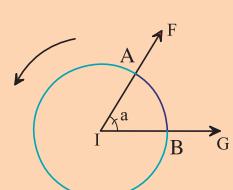
Si L est la mesure de  $\widehat{AB}$  qui appartient à  $[0, 2\pi]$  et

$\alpha$  est la mesure principale de  $(\vec{IF}, \vec{IG})$ , alors

$$\alpha = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq L \leq \pi \\ -a & \text{si } \pi < L < 2\pi \end{cases}.$$



la mesure principale de  $(\vec{IF}, \vec{IG})$  est égale à  $a$ .



la mesure principale de  $(\vec{IF}, \vec{IG})$  est égale à  $-a$ .

## 2. 4 Propriétés des angles orientés

La propriété ci-dessous découle de la relation de Chasles sur les mesures des arcs orientés.

### Propriété

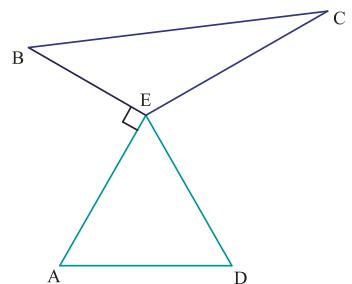
Le plan est orienté dans le sens direct.

Pour tous vecteurs non nuls  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ ,

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} [2\pi] \text{ (Relation de Chasles).}$$

### Activité 1

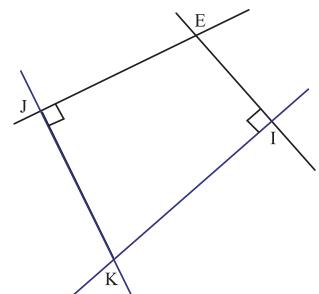
Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral AED. On suppose de plus que  $(EA)$  est perpendiculaire à  $(EB)$  et  $\widehat{(EB, EC)} \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ . Donner la mesure principale de chacun des angles orientés  $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$ ;  $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB})$ ;  $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EC})$ .



### Activité 2 (Angles à côtés perpendiculaires)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère quatre points E, I, J et K tels que les droites  $(KI)$  et  $(KJ)$  sont respectivement perpendiculaires aux droites  $(EI)$  et  $(EJ)$ .

Montrer que  $\widehat{(\overrightarrow{EI}, \overrightarrow{EJ})} = \widehat{(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ})} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



### Activité 3

Utiliser la relation de Chasles pour montrer la propriété ci-dessous.

### Propriété

Le plan est orienté dans le sens direct.

Pour tous vecteurs non nuls  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$ ,

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} [2\pi], \text{ si et seulement si, } \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} \equiv \widehat{(\vec{v}, \vec{v}')} [2\pi].$$

### Activité 4

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère trois points A, B et C tels que  $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ . Soit D un point distinct de A tels que les droites  $(AD)$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires et E un point tel que  $\widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

Montrer que les droites  $(AE)$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires.

## Activité 5

En utilisant la relation de Chasles, établir les propriétés suivantes.

### Propriétés

Le plan est orienté dans le sens direct.

- Pour tous vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,

$$\begin{aligned} (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) &\equiv -(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) [2\pi] ; (\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) [2\pi]. \\ (\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) &\equiv \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) [2\pi] ; (\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) [2\pi]. \end{aligned}$$

- Pour tous vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et tous réels non nuls  $a$  et  $b$ ,

$$(\widehat{a\vec{u}, b\vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) [2\pi] \text{ si } ab > 0 ; (\widehat{a\vec{u}, b\vec{v}}) \equiv \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) [2\pi] \text{ si } ab < 0.$$

## Activité 6

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls tels que  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$  et  $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$ .

Déterminer les mesures principales des angles orientés  $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ ;  $(\widehat{\vec{u}, -\vec{w}})$ ;  $(-\widehat{2\vec{u}, \vec{v}})$ ;  $(\widehat{3\vec{w}, -\frac{1}{3}\vec{u}})$ .

## Activité 7

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $[BC]$  un segment et un  $A$  un point de la médiatrice de  $[BC]$ .

Montrer que  $(\widehat{\vec{BC}, \vec{BA}}) \equiv (\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}}) [2\pi]$ .

## Activité 8

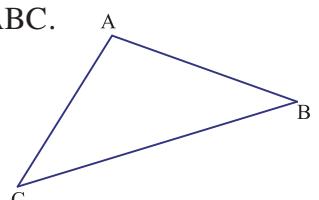
Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC.

- Utiliser la relation de Chasles pour calculer la somme

$$(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) + (\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}}) + (\widehat{\vec{BC}, \vec{BA}}).$$

- On suppose que le triangle ABC est isocèle en A, montrer que

$$(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) \equiv \pi - 2(\widehat{\vec{BC}, \vec{BA}}) [2\pi].$$



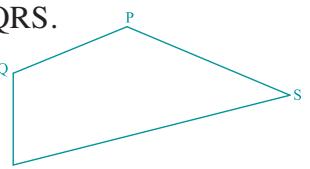
## Activité 9

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un quadrilatère PQRS.

- Calculer la somme  $(\widehat{\vec{PQ}, \vec{PS}}) + (\widehat{\vec{SP}, \vec{SR}}) + (\widehat{\vec{RS}, \vec{RQ}}) + (\widehat{\vec{QR}, \vec{QP}})$ .

- On suppose que PQRS est un parallélogramme, montrer que

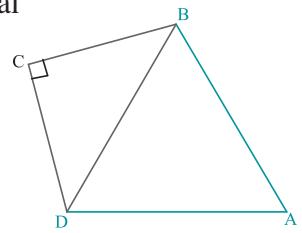
$$(\widehat{\vec{PQ}, \vec{PS}}) \equiv (\widehat{\vec{RS}, \vec{RQ}}) [2\pi] \text{ et que } (\widehat{\vec{SP}, \vec{SR}}) \equiv (\widehat{\vec{QR}, \vec{QP}}) [2\pi].$$



## Activité 10

Dans le plan orienté dans le sens direct, le triangle ABD est équilatéral et le triangle BCD est isocèle rectangle en C.

Donner la mesure principale des angles  $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$ ;  $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BD})$ ;  $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD})$ ;  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$ ;  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ ;  $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$ .

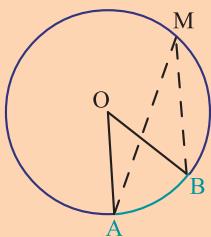


## 3. Cercle et angles

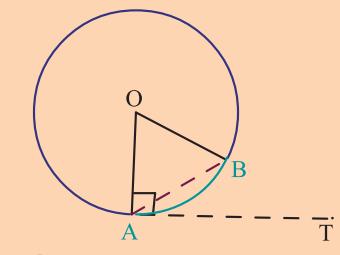
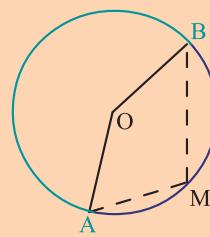
### 3.1 Angles inscrits et angles au centre

#### Définition

On dit qu'un angle est inscrit dans un cercle lorsque son sommet appartient à ce cercle et ses côtés recoupent ce cercle ; l'un des côtés pouvant être tangent au cercle.



$\widehat{AOB}$  est l'angle au centre associé à l'angle inscrit  $\widehat{AMB}$



$\widehat{AOB}$  est l'angle au centre associé  
à l'angle inscrit  $\widehat{TAB}$

## Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre A, B et C sont trois points d'un cercle  $\mathcal{C}$  de centre O.

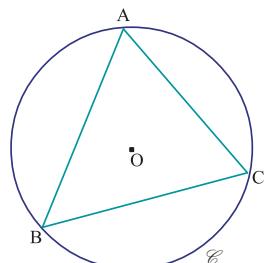
On se propose de montrer que  $2(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv (\widehat{OA}, \widehat{OB})[2\pi]$ .

1. En remarquant que le triangle OAC est isocèle en O, montrer que  $(\widehat{OC}, \widehat{OA}) = \pi - 2(\widehat{CA}, \widehat{CO}) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. En déduire que  $2(\widehat{CA}, \widehat{CO}) \equiv (\widehat{OA}, \widehat{CO})[2\pi]$ .

3. Montrer de même que  $2(\widehat{CB}, \widehat{CO}) \equiv (\widehat{OB}, \widehat{CO})[2\pi]$ .

4. Conclure.

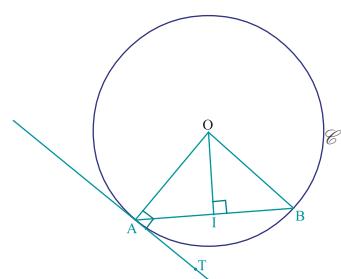


## Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre la droite (AT) est tangente au cercle  $\mathcal{C}$  en A.

On se propose de montrer que  $(\widehat{OA}, \widehat{OB}) \equiv 2(\widehat{AT}, \widehat{AB})[2\pi]$ .



- Soit I le milieu de [AB]. En remarquant que les droites (OA) et (OI) sont respectivement perpendiculaires aux droites (AT) et (AB), comparer  $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$  et  $2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$ .
- Conclure.

## Théorème

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre O dans le plan orienté dans le sens direct.

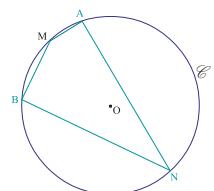
- Pour tous points distincts A, B et M du cercle  $\mathcal{C}$ ,  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$ .
- Si la droite (AT) est tangente au cercle  $\mathcal{C}$  en A, alors  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$ .

## Activité 3

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un cercle  $\mathcal{C}$  de centre O.

Soit A, N, B et M quatre points distincts de  $\mathcal{C}$  tels que  $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$  et N et M soient diamétralement opposés.

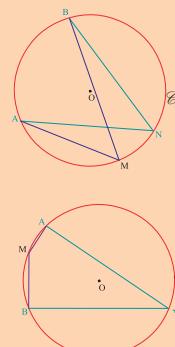
Déterminer la mesure principale de l'angle orienté  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ .



## Propriétés (admis)

Dans le plan orienté dans le sens direct, soit A, B, M et N quatre points distincts d'un cercle.

- Si M et N appartiennent à l'arc orienté  $\widehat{AB}$ , alors  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})[2\pi]$ .
- Si M appartient à l'arc orienté  $\widehat{AB}$  et N appartient à l'arc orienté  $\widehat{BA}$ , alors  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) + \pi[2\pi]$ .



## 3.2 Ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[2\pi]$ , $\theta \neq k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$

### Activité 1

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère deux points distincts A et B et un réel  $\theta$  tel que  $\theta \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Soit un point T tel que  $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta[2\pi]$ .
  - Montrer qu'il existe un unique cercle  $\mathcal{C}$  passant par A et B et tangent à (AT) en A.
  - Soit M un point de l'arc orienté  $\widehat{BA}$  distinct de A et B. Déterminer  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ .

2. Soit N un point du plan tel que  $(\widehat{NA}, \widehat{NB}) \equiv \theta [2\pi]$ .

Soit  $\mathcal{C}'$  le cercle circonscrit au triangle NAB et O' son centre.

a. Déterminer  $(\widehat{O'A}, \widehat{O'B})$ , puis  $(\widehat{AO'}, \widehat{AB})$ .

b. En déduire que (AT) est tangente à  $\mathcal{C}'$  en A.

c. Où se trouve alors le point N ?

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que  $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \theta [2\pi]$ ,  $\theta \neq k\pi$ .

## Théorème

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct,  $\theta \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et T un point du plan tel que  $(\widehat{AT}, \widehat{AB}) \equiv \theta [2\pi]$ .

Il existe un unique cercle  $\mathcal{C}$  passant par A et B et tangent à (AT) en A.  
L'ensemble des points M tels que  $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \theta [2\pi]$  est l'un des deux arcs orientés  $\widehat{BA}$  ou  $\widehat{AB}$  privé des points A et B.

## Activité 2

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct. Construire dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M du plan tels que  $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \theta [2\pi]$ .

a.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ; b.  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  ; c.  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

## Activité 3

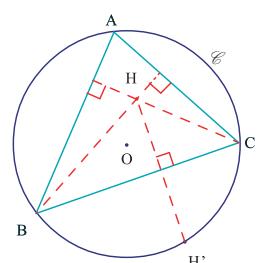
Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre ABC est un triangle inscrit dans le cercle  $\mathcal{C}$  et H est son orthocentre.

1. Montrer que  $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \pi - (\widehat{HB}, \widehat{HC}) [2\pi]$ .

2. Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC).

Comparer  $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$  et  $(\widehat{H'B}, \widehat{H'C})$ .

3. En déduire que H' est un point de  $\mathcal{C}$ .



## 4. Base orthonormée directe

## Activité 1

Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base orthonormée du plan orienté dans le sens direct telle que  $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

- Montrer que chacun des couples de vecteurs ci-dessous est une base orthonormée du plan  $(\vec{i}, -\vec{j}), (-\vec{i}, -\vec{j}), (\vec{j}, \vec{i})$ .
- Calculer la mesure principale de chacun des angles orientés  $(\vec{i}, -\vec{j}), (-\vec{i}, -\vec{j}), (\vec{j}, \vec{i})$ .

## Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$  un vecteur tel que  $\|\vec{u}\| = 1$ .

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur  $\vec{j}$  tel que  $\|\vec{j}\| = 1$  et  $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

2. Montrer qu'il existe un unique vecteur  $\vec{j}'$  tel que  $\|\vec{j}'\| = 1$  et  $\widehat{(\vec{i}, \vec{j}')} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

## Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

On dit qu'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  du plan est orthonormée directe si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  et  $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

On dit qu'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  du plan est orthonormée indirecte si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  et  $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

## Activité 3

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que  $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MB})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que  $\widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

## Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls, et soit  $\vec{u}'$  le vecteur vérifiant

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| \text{ et } \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On appelle déterminant de  $(\vec{u}, \vec{v})$  et on note  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  le réel  $\vec{v} \cdot \vec{u}'$ .

On convient que si l'un des vecteurs est nul, leur déterminant est nul.

## Activité 4

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

Montrer que  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ , si et seulement si, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

## Activité 5

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $(\vec{u}, \vec{v})$  une base orthonormée directe.

Montrer que  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ .

Soit  $(\vec{u}, \vec{v})$  une base orthonormée indirecte.

Montrer que  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ .

## Activité 6

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme,

tel que  $(\widehat{\overrightarrow{AB}}, \widehat{\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}$  [2π],  $AB = 5$  et  $AD = 2$ .

Calculer  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .



2. Dans la figure ci-contre, EFGH est un parallélogramme, tel que

$(\widehat{\overrightarrow{EF}}, \widehat{\overrightarrow{EH}}) \equiv -\frac{\pi}{6}$  [2π],  $EF = 2\sqrt{3}$  et  $EH = 1.5$ .

Calculer  $\det(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$ .



## Activité 7

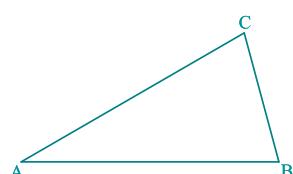
Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle tel que

$(\widehat{\overrightarrow{AB}}, \widehat{\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}$  [2π].

1. Exprimer  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$  à l'aide de  $AB$  et  $AC$ .

2. Que remarque-t-on ?



## Mobiliser ses compétences

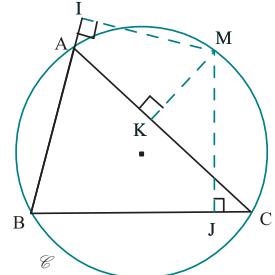
### Situation 1 La droite de Simpson

Le plan est orienté dans le sens direct.

- Dans la figure ci-contre,  $\mathcal{C}$  est le cercle circonscrit au triangle ABC, M est un point de  $\mathcal{C}$  et I, J et K sont les projetés orthogonaux de M sur les côtés du triangle ABC.

On se propose de montrer que les points I, J et K sont alignés.

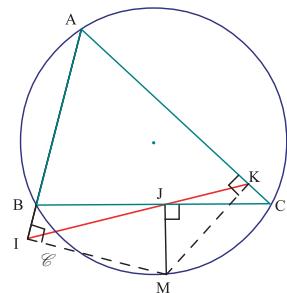
- Montrer que les points I, K, M et A appartiennent à un même cercle.
- En déduire que  $2(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IK}) \equiv 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}) [2\pi]$ .
- Montrer  $2(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IM}) \equiv 2(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BM}) [2\pi]$ .
- En déduire que les points I, J et K sont alignés.



- Dans la figure ci-contre, N est un point dont les projets orthogonaux I, J et K sur les côtés du triangle ABC sont alignés.

- Montrer que  $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) [2\pi]$ .
- En déduire que N est un point de  $\mathcal{C}$ , cercle circonscrit au triangle ABC.

- Conclure.



### Situation 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre O et de rayon r et soit A et B deux points diamétralement opposés sur  $\mathcal{C}$ .

- Pour tout point M de  $\mathcal{C}$ , distinct de A et de B, on construit le point Q tel que MABQ soit un parallélogramme.

Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment [MQ], puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BQM lorsque M décrit  $\mathcal{C}$  privé des points A et B.

- On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM).

Déterminer l'ensemble décrit par le point N lorsque M décrit  $\mathcal{C}$  privé des points A et B.

- On considère les cercles circonscrits aux triangles OBP et MNP.

- Pourquoi ces cercles ne sont pas tangents en P ?
- On note K l'autre point commun à ces deux cercles.

Montrer que le point K est un point de  $\mathcal{C}$ .

# QCM – VRAI – FAUX

## QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls tels que  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{3024\pi}{4}[2\pi]$ .

Alors la mesure principale de  $(\vec{u}, \vec{v})$  est

- $\pi$         $0$         $\frac{\pi}{4}$ .

2. Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls tels que  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{\pi}{21}[2\pi]$ .

Alors  $(\vec{u}, \vec{v})$  admet une mesure dans

- $[\pi, 2\pi]$         $[9\pi, 10\pi]$         $[4\pi, 5\pi]$ .

3. Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls tels que  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$  et

$\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ . La mesure principale de  $(\vec{u}, \vec{w})$  appartient à

- $[-\frac{\pi}{2}, 0]$         $[-\pi, 0]$         $[0, \pi]$ .

4. ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que la mesure principale de  $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$  est égale à  $-\frac{\pi}{5}$ . Alors la mesure principale de  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$  est

- $\frac{\pi}{5}$         $-\frac{\pi}{5}$         $\frac{4\pi}{5}$ .

5. Soit A, B et M trois points distincts tels que  $2\widehat{(MA, MB)} \equiv \pi[2\pi]$ . Alors

- A, B et M sont alignés        $(AB) \perp (MB)$        M appartient au cercle de diamètre [AB]

## VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

Le plan est orienté dans le sens direct.. Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls.

1. Si  $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \pi[2\pi]$ , alors les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires de même sens.

2. Si  $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont orthogonaux, alors les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont orthogonaux.

3. Si les mesures principales respectives de  $(\vec{u}, \vec{v})$  et de  $(\vec{v}, \vec{w})$  appartiennent à  $]-\pi, 0]$ , alors la mesure principale de  $(\vec{u}, \vec{w})$  appartient à  $]-\pi, 0]$ ,

4. Si la mesure principale de  $(\vec{u}, \vec{v})$  appartient à  $]0, \pi]$ , alors une mesure de  $(\vec{u}, \vec{v})$  appartient à  $]2k\pi, (2k+1)\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

5. Soit A, B et C trois points distincts et A', B' et C' leurs images respectives par une homothétie. Alors  $\widehat{(A'B', A'C')} \equiv \widehat{(AB, AC)}[2\pi]$ .

# Exercices et Problèmes

## Exercice 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle trigonométrique, M et N deux points de  $\mathcal{C}$  et  $\alpha$  une mesure de l'arc orienté  $\widehat{MN}$ .

Trouver, dans chacun des cas suivants, la mesure de l'arc orienté  $\widehat{MN}$  qui appartient à  $[0, 2\pi[$ .

$$a. \alpha = \frac{185\pi}{7} ; \quad b. \alpha = \frac{-228\pi}{3} ; \quad c. \alpha = \frac{2006\pi}{13} .$$

## Exercice 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls tels que

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \text{ et } \widehat{(\vec{u}, \vec{w})} \equiv -\frac{2\pi}{5}[2\pi].$$

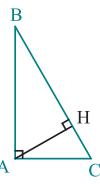
Déterminer les mesures principales des angles

$$(\vec{v}, \vec{u}), (\vec{v}, \vec{w}), (2\vec{u}, -3\vec{v}), (3\vec{v}, -\frac{1}{3}\vec{w}).$$

## Exercice 3

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A tel que  $\widehat{(BA, BC)} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$  et H est le pied de la hauteur issue de A.

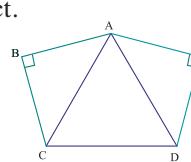


Déterminer les mesures principales des angles orientés  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$  et  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB})$ .

## Exercice 4

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ACD est un triangle équilatéral et EAD et ABC sont deux triangles rectangles isocèles.



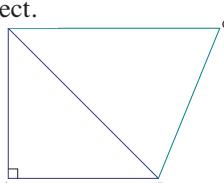
Déterminer les mesures principales des angles

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}), (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}), (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CD}) \text{ et } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}).$$

## Exercice 5

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABD est un triangle rectangle isocèle et BCD est un triangle isocèle en D tel que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



1. Déterminer les mesures principales des angles orientés  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}), (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BD}), (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$  et  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$ .

## Exercice 6

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCDEFGH un octogone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique de centre O.

1. Déterminer les mesures principales de chacun des angles orientés suivants

$$(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}), (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}), (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}) \text{ et } (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB}).$$

2. Déterminer les mesures principales de chacun des angles orientés suivants.

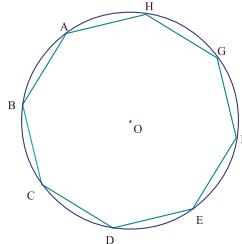
$$(2\overrightarrow{OE}, 3\overrightarrow{OD}), (\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}, 4\overrightarrow{OF}) \text{ et } (-\overrightarrow{OB}, \frac{3}{4}\overrightarrow{OF}).$$

3. a. Citer deux bases orthonormées directes.

b. Citer deux bases orthonormées indirectes.

4. Calculer  $\det(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG})$ ,  $\det(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH})$ ,

$\det(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA})$ ,  $\det(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE})$ ,  $\det(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE})$ .



## Exercice 7

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit trois points A, B et C du plan et une droite  $\Delta$ .

1. a. Construire les points A', B' et C' symétriques respectifs des points A, B et C par rapport à  $\Delta$ .

b. Comparer  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ .

2. On suppose que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  est une base orthonormée directe. Que peut-on dire de  $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ ?

## Exercice 8

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A, B et C trois points distincts. Soit O et O' deux points du plan et t la translation de vecteur  $\overrightarrow{OO'}$ .

1.a. Construire les points A', B' et C' images respectives de A, B et C par t.

b. Comparer  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ .

2. On suppose que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  est une base orthonormée directe. Que peut-on dire de  $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ ?

## Exercice 9

Le plan est orienté dans le sens direct.

ABCD est un carré de centre I et de côté a.

1. Donner les mesures principales des angles orientés  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ ,  $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA})$ ,  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ .

2. Calculer en fonction de a les déterminants  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ ,  $\det(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\det(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA})$ ,  $\det(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC})$ .

## Exercice 10

Le plan est orienté dans le sens direct.

ABCD est un parallélogramme tel que la mesure principale de  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  est égale à  $\alpha$ .

Déterminer les mesures principales de chacun des angles orientés  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA})$ ,  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$  et  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ .

## Exercice 11

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un cercle  $\mathcal{C}$  de centre O et un point A de  $\mathcal{C}$ .

1. Placer le point M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

Pour tout entier naturel n, on considère le point  $M_n$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}_n) \equiv n \frac{\pi}{6} [2\pi]$ .

2. Placer les points  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_{10}$ .

3. Pour quelles valeurs de n, les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OM}_n$  sont-ils colinéaires ?

4. Pour quelles valeurs de n, les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OM}_n$  sont-ils orthogonaux ?

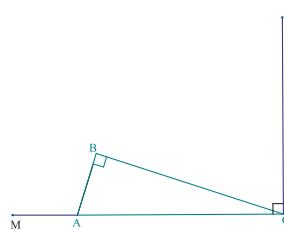
## Exercice 12

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère le triangle ABC rectangle en B et tel que

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{2\pi}{5} [2\pi].$$

On suppose de plus que les droites (AC) et (NC) sont perpendiculaires et que  $AB = AM$  et  $CB = CN$ .

1. a. Déterminer  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})$  et  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN})$ .
- b. En déduire que les points M, B et N sont alignés.
2. Reprendre la question 1. lorsque  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha [2\pi]$  ( $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ).



## Exercice 13

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Montrer que deux hauteurs d'un triangle sont perpendiculaires si et seulement si le triangle est rectangle.

On considère trois droites  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  et  $\mathcal{D}''$  concourantes en un point H.

2. On suppose que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont perpendiculaires et on considère un point A de  $\mathcal{D}$  distinct de H.

Construire un triangle de sommet A dont les hauteurs sont les droites  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  et  $\mathcal{D}''$ .

3. On suppose que les droites  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  et  $\mathcal{D}''$  sont deux à deux non perpendiculaires, soit A un point de  $\mathcal{D}$  distinct de H.

Construire un triangle de sommet A dont les hauteurs sont les droites  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  et  $\mathcal{D}''$ .

## Exercice 14

Le plan est orienté dans le sens direct.

A et B sont deux points distincts.

Construire l'ensemble des points M du plan tels que.

a.  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$  ; b.  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{27\pi}{4} [2\pi]$ .

## Exercice 15

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit EFG un triangle et  $\mathcal{C}$  son cercle circonscrit.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que  $(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{EF}) \equiv (\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EF}) [2\pi]$ .

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que  $(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF}) \equiv (\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EF}) [2\pi]$ .

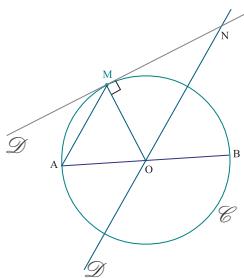
## Exercice 16

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de diamètre  $[AB]$  et  $M$  un point de  $\mathcal{C}$  distinct de  $A$  et  $B$ . Soit  $\mathcal{D}$  la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$  et  $\mathcal{D}'$  la droite parallèle à  $(AM)$  passant par  $O$ .

Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  se coupent en  $N$ .

1. Montrer que  $(MN, MB) \equiv (ON, OB)[2\pi]$ .
2. En déduire que  $N$  appartient au cercle passant par  $O, M$  et  $B$ .
3. Montrer que la droite  $(BN)$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $B$ .

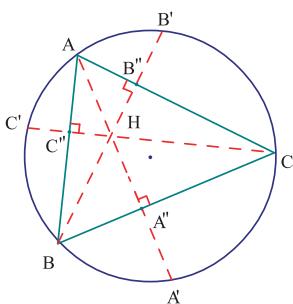


## Exercice 17

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle inscrit dans le cercle  $\mathcal{C}$  et  $H$  est son orthocentre. Les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont les symétriques de  $H$  respectivement par rapport aux droites  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$ .

1. Montrer que les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont des points de  $\mathcal{C}$ .
2. a. Montrer que  $(BB', BC) \equiv (AC, AA')[2\pi]$ .
- b. En déduire la bissectrice de l'angle  $\widehat{B'C'A'}$ .
3. Déterminer les bissectrices des angles  $\widehat{B'A'C'}$  et  $\widehat{A'B'C'}$ .
4. On désigne par  $A''$ ,  $B''$  et  $C''$  les pieds des hauteurs du triangle  $ABC$  issues respectivement de  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Déterminer le centre du cercle inscrit au triangle  $A''B''C''$ .



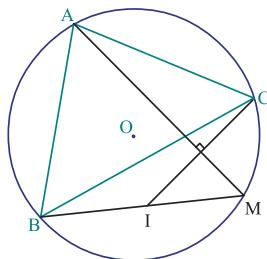
## Exercice 18

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $ABC$  un triangle isocèle de sommet principal  $A$  et  $\mathcal{C}$  son cercle circonscrit de centre  $O$ .

On considère un point  $M$  de  $\mathcal{C}$  distinct de  $A$  et  $B$ ; la perpendiculaire à  $(AM)$  passant par  $C$  coupe  $(BM)$  en  $I$ .

1. a. Montrer que  $2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}) \equiv 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IC})[2\pi]$ .
- b. En déduire que  $2(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}) \equiv 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$ .
2. Montrer que  $2(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$ .
3. a. Soit  $N$  un point du cercle de centre  $A$  et de rayon  $AB$  distinct de  $B$  et de  $C$ . Montrer que  $2(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv 2(\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC})[2\pi]$ .
- b. En déduire que  $AI = AB$ .



## Exercice 19

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  et  $A, B$  deux points de  $\mathcal{C}$  non diamétralement opposés. On désigne par  $\alpha$  la mesure principale de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ . Soit  $M$  un point de  $\mathcal{C}$  distinct de  $A$  et de  $B$ .

1. a. On suppose que  $M$  est un point de  $\widehat{AB}$ . Montrer que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi - \frac{\alpha}{2}[2\pi]$ .
- b. On suppose que  $M$  est point de  $\widehat{BA}$ . Montrer que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\alpha}{2}[2\pi]$ .
2. On désigne par  $I$  le centre du cercle inscrit dans le triangle  $AMB$ .  
Exprimer  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$  en fonction de  $\alpha$ .
3. Déterminer l'ensemble décrit par le point  $I$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{C}$  privé des points  $A$  et  $B$ .
4. a. Construire cet ensemble lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .
- b. Construire cet ensemble lorsque  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ .

# Avec l'ordinateur

## Droite de Simpson

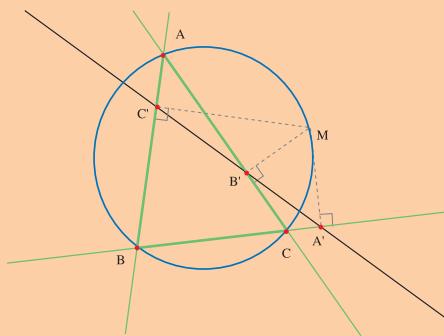
On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle C, et M un point du plan.

On désigne par A', B' et C' les projetés orthogonaux du point M respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB).

On se propose dans cette séquence, d'étudier les positions des points A', B' et C' lorsque M varie.

### Partie A.

1. Construire un triangle ABC et son cercle circonscrit.
2. Placer un point M et construire ses projets orthogonaux A', B' et C' respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB).
3. En faisant varier le point M, observer les variations de la figure. On pourra mettre en évidence des positions des configurations particulières.
  - M est confondu avec l'un des points A, B ou C.
  - Un des points A', B', C' est confondu avec un des points A, B, C.
4. Quelle conjecture peut-on formuler sur la position de M pour que les points A', B' et C' soient alignés ?



### Partie B

1. On suppose que  $C' \neq B$ .
  - a) Justifier que les points M, B, A' et C' sont situés sur un même cercle que l'on déterminera.
  - b) En déduire que  $(\widehat{A'C'}, \widehat{A'M}) = (\widehat{BA}, \widehat{BM}) + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. Justifier de même les points M, C, B' et A' sont cocycliques. En déduire que

$$(\widehat{A'M}, \widehat{A'B'}) = (\widehat{CM}, \widehat{CA}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

En déduire une preuve de la conjecture faite dans la partie A.

# Math – culture

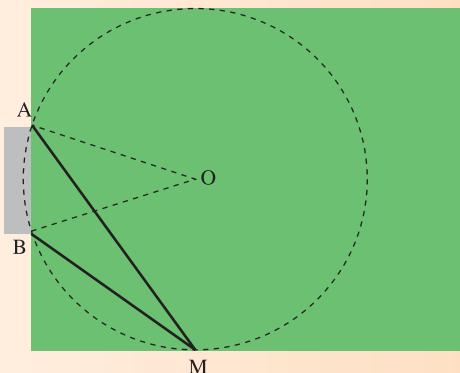


Les pèlerins tournent autour de la Kaâba dans le sens trigonométrique.



Un joueur de football s'apprête à chouter le ballon en se déplaçant le long de la ligne de touche.

Pour maximaliser l'angle de tir  $\widehat{AMB}$ , il faut maximaliser l'angle  $\widehat{AOB}$  et par suite minimiser la distance OA avec la contrainte que le cercle de centre O et de rayon OA rencontre la ligne.



Math – culture

# Chapitre 3

## Trigonométrie

*" Il n'y a pas de voie royale pour accéder au temple de la géométrie. "*

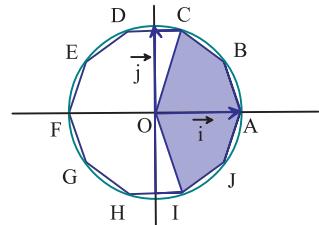
*Euclide*

## Pour commencer

### Activité 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on a représenté le décagone régulier ABCDEFGHIJ.

1. Donner la mesure principale de chacun des angles  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) ; (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) ; (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OG}) ; (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) ; (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ})$ .
2. Donner une valeur approchée à 0.001 près, par défaut, des coordonnées de chacun des sommets du décagone.
3. Donner une valeur approchée à 0.001 près, par défaut, de l'aire de la partie colorée.



### Activité 2

1. Construire dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , un octogone régulier ABCDEFGH tel que  $A \in (O, \vec{i})$ .
2. Donner une valeur approchée à 0.001 près, par défaut, des coordonnées de chacun des sommets de ABCDEFGH.
2. Donner une valeur approchée à 0.001 près, par défaut, de l'aire de l'octogone.

### Activité 3

Recopier puis compléter le tableau ci-dessous.

Mesure en radian de $\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\cos \alpha$									
$\sin \alpha$									

## 1. Cosinus et sinus d'un réel

### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique de centre O.

1. Construire dans chacun des cas ci-dessous le point M du cercle  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} &\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] ; \quad \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] ; \quad \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \frac{8\pi}{3}[2\pi] ; \\ \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} &\equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] ; \quad \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \frac{12\pi}{4}[2\pi] ; \quad \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv -\frac{23\pi}{6}[2\pi] ; \\ \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} &\equiv \frac{26\pi}{4}[2\pi] ; \quad \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv -\frac{13\pi}{2}[2\pi] ; \quad \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv -\frac{19\pi}{4}[2\pi]. \end{aligned}$$

2. Déterminer, dans chacun des cas ci-dessus, les coordonnées cartésiennes du point M.

### Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $\theta$  un réel et M le point du cercle trigonométrique de centre O tel que  $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \theta[2\pi]$ .

On appelle cosinus de  $\theta$ , et on note  $\cos\theta$ , l'abscisse de M.

On appelle sinus de  $\theta$ , et on note  $\sin\theta$ , l'ordonnée de M.

Pour tout entier k et tout réel  $\theta$ ,  $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$  et  $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$ .

### Activité 2

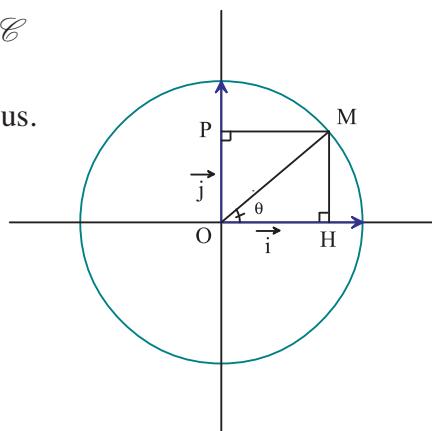
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique de centre O.

En utilisant la figure ci-contre, établir les propriétés ci-dessous.

### Propriétés

Pour tout réel  $\theta$ , on a

- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .
- $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  et  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ .
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$  et  $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ .

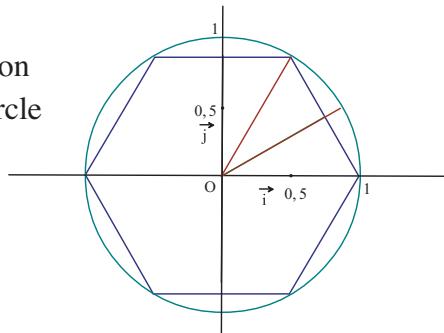


### Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère l'hexagone régulier de côté 1, inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.

Calculer le cosinus et le sinus de chacun des réels

$$-\frac{\pi}{3} ; -\frac{4\pi}{3} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{3} ; -\frac{2\pi}{3} ; \frac{7\pi}{6} .$$



### Activité 4

Utiliser la calculatrice (en mode radians) pour trouver une valeur approchée à  $10^{-1}$  près, du cosinus et sinus de chacun des réels  $2.3 ; -1.5 ; 12.4 ; 0.2 ; -0.4$ .

### Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique de centre O.

1 a. Représenter l'ensemble des points M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta [2\pi]$  et  $\sin \theta \leq 0$ .

b. Représenter l'ensemble des points M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta [2\pi]$  et  $\cos \theta \geq 0$ .

c. Représenter l'ensemble des points M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta [2\pi]$ ,  $\sin \theta \leq 0$  et  $\cos \theta \geq 0$ .

2. Résoudre dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ , puis dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ ,

$$\sin \theta \leq 0 ; \cos \theta \geq 0 ; \begin{cases} \sin \theta \leq 0 \\ \cos \theta \geq 0 \end{cases} .$$

### Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique de centre O.

1 a. Représenter l'ensemble des points M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta [2\pi]$  et  $0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$ .

b. Représenter l'ensemble des points M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta [2\pi]$  et  $\frac{1}{2} < \cos \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

2. Résoudre dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ , puis dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ ,

$$0 < \sin \theta < \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

## Activité 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique de centre O.

Dans la figure ci-contre, M est un point du cercle

$\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \theta [2\pi]$ ,  $\theta$  appartenant à  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  et

T est le point de coordonnées  $(1, 0)$ .

La tangente au cercle  $\mathcal{C}$  en M coupe l'axe des abscisses en A et la tangente au cercle  $\mathcal{C}$  en T coupe la droite  $(AM)$  en D.

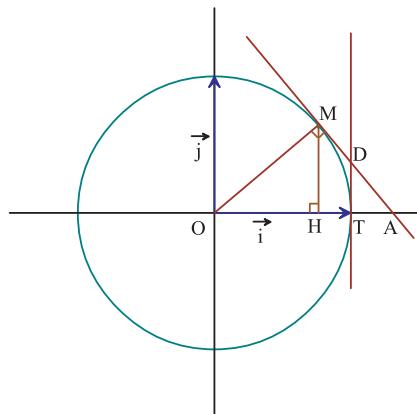
1.a. Calculer OA et OH en fonction de  $\theta$ .

b. En déduire AH et AT en fonction de  $\theta$ .

2.a. Montrer que  $TD = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$ .

b. En déduire l'aire du quadrilatère OTDM.

3. Pour quelle valeur de  $\theta$ , cette aire est-elle maximale ?



## Activité 8 (Angles associés)

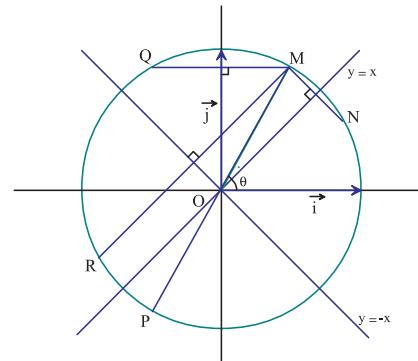
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Dans la figure ci-contre, M est un point du cercle

trigonométrique  $\mathcal{C}$  de centre O tel que  $(\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \theta [2\pi]$ .

Les points P, Q, N et R sont les symétriques respectifs de M par rapport à O, à l'axe des ordonnées, à la droite d'équation  $y = x$  et à la droite d'équation  $y = -x$ .

Montrer chacune des formules ci-dessous.



Pour tout réel  $\theta$ , on a

- $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$  ;  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ .
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$  ;  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ .
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$  ;  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ .
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$  ;  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$ .

## Activité 9

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x) + \sin(x - \pi) + \cos(\pi - x) ;$$

$$B = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi - x) + \sin(\pi + x) .$$

## 2. Tangente d'un réel

### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct et M est le point du cercle trigonométrique de centre O tel que  $(\widehat{i}, \widehat{OM}) \equiv \theta [2\pi]$ .

- Déterminer les réels  $\theta$  de l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  tels que  $\cos \theta = 0$ .
- En déduire tous les réels  $\theta$  tels que  $\cos \theta = 0$ .

### Définition

On appelle tangente de  $\theta$ , le réel noté  $\tan \theta$  et défini par  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ , pour tout réel  $\theta$  tel que  $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

### Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$  et  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique de centre O et  $\theta$  est un réel tel que  $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Soit M un point du cercle  $\mathcal{C}$  n'appartenant pas à l'axe des ordonnées tel que  $(\widehat{OI}, \widehat{OM}) \equiv \theta [2\pi]$ . et T le point d'intersection de la droite  $(OM)$  avec la tangente au cercle  $\mathcal{C}$  en I.

- Calculer  $\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OT})$ .
- En déduire l'ordonnée de T à l'aide de  $\theta$ .

### Activité 3

Montrer les propriétés suivantes :

Pour tout réel  $\theta$  tel que  $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , on a

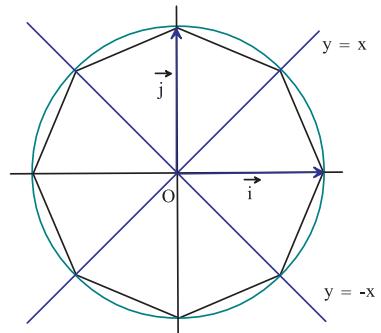
- $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$ .
- $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ .

### Activité 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère l'octogone régulier, inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.

Calculer la tangente de chacun des réels

$$-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}, -\frac{13\pi}{4}.$$



## Activité 5

Utiliser la calculatrice en mode radians pour résoudre dans  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  les équations suivantes :  
 $\tan \theta = 5$  ;  $\tan \theta = -1.8$  ;  $\tan \theta = 8$  ;  $\tan \theta = -10$ .

## Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique de centre O.

- 1.a. Représenter l'ensemble des points M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \theta [2\pi]$  et  $\tan \theta = 0$ .  
b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $\tan \theta = 0$ .
- 2.a. Représenter l'ensemble des points M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \theta [2\pi]$  et  $\tan \theta = 1$ .  
b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $\tan \theta = 1$ .
- 3.a. Représenter l'ensemble des points M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \theta [2\pi]$  et  $\tan \theta = -1$ .  
b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $\tan \theta = -1$ .
- 4.a. Représenter l'ensemble des points M de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \theta [2\pi]$  et  $\tan \theta \geq 0$ .  
b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $\tan \theta \geq 0$ .

## 3. Coordonnées polaires

### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la droite  $\Delta : y = x$ .

On désigne par E le point de  $\Delta$ , d'abscisse positive et tel que  $OE = 2$ .

On désigne par F le point de  $\Delta$ , d'abscisse négative et tel que  $OF = 2$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{OE} = 2\cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + 2\sin\frac{\pi}{4}\vec{j}$ .
2. Montrer que  $\overrightarrow{OF} = 2\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + 2\sin\left(-3\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}$ .
3. On considère le point K(2, 1) et on note  $(\vec{i}, \widehat{\vec{OK}}) \equiv \theta [2\pi]$ .
  - a. Calculer OK et montrer que  $\overrightarrow{OK} = \sqrt{5}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$ .
  - b. Donner les valeurs de  $\cos\theta$  et  $\sin\theta$ .

### Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,

Soit M un point du plan distinct de O. On désigne par m le point de la demi-droite  $[OM)$  tel que  $Om = 1$  et  $\theta$  une mesure de l'angle orienté  $(\vec{i}, \vec{Om})$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{OM} = OM\overrightarrow{Om}$ .
2. En déduire que  $\overrightarrow{OM} = OM(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$ .
3. Soit un réel  $r > 0$  et  $\theta$  appartenant à  $]-\pi, \pi]$ .

Montrer qu'il existe un unique point M du plan tel que  $\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$ .

## Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout point M du plan distinct de O, il existe un unique couple  $(r, \theta)$  tel que  $r > 0$ ,  $\theta$  appartient à  $]-\pi, \pi]$  et  $\overrightarrow{OM} = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$ .

Le couple  $(r, \theta)$  appelé coordonnées polaires de M, est tel que  $r = OM$  et  $\theta$  est la mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ .

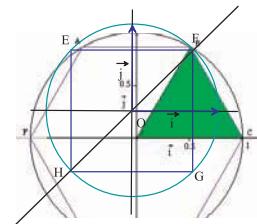
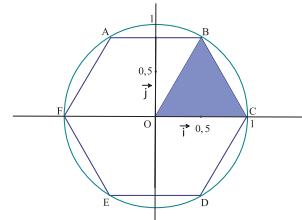
Réiproquement, pour tout couple  $(r, \theta)$  tel que  $r > 0$  et  $\theta$  appartient à  $]-\pi, \pi]$ , il existe un unique point M du plan tel que  $\overrightarrow{OM} = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$ .

M est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon r et de la demi-droite  $[OA)$  telle que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) \equiv \theta [2\pi]$ .

### Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Dans la figure ci-contre ABCDEF est un hexagone régulier. Donner les coordonnées polaires de chacun des points A,B,C,D, E et F.
- Dans la figure ci-contre EFGH est un carré et K est le milieu de [FG]. Donner les coordonnées polaires des points F, G et K.



### Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit H le point défini par  $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) \equiv \theta [2\pi]$  et  $OH = 2$ .

Donner une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à  $(OH)$  en H.

### Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires  $\left(r, \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $r > 0$ .

Représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaire  $(2, \theta)$ ,  $\theta$  appartenant à  $]-\pi, \pi]$ .

### Activité 6

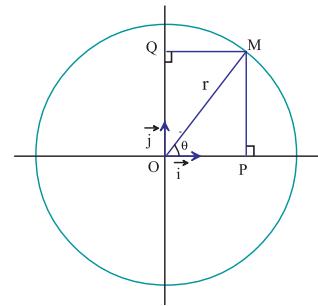
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère un point M(x, y) distinct de O et on note

$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta [2\pi]$ .

On désigne par  $(r, \theta)$ , les coordonnées polaires du point M.

Montrer  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .



## Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $M$  un point du plan distinct de  $O$ , de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  et de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Alors

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

## Activité 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $A$  un point du plan n'appartenant pas à l'axe des ordonnées. On suppose que  $OA = 1$  et on note  $\widehat{(\vec{i}, OA)} \equiv \theta [2\pi]$ .

- Montrer qu'un point  $M$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  appartient à la droite  $(OA)$  si et seulement si  $y = x \tan \theta$ .
- Soit  $C$  le point de coordonnées cartésiennes  $(2, 0)$ .

Donner, en fonction de  $\theta$ , une équation de la droite parallèle à  $(OA)$  passant par  $C$ .

## 4. Cosinus et sinus d'un angle orienté

### Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls. On désigne par  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$  et  $\widehat{\sin(\vec{u}, \vec{v})}$  respectivement le cosinus et le sinus d'une mesure quelconque de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

## Activité 1

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct,  $\vec{u}$  un vecteur non nul de composantes  $(a, b)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et  $M$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ .

- Soit  $\vec{u}'$  le vecteur vérifiant  $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$  et  $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

On se propose de déterminer les composantes  $(x, y)$  du vecteur  $\vec{u}'$ . Soit  $N$  tel que  $\vec{u}' = \overrightarrow{ON}$ .

- Montrer que  $\widehat{(\vec{i}, \vec{u}')} \equiv \frac{\pi}{2} + \widehat{(\vec{i}, \vec{u})} [2\pi]$ .

- Montrer  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et que  $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

- En déduire que  $x = -b$  et  $y = a$ .

- Soit  $\vec{v}$  un vecteur de composantes  $(a', b')$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Montrer que  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ab' - a'b$ .

## Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

1. Montrer que  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$  et  $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\sin(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ .

2. Montrer que  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ .

3. Soit  $\vec{w}$  un vecteur non nul tel que  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|$  et  $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

a. Montrer que  $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) [2\pi]$ .

b. En déduire que  $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ .

4. On désigne par  $(x, y)$  et  $(x', y')$  les composantes respectives des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Donner les expressions de  $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  et  $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  en fonction de  $x, y, x'$  et  $y'$ .

## Propriétés

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls, de composantes  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Alors

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

## Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les points  $A(1, -2)$  ;  $B(4, 1)$  ;  $C(-6, 5)$ .

1. Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  radians près de la mesure principale de chacun des angles  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  ;  $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC})$  ;  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$  ;  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ .

2. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à  $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ .

3. Soit D le point du plan tel que ABCD soit un parallélogramme.

Montrer que l'aire du parallélogramme ABCD est égale à  $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$ .

## Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On se propose de montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les coordonnées des sommets sont toutes entières.

On désigne par ABC un triangle équilatéral de côté a.

1. a. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à  $\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$ .
- b. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ .
2. On suppose que les coordonnées de chacun des points A, B et C sont entières.
  - a. Montrer que  $\left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$  est entier.
  - b. Conclure.

## 5. Formules de transformation

### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les points A et B tels que  $OA = OB = 1$ .

On désigne par a et b des mesures respectives des angles orientés  $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$  et  $(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$ .

1. Donner les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$ .

2. Montrer que  $b - a$  est une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

3. En déduire les formules suivantes :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b ; \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

4. En remplaçant b par  $-b$  dans les formules précédentes, montrer que

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b ; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

5. En prenant  $b = a$  dans les formules précédentes, montrer que

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a ; \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

### Activité 2

1. En remarquant que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , calculer  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .
2. En déduire  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$ , ainsi que  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$ .
3. Calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$  ;  $\cos \frac{3\pi}{8}$  et  $\sin \frac{3\pi}{8}$  ;  $\cos \frac{5\pi}{8}$  et  $\sin \frac{5\pi}{8}$ .

### Activité 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $(a, b)$  un couple de réels tels que  $a^2 + b^2 = 1$  et A le point du plan de coordonnées  $(a, b)$ . On désigne par  $\varphi$  une mesure de l'angle orienté  $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ .  
Montrer que pour tout réel x,  $a \cos x + b \sin x = \cos(x - \varphi)$ .
2. En déduire que pour tout couple de réels  $(c, d) \neq (0, 0)$  et tout réel x,

$$c \cos x + d \sin x = \sqrt{c^2 + d^2} \cos(x - \varphi), \text{ avec } \cos \varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}.$$

## Activité 4

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que  $BC = 1$  et

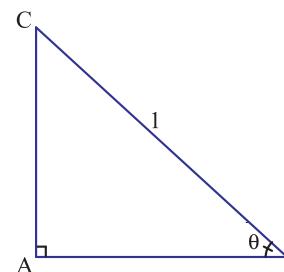
$$\widehat{ABC} = \theta, \theta \text{ appartenant à } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

1. a. Calculer en fonction de  $\theta$ , le périmètre du triangle ABC.

b. En déduire la valeur de  $\theta$  pour laquelle le périmètre du triangle ABC est maximal.

2. a. Calculer en fonction de  $\theta$ , l'aire du triangle ABC.

b. En déduire la valeur de  $\theta$  pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.



## 6. Lignes trigonométriques

### Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on désigne par  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique de centre O.

Soit a et b deux réels de  $]-\pi, \pi]$ . On se propose de trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que  $\sin a = \sin b$ .

1. a. On suppose que  $\sin a = 1$ .

Enoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que  $\sin a = \sin b$ .

b. On suppose que  $\sin a = -1$ .

Enoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que  $\sin a = \sin b$ .

2. On suppose que  $\sin a$  est un réel de  $]-1, 1[$ .

On désigne par M et N les points du cercle  $\mathcal{C}$  tels que  $(\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}}) \equiv a [2\pi]$  et

$(\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{ON}}) \equiv b [2\pi]$ .

Montrer que  $\sin a = \sin b$ , si et seulement si, M et N sont soit confondus soit symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

### Propriété

Soit a et b deux réels.

$\sin a = \sin b$ , si et seulement si,  $a = b + 2k\pi$  ou  $a = \pi - b + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Activité 2

Soit c et d deux réels.

En utilisant l'égalité  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , montrer que  $\cos c = \cos d$ , si et seulement si,  $c = d + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Propriété

Soit a et b deux réels.

$\cos a = \cos b$ , si et seulement si,  $a = b + 2k\pi$ , ou  $a = -b + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Activité 3

Soit  $a$  et  $b$  deux réels de  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

On se propose de trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur  $a$  et  $b$  pour que  $\tan a = \tan b$ .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on désigne par  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique de centre  $O$  et on note  $M$  et  $N$  deux points de  $\mathcal{C}$  tels que

$$\widehat{(\vec{i}, OM)} \equiv a[2\pi] \text{ et } \widehat{(\vec{i}, ON)} \equiv b[2\pi].$$

Montrer que  $\tan a = \tan b$ , si et seulement si,  $M$  et  $N$  sont confondus.

#### Propriété

Soit  $a$  et  $b$  deux réels de  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ entier} \right\}$ .

$\tan a = \tan b$ , si et seulement si,  $a = b + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 7. Équations $\sin(x + a) = \alpha$ . Inéquations $\sin(x + a) \leq \alpha$ .

### Activité 1

Dans les équations suivantes,  $x$  est l'inconnue réelle.

$$(E_0) : \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$(E_1) : \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

1. Déterminer les solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $(E_0)$ .

2. a. Montrer que  $a$  est solution de  $(E_0)$  si et seulement si  $a + \frac{\pi}{3}$  est solution de  $(E_1)$ .  
b. En déduire les solutions dans  $\mathbb{R}$  de  $(E_1)$ .

#### Propriété

Soit  $\alpha$  un réel de  $[-1, 1]$ .

$x_0$  est solution de l'équation  $\sin x = \alpha$ , si et seulement si,  $x_0 - a$  est solution de l'équation  $\sin(x + a) = \alpha$ .

### Activité 2

Dans les équations suivantes,  $x$  est l'inconnue réelle.

$$(E_0) : \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$(E_1) : \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

1. Déterminer les solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $(E_0)$ .
2. a. Montrer que  $a$  est solution de  $(E_0)$  si et seulement si  $a - \frac{\pi}{4}$  est solution de  $(E_1)$ .  
b. En déduire les solutions dans  $\mathbb{R}$  de  $(E_1)$ .

### Propriété

Soit  $\alpha$  un réel de  $[-1, 1]$ .

$x_0$  est solution de l'équation  $\sin x = \alpha$ , si et seulement si,  $x_0 - a$  est solution de l'équation  $\cos(x + a) = \alpha$ .

### Activité 3

Dans les inéquations suivantes,  $x$  est l'inconnue réelle.

$$(E_0) : \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(E_1) : \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $(E_1)$ .
2. a. Montrer que  $a$  est solution de  $(E_0)$  si et seulement si  $a - \frac{\pi}{4}$  est solution de  $(E_1)$ .  
b. En déduire les solutions dans  $\mathbb{R}$  de  $(E_1)$ .

## Mobiliser ses compétences

### Situation 1

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que  $BC = a$  et  $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$ . La bissectrice de l'angle  $\widehat{ABC}$  coupe  $[AC]$  en D.

- Montrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles.

En déduire que  $AD = BC = a$ .

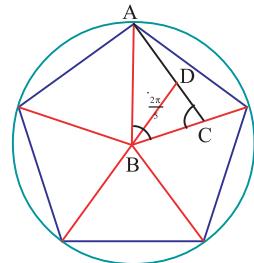
- a. Montrer que  $AB = 2a \cos \frac{\pi}{5}$  et  $CD = 2a \cos \frac{2\pi}{5}$ .

b. En déduire que  $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ .

- Montrer que  $BC = BD \cos \frac{\pi}{5} + CD \cos \frac{2\pi}{5}$ . En déduire que  $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$ .

- Calculer  $\cos \frac{\pi}{5}$  et  $\cos \frac{2\pi}{5}$ .

- Calculer les longueurs des côtés du pentagone régulier et du décagone régulier inscrits dans un cercle de rayon 2.



### Situation 2

Soit un réel  $\alpha$ .

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on désigne par  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique de centre O.

On désigne par A et B les points de  $\mathcal{C}$  tels que

$$(\vec{i}, \widehat{OA}) \equiv \alpha [2\pi] \quad (\vec{i}, \widehat{OB}) \equiv \alpha + \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

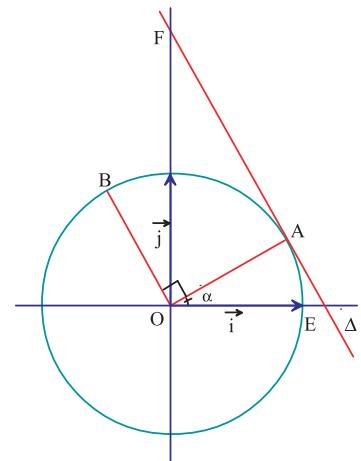
Déterminer les coordonnées polaires du point A.

- Montrer qu'une équation de  $\Delta$  est  $(\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y = 1$ .

- On suppose que  $\alpha$  est un réel de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

a. Calculer les coordonnées des points d'intersection E et F de  $\Delta$  respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

b. Montrer que l'aire du triangle OEF est égale à 1, si et seulement si,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .



# QCM – VRAI – FAUX

## QCM

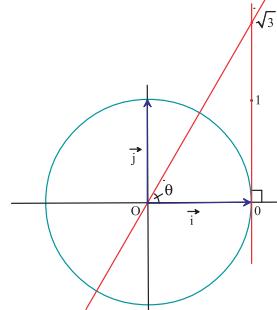
Cocher la réponse exacte.

1. Soit  $a$  un réel.  $\cos\left(-\frac{3\pi}{2} - a\right) =$

- $\sin a$         $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$         $0$ .

2. Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé direct le cercle trigonométrique de centre  $O$ .  
Alors  $\theta$  est congru modulo  $2\pi$  à

- $\frac{\pi}{6}$         $\frac{\pi}{3}$         $\pi$ .

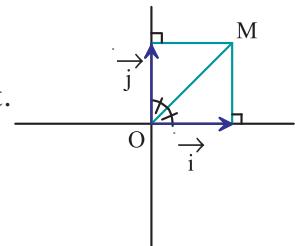


3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  tels que  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 3\frac{\pi}{4}[2\pi]$  et  $AB = AC = 1$ .
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$         $3\sqrt{2}$         $6$ .

4. Dans la figure ci-contre,  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé direct.

Les coordonnées polaires de  $M$  sont

- $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$       $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$       $\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ .



5. Soit  $x$  un réel.  $\sqrt{3} \cos x - \sin x =$

- $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$       $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$       $2\cos x + 2\cos\frac{\pi}{6}$ .

## VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Pour que  $x$  soit une solution de l'équation  $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$  il suffit que  $x - \frac{\pi}{6}$  soit une solution de l'équation  $\cos x = 1$ .

2. Si  $\cos x = \frac{1}{2}$  alors  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3. Pour que les coordonnées cartésiennes de  $M$  soient  $(1, 1)$  il faut que les coordonnées polaires de  $M$  soient  $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ .

4. Si  $x \neq -\frac{\pi}{3}$  alors  $\tan x \neq -\sqrt{3}$ .

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ , on considère un point  $A$  n'appartenant pas à la droite  $(OJ)$ .

Si  $\widehat{IOA} = \theta$  (en radians), alors la droite  $(OA)$  a pour équation  $y = (\tan\theta) x$ .

# Exercices et Problèmes

## Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Représenter sur le cercle trigonométrique, l'ensemble des points M tels que

$$(\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \theta [2\pi] \text{ et } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta \in ]-\pi, \pi].$$

2. Résoudre dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ , puis dans

$$\text{l'intervalle } ]0, 2\pi], -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Représenter sur le cercle trigonométrique, l'ensemble des points M tels que

$$(\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \theta [2\pi] \text{ et } -\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta \in ]-\pi, \pi].$$

2. Résoudre dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ , puis dans

$$\text{l'intervalle } ]0, 2\pi], -\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Représenter sur le cercle trigonométrique, l'ensemble des points M tels que

$$(\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \theta [2\pi] \text{ et } \tan \theta < \sqrt{3}.$$

2. Résoudre dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ , puis dans

$$\text{l'intervalle } ]0, 2\pi], \tan \theta < \sqrt{3}.$$

## Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ .

a.  $\begin{cases} \theta = \frac{3\pi}{4}, \\ r \in [2, 5]. \end{cases}$

b.  $\begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{6}, \\ r \in [\sqrt{2}, 4]. \end{cases}$

c.  $\begin{cases} \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right], \\ r = 4. \end{cases}$

d.  $\begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right], \\ r = \sqrt{3}. \end{cases}$

## Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Déterminer et représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires  $(r, -\frac{\pi}{3})$ ,  $r > 0$ .

2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires  $(4, \theta)$ ,  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .

## Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Déterminer les coordonnées polaires du point M défini par ses coordonnées cartésiennes.

- a.  $M(1, -\sqrt{3})$    b.  $M(4, -4)$    c.  $M(3, 0)$   
d.  $M(0, \sqrt{2})$    e.  $M(\sqrt{3}, 1)$ .

## Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère le carré OABC de centre S tel que les coordonnées cartésiennes respectives de A et C sont  $(1, \sqrt{3})$  et  $(-\sqrt{3}, 1)$ .

1. Faire une figure.  
2. Déterminer les coordonnées polaires de chacun des points A, C, B et S.

## Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les points A, B, C, D, E, F et G de coordonnées polaires respectives

$$\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), \left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\left(4, \frac{\pi}{2}\right), \left(2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ et } \left(2, \frac{5\pi}{6}\right).$$

1. Placer les points A, B, C, D, E, F et G.  
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B, C, D, E, F et G.  
3. Montrer que ces points se trouvent sur un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

## Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit A le point de coordonnées polaires  $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$  et les points B et C tels que  $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$ .

1. Placer les points A, B et C dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
2. Déterminer les coordonnées polaires de chacun des points B et C.

## Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit M le point de coordonnées polaires  $\left(4, -\frac{\pi}{5}\right)$ .

Déterminer les coordonnées polaires de chacun des points ci-dessous.

- a. E le symétrique de M par rapport à l'axe  $(O, \vec{i})$ .
- b. F le symétrique de M par rapport à l'axe  $(O, \vec{j})$ .
- c. G le symétrique de M par rapport au point O.

## Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit S et T les points de coordonnées polaires

respectives  $(3, 0)$  et  $\left(3, \frac{4\pi}{7}\right)$ .

Soit E le point tel que OSET est un losange.

1. Déterminer les coordonnées polaires du point E.
2. Calculer l'aire du losange OSET.

## Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Placer les points A et B de coordonnées polaires

respectives  $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$  et  $\left(5, -\frac{3\pi}{2}\right)$ .

2. Déterminer une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

3. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A et B.

4. Calculer la distance AB.

## Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les points A, B et C de coordonnées

polaires respectives  $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\left(5, \frac{3\pi}{4}\right)$  et  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ .

1. a. Déterminer les coordonnées cartésiennes de chacun des points A, B et C.

b. En déduire une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la mesure principale de l'angle orienté  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

2. Calculer l'aire du triangle ABC.

## Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on désigne par ABCD un losange tel que la mesure principale de  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  est négative ;  $\widehat{BAD}$  est obtus et  $\sin \widehat{BAD} = \frac{3}{5}$ .

1. Calculer  $\sin(\widehat{AB}, \widehat{AD})$  et  $\cos(\widehat{AB}, \widehat{AD})$ .

2. En déduire  $\sin(\widehat{BA}, \widehat{BC})$  et  $\cos(\widehat{BA}, \widehat{BC})$ .

## Exercice 15

L'ensemble des vecteurs du plan est muni d'une base orthonormée directe. On considère trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  tels que  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$  et  $(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$ .

Calculer le cosinus et le sinus de chacun des angles orientés ci-dessous.

$(\widehat{\vec{u}}, -\widehat{\vec{v}})$ ;  $(\widehat{\vec{u}}, 3\widehat{\vec{u}})$ ;  $(\widehat{\vec{v}}, \widehat{\vec{w}})$ ;  $(-\widehat{2\vec{w}}, -5\widehat{\vec{v}})$ .

## Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère le triangle ABC tel que  $AB = 5$ ,  $AC = 4$  et

$$\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}.$$

Calculer  $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ .

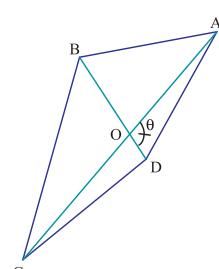
## Exercice 17

Dans la figure ci-contre ABCD est un quadrilatère dont les diagonales  $(AC)$  et  $(BD)$  se coupent en O.

On désigne par  $\theta$  la mesure en radians d'un des angles formé par les deux diagonales.

1. Montrer que l'aire S du quadrilatère ABCD est donnée par,

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \theta.$$



2. Déterminer les mesures à  $10^{-1}$  radians près, des angles formés par les diagonales d'un rectangle de longueur 8 et de largeur 6.

## Exercice 18

Soit  $x$  un réel.

1. Montrer que  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ .

## Exercice 19

1. Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$ .

2. Soit  $x$  un réel appartenant à

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ vérifiant } \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

a. Calculer  $\sin 2x$ .

b. En déduire  $x$ .

## Exercice 20

Soit  $x$  un réel appartenant à  $]-\pi, \pi]$ .

1. Déterminer  $x$  sachant que  $\sin x = \sin \frac{2\pi}{7}$  et  $\cos x < 0$ .

2. Déterminer  $x$  sachant que  $\cos x = \cos \frac{4\pi}{9}$  et  $\sin x > 0$ .

## Exercice 21

Résoudre dans  $[0, 2\pi[$ , chacune des équations ci-dessous.

a.  $\cos x = -\frac{1}{2}$

b.  $\cos x = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

c.  $\cos x = \cos 3x$

d.  $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ .

## Exercice 22

Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$ , chacune des équations ci-dessous.

a.  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b.  $\sin 2x = -1$

c.  $\sin 2x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

d.  $\sin 3x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ .

## Exercice 23

Résoudre dans  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  puis dans  $\mathbb{R}$ , chacune des équations ci-dessous.

a.  $\tan x = -\sqrt{3}$    b.  $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$    c.  $\tan x = -\tan(x + \pi) - 2$ .

## Exercice 24

Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  puis dans  $\mathbb{R}$ , chacune des inéquations ci-dessous.

a.  $\cos x < \frac{1}{2}$  ;   b.  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Exercice 25

Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  puis dans  $\mathbb{R}$ , chacune des inéquations ci-dessous.

a.  $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$    b.  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < 0$    c.  $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## Exercice 26

On considère  $A(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

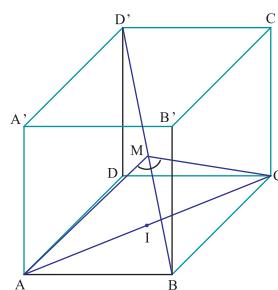
et  $B(x) = \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ .

1. Calculer  $A(x) + B(x)$  et  $A(x) - B(x)$ .

2. En déduire  $A(x)$  et  $B(x)$ .

## Exercice 27

Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête 1, et M est un point de la diagonale [BD'].



On note  $\widehat{AMC} = \alpha$ .

1. Montrer que le triangle AMC est isocèle en M et en

déduire que  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2AM}$ .

2. Montrer qu' $\alpha$  est maximale lorsque M est le projeté orthogonal de A sur (BD').

3. En déduire que la valeur maximale de  $\alpha$  vérifie

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Trouver cette valeur.

# Avec l'ordinateur

On considère l'équation  $\sin x + \cos x = k$ , où  $k$  est un réel donné.

On se propose dans cette séquence, d'illustrer et de prouver une résolution géométrique de cette équation à l'aide du logiciel cabri.

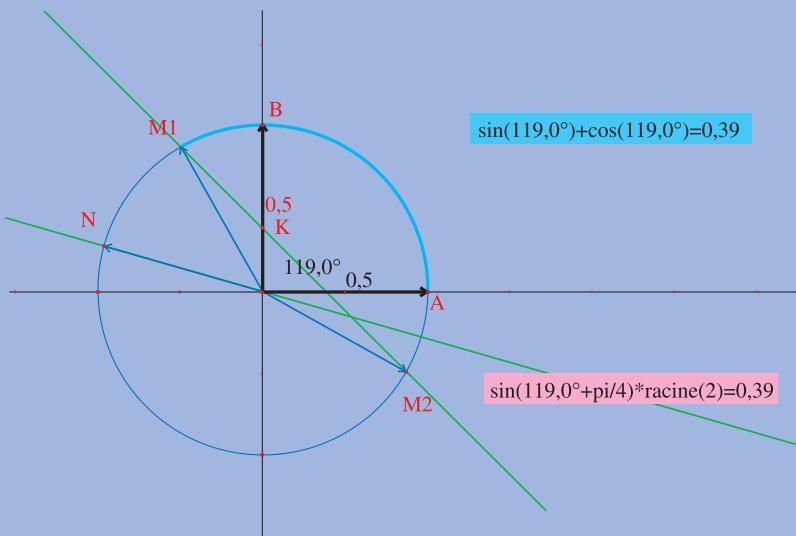
## Partie A

1. Après avoir montré les axes, tracer le cercle trigonométrique  $C$  et placer un point variable  $K$  sur l'axe des ordonnées ( on notera  $k$  son ordonnée).
2. Tracer la droite  $D_k$  parallèle à  $(AB)$  et passant par  $K$  où  $A(1, 0)$  et  $B(0, 1)$ .  
 $D_k$  coupe éventuellement  $C$  en deux points  $M_1$  et  $M_2$ .
3. Mesurer  $\widehat{AOM}_1$  ou  $\widehat{AOM}_2$ .
4. Déterminer les coordonnées de chacun des points  $K$ ,  $M_1$  et  $M_2$  puis à l'aide de la calculatrice, calculer  $\sin(\widehat{AOM}_1) + \cos(\widehat{AOM}_1)$  et comparer le résultat à l'ordonnée de  $K$ , en faisant varier  $K$  sur l'axe des ordonnées.
5. Justifier qu'un réel  $x_0$  est solution de l'équation  $\sin x + \cos x = k$ , si et seulement si, le point  $M_0$  du cercle trigonométrique associé à  $x_0$  est un point de la droite  $D_k$ .

## Partie B

On se propose de vérifier dans cette partie que l'équation  $\sin x + \cos x = k$  est équivalente à  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = k$ .

1. Placer le point  $N$  sur  $C$  tel que  $\left(\widehat{OM_1}, \widehat{ON}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$  ( $N$  est l'image de  $M_1$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ ).
2. Déterminer les coordonnées  $(x_N, y_N)$  de  $N$ , puis à l'aide de la calculatrice, calculer  $\sqrt{2}y_N$  et comparer le résultat à l'ordonnée de  $K$ , en faisant varier  $K$  sur l'axe des ordonnées.





L'une des tâches de la trigonométrie fut donc l'établissement de tables permettant le passage de la mesure des angles à celle des arcs et des cordes de cercles.

Al Khawarizmi (IX<sup>ème</sup> – X<sup>ème</sup> siècle) fut le premier mathématicien arabe à fournir les tables des sinus, améliorées plus tard par Nasreddine Al Tusi.

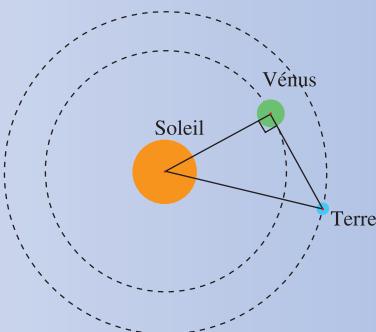
Juste après, Habash Al-Hassib, inventa la tangente.



Pour calculer les distances entre le Soleil et les planètes (en particulier la planète Vénus), il faut mesurer l'angle sous lequel on les voit. Quand les trois planètes forment un triangle rectangle en V, Copernic a mesuré l'angle  $\widehat{STV}$  et l'a trouvé égal à  $48^\circ$ .

Ainsi  $SV = ST \sin 48^\circ$ .

La distance de Vénus au Soleil est environ égale à 0,74 fois celle de la Terre au Soleil.



# Chapitre 4

## ROTATIONS

*" Le beau dans la géométrie est qu'il y a des étages de preuves et quelque chose de net et de sain dans toutes. "*

*Alain*

## Pour commencer

### Activité 1

Soit A et B deux points distincts du plan.

Soit M un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB).

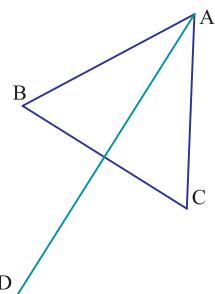
Identifier dans chacun des cas suivants une application du plan dans lui-même qui transforme M en M'.

1. MABM' est un parallélogramme.
2. AMBM' est un parallélogramme.
3. AMM' est un triangle rectangle isocèle tel que  $(\widehat{AM}, \widehat{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .
4. BMM' est un triangle équilatéral tel que  $(\widehat{MB}, \widehat{MM'}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
5. M' est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (M, 3).

### Activité 2

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral et D est le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

1. Quelle est l'image de B par la rotation directe de centre C et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  ?
2. Quelle est l'image de A par la rotation indirecte de centre B et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  ?
3. Peut-on trouver une rotation de centre A qui transforme B en D ? Justifier.



# Cours

## 1. Définitions

### 1.1 Définition d'une rotation

#### Activité 1

Soit  $O$  un point du plan orienté dans le sens direct et  $\theta$  un réel.

Montrer que pour tout point  $M$  distinct de  $O$ , il existe un point unique  $M'$  tel que  $OM' = OM$  et  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta [2\pi]$ .

#### Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $O$  un point du plan et  $\theta$  un réel.

On appelle rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ , l'application du plan dans lui même qui fixe le point  $O$  et qui à tout point  $M$  du plan distinct de  $O$ , associe le point  $M'$  tel que

$$\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

La rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$  est généralement notée  $R_{(O; \theta)}$ .

Le point  $O$  et le réel  $\theta$  sont dits les éléments caractéristiques de  $R_{(O; \theta)}$ .

#### Cas particuliers

Soit  $O$  un point du plan orienté dans le sens direct.

- La rotation de centre  $O$  et d'angle nul est l'identité du plan.
- La rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi$  est la symétrie centrale de centre  $O$ .

#### Vocabulaire

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\alpha$  un réel de l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ ,  $O$  un point du plan et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ .

- Si  $\alpha \geq 0$ , on dit que  $R$  est une rotation directe.
- Si  $\alpha < 0$ , on dit que  $R$  est une rotation indirecte.

#### Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $A$  et  $A'$  deux points distincts et  $\theta$  un réel différent de  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

1. a. On suppose que  $\theta \equiv \pi[2\pi]$ .

Montrer qu'il existe un unique point  $O$  tel que  $OA = OA'$  et  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) \equiv \pi[2\pi]$ .

b. Reprendre la question pour  $\theta$  différent de  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. En déduire qu'il existe une rotation unique d'angle  $\theta$  qui transforme  $A$  en  $A'$ .

3. Donner un procédé de construction du centre de cette rotation, lorsque  $\theta$  est un réel différent de  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Une rotation est parfaitement déterminée par la donnée de son angle et celle d'un point et son image.

### Activité 3

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré de centre I tel que  $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

Quel est le centre de la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  qui transforme A en D ?

### Activité 4

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un losange de centre I tel que  $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ .

1. Soit R la rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  qui transforme D en B. Quel est son centre ?

2. Soit  $R_1$  la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  qui transforme A en D et soit  $I'$  son centre.

a. Vérifier que  $I'$ , I, A et D sont sur un même cercle.

b. Construire le point  $I'$ .

3. Soit  $R_2$  la rotation d'angle  $\frac{\pi}{8}$  qui transforme C en B. Construire son centre J.

## 1.2 Réciproque d'une rotation

### Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré tel que  $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et O le symétrique de B par rapport à A.

1. Tracer  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  les images respectives des points A, B, C et D par la rotation R de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

2. Déterminer les images respectives des points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  par la rotation  $R'$  de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ . Que remarque-t-on ?

### Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit O un point du plan,  $\theta$  un réel et R la rotation de centre O et d'angle  $\theta$ .

Montrer que pour tous points M et  $M'$  du plan, on a  $R_{(O; \theta)}(M) = M'$ , si et seulement si,  $R_{(O; -\theta)}(M') = M$ .

### Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit O un point du plan,  $\theta$  un réel et R la rotation de centre O et d'angle  $\theta$ .

La rotation  $R_{(O; -\theta)}$  est appelée rotation réciproque de  $R_{(O; \theta)}$ . De plus,

$R_{(O; \theta)}(M) = M'$ , si et seulement si,  $R_{(O; -\theta)}(M') = M$ .

## 2. Propriétés d'une rotation

### Définition

Soit  $f$  une application du plan dans lui-même.

On dit que  $f$  est une isométrie du plan si pour tous points  $M$  et  $N$  d'images respectives  $M'$  et  $N'$ , on a  $MN = M'N'$ .

### Activité 1

Parmi les applications ci-dessous, citer celles qui sont des isométries du plan.

- a. Une symétrie orthogonale.
- b. Une symétrie centrale.
- c. Une translation.
- d. Une homothétie de rapport différent de 1 et de  $-1$ .

### Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $O$  un point du plan,  $\theta$  un réel et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

1. On considère deux points  $A$  et  $B$  et on note  $A'$  et  $B'$  leurs images respectives par  $R$ .

On se propose de montrer que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB'}$ .

- a. Vérifier l'égalité lorsque l'un des points  $A$  ou  $B$  est confondu avec  $O$ .

b. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont distincts de  $O$ , alors  $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$ .

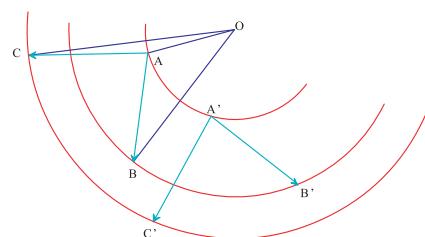
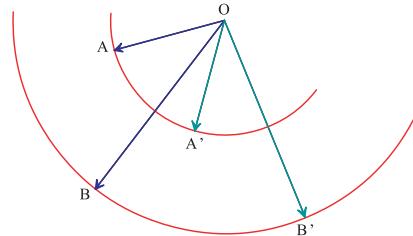
c. En déduire que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB'}$ .

2. Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan et  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  leurs images respectives par  $R$ .

- a. Exprimer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  à l'aide de  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  et  $\overrightarrow{OC}$ .

b. Montrer alors que  $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

c. En déduire que  $A'B' = AB$ .



### Théorème

Toute rotation conserve le produit scalaire et les distances.

Ainsi, toute rotation est une isométrie.

### Activité 3

Montrer que toute rotation conserve les milieux.

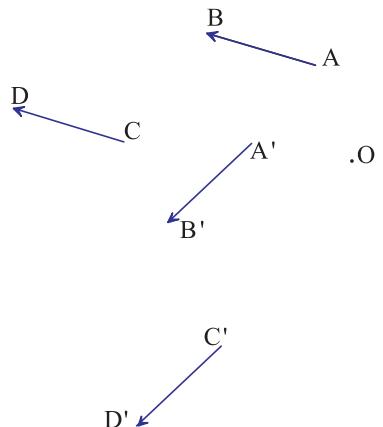
## Activité 4

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $O$  un point,  $\theta$  un réel et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

On considère quatre points  $A, B, C$  et  $D$  et on note  $A', B', C'$  et  $D'$  leurs images respectives par  $R$ .

En utilisant la propriété de conservation des milieux montrer que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , si et seulement si,  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ .



### Propriété

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $O$  un point du plan,  $\theta$  un réel et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

Pour tous points  $A, B, C$  et  $D$  d'images respectives  $A', B', C'$  et  $D'$  par la rotation  $R$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , si et seulement si,  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ .

## Activité 5

Le plan est orienté dans le sens direct.

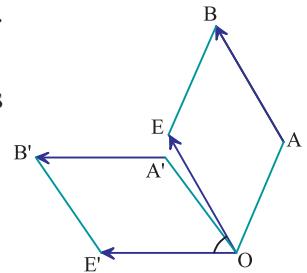
Soit  $O$  un point,  $\theta$  un réel et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points tels que  $A$  est distinct de  $B$  et  $C$  est distinct de  $D$ . On note  $A', B', C'$  et  $D'$  leurs images respectives par  $R$ .

1. Montrer que  $(\widehat{AB}, \widehat{A'B'}) \equiv \theta [2\pi]$ .

(On pourra considérer le point  $E$  tel que  $\overline{OE} = \overline{AB}$  et son image  $E'$  par  $R$ .)

2. Montrer que  $(\widehat{A'B'}, \widehat{C'D'}) \equiv (\widehat{AB}, \widehat{CD}) [2\pi]$ .



### Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $O$  un point,  $\theta$  un réel et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

- Pour tous points distincts  $A$  et  $B$  d'images respectives  $A'$  et  $B'$  par  $R$ ,  $(\widehat{AB}, \widehat{A'B'}) \equiv \theta [2\pi]$ .
- Pour tous points  $A, B, C$  et  $D$  tels que  $A$  est distinct de  $B$  et  $C$  est distinct de  $D$ , d'images respectives  $A', B', C'$  et  $D'$  par  $R$ ,  $(\widehat{A'B'}, \widehat{C'D'}) \equiv (\widehat{AB}, \widehat{CD}) [2\pi]$ .

## Activité 6

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $O$  un point,  $\theta$  un réel et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

Soit  $A$  et  $B$  deux points d'images respectives  $A'$ ,  $B'$  par  $R$ .

Déterminer  $\theta$  lorsque  $AB = 2$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'} = 2$  et  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = -2\sqrt{3}$ .

## Activité 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère l'application  $f$  du plan dans lui même qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  tel que

$$x' = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3} + 1) \text{ et } y' = \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} + y + \sqrt{3}).$$

1. Montrer que  $f$  est une isométrie.
2. Démontrer que  $f$  admet un unique point invariant que l'on notera  $A$ .
3. Montrer que  $AM = AM'$ .
4. Soit  $M$  un point distinct de  $A$ .
  - a. Calculer  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM}'$  et  $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM}')$ .
  - b. En déduire la mesure principale de  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM}')$ .
5. Quelle est alors la nature de  $f$  ?

## Activité 8

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un triangle  $ABC$ .

Soit  $R$  la rotation d'angle  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  qui transforme  $A$  en  $B$ .

Soit  $B'$  et  $C'$  les images respectives de  $B$  et  $C$  par  $R$ .

1. a Montrer que  $\overrightarrow{BB'}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires et de même sens.  
b. Construire le point  $B'$ .
2. Construire le point  $C'$ .
3. Construire le centre de  $R$ .

## Activité 9

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $O$  un point,  $\theta$  un réel et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan et  $A', B', C'$  et  $D'$  leurs images respectives par  $R$ .

Soit  $x$  un réel non nul,  $E$  et  $E'$  les points tels que  $x\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE}$  et  $x\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{OE'}$ .

1. Montrer que  $E'$  est l'image de  $E$  par  $R$ .
2. En déduire que  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$ , si et seulement si,  $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{C'D'}$ .

## Propriété

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $O$  un point du plan,  $\theta$  un réel et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

Pour tous points  $A, B, C$  et  $D$  d'images respectives  $A', B', C'$  et  $D'$  par la rotation  $R$ , et pour tout réel  $x$ ,  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$ , si et seulement si,  $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{C'D'}$ .

La propriété ci-dessus permet d'énoncer le théorème suivant.

## Théorème

Toute rotation conserve l'alignement.

L'image d'une droite par une rotation est une droite.

L'image d'un segment par une rotation est un segment qui lui est isométrique.

Toute rotation conserve le barycentre de deux points.

## Activité 10

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $ABCD$  un carré de centre  $O$  tel que  $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et  $E$  et  $F$  les points définis par  $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{DC}$ .

1. Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Déterminer les images de  $B$  et  $C$  par  $R$ . En déduire que  $F$  est l'image de  $E$  par  $R$ .

2. a. Construire les points  $G$  et  $H$  définis par  $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{BA}$ .

b. Quelle est la nature du quadrilatère  $EFGH$  ?

## Activité 11

1. Montrer que les images de deux droites parallèles par une rotation sont deux droites parallèles.

2. Montrer que les images de deux droites perpendiculaires par une rotation sont deux droites perpendiculaires.

## Propriété

Toute rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites.

## Activité 12

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $A$  et  $I$  deux points distincts,  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $I$  passant par  $A$  et  $\mathcal{D}$  la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$ .

Soit  $O$  un point,  $\theta$  un réel et  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

- Montrer que l'image du cercle  $\mathcal{C}$  par  $R$  est un cercle.
- On note  $A'$ ,  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{D}'$  les images respectives de  $A$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .  
Montrer que  $\mathcal{D}'$  est la tangente à  $\mathcal{C}'$  en  $A'$ .

### Propriété

- L'image d'un cercle par une rotation est un cercle qui lui est isométrique, et de centre l'image du centre.
- Toute rotation conserve le contact.

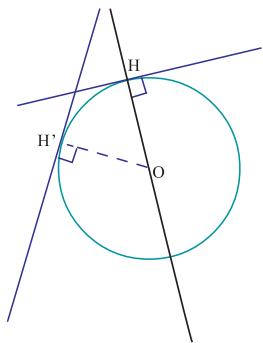
### Activité 13

Le plan est orienté dans le sens direct.

$R$  est une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$  et  $\mathcal{D}$  une droite qui ne passe pas par  $O$ .

On désigne par  $H$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $\mathcal{D}$  et  $H'$  et  $\mathcal{D}'$  les images respectives de  $H$  et  $\mathcal{D}$  par  $R$ .

- Tracer le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  passant par  $H$ .
- Construire  $H'$ .
- Montrer que  $\mathcal{D}'$  est la tangente à  $\mathcal{C}'$  en  $H'$ . Tracer  $\mathcal{D}'$ .



## 3. Rotations et configurations

### Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un carré  $ABCD$  tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et

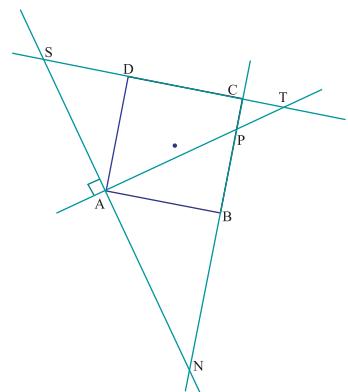
$P$  un point du segment  $[BC]$  distinct de  $B$ .

Les droites  $(AP)$  et  $(CD)$  se coupent en  $T$ .

La perpendiculaire à  $(AP)$  passant par  $A$  coupe la droite  $(BC)$  en  $N$  et la droite  $(CD)$  en  $S$ .

Soit  $R$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

- Déterminer l'image de la droite  $(BC)$  par  $R$ .
- En déduire les images de  $P$  et de  $N$ .
- Quelle est la nature de chacun des triangles NAT et PAS ?



### Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un triangle  $ABC$  tel que la mesure principale de  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  soit positive.

Soit  $D, E, F, G$  et  $I$  les points tels que  $BCDE$  et  $ABFG$  sont des carrés et  $IEBF$  est un parallélogramme de centre  $O$ .

- En utilisant une rotation convenable, montrer que les segments  $[EA]$  et  $[CF]$  sont perpendiculaires et isométriques.
- Soit  $R$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et soit  $C'$  l'image de  $C$  par  $R$ .
  - Montrer que les points  $E, B$  et  $C'$  sont alignés.
  - Montrer que les droites  $(OB)$  et  $(FC')$  sont parallèles.
  - En déduire que la droite  $(OB)$  porte une hauteur du triangle  $ABC$ .

## Activité 3

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère quatre points A, B, C et D tels que les points A et B sont distincts et  $AB = CD$ .

1. On suppose dans cette question que  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

- Déterminer la translation qui transforme A en C et B en D.
- Existe-t-il une rotation qui transforme A en C et B en D ?

2. On suppose dans cette question que  $\overline{AB} \neq \overline{CD}$  et  $(\widehat{\overline{AB}}, \widehat{\overline{CD}}) \equiv \theta [2\pi]$ .

- Soit R la rotation d'angle  $\theta$  qui transforme A en C.  
Montrer que D est l'image de B par R.
- Existe-t-il une autre rotation qui transforme A en C et B en D ?

## Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A, B, C et D quatre points tels que les points A et B sont distincts,  $AB = CD$  et  $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ .

Il existe une rotation et une seule qui transforme A en C et B en D, d'angle  $(\widehat{\overline{AB}}, \widehat{\overline{CD}})$  et de centre appartenant aux médiatrices des segments [AC] et [BD].

## Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit A(2, 1), B(3, 3), C(1, 0) et D(-1, 1).

- Démontrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en C et B en D.
- Déterminer son angle.
- Donner les coordonnées de son centre.

## Activité 5

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC non isocèle et tel que

$$(\widehat{\overline{AB}}, \widehat{\overline{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Soit P et Q deux points appartenant respectivement aux demi-droites [BA) et [CA) tels que  $BP = CQ$  avec P distinct de B.

- a. Montrer qu'il existe une rotation unique qui transforme B en C et P en Q.  
Quel est son angle ?
  - Construire le centre O de R et prouver qu'il est indépendant de P et Q.
  - Quelle est la nature du triangle OPQ ?
- Construire les points P et Q vérifiant  $BP = CQ = PQ$ .

## 4. Figures globalement invariantes

### Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A et B deux points distincts.

1. On se propose de déterminer l'ensemble E des rotations R qui laissent le segment [AB] globalement invariant, c'est-à-dire telles que  $R([AB]) = [AB]$ .
  - a. Montrer que R est soit d'angle de 0 soit d'angle  $\pi$ .
  - b. Déterminer E.
2. Déterminer toutes les translations qui laissent le segment [AB] globalement invariant.
3. Déterminer toutes les symétries axiales qui laissent le segment [AB] globalement invariant.

### Activité 2

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un carré ABCD de centre O tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

1. On se propose de déterminer toutes les rotations qui laissent globalement invariant le carré ABCD.  
Soit R une rotation qui laisse globalement invariant le carré ABCD.  
Soit  $\mathcal{C}$  le cercle circonscrit à ABCD.
  - a. Déterminer  $R(\mathcal{C})$ . En déduire que O est le centre de R.
  - b. Montrer que l'image d'une diagonale de ABCD est une diagonale de ABCD.
  - c. Déterminer toutes les rotations qui laissent globalement invariant le carré ABCD.
2. Déterminer toutes les translations qui laissent le carré ABCD globalement invariant.
3. Déterminer toutes les symétries orthogonales qui laissent le carré ABCD globalement invariant.

### Activité 3

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O.

Soit R la rotation de centre O, qui transforme A en B.

1. Quelle est l'image du triangle ABC par R ?
2. On considère le quadrilatère OABC.
  - a. L'ensemble {O, A, B, C} est-il globalement invariant par R ?
  - b. Le quadrilatère OABC est-il globalement invariant par R ?

### Activité 4

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit un triangle ABD tel que  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ . On note  $S_{(AB)}$  et  $S_{(BD)}$  les symétries orthogonales d'axes respectifs (AB) et (BD).

1. Soit M un point différent de B.
  - a. Construire l'image  $M_1$  de M par  $S_{(AB)}$  et l'image  $M_2$  de  $M_1$  par  $S_{(BD)}$ .

- b. Comparer  $\overrightarrow{BM}$  et  $\overrightarrow{BM_2}$  et déterminer  $(\widehat{\overrightarrow{BM}}, \widehat{\overrightarrow{BM_2}})$ .
2. En déduire la nature de l'application du plan qui transforme M en  $M_2$ .

## 5. Composée de deux rotations de même centre

### Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré tel que  $(\widehat{\overrightarrow{AB}}, \widehat{\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et O le symétrique de B par rapport à A.

1. a. Construire  $A'B'C'D'$  l'image du carré ABCD par la rotation R de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
- b. Construire  $A''B''C''D''$  l'image du carré  $A'B'C'D'$  par la rotation  $R'$  de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .
- c. Quelle est la rotation du plan qui transforme ABCD en  $A''B''C''D''$ ? Justifier.

### Définition

Soit f et g deux applications du plan.

L'application qui à tout point M du plan associe le point g(f(M)) est appelée la composée de f par g. On la note  $g \circ f$ .

### Activité 2

Démontrer le théorème suivant.

### Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit O un point du plan,  $\theta$  et  $\theta'$  deux réels.

Si R et  $R'$  sont deux rotations de même centre O et d'angles respectifs  $\theta$  et  $\theta'$ .

alors  $R' \circ R$  est la rotation de même centre O et d'angle  $\theta + \theta'$ .

La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles.

Si  $\theta + \theta' \equiv 0[2\pi]$  alors  $R' \circ R$  est l'identité du plan.

### Activité 3

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Soit R la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et A un point distinct de O.

On pose  $A_1 = R(A)$ ,  $A_2 = R(A_1)$  et pour  $n > 1$   $A_{n+1} = R(A_n)$ .

- a. Placer les points O, A,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ .

- b. Montrer que  $AA_2A_4$  est un triangle équilatéral.  
c. Quelle est la nature du polygone  $AA_1A_2A_3A_4A_5$  ?  
d. Soit  $n$  un entier naturel non nul.  
Montrer que  $A_{6n} = A$ .  
e. Déterminer  $A_{19}$  et  $A_{2006}$ .
2. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3.
- Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  et  $A$  un point distinct de  $O$ .  
On pose  $A_1 = R(A)$ ,  $A_2 = R(A_1)$  et pour  $n > 1$   $A_{n+1} = R(A_n)$ .
- a. Déterminer  $(\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OA_{i+1}})$  et en déduire  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_{n+1}})$ .  
b. Montrer que  $A_n = A$  et  $A_{n+1} = A_1$ .  
c. Préciser les points  $A_{n+4}$ ,  $A_{3n+2}$  et  $A_{2n+1}$ .  
d. Préciser la nature du polygone  $AA_1A_2 \dots A_{n-1}$  lorsque  $n = 4$ ;  $n = 5$ ;  $n = 7$ .

## 6. Recherche d'ensembles de points

### Activité 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$ ,  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{C}$  tels que  $(\widehat{OB}, \widehat{OA}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ .

Soit  $M$  un point variable de  $\mathcal{C}$  distinct de  $B$  et  $N$  le point de  $\mathcal{C}$  tel que

$$(\widehat{OM}, \widehat{ON}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

Soit  $P$  le symétrique de  $M$  par rapport à la droite  $(AN)$ .

1. Déterminer  $(\widehat{AM}, \widehat{AP})$ .

2. Déterminer et construire l'ensemble décrit par le point  $P$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{C}$  privé du point  $B$ .

### Activité 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

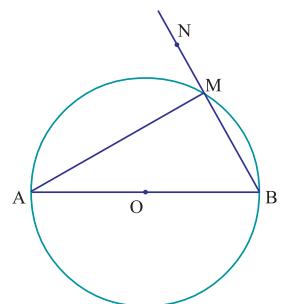
Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de diamètre  $[AB]$  et  $M$  un point variable de l'arc orienté  $\widehat{BA}$  privé de  $A$  et de  $B$ .

Soit  $N$  le point de  $[BM]$  tel que  $AM = BN$ .

1. Déterminer  $(\widehat{AM}, \widehat{BN})$ .

2. Déterminer alors une rotation qui transforme  $A$  en  $B$  et  $M$  en  $N$

3. Déterminer et construire l'ensemble décrit par le point  $N$  lorsque  $M$  décrit l'arc orienté  $\widehat{BA}$  privé de  $A$  et de  $B$ .



## Activité 3

Le plan est orienté dans le sens direct.

ABC est un triangle équilatéral tel que  $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  et  $\mathcal{C}$  est le cercle circonscrit à ce triangle.

Soit  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}''$  les cercles de centres respectifs B et C, isométriques et tangents extérieurement.

1. Faire une figure.

2. Soit M un point de  $\mathcal{C}'$  et  $M'$  le point de  $\mathcal{C}''$  tel que  $(\widehat{BM}, \widehat{CM'}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

Montrer que la médiatrice de [MM'] passe par un point fixe que l'on précisera.

3. Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AM').

a. Déterminer l'ensemble décrit par le point H lorsque M décrit  $\mathcal{C}'$ .

b. Construire cet ensemble.

4. Soit D le point de  $\mathcal{C}$  diamétrallement opposé à A et  $M''$  l'image de  $M'$  par la rotation de centre D et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

Montrer que le segment [MM''] est un diamètre de  $\mathcal{C}'$ .

## Mobiliser ses compétences

### Situation 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit AIJ un triangle isocèle en A tel que  $(\widehat{AI}, \widehat{AJ}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$  et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux cercles de centres respectifs I et J passant par A. On note B leur deuxième point d'intersection. Soit R la rotation de centre A et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

1. Montrer que R transforme  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .
2. a. Soit M un point de  $\mathcal{C}$  et N son image par R. Montrer que M, N et B sont alignés.  
b. Soit M un point de  $\mathcal{C}$  distinct de B et N un point de  $\mathcal{C}'$  tels que M, B et N sont alignés.  
Montrer que  $R(M) = N$ .
3. On pose  $R(B) = B'$ . Montrer que la droite  $(BB')$  est tangente au cercle  $\mathcal{C}$ .

### Situation 2

Dans le plan orienté dans le sens direct, ABCD et AEFG sont deux carrés tels que

$$(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } (\widehat{AE}, \widehat{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [BD], [DE], [EG] et [GB].

1. Montrer que MNPQ est un parallélogramme.
2. Soit R la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
Déterminer l'image du segment [BE] par cette rotation.
3. En déduire que MNPQ est un carré.
4. On désigne par l et m les longueurs respectives des côtés des carrés ABCD et AEFG.

On pose  $(\widehat{AB}, \widehat{AE}) \equiv \alpha[2\pi]$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi[$ .

Exprimer en fonction de l, m et  $\alpha$ , la longueur des côtés du carré MNPQ.

Déterminer  $\alpha$  pour que l'aire du carré MNPQ soit maximale.

# QCM – VRAI – FAUX

## QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est orienté dans le sens direct.

1. Si  $ABC$  est un triangle équilatéral de centre  $I$  tel que  $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .  
Alors  $ABC$  est globalement invariant par la rotation.

de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$      de centre I et d'angle  $2\frac{\pi}{3}$      de centre I et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ .

2. La composée des deux rotations de centre O et d'angles respectifs  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4}$  est

l'identité du plan     la symétrie centrale de centre O     une translation.

3. Soit A et B deux points distincts. Si  $r$  est la rotation qui transforme A en B et B en A, alors  $r$  est d'angle.

$\pi$       $2\pi$      0.

4. Soit  $r$  une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ . Soit A et B deux points distincts. On désigne par C et D les images respectives de A et B par  $r$ . Alors

$(AC) \perp (BD)$       $(AB) \perp (CD)$       $(AD) \perp (BC)$ .

5. Soit  $r$  une rotation d'angle  $\pi$ . Soit A et B deux points distincts. On désigne par C et D les images respectives de A et B par  $r$ . Alors

$(AB) \parallel (CD)$       $(AC) \parallel (BD)$      (AD) et (BC) sont confondues.

## VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

Le plan est orienté dans le sens direct.

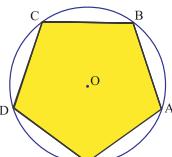
1. Si  $r$  est une rotation qui transforme une droite  $\mathcal{D}$  en une droite  $\mathcal{D}'$  qui lui est perpendiculaire alors  $r$  est d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{\pi}{2}$ .
2. Si  $r$  est une rotation qui transforme la droite  $(AB)$  en la droite  $(CD)$  alors  $r(A) = C$  et  $r(B) = D$ .
3. Si  $f$  est une application du plan dans lui-même qui conserve les mesures des angles orientés alors  $f$  est une isométrie.
4. Si  $f$  est une application du plan dans lui-même qui ne conserve pas les mesures des angles orientés alors  $f$  n'est pas une isométrie.
5. Si  $f$  est une application du plan dans lui-même qui ne conserve pas les mesures des angles géométriques alors  $f$  n'est pas une isométrie.

# Exercices et Problèmes

## Exercice 1

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans un cercle  $\mathcal{C}$  de centre O.



Soit R la rotation de centre O qui transforme A en B.

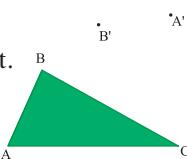
Soit F un point de [BC], G un point de [EC] et H le point d'intersection des tangentes à  $\mathcal{C}$  en D et A.

Construire l'image par R de chacun des points F, G et H.

## Exercice 2

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle et A' et B' sont les images respectives de A et B par une rotation.



Construire C' l'image de C par cette rotation.

## Exercice 3

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A, M et N trois points non alignés et a un réel différent de  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

On désigne par B et C les images respectives de A et N par la rotation de centre M et d'angle  $\alpha$ , et par D l'image de N par la rotation de centre A et d'angle  $\alpha$ .

Montrer que  $\overline{BC} = \overline{AD}$ .

## Exercice 4

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ . On note

J le milieu de [CD] et I est défini par  $\overline{BC} = 2\overline{IB}$ . L et K sont les symétriques de A respectivement par rapport à I et J.

On se propose de montrer que les droites (BL) et (DK) sont perpendiculaires et que  $BL = DK$ .

Soit R la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Vérifier que  $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{DJ}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

2. Déterminer R(B), puis R(I).

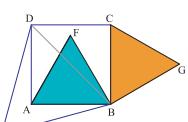
3. En déduire R(L).

4. Conclure.

## Exercice 5

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré et EBD, AFB et CBG sont des triangles équilatéraux



1. Montrer que les points E, A et C sont alignés.
2. a. Soit R la rotation de centre B qui transforme C en G. Quel est son angle ?
- b. Montrer que les points D, F et G sont alignés.

## Exercice 6

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle équilatéral de centre I tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

Soit M un point du côté [AB], distinct de A et B. On considère les points N et P appartenant respectivement à [BC] et [AC] tels que  $AM = BN = PC$ .

Montrer que le triangle MNP est équilatéral de centre I.

## Exercice 7

Le plan est orienté dans le sens direct. ABC est un triangle équilatéral tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  et soit I le symétrique de B par rapport à (AC).

1. Soit R la rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$  qui transforme A en C.
  - a. Montrer que I est le centre de R.
  - b. Soit D = R(B). Montrer que C est le milieu du segment [AD].
  2. A tout point M de [AB], distinct de A et de B, on associe le point M' de [CD] tel que  $AM = CM'$ .
- Montrer que le triangle IMM' est équilatéral.

## Exercice 8

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit OABC un carré tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et M un point de la droite (OA).

Soit  $\lambda$  le réel tel que  $\overline{MA} = \lambda \overline{OA}$  et N le point défini par  $\overline{NC} = -\lambda \overline{OC}$ .

1. Faire une figure avec  $OA = 6$  cm et  $\lambda = -\frac{1}{3}$ .

2. Montrer qu'il existe une rotation indépendante de  $\lambda$ , qui transforme A en C et M en N.

3. Caractériser cette rotation.

## Exercice 9

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un triangle équilatéral ABC tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ . Soit D le symétrique de B par

rapport à C.

1. Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en C et B en D .
2. Déterminer l'angle de cette rotation et construire son centre.

## Exercice 10

Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un triangle ABC tel que  $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ .

Soit P un point variable de la demi-droite [BA) et Q un point de la demi-droite [CA) tel que  $BP = CQ$ .  
Montrer que la médiatrice de [PQ] passe par un point fixe.

## Exercice 11

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A'BC un triangle équilatéral tel que

$(\widehat{A'B}, \widehat{A'C}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  et A un point quelconque. Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

1. Faire une figure.

2. Déterminer  $(\widehat{B'A'}, \widehat{AB})$  et  $(\widehat{AC}, \widehat{AB})$

3. Montrer que  $B'A' = AC'$ .

4. Déduire qu'il existe une translation qui transforme A en C' et B' en A' .

## Exercice 12

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle tel que  $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$  et P un point de [BC]. On note I et J les symétriques du point P respectivement par rapport aux droites (AB) et (AC).

1. Montrer que J est l'image de I par une rotation que l'on déterminera.
2. Déterminer le point P pour lequel l'aire de AIJ est minimale.

## Exercice 13

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre O et  $\mathcal{D}$  une droite extérieure à  $\mathcal{C}$ .

Soit A un point de  $\mathcal{D}$  et M un point variable de  $\mathcal{C}$ . On considère le point N tel que AMN soit un triangle équilatéral et que  $(\widehat{AM}, \widehat{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

1. Montrer que lorsque M décrit le cercle  $\mathcal{C}$  , le point N décrit un cercle  $\mathcal{C}'$ .

Soit I le centre de  $\mathcal{C}'$ .

2. Déterminer l'ensemble décrit par le point I, lorsque A décrit la droite  $\mathcal{D}$ .

## Exercice 14

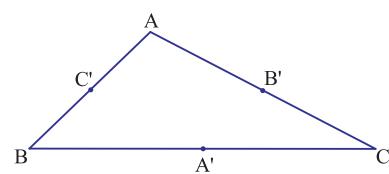
Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA], [AB]. Soit P l'image de A par la rotation de centre C' et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et Q l'image de A par la rotation de centre B' et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

1. a. Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme C' en B' et A' en Q.  
Déterminer son angle et construire son centre O.

b. Déterminer  $(\widehat{CP}, \widehat{BA'})$  et en déduire l'image de P par la rotation R .

2. a. Montrer que O est le milieu du segment [PQ].  
b. Montrer que le triangle A' P Q est un triangle rectangle isocèle.



## Exercice 15

Quelles sont les rotations et les symétries axiales qui laissent globalement invariants

- a. un cercle  $\mathcal{C}$  de centre O ?
- b. une droite  $\mathcal{D}$  et un point A de  $\mathcal{D}$  ?

## Exercice 16

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un carré ABCD de centre O tel que  $\widehat{(AB, AD)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ . Soit M un point de la droite (BD).

On note P le projeté orthogonal de M sur (AB) et Q le projeté orthogonal de M sur (AD).

On note P' et Q' les projetés orthogonaux de M respectivement sur (DC) et (BC).

1. On suppose  $M \neq B$ .

a. Soit h l'homothétie de centre B telle que  $h(D) = M$ .

Quelles sont les images par h des points A et C ?

Déterminer  $(\overline{PM}, \overline{MQ})$ .

b. Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que  $r(P) = M$  et  $r(M) = Q'$ .

Donner les éléments caractéristiques de r.

2. a. Quelle est l'image de Q par r ?

b. En déduire que pour tout point M de la droite (BD), la droite (MC) est perpendiculaire à la droite (PQ).

Pour tout point M de la droite (BD), on note  $\mathcal{D}_M$  la médiatrice de [PQ].

3. a. Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  telle que  $r_1(B) = A$  et  $r_1(A) = D$ .

Donner les éléments caractéristiques de  $r_1$ .

b. Quelle est l'image de P par  $r_1$  ?

c. En déduire que lorsque le point M varie sur la droite (BD), la droite  $\mathcal{D}_M$  passe par un point fixe.

## Exercice 17

Le plan est orienté dans le sens direct.

I. Soit A un point du plan orienté,  $\theta$  un réel et  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct.

On considère la rotation R de centre A et d'angle  $\theta$ .

Soit M un point distinct de A. On note  $(\rho, \alpha)$  les coordonnées polaires de M et  $M'$  son image par R.

1. Montrer que les coordonnées polaires de  $M'$  sont  $(\rho, \alpha + \theta)$ .

2. Soit  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  les coordonnées respectives de M et  $M'$  dans le repère  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ .

a. Exprimer X et Y en fonction de  $\rho$  et  $\alpha$ .

b. Exprimer  $X'$  et  $Y'$  en fonction de  $\rho$ ,  $\alpha$  et  $\theta$ .

c. En déduire  $X'$  et  $Y'$  en fonction de X et Y.

II. Soit O un point du plan et  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct.

Soit  $(a, b)$  les coordonnées de A dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  $(x, y)$  et  $(x', y')$  les coordonnées respectives de M et  $M'$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Exprimer x et y en fonction de X et Y.

2. Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $X'$  et  $Y'$ .

3. Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de x et y.

# Avec l'ordinateur

On donne ci-contre une figure représentant les chocs successifs

$M_0, M_1, M_2 \dots$  d'une boule sur le bord d'un billard circulaire de centre O.

On admet le fait qu'on passe de n'importe quel impact au suivant par une même rotation R de centre O.

On désigne par  $\theta$  une mesure de l'angle de la rotation R.

A l'aide du logiciel CABRI,

1. Construire un cercle C et nommer O son centre.

2. Créer deux points distincts  $M_0$  et  $M_1$  de C comme points sur objet.

3. Marquer l'angle  $M_0OM_1$  puis déterminer sa mesure à l'aide de l'outil " mesure d'angle ".

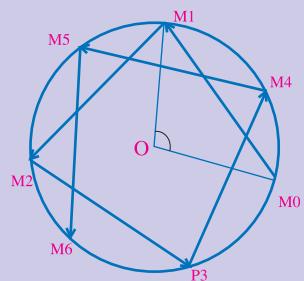
4. En utilisant l'outil " Rotation ", créer les points  $M_2, M_3, M_4\dots$  images respectives par R de  $M_1, M_2, M_3\dots$

5. Construire les segments reliant un point à son image par R.

6. Déplacer le point  $M_0$  sur C et conjecturer des valeurs de  $\theta$  pour lesquelles la trajectoire de la boule se referme en  $M_0$  après avoir tourné une fois autour du centre O, puis au bout de deux tours.

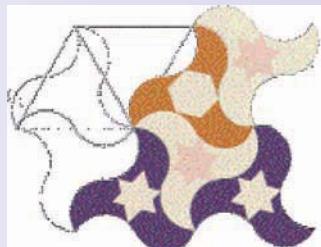
7. Montrer cette conjecture.

8. La réciproque est-elle vraie ?





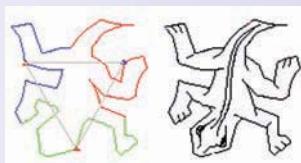
- Le cristallographe et mathématicien russe Fedorov a montré en 1891, qu'il n'existe que 17 types de pavage du plan. Ces types sont classés suivant l'agencement des rotations et des symétries qu'on peut y trouver. Les arabes étaient de vrais précurseurs dans le domaine des pavages développant de merveilleux chefs d'œuvre pour décorer palais et mosquées.



- Les pavages réguliers, sont ceux où un seul polygone régulier est utilisé. Chaque sommet est donc entouré de  $\frac{2n}{n-2}$  polygones, ce qui n'est possible que pour  $n \in \{3, 4, 6\}$ .

- Quand le pavage possède des centres de rotations, ceux-ci ne peuvent être intérieurs aux pavés. Si un pavé contenait dans son intérieur un centre de rotation, un transformé par rotation autour de ce point donnerait un pavé qui le chevaucherait; donc le(s) centre(s) de rotation doivent être situés sur les bords des pavés.

On peut faire le même raisonnement quand il y a des axes de symétrie. Là encore, pour une raison analogue, ils ne peuvent pas traverser les pavés mais doivent donc être situés en frontière de ceux-ci.



# Chapitre 5

## Nombres complexes

*" Les mathématiques, science de l'éternel et de l'immuable, sont la science de l'irréel. "*

*Renan*

## Pour commencer

### Activité 1

Soit  $\mathbb{F}$  l'ensemble des nombres de la forme  $a + b\sqrt{2}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs.

Soit  $x = a + b\sqrt{2}$  et  $x' = a' + b'\sqrt{2}$  deux éléments de  $\mathbb{F}$ .

1. Montrer que  $x = x'$ , si et seulement si,  $a = a'$  et  $b = b'$ .
2. Peut-on affirmer que  $x + x'$  et  $x \cdot x'$  appartiennent à  $\mathbb{F}$  ?

### Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  on désigne par  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique de centre  $O$ .

1. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{C}$  tels que

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{OA})} \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi], \quad \widehat{(\vec{u}, \vec{OB})} \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi] \text{ et } \widehat{(\vec{u}, \vec{OC})} \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi].$$

2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

### Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on donne les points

$$A(\sqrt{3}, 1); \quad B(0, -1); \quad C(2, -2) \text{ et } D(-2, 2\sqrt{3}).$$

1. Déterminer les coordonnées polaires de chacun de ces points.
2. Placer ces points.

## 1. Définition et propriétés

### 1.1 Définition et opérations sur les nombres complexes

#### Activité 1

On considère les équations

$$(E_1) : x + 2 = 0 ; \quad (E_2) : x^2 - 2 = 0 ; \quad (E_3) : 2x^2 - 3x - 2 = 0 ; \quad (E_4) : x^2 + 1 = 0.$$

Résoudre chacune de ces équations dans  $\mathbb{N}$ , dans  $\mathbb{Z}$ , dans  $\mathbb{Q}$  et dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un réel strictement négatif. L'équation  $x^2 = a$  n'admet pas de solutions réelles. Par contre, elle admet des solutions dans un ensemble contenant  $\mathbb{R}$ , appelé ensemble des nombres complexes et noté  $\mathbb{C}$ .

#### Théorème et définition

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté  $\mathbb{C}$ , vérifiant les propriétés suivantes :

1. L'ensemble  $\mathbb{C}$  contient l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .
2. Il existe dans  $\mathbb{C}$  un élément noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .
3. L'ensemble  $\mathbb{C}$  est muni d'une addition et d'une multiplication, qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans  $\mathbb{R}$ .
4. Tout élément  $z$  de  $\mathbb{C}$  s'écrit de façon unique sous la forme  $a + ib$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels.

#### Vocabulaire et notation

L'écriture  $z = a + ib$  est appelée écriture cartésienne ou algébrique du nombre complexe  $z$ .

Le réel  $a$  est appelé la partie réelle de  $z$  et est noté  $\operatorname{Re}(z)$ .

Le réel  $b$  est appelé la partie imaginaire de  $z$  et est noté  $\operatorname{Im}(z)$ .

Le nombre complexe  $z$  est appelé imaginaire pur si  $\operatorname{Re}(z) = 0$  et  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ .

#### Conséquences

Soit  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres complexes tels que  $a, b, a', b'$  appartiennent à  $\mathbb{R}$ .

Alors

- $z = z'$ , si et seulement si,  $a = a'$  et  $b = b'$ .
- $z = 0$ , si et seulement si,  $a = 0$  et  $b = 0$ .
- $b = 0$ , si et seulement si,  $z$  appartient à  $\mathbb{R}$ .

## Activité 2

1 On donne les nombres complexes  $z = 1 + 2i$  et  $z' = -3 + i$ .

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$z + z' ; z - z' ; z \times z' ; z + iz' ; z^2 - z'^2 ; -z^3 ; (-z')^2.$$

2. Soit  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres complexes tels que  $a, b, a', b'$  appartiennent à  $\mathbb{R}$ .

a. Vérifier que  $zz' = aa' + i(ab' + a'b) - bb'$ .

b. En déduire  $\Re(z \times z')$  et  $\Im(z \times z')$ .

## Propriété

Soit  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres complexes tels que  $a, b, a', b'$  appartiennent à  $\mathbb{R}$ .

- $\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z')$  et  $\Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z')$ .
- $\Re(-z) = -\Re(z)$  et  $\Im(-z) = -\Im(z)$ .
- $\Re(z \times z') = aa' - bb'$  et  $\Im(z \times z') = ab' + a'b$ .

## Activité 3

1. Calculer  $(1 + i)(1 - i)$ ,  $(1 + i)^2$ ,  $(-1 + i)^3$ .

2. a. Calculer  $i^3, i^4, i^5, i^6, i^7$  et  $i^8$ .

b. Calculer  $i^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes  $-3 \times i^{58}$  et  $6 \times i^{2006}$ .

4. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes  $(i - \sqrt{3})^3$  et  $(-1+i)^4$ .

## Activité 4

On donne les nombres complexes  $z = 1 - i$  et  $z' = -2 + i$ .

1. Calculer  $(1 - i)(1 + i)$  et en déduire que  $\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ .

2. Utiliser le même procédé que la question 1, pour déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$\frac{1}{z'} ; \frac{1}{z \times z'} ; \frac{1}{z^2} ; \frac{1}{z'^2}.$$

3. Soit  $z$  un nombre complexe non nul tel que  $z = a + bi$ ,  $a, b$  appartenant à  $\mathbb{R}$ .

a. Vérifier que  $\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ .

b. En déduire  $\Re\left(\frac{1}{z}\right)$  et  $\Im\left(\frac{1}{z}\right)$ .

## Propriété

Soit  $z$  un nombre complexe non nul tel que  $z = a + bi$ ,  $a, b$  appartenant à  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ et } \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

### Activité 5

1. Calculer  $(1+i)(1-i)^{-1}$ ,  $(1+i)^{-2}$ ,  $(-1+i)^{-3}$  et en déduire leur écriture cartésienne.
2. a. Déterminer l'écriture cartésienne de  $i^{-3}$ ,  $i^{-4}$ ,  $i^{-5}$ ,  $i^{-6}$ ,  $i^{-7}$  et  $i^{-8}$ .  
b. Calculer  $i^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes  $-3 \times i^{-52}$  et  $6 \times i^{-3000}$ .
4. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes  $(i-\sqrt{3})^{-3}$  et  $(-1+i)^{-4}$ .

## 1.2 Conjugué d'un nombre complexe

### Définition

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z = a + bi$ ,  $a, b$  appartenant à  $\mathbb{R}$ .

On appelle conjugué de  $z$  et on note  $\bar{z}$  le nombre complexe  $\bar{z} = a - bi$ .

### Activité 1

Déterminer les conjugués des nombres complexes ci-dessous.

$$1+2i ; -\sqrt{2}+3i ; i ; i^3.$$

On établit facilement les propriétés ci-dessous.

### Propriétés

- Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  et tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad ; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}' \quad ; \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

- Pour tout nombre complexe non nul  $z$  et tout entier naturel  $n$ , on a

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{\bar{z}^n}.$$

- $z = -\bar{z}$ , si et seulement si,  $z$  est réel.

- $z = -\bar{z}$ , si et seulement si,  $z$  est imaginaire.

### Activité 2

Déterminer les conjugués des nombres complexes ci-dessous.

$$(1+i)^2(-3+2i) ; \frac{1}{2-i} ; \frac{2i}{1+i} ; \frac{5-i}{5+i}.$$

## 1. 3 Equation $z^2 = \alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Activité 1

1. a. Soit  $z$  un nombre complexe. Factoriser l'expression  $z^2 + 1$ .  
b. En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^2 = -1$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations  $z^2 = 2$  et  $z^2 = -2$ .

### Théorème

Pour tout réel  $\alpha$  non nul, l'équation  $z^2 = \alpha$  admet exactement deux solutions dans  $\mathbb{C}$ .

Si  $\alpha > 0$ , les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^2 = \alpha$  sont  $\sqrt{\alpha}$  et  $-\sqrt{\alpha}$ .

Si  $\alpha < 0$ , les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^2 = \alpha$  sont  $i\sqrt{|\alpha|}$  et  $-i\sqrt{|\alpha|}$ .

## 2. Interprétation géométrique

### 2. 1 Affixe d'un point – Affixe d'un vecteur

### Activité 1

Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Pour chacun des cas ci-dessous, placer le point  $M$  de coordonnées  $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ .  
 $z = 2$ ,  $z = -3i$ ,  $z = 1 - 2i$ ,  $z = 3 + i$  et  $z = -1 + 3i$ .

2. Déterminer chacun des ensembles

$$E_1 = \left\{ M(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \text{ tels que } \operatorname{Im}(z) = 0 \right\} \text{ et } E_2 = \left\{ M(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \text{ tels que } \operatorname{Re}(z) = 0 \right\}.$$

### Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

A tout nombre complexe  $z = a + ib$  tel que  $a$  et  $b$  appartiennent à  $\mathbb{R}$ , on associe un unique point  $M(a, b)$  du plan  $P$ .

A tout point  $M(a, b)$  du plan  $P$ , on associe un unique nombre complexe  $z = a + ib$  tel que  $a$  et  $b$  appartiennent à  $\mathbb{R}$ .

### Vocabulaire et notation

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Le nombre complexe  $z = a + ib$  tel que  $a$  et  $b$  appartiennent à  $\mathbb{R}$  est appelé l'affixe du point  $M(a, b)$  et est noté  $\operatorname{Aff}(M)$ .  
Le point  $M$  de coordonnées  $(a, b)$  est appelé l'image du nombre complexe  $z = a + ib$  et est noté  $M(z)$ .
2. Le plan muni d'un repère orthonormé direct est appelé plan complexe.

## Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives

$$z_A = 2, z_B = -3i, z_C = 1 - 2i, z_D = 3 + i \text{ et } z_E = -1 + 3i.$$

2. Placer alors les points A', B', C', D' et E', symétriques respectifs de A, B, C, D et E, par rapport à  $(O, \vec{u})$ .

3. Déterminer les affixes de A', B', C', D' et E'. Que remarque-t-on ?

### Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $z$  un nombre complexe d'image M. Alors l'image de  $\bar{z}$  est le symétrique de M par rapport à l'axe  $(O, \vec{u})$ .

## Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

A tout point M d'affixe  $z = x + iy$  tel que  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\mathbb{R}$ , on associe le point M' d'affixe  $z' = x^2 + y^2 - x + 2y + i(-2x + y + 1)$ .

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que  $z' = \bar{z}'$ .

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que  $z' = -\bar{z}'$ .

## Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

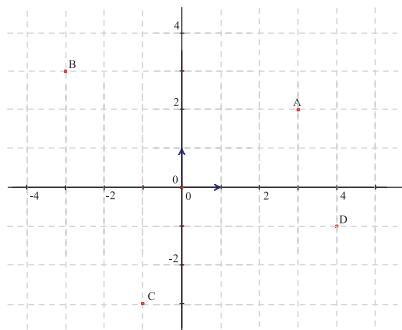
On a représenté ci-contre les points A, B, C et D.

1. Déterminer  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$  les affixes respectives des points A, B, C et D.

2. Soit M le point tel que  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AD}$ . On note  $z_M$  l'affixe de M.  
Exprimer  $z_M$  à l'aide de  $z_A$  et  $z_D$ .

3. a. Montrer que  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$ .

b. Vérifier que  $z_C - z_B = 2(z_D - z_A)$ .



### Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit M et N deux points d'affixes respectives  $z_M$  et  $z_N$ .

Le nombre complexe  $z_N - z_M$  est appelé l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{MN}$  et est noté  $\text{Aff}(\overrightarrow{MN})$ .

## Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,

$$\text{Aff}\left(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}\right) = \alpha \times \text{Aff}\left(\vec{u}\right) + \beta \times \text{Aff}\left(\vec{v}\right).$$

## 2. 2 Module d'un nombre complexe

### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $M$  un point d'affixe  $z = a + ib$ .

Exprimer la distance  $OM$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

### Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $z$  un nombre complexe d'image  $M$ .

On appelle module de  $z$ , le réel positif noté  $|z|$  et défini par  $|z| = OM$ .

## Propriétés

- Pour tout nombre complexe  $z$ ,  $|z| = 0$ , si et seulement si,  $z = 0$ .
- Pour tous points  $M$  et  $N$  du plan complexe d'affixes respectives  $z_M$  et  $z_N$ ,  $|z_N - z_M| = MN$ .

### Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $-2-i$ ;  $2i$ ;  $-2i$ ;  $2+i$ .

1. Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$  ?

2. Déterminer  $BD$ ,  $2AC$ ,  $AO$ .

### Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $\Omega$  les points du plan ayant pour affixes respectives

$$z_A = 1; z_B = 3 + 2i; z_C = 4 - i\sqrt{3} \text{ et } z_\Omega = 3.$$

1. On désigne par  $E$  l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie la relation

$$|z - 3| = 2.$$

a. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont-ils des points de  $E$  ?

b. Déterminer  $E$  puis le tracer.

2. On désigne par  $F$  l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie la relation  $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$ . Déterminer  $F$  puis le tracer.

### Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $E$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixes  $z$  telles que  $|z| = 3$ .

- Déterminer  $E$  puis le tracer.

- On considère le point  $A(-3, -4)$ .

Déterminer les coordonnées du point  $M$  de l'ensemble  $E$  tel que la distance  $AM$  soit maximale.

## 2. 3 Propriétés du module d'un nombre complexe

### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $M$  et  $N$  deux points d'affixes respectives  $z_M$  et  $z_N$ .

On désigne par  $S$  le point tel que  $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ .

- Déterminer une condition suffisante portant sur les points  $O, M$  et  $N$  pour que

$$\|\overrightarrow{OS}\| = \|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{ON}\|.$$

- Montrer que pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$ , on a  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ .

### Propriété

Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  et tout réel  $\lambda$ ,  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  et  $|\lambda z| = |\lambda||z|$ .

### Activité 2

Soit  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  tels que  $a, b, a', b'$  appartiennent à  $\mathbb{R}$ .

- Calculer le module de  $\lambda z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- Calculer le module de  $zz'$  et  $z^n$ , pour tout entier naturel non nul  $n$ .
- On suppose que  $z$  est non nul. Calculer le module de  $\frac{1}{z}$ .

### Propriétés

- Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  et tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $|zz'| = |z||z'|$  ;  $|z^n| = |z|^n$  et  $|z\bar{z}| = |z|^2$ .

- Pour tout nombre complexe non nul  $z$  et tout entier naturel  $n$ , on a

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad ; \quad \left| \frac{1}{z^n} \right| = \frac{1}{|z|^n}.$$

### Activité 3

Calculer les modules des nombres complexes ci-dessous.

$$2(1+i)^2 ; (-2+3i)(2-i) ; i^6 ; \frac{(-\sqrt{2}+i)^3}{(\sqrt{2}-i)^4}.$$

## 3. Argument d'un nombre complexe non nul

### 3.1 Définition

#### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = -2, z_B = 3i, z_C = 1+i \text{ et } z_D = \sqrt{3} - i.$$

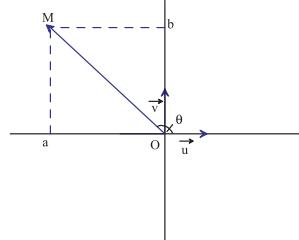
Déterminer les coordonnées polaires de chacun des points A, B, C et D.

b. En déduire une nouvelle écriture des nombres complexes  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$ .

2. Soit M un point d'affixe non nulle  $z_M = a + ib$ .

On note  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires de M.

Montrer que  $z_M = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ .



#### Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $z$  un nombre complexe non nul et M son image.

On appelle argument de  $z$  et on note  $\arg(z)$ , toute mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ .

#### Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe non nul  $z$ , dans chacun des cas suivants.

$$\arg(z) \equiv 0[2\pi] ; \quad \arg(z) \equiv \pi[2\pi] ; \quad \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] ; \quad \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi].$$

2. Représenter les ensembles

$$E = \left\{ M(z) \in P / \arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \right\} ; \quad F = \left\{ M(z) \in P / \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \right\}.$$

## 3.2 Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Le théorème ci-dessous découle de la définition d'un argument et du module d'un nombre complexe, ainsi que des coordonnées polaires d'un point du plan orienté.

## Théorème

Soit  $z$  un nombre complexe non nul et  $\theta$  appartient à  $\mathbb{R}$ .

Si  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ , alors  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

Réiproquement, si  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $r > 0$ , alors  $r = |z|$  et  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ .

## Vocabulaire

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

L'écriture  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  est appelée écriture trigonométrique de  $z$ .

La forme polaire de  $z$  est la donnée des coordonnées polaires de son image  $M$ , c'est à dire la donnée de  $|z|$  et de la mesure principale de  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ .

## Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants.

$$z_1 = -1 + i ; z_2 = \sqrt{3} - i ; z_3 = 1 + i\sqrt{3} ; z_4 = 2 + 2i$$

2. En déduire les coordonnées polaires de leurs images.

## 3. 3 Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul

## Activité 1

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls d'écritures trigonométriques

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  et  $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ .

1. a. Déterminer l'écriture cartésienne de  $z \times z'$ .

b. Montrer que  $z \times z' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$ .

c. En déduire une écriture trigonométrique de  $z^2$ .

2. Déterminer une écriture trigonométrique de  $\frac{z}{z'}$ .

## Propriété

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls d'écriture trigonométriques

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  et  $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ .

•  $z \times z' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$ .

•  $z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))$ .

•  $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))$ .

## Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_A = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  ;  $z_B = 1 - i$  et  $z_C = \frac{z_A}{z_B}$ .

1. Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes  $z_A$  et  $z_B$ .
2. Déterminer une écriture trigonométrique du nombre complexe  $z_C$ .
3. En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

## Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par A un point d'affixe  $z_A = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ .

1. Déterminer le module et un argument de  $z_A$ .
2. On désigne par B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .
  - a. Déterminer  $z_B$  l'affixe de B.
  - b. Déterminer l'affixe du point B' symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.
3. On désigne par C le point d'affixe  $z_C = z_A \times z_B$ .  
Montrer que C est l'image de A par une rotation que l'on déterminera.

## Mobiliser ses compétences

### Situation Entiers de Gauss

On appelle ensemble des entiers de Gauss, l'ensemble  $G$  des nombres complexes dont la partie réelle et la partie imaginaire sont deux entiers relatifs.

Pour tout  $\alpha$  appartenant à  $G$ , on note  $n(\alpha) = |\alpha|^2$ .

1. Vérifier que pour tout  $\alpha$  appartenant à  $G$ ,  $n(\alpha)$  appartient à  $\mathbb{N}$ .

2. Résoudre dans  $G$  les équations ci-dessous.

- $n(\alpha) = 1$ .
- $n(\alpha) = 2$ .
- $n(\alpha) = 3$ .



Carl Friedrich Gauss

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments de  $G$  tels que  $\beta \neq 0$ . On dit que  $\beta$  est un diviseur de  $\alpha$  dans  $G$ , ou que  $\alpha$  est un multiple de  $\beta$  dans  $G$ , lorsque  $\frac{\alpha}{\beta}$  appartient à  $G$ .

3. a. Montrer que si  $\beta$  divise  $\alpha$  dans  $G$ , alors  $n(\beta)$  divise  $n(\alpha)$  dans  $\mathbb{N}$ .

b. Etudier la réciproque de la proposition ci-dessus, en considérant les nombres

$$\alpha = 5 + 3i \text{ et } \beta = 4 + i$$

4. Déterminer tous les diviseurs dans  $G$  de chacun des nombres complexes  $1$ ,  $1 + i$  et  $1 - 2i$ .

# QCM – VRAI – FAUX

## QCM

Cocher la réponse exacte.

1. On considère deux nombres complexes  $z = -3i + 2$  et  $z' = 1 + i$ . Alors  $\Im(z') =$

-3

$-\frac{5}{2}$

2.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit A le point d'affixe  $z = \sqrt{3} - i$ . Alors  $OA =$

2

$\sqrt{3} - 1$

$\sqrt{3} + 1$ .

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit M un point d'affixe z tel que  $(\vec{u}, \widehat{\vec{OM}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ . Alors un argument de  $-3z$  est

$-\pi$

$-\frac{2\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{3}$ .

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit A le point d'affixe  $1+i$  et M un point de la demi droite  $[AO)$  d'affixe  $z_M \neq 0$ . Alors

$\arg(z_M) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg(z_M) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

$\arg(z_M) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ .

5. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit A et B deux points d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i$  et  $z_B = -2 - 4i$ . Alors

$(\widehat{\vec{OA}}, \widehat{\vec{OB}}) \equiv 0[2\pi]$

$(\widehat{\vec{OA}}, \widehat{\vec{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$(\widehat{\vec{OA}}, \widehat{\vec{OB}}) \equiv \pi[2\pi]$ .

## VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit a et b deux nombres complexes. Si  $z = a + i b$  alors  $a = \Re(z)$  et  $b = \Im(z)$ .

2. Pour tous nombres complexes z et  $z'$ ,  $|z| = |z'|$ , si et seulement si,  $z = z'$  ou  $z = -z'$ .

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Si M est un point du cercle trigonométrique d'affixe z alors le point M' d'affixe  $z^2$  appartient au cercle trigonométrique.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout nombre complexe z non nul, les points d'affixes z et  $\frac{1}{z}$  n'appartiennent pas à un même cercle.

5. Pour tout nombre complexe z non nul,  $\arg(z^2)$  est congru à  $(\arg(z))^2$  modulo  $2\pi$ .

# Exercices et Problèmes

## Exercice 1

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$(1-i)(1-2i); (2-i)^2 - (3-2i)(3+2i); \frac{5-i}{2i}; \frac{2}{3i} - \frac{3}{1-i}.$$

## Exercice 2

Soit  $z = 1 - 3i$  et  $z' = -3 + 2i$ .

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes suivants.

$$1. Z_1 = z \times z'; Z_2 = z^2 \times z'; Z_3 = \frac{z-2}{z'+i}.$$

2. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes suivants :

$$Z_4 = \bar{z} \times z'; Z_5 = z^2 \times \bar{z}'; Z_6 = \frac{z-2}{z'+i}.$$

## Exercice 3

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , chacune des équations ci-dessous.

$$z^2 + 3 = 0; z^2 - 3z = 3(1-z) - 6; z^3 - 1 = z - 1.$$

2. a. Soit  $z$  un nombre complexe. Vérifier que

$$z^2 - 2z + 4 = (z - 1)^2 + 3.$$

b. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .

## Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = -1+i, z_B = -\sqrt{2}i + \sqrt{2},$$

1. Placer les points A et B.

2. Montrer que les points O, A et B sont alignés.

## Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit M un point d'affixe z.

1. On désigne par  $M'$  le point d'affixe  $z + 2i$ .

Montrer que  $M'$  est l'image de M par une translation que l'on déterminera.

2. On désigne par  $M''$  le point d'affixe  $-3z$ .

Montrer que  $M''$  est l'image de M par une homothétie que l'on déterminera.

## Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives

$$z_A = 1+i, z_B = 3+i \text{ et } z_C = 1-2i.$$

1. a. Calculer  $|z_A - z_B|$ ,  $|z_A - z_C|$  et  $|z_B - z_C|$ .

b. En déduire la nature du triangle ABC.

2. Soit I le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

On désigne par  $z_I$  l'affixe de I.

Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe  $z_I$ .

## Exercice 7

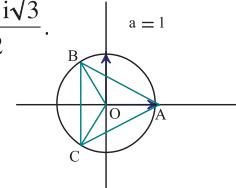
Soit a un réel non nul et  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .

Dans le plan muni d'un repère

orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on

désigne par A, B et C les points

d'affixes respectives a,  $a j$  et  $a j^2$ .



Montrer que les points A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral.

## Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants.

$$a. |z - 3| = 2; b. |z - i| = 1; c. |z - i + 1| = 3;$$

$$d. |z - 2 + i| = |z - 1|; e. |z - 2i + 1| = |z + i|.$$

## Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z, tels que

$$|(1+i)z| = 3.$$

## Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit A un point d'affixe  $1+i$  et  $\vec{w}$  le vecteur d'affixe  $1+2i$ . Soit M un point du plan d'affixe z.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur z pour que

a. M appartient à la droite D passant par A et de vecteur directeur  $\vec{w}$ .

b. M appartient à la droite D' passant par A et de vecteur normal  $\vec{w}$ .

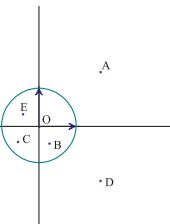
c. M appartient à l'intersection de l'axe des abscisses avec la droite D.

d. M appartient à la tangente en A au cercle C de centre O et de rayon  $\sqrt{2}$ .

## Exercice 11

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v})$ , A, B, C, D et E sont cinq points du plan. L'affixe de l'un des points est l'inverse de celle de A.

Quel est ce point ?



## Exercice 12

Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants.

$$\frac{2i+2\sqrt{3}}{4+4i}; \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}; \left(\frac{i}{1-i}\right)^{2006}; -2(-1+i\sqrt{3})^{100000};$$

$$\cos \frac{\pi}{21} - i \sin \frac{\pi}{21}; \sin \frac{2\pi}{11} + i \cos \frac{2\pi}{11}; 1 - i \tan \frac{\pi}{15}.$$

## Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v})$ . On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 2. Soit A le point de C tel que  $\widehat{(\vec{u}, \vec{OA})} \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$ , on note z l'affixe de A.

1. Faire une figure et représenter les points B, C et D d'affixes respectives iz,  $i^2z$  et  $i^3z$ .

2. Déterminer une écriture trigonométrique des affixes de chacun des points A, B, C et D.

3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

## Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit M, N et P trois points du plan d'affixes respectives

$$z_M = i - \sqrt{3}, z_N = iz_M \text{ et } z_P = \frac{z_M}{z_N}.$$

1. Déterminer un argument de chacun des nombres complexes  $z_M$ ,  $z_N$  et  $z_P$ .

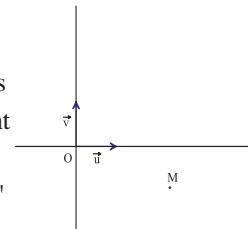
2. Déterminer et tracer dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points H d'affixes z telles que

a.  $\arg(z) \equiv \arg(z_M)[2\pi]$  ; b.  $\arg(z) \equiv \arg(z_N)[2\pi]$  ;

c.  $\arg(z) \equiv \arg(z_P)[2\pi]$ .

## Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v})$ . Dans la figure ci-contre, M est un point d'affixe z.



Construire le point M' d'affixe  $z'$  dans chacun des cas ci-dessous.

a.  $z' = z - 3i$  ; b.  $z' = -2z + 1$  ; c.  $z' = iz$ .

## Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}, z_B = 3 + i\sqrt{3}, z_C = 4, z_D = 3 - i\sqrt{3} \text{ et } z_E = 1 - i\sqrt{3}.$$

1. a. Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes  $z_A, z_B, z_C, z_D$  et  $z_E$ .

b. Représenter les points A, B, C, D et E.

c. Montrer que D et E sont les images respectives de B et A par la symétrie d'axe  $(\vec{O}, \vec{u})$ .

2. Déterminer l'aire du polygone OABCDE.

## Exercice 17

Soit O, A et B trois points distincts du plan orienté dans le sens direct tels que  $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  et  $OB=OA=1$ .

On considère les carrés OPQA et OBRS tels que

$$\widehat{(\vec{OA}, \vec{OP})} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi], \widehat{(\vec{OB}, \vec{OS})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

1. Faire une figure.

2. On munit le plan du repère orthonormé direct  $(\vec{O}, \vec{OA}, \vec{OC})$ .

Déterminer les écritures cartésiennes des affixes des points O, A, C, B, Q, P et S.

b. Déterminer une écriture trigonométrique de l'affixe du point R.

3. Déterminer la position relative des droites (PB) et (QR).

# Avec l'ordinateur

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On se propose d'illustrer dans cette séquence, le produit et le quotient de deux nombres complexes, à l'aide du logiciel cabri.

On règle d'abord le système de coordonnées dans les préférences du menu Option à celui des coordonnées polaires en radian.

1. Dans un nouveau fichier, on place deux points  $M_1$  et  $M_2$ .

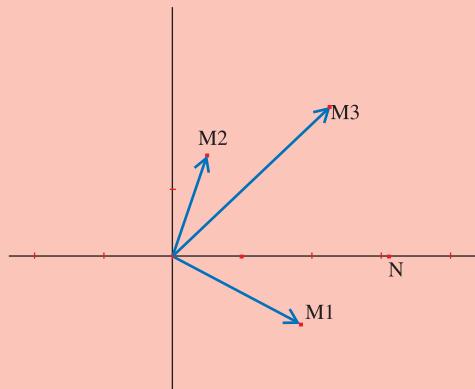
On notera  $z_1$  et  $z_2$  leurs affixes respectives.

2. A l'aide de l'outil "coord ou équation" on affichera les coordonnées polaires de chacun des points  $M_1$  et  $M_2$ .

3. On construit le point  $N$  de la demi-droite  $[O, \vec{u})$  telle que  $ON = OM_1 \times OM_2$  soit par un procédé géométrique ou en utilisant la calculatrice pour calculer  $OM_1 \times OM_2$  puis à l'aide de l'outil "Report de mesure" on reporte  $OM_1 \times OM_2$  sur l'axe des abscisses.

4. Utiliser la calculatrice pour calculer la somme  $\theta_1 + \theta_2$  des arguments de  $z_1$  et  $z_2$ .

5. A l'aide de l'outil "Rotation", déterminer l'image  $M_3$  de  $N$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta_1 + \theta_2$ . Le point  $M_3$  est d'affixe  $z_1 \times z_2$ .



Utiliser ce procédé de construction pour donner la construction du point d'affixe  $\frac{z_1}{z_2}$ .



Déjà au 16ème siècle, Jérôme CARDAN, un mathématicien avant-gardiste, osait utiliser la racine carrée de  $-a$ , alors que  $a$  était positif !

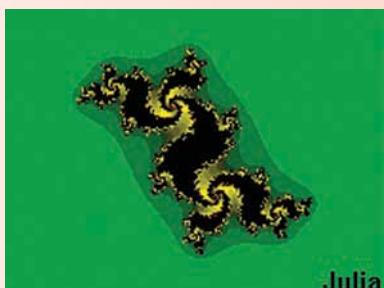
On doit à Gauss une définition précise des nombres complexes (l'épithète est de lui en remplacement du qualificatif imaginaire qu'avait utilisé à l'origine Cardan), l'écriture sous la forme  $a + bi$ , leur interprétation et représentation géométriques (dont la paternité revient à Argand et l'étude des fonctions analytiques d'une variable complexe.)



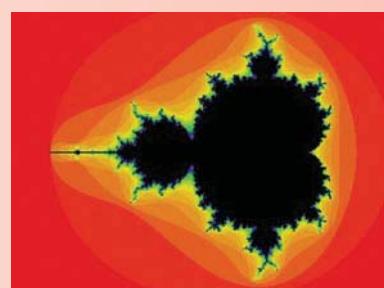
Jérôme CARDAN

Le mathématicien Gaston Julia a eu l'idée de considérer la fonction  $f$  définie de l'ensemble  $X$  dans lui-même par  $f(z) = z^2 + c$ , où  $c$  est une constante complexe, et de l'itérer une infinité de fois. Il construit alors, à partir d'une valeur initiale de  $z_0$  de  $z$ , une suite de points  $M_n$  d'affixes définies par la relation  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ . Pour certaines valeurs initiales, la suite converge, c'est-à-dire le point limite reste à distance finie.

L'ensemble des points de départ est appelé de Julia.



Ensemble de JULIA pour  $c \approx 0,577 + 0,478i$



Ensemble de Mandelbrot

# Chapitre 6

## Dénombrément

*" La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul. "*

*Galilée*

 Pour commencer**Activité 1**

On considère un tableau à 4 cases alignées, numérotées de 1 à 4, qui sont de couleurs distinctes : bleue, jaune, rouge, verte.

1	2	3	4
---	---	---	---

1. Donner un tableau vérifiant la condition suivante :

- la case 1 est verte et la case 4 est rouge.

2. Donner un tableau vérifiant la condition suivante :

- la case 2 est à côté de la case rouge et la case 4 est verte.

3. Donner un tableau vérifiant les conditions suivantes :

- la case 3 est jaune et la case 4 est bleue,
- si la case 1 est verte alors la case 2 est rouge.

**Activité 2**

On considère un ensemble de 10 boules dont chacune est soit noire soit blanche, soit pleine soit creuse.

On considère une partie X de 3 boules parmi ces 10 telle que

- il existe au moins une boule blanche et creuse ;
- si X contient une boule pleine alors celle-ci est noire.

1. Donner un ensemble X vérifiant de plus la condition suivante :

- X contient 3 boules creuses.

2. Donner un ensemble X vérifiant de plus la condition suivante :

- X contient une boule noire et creuse.

3. Donner un ensemble X vérifiant de plus la condition suivante :

- X contient 3 boules pleines.

4. Donner un ensemble X vérifiant de plus la condition suivante :

- X contient au moins deux boules pleines.

# Cours

## 1. Cardinal d'un ensemble fini

### Activité 1

1. Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble des entiers naturels pairs et inférieurs à 100.
2. Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble des entiers naturels impairs et inférieurs à 100.

### Vocabulaire et notation

Un ensemble qui a un nombre fini d'éléments est dit fini.

Dans ce cas, on appelle cardinal de  $E$  le nombre de ses éléments.

Lorsqu'un ensemble  $E$  a  $n$  éléments, on dit que son cardinal est  $n$ .

On note alors  $\text{card } E = n$ .

Un ensemble qui a zéro éléments, est appelé l'ensemble vide et est noté  $\emptyset$ .

### Activité 2

On désigne par  $C$  l'ensemble des diviseurs de 15,  $D$  l'ensemble des diviseurs de 8 et  $E$  l'ensemble des diviseurs de 12.

1. Déterminer  $\text{card}(C \cap D)$  ;  $\text{card}(E \cap D)$  ;  $\text{card}(C \cap E)$  .

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles finis.

Leur intersection  $A \cap B$ , qui se lit "A inter B", est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à  $A$  et à  $B$ .

Les ensembles  $A$  et  $B$  sont dits disjoints lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun.

$A$  et  $B$  sont disjoints équivaut à  $A \cap B = \emptyset$ .

2. Déterminer  $\text{card}(C \cup D)$  ;  $\text{card}(E \cup D)$  ;  $\text{card}(C \cup E)$  .

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles finis.

Leur réunion  $A \cup B$ , qui se lit "A union B", est l'ensemble dont les éléments appartiennent à  $A$  ou à  $B$ .

Si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors  $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$ .

Si  $A$  et  $B$  ne sont pas disjoints, alors  $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$ .

### Activité 3

1. Déterminer l'ensemble  $E$  des diviseurs de 42.
2. Déterminer l'ensemble  $A$  des éléments de  $E$ , qui sont impairs.
3. Déterminer l'ensemble  $\bar{A}$  des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ .

Soit  $E$  un ensemble fini, de cardinal  $n$  et  $A$  une partie de  $E$ .

Le complémentaire  $\bar{A}$  de  $A$  dans  $E$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ .

On a alors

$$A \cup \bar{A} = E ; A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\text{card } \bar{A} = n - \text{card } A .$$

### Activité 4

Soit  $E$  l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $1 \leq n \leq 100$ .

Pour tout entier naturel  $a$ , on note  $M(a)$  l'ensemble

$$M(a) = \{ n \in E \text{ tel que } n \text{ est un multiple de } a \}.$$

1. a. Calculer  $\text{card } M(2)$ ,  $\text{card } M(5)$  et  $\text{card } M(10)$ .

- b. En déduire le nombre d'éléments de E qui sont divisibles par 2 et non par 5.  
c. Calculer le nombre d'éléments de E qui sont divisibles soit par 2, soit par 5.  
3. Calculer  $\text{card}M(3)$ ,  $\text{card}M(7)$  et  $\text{card}(M(3) \cup M(7))$ .  
4. Calculer  $\text{card}(M(6) \cup M(25))$ .

### Activité 5

On considère l'ensemble E et deux parties A et B de E, tels que

$$E = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 3)\},$$

$$A = \{(1, 2)\},$$

$$B = \{(1, 1); (1, 3)\}.$$

Déterminer le cardinal des ensembles  $\bar{A}$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap \bar{B}$  ;  $\bar{A} \cup \bar{B}$ .

## 2. Produit cartésien d'ensembles finis

### Activité 1

On désigne par E l'ensemble des entiers naturels non nuls, inférieurs ou égaux à 6 et par F l'ensemble des entiers négatifs non nuls supérieurs ou égaux à -6.

Déterminer le cardinal de l'ensemble  $E \times F$ .

Le produit cartésien  $E \times F$ , se lit " E croix F ", est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que x appartient à E et y appartient à F. On a  
 $\text{card}(E \times F) = \text{card}E \times \text{card}F$ .

### Activité 2

Un centre culturel propose un abonnement pour deux activités, une le samedi et une le dimanche.

En l'an 2003, les activités du samedi étaient théâtre, musique et sport.

(On les note par  $\{T, M, S\}$ ), celles du dimanche étaient cinéma et peinture.

(On les note par  $\{C, P\}$ ).

Un abonnement est représenté par le couple  $(a, b)$ , où a désigne une activité proposée le samedi et b une activité proposée le dimanche.

1. Compléter le tableau ci-contre pour déterminer tous les abonnements possibles.

2. Combien a-t-on d'abonnements possibles ?

3. En l'an 2005, les activités du samedi sont devenues au nombre de 5 et celles du dimanche au nombre de 6. Combien a-t-on d'abonnements possibles ?

a	b	C	P
T		(T, C)	
M			
S			

### Activité 3

On lance une pièce de monnaie et le résultat est soit pile (noté P) soit face (noté F).

1. On lance la pièce deux fois. On modélise une issue par le couple  $(a, b)$  où a et b appartiennent à  $\{F, P\}$ .

a. Combien a-t-on d'issues possibles ?

b. Déterminer les issues où figure une seule fois face. Combien y en a-t-il ?

c. Déterminer les issues où figure une seule fois pile. Combien y en a-t-il ?

d. Déterminer les issues où ne figure aucune fois pile. Combien y en a-t-il ?

2. On lance la pièce trois fois.

On modélise une issue par le triplet  $(a, b, c)$  où  $a, b, c$  appartiennent à  $\{P, F\}$ .

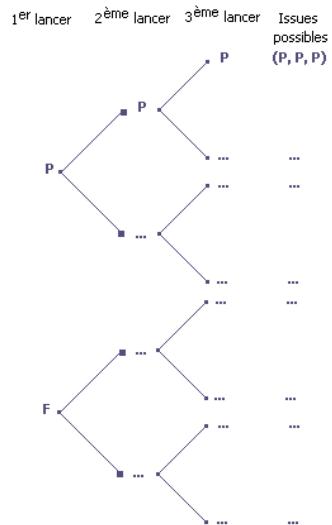
a. Compléter l'arbre de choix ci-contre.

b. Combien a-t-on d'issues possibles ?

c. Dans combien d'issues figure une seule fois face ?

d. Dans combien d'issues figurent trois fois pile ?

e. Dans combien d'issues ne figure aucune fois face ?



## Activité 4

Dans une urne, il y a trois boules portant respectivement les lettres A, I et L.

On tire une boule et on note la lettre puis on la remet dans l'urne.

1. On effectue cette opération trois fois, on obtient alors un triplet.

Combien a-t-on de triplets possibles ?

2. On effectue cette opération dix fois, on obtient alors un dix-uplet.

Combien a-t-on de dix-uplets possibles ?

Soit E un ensemble non vide et fini.

Le produit cartésien  $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$

est l'ensemble des p-uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  tels que  $x_i$  appartient à E. On le note  $E^p$  et on a  $\text{card}(E^p) = (\text{card}E)^p$ .

## Activité 5

En informatique un " bit " (binary digit) vaut soit 0 soit 1, un " octet " est une succession de huit bits (exemple : 00011001).

1. Combien existe-t-il d'octets possibles ?

2. Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 1 ?

3. Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 0 ?

4. Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 00 ?

## Activité 6

Une commode contient trois tiroirs. On range des objets distincts dans cette commode. On suppose que chaque tiroir peut ne pas contenir d'objet ou en contenir un ou plusieurs.

1. Déterminer le nombre de rangements possibles que l'on peut réaliser, si on veut ranger deux objets.

2. Déterminer le nombre de rangements possibles que l'on peut réaliser, si on veut ranger trois objets.

3. Déterminer le nombre de rangements possibles que l'on peut réaliser, si on veut ranger vingt objets.

## Activité 7

La porte d'entrée d'un immeuble est commandée par un code d'accès composé d'une lettre suivie de trois chiffres.

On dispose d'un clavier comportant les lettres A, B et C, et les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1. Combien de codes peut-on proposer ?
2. Combien de codes commençant par la lettre A, peut-on proposer ?
3. Combien de codes commençant par B9, peut-on proposer ?
4. Combien de codes comportant trois chiffres distincts, peut-on proposer ?

## 3. Permutations

### Activité 1

1. On appelle anagramme du mot MAI tout mot (ayant un sens ou non) formé des trois lettres M, A et I. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MAI ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot NATUREL ?

### Activité 2

Huit personnes choisissent un nombre compris entre 1 et 8.

Combien y a-t-il de choix distincts possibles ?

### Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n .

On appelle permutation des n éléments de E tout n-uplet d'éléments distincts de E.

### Activité 3

On dispose d'un mot de n lettres distinctes. Combien y a-t-il d'anagrammes possibles ?

Le nombre de permutations des n éléments de E est égal à  $n \times (n-1) \times \dots \times 1$ .

### Notation

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle de n et on note n!, l'entier  $1 \times 2 \times \dots \times n$ . Par suite, le nombre de permutation des n éléments de E est égal à n! .

On convient que  $0!=1$ .

### Activité 4

1. Calculer 4! ; 5! ; 6! ; 7! ; 8!.

2. Calculer  $\frac{5!}{3!}$  ;  $\frac{5!}{8!}$  ;  $\frac{125!}{123!}$  ;  $\frac{104!}{99!}$  .

3. Soit un entier naturel  $n \geq 3$ .

Simplifier les écritures  $\frac{n!}{(n-1)!}$  ,  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$  et  $\frac{(n-2)!}{n!}$  .

## 4. Arrangements

### Activité 1

On veut former des mots à deux lettres distinctes, avec les lettres A, B, C, D, E et F.  
A l'aide d'un arbre de choix, déterminer le nombre de mots possibles.

### Activité 2

Un parking comporte dix places libres repérées par les numéros 1 à 10.

1. De combien de façons peut-on garer une voiture ?
2. De combien de façons peut-on garer deux voitures ?
3. De combien de façons peut-on garer trois voitures ?
4. De combien de façons peut-on garer neuf voitures ?
5. De combien de façons peut-on garer dix voitures ?

### Définition

Soit  $E$  un ensemble fini non vide de cardinal  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $1 \leq p \leq n$ .

On appelle arrangement de  $p$  éléments de  $E$  tout  $p$ -uplet d'éléments distincts de  $E$ .

### Activité 3

Soit  $E$  un ensemble fini non vide de cardinal  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $1 \leq p \leq n$ .

1. Montrer que le nombre d'arrangements de  $p$  éléments de  $E$  est égal au produit  $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$ .

2. En déduire que  $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ .

### Théorème

Soit  $E$  un ensemble fini non vide de cardinal  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $1 \leq p \leq n$ .

Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments de  $E$  est l'entier noté  $A_n^p$ , (on lit « $A, n, p$ »), tel que

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

On convient que  $A_n^0 = 1$ .

### Activité 4

Une association comporte 50 membres. On doit élire un bureau composé de quatre membres (un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier).

Combien y a-t-il de bureaux possibles ?

### Activité 5

Un sac contient six jetons numérotés de 10 à 15.

On tire successivement trois jetons, sans les remettre dans le sac.

Déterminer le nombre de tirages possibles.

## Activité 6

1. Soit E un ensemble à quatre éléments et F un ensemble à trois éléments.

Dénombrer les applications injectives de E vers F.

2. Soit E un ensemble à quatre éléments et F un ensemble à dix éléments.

Dénombrer les applications injectives de E vers F.

3. Soit E un ensemble à p éléments et F un ensemble à n éléments tels que  $n \geq p$ .

Dénombrer les applications injectives de E vers F.

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que f est injective lorsque pour tous  $x, x'$  de E tels que  $x \neq x'$ , on a  $f(x) \neq f(x')$ .

## 5. Combinaisons

### Activité 1

On considère l'ensemble  $E = \{a, b, c, d\}$ .

1. Dénombrer les parties de E à un élément, les parties à trois éléments, les parties à quatre éléments.
2. On convient que la seule partie de E à zéro élément est la partie vide et on note  $P(E)$  l'ensemble de toutes les parties de E. Déterminer  $\text{card}(P(E))$ .

### Activité 2

Une association culturelle propose à ses adhérents six activités diverses.

De combien de façons différentes, un adhérent peut-il choisir ses activités ?

#### Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que  $0 \leq p \leq n$ .

On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie à p éléments distincts de E.

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est l'entier naturel noté

$$C_n^p, \text{ (on lit « } C, n, p \text{ »), ou } \binom{n}{p}$$

### Activité 3

Soit n un entier naturel .

1. Vérifier que  $C_0^0 = 1$  et que  $C_n^0 = 1$ .

On suppose que  $n \geq 1$ .

2. Vérifier que  $C_n^1 = n$  et  $C_n^n = 1$ .

3. Montrer que  $C_n^{n-1} = n$  .

## Activité 4

1. On veut écrire un mot de dix lettres et on dispose de trois fois la lettre a et sept fois la lettre b.



On commence par mettre les a, en choisissant trois cases parmi les dix. On place ensuite les b.

Le nombre de mots est donc  $C_{10}^3$ .

Qu'obtient-on en commençant par mettre les b ?

2. Soit E un ensemble fini de cardinal n et p tel que  $0 \leq p \leq n$ .

a. Vérifier que choisir une partie à p éléments de E revient à choisir une partie à  $n - p$  éléments.

b. En déduire que  $C_n^{n-p} = C_n^p$ .

## Activité 5

Au jeu de loto, on tire chaque semaine six nombres distincts parmi les entiers compris entre 1 et 49.

On désigne par " résultat " l'ensemble des six nombres tirés.

On se propose de déterminer le nombre de résultats possibles.

1. On appelle tirage un arrangement de six nombres parmi les quarante neuf nombres.

Combien y a-t-il de tirages au loto ?

2. On a effectué le tirage 21, 10, 7, 43, 2, 29.

Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble de ces six nombres ?

3. Combien de tirages conduisent au même ensemble de nombres tirés ?

## Activité 6

Soit n et p deux entiers naturels tels que  $n \geq 1$  et  $0 \leq p \leq n$ .

Montrer que pour tout  $0 \leq p \leq n$ ,  $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ .

## Théorème

Soit n et p deux entiers naturels tels que  $0 \leq p \leq n$ . Alors  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ .

## Activité 7

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires.

On tire simultanément quatre boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent une seule boule blanche ?
3. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent deux boules blanches ?
4. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent trois boules blanches ?
5. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent quatre boules blanches ?
6. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins une boule blanche ?
7. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent quatre boules noires ?
8. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent deux boules noires ?

## Activité 8

Soit deux entiers  $n$  et  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n - 1$ .

1. Soit  $E$  un ensemble fini non vide de cardinal  $n$  et  $e$  un élément de  $E$ .

a. Dénombrer les parties à  $p$  éléments de  $E$  qui contiennent  $e$ .

b. Dénombrer les parties à  $p$  éléments de  $E$  qui ne contiennent pas  $e$ .

c. En déduire que  $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ .

2. La formule  $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$  permet de calculer de proche en proche les nombres  $C_n^p$ .

En effet si on place dans un tableau à la  $n$ -ème ligne et  $p$ <sup>ième</sup> colonne le nombre  $C_n^p$ , (voir schéma ci contre), on obtient un tableau appelé triangle de Pascal.

	$p - 1$	$p$
$n - 1$	$C_{n-1}^{p-1}$	$C_{n-1}^p$
$n$		$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Compléter le triangle de Pascal pour  $n = 6$  représenté ci-dessous.

$n$	$p$	0	1	2	3	4	5	6
0		1						
1		1	1					
2		1	2	1				
3		1	3	3	1			
4		1	4	...	...	...		
5		...	...	...	...	...	...	
6		...	...	...	...	...	...	...

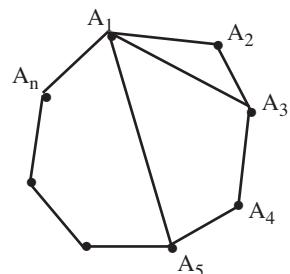
## Activité 9

Soit un polygone  $A_1A_2\dots A_n$  à  $n$  côtés,  $n \geq 3$ .

1. Dénombrer les segments d'extrémités deux sommets du polygone.

2. Une diagonale du polygone est un segment d'extrémités deux sommets non consécutifs de celui-ci.

Dénombrer les diagonales d'un polygone à  $n$  côtés,  $n \geq 3$ .



## Activité 10

Dans un jeu de 32 cartes, on appelle main tout ensemble de cinq cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant le valet de pique ?
3. Combien y a-t-il de mains contenant exactement une carte de couleur rouge ?
4. Combien y a-t-il de mains contenant au plus une reine ?
5. Combien y a-t-il de mains ne contenant aucun roi ?
6. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?

## Activité 11

Soit un entier naturel  $n \geq 3$ . On considère l'ensemble  $E = \{0, 1, \dots, n\}$ .

1. a. Soit un entier  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$ . Combien y a-t-il de couples  $(x, p)$  d'éléments de  $E$  avec  $x < p$  ?
  - b. Combien y a-t-il de couples  $(x, y)$  d'éléments de  $E$  tels que  $x < y$  ?
  - c. En déduire que  $1+2+\dots+n = C_{n+1}^2$ .
2. a. Soit un entier  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$ . Combien y a-t-il de triplets  $(x, p, z)$  d'éléments de  $E$  avec  $x < p < z$  ?
  - b. Combien y a-t-il de triplets  $(x, y, z)$  d'éléments de  $E$  avec  $x < y < z$  ?
  - c. En déduire que  $(n-1)+2(n-2)+\dots+p(n-p)+\dots+(n-1) = C_{n+1}^3$ .

## 6. Binôme de Newton

### Activité 1

Soit  $a$  et  $b$  deux réels.

1. a. Développer  $(a + b)^3$ .

b. Vérifier que  $(a + b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$ .

2. A l'aide du triangle de Pascal développer

- a.  $(a + b)^4$  ;
- b.  $(a + b)^5$  ;
- c.  $(a + b)^6$  .

3. Développer  $(a + 1)^6$ ,  $(a - 1)^5$ .

### Binôme de Newton

Soit  $a$  et  $b$  deux réels.

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a,

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$$

### Activité 2

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

- a. Développer  $(2 + 1)^n$ .

b. En déduire la valeur de  $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$ .

2. Soit un entier pair  $n \geq 2$ .

- a. Développer  $(1 + 1)^n$  et  $(1 - 1)^n$ .

- b. En déduire que les nombres  $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n$  et  $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1}$  sont égaux et donner leur valeur commune.

### Activité 3

Soit  $E$  un ensemble fini non vide de cardinal  $n$ .

1. Montrer que le nombre de toutes les parties de  $E$  est égal à  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$ .
2. En déduire que le nombre de toutes les parties de  $E$  est égal à  $2^n$ .

### Activité 4

1. Soit la fonction  $f : x \mapsto (1 + x)^n$ , où  $n$  est un entier naturel, supérieur ou égal à 2.

- a. Calculer de deux façons différentes le nombre dérivé  $f'(x)$ .

b. En déduire le calcul de  $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$ .

2. Calculer de même  $S_2 = 2C_n^2 + 6C_n^3 + \dots + n(n-1)C_n^n$ .

3. En déduire le calcul de  $S_3 = 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n$ .



# QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. En utilisant les lettres Q, C et M, on écrit tous les mots à trois lettres distinctes. On en obtient  
 6                            9                            27.

2. Une urne contient quatre boules numérotées 1, 2, 3, 4. On tire successivement avec remise trois boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles est  
 6                            12                            64.

3. Une assemblée élit un bureau de trois membres parmi quatre candidats. Le nombre de bureaux possibles est  
 24                            4                            64.

4. Le nombre de droites passant par deux sommets distincts d'un pentagone est égal à  
  $C_5^2$                              $A_5^2$                              $2^5$ .

## VRAI – FAUX

1. Les anagrammes du mot ANANAS sont au nombre de 6!.
  2. Les anagrammes du mot ANANAS sont au nombre de  $\frac{6!}{2! \times 3!}$ .
  3. Lorsqu'on lance successivement quatre dés, plus que la moitié des issues possibles contiennent au moins 1.
  4. Parmi les mots de 8 lettres écrits à l'aide des lettres O et S, il y a  $2^8 - (1 + C_8^1 + C_8^2)$  mots qui contiennent au moins 3 fois la lettre S.
  5. Dans un jeu de 32 cartes, le nombre de mains de 5 cartes contenant 2 as et 3 coeurs est  $C_2^2 \times C_{26}^3$ .

## Mobiliser ses compétences

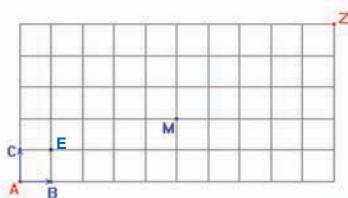
### Situation 1

1. Dénombrer les anagrammes du mot ESSENTIEL.
2. Dénombrer les anagrammes du mot MATHEMATIQUES.

### Situation 2

On peut se déplacer sur le réseau ci-contre, en ne se dirigeant que vers la droite ou bien vers le haut ( ainsi de A on ne peut aller que vers B ou C).

1. Dénombrer les mots à 15 lettres qui contiennent 10 fois la lettre d et 5 fois la lettre h.
2. En déduire le nombre de chemins qui joignent A à Z.
3. a. Déterminer le nombre de chemins qui joignent A à E.  
b. Déterminer le nombre de chemins qui joignent E à Z.  
c. En déduire le nombre de chemins qui joignent A à Z en passant par E.
4. Déterminer le nombre de chemins qui joignent A à Z en passant par E puis par M.



# Exercices et problèmes

## Exercice 1

Un appareil électroménager fabriqué en très grande série, peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B.

Sur cent appareils on a en moyenne les résultats suivants :

- dix appareils présentent le défaut A ( et peut-être aussi le défaut B),
- huit appareils présentent le défaut B ( et peut-être aussi le défaut A),
- quatre appareils présentent simultanément les deux défauts.

Combien d'appareils en moyenne, sur cent, ne présentent aucun défaut ?

## Exercice 2

1. Calculer pour tout  $0 \leq p \leq 8$ ,  $\frac{10!}{p!}$ .

2. Soit un entier  $n \geq 2$ .

a. Montrer que  $(n - 1)n$  est pair.

b. En déduire que pour tout entier  $0 \leq p \leq n - 2$ ,  $\frac{n!}{p!}$  est un entier pair.

## Exercice 3

Montrer que

a .  $2 \times 4 \times \dots \times (200) = 2^{100} 100!$  ;

b.  $\frac{2 \times 4 \times \dots \times (2000)}{3 \times 5 \times \dots \times (2001)} = \frac{(2^{1000} 1000!)^2}{(2001)!}$  .

## Exercice 4

1. Calculer  $n !$  pour  $n$  appartenant à  $\{2, 3, 4, 5\}$ .
2. A partir de quelle valeur de l'entier  $n$  a-t-on  $n !$  est un multiple de 10 ?
3. A partir de quelle valeur de l'entier  $n$  a-t-on  $n !$  est un multiple de 20 ?
4. A partir de quelle valeur de l'entier  $n$  a-t-on  $n !$  est un multiple de 100 ?
5. A partir de quelle valeur de l'entier  $n$  a-t-on  $n !$  est un multiple de 1000 ?
6. Trouver les trois derniers chiffres en écriture décimale de  
 $1 ! + 2 ! + 3 ! + 4 ! + \dots + 2006 !$ .

## Exercice 5

1. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres ?
2. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres distincts ?
3. Combien peut-on former de nombres pairs de quatre chiffres ?
4. Combien peut-on former de nombres pairs de quatre chiffres distincts ?
5. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres distincts contenant au moins l'un des chiffres 0, 1, 2 ?

## Exercice 6

Parmi toutes les mains de 8 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes, dénombrer celles contenant

- a. un seul as ;
- b. exactement deux as ;
- c. au moins un as ;
- d. au moins un as et au moins un valet.

## Exercice 7

Pour construire une grille de mots croisés de 10 lignes et 12 colonnes, on noircit 23 cases.

Combien de grilles distinctes peut-on obtenir ?

## Exercice 8

On dispose de 4 lettres A, 5 lettres B et 9 lettres C. Combien de mots à 18 lettres peut-on écrire avec ces lettres ?

## Exercice 9

On lance simultanément deux dés de couleurs différentes dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1. Déterminer le nombre d'issues possibles.
2. Dans combien de cas obtient-on deux chiffres pairs ?
3. Dans combien de cas obtient-on un chiffre pair et un chiffre impair ?
4. Dans combien de cas obtient-on une somme égale à 4 ?
5. Dans combien de cas obtient-on une somme égale à 9 ?
6. Dans combien de cas obtient-on une somme supérieure strictement à 3 ?

## Exercice 10

Une grenouille monte un escalier de 13 marches. Elle peut progresser en sautant d'une marche à la suivante ou en sautant par dessus une marche (de la marche  $n$  à la marche  $n+2$ ). De combien de façons distinctes peut-elle arriver au sommet de l'escalier ?

## Exercice 11

Une ligne de chemin de fer comporte 25 stations. Chaque station délivre des billets, de première ou bien de deuxième classe, pour chacune des autres stations. On distingue le billet A vers B du billet B vers A. La ligne est prolongée de trois stations. Combien doit-on imprimer de nouveaux types de billets ?

## Exercice 12

1. De combien de façons trois personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ronde ?
2. De combien de façons quatre personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ronde ?
3. De combien de façons huit personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ronde ?

## Exercice 13

A partir du mot BLANCHE, on forme des anagrammes.

1. Combien y en a-t-il ?
2. Combien se terminent par E ?
3. Dans combien de mots E suit-il H ?
4. Combien ne commencent pas par B ?
5. Dans combien de mots les voyelles sont-elles séparées exactement par deux lettres ?

## Exercice 14

De combien de façons peuvent s'asseoir trois filles et trois garçons dans une rangée de six places, sachant que filles et garçons doivent alterner ?

## Exercice 15

De combien de façons peut-on séparer douze personnes en trois groupes,  
a. de deux, quatre et six chacun ;  
b. de quatre chacun.

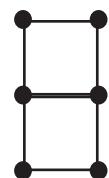
## Exercice 16

Un hôtel propose à sa clientèle la pratique de huit activités diverses.

De combien de façons un client peut-il choisir ses activités ?

## Exercice 17

Un caractère de l'écriture Braille est formé de points obtenus en piquant une feuille de papier à travers au moins l'un des six trous de la grille ci-contre.



1. Combien y a-t-il de caractères Braille formés avec 5 trous ?
2. Combien y a-t-il de caractères Braille formés avec 4 trous ?
3. Combien y a-t-il de caractères Braille formés avec 3 trous ?
4. Combien y a-t-il de caractères Braille ?

## Exercice 18

On lance simultanément trois dés dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Déterminer le nombre d'issues possibles lorsque

- a. les dés sont discernables ;
- b. les dés sont indiscernables.

## Exercice 19

1. Calculer les sommes

$$A = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \dots + C_{100}^{100}$$

$$\text{et } B = C_{100}^1 + C_{100}^3 + C_{100}^5 + \dots + C_{100}^{99}.$$

2. Soit deux entiers  $n$  et  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n+1$ .

a. Vérifier que  $C_{n+1}^p = \frac{n+1}{p} C_n^{p-1}$ .

b. En déduire la somme

$$S = \frac{1}{1} C_{100}^0 + \frac{1}{2} C_{100}^1 + \dots + \frac{1}{101} C_{100}^{100}.$$

## Exercice 20

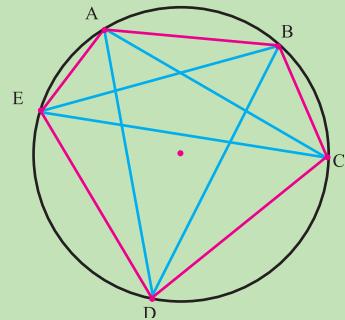
De combien de façons peut-on choisir trois entiers compris entre 1 et 9 qui soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

## Avec l'ordinateur

### Séquence 1

On sait que le nombre de diagonales d'un quadrilatère convexe est égal à deux et que celui d'un triangle est zéro.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire un pentagone ABCDE inscrit dans un cercle C.
2. Déterminer le nombre de diagonales du pentagone.
3. En plaçant un nouveau point F sur l'arc AE, déterminer le nombre de diagonales de l'hexagone ABCDEF.
4. Conjecturer le nombre de segments obtenus pour un polygone  $P_n$  de  $n$  sommets puis déterminer le nombre de ses diagonales.
5. Démontrer cette conjecture.



### Séquence 2

Après avoir écrit le titre **Triangle de " PASCAL "**, on inscrit le nombre 1 dans toutes les cellules du champ **A6:A16**. Puis, on saisit, dans les dix cellules du champ **B7:B16**, les nombres successifs de **1 à 10**.

De même, on tape, dans les dix cellules du champ **B7:K7** les nombres successifs de **1 à 10**.

Dans la cellule C3, recopier la formule `=SI($B3>=C$2;COMBIN($B3;C$2);")` en respectant scrupuleusement la présence ou l'absence des caractères "\$".

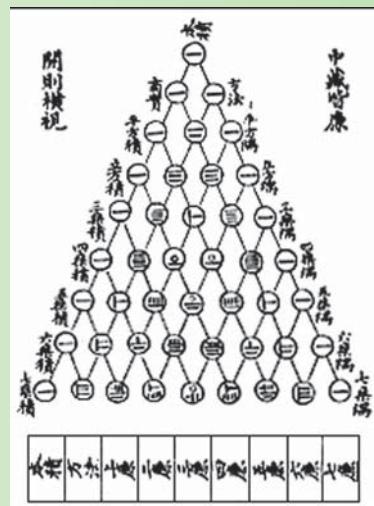
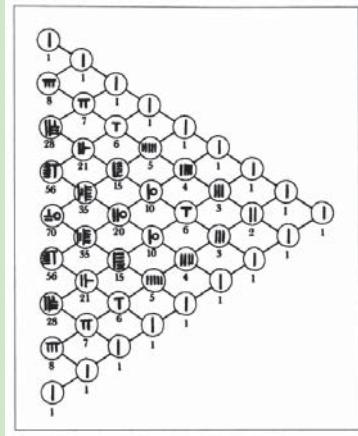
Recopier la formule dans toutes les cellules du champ **C3:K11** puis masquer les cellules **C2:K2** en leur donnant, par exemple, une couleur de police identique à la couleur de fond. Le triangle est terminé.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Triangle de "PASCAL"										
1										
2										
3										
4										
5										
6	1									
7	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	2	1							
9	1	3	3	1						
10	1	4	6	4	1					
11	1	5	10	10	5	1				
12	1	6	15	20	15	6	1			
13	1	7	21	35	35	21	7	1		
14	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
15	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
16	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10

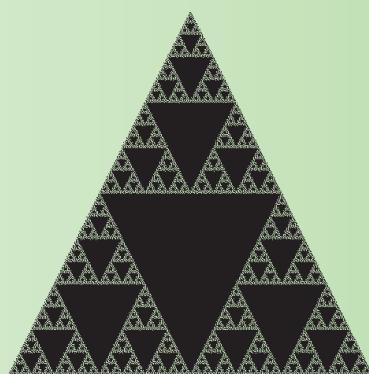
# Math – culture

Le triangle dit de Pascal, a été décrit par Zhu Shijie en 1303 dans son livre *le Miroir de Jade des Quatre Inconnues*. Dans ce livre, Zhu présente le triangle comme une méthode ancienne (de plus 200 années avant son temps) pour déterminer les coefficients du binôme, ce qui indique que la méthode était connue en Chine cinq siècles avant Pascal. Elle était également connue des mathématiciens arabes, par exemple Al Karaji et Omar Khayam.

Lorsque Pascal construit en 1654 son triangle arithmétique, il est loin d'être le premier à avoir organisé les nombres de cette façon. Le triangle arithmétique est même connu en Chine, en Inde ou dans les pays arabes dès le XI<sup>e</sup> ou le XII<sup>e</sup> siècle. L'apport de Pascal est une étude systématique, et surtout pour réaliser cette étude, il utilise pour la première fois le raisonnement par récurrence.



En remplaçant dans le triangle de Pascal les nombres pairs par 0 et les impairs par 1, ou encore les entiers pairs par un carreau noir et les impairs par un carreau rouge, nous obtenons ce qu'on appelle le triangle de Sierpinski.



Math – culture

# Chapitre 7

## Divisibilité dans $\mathbb{N}$

*" La mathématique est la reine des Sciences, mais la théorie des nombres est la reine des sciences mathématiques. "*

**Gauss**

## Pour commencer

### Activité 1

Soit  $n = 46a2$  où  $a$  désigne le chiffre des dizaines dans l'écriture décimale de  $n$ .

1. Pour quelles valeurs de  $a$  l'entier  $n$  est-il divisible par 2 ?
2. Pour quelles valeurs de  $a$  l'entier  $n$  est-il divisible par 4 ?
3. Pour quelles valeurs de  $a$  l'entier  $n$  est-il divisible par 8 ?

### Activité 2

Trouver tous les couples d'entiers naturels  $(x, y)$  tels que  $291=13x + y$ .

### Activité 3

Sur la grille ci-dessous, il y a 5 nombres. Lorsqu'on lit ces nombres de gauche à droite, on constate que chaque nombre à partir du deuxième est soit égal au double de celui qui est à sa gauche, soit égal à celui qui est à sa gauche plus un.

2				13
---	--	--	--	----

Retrouver les nombres manquants.

# Cours

## 1. Le principe de récurrence

### Activité 1

Soit A un ensemble d'entiers naturels vérifiant les hypothèses suivantes :

- 1 appartient à A,
- si n appartient à A alors n-1 appartient à A,
- si n appartient à A alors 2n appartient à A.

Montrer que 10 appartient à A, 100 appartient à A.

### Activité 2

Soit A un ensemble d'entiers naturels vérifiant les hypothèses suivantes

- 0 appartient à A,
- si n appartient à A alors n+1 appartient à A.

1. Montrer que 10 appartient à A, 100 appartient à A, 1000 appartient à A.

2. On se propose de déterminer l'ensemble A.

- a. Supposons qu'il existe des entiers naturels n qui n'appartiennent pas à A et soit q le plus petit de ces entiers.

Que peut-on dire de q-1 ?

- b. Conclure.

### Activité 3

On se propose de montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , l'entier  $4^n + 2$  est divisible par 3

On note pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $P_n$  la propriété "  $4^n + 2$  est divisible par 3 ".

1. Vérifier que  $P_1$  est vraie.

2. a. Vérifier que  $4^{n+1} + 2 = 4(4^n + 2) - 6$ .

b. En déduire que si  $P_n$  est vraie alors  $P_{n+1}$  est vraie.

3. Supposons qu'il existe des entiers naturels n pour lesquels  $P_n$  n'est pas vraie.

Soit q le plus petit de ces entiers.

a. Que peut-on dire de  $P_{q-1}$  ?

b. Conclure.

## Principe de récurrence

Soit  $n_0$  un entier naturel et  $P_n$  une propriété dépendant d'un entier naturel n supérieur ou égal à  $n_0$ .

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $P_{n_0}$  est vraie,
  - si  $P_n$  est vraie alors  $P_{n+1}$  est vraie,
- alors  $P_n$  est vraie pour tout n supérieur ou égal à  $n_0$ .

## Activité 4

1. En utilisant le principe de récurrence, montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

a.  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  ; b.  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ .

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , 6 divise  $5n^3 + n$ .

## 2. Divisibilité

### 2.1 Diviseurs d'un entier naturel

#### Activité 1

Soit  $n = 10ab8c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  désignent respectivement le chiffre des milliers, le chiffre des centaines et le chiffre des unités dans l'écriture décimale de  $n$ .

1. Pour quelles valeurs de  $c$  l'entier  $n$  est-il divisible par 2 ?
2. Pour quelles valeurs de  $c$  l'entier  $n$  est-il divisible par 2 et par 5 ?
3. Pour quelles valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  l'entier  $n$  est-il divisible par 2, par 5 et par 3 ?
4. Pour quelles valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  l'entier  $n$  est-il divisible par 2, par 5 et par 9 ?

#### Définition

Soit  $a$  et  $d$  deux entiers naturels, tels que  $d$  soit non nul.

On dit que  $a$  est divisible par  $d$  s'il existe un entier naturel  $k$  tel que  $a = dk$ .

#### Vocabulaire

Si un entier naturel  $a$  est divisible par un entier naturel non nul  $d$ , on dit que  $d$  est un diviseur de  $a$  et que  $a$  est un multiple de  $d$ .

#### Activité 2

1. Enoncer les règles de divisibilité par 4 ; 8 ; 11.
2. Parmi les entiers 12544 ; 254873120 ; 114512364578095256, lesquels sont divisibles
  - a. par 4 ?
  - b. par 8 ?
  - c. par 11 ?

#### Activité 3

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer que si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $a$ , alors  $a = b$ .
2. Soit  $c$  un entier naturel. Montrer que si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$ , alors  $a$  divise  $c$ .

## Propriétés

Pour tous entiers naturels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $a$  et  $b$  soient non nuls,

- 1 divise  $a$  et  $a$  divise  $a$ .
- Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $a$ , alors  $a = b$ .
- Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$  alors  $a$  divise  $c$ .

### Activité 4

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 36.
2. En déduire tous les couples  $(m, n)$  d'entiers naturels tels que  $mn = 36$ .
3. Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que  $(a - 3)(b + 5) = 36$ .
4. Déterminer tous les couples  $(m, n)$  d'entiers naturels tels que  $mn = 180$ .

Soit  $a$ ,  $b$  et  $d$  trois entiers naturels, tels que  $d$  soit non nul.  
Si  $d$  divise  $a$  alors  $d$  divise  $ab$ .

### Activité 5

Soit  $n$  un entier naturel, pair et non nul.  
Montrer que  $n + 1$  divise  $1 + 2 + \dots + n$ .

## 2.2 Combinaisons linéaires

### Activité 1

Répondre par vrai ou faux, sans faire de calcul.  
1100000 + 13 est divisible par 11.  
99999993 + 260 est divisible par 3.  
1254789040 – 240 est divisible par 8.

### Activité 2

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers naturels tels que  $c$  est non nul.  
Montrer que si  $c$  divise  $a$  et  $b$  alors  $c$  divise  $a + b$  et  $a - b$  et  $\alpha a + \beta b$  pour tous entiers naturels  $\alpha$  et  $\beta$ .

## Propriétés

Soit  $a$ ,  $b$  deux entiers naturels et  $c$  un entier naturel non nul.

Si  $c$  divise  $a$  et  $b$  alors  $c$  divise  $a + b$  et  $a - b$  (lorsque  $a \geq b$ ) et  $\alpha a + \beta b$ , pour tous entiers naturels  $\alpha$  et  $\beta$ .

Si  $c$  divise  $a$  et ne divise pas  $b$  alors  $c$  ne divise pas  $a + b$ .

### Activité 3

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$ , tels que  $n$  divise  $n + 8$ .
2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$ , tels que  $n$  divise  $2n^2 + 55$ .
3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$ , tels que  $2n$  divise  $2n^2 + 16$ .
4. En remarquant que  $n + 17 = (n - 1) + 18$ , déterminer les entiers naturels  $n$  tels que  $n - 1$  divise  $n + 17$ .

#### Activité 4

1. Vérifier que pour tout entier naturel  $n > 6$ ,  $\frac{n+7}{n-6} = 1 + \frac{13}{n-6}$ .
2. En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n > 6$ , tels que  $\frac{n+7}{n-6}$  est un entier naturel.

#### Activité 5

1. Vérifier que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  
$$10^{3(n+1)} - (-1)^{n+1} = 1000 \times 10^{3n} - (-1)^n \times 10^3 + (-1)^n \times 1001.$$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$ , 1001 divise  $10^{3n} - (-1)^n$ .
3. En déduire que les entiers 1 000 000 000 000 001 et 999 999 999 999 999 999 sont divisibles par 1001.

### 2.3 Division euclidienne

#### Activité 1

1. Montrer que si un entier naturel  $n$  est pair alors  $n^2$  est pair.
2. Montrer que si un entier naturel  $n$  est impair alors  $n^2$  est impair.
3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'entier  $n(n^2 + 3)$  est pair.

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $b \neq 0$ . Effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , c'est trouver l'unique couple d'entiers  $(q, r)$  tel que  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < b$ .

#### Activité 2

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de  $n$  par 5 ?
2. Déduire, pour chaque cas, le reste de la division euclidienne de  $n^4 - 1$  par 5.
3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'entier  $n^5 - n$  est divisible par 5.

#### Activité 3

Soit  $n$  un entier naturel.

1. Montrer que le reste de la division euclidienne de  $10^n$  par 9 est égal à 1.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de  $10^n$  par 3.

#### Activité 4

1. Déterminer le reste de la division euclidienne par 10 des nombres  $2 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5, 2^6, 2^7$ .
2. Quel est le reste de la division euclidienne de  $2^{4n}$  par 10,  $n \geq 0$  ?
3. Quel est le reste de la division euclidienne de  $2^{2006}$  par 10 ?

#### Activité 5

Dans la division de 82368941 par 253687, la calculatrice donne 324.6872761.

1. Quel est le quotient entier de la division de 82368941 par 253687 ?
2. Ecrire la division euclidienne de 82368941 par 253687.
3. Ecrire la division euclidienne de 9783421 par 17365.

### 3. PGCD de deux entiers naturels non nuls

#### 3.1 Algorithme d'Euclide

##### Activité 1

Pour chacun des cas ci-dessous,  
calculer  $a \wedge b$   
 $a = 255 ; b = 605.$   
 $a = 1240 ; b = 312.$

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$  est l'entier  $d$ , noté  $a \wedge b$  et tel que

- $d$  divise  $a$  et  $b$ ,
- tout diviseur  $k$  de  $a$  et  $b$  est inférieur ou égal à  $d$ .

##### Activité 2

Montrer la propriété ci-dessous.

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Si  $b$  divise  $a$  alors  $a \wedge b = b$ .

##### Activité 3

Calculer

$140 \wedge 2800 ; 140000 \wedge 4200000 ; (2n) \wedge (6n)$ , où  $n$  est un entier naturel non nul.

##### Activité 4

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que  $a = bq + r$ ,  $0 \leq r < q$ .

- Quel est le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$  lorsque  $r$  est nul ?
- Dans cette question, on suppose que  $r$  est non nul. Soit  $d$  un entier.

Montrer que  $d$  est un diviseur commun à  $a$  et  $b$  si, et seulement si,  $d$  est un diviseur commun à  $b$  et  $r$ .

- En déduire que  $a \wedge b = b \wedge r$ .

##### Activité 5

- Le but de l'activité est de trouver  $1128 \wedge 508$ .

###### Etape 1

Faire la division euclidienne de 1128 par 508 et déterminer le reste  $r_1$ .

Déduire de l'activité précédente que  $1128 \wedge 508 = 508 \wedge r_1$ .

###### Etape 2

Faire la division euclidienne de 508 par  $r_1$  et déterminer le reste  $r_2$ .

Vérifier que  $r_2 < r_1$  et que  $508 \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$ .

Continuer le procédé jusqu'à obtenir un reste nul.

Résumer les résultats obtenus dans le tableau ci-contre.

Montrer que  $1128 \wedge 508 = 4$ .

- Soit  $k$  un entier naturel non nul, utiliser le tableau précédent pour déterminer  $1128 k \wedge 508 k$ .

1128	508	$r_1 =$
508	112	$r_2 =$
112	60	$r_3 =$
60	52	$r_4 =$
52	8	$r_5 =$
8	4	$r_6 =$

## Activité 6

1. a. Déterminer  $6988091 \wedge 992152$ .
- b. En déduire  $(6988091 \times 13) \wedge (992152 \times 13)$ .
2. Déterminer tous les diviseurs de  $(6988091 \times 15) \wedge (992152 \times 15)$ .

L'algorithme utilisé dans l'activité 5 est appelé algorithme d'Euclide.

Il peut être décrit de la manière suivante

Soit  $a = bq_1 + r_1$  la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

Si  $r_1 = 0$  le procédé s'arrête. Sinon, on écrit

$b = r_1q_2 + r_2$  la division euclidienne de  $b$  par  $r_1$ .

Si  $r_2 = 0$  le procédé s'arrête. Sinon, on écrit

$r_1 = r_2q_3 + r_3$  la division euclidienne de  $r_1$  par  $r_2$ .

On continue le procédé, jusqu'à obtenir à l'étape  $n$

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$  la division euclidienne de  $r_{n-2}$  par  $r_{n-1}$ .

La suite des restes est une suite d'entiers naturels strictement décroissante. Par suite, il existe donc un entier  $m$  tel que  $r_m$  soit égal à 0.

Le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels est le dernier reste non nul de la suite des divisions euclidiennes dans l'algorithme d'Euclide.

Les propriétés ci-dessous découlent de l'algorithme d'Euclide.

## Propriétés

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls

Si  $d$  est un diviseur commun à  $a$  et  $b$ , alors  $d$  divise  $a \wedge b$ .

Pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $ka \wedge kb = k(a \wedge b)$ .

## Activité 7

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs communs aux entiers 145000 et 70000.
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs communs aux entiers 8316 et 630.

## 3.2 Entiers premiers entre eux

### Activité 1

Déterminer  $a \wedge b$  dans chacun des cas ci-dessous.

1.  $a = 170$  et  $b = 33$ .
2.  $b = 1100$  et  $b = 147$ .

Deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  sont dits premiers entre eux, si leur plus grand commun diviseur est égal à 1.

## Activité 2

1. Compléter le tableau ci-contre en écrivant dans chaque case  $n \wedge m$ .
2. En déduire tous les couples d'entiers non nuls et inférieurs à 10, premiers entre eux.

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1							
2		1	2	1						
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

## Activité 3

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

Montrer que si  $d$  est le plus grand commun diviseur

de  $a$  et  $b$ , alors il existe un couple d'entiers naturels  $(a', b')$  tel que  $a = da'$  et  $b = db'$  et  $a' \wedge b' = 1$ .

Le théorème suivant découle du résultat de l'activité ci-dessus.

## Théorème

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls et  $d = a \wedge b$  leur plus grand commun diviseur.  
Alors les entiers  $a'$  et  $b'$  tels que  $a = da'$  et  $b = db'$  sont premiers entre eux.

## Activité 4

Mettre les fractions suivantes sous forme irréductible.

$$\frac{25600}{880} ; \frac{11011}{99999}.$$

## Activité 5

1. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que  $a = b+1$ . Montrer que  $a \wedge b = 1$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , les entiers  $2n$  et  $2n+1$  sont premiers entre eux.
3. Déterminer  $2n^2 \wedge n(2n+1)$ , où  $n$  est un entier naturel non nul.

## Activité 6

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que

$$S \left\{ \begin{array}{l} a + b = 120, \\ a \wedge b = 15. \end{array} \right.$$

1. Montrer que le système  $S$  est équivalent au système  $S'$   $\left\{ \begin{array}{l} a = 15a', \\ b = 15b', \\ a' + b' = 8, \\ a' \wedge b' = 1. \end{array} \right.$
2. Déterminer l'ensemble de tous les couples  $(a', b')$  d'entiers naturels, solutions du système  $S'$ .
3. En déduire l'ensemble de tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels, solutions du système  $S$ .

## Activité 7

Déterminer l'ensemble de tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels solutions du système

$$\begin{cases} a + b = 208, \\ a \wedge b = 13. \end{cases}$$

## 4. Lemme de Gauss

### Activité 1

- Montrer que 144 et 385 sont premiers entre eux.
- Déterminer  $144000 \wedge 385000$ .

### Activité 2

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux et  $c$  un entier naturel non nul.

- Justifier que  $c$  est le plus grand commun diviseur de  $ac$  et  $bc$ .
- Montrer que si  $a$  divise  $bc$  alors  $a$  divise  $c$ .

On a donc obtenu le lemme ci-dessous.

### Lemme de Gauss

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux et si  $a$  divise  $bc$ , alors  $a$  divise  $c$ .

### Activité 3

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

- Montrer que si 4 divise  $ab$  et si  $a$  est impair alors 4 divise  $b$ .
- Montrer que si 16 divise  $ab$  et si  $a$  est impair alors 16 divise  $b$ .

### Activité 4

1. Déterminer tous les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $3(a - 2) = 2(b - 3)$ .

2. Déterminer tous les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $5a = 3(b + 10)$ .

3. Déterminer tous les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $22(a - 1) = 26(b - 3)$ .

### Activité 5

1. Montrer qu'un entier naturel est divisible par 6 si et seulement si il est divisible par 2 et par 3.

2. Enoncer la règle de divisibilité par 15.

### Activité 6

Soit  $a$  un entier naturel.

- Montrer que  $a(a + 1)(a + 2)$  est divisible par 6.
- Montrer que  $a(7a + 1)(2a + 1)$  est divisible par 6.

## 5. PPCM de deux entiers naturels non nuls

### Activité 1

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer  $a \vee b$ .

$$a = 25 ; b = 12.$$

$$a = 99 ; b = 180.$$

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

Le plus petit commun multiple à  $a$  et  $b$  est l'entier naturel non nul  $k$  tel que

- $k$  est un multiple de  $a$  et  $b$ ,
- tout multiple non nul de  $a$  et  $b$  est supérieur ou égal à  $k$ .

On note alors  $k = a \vee b$ .

### Activité 2

Calculer

$$35280 \vee 11550 ; 256 \vee 768 ; 111 \vee 4440 ; (10n+10) \vee (30n^2 - 30),$$

où  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si  $b$  divise  $a$  alors  $a \vee b = a$

Pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $ka \vee kb = k(a \vee b)$

### Activité 3

Un phare émet deux signaux différents entre minuit et six heures du matin un signal rouge toutes les 25 secondes et un signal jaune toutes les 2 minutes. Ces deux feux sont émis simultanément à minuit.

A quelles heures y aura-t-il simultanément un feu rouge et un feu jaune ?

### Activité 4

Déterminer le plus petit entier naturel non nul  $n$  tel que

- le reste de la division euclidienne de  $n$  par 58 vaut 2,
- le reste de la division euclidienne de  $n$  par 125 vaut 2.

### Activité 5

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

On pose  $d = a \wedge b$  et  $m = a \vee b$ .

1. Soit  $a'$  et  $b'$  tels que  $a = da'$  et  $b = db'$ .

Montrer que  $(a \wedge b) \times (a \vee b) = d^2 a'b'$ . Conclure.

2. En déduire que si  $a \wedge b = 1$  alors  $a \vee b = ab$ .

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer  $a \wedge b$  et en déduire  $a \vee b$ .

$$a = 1386 \text{ et } b = 546 ; a = 12000 \text{ et } b = 60000.$$

### Propriété

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Alors  $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$ .

### Activité 6

Résoudre dans  $\mathbb{N}$  chacun des systèmes ci-dessous.

$$S_1 \begin{cases} ab = 168, \\ a \vee b = 24. \end{cases} ; \quad S_2 \begin{cases} a + b = 15, \\ a \vee b = 18. \end{cases} ; \quad S_3 \begin{cases} a + b = 56, \\ a \vee b = 105, \\ a \leq b. \end{cases}$$

# QCM – VRAI – FAUX

## QCM

Cocher la réponse exacte.

1. L'écriture  $282 = 14 \times 19 + 16$  est la division euclidienne de 282 par

16

14

19.

2. Si  $n$  est un entier naturel non nul alors  $n \wedge 1$  est égal à

1

$n+1$

$n$ .

3. Soit deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  tels que  $a$  divise  $b$ . Alors  $a \vee b$  est égal à

$a$

$b$

$ab$ .

4. Soit  $n$  un entier naturel alors le nombre  $n+2$  est premier avec

$n+3$

$2n + n^2$

$2n + 4$ .

5. Si  $a$  est un entier naturel non divisible par 3, alors le reste de la division euclidienne de  $a^2$  par 3 est égal à

0

1

2.

## VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Deux entiers impairs consécutifs et différents de 1 sont premiers entre eux.

2. Si le PPCM de deux entiers naturels est un multiple de 15 alors au moins l'un des deux entiers est multiple de 15.

3. Le PPCM de deux entiers naturels distincts est toujours strictement supérieur à leur PGCD.

4. Le PPCM de deux entiers naturels pairs est égal à leur produit.

5. Pour tout entier naturel  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $4^n$  par 3 est égal à 1.

## Mobiliser ses compétences

### Situation 1

1. Soit  $n$  un entier naturel. On pose  $c = 6n+5$  et  $d = 7n+6$ .

Calculer  $7c-6d$  et en déduire que les entiers  $c$  et  $d$  sont premiers entre eux.

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , les entiers  $9n + 5$  et  $7n + 4$  sont premiers entre eux.

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , les entiers  $9n + 5$  et  $3n + 2$  sont premiers entre eux.

### Situation 2 : Systèmes de numération

Soit  $n = \underline{35241}$ . On remarque que  $n = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$ .

On dit que  $\underline{35241}$  est l'écriture décimale du nombre  $n$  ou que le nombre  $n$  s'écrit  $\underline{35241}$  en base 10.

Soit  $a$  un entier naturel distinct de 0 et 1.

Dans le système de numération à base  $a$ , les chiffres sont  $0, 1, 2, \dots, a-2, a-1$ .

Par exemple

en base 2 les chiffres sont  $0, 1$  ;

en base 6 les chiffres sont  $0, 1, 2, 3, 4, 5$  ;

en base 13 les chiffres sont  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, \gamma$ ,

(où les chiffres  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  désignent respectivement 10 unités, 11 unités et 12 unités).

Dans ces conditions si  $x, y, z$  et  $w$  sont des chiffres en base  $a$ , alors l'écriture  $\underline{xyzw}$  désigne le nombre  $xa^3 + ya^2 + za^1 + wa^0$ .

1. Un entier  $n$  s'écrit en base  $a$ ,  $\underline{10235}$ .

Trouver l'écriture décimale de  $n$  dans chacun des cas suivants :

$a = 6$ ,  $a = 8$ ,  $a = \underline{12}$ .

2. Un entier s'écrit  $xy$  en base 5 et  $\underline{xy}$  en base 7.

Trouver l'écriture décimale de ce nombre.

3. Dans ce qui suit on se propose d'écrire en base 8 le nombre 163.

a. Effectuer les divisions euclidiennes successives :

de 163 par 8, (on note  $q_1$  le quotient obtenu),

de  $q_1$  par 8, (on note  $q_2$  le quotient obtenu),

de  $q_2$  par 8, (on note  $q_3$  le quotient obtenu).

On arrête les divisions lorsque le quotient est strictement inférieur à 8.

b. En déduire que  $163 = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$ . Donner alors l'écriture en base 8 du nombre 163.

c. Ecrire en base 8 les nombres 251 et 1564.

4. Ecrire en base 2 les nombres 25, 53, 79 et 121.

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

1. Déterminer à l'aide d'un arbre de choix, l'ensemble des diviseurs de 270.
2. Déterminer tous les diviseurs de 540.
3. Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que  $ab = 270$ .  
En déduire tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que  $ab = 540$ .
4. Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que  $(a-3)(b+5) = 270$ .
5. Déterminer tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que  $(a-5)(b-9) = 540$ .

## Exercice 2

1. Déterminer tous les couples  $(m, n)$  d'entiers naturels tels que  $mn = 225$ .
2. En déduire tous les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels tels que  $ab = 450$ .
3. Déterminer tous les couples  $(x, y)$  d'entiers naturels tels que  $(x-5)(y-9) = 450$ .

## Exercice 3

1. Soit  $n$  un entier naturel, tel que le reste de la division euclidienne de  $n$  par 6 est 5.  
Quel est le reste de la division euclidienne de  $3n$  par 6?  
Quel est le reste de la division euclidienne de  $n^2$  par 6?  
Quel est le reste de la division euclidienne de  $2n^2+6$  par 6 ?
2. Soit  $n$  un entier naturel, tel que le reste de la division euclidienne de  $n$  par 5 est 4.  
Quel est le reste de la division euclidienne de  $n^2-n$  par 5 ?

## Exercice 4

1. Soit  $n$  un entier naturel.  
Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de  $n$  par 5 ?
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'entier  $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$  est divisible par 5.

## Exercice 5

- Soit  $n$  un entier naturel.
1. a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $3n(n+1)$  est divisible par 6.
  - b. Montrer par récurrence que  $n^3-n$  est divisible par 6.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $5n(n^3 + 1)$  est divisible par 10.
- b. Développer  $(n + 1)^5$ .
- c. Montrer par récurrence sur  $n$  que,  $n^5 - n$  est divisible par 10.

## Exercice 6

1. Factoriser  $n^2 + 3n + 2$ , où  $n$  est un entier naturel.
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à  $n^2 + 3n + 2$  et  $n+1$ , où  $n$  est un entier naturel.

## Exercice 7

- Soit  $n$  un entier naturel non nul vérifiant
- le reste de la division euclidienne de 27693 par  $n$  est 5508,
  - le reste de la division euclidienne de 100000 par  $n$  est 13.
- Déterminer l'entier  $n$ .

## Exercice 8

- Soit un entier naturel non nul  $n$ .
1. Montrer, par récurrence sur  $n$ , que  $(2n)! = 1 \times 2 \times \dots \times (2n-1) \times (2n)$  est divisible par  $2^n$ .
  2. Montrer que pour tout entier non nul  $n$ ,  $(n+1) \times (n+2) \times \dots \times (2n)$  est divisible par  $2^n$ .

## Exercice 9

- Soit un entier naturel  $n$ .
1. Montrer par récurrence sur  $n$ , que  $2^{3n} - 1$  est divisible par 7.
  2. En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  et  $2^{3n+2} - 4$  sont divisibles par 7.
  3. Déterminer le reste par la division par 7 des nombres suivants  
 $2^{3000}$ ;  $2^{4015}$ ;  $2^{10250}$ .

## Exercice 10

- Soit le polynôme  $P(x) = x^3 - 2x - 21$ .
1. Montrer que si  $n$  est un entier tel que  $P(n) = 0$ , alors  $n$  divise 21.
  2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 21 et en déduire une racine de  $P$ .
  3. Résoudre l'équation  $P(x) = 0$ .

## Exercice 11

1. Vérifier que 37 divise 148, 481 et 814.
2. Vérifier que 37 divise 259, 592 et 925.
3. Soit  $a, b$  et  $c$  trois entiers.
  - a. En remarquant que 37 divise 999 montrer que si 37 divise  $100a + 10b + c$  alors 37 divise  $100b + 10c + a$ .
  - b. Soit  $x, y$  et  $z$  trois entiers d'écritures décimales respectives  $\underline{\underline{abc}}$ ,  $\underline{bca}$  et  $\underline{cab}$ . Montrer que si 37 divise  $x$  alors 37 divise  $y$  et  $z$ .

## Exercice 12

1. Soit trois entiers non nuls  $a, b$  et  $c$  tels que  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux.
  - a. Montrer que tout diviseur de  $a$  distinct de 1 est premier avec  $c$ .
  - b. Montrer que  $a \wedge b$  divise  $a \wedge (bc)$ .
  - c. Montrer que  $a \wedge (bc)$  divise  $a \wedge b$ .
  - d. En déduire que  $a \wedge b = a \wedge (bc)$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On se propose de montrer que les entiers

$2n+1$  et  $\frac{n(n+1)}{2}$  sont premiers entre eux.

- a. En utilisant 1.d, montrer que
$$(2n+1) \wedge \frac{n(n+1)}{2} = (2n+1) \wedge (n(n+1)).$$
- b. Montrer que si un nombre premier divise  $n(n+1)$  alors il divise soit  $n$  soit  $n+1$ .
- c. En déduire que  $(2n+1) \wedge (n(n+1)) = 1$ .
- d. Conclure.

## Exercice 13

1. a. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier naturel  $n$  par 7 ?
  - b. Montrer que parmi les entiers  $a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111, a_4 = 1111, a_5 = 11111, a_6 = 111111, a_7 = 1111111, a_8 = 11111111$ , il y a au moins deux qui ont le même reste dans la division euclidienne par 7. On note  $a_k$  et  $a_{k'}$  deux de ces entiers.
  - c. Montrer que  $a_k - a_{k'}$  est divisible par 7 et en déduire qu'il existe un entier naturel non nul divisible par 7 dont l'écriture décimale ne contient que des 0 ou des 1.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , il existe un entier naturel non nul divisible par  $n$  dont l'écriture décimale ne contient que des 0 ou des 1.

## Avec l'ordinateur

### Système de numération

On se propose à l'aide d'un tableur de déterminer l'écriture dans une base b, d'un nombre donné N.  
Le nombre N choisi sera écrit dans la cellule A2, et la base b dans B2.

Dans la cellule A3 on inscrit la formule =ENT(A2/B\$2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Entrer N dans la case A2	base b:	chiffre des unités	5					
2	2435		6 xb	3					
3	405		xb <sup>2</sup>	1					
4	67		xb <sup>3</sup>	5					
5	11		xb <sup>4</sup>	1					
6	1		xb <sup>5</sup>	0					
7	0		xb <sup>6</sup>	0					
8	0			0					
9	0			0					
10	0			0					
11	0			0					
12	0			0					
13	0			0					
14	0			0					
15	0			0					
16	0			0					
17	0			0					
18									
19									
20									
21	2435 s'écrit en base		6 :	1	5	1	3	5	
22									
23									

# Math – culture



## Principe de récurrence et induction.

" Le principe par récurrence est toujours utile , puisque , nous faisons franchir d'un bond autant d'étapes que nous le voulons, il nous dispense de vérifications fastidieuses et monotones qui deviendraient rapidement impraticables. Mais il devient indispensable dès qu'on vise au théorème général, dont la vérification analytique nous rapprocherait sans cesse sans nous permettre de l'atteindre..."

On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l' affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. "

**Henri Poincaré**

*"la science et son hypothèse"*

Histoire des systèmes de numération

Math – culture

# Chapitre 8

## Les nombres premiers

*" Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths, je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes ! "*

*Einstein*

## Pour commencer

### Activité 1

1. Le nombre  $10346^2 - 10345^2$  est-il premier ?
2. Le nombre  $12345678987654321^4 - 123456789^4$  est-il premier ?

### Activité 2

1. Déterminer le reste de la division euclidienne par 3 des nombres  $2, 2^2, 2^3, 2^4$  et  $2^5$ .
2. Quel est le reste de la division euclidienne de  $2^{2n}$  par 3,  $n \geq 1$  ?
3. Quel est le reste de la division euclidienne de  $2^{2006} + 1$  par 3 ?

### Activité 3

Combien y a-t-il de 0 à la fin de  $100!$  ?

# Cours

## 1. Nombres premiers

### Définition

Un entier naturel  $p \geq 2$  est dit premier, si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

### Activité 1

Dire pour chacun des entiers ci-dessous s'il est premier ou composé.

4325463213 ; 56789101244 ; 235525752.

Un entier naturel, distinct de 1, non premier est appelé entier composé.

### Activité 2

Soit  $n$  un entier naturel.

1. Factoriser  $5n^2 - 9n$ .

2. Pour quelle(s) valeur(s) de  $n$ , l'entier  $5n^2 - 9n$  est-il premier ?

### Activité 3

1. Soit  $p$  un entier naturel non nul, montrer que l'un des entiers  $p, p+2, p+4$  est divisible par 3.

2. En déduire qu'il existe un unique triplet d'entiers naturels  $(p, p+2, p+4)$  tel que  $p, p+2, p+4$  soient premiers.

### Activité 4

Soit  $n$  un entier naturel composé supérieur à 1 et  $p$  le plus petit diviseur de  $n$ , distinct de 1.

Montrer que  $p$  est premier.

### Théorème

- Tout entier naturel différent de 1 admet au moins un diviseur premier.
- Si  $n$  est un entier naturel distinct de 1, alors le plus petit diviseur de  $n$  distinct de 1 est premier.

### Activité 5

Soit  $n > 1$  un entier naturel composé. On désigne par  $p$  le plus petit diviseur de  $n$ , distinct de 1. Montrer que  $p^2 \leq n$ .

L'activité précédente nous donne un critère pour savoir si un entier naturel est composé.

### Théorème

Un entier naturel  $n > 1$  est composé, si et seulement si, il admet un diviseur premier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ .

Le théorème précédent nous affirme que pour examiner si un nombre est premier, il suffit de voir qu'il n'est divisible par aucun entier premier inférieur ou égal à sa racine carrée.

## Activité 6

Montrer que 1907 et 1997 sont premiers.

## Activité 7

On a présenté dans le tableau ci-dessous la liste des entiers  $n$  tels que  $2 \leq n \leq 50$ .

2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37
39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50						

1. a. Encercler 2, puis barrer tous les multiples de 2 distincts de 2.  
b. Quel est le plus petit entier naturel strictement supérieur à 2, non barré. Pourquoi est-il premier ?  
c. Encercler cet entier et barrer tous ses multiples.
2. On se propose de déterminer tous les nombres premiers inférieurs à 46.  
Expliquer pourquoi il suffit de barrer les multiples de 2, 3, 5.  
Le procédé utilisé dans la question précédente est connu sous le nom de crible d'Eratosthène
3. Utiliser le crible d'Eratosthène pour donner la liste des nombres premiers inférieurs à 200.

## Activité 8

1. Calculer  $6!$ .
2. Montrer que chacun des entiers  $6! + 2 ; 6! + 3 ; 6! + 4 ; 6! + 5 ; 6! + 6$  est composé.
3. L'entier  $6! + 1$  est-il composé ?
4. L'entier  $6! + 7$  est-il composé ?

## Activité 9

1. Montrer que si  $p$  est premier et impair, alors il est de la forme  $4m+1$  ou  $4m+3$ ,  $m \in \mathbb{N}$  .
2. Peut-on affirmer que tout entier naturel de la forme  $4m+1$  ou  $4m+3$  est premier ?

## Activité 10

Soit  $q$  un nombre premier et deux entiers  $a$  et  $b$  tels que  $a = 2q+1$  et  $b = 2+q$ .

1. On suppose que  $q$  appartient à l'ensemble  $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ .
  - a. Pour chaque valeur de  $q$ , déterminer les diviseurs premiers de  $a$ .
  - b. Pour chaque valeur de  $q$ , déterminer les diviseurs premiers de  $b$ .
2. Soit  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts.
  - a. Montrer que l'entier naturel  $b = p + q$  admet un diviseur premier distinct de  $p$  et de  $q$ .
  - b. Utiliser un raisonnement par l'absurde pour montrer que l'entier naturel  $a = pq + 1$  admet un diviseur premier distinct de  $p$  et de  $q$ .

## Activité 11

Le but de l'activité est de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Supposons que la liste des nombres premiers est finie, c'est à dire qu'il existe seulement  $k$  nombres premiers  $p_1, p_2, \dots, p_k$ .

Soit  $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k + 1$ .

1. Montrer que  $n$  n'est divisible par aucun des nombres premiers,  $p_1, p_2, \dots, p_k$ .
2. Conclure.

## Théorème d'Euclide

Il existe une infinité de nombres premiers.

## Activité 12

1. Vérifier que le 3<sup>ème</sup> nombre premier est inférieur à  $2 \times 3 + 1$ .

2. Vérifier que le 4<sup>ème</sup> nombre premier est inférieur à  $2 \times 3 \times 5 + 1$ .

3. Soit  $n$  un entier naturel non nul, on désigne par  $p_n$  le  $n$ <sup>ème</sup> nombre premier.

Montrer que  $p_n \leq p_1 \times p_2 \times \dots \times p_{n-1} + 1$ .

## 2. Le théorème fondamental de l'arithmétique

### Activité 1

Décomposer chacun des entiers ci-dessous en produit de facteurs premiers.

5625 ; 4160 ; 14641.

### Activité 2

On se propose de montrer que tout entier naturel  $n \geq 2$  se décompose en un produit fini de nombres premiers.

1. Vérifier que cette propriété est vraie pour  $n = 2$ .

2. Soit un entier  $n \geq 2$ . On suppose que pour tout entier  $k$  tel que  $2 \leq k \leq n$ , l'entier naturel  $k$  se décompose en un produit fini de nombres premiers.

Montrer alors que l'entier  $n+1$  est soit premier, soit égal à  $pm$  où  $p$  est un nombre premier et  $m < n+1$ .

3. Conclure.

L'activité précédente montre que tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en un produit fini de facteurs premiers.

## Théorème

Tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, se décompose en un produit fini de nombres premiers.

En admettant l'unicité de cette décomposition à l'ordre des facteurs près, on peut énoncer le théorème suivant qui donne la décomposition canonique d'un entier naturel non nul.

## Théorème (admis)

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , il existe des nombres premiers distincts deux à deux  $p_1, \dots, p_k$  et des entiers naturels non nuls  $a_1, \dots, a_k$  tels que  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  et  $n$  se décompose de façon unique sous la forme  $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_k^{a_k}$ .

### Activité 3

1. Décomposer en facteurs premiers chacun des nombres  $a = 120$  et  $b = 75$ .
2. En déduire une décomposition en facteurs premiers de chacun des nombres  $ab, a^2, b^8, a^2 \vee b^8$  et  $a^2 \wedge b^8$ .

### Activité 4

1. a. Donner la décomposition en facteurs premiers de chacun des entiers 9801 ; 57600 ; 105625.  
b. En déduire que chacun de ces entiers est un carré parfait.
2. a. Montrer que l'entier 151875 n'est pas un carré parfait.  
b. Quel est le plus petit entier naturel par lequel il faut multiplier 151875 pour obtenir un carré parfait ?

Un entier naturel est un carré parfait lorsque sa racine carrée est un entier naturel.

### Activité 5

1. a. Montrer que 2311 est un nombre premier.  
b. Donner tous les diviseurs de  $2311^{2006}$ .  
c. Calculer la somme de tous ces diviseurs.
2. a. Montrer que 5113 est un nombre premier.  
b. Donner tous les diviseurs de  $5113^{2005}$ .  
c. Calculer la somme de tous ces diviseurs.
3. a. Dénombrer tous les diviseurs de  $2311^{2006} \times 5113^{2005}$ .  
b. Calculer la somme de tous ces diviseurs.

### Activité 6

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels et  $p$  un nombre premier qui divise le produit  $ab$ .

Montrer que si  $p$  ne divise pas  $a$  alors  $p$  divise  $b$ .

## Théorème

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels et  $p$  un nombre premier qui divise le produit  $ab$ .  
Si  $p$  ne divise pas  $a$  alors  $p$  divise  $b$ .

### Activité 7

1. Déterminer tous les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $3a = 2b$ .
2. Déterminer tous les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $5a = 33b$ .
3. Déterminer tous les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $11(a - 2) = 10(b - 3)$ .

## Activité 8

1. Vérifier que 5 divise  $C_5^k$ , pour tout  $k = 1, 2, 3, 4$ .
2. Vérifier que 7 divise  $C_7^k$ , pour tout  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .
3. Soit  $p$  un nombre premier.
  - a. Vérifier que  $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$ , pour tout  $k = 2, 3, \dots, p - 1$ .
  - b. En déduire que  $p$  divise  $C_p^k$ , pour tout  $k = 1, 2, \dots, p - 1$ .

## Activité 9

1. Montrer que si  $p$  est un nombre premier alors pour tous entiers naturels  $a$  et  $b$ ,  
 $(a + b)^p - (a^p + b^p)$  est divisible par  $p$ .
2. En déduire par récurrence sur  $a$ , que pour tout entier naturel  $a$  et tout nombre premier  $p$ ,  $p$  divise  $a^p - a$ .
3. Montrer que pour tout nombre premier  $p$  et tout entier naturel  $a$  non divisible par  $p$ ,  
 $p$  divise  $a^{p-1} - 1$ .

## Petit théorème de Fermat

Soit  $p$  un nombre premier et  $a$  un entier naturel. Alors  $p$  divise  $a^p - a$ .

## Activité 10

Soit un nombre premier  $p$  et deux entiers naturels  $a$  et  $b$ .

1. Montrer que si  $p$  divise  $b^2$  alors  $p$  divise  $b$ .
2. Montrer que si  $p$  est un diviseur commun de  $a$  et de  $b^2$  alors  $p$  divise  $a \wedge b$ .
3. En déduire que si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux alors  $a$  et  $b^2$  sont premiers entre eux.

## Activité 11

Soit le polynôme  $f(x) = 8x^3 - 16x - 3$ .

1. a. Montrer que si  $n$  est un entier naturel tel que  $f(n) = 0$ , alors  $n$  divise 3.  
b. En déduire que le polynôme  $f$  n'admet pas de racine entière.
2. On se propose de chercher si  $f$  admet une racine rationnelle positive.

Soit deux entiers naturels  $a$  et  $b$  premiers entre eux, vérifiant  $f\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ .

- a. Montrer que  $8a^3 - 16ab^2 - 3b^3 = 0$ .
- b. En déduire que  $a$  divise 3 et que  $b$  divise 8.
- c. Conclure.

# QCM – VRAI – FAUX

## QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Un seul parmi ces nombres est un nombre premier, lequel ?

1700

1091

1953.

2. La décomposition en facteurs premiers du nombre  $24 \times 36 \times 42$  est

$2 \times 3 \times 7$

$2^6 \times 3^4 \times 7 \times 11$

$2^6 \times 3^4 \times 7$ .

3. Un seul parmi ces nombres est divisible par 60, lequel ?

$2 \times 3^2 \times 5 \times 11$

$2^2 \times 3^4 \times 13$

$2^5 \times 3^2 \times 5^4$ .

4. Le nombre  $2^5 \times 3^7 \times 5^2 \times 11^2$  est divisible par le cube de

8

55

9.

5. 11 divise

2121

$2^{10} - 1$

2100.

## VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

2. Si la somme de deux entiers non nuls est un nombre premier, alors ces deux nombres sont premiers entre eux.

3. Il existe deux nombres consécutifs premiers strictement supérieurs à 2.

4. Il existe deux nombres impairs consécutifs dont la somme est un nombre premier.

5. La somme de trois entiers non nuls consécutifs est un nombre premier.

## Mobiliser ses compétences

### Situation : Cryptage

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels donnés. Le cryptage affine consiste à chiffrer chaque lettre de l'alphabet par un nombre  $x$  de 0 jusqu'à 25, puis à associer au rang  $x$  le reste  $y$  de la division euclidienne de  $ax+b$  par 26.

Ainsi crypter un mot revient à remplacer chaque lettre de rang  $x$ , par la lettre de rang  $y$  associé à  $x$  et décrypter un mot revient à remplacer chaque lettre de rang  $y$ , par la lettre de rang  $x$  tel que  $x$  est associé à  $y$ .

1. On choisit  $a = 3$  et  $b = 5$ .

a. Compléter le tableau ci-dessous.

En clair	A	B	C	...	Z
Rang x	0	1	2		25
Rang y	5	8	11		2
En crypté	F	I	L		C

b. Crypter les mots VIE, MATHEMATIQUES.

c. Décrypter les mots PRE, KNSDHDR.

d. Montrer que si deux entiers  $x$  et  $x'$  vérifient les conditions suivantes :

- $0 \leq x \leq 25$  et  $0 \leq x' \leq 25$ ,
- les entiers  $3x + 5$  et  $3x' + 5$  ont le même reste dans la division euclidienne par 26,  
alors  $x = x'$ .

e. En déduire que deux lettres distinctes sont cryptées par deux lettres distinctes.

3. On choisit  $a = 2$  et  $b = 5$ .

Donner un exemple de lettres distinctes qui ont le même cryptage.

4. On se propose de montrer que deux lettres distinctes sont cryptées par deux lettres distinctes si et seulement si  $a$  et 26 sont premiers entre eux.

a. On suppose que  $a$  et 26 sont premiers entre eux.

Montrer que si deux entiers  $x$  et  $x'$  vérifient les conditions suivantes :

- $0 \leq x \leq 25$  et  $0 \leq x' \leq 25$ ,
- les entiers  $ax + b$  et  $ax' + b$  ont le même reste dans la division euclidienne par 26,  
alors  $x = x'$ .

b. On suppose que  $a$  et 26 ne sont pas premiers entre eux et on note  $d = a \wedge 26$  et  $k$  l'entier tel que  $26 = d k$ .

Montrer que les entiers  $b$  et  $ak + b$  ont le même reste dans la division euclidienne par 26.

En déduire que si  $\lambda$  désigne la lettre de l'alphabet de rang  $k$  alors A et  $\lambda$  sont cryptées par la même lettre.

c. Conclure.

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

- Combien y a-t-il de nombres premiers dont le chiffre des unités est 1 et qui sont compris entre 100 et 200 ?
- Combien y a-t-il de nombres premiers dont le chiffre des unités est 3 et qui sont compris entre 100 et 200 ?
- Combien y a-t-il de nombres premiers dont le chiffre des unités est 7 et qui sont compris entre 100 et 200 ?

## Exercice 2

- Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $n^2$  est-il premier ?
- Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $n^2 + 2n + 1$  est-il premier ?
- Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $n^2 + 3n + 2$  est-il premier ?
- Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $n^2 + 4n + 3$  est-il premier ?

## Exercice 3

- Quels sont les entiers naturels dont le carré divise 468 ?
- Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $n^2(2n + 1) = 468$ .

## Exercice 4

- Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , les entiers  $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$  sont composés.
- Trouver huit entiers naturels consécutifs qui ne sont pas premiers.

## Exercice 5

- Montrer qu'au moins un des entiers naturels  $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13$  et  $n+15$  est divisible par 5.
- Pour quelles valeurs de  $n$ , les entiers naturels  $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13$  et  $n+15$  sont tous premiers ?

## Exercice 6

Un entier naturel est dit parfait s'il est la somme de tous ses diviseurs, excepté lui-même.

Exemple

- 6 est parfait puisque  $6 = 1+2+3$ ,
- 28 est parfait puisque  $28 = 1+2+4+7+14$ .
- Montrer que 496 et 8128 sont parfaits.
  - Montrer que 7242 n'est pas parfait.
  - Soit  $k$  un entier naturel non nul.
    - $2^k$  est-il parfait ?
    - $3 \times 2^k$  est-il parfait ?

## Exercice 7

On désigne par  $\varphi(n)$  le nombre des entiers naturels inférieurs ou égaux à  $n$  et premiers avec  $n$ .

Par exemple, les entiers naturels inférieurs ou égaux à 6 et premiers avec 6, sont 1 et 5. On en déduit que  $\varphi(6) = 2$ .

- Déterminer  $\varphi(8), \varphi(11)$  et  $\varphi(24)$ .
- Soit  $p$  un nombre premier, déterminer  $\varphi(p), \varphi(p^2)$ .

## Exercice 8

- Expliquer pourquoi tout entier naturel peut s'écrire de la forme  $8k, 8k+1, 8k+2, 8k+3, 8k+4, 8k+5, 8k+6$  ou  $8k+7$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
- Montrer qu'un entier premier impair, est nécessairement de la forme  $8k+1, 8k+3, 8k+5$ , ou  $8k+7$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
- Donner des exemples d'entiers naturels de la forme  $8k+1, 8k+3, 8k+5$ , ou  $8k+7$  qui ne sont pas premiers.

## Exercice 9

- Montrer que pour tous entiers naturels  $n$  et  $x$  non nuls,  $x - 1$  divise  $x^n - 1$ .
- En déduire que si  $a$  et  $b$  sont deux entiers non nuls, alors le nombre  $2^{ab} - 1$  est divisible par  $2^a - 1$  et par  $2^b - 1$ .
- Soit  $n$  un entier naturel non nul.  
Montrer que si  $2^n - 1$  est premier alors  $n$  est premier.
- Calculer  $2^{11} - 1$ . Ce nombre est-il premier ?

## Exercice 10

- On pose  $f(n) = n^2 + n + 41$ .
  - Vérifier que  $f(3), f(5)$  et  $f(39)$  sont des nombres premiers.
  - Vérifier que  $f(40)$  et  $f(41)$  sont des nombres composés.
- On pose  $f(n) = an^2 + bn + c$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des entiers naturels non nuls.
  - On pose  $f(n) = k$ . Montrer que  $k$  divise  $f(n+k)$ .
  - En déduire qu'il existe au moins un entier naturel  $m$  tel que  $f(m)$  soit un entier composé.

## Exercice 11

On dit que deux nombres premiers  $p$  et  $q$  sont jumeaux si  $q = p+2$ .

Exemple 3 et 5 sont jumeaux, ainsi que 5 et 7 ou encore 41 et 43.

Soit deux nombres premiers jumeaux  $p$  et  $q$ .

1. Montrer que  $p$  et  $q$  sont impairs.
2. Montrer que  $pq+1$  est un carré parfait.
3. Montrer que  $pq+1$  est divisible par 4.
4. On suppose que  $p \geq 5$ 
  - a. Utiliser un raisonnement par l'absurde pour montrer que le reste de la division euclidienne par 3 de  $p$  est 2.
  - b. En déduire que  $pq+1$  est divisible par 3.
  - c. Enoncer la règle de divisibilité par 12.
  - d. En déduire que  $pq+1$  est divisible par 12.
5. a. Montrer que si  $p \geq 5$ ,  $pq - 2$  est divisible par 3.  
b. Déterminer  $p$ , pour que  $pq - 2$  soit premier.

## Exercice 12

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2^n + 3^n$ .

1. a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^n$  et  $3^n$  sont premiers entre eux.
- b. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls  $x$  et  $y$ ,  $(x + y) \wedge (2x + 3y) = x \wedge y$ .
- c. En déduire que  $u_n$  et  $u_{n+2}$  sont premiers entre eux.
2. a. Montrer que  $u_n \wedge u_{n+2}$  divise  $(5 \times 2^n) \wedge (5 \times 3^n)$   
b. En déduire que  $u_n \wedge u_{n+2} = 1$  ou 5.
3. a. Montrer par récurrence que  $u_{2k+1}$  est divisible par 5.  
b. En déduire que  $u_{2k+1} \wedge u_{2k+3} = 5$ .
4. a. Montrer par récurrence que  $u_{2k}$  n'est pas divisible par 5.  
b. En déduire que  $u_{2k} \wedge u_{2k+2} = 1$ .

## Exercice 13

On considère le polynôme  $x^2 + x + 11$

1. Vérifier que  $p(x+1) = p(x) + 2(x+1)$  et compléter le tableau ci-dessous.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	11	13								

Vérifier que tous les  $p(x)$  obtenus sont des nombres premiers.

On dit qu'un entier naturel  $a$  est chanceux s'il est supérieur ou égal à 2 et si  $x^2 + x + a$  est premier pour tout  $x = 0, 1, \dots, a-2$ .

2. Soit  $a$  un entier naturel et  $p_a(x) = x^2 + x + a$ .

- a. Montrer que  $a$  divise  $p_a(a)$  et divise  $p_a(a-1)$ .
- b. Montrer que si  $a$  est chanceux alors  $a$  est premier.
- c. Déterminer tous les nombres chanceux inférieurs ou égaux à 10.

## Exercice 14

Soit un nombre premier  $p \geq 7$ .

On se propose de montrer que l'entier  $n = p^4 - 1$  est divisible par 240.

1. a. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de  $p$  par 3 ?  
b. En déduire que  $n$  est divisible par 3.
2. a. En remarquant que  $p$  est impair, montrer qu'il existe un entier non nul  $k$  tel que  $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$ .  
b. En déduire que  $n$  est divisible par 16.
3. a. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de  $p$  par 5.  
b. En déduire que  $n$  est divisible par 5.
4. a. Soit trois entiers naturel non nuls  $a, b$  et  $c$  tels que  $a$  divise  $b, c$  divise  $b$  et  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux. Montrer que  $ab$  divise  $c$ .  
b. En déduire que 240 divise  $n$ .
5. Peut-on trouver quinze nombres premiers  $p_1, p_2, \dots, p_{15}$  supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier  $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$  soit un nombre premier ?

## Exercice 15

On pose  $a_1 = 2, a_2 = a_1 + 1, a_3 = a_1 a_2 + 1, \dots, a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n + 1$ . Compléter tableau ci-dessous.

n	1	2	3	4	5	6
$a_n$	2	3	7			

2. Montrer que si  $d$  divise  $a_i$ , il ne divise aucun des  $a_j, j > i$ .
3. Trouver le plus petit diviseur de  $a_5 = 1807$ , distinct de 1.
4. Montrer qu'il existe des nombres premiers  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  deux à deux distincts tels que  $p_n$  divise  $a_n$  pour tout  $n$ .
5. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

## Exercice 16

Les nombres de Fermat sont définis

$$\text{par } F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4
F <sub>n</sub>	3	5	17		

2. Montrer que pour tout n,  $F_{n+1} = F_n^2 - 2F_n + 2$ .

3. En déduire que pour tout n,  $F_{n+1} = F_0F_1 \dots F_n + 2$ .

4. En déduire que si n et m sont distincts alors  $F_n$  et  $F_m$  sont premiers entre eux.

5. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

"Fermat pensait que tous les  $F_n$  étaient premiers, mais Euler a trouvé la décomposition de  $F_5 = 4\ 294\ 967\ 297 = 641 \times 6\ 700\ 417$ ."

## Exercice 17

On considère la suite des entiers  $a_1 = 1, a_2 = 11,$

$$a_3 = 111, a_4 = 1111, a_n = \underbrace{11\dots 1}_{n \text{ fois le chiffre } 1}.$$

1. a. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1, a_{n+1} = a_n + 10^n$ .

b. Montrer que si un nombre premier p est un diviseur commun de  $a_{n+1}$  et  $a_n$  alors p est soit 2, soit 5.

c. En déduire que pour tout entier  $n \geq 1, a_{n+1}$  et  $a_n$  sont premiers entre eux.

2. a. Ecrire pour tout entier  $n \geq 1, a_{n+2}$  en fonction de  $a_n$ .

b. Montrer que pour tout entier  $k \geq 1, 11$  divise  $a_{2k}$ .

c. Montrer que pour tout entier  $k \geq 0, 11$  ne divise pas  $a_{2k+1}$ .

d. En déduire que pour tout entier  $n \geq 1,$

$$\begin{cases} a_{n+2} \wedge a_n = 1, & \text{si } n \text{ est impair} \\ a_{n+2} \wedge a_n = 11, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

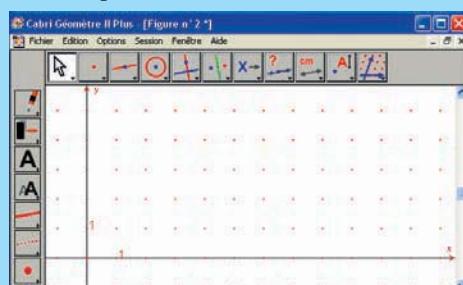
## Avec l'ordinateur

1. Soient a, b, a' et b' quatre entiers naturels non nuls.

Montrer que si  $\frac{a}{b}$  est une fraction irréductible et que  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$  alors  $a = a'$  et  $b = b'$ .

2. a. Ouvrir la figure **BzouIni.fig**

(On pourra déplacer les axes de telle sorte qu'il apparaisse seulement les points d'abscisses et d'ordonnées positives)

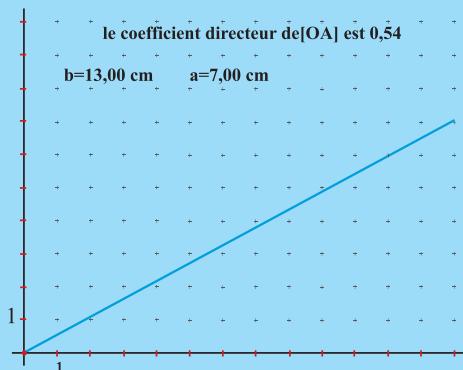


b. Placer un point A en l'un des points de la grille.

(On notera dans la suite (b, a) les coordonnées de A).

c. Construire le segment [OA].

d. Trouver un moyen pour faire apparaître directement l'abscisse b et l'ordonnée a de A.



3. a. Pour une position donnée de la droite (OA) telle que a et b soient premiers entre eux, existe-t-il des points de coordonnées entières situés sur [OA] ?

b. Choisir de nouveaux couples (b, a) d'entiers premiers entre eux et reprendre la question 3.a)

c. Choisir deux entiers non premiers entre eux et reprendre la question 3.a).

d. Quelle conjecture peut-on faire ? Prouver cette conjecture

# Math – culture



**Marin Mersenne**, un ecclésiastique français, apporte un souffle nouveau à la recherche sur les nombres premiers.

Il en propose une nouvelle famille qui repose sur la question suivante :

"*Si  $p$  est un nombre premier,  $2^p - 1$  est-il un nombre premier ?*"

La réponse est non, mais il affirme à raison que c'est vrai pour  $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$ . Il ne démontrera pas sa découverte et fera quelques erreurs sur des nombres plus grands. Elle est pourtant remarquable et est encore utilisée aujourd'hui pour la recherche de nombres premiers géants.



A partir du XVIII<sup>ème</sup> siècle, les mathématiciens s'acharnent à battre les records en démontrant l'existence de nombres premiers de plus en plus grands. Le suisse Leonhard Euler (1707 - 1783) prouve que  $2^{31} - 1$  est premier.

Aujourd'hui le plus grand nombre premier connu est un *nombre de Mersenne*, le 43<sup>ème</sup>,  $2^{30\,402\,457} - 1$ , qui comprend 9152052 chiffres et qui a été découvert le 15 décembre 2005 par un réseau d'ordinateurs (projet *GIMPS*) permettant d'accélérer les recherches de façon considérable en distribuant les calculs.

Pour retrouver les nombres premiers inférieurs par exemple à 100 :

- On écrit sur une ligne, les multiples de 6,
- Au dessus du nombre  $6k$ , on écrit le nombre qui le précède ( $6k - 1$ ),
- Au dessous du nombre  $6k$ , on écrit le nombre qui le succède ( $6k + 1$ ).

5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96
7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97

On élimine de la première et de la troisième ligne, les multiples de 5 et de 7.

Quels sont les nombres qui restent dans les deux lignes extrêmes ?

Expliquer cet algorithme, puis reprendre cette grille en partant des multiples de 6 jusqu'à 300.

Math – culture

# Chapitre 9

## Vecteurs de l'espace

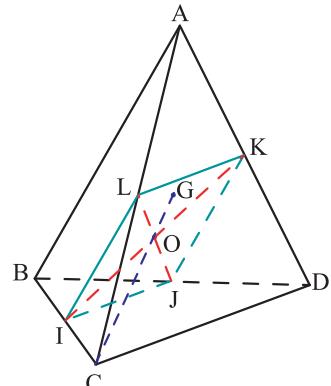
*"L'imagination est plus importante que la connaissance."*  
*Einstein*

## Pour commencer

### Activité 1

Soit ABCD un tétraèdre. On note I le milieu de [BC], J le milieu de [BD], K le milieu de [AD], L le milieu de [AC] et G le centre de gravité du triangle ABD.

1. Montrer que IJKL est un parallélogramme. Soit O son centre.
2. a. Montrer que les points A, C, J et G sont coplanaires.  
b. Soit T le symétrique de J par rapport à G.  
Montrer que la droite (LT) est parallèle aux droites (CG) et (OG).  
c. En déduire que les points C, O et G sont alignés.

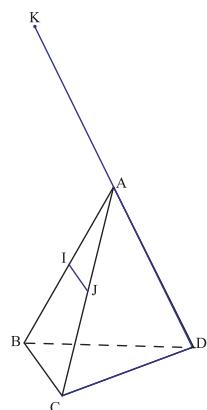


### Activité 2

Soit ABCD un tétraèdre. On note I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le symétrique de D par rapport à A .

Les droites (KI) et (KJ) coupent le plan (BCD) respectivement en M et N.

1. Reproduire la figure et construire les points M et N.
2. Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



### Activité 3

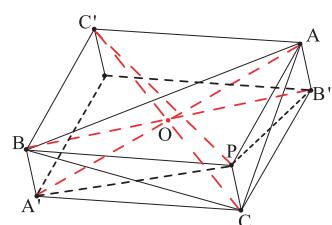
Soit ABC un triangle et P un point distinct de A, B et C.

On note A', B' et C' les symétriques du point P par rapport aux milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

1. On suppose que P appartient au plan (ABC).

Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

2. En est-il de même lorsque P n'appartient pas au plan (ABC) ?



## Cours

### 1. Vecteurs de l'espace

On désigne par  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points de l'espace.

#### Activité 1

Soient A, B, C, D, E et F six points de  $\mathcal{E}$  tels que les segments [AC] et [BD] aient le même milieu et les segments [AF] et [BE] aient le même milieu.

On se propose de montrer que les segments [CE] et [DF] ont aussi le même milieu.

1. On suppose d'abord que les points A, B, C et E sont coplanaires.

a. Montrer que les six points A, B, C, D, E et F sont alors coplanaires.

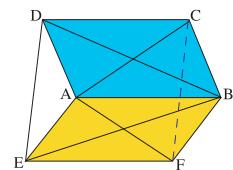
b. Montrer que les segments [CE] et [DF] ont même milieu.

2. On suppose maintenant que les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires.

a. Quelle est la position relative

- des droites (CD) et (EF) ?
- des plans (CBF) et (ADE) ?
- des droites (CF) et (DE) ?

b. En déduire que les segments [CE] et [DF] ont le même milieu.



#### Définition

- Lorsque deux bipoints (A, B) et (C, D) sont tels que  $[AC]$  et  $[BD]$  ont le même milieu, alors ces bipoints représentent un même vecteur de l'espace, noté  $\overrightarrow{AB}$  ou  $\overrightarrow{DC}$ .
- Les bipoints  $(M, M)$  où M est un point quelconque de l'espace représentent le vecteur nul, noté  $\vec{0}$ .
- L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté  $\mathcal{W}$ .

#### Conséquence

Soit A, B, C et D quatre points de  $\mathcal{E}$  tels que A, B et C ne soient pas alignés. Alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , si et seulement si, ABCD est un parallélogramme.

#### Définition

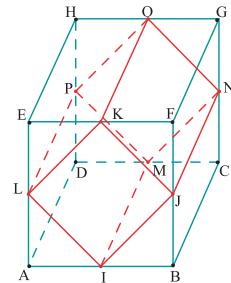
On appelle norme d'un vecteur  $\vec{u}$  et on note  $\|\vec{u}\|$ , le réel positif défini par  $\|\vec{u}\| = AB$ , où A et B sont deux points quelconques tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

## Activité 2

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube, I, J, K, L, M, N, O et P sont les milieux respectives des arêtes [AB], [BF], [EF], [AE], [CD], [CG], [GH] et [DH].

1. Nommer des vecteurs égaux à  $\overrightarrow{AB}$  et des vecteurs égaux à  $\overrightarrow{BC}$ .

2. Quelle est la nature du solide IJKLMNP ? Justifier.

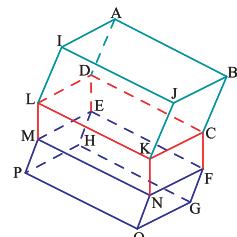


## Activité 3

Dans la figure ci-contre les solides ABCDIJKL, CDEFKLMN et EFGHMNOP sont des parallélépipèdes.

Déterminer le point R dans chacun des cas ci-dessous.

- a.  $\overline{FR} = \overline{NL}$  ; b.  $\overline{PR} = \overline{OG}$  ; c.  $\overline{JR} = \overline{PH}$  ; d.  $\overline{HR} = \overline{IJ}$ .



### Théorème

Soit  $O$  un point de  $\mathcal{E}$ .

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{W}$  il existe un unique point  $M$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ .

## 2. Opérations sur les vecteurs de l'espace

Comme l'ensemble des vecteurs du plan, l'ensemble des vecteurs de l'espace est muni de deux opérations l'addition et la multiplication par un réel.

### 2.1 Addition des vecteurs

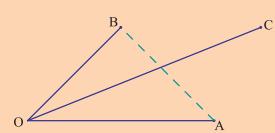
#### Définition

Soient  $O$  un point de  $\mathcal{E}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

Soit  $A, B$  et  $C$  les points de  $\mathcal{E}$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$  et  $[OC]$  et  $[AB]$  ont le même milieu.

On appelle vecteur somme de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le vecteur  $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ .

On note  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ .



#### Conséquence

Pour tous points  $A, B$  et  $C$  de  $\mathcal{E}$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  (Relation de Chasles).

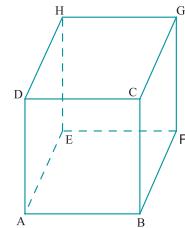
Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points de  $\mathcal{E}$  tels que  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés. Alors  $ABCD$  est un parallélogramme, si et seulement si,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

## Activité 1

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

1. Calculer  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$ ,  $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{HG}$  et  $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{CB}$ .
2. Calculer  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG}$ ,  $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EH}$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{DH}$ .

L'addition des vecteurs de l'espace vérifie les mêmes propriétés que l'addition des vecteurs du plan.



## Propriétés

- Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de  $\mathcal{W}$ .  
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ ,  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ,  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
- Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace, il existe un unique vecteur  $\vec{v}$  de l'espace tel que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ .  
Le vecteur  $\vec{v}$  tel que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$  s'appelle vecteur opposé de  $\vec{u}$  et se note  $-\vec{u}$ .

## Notation

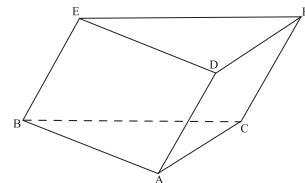
Soit A et B deux points de l'espace. L'opposé du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est noté  $\overrightarrow{BA}$ .

## Activité 2

Dans la figure ci-contre ABCDEF est un prisme à base triangulaire.

1. a. Déterminer  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .
- b. Déterminer  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$ .
2. Soit G le point défini par  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ .

Montrer que G est le symétrique de D par rapport au milieu I de l'arête [EF].



## 2. 2 Multiplication d'un vecteur par un réel

Soit  $\mathcal{D}$  une droite de l'espace. De façon analogue au plan, la donnée de deux points distincts de  $\mathcal{D}$  permet de munir la droite d'un repère affine (A, B) de sorte qu'à tout point M de  $\mathcal{D}$ , on associe un unique réel  $\alpha$ , appelé abscisse de M dans le repère (A, B).

## Définition

- Soient O un point de  $\mathcal{E}$ ,  $\vec{u}$  un vecteur non nul de l'espace et  $\alpha$  un réel.

Soit A le point de  $\mathcal{E}$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et M le point de la droite (OA) d'abscisse  $\alpha$  dans le repère (O, A).

On appelle vecteur produit de  $\vec{u}$  par  $\alpha$  et on note  $\vec{\alpha}u$  le vecteur  $\vec{w}$  tel que  $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$ .  
 $\vec{\alpha}0 = \vec{0}$ .

## Conséquence

Soit A, B deux points distincts,  $\alpha$  un réel et M un point de l'espace.

Alors  $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$ , si et seulement si, les points A, M et B sont alignés et M a pour abscisse  $\alpha$  dans le repère (A, B).

## Activité 1

Dessiner un tétraèdre ABCD, puis construire les points M, P, I et G tels que

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} ; 2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0} ; \overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}.$$

La multiplication des vecteurs de l'espace par un réel vérifie les mêmes propriétés que la multiplication des vecteurs du plan par un réel.

## Propriétés

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace et pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,

- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ ,  $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha \cdot \beta)\vec{u}$  et  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ .
- $l\vec{u} = \vec{u}$  et  $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ .
- $(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$ .
- $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ , si et seulement si,  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\alpha = 0$ .

## Activité 2

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. Simplifier les écritures ci-dessous.

$$2(\vec{u} - 3\vec{v}) + 3\vec{v} - \vec{u} ; \sqrt{3}(\vec{u} + 3\vec{v}) - 3\left(\sqrt{3}\vec{v} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u}\right).$$

## Activité 3

Soit ABCD un tétraèdre et  $G_1, G_2, G_3$  et  $G_4$  les centres de gravité respectifs des faces ABC, ACD, ABD et BCD.

1. a. Calculer  $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$ .  
b. En déduire  $\overrightarrow{DG_1}$  à l'aide de  $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$  et  $\overrightarrow{DC}$ .
2. Calculer  $\overrightarrow{DG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} + \overrightarrow{AG_4}$ .
3. a. Exprimer  $\overrightarrow{G_1G_2}$  à l'aide de  $\overrightarrow{BD}$ .  
b. Exprimer  $\overrightarrow{G_2G_3}$  à l'aide de  $\overrightarrow{BC}$ .  
c. Exprimer  $\overrightarrow{G_3G_4}$  à l'aide de  $\overrightarrow{AC}$ .

### 3. Vecteurs colinéaires – Repère cartésien d'une droite

#### Définition

Deux vecteurs de l'espace sont dits colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.

#### Activité 1

Soit A un point de l'espace,  $\vec{u}$  un vecteur non nul et B le point tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires.

2. Soit  $\vec{v}$  un vecteur non nul et colinéaire à  $\vec{u}$  et C un point distinct de A et B.

Quel est l'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{CM}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires ?

#### Théorème

Soit A un point de l'espace et  $\vec{u}$  un vecteur non nul.

L'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  soient colinéaires est une droite, appelée droite passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

Le couple  $(A, \vec{u})$  est appelé repère cartésien de la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ . De plus,

M appartient à  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ , si et seulement si, il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$ .

#### Conséquence

Soit A et B deux points de l'espace,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls. Alors

$\mathcal{D}(A, \vec{u})$  est parallèle à  $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ , si et seulement si, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

#### Activité 2

1. Dessiner un cube ABCDEFGH.

Placer le point J tel que  $\overrightarrow{EJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$  et le point I tel que  $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{EF}$ .

2. Soit K le point tel que  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB}$ .

Montrer que la droite (EI) est parallèle à la droite (AK).

3. Soient M et N les points de  $\mathcal{E}$  tels que EFIJABMN soit un parallélépipède.

Montrer que les points A, C et N sont alignés.

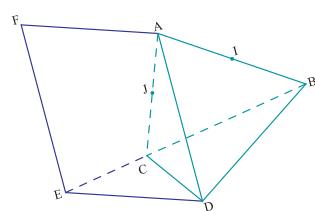
#### Activité 3

Dans la figure ci-contre ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB], J est le milieu de [AC], les points E et F sont tels que  $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$ .

1. Déterminer la droite  $\mathcal{D}(C, \overrightarrow{IJ})$ .

2. Déterminer le point O, intersection de  $(IJ)$  et  $(AE)$ .

3. Déterminer les droites  $\mathcal{D}_1(O, \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE})$ ,  $\mathcal{D}_2(O, \frac{1}{2} \overrightarrow{BC})$ ,  $\mathcal{D}_3(E, \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA})$ .



## 4. Combinaison linéaire – Repère cartésien d'un plan

### Activité 1

Dessiner un tétraèdre ABCD.

1. Placer le point M tel que  $4\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .
2. Placer le point N tel que  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$ .
3. Placer le point P tel que  $2\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD} = \vec{0}$ .

### Activité 2

Soit ABCD un tétraèdre, I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD].

1. Montrer que  $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .
2. Exprimer  $\overrightarrow{IJ}$  en fonction de  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .

### Définition

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

On dit que  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , s'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ .

Lorsque l'un des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire des deux autres, on dit que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont linéairement dépendants ou encore que la famille  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  est liée.

### Activité 3

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ ,  $\vec{e}$ ,  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  les vecteurs tels que  $\vec{e} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ ,  $\vec{f} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$  et  $\vec{g} = -\vec{u} + 5\vec{v}$ .

1. Calculer  $\vec{e} + 2\vec{g}$ , puis exprimer  $\vec{v}$  en fonction de  $\vec{e}$  et  $\vec{g}$ .
2. Calculer  $\vec{g} = -\vec{u} + 5\vec{v}$ , puis exprimer  $\vec{u}$  en fonction de  $\vec{e}$  et  $\vec{g}$ .
3. En déduire que  $\vec{f}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{e}$  et  $\vec{g}$ .

### Activité 4

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. On note  $\mathcal{P}$  le plan (ABC).

1. Soit M un point de  $\mathcal{P}$ .

La droite  $\Delta$  passant par M et parallèle à (AC) coupe (AB) en un point H.

La droite  $\Delta'$  passant par M et parallèle à (AB) coupe (AC) en un point K.

Montrer qu'il existe un unique couple  $(x, y)$  de réels tel que  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .

2. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels et N le point de l'espace tel que  $\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ .  
Montrer que N appartient à  $\mathcal{P}$ .

## Théorème

Soit A un point de l'espace et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires .

L'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{AM}$  soit combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  .

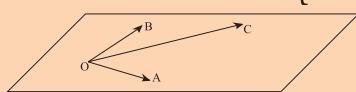
Le triplet  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  est appelé repère cartésien du plan  $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$  .

Un point M appartient au plan  $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$  , si et seulement si, il existe un unique couple de réels  $(x, y)$  tel que  $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ .

## Conséquence

Soient O, A, B et C quatre points de E.

O, A, B et C sont coplanaires, si et seulement si,  $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$  est liée.



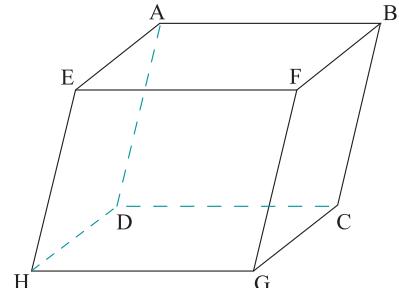
## Activité 6

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un parallélépipède.

1. Dire dans chacun des cas suivants si la famille de vecteurs est une famille liée.

- a.  $\{\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AE}\}$  ; b.  $\{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FG}\}$  ;
- c.  $\{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EH}\}$  ; d.  $\{\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$  .

2. Déterminer  $\mathcal{P}(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HC})$ ,  $\mathcal{P}(D, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GC})$ .



## Activité 7

Soient O, A et B trois points non alignés de  $\mathcal{E}$  et soient C et D deux points distincts de  $\mathcal{E}$ .

1. On suppose que la droite (CD) est parallèle au plan (OAB).

a. Montrer qu'il existe un unique point E du plan (OAB) tel que  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE}$ .

b. En déduire que  $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CD}\}$  est une famille liée.

2. On suppose que  $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CD}\}$  est une famille liée.

Montrer que la droite (CD) est parallèle au plan (OAB).

3. Soit A et B deux points distincts de l'espace,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls tels que  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  soient non colinéaires.

Montrer que la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}(B, \vec{v}, \vec{w})$ , si et seulement si, la famille  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  est liée.

## Propriété

Soit A et B deux points distincts de  $\mathcal{E}$  et  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls tels que  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  soient non colinéaires. Alors la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}(B, \vec{v}, \vec{w})$  , si et seulement si, la famille  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  est liée.

## Activité 8

Soit A et B deux points distincts de l'espace. On considère quatre vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'$  et  $\vec{v}'$  tels que  $\vec{u}, \vec{v}$  sont non colinéaires et  $\vec{u}', \vec{v}'$  sont non colinéaires.

Montrer que les plans  $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$  et  $\mathcal{P}'(B, \vec{u}', \vec{v}')$  sont parallèles, si et seulement si, les familles  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'\}$  et  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'\}$  sont liées.

## Propriété

Soit A et B deux points distincts de  $\mathcal{E}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires et  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$  deux vecteurs non colinéaires. Alors

$\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$  et  $\mathcal{P}'(B, \vec{u}', \vec{v}')$  sont parallèles, si et seulement si,  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'\}$  et  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'\}$  sont liées.

## Activité 9

Soit ABCDEFGH un parallélépipède.

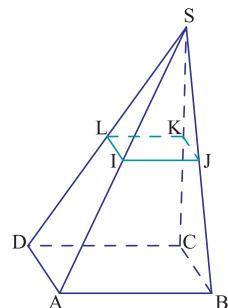
Montrer que les plans (ACF) et (DEG) sont parallèles.

## Activité 10

Dans la figure ci-contre SABCD est une pyramide dont la base est un parallélogramme.

Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes.

- Montrer que la droite (IK) est parallèle au plan (ABC).
- Montrer que les plans  $\mathcal{P}(L, \overline{AC}, \overline{JK})$  et (ABC) sont parallèles.
- Donner un vecteur directeur de la droite passant par S et parallèle à l'intersection des plans (CIL) et (AJK).

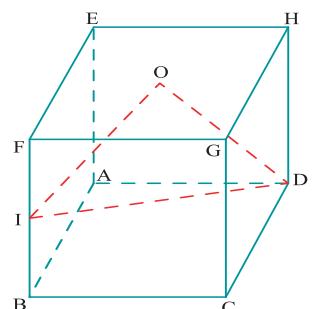


## 5. Bases – Repères cartésiens

### Activité 1

Soit ABCDEFGH un cube. On note O le centre de la face EFGH et I le milieu de l'arête [BF].

- La famille  $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\}$  est-elle liée ? Justifier.
- La famille  $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OF}\}$  est-elle liée ? Justifier.
- La famille  $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}\}$  est-elle liée ? Justifier.



### Définition

Soient  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  trois vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

Le triplet  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de  $\mathcal{W}$ , si la famille  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  n'est pas liée.

Soit O un point de  $\mathcal{E}$ .

On dit que  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère cartésien de  $\mathcal{E}$  si  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de  $\mathcal{W}$ .

## Vocabulaire

Lorsque la famille de vecteurs  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  n'est pas liée, on dit que c'est une famille libre.

## Conséquence

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points de  $\mathcal{E}$ .

Le triplet  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  est une base de  $\mathcal{W}$ , si et seulement si, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

## Activité 2

Soient O, I, J et K quatre points non coplanaires de  $\mathcal{E}$ .

Soit  $M$  un point quelconque de  $\mathcal{E}$ .

On mène de M la droite  $\Delta$  parallèle à la droite (OK)

et le plan  $\mathcal{P}$  parallèle au plan (OIJ).

1. a. Montrer que  $\Delta$  coupe  $(OIJ)$  en un point qu'on notera  $H$ .

b. Montrer la droite (OK) coupe le plan  $\mathcal{P}$  en un point qu'on notera T.

c. En déduire l'existence d'un unique triplet  $(x, y, z)$  de réels tel que

$$\overrightarrow{QM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

2. Préciser le triplet de réels  $(x, y, z)$  dans chacun des cas ci-dessous.

a.  $M = Q$ .

b.  $M = L$ .

$$c_0 M \equiv L$$

$$d, M \equiv K$$

e. M est le milieu de [JK].      f. M est le symétrique de I par rapport à J.

3. Soient  $i = OI$ ,  $j = OJ$ ,  $k = OK$  et  $u$  un vecteur quelconque de l'espace.

Montrer qu'il existe un unique triplet  $(x, y, z)$  de réels tel que  $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ .

### Théorème

Soit O un point de E et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de  $\mathcal{W}$ .

- Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{W}$  il existe un unique triplet  $(x, y, z)$  de réels tel que  $\vec{u} = \vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k}$ .

Le triplet  $(x, y, z)$  s'appelle le triplet de composantes du vecteur  $\vec{u}$  dans la base

( $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ ) et on note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

- Pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet  $(x, y, z)$  de réels tel que

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Le triplet  $(x,$   
 $\rightarrow, \rightarrow)$

## Vocabulaire

Si  $(x, y, z)$  est le triplet des coordonnées de  $M$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , alors  
 $x$  s'appelle l'abscisse de  $M$  dans ce repère et  $(O, \vec{i})$  est l'axe des abscisses.  
 $y$  s'appelle l'ordonnée de  $M$  dans ce repère et  $(O, \vec{j})$  est l'axe des ordonnées.  
 $z$  s'appelle la côte de  $M$  dans ce repère et  $(O, \vec{k})$  est l'axe des côtes.

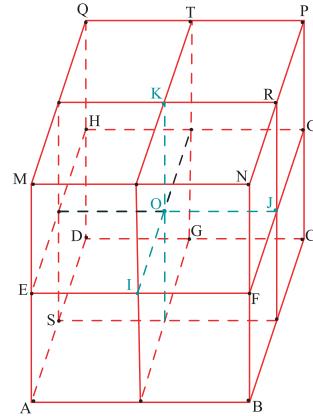
## Activité 3

Dans la figure ci-contre, ABCDMNPQ est un cube formé de huit petits cubes identiques.

On considère le repère cartésien  $(O, \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ .

1. Donner les coordonnées de chacun des points A, B, Q, R, S et T.

2. Déterminer les points L(1, 1, 1), X(0, -1, 1), Y(-1, 0, -1) et Z(1, -1, 0).



## Activité 4

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\mathcal{W}$ .

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$  et  $\alpha$  un réel.

Déterminer les composantes de  $\vec{u} + \vec{v}$  et de  $\alpha \vec{u}$ .

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\mathcal{W}$ .

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels.

Les composantes de  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont  $\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' \end{pmatrix}$ .

## Activité 5

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de  $\mathcal{E}$ .

1.a. Soient  $M(x, y, z)$  et  $N(x', y', z')$  deux points quelconques de  $\mathcal{E}$ .

Déterminer les composantes du vecteur  $MN$ .

b. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment  $[MN]$ .

2. Soit le point  $A\left(2, -1, \frac{1}{2}\right)$ .

a. Déterminer les coordonnées du point B de  $\mathcal{E}$  tel que  $\overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

b. Placer les points A et B.

c. Soit I le milieu de  $[OA]$ .

Déterminer les coordonnées du point J tel que  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{AB}$ .

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de  $\mathcal{E}$  et  $M(x, y, z)$  et  $N(x', y', z')$  deux points de  $\mathcal{E}$ .

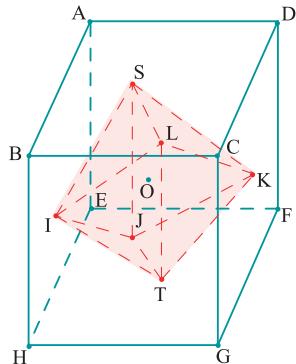
Le milieu de  $[MN]$  a pour coordonnées

$$\left( \frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2} \right).$$

## Activité 6

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube de centre O, les points I, J, K, L, S et T sont les centres des faces du cube.

1. On munit l'espace du repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .
  - a. Déterminer les coordonnées des points O, I, J, K, L, S et T.
  - b. Montrer que O est le milieu de [ST].
  - c. Montrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.
2. On munit l'espace du repère  $(I, \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IS})$ .  
Déterminer les coordonnées des points K, T et O.



## 6. Déterminant de trois vecteurs

### Définition

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\mathcal{W}$  et  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  un triplet de vecteurs de  $\mathcal{W}$

tels que  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ .

On appelle déterminant de  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et on note  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$   
le réel  $a(b'c'' - c'b'') - b(a'c'' - c'a'') + c(a'b'' - b'a'')$ .

## Activité 1

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\mathcal{W}$ .

1. Calculer  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

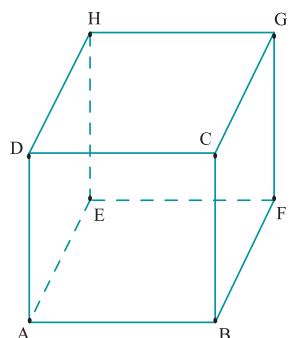
2. On considère les vecteurs  $\vec{r} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{s} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ .

## Activité 2

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

1. a. Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AE}$  forment-ils une base ? Justifier.  
b. Déterminer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AE}$  dans la base  $\mathcal{B} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$ .  
c. En déduire  $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .
2. Reprendre la question précédente pour les vecteurs  $\overrightarrow{AF}$ ,  $\overrightarrow{DH}$  et  $\overrightarrow{EF}$ .



## Théorème (admis)

Un triplet de vecteurs de  $\mathcal{W}$  forme une base, si et seulement si, son déterminant relativement à une base quelconque de  $\mathcal{W}$  est différent de 0.

## Activité 3

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\mathcal{W}$ . Soit  $\vec{e} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{f} = \vec{i} + \vec{k}$  et  $\vec{g} = \vec{k} + \vec{j}$ .

- Montrer que  $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{k})$  est aussi une base de  $\mathcal{W}$ . On la notera  $\mathcal{B}'$ .
- Déterminer les composantes de chacun des vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

## Activité 4

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit les points  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(0, -1, 1)$ ,  $C(-1, 0, 2)$  et  $D(1, 0, 0)$ .

Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

## Activité 5

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

On considère les points P et Q tels que  $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

et on note I le milieu de [AE], J le milieu de [PQ] et K le centre de la face CDHG.

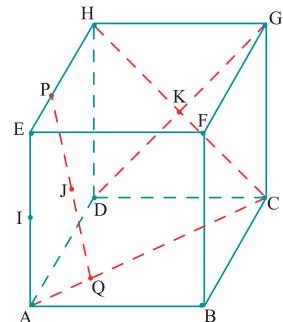
On munit l'espace du repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

- Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

En déduire qu'ils sont alignés.

- Les points J, Q, K et H sont-ils coplanaires ?

- Les points I, P, Q et K sont-ils coplanaires ?



## Activité 6

On considère un tétraèdre régulier ABCD.

On désigne par E et F les points tels que  $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$ .

- Soit I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [AC].

Quelle est la nature des quadrilatères ECIJ et ADEF ?

- En considérant une base adéquate, montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{DI}$ ,  $\overrightarrow{DJ}$  et  $\overrightarrow{DF}$  sont linéairement dépendants.

## Activité 7

On considère un tétraèdre ABCD tels que  $DA = 3$ ,  $DB = 2$  et  $DC = 4$ . Les points M, N et P appartiennent respectivement aux arêtes  $[DA]$ ,  $[DB]$  et  $[DC]$  tels que  $DM = DN = DP = 1$ .

L'espace est muni du repère cartésien  $(D, \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DN}, \overrightarrow{DP})$ .

- Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

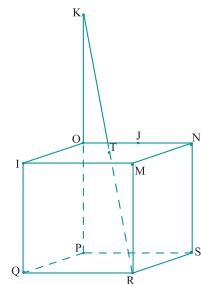
- Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD] et L le point tels que  $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ .

Les points I, J, M et L sont-ils coplanaires ?

## QCM – VRAI – FAUX

### QCM

Dans la figure ci-contre OIQPNMRS est un parallélépipède, J est le milieu de l'arête [ON] et O est le milieu du segment [KP]. La droite (KR) coupe le plan (IOJ) en T. Soit  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$  un repère cartésien de  $\mathcal{E}$ . Cocher la réponse exacte.



1.   $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OP}$         $\overrightarrow{KO} = \overrightarrow{MR}$         $\overrightarrow{SJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{RI}$ .
  
2.   $\{\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OS}\}$  est liée      $\{\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{KO}, \overrightarrow{KR}\}$  est liée      $\{\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OS}\}$  est liée.
  
3.   $M(1, 2, 0)$         $R(1, 1, -1)$         $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ .
  
4.   $\overrightarrow{OS} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$         $\overrightarrow{NO} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$         $\overrightarrow{MR} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
  
5.   $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{RT}) \neq 0$       $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{TJ}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{OP}) \neq 0$       $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{RP}) \neq 0$ .

### VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si deux droites ont deux vecteurs directeurs colinéaires alors ces deux droites sont strictement parallèles.
2. Si les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont linéairement dépendants alors deux de ces vecteurs sont colinéaires.
3. Si  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\mathcal{W}$  alors  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ .
4. Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\mathcal{W}$  et  $\vec{u}'$  est un vecteur non nul colinéaire à  $\vec{u}$ , alors  $(\vec{u}', \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\mathcal{W}$ .
5. Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\mathcal{W}$  alors la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u} + \vec{v})$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}(B, \vec{v}, \vec{w})$ .

## Mobiliser ses compétences

### Situation 1

On considère un tétraèdre ABCD. On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [AD], [BC], [BD] et [CD]. On désigne par  $G_1, G_2, G_3$  et  $G_4$  les centres de gravité respectifs des faces BCD, ACD, ABD et ABC.

1. Montrer qu'il existe un unique point G tel que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .
2. a. Montrer que les points G, I et N sont alignés.  
b. Montrer que les droites (IN), (JM) et (KL) sont concourantes.
3. a. Montrer que les points G,  $G_1$  et A sont alignés.  
b. Montrer que les droites  $(AG_1)$ ,  $(BG_2)$ ,  $(CG_3)$  et  $(DG_4)$  sont concourantes.
4. Montrer que  $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} + \overrightarrow{GG_4} = \vec{0}$ .

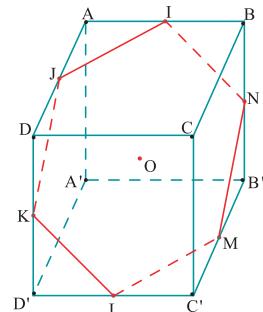
### Situation 2

Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un cube de centre O et d'arête 1. Les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD], [DD'], [C'D'], [B'C'] et [BB'].

On munit l'espace du repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ .

1. Déterminer les coordonnées des points O, I, J, K, L, M et N.
2. Montrer que les points O, I, J, K, L, M et N sont coplanaires.
3. Montrer que les segments [IL], [JM], et [KM] se coupent en leurs milieux.
4. Montrer que IJKLMN est un hexagone régulier.

Déterminer son centre.



# Exercices et problèmes

## Exercice 1

Soit ABCDEFGH un parallélépipède.

- Exprimer  $\overrightarrow{BH}$  en fonction de  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BF}$ .
- Soit I le centre de gravité du triangle ACF. Montrer que les points I, B et H sont alignés.
- Soit J le centre de gravité du triangle DEG. Montrer que les points J, B et H sont alignés.

## Exercice 2

Soit ABCD un tétraèdre. On définit les points P, Q, R et S par  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AD}$  ;  $\overrightarrow{CR} = 2\overrightarrow{CD}$  ;  $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CB}$ .

Quelle est la nature du quadrilatère PQRS ?

## Exercice 3

Soit ABCDEFGH un cube.

Déterminer les points P, Q et R tels que

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} ; \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BF} ; \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}) .$$

## Exercice 4

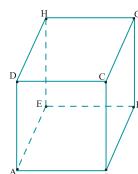
Soit ABCDEFGH un cube.

On note I le milieu de [AE],

J le milieu de [GH] et O

le milieu de [CH].

- Montrer que  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$ .
- En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ACH).
- Exprimer  $\overrightarrow{IJ}$  à l'aide de  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AH}$ .
- Déterminer  $\mathcal{D}(O, \overrightarrow{IJ}), \mathcal{D}(G, \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{OF})$ .



## Exercice 5

Soit SABC un tétraèdre.

- Faire une figure et placer les points E et F tels que  $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}$  et  $\overrightarrow{SF} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{SB}$ .
- Montrer que la droite (EF) est parallèle au plan (SAC).

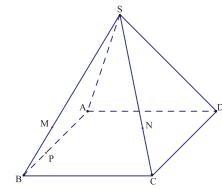
## Exercice 6

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires et T le point tel que  $2\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$ .

Montrer que les points A, C, D et T sont coplanaires.

## Exercice 7

Dans la figure ci-contre, SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme.



On considère les points M, N

$$\text{et } P \text{ tels que } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CS} \text{ et } \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

- Montrer que la droite (MN) est parallèle au plan (SAD).
- Montrer que les plans (MNP) et (SAD) sont parallèles.

## Exercice 8

Soit ABCD un tétraèdre.

On note G et G' les centres de gravité respectifs des triangles ABC et BCD.

On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments [BC], [AB] et [BD].

- Montrer que  $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GG'}$ .
- Déterminer l'intersection des plans (OAD) et (CIJ).

## Exercice 9

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Représenter chacun des points ci-dessous.

$$A\left(-1, \frac{1}{3}, 0\right); B\left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right); C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); D\left(0, -\frac{2}{5}, 0\right).$$

2. Déterminer les composantes des vecteurs

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}; 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{CA}; -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}.$$

## Exercice 10

L'ensemble des vecteurs de l'espace est muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base.

$$a. \vec{u} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$b. \vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

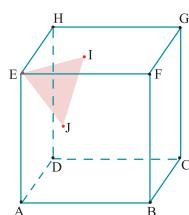
## Exercice 11

Dans la figure ci-contre  
ABCDEFGH est un cube.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [EG] et [AF].

On munit l'espace du repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Déterminer les coordonnées des points H, I et J.
2. Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AH}$  et  $\overrightarrow{IJ}$  sont colinéaires.
3. En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ADE).
4. Montrer que les plans (IJE) et (ADE) sont sécants suivant une droite  $\mathcal{L}$  dont on précisera un point et un vecteur directeur.



## Exercice 12

Soit ABCDEFGH un parallélépipède.

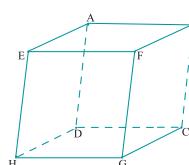
On note I, J et K les milieux respectifs de [AC], [AD] et [AH].

1. Soit G et G' les centres de gravité respectifs des triangles CDH et IJK.

Montrer que  $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AG}'$ .

2. Soit O le milieu de [EC].

Montrer que OIJK est un parallélogramme.



## Exercice 13

Soit ABCDA'B'C'D' un cube.

On désigne par I, J, K, L, M, N et O les milieux respectifs des segments [AD], [BC], [DD'], [CC'], [A'D'] et [A'B'].

En considérant un repère cartésien convenable répondre aux questions suivantes.

1. Les points A, J, K et L sont-ils coplanaires ?
2. Les points M, D, B' et J sont-ils coplanaires ?
3. Les points N, O, I et L sont-ils coplanaires ?

## Exercice 14

L'ensemble des vecteurs de l'espace est muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix}$

et le point A(1, 1, 4).

1. Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont-ils linéairement dépendants ?

2. On considère le point M(5, -1, -14).

Le point M appartient-il au plan  $\mathcal{P}$  ( $A, \vec{u}, \vec{v}$ ) ?

## Exercice 15

Soit ABCDEFGH un cube et soit n un entier naturel non nul. On considère les points I, J et K tels que

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{n+1} \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{n+1} \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{GK} = \frac{1}{n} \overrightarrow{GH}.$$

1. On suppose que  $n = 2$ .
  - a. Faire une figure et placer les points I, J et K correspondants.
  - b. Exprimer  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{FK}$  à l'aide de  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CD}$ .
  - c. Les points F, I, J et K sont-ils coplanaires ?
2. Les points F, I, J et K sont-ils coplanaires quelque soit la valeur de n ?

## Exercice 16

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points A(1, 3, 0), B(3, 1, 0), C(4, 4, 0) et D(4, 4, 0).

On désigne par I, J et L les points tels que

$$\overrightarrow{DI} = \frac{2}{5} \overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{6} \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{DL} = \frac{2}{5} \overrightarrow{DB}.$$

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et L.
2. Représenter les points A, B, C, D, I, J et L.
3. Les points I, J, L et D sont-ils coplanaires ?

## Exercice 17

Soit ABCD un tétraèdre tel que  $AB = AC = AD = 1$ .

On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [AC], [BD], [AD] et [BC].

En considérant un repère cartésien convenable répondre aux questions ci-dessous.

1. Montrer que le quadrilatère INJM est un parallélogramme.

2. On désigne par O le centre du parallélogramme INJM.

a. Montrer que  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BS}$ ,  $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CS}$  et  $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ .

b. Montrer que la droite (KL) passe par O.

3. On désigne par G le centre de gravité du triangle BCD.

Montrer que la droite (AG) passe par O.

## Exercice 18

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(-1, 3, 2)$  et  $C(3, 1, 5)$ .

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit  $x$  et  $y$  deux réels et D un point de coordonnées  $(5, x, y)$ .

Peut-on déterminer  $x$  et  $y$  tels que les points A, B et D soient alignés ?

3. Soit  $z$  un réel et E un point de coordonnées  $(z, 4, 3)$ . Peut-on déterminer  $z$  tel que A, B, C et E soient coplanaires ?

## Exercice 19

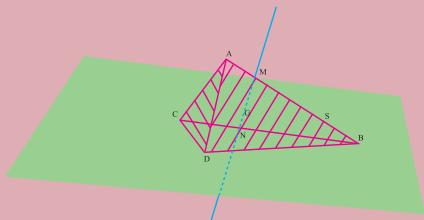
Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête 2. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD], [CC'] et [AA']. On munit l'espace du repère  $(A, \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AL})$ .

1. Déterminer les coordonnées des sommets du cube.
2. Reproduire la figure et placer les points M( $-1, 2, 0$ ) et N( $2, -1, 0$ ).
3. Montrer que la droite (IJ) coupe les droites (CD) et (BC) respectivement en M et N.
4. Placer les points d'intersection respectifs E et F des droites (KM) et (KN) avec chacune des droites (DD') et (BB').
5. a. Exprimer  $\overrightarrow{DE}$  et  $\overrightarrow{BF}$  à l'aide de  $\overrightarrow{CK}$ .  
b. En déduire les coordonnées des points E et F.
6. Déterminer la section du cube par le plan (IJK).

## Avec l'ordinateur

Soit ABCD un tétraèdre. On note G son isobarycentre, c'est-à-dire le point vérifiant  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$  et S le point de [AB] tel que  $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ .

Soit M un point variable sur l'arête [AB] privé de S. On se propose de déterminer l'ensemble des points T intersection du plan (BCD) et de la droite (MG).



1. Créer les points A, B, C et D comme étant des points libres de l'espace, puis le tétraèdre ABCD comme polyèdre convexe défini par ses sommets.
2. Créer le milieu I du segment [AB].
3. Créer le point G comme barycentre de la liste des points pondérés  $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$  et  $(D, 1)$ .
4. Créer le point S comme image de B par l'homothétie de centre A et de rapport  $\frac{3}{4}$ .
5. Créer un point libre M, sur le segment [AB] puis créer la droite (MG), le plan (BCD).
6. Créer le point d'intersection N de la droite (MG) et du plan (BCD).
7. Faire varier le point M et proposer une conjecture concernant l'ensemble des points N.

# Math – culture



*Qu'est ce qu'une couleur*

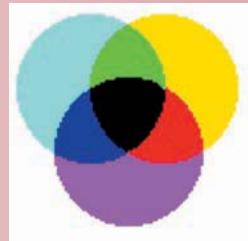
La sigle RGB désigne le rouge (R), le vert (G pour green) et le bleu (B).

L'éclairement simultané par du rouge et du vert donne du **jaune** (Y pour Yellow); du bleu et du vert donnent une couleur turquoise appelée **cyan** (C) et enfin le rouge et le bleu se combinent pour donner un violet appelé **magenta** (M). Ce qui donne la sigle CMY

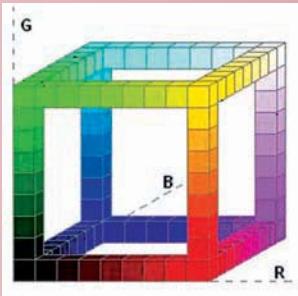
Enfin un éclairement simultané par les trois couleurs de base donne du **blanc** (W pour White). Au départ on avait du **noir** (K de blacK).

On peut régler l'intensité de chacune des trois couleurs fondamentales et obtenir ainsi toutes les couleurs possibles.

En superposant du jaune et du magenta on obtiendra du rouge (le jaune "mange" le bleu du magenta); de même du jaune et du cyan donneront du vert et la superposition du magenta et du cyan donnera du bleu. Enfin la superposition des trois couleurs fondamentales donnera du noir.



Dans la définition par **RGB**, les couleurs sont représentées par les points d'un cube, un des sommets correspond au noir  $(0, 0, 0)$  et le sommet opposé au blanc  $(1, 1, 1)$ . Nous avons choisi l'unité correspondant aux 3 couleurs fondamentales dans leur intensité maximale.



Soit par exemple, les deux vecteurs d'origine  $(0, 0, 0)$  dont les extrémités sont respectivement  $(1, 1, 1)$ , le vecteur dirigé selon la grande diagonale du cube, et  $(\mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ , le vecteur aboutissant au point représentatif de la couleur donnée.

Math – culture

# Chapitre 10

## Produit scalaire Produit vectoriel dans l'espace

*" Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. "*  
*Euclide*

## Pour commencer

### Activité 1

1. Soit ABCD un parallélogramme d'aire S.

Montrer que  $S = AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC}$ .

2. Soit A' le point tel que ABA'C soit un parallélogramme et S' l'aire de ABA'C.

Montrer que  $S = S'$ .

### Activité 2

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête 1 et on munit l'espace du repère (A,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AE}$ ).

1. On désigne par I et J les centres de gravité respectifs des triangles AHF et BDG.
  - a. Calculer les coordonnées de I et J.
  - b. Exprimer  $\vec{IJ}$  à l'aide de  $\vec{EC}$ .
2. a. Quelle est la position relative des deux plans (AHF) et (BDG) ?
  - b. Déterminer l'axe du cercle circonscrit au triangle AFH.
  - c. Déterminer la droite perpendiculaire aux plans (AHF) et (BDG) et passant par E.
  - d. En déduire la droite perpendiculaire aux plans (AHF) et (BDG) et passant par I.

# Cours

## 1. Définition du produit scalaire

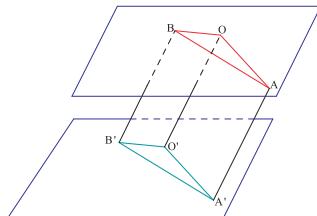
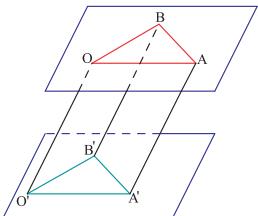
### Activité 1

Soit  $O$  et  $O'$  deux points de l'espace et  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires.

On désigne par  $A, A', B$  et  $B'$  les points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$ .

1. Montrer que les plans  $(OAB)$  et  $(O'A'B')$  sont parallèles.

2. Montrer que  $O'A'.O'B'.\cos\widehat{A'O'B'} = OA. OB.\cos\widehat{AOB}$ .

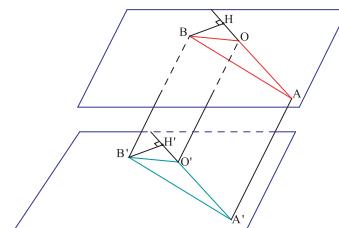
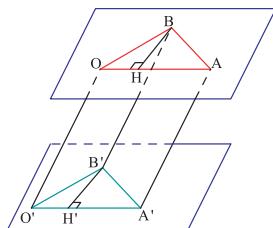


3. Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(OA)$  et  $\Delta$  la droite parallèle à  $(OO')$  passant par  $H$ .

a. Montrer que  $\Delta$  et  $(O'A')$  sont sécantes. Soit  $H'$  leur point d'intersection.

b. Montrer que  $(B'H')$  est perpendiculaire à  $(O'A')$ .

c. Montrer que  $OA.OH = O'A'.O'H'$ .



### Définition

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs et soit  $\alpha$  la mesure en radians de l'angle géométrique déterminé par deux représentants quelconques de même origine des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , le réel défini par

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$  si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls,

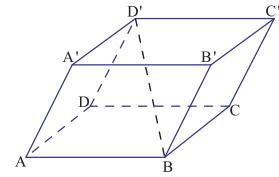
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  si l'un des vecteurs  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est nul.

### Conséquences

- Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{W}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ . (Lorsque  $\|\vec{u}\| = 1$ , on dit que le vecteur  $\vec{u}$  est unitaire).
- $\|\vec{u}\| = 0$ , si et seulement si,  $\vec{u} = \vec{0}$ .
- Pour tout vecteur  $\vec{u}$  non nul de  $\mathcal{W}$ , le vecteur  $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$  est unitaire.
- Pour tous points  $O, A$  et  $B$  de  $\mathcal{E}$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$ .

## Activité 2

Dans la figure ci-contre, ABCDA'B'C'D' est un pavé non droit tel que  $AB = 2$ ,  $AA' = 5$ , et  $\widehat{BAA'} = \frac{\pi}{3}$ .



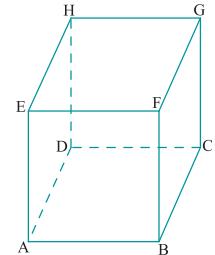
Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}$ .

## Activité 3

Soit ABCDEFGH un cube d'arête  $a$ .

Exprimer à l'aide de  $a$  les produits scalaires

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$ ,  $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE}$  et  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BF}$ .



## Activité 4

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés tels que  $AB = a$  et  $AC = \sqrt{3}a$ .

Soit  $\Delta$  la droite perpendiculaire au plan  $(ABC)$  en  $A$  et  $D$  un point de la droite  $\Delta$  tel que le triangle  $ABD$  soit isocèle en  $A$ .

1. Calculer  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$  et  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$  à l'aide de  $a$ .
2. Donner une mesure de l'angle  $\widehat{ADC}$ .

## 2. Propriétés du produit scalaire

Les propriétés du produit scalaire dans le plan restent valable dans l'espace.

### Propriétés

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{x}$  de  $\mathcal{W}$  et tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} ; \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

$$(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) ; \quad (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) ; \quad (\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

## Activité 1

Soit ABCDEFGH un cube d'arête  $a$ .

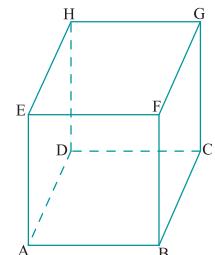
1. Exprimer à l'aide de  $a$  les produits scalaires

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DH} ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} ; \\ & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} ; \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DF} ; \quad \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DF} ; \quad \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC}. \end{aligned}$$

2. Soit  $O$  le milieu de  $[EC]$ .

Exprimer à l'aide de  $a$  les produits scalaires

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AO}, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG} \text{ et } \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC}.$$



## Activité 2

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

1. Montrer que  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .
2. Montrer que  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ , si et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
3. a. Montrer que  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .  
b. Dans quel cas a-t-on  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  ?

## Propriétés

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathcal{W}$ ,

- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  (Inégalité de Cauchy Schwarz).
- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ , si et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont colinéaires.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  (Inégalité de Minkowski).

## 3. Orthogonalité

### 3.1 Définition

#### Définition

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathcal{W}$  sont dits orthogonaux si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  et on note  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

## Activité 1

Soit  $O, A$  et  $B$  trois points non alignés de l'espace et  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(OA)$ .

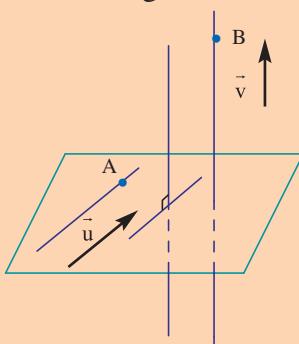
Montrer que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ .

#### Propriété

Soit  $O, A$  et  $B$  trois points de l'espace et  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(OA)$ . Alors  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ .

#### Théorème

Soit  $A$  et  $B$  deux points de l'espace et  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs non nuls de  $\mathcal{W}$ . Alors les droites  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}'(B, \vec{v})$  sont orthogonales, si et seulement si,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .



## Activité 2

Soit ABCD un tétraèdre tel que  $AB = CD = a$ .

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de [AD], [BC], [AC] et [BD].

1. Montrer que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$  et que  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{KL}$ .

2. Montrer que les droites (IJ) et (LK) sont orthogonales.

3 a. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ?

b. Calculer à l'aide de a la longueur des côtés du quadrilatère IKJL.

4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que IKJL soit un carré.

## 3.2 Vecteur normal à un plan

### Définition

Soit A un point de l'espace,  $\vec{n}$  un vecteur non nul et  $\mathcal{P}$  un plan.

On dit que le vecteur  $\vec{n}$  est normal au plan  $\mathcal{P}$  si la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{n})$  est orthogonale à  $\mathcal{P}$ .

La conséquence ci-dessous découle de la définition précédente.

### Conséquence

Soit A un point de l'espace et  $\vec{n}$  un vecteur non nul.

Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

## Activité 1

Soit  $\mathcal{D}(A, \vec{n})$  une droite et  $\mathcal{P}(O, \vec{u}, \vec{v})$  un plan.

Montrer que  $\mathcal{D}(A, \vec{n})$  est orthogonale à  $\mathcal{P}(O, \vec{u}, \vec{v})$ , si et seulement si,  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  et  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ .

### Propriété

Un vecteur non nul  $\vec{n}$  est normal à  $\mathcal{P}(O, \vec{u}, \vec{v})$ , si et seulement si,  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  et  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ .

## Activité 2

Soit A et B deux points de l'espace et  $\vec{n}$ ,  $\vec{n}'$  deux vecteurs non nuls. Montrer que les droites  $\mathcal{D}(A, \vec{n})$  et  $\mathcal{D}'(B, \vec{n}')$  sont orthogonales à un même plan  $\mathcal{P}$ , si et seulement si, les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires.

### Propriété

Deux vecteurs non nuls  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont normaux à un même plan, si et seulement si, ils sont colinéaires.

## Activité 3

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a et O l'isobarycentre des sommets (O est l'unique point vérifiant  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$ ).

1. Calculer  $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ .

2. Montrer que deux quelconques des arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales.

3. Soit  $A'$  le centre de gravité du triangle  $BCD$ .
  - a. Etablir que  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{AO}$  et  $\overrightarrow{O}$  sont alignés.
  - b. Calculer  $3\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
  - c. En déduire que la droite ( $OA$ ) est orthogonale au plan  $(BCD)$ .
4. Montrer que les droites  $(OB)$ ,  $(OC)$  et  $(OD)$  sont respectivement orthogonales aux plans  $(ADC)$ ,  $(ADB)$  et  $(ABC)$ .

## Activité 4

Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  deux plans passant respectivement par les points  $A$  et  $B$  et de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$ . On se propose de montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont perpendiculaires, si et seulement si,  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux.

1. On suppose que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont perpendiculaires. Soit  $\Delta$  une droite contenue dans  $\mathcal{P}$  et perpendiculaire à  $\mathcal{P}'$ .
  - a. Que représente le vecteur  $\vec{n}'$  pour la droite  $\Delta$  ?
  - b. En déduire que  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux.
2. On suppose que  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux.
  - a. Montrer que  $\mathcal{D}(A, \vec{n}')$  est contenue dans le plan  $\mathcal{P}$ .
  - b. Justifier que  $\mathcal{D}(A, \vec{n}')$  est perpendiculaire à  $\mathcal{P}'$ .
  - c. Quelle est alors la position relative de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  ?

## Propriété

Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Deux plans sont perpendiculaires, si et seulement si, leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

## Activité 5

Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  deux plans perpendiculaires, d'intersection  $(BC)$ .

Soit  $A$  un point de  $\mathcal{P}$  tel que le triangle  $ABC$  soit équilatéral.

Soit  $D$  et  $E$  deux points de  $\mathcal{P}'$  tels que  $BCDE$  soit un carré.

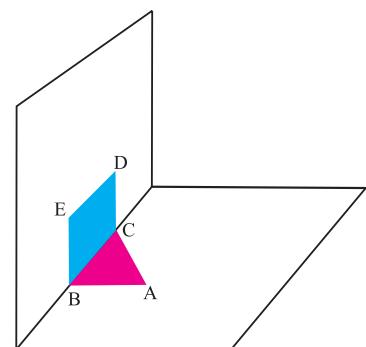
On note  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ ,

$O$  le centre de  $BCDE$ ,  $I$  le milieu de  $[BC]$ ,

$\Delta$  l'axe du cercle circonscrit à  $ABC$ ,

$\Delta'$  l'axe du cercle circonscrit à  $BCDE$ .

1. a. Donner un vecteur directeur de  $\Delta$ .
- b. Donner un vecteur directeur de  $\Delta'$ .
- c. Montrer que les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont orthogonales.



2. a. Montrer que  $\Delta$  est parallèle à (OI).
- b. Montrer que  $\Delta'$  est parallèle à (GI).
- c. En déduire que  $\Delta$  et  $\Delta'$  se coupent en un point, noté J.
3. Montrer que IOJG est un rectangle.

## 4. Base orthonormée – Repère orthonormé.

### Définition

- Une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathcal{W}$  est dite orthogonale si les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont orthogonaux deux à deux.
- Un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathcal{E}$  est dit orthogonal si la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthogonale.
- Une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathcal{W}$  est dite orthonormée si les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont unitaires et orthogonaux deux à deux.
- Un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathcal{E}$  est dit orthonormé si la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormée.

### Activité 1

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée de  $\mathcal{W}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

1. a. Montrer que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$ .

b. Montrer que  $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

2. Soit O un point de  $\mathcal{E}$  et M, M' deux points de coordonnées respectives  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Montrer que  $MM' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ .

### Propriétés

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace.

Pour tous vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Pour tous points M(x, y, z), M'(x', y', z'),  $MM' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ .

### Activité 2

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée de  $\mathcal{W}$ .

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer un vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{W}$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = -1 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = 2 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{k} = 1 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{i} = -1 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{j} = 2 .$$

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = -1 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{k} = 1 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = 2 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{k} = 1 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{i} = -1 , \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = 2 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{k} = 1 .$$

### Activité 3

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(-3, 6, 1)$ ,  $C(0, 9, 1)$  et  $D(6, 3, 0)$ .

- Montrer que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont coplanaires.
- Montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est un rectangle.

### Activité 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit les points  $A(\sqrt{5}, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  et  $C(0, 0, \sqrt{6})$ . On désigne par  $A'$  le milieu de  $[BC]$  et par  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

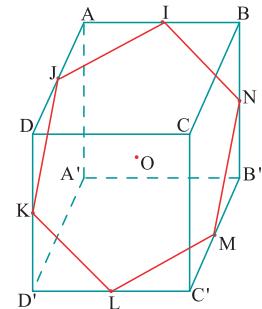
- Déterminer les coordonnées de  $A'$  et de  $G$ . Puis calculer  $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AA'}$ .
- Les droites  $(OG)$  et  $(AA')$  sont-elles orthogonales ?

### Activité 5

Dans la figure ci-contre  $ABCDA'B'C'D'$  est un cube de centre  $O$  et d'arête 1. Les points  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  et  $N$  sont les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[AD]$ ,  $[DD']$ ,  $[C'D']$ ,  $[B'C']$  et  $[BB']$ .

On munit l'espace du repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ .

- Déterminer les coordonnées des points  $O$ ,  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  et  $N$ .
- Montrer que les points  $O$ ,  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  et  $N$  sont coplanaires.
- Montrer que  $IJKLMN$  est un hexagone régulier de centre  $O$ .
- Montrer que les points  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  et  $N$  sont équidistants de  $A'$ .
- Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{A'O}$  est normal au plan  $(IJK)$ .
- Calculer le volume de la pyramide  $A'IJKLMN$  de base l'hexagone  $IJKLMN$ .



### Activité 6

Soit  $ABCDA'B'C'D'$  un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ .

- a. Calculer  $AC$  et  $AC'$ .  
b. Donner une valeur approchée de l'angle  $\widehat{BAC'}$ .
- Le point  $B$  se projette orthogonalement sur la droite  $(AC')$  en  $H$ .  
a. En prenant pour plan de la figure, le plan  $(ABC'D')$ , dessiner le rectangle  $ABC'D'$  et le point  $H$ .  
b. Calculer  $\overline{BH}$  puis  $AH$ .  
c. Exprimer  $AH$  en fonction de  $AC$ .  
d. En déduire les coordonnées de  $H$ .
- a. Calculer  $DH \cdot AC'$ .  
b. En déduire que  $(DH)$  est orthogonale à  $(AC')$ .
- Montrer que  $(A'H)$  est orthogonale à  $(AC')$ .
- Montrer que les plans  $(AC'B)$  et  $(HDA')$  sont orthogonaux.

## 5. Produit vectoriel

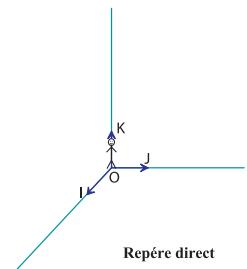
### 5.1. Orientation de l'espace et d'un plan de l'espace

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de l'espace. Considérons les points I, J et K de l'espace tels que  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$  et  $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ .

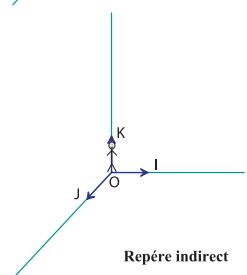
Un observateur d'Ampère pour ce repère est un personnage placé le long de  $(OK)$ , les pieds en O et qui regarde dans la direction de  $(OI)$ .

Le plan  $(OIK)$  partage l'espace en deux demi-espaces ; l'un est à gauche de l'observateur et l'autre est à sa droite.

- Si  $(OJ)$  est dans le demi-espace placé à gauche de l'observateur, on dit que le repère est direct.



- Si  $(OJ)$  est dans le demi-espace placé à droite de l'observateur, on dit que le repère est indirect.



Orienter l'espace c'est choisir l'un de ces repères.

- On dit que l'espace est orienté dans le sens direct s'il est muni d'un repère direct.
- On dit que l'espace est orienté dans le sens indirect s'il est muni d'un repère indirect.

Nous admettrons qu'étant donné une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  a toujours la même orientation quelque soit le point O de l'espace.

- On dit que la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est directe, dans le cas où le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est direct.
- On dit que la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est indirecte, dans le cas où le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est indirect.
- Permuter deux vecteurs change l'orientation d'une base.

#### Activité 1

L'espace est muni d'un repère direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Parmi les bases ci-dessous préciser celles qui sont directes et celles qui sont indirectes.

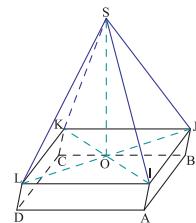
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ;  $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ ;  $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ ;  $(\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ ;  $(\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ ;  $(-\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ .

## Activité 2

L'espace est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCDIJKL est un parallélépipède et SIJKL est une pyramide.

1. Donner trois exemples de repères directs.
2. Donner trois exemples de repères indirects.



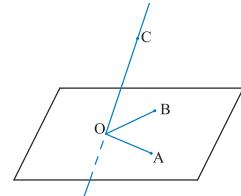
## Orientation d'un plan de l'espace orienté

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de l'espace orienté et  $O$  un point de  $\mathcal{P}$ .

On considère la perpendiculaire  $\Delta$  à  $\mathcal{P}$  en  $O$ , un point  $C$  de  $\Delta$

distinct de  $O$ , deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{P}$  tels que  $O, A$  et  $B$  ne soient pas alignés.

Le repère cartésien  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  de  $\mathcal{P}$  est dit direct (respectivement indirect) si  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$  est un repère cartésien direct (respectivement indirect) de  $\mathcal{E}$ .



## Activité 3

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires de l'espace et soient  $O$  et  $O'$  deux points de  $\mathcal{E}$ .

On désigne par  $A, A', B, B'$  les points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$ .

1. Montrer que les plans  $(OAB)$  et  $(O'A'B')$  sont parallèles.

2. Soit  $d$  un réel strictement positif.

- a. Montrer qu'il existe un unique point  $C$  de  $\mathcal{E}$  tel que

$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB}, OC = d$  et le repère  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$  est direct.

- b. Soit  $C'$  le point de  $\mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{O'C'} \perp \overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'C'} \perp \overrightarrow{O'B'}, O'C' = d$  et

le repère  $(O', \overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'})$  est direct. Montrer que  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C'}$ .

Soit  $\mathcal{P}$  un plan.

Pour toute base  $(\vec{i}, \vec{j})$  de  $\mathcal{P}$  et tout réel  $d > 0$ , il existe un unique vecteur  $\vec{k}$  vérifiant  $\|\vec{k}\| = d$  ;  $\vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$  ; la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est directe .

L'orientation du plan  $\mathcal{P}$  est donc déterminée par la donnée d'un vecteur normal.

## 5.2 Définition et propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs

### Activité 1

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct de l'espace.

On considère les points  $A(8, -4, 1)$  et  $B(9, 0, 9)$ .

1. Vérifier que le triangle  $OAB$  est un triangle rectangle et isocèle en  $A$ .

2. On pose  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB}$  et  $\vec{w} = 9(-4\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k})$ .

- a. Vérifier que  $\vec{w}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

- b. Vérifier que  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \widehat{AOB}$ .

## Définition

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs et soit  $\alpha$  la mesure en radians de l'angle géométrique déterminé par deux représentants quelconques de même origine de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$ .

On appelle produit vectoriel de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , le vecteur défini comme suit

- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ ,

- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires alors

  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$  orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ ,

  - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe,

  - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha.$

## Conséquences

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathcal{W}$ ,

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ .

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ , si et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

Pour tous points A, B et C distincts d'un plan orienté par un vecteur normal et unitaire  $\vec{k}$ ,

- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}}, \widehat{\overrightarrow{AC}}) \vec{k}$ .

## Activité 2

Soit A, B et C trois points non alignés de  $\mathcal{E}$ .

Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ .

## Activité 3

Soit A, B et C trois points non alignés de  $\mathcal{E}$ , D le point tel que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$  et D' le point tel que  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD'}$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  est non nul.

2. Montrer que D' est le symétrique de D par rapport à A.

## Propriété

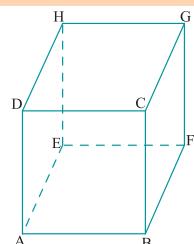
Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathcal{W}$ ,  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$ .

## Activité 4

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Déterminer les vecteurs

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DH}$ ,  $\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{FG}$ ,  $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{DC}$ .



## Propriétés

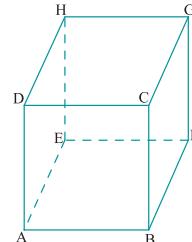
Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de  $\mathcal{W}$ , et pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$a\vec{u} \wedge b\vec{v} = ab(\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad ; \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

### Activité 5

ABCDEFGH est un cube d'arête  $a$ .

Déterminer les vecteurs  $\overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{HD}$ ,  $\overrightarrow{FC} \wedge \overrightarrow{EF}$ ,  $\overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{AB}$ .



## 5.3 Expression analytique du produit vectoriel de deux vecteurs

### Activité 1

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée directe de  $\mathcal{W}$ .

1. Déterminer  $\vec{i} \wedge \vec{j}$ ,  $\vec{j} \wedge \vec{k}$  et  $\vec{i} \wedge \vec{k}$ .

2. Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

Montrer que  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb') \vec{i} + (ca' - ac') \vec{j} + (ab' - ba') \vec{k}$ .

## Propriété

L'espace est muni d'une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Pour tous vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb') \vec{i} + (ca' - ac') \vec{j} + (ab' - ba') \vec{k}$ .

### Activité 2

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct de l'espace.

On considère trois points  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(1, -2, 1)$  et  $C(0, -1, 2)$ .

1. Déterminer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .

2. En déduire une valeur approchée à 0.1 près de la mesure de l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$ .

### Activité 3

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct de l'espace.

On considère trois points  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(4, 0, 1)$  et  $C(1, 3, -2)$ .

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

2. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

## Activité 4

1. Soit un tétraèdre ABCD et H le pied de la hauteur issue de A, dans le triangle ABC.

a. Montrer que  $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{HA}$ .

b. Montrer que  $|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}| = \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\| \cdot \|\overrightarrow{HA}\|$ .

c. En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à  $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}|$ .

2. Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct de l'espace.

Calculer le volume du tétraèdre ABCD avec A(-2, 3, 4), B(0, -1, 1), C(2, 0, -4) et D(-3, 5, 0).

## Activité 5 Distance d'un point à une droite

1. On considère une droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(B, \vec{u})$  et un point A n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$ .

Soit H le projeté orthogonal de A sur  $\mathcal{D}$ .

a. Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u}$ .

b. En déduire que  $AH = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ .

2. Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct de l'espace.

Calculer AH avec A(-2, 3, 4), B(0, -1, 1) et  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

# QCM – VRAI – FAUX

## QCM

L'ensemble des vecteurs de l'espace est muni d'une base quelconque.

Cocher la réponse exacte.

1. On considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Alors

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires        $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires        $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires

2. Le produit scalaire des vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  est égal à

$2\|\vec{u}\|^2$         $-2\|\vec{u}\|^2$         $-6$ .

3. On considère les vecteurs  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  alors  $\|\vec{v} + \vec{w}\|$  est égale à

$\|\vec{w}\|$         $2\|\vec{w}\|$         $3\|\vec{w}\|$

4. Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthogonale alors  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + 2\vec{w})$  est égal à

$0$         $-1$         $2$ .

5. Si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base orthonormée alors  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + 2\vec{u})$  est égal à

$0$         $2$         $1$ .

## VRAI – FAUX

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls de  $\mathcal{E}$  et A, B deux points distincts de l'espace.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{w}$  et  $\vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{w}$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

2. Si  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{w}$ , alors  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\mathcal{W}$ .

3. Si  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{v}$  et  $\vec{v}$  est normal à un plan  $\mathcal{P}$ , alors la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  est parallèle à  $\mathcal{P}$ .

4. Si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  alors l'un des vecteurs  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est nul.

5. Si  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$  alors  $\vec{v} = \vec{w}$ .

## Mobiliser ses compétences

### Situation 1

Dans la figure ci-contre  $ABCDA'B'C'D'$  est un cube de centre  $O$  et d'arête 1. Les points  $I, J, K, I', J'$  et  $K'$  sont les milieux respectifs des segments  $[BC'], [BD], [AB'], [AD'], [A'C']$  et  $[DC']$ .

On munit l'espace du repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ .

1. Déterminer les coordonnées des points  $I, J, K, I', J'$  et  $K'$ .

2. Calculer les distances  $IJ, JK'$  et  $I'K'$ .

En déduire que le triangle  $JIK'$  est équilatéral.

3. Montrer que toutes les faces de l'octaèdre  $IJKI'J'K'$  sont des triangles équilatéraux.

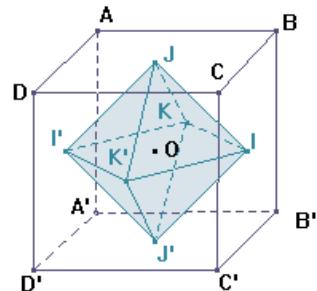
4. Montrer que les segments  $[II'], [JJ']$  et  $[KK']$  se coupent en leur milieu  $O$ .

5. Calculer les produits scalaires  $\overline{IK} \cdot \overline{IK}'$  et  $\overline{JK} \cdot \overline{JK}'$ .

6. En déduire la nature des quadrilatères  $IKI'K'$  et  $JKJ'K'$  et calculer leurs aires.

7. Calculer les produits scalaires  $\overline{JJ'} \cdot \overline{II'}$  et  $\overline{II'} \cdot \overline{KK'}$ .

8. Calculer le volume de l'octaèdre  $IJKI'J'K'$ .



### Situation 2

Dans la figure ci-contre  $ABCDA'B'C'D'$  est un cube d'arête 1.

Soit  $I, J, K$  et  $L$  les points appartenant respectivement aux côtés  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[AD]$  tels que  $AI = AL = CJ = CK = \frac{3}{4}$ .

Soit  $I', J', K'$  et  $L'$  les points appartenant respectivement aux côtés  $[A'B']$ ,  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  et  $[A'D']$  tels que  $A'I' = A'L' = C'J' = C'K' = \frac{3}{4}$ .

On munit l'espace du repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ .

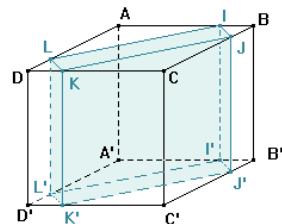
1. Déterminer les coordonnées des points  $I, J, K, L, I', J', K'$  et  $L'$ .

2. Montrer que  $IJKL'I'J'K'L'$  est un parallélépipède.

3. Montrer que  $IJKL$  et  $I'J'K'L'$  sont des rectangles.

4. a. Montrer que le vecteur  $\overline{II'}$  est normal au plan  $(I'J'L')$ .

b. En déduire que  $IJKL'I'J'K'L'$  est un parallélépipède rectangle.



### Situation 3

1. Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée directe de  $\mathcal{W}$ ,  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$  trois vecteurs.

Montrer que  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ .

2. Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$ .

Quel est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overline{AM} \wedge \overline{AB} = \overline{AC}$  ?

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que  $AB = 1$ ,  $AD = \sqrt{3}$  et  $\widehat{CAG} = \frac{\pi}{4}$ .

- Montrer que le triangle ACG est rectangle isocèle.
- Calculer AG.
- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$  et en déduire  $\widehat{CAB}$ .

## Exercice 2

On considère un tétraèdre régulier SABC tel que  $AB=1$ .

On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC.

- Montrer que  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$ .
- Déterminer l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.
- Calculer  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{HA}$ ,  $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{HB}$  et  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{HC}$ .

## Exercice 3

On considère un tétraèdre régulier ABCD.

- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ .
- Quelle est la position relative des droites (AB) et (CD) ?
- On désigne par E et F les milieux respectifs des segments [AD] et [BC].
  - Montrer que  $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ .
  - Calculer  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC}$  et en déduire la position relative des droites (EF) et (BC) ?

## Exercice 4

On considère un cube ABCDEFGH.

- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ .
- Ecrire  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH}$  en fonction de AB.
- En déduire  $\cos \widehat{FAH}$ .

## Exercice 5

On considère quatre points A, B, C et D de  $\mathcal{E}$ .

Montrer que  $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$  est une condition nécessaire et suffisante pour que (AB) et (CD) soient orthogonales.

## Exercice 6

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{W}$ .

$$\text{Montrer que } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \left( \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right).$$

## Exercice 7

On munit  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Calculer AB, AC, BC,  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{BAC}$  dans chacun des cas suivants.

- $A(1, 1, 1)$  ;  $B(1, 2, 3)$  ;  $C(-1, 3, -2)$  ;
- $A(2, -3, 5)$  ;  $B(0, 1, 0)$  ;  $C(0, 0, -1)$  ;
- $A(1, 0, 0)$  ;  $B(0, 2, 0)$  ;  $C(0, 0, 3)$ .

## Exercice 8

On munit  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1, \sqrt{2}, 1)$ ,  $B(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 0)$ ,  $C(-1, \sqrt{2}, 3)$  et  $D(1, 1, 1)$ .

On considère les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  tels que

$$\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA}, \quad \vec{v} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \overrightarrow{OC}.$$

- Faire une figure.
- Montrer que  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est un repère orthonormé de  $\mathcal{E}$ .
- Déterminer les coordonnées du point D dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

## Exercice 9

On munit  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $x$  un réel tel que  $0 < x < 1$ .

Soit  $M(x, 0, 0)$ ,  $N(x, 0, x)$ ,  $P(0, x, 0)$  et  $Q(0, x, x)$ .

- Montrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires.
- Montrer que le quadrilatère MNQP est un rectangle.
- Existe-t-il  $x$  tel que MNQP est un carré ?
- On désigne par  $S(x)$  l'aire du rectangle MNQP.
  - Exprimer  $S(x)$  en fonction de  $x$ .
  - Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle l'aire  $S(x)$  est maximale.

## Exercice 10

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que  $AB = 2a$  et  $AC = a$ , ( $a > 0$ ).

On désigne par  $\Delta$  la droite passant par A et perpendiculaire au plan (ABC).

On désigne par S le point de D tel que  $AS = a$ .

- Calculer en fonction de  $a$  les distances BC, SB et SC.

2. Soit E un point du segment [AB]. On désigne par  $\mathcal{P}$  le plan  $(E, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AS})$ .

On désigne par F, G et H les points d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  respectivement avec les droites (SB), (SC) et (AC).

- Montrer que les droites (EH) et (BC) sont parallèles.
- Montrer que les droites (GF) et (BC) sont parallèles.

## Exercice 11

On munit  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points A(1, -2, 4) et B(1, 0, 0) et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

On désigne par H le projeté orthogonal du point B sur la droite  $(A, \vec{u})$ .

- Faire une figure.
- Déterminer les coordonnées du point H.
- En déduire la distance BH.

## Exercice 12

On considère un cube ABCDEFGH et les points M, N et P tels que

$$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GH}, \quad \overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF} \text{ et } \overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}.$$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [HG].

- Faire une figure.
- Montrer que  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CI}$  et  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{JP}$ .
- Désigner par Q et R les milieux respectifs des segments [BC] et [GC].

Montrer que le plan (MNP) coupe le plan (ABC) suivant la droite (PQ).

- Soit K le milieu de [FC].
- Montrer que la droite (QR) est parallèle à la droite (FC).
- En déduire que le plan (MNP) coupe le plan (FGC) suivant la droite (QR).
- Montrer que la section du cube ABCDEFGH par le plan (PMN) est le pentagone MNPQR.

## Exercice 13

On considère quatre points A, B, C et D de  $\mathcal{E}$ .

On désigne par G le barycentre de (A, 2) et (B, 3) et par G' le barycentre de (C, 1) et (D, 4).

Déterminer l'ensemble des points M de  $\mathcal{E}$  tel que  $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}\|$ .

## Exercice 14

On considère un tétraèdre ABCD.

On désigne par E, F, G et H les milieux respectifs des segments [AD], [BC], [AB] et [CD].

- Montrer que  $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ .
- Montrer que  $2\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .
- Calculer  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GH}$  en fonction de AC et BD.

## Exercice 15

Sur trois droites deux à deux orthogonales concourantes en un point O, on place les points A, B et C tels que  $OA = OB = 1$  et  $OC = 2$ .

- Faire une figure.
- En considérant le repère  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{OC})$  répondre aux questions suivantes.
- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- En déduire  $\widehat{BAC}$ .
- Désigner par K le projeté orthogonal du point O sur le plan ABC, et on note  $(x, y, z)$  les coordonnées de K.
  - Montrer que  $x = y = 2z$ .
  - Calculer le déterminant de  $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC})$ .
  - En déduire les coordonnées du point K.
- Montrer que le point K est l'orthocentre du triangle ABC.

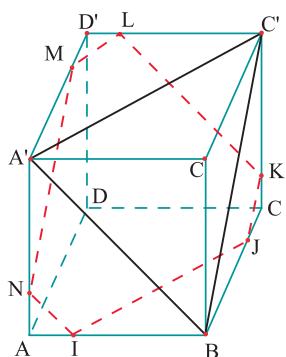
## Exercice 16

Soit  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  une base de  $\mathcal{W}$  et  $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ .

- Soit  $\lambda$  un réel et  $\vec{v}'$  le vecteur tel que  $\vec{v}' = \lambda \vec{i} + \vec{v}$ .
  - Pour quelle valeur de  $\lambda$ ,  $\vec{v}'$  est-il orthogonal à  $\vec{i}$ ?
  - En déduire un vecteur unitaire  $\vec{j}$  orthogonal à  $\vec{i}$
- Soit  $\vec{w}'$  le vecteur tel que  $\vec{w}' = \vec{w} - (\vec{i} \cdot \vec{w})\vec{i} - (\vec{j} \cdot \vec{w})\vec{j}$ .
  - Montrer que  $\vec{w}'$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
  - En déduire un vecteur  $\vec{k}$  tel que  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée de  $\mathcal{W}$ .

## Exercice 17

Dans la figure ci-dessous ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé ( $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ ).



Soit  $x$  un réel tel que  $0 < x < 1$ .

On considère les points  $I, J, K, L, M$  et  $N$  appartenant respectivement aux arêtes  $[AB], [BC], [CC'], [C'D'], [D'A']$  et  $[AA']$  tels que

$$AI = AN = CJ = CK = D'L = D'M = x.$$

1. Déterminer les coordonnées des points  $I, J, K, L, M$  et  $N$ .

2. Montrer que les points  $I, J, K, L, M$  et  $N$  sont coplanaires.

3. Montrer que l'hexagone  $IJKLMN$  est la section du cube par le plan passant par  $I$  et parallèle au plan  $(BA'C')$ .

4. a. Calculer  $IJ, JK, KL, LM, MN$  et  $NI$  en fonction de  $x$ .

b. En déduire que le périmètre de l'hexagone  $IJKLMN$  est indépendant de  $x$ .

5. a. Montrer que les quadrilatères  $MLKJ$  et  $MJIN$  sont deux trapèzes isocèles.

b. On désigne par  $h$  et  $h'$  les longueurs des hauteurs respectives des trapèzes  $MLKJ$  et  $MJIN$ .

Exprimer  $h$  et  $h'$  en fonction de  $x$ .

c. En déduire que l'aire  $S(x)$  de l'hexagone  $IJKLMN$  est  $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} (-2x^2 + 2x + 1)$ .

d. Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle l'aire  $S(x)$  est maximale.

## Exercice 18

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée de  $\mathcal{W}$ .

Trouver dans chacun des cas ci-dessous un vecteur  $\vec{w}$  orthogonal aux deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

a.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . b.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

c.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2-\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

## Exercice 19

Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points de l'espace orienté.

1. Démontrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}.$$

2. Démontrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CB}.$$

3. Démontrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}.$$

## Exercice 20

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace orienté.

1. Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que

$$(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}.$$

## Exercice 21

Soit ABCDEFGH un cube tel que le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  soit orthonormé direct.

On désigne par  $I$  le milieu de  $[EF]$  et  $K$  le centre du carré  $ADHE$ .

1. a. Vérifier que  $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$ .

b. En déduire l'aire du triangle  $IGA$ .

2. Calculer le volume du tétraèdre  $ABIG$ .

## Exercice 22

Soit ABCDEFGH un cube tel que le repère  $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA})$  soit orthonormé direct.

On désigne par  $I$  le milieu de  $[EF]$  et  $K$  le centre du carré  $ADHE$ .

1. Donner un représentant de chacun des vecteurs  $\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{FG}$  et  $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{CB}$ .

2. On note  $J$  le milieu de  $[BG]$ .

Donner un représentant de chacun des vecteurs  $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AJ}$ .

3. Comparer les vecteurs  $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AH}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

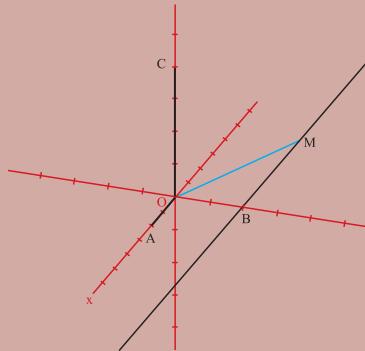
## Avec l'ordinateur

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. On fixe un point A de l'axe  $(O, \vec{i})$  et un point B de l'axe  $(O, \vec{j})$  distincts tous de O.

Soit D la droite passant par B et parallèle à  $(O, \vec{i})$  et M un point variable sur D.

On vérifie à l'aide du logiciel Géospace que le produit vectoriel  $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OM}$  ne varie pas lorsque le point M se déplace sur D.



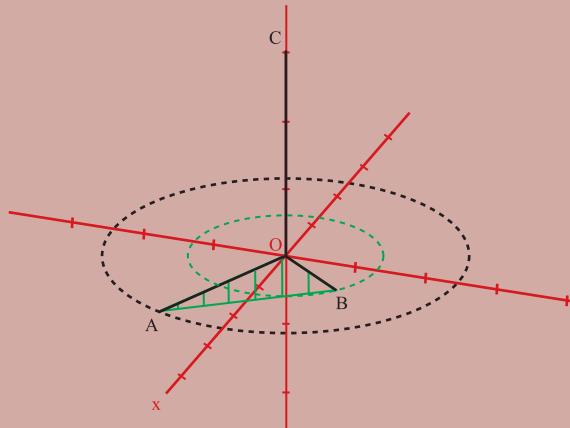
2. On crée dans cette partie deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  de centre O, situés dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère un point variable A sur  $C_1$  et un point variable B sur  $C_2$ .

Le point C est défini par  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$

On affiche l'aire A' du triangle OAB et les composantes du vecteur  $\overrightarrow{OC}$ .

A l'aide des flèches de direction  $\uparrow\downarrow\leftarrow\rightarrow$ , observer le résultat  $A' = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|$  lorsque les points A et B se déplacent respectivement sur  $C_1$  et  $C_2$ .





## Histoire des déterminants

Les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVI<sup>e</sup> siècle, soit bien avant les matrices, qui n'apparaissent qu'au XIX<sup>e</sup> siècle. Il convient de rappeler que les Chinois furent les premiers à utiliser des tableaux de nombres et à appliquer un algorithme maintenant connu sous le nom de procédé d'élimination de Gauss-Jordan.

## Premiers calculs de déterminants

Dans son sens original, le déterminant *détermine* l'unicité de la solution d'un système d'équations linéaires. Il fut introduit dans le cas de la taille 2 par Cardan en 1545 dans son *Ars Magna*, sous forme d'une *règle* pour la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues. Cette première formule porte le nom de *regula de modo*.

Le japonais Kowa Seki introduit les premiers déterminants de taille 3 et 4, à la même époque que l'allemand Leibniz. L'apparition des déterminants de taille supérieure demande encore plus de cent ans. Curieusement le japonais Kowa Seki et l'allemand Leibniz en donnèrent les premiers exemples presque simultanément.

Leibniz étudie de nombreux systèmes d'équations linéaires. En l'absence de notation matricielle, il représente les coefficients inconnus par un couple d'indices : il note ainsi  $ij$  pour  $a_{ij}$ . En 1678, il s'intéresse à un système de trois équations et trois inconnues et donne, sur cet exemple, la formule de développement suivant une colonne. La même année, il écrit un déterminant de taille 4, correct aux signes près[1]. Leibniz ne publie pas ces travaux, qui semblent avoir été oubliés avant que les résultats soient redécouverts indépendamment une cinquantaine d'années plus tard.

À la même période, Kowa Seki publie un manuscrit sur les déterminants, où il trouve une formulation générale difficile à interpréter. Elle semble donner des formules correctes pour des déterminants de taille 3 et 4, et de nouveau des signes erronés pour les déterminants de taille supérieure[2]. La découverte restera sans lendemain, à cause de la coupure du Japon avec le monde extérieur.



# Chapitre 1

## Equations de droites et de plans Equation d'une sphère

*" L'essence des mathématiques, c'est la liberté. "*  
*Cantor*

### Pour commencer

#### Activité 1

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit le point  $A(1, 1, 2)$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Tracer la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .
2. a. Placer le point  $B(-1, 2, 0)$ . Ce point appartient-il à la droite  $\mathcal{D}$  ?
- b. Déterminer le point  $C$  de la droite  $\mathcal{D}$  dont la côte est nulle.

#### Activité 2

Soit ABCDEFGH un cube de côté 1 et soit I le milieu de l'arête  $[BC]$ .

On munit l'espace du repère cartésien  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. a. Donner les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CH}$  et  $\overrightarrow{CI}$ .
- b. Le point I appartient-il au plan  $(CFH)$  ? Justifier.
2. La droite  $(IG)$  coupe le plan  $(CFH)$  en un point M.
- a. Placer M.
- b. Déterminer les coordonnées de M.

#### Activité 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On donne les points  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 0, 1)$  et  $C(0, 1, 1)$ .

1. Calculer les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
2. Soit G le point de coordonnées  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .
  - a. Montrer que la droite  $(OG)$  est perpendiculaire au plan  $(ABC)$ .
  - b. Le point G appartient-il au plan  $(ABC)$  ?

# Cours

## 1. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

### Activité 1

Soit A, B et C trois points distincts de l'espace.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$  ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$  ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{CM} = \alpha \overrightarrow{CB}$  ;  $\alpha \geq 0$ .

### Activité 2

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par A(3, -1, 0) et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $M(x, y, z)$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ , si et seulement si, il existe un réel  $\alpha$  tel que  $\begin{cases} x - 3 = \alpha, \\ y + 1 = -2\alpha, \\ z = \alpha. \end{cases}$
2. a. Le point S(2, 2, 5) appartient-il à la droite  $\mathcal{D}$  ?  
b. Le point T(1, 3, 2) appartient-il à la droite  $\mathcal{D}$  ?
3. Soit  $A(x_0, y_0, z_0)$  un point de l'espace,  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un vecteur tel que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

On considère un point  $M(x, y, z)$  de l'espace. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $x, y$  et  $z$  pour que le point  $M$  appartienne à la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ .

### Théorème

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit le point  $A(x_0, y_0, z_0)$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  tel que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  vérifiant  $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases}$  ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ , est la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ .

Le système précédent est appelé représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ .

## Activité 4

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la droite  $\mathcal{D}$  : 
$$\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 4 + 2\alpha \\ z = 3 + 6\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$
.

1. a. Déterminer un point de  $\mathcal{D}$  d'abscisse supérieure à 100.  
b. Déterminer un point de  $\mathcal{D}$  d'ordonnée négative.  
c. Donner un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  dont la composante suivant  $\vec{i}$  est égale à 10.
2. Le système 
$$\begin{cases} x = -1 + 30t \\ y = 2 + 30t \\ z = -3 + 90t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$
, est-il une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$ .
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}'$  parallèle à  $\mathcal{D}$  et passant par le point E  $(-1, -2, -4)$ .

## Activité 5

Soit ABCDEFGH un cube, I et J les centres des faces ABCD et BCGF et O le centre de gravité du triangle BEG.

On munit l'espace du repère cartésien  $(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$ .

1. a. Calculer les coordonnées de chacun des points A, F, D, I et J.  
b. Donner la position relative des droites (IJ) et (AF).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  ( $D, \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AD}$ ).

## 2. Représentation paramétrique d'un plan de l'espace

### Activité 1

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{BC}$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

### Activité 2

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit le point A  $(2, 0, 1)$  et les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires.
2. Soit  $\mathcal{P}$  le plan passant par A et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
  - a. Montrer que M  $(x, y, z)$  appartient à  $\mathcal{P}$ , si et seulement si, il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que 
$$\begin{cases} x-2 = \alpha+ \beta, \\ y = -2\alpha - \beta, \\ z-1 = \alpha + 3\beta. \end{cases}$$
  - b. Le point L  $(2, 1, 5)$  appartient-il à  $\mathcal{P}$  ?
  - c. Le point E  $(7, -3, 5)$  appartient-il à  $\mathcal{P}$  ?

### Activité 3

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le point  $A(x_0, y_0, z_0)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux vecteurs non colinéaires.

Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x, y, z)$ .

Montrer que le point  $M$  appartient au plan  $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$  si et seulement si, il existe deux réels

$$\alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } \begin{cases} x - x_0 = \alpha a + \beta a' \\ y - y_0 = \alpha b + \beta b' \\ z - z_0 = \alpha c + \beta c' \end{cases}.$$

### Théorème

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit le point  $A(x_0, y_0, z_0)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  vérifiant le système  $\begin{cases} x - x_0 = \alpha a + \beta a' \\ y - y_0 = \alpha b + \beta b' \\ z - z_0 = \alpha c + \beta c' \end{cases}; \alpha \text{ et } \beta \text{ deux réels}$  est le plan  $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ .

Le système précédent est appelé représentation paramétrique du plan  $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$

### Activité 4

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le plan  $\mathcal{P}$ :  $\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = -1 + 2\alpha + \beta ; \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - 2\alpha \end{cases}$

1. Déterminer trois points non alignés  $A, B$  et  $C$  appartenant au plan  $\mathcal{P}$ .

2. Donner une autre représentation paramétrique de  $\mathcal{P}$ .

### Activité 5

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la droite  $\mathcal{D}$ :  $\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 4 + 2\alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \text{ et le point } T(2, 2, 1). \\ z = 3 - 6\alpha \end{cases}$

1. Vérifier que  $T$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}$ .

2. Soit  $\mathcal{P}$  le plan défini par la droite  $\mathcal{D}$  et le point  $T$ .

a. Déterminer un couple de vecteurs directeurs de  $\mathcal{P}$ .

b. Donner alors une représentation paramétrique de  $\mathcal{P}$ .

### 3. Equation cartésienne d'un plan de l'espace

#### Activité 1

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit le point  $A(x_0, y_0, z_0)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$  deux vecteurs non colinéaires.

Soit  $M(x, y, z)$  un point quelconque de l'espace.

1. Calculer  $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$ .

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $x, y, z$  pour que le point  $M$  appartienne au plan  $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ .

#### Théorème

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Pour tout plan  $\mathcal{P}$ , il existe quatre réels  $a, b, c$  et  $d$  vérifiant  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et tels que

$M(x, y, z)$  appartient à  $\mathcal{P}$ , si et seulement si,  $ax + by + cz + d = 0$ .

L'équation  $ax + by + cz + d = 0$  est appelée équation cartésienne de  $\mathcal{P}$ .

#### Activité 2

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de l'espace.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par  $O$  et de vecteurs directeurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

2. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par  $O$  et de vecteurs directeurs  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$ .

3. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par  $O$  et de vecteurs directeurs  $\vec{k}$  et  $\vec{j}$ .

#### Activité 3

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels.

On se propose de déterminer l'ensemble  $\mathcal{P}$  des points  $M(x, y, z)$  vérifiant l'équation  $ax + by + cz + d = 0$ .

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{P}$  lorsque que  $a = b = c = 0$ .

On suppose dans la suite que  $a \neq 0$ .

2. Montrer que  $\mathcal{P}$  n'est pas vide.

3. Soit  $A(x_0, y_0, z_0)$  un point de  $\mathcal{P}$  et soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace.

a. Vérifier que,  $M$  appartient à  $\mathcal{P}$ , si et seulement si,  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ .

b. On pose  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

Vérifier que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires et calculer  $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$ .

4. Quel est alors l'ensemble  $\mathcal{P}$  ?

## Théorème

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de l'espace et  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels tels que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  vérifiant  $ax + by + cz + d = 0$  est un plan.

### Activité 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $2x + y - z = 0$ .

1. Déterminer trois points non alignés de  $\mathcal{P}$ .

2. En déduire deux vecteurs directeurs de  $\mathcal{P}$ .

## 4. Positions relatives de droites et plans

### Activité 1

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH

est un parallélépipède et J est le milieu de [FH].

On se propose de montrer que la droite (DJ)

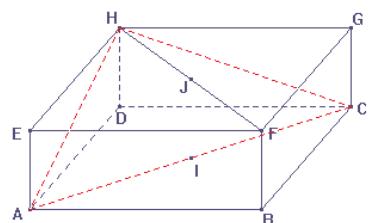
coupe le plan (ACH) au point O milieu de  $[\overrightarrow{DJ}]$ .

On munit l'espace du repère cartésien  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DJ).

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACH).

3. Montrer alors que la droite (DJ) coupe le plan (ACH) au point O milieu de  $[\overrightarrow{DJ}]$ .



### Activité 2

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de l'espace.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point  $A(2, -1, 2)$  et parallèle au plan  $\mathcal{P}(O, \vec{k}, \vec{j})$ .

2. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par O et parallèle au plan  $\mathcal{P}(A, \vec{i}, \vec{k})$ .

3. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le milieu I de [OA] et parallèle au plan  $\mathcal{P}(O, \vec{k}, \vec{j})$ .

### Activité 3

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de l'espace.

On considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et les points A (0, 0, -1) et B (1, 2, 0).

1. a. Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{AB}$  sont linéairement dépendants.

b. En déduire que les droites  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}(B, \vec{v})$  sont coplanaires.

2. a. Vérifier que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires.

b. En déduire que les droites  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}(B, \vec{v})$  sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

## Activité 4

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de l'espace.

On considère les droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  contenant  $\mathcal{D}$  et parallèle à  $\mathcal{D}'$ .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{F}$  contenant  $\mathcal{D}'$  et parallèle à  $\mathcal{D}$ .
4. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{R}$  passant par le point A(1, -1, -2) et parallèle à  $\mathcal{D}$  et à  $\mathcal{D}'$ .

## Activité 5

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de l'espace.

On considère les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  d'équations respectives

$$x + 2y - z + 2 = 0 \text{ et } x - y + 3z + 1 = 0.$$

1. Montrer que le point I(-3, 1, 1) appartient à chacun des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .
2. Montrer que le système  $\begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ x-y+3z+1=0 \end{cases}$  est équivalent au système  $\begin{cases} x = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}z \\ y = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z \end{cases}; z \in \mathbb{R}$ .
3. En déduire une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ , intersection de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .

## Théorème

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

L'ensemble des points M(x, y, z) tels que  $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$  est une droite, si et seulement si, les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels.

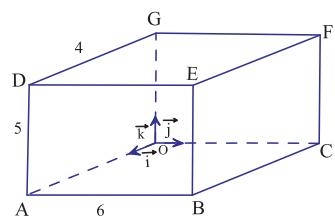
## Activité 6

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de l'espace.

OABCDEFG est un parallélépipède rectangle d'arêtes 4, 5 et 6.

1. Pour chacune des droites (OC); (DE); (BC); (GF); (OF); déterminer deux plans qui la contiennent puis en donner un système d'équations cartésiennes.
2. Identifier chacune des droites

$$\mathcal{D}_1 : x = y = 0 ; \mathcal{D}_2 : y = z = 0 ; \mathcal{D}_3 : x = y = z.$$



## 5. Equations cartésiennes dans un repère orthonormé

### Activité 1

Soit O et A deux points distincts de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ .

### Théorème

Soit A un point de l'espace et  $\vec{n}$  un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est le plan passant par A et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

### Activité 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le point A(1, 1, -1) et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Donner une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal  $\vec{u}$ .

### Activité 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points A(1, 1, -1), B(-1, 1, 1) et C(2, 0, 3).

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

### Activité 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points E(0, 2, 0) et S(8, 8, 6). Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment [ES].

### Activité 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le plan  $\mathcal{P}$  :  $ax + by + cz + d = 0$  et  $A(x_0, y_0, z_0)$  un point de  $\mathcal{P}$ .

1. Soit le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

- a. Montrer que pour tout point M(x, y, z) appartenant à  $\mathcal{P}$ ,  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .
- b. En déduire que le vecteur  $\vec{n}$  est normal à  $\mathcal{P}$ .

### Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Si un plan  $\mathcal{P}$  a pour équation  $ax + by + cz + d = 0$ , alors le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est normal à  $\mathcal{P}$ .

## Activité 6

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le plan  $\mathcal{P}$  :  $2x - y + z + 2 = 0$  et le point  $A(1, 0, -1)$ .

1. Déterminer une équation du plan passant par  $A$  et parallèle à  $\mathcal{P}$ .

2. Déterminer une équation du plan passant par  $O$  et perpendiculaire à  $\mathcal{P}$ .

## 6. Droites et plan perpendiculaires

### Activité 1

1. Soit  $S$  un point de l'espace et  $\vec{u}$  un vecteur non nul.

Identifier l'ensemble  $\mathcal{D}$  des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{SM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ .

2. Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct de l'espace. On donne  $S(1, 9, 0)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace.

a. Exprimer en fonction de  $x, y$  et  $z$  les composantes du vecteur  $\overrightarrow{SM} \wedge \vec{u}$ .

b. Déterminer une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$ .

### Activité 2

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace.

On considère le plan  $\mathcal{P}$  :  $6x - 7y + 7z + 8 = 0$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par  $O$  et perpendiculaire à  $\mathcal{P}$ .

2. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de  $O$  sur  $\mathcal{P}$ .

### Activité 3

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace.

On considère les points  $A(2, 0, 1)$ ,  $B(-1, 1, 1)$  et  $C(0, 2, 1)$ .

1. Déterminer les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .

2. En déduire que  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par  $B$  et perpendiculaire au plan  $(ABC)$ .

### Activité 4

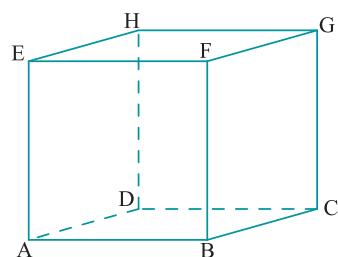
Soit  $ABCDEFGH$  un cube d'arête 1.

On note  $I$  le milieu de l'arête  $[BF]$  et on rapporte l'espace au repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Déterminer  $\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AI}$ .

2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(HAI)$ .

3. La droite  $(AG)$  est elle contenue dans le plan  $(HAI)$  ?



## 7. Distance d'un point à un plan

### Activité 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère un point  $A(x_0, y_0, z_0)$  et un plan  $\mathcal{P}$  :  $ax + by + cz + d = 0$ .

On désigne par  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

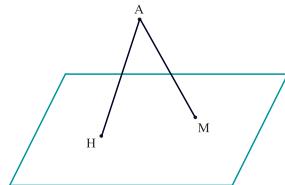
1. Montrer que pour tout point  $M$  de  $\mathcal{P}$ ,  $AM \geq AH$ .

La distance  $AH$  est appelée distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$ .

2. a. En utilisant les composantes de  $\overrightarrow{HA}$  et  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , montrer que  $\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$ .

b. En utilisant la définition du produit scalaire, montrer que  $|\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n}| = HA \|\vec{n}\|$ .

c. En déduire que  $HA = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .



### Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit un plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  et  $A(x_0, y_0, z_0)$  un point de l'espace.

La distance de  $A$  à  $\mathcal{P}$ , notée  $d(A, \mathcal{P})$ , est le réel  $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .

### Activité 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $2x - 2y + z + 3 = 0$ .

Déterminer l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace dont la distance à  $\mathcal{P}$  est égale à 2.

## 8. La sphère

### 8.1 Définition

#### Définition

Soit  $I$  un point de l'espace et  $R$  un réel strictement positif.

La sphère de centre  $I$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $IM = R$ .

### Activité 1

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace. On considère les points  $A(1, -1, 1)$  et  $B(1, 3, 1)$  et on désigne par  $S$  la sphère de centre  $A$  et de rayon  $AB$ .

Montrer que  $S$  est l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$ .

## Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $A(x_0, y_0, z_0)$  un point de l'espace et  $R$  un réel strictement positif.

L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$  est la sphère de centre  $A$  et de rayon  $R$ .

## Activité 2

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace.

1. Déterminer l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 2y = 1.$$

2. Déterminer l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 2y + 4 = 0.$$

3. Déterminer l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 2y + 3 = 0.$$

## Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels. On pose  $h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$  et on note  $A\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ .

L'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$  est

- l'ensemble vide si  $h < 0$ ,
- le point  $A$  si  $h = 0$ ,
- la sphère de centre  $A$  et de rayon  $\sqrt{h}$  si  $h > 0$ .

## Activité 3

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace.

On considère les points  $A(1, -1, 1)$  et  $B(1, 3, 1)$ .

Déterminer l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

## Théorème

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace.

L'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est la sphère de diamètre  $[AB]$ .

## 8.2 Intersection d'une sphère et d'un plan

### Activité 1

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace.

On considère la sphère  $S$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

1. Préciser le centre et le rayon de  $S$ .
2. Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x + y + z + 2 = 0$ .
  - a. Déterminer la distance de  $O$  à  $\mathcal{P}$ .
  - b. Que peut-on conjecturer sur l'intersection de  $S$  et  $\mathcal{P}$  ?
3. Soit  $\mathcal{F}$  le plan d'équation  $x + y + z + 1 = 0$ .
  - a. Déterminer la distance de  $O$  à  $\mathcal{F}$ .
  - b. Que peut-on conjecturer sur l'intersection de  $S$  et  $\mathcal{F}$  ?
4. Soit  $\mathcal{R}$  le plan d'équation  $x + y + z + \sqrt{3} = 0$ .
  - a. Déterminer la distance de  $O$  à  $\mathcal{R}$ .
  - b. Que peut-on conjecturer sur l'intersection de  $S$  et  $\mathcal{R}$  ?

### Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $S$  une sphère de centre  $A$  et de rayon  $R$ . Soit  $\mathcal{P}$  un plan,  $h$  la distance de  $A$  à  $\mathcal{P}$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ .

Alors l'intersection de  $S$  et  $\mathcal{P}$

- est vide si  $h > R$ ,
- est réduite au point  $H$  si  $h = R$ ,
- est le cercle de rayon  $\sqrt{R^2 - h^2}$  et de centre  $H$  si  $h < R$ .

### Activité 2

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace.

On considère la sphère  $S$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 1$ .

Etudier la position relative de  $S$  avec chacun des plans

$\mathcal{P} : x + y = 0$  ;  $\mathcal{F} : x = 1$  ;  $\mathcal{R} : z = 0$ .

# QCM – VRAI – FAUX

## QCM

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Cocher la réponse exacte.

1. Soit la droite  $\mathcal{D}$  :  $\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = -2 + 2\alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$ . Alors

- A(1, 0, 0) ∈  $\mathcal{D}$         $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$        A(-1, 2, 1) ∈  $\mathcal{D}$ .

2. Soit le plan  $\mathcal{P}$  et la droite  $\mathcal{D}$  définis par

$\mathcal{P}$  :  $\begin{cases} x = 1 - 2\alpha - 3\beta \\ y = 2 + 2\beta ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$  et  $\mathcal{D}$  :  $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$ . Alors

- $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  sont strictement parallèles      $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  sont sécants      $\mathcal{D}$  est incluse dans  $\mathcal{P}$ .

3. Le plan  $\mathcal{P}$  :  $x + 2y - 2z + 10 = 0$  est perpendiculaire à la droite

- $\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$         $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$         $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 2\alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 2\alpha \end{cases}$

4. La droite  $\mathcal{D}$  passant par O et de vecteur directeur  $\vec{k}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$

- $\mathcal{P}$  :  $z = 2$         $\mathcal{P}$  :  $y + z = 2$         $\mathcal{P}$  :  $x + y = 2$ .

5. La droite  $\mathcal{D}$  passant par O et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$

- $\mathcal{P}$  :  $x = 0$         $\mathcal{P}$  :  $-x + y + z = 2$         $\mathcal{P}$  :  $y + z = 2$ .

## VRAI – FAUX

L'espace est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Toute équation de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  est celle d'un plan.

2. Tout système d'équations de la forme  $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$  est celui d'une droite.

3. Si  $ax + by + cz + d = 0$  est l'équation d'un plan alors le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est normal à ce plan.

4. L'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$  est une sphère.

5. Soit A et B deux points distincts de  $\mathcal{E}$ .

L'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est la sphère de diamètre [AB].

## Mobiliser ses compétences

### Situation 1 Distance d'un point à une droite

Soit A un point de l'espace et  $\mathcal{D}$  une droite,  $\mathcal{P}$  le plan passant par A et perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ , H le point d'intersection de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$ .

1. Montrer que pour tout point M de  $\mathcal{D}$ ,  $AM \geq AH$ .

La distance AH est alors la plus petite distance du point A à un point quelconque de  $\mathcal{D}$ . AH est appelée la distance du point A à la droite  $\mathcal{D}$ .

2. L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit la droite  $\mathcal{D}$  : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$
 et soit A(-1, 1, 1).

On se propose de calculer la distance du point A à la droite  $\mathcal{D}$ .

a. Montrer que l'équation  $2x + y + z = 0$  est une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$ .

b. Déterminer les coordonnées du point H.

c. En déduire la distance du point A à la droite  $\mathcal{D}$ .

### Situation 2 Perpendiculaire commune à deux droites

I. Soit  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux droites non parallèles de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$  et le vecteur  $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ .

Soit  $\mathcal{P}$  le plan contenant la droite  $\Delta$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,  $\mathcal{P}'$  le plan contenant la droite  $\Delta'$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont sécants suivant une droite  $\mathcal{D}$ .

2. Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  est perpendiculaire à chacune des droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

3. Montrer que  $\mathcal{D}$  est la seule perpendiculaire commune à  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

4. La droite  $\mathcal{D}$  coupe  $\Delta$  en I et  $\Delta'$  en J.

Montrer que pour tout point M de  $\Delta$  et pour tout point N de  $\Delta'$ ,  $MN \geq IJ$ .

La distance IJ est alors appelée la distance entre les droites D et D'.

II. L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les droites  $\Delta$ : 
$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$
 et  $\Delta'$ : 
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$
.

1. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à  $\Delta$  et à  $\Delta'$ .

2. Calculer la distance entre les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(-1, 2, -1)$  et  $C(0, 0, 1)$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique des droites  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(BC)$ .
2. Déterminer une représentation paramétrique des droites  $\mathcal{D}$  ( $A, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ),  $\mathcal{D}'$  ( $A, \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$ ).

## Exercice 2

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(-1, 2, -1)$  et  $C(0, 0, 1)$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique du plan  $(ABC)$ .
2. Déterminer une représentation paramétrique des plans  $\mathcal{P}(C, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ,  $\mathcal{P}'(O, \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC})$ .

## Exercice 3

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère le point  $A(0, -1, -2)$  et la droite

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$$

1. Montrer que le point  $A$  et la droite  $\Delta$  définissent un plan  $\mathcal{P}$ .
2. Donner une représentation paramétrique de  $\mathcal{P}$ .

## Exercice 4

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(-2, 1, 3)$  et  $C(0, -1, 0)$ .

1. Montrer que ces trois points sont non alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

## Exercice 5

Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x - y + z - 3 = 0$ .

1. Vérifier que les points  $A(0, 0, 3)$ ,  $B(3, 0, 0)$  et  $C(0, -3, 0)$  appartiennent au plan  $\mathcal{P}$ .
2. Donner une représentation paramétrique de  $\mathcal{P}$ .

## Exercice 6

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit le plan  $\mathcal{P}$  et la droite  $\mathcal{D}$  définis par

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 2 - \alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases}$$

1. Déterminer un point commun à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$ .
2. La droite  $\mathcal{D}$  est-elle incluse dans  $\mathcal{P}$  ?

## Exercice 7

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  définies par

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = \alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -1 - \alpha \end{cases} \quad \Delta' : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que les deux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont strictement parallèles.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  contenant ces deux droites.

## Exercice 8

L'espace est muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  définies par

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = -2 + 2\alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases} \quad \Delta' : \begin{cases} x = 2t \\ y = t ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Montrer que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont coplanaires et déterminer une équation cartésienne du plan qui les contient.

## Exercice 9

L'espace est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Déterminer l'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .

- $a. \mathcal{P} : 2x + 3y - 4 = 0$  et  $\mathcal{P}' : 3x - 2z + 2 = 0$ .
- $b. \mathcal{P} : x - y + 2z = 1$  et  $\mathcal{P}' : 3x - 2y + 5z = 6$ .

## Exercice 10

L'espace est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit les points  $A(2, 0, -1)$ ,  $B(1, -1, 0)$  et  $C(0, 1, 4)$ .

1. a. Montrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.
- b. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
2. Soit  $D$  le point de coordonnées  $(3, -1, -2)$ .
  - D appartient-il au plan  $(ABC)$  ?
  - Donner une équation cartésienne du plan  $P$  passant par  $D$  et parallèle au plan  $(ABC)$ .

## Exercice 11

Soit ABCDEFGH un cube. On munit l'espace du repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

On considère les points M, N et P tels que

$$\overline{CM} = \frac{1}{4} \overline{CD}, \quad \overline{DN} = \frac{1}{4} \overline{DH} \quad \text{et} \quad \overline{BP} = \frac{1}{4} \overline{BF}.$$

1. Exprimer  $\overline{MN}$  à l'aide de  $\overline{CD}$  et  $\overline{DH}$ .
  2. Donner une représentation paramétrique du plan (MNP).
  3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (AE).
  - b. Montrer que (MNP) et (AE) sont sécants.
- On désigne par Q leur point d'intersection.
- c. Déterminer les coordonnées de Q.

## Exercice 12

Soit ABCD un tétraèdre régulier. On munit l'espace du repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ .

On considère les points I, J et K tels que

$$\overline{AI} = \frac{1}{2} \overline{AB}, \quad \overline{BJ} = \frac{2}{3} \overline{BC} \quad \text{et} \quad \overline{CK} = \frac{3}{4} \overline{CD}.$$

1. Donner une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Montrer que la droite (AD) coupe le plan (IJK) en un point qu'on note L.
3. Déterminer les coordonnées de L.

## Exercice 13

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les plans  $\mathcal{P} : x - y + z - 2 = 0$

et  $\mathcal{P}' : 2x + y - z + 2 = 0$ .

1. Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont perpendiculaires.
2. Soit le point A(1, 1, 1).

a. Déterminer la distance du point A à chacun des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .

b. En déduire la distance du point A à la droite d'intersection de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .

## Exercice 14

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  définies par

$$\Delta : \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 1 - 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Delta' : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$$

1. Trouver une représentation paramétrique de la perpendiculaire commune aux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .
2. Calculer la distance entre les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

## Exercice 15

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les quatre points A(1, 0, 1), B(-1, -1, 2), C(2, 3, -2) et D(1, 2, 3).

1. Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
- b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
3. a. Calculer l'aire du triangle ABC.
- b. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

## Exercice 16

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x - 2y + z + 7 = 0$  et A le point de coordonnées (2, 1, -1).

1. Donner une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  passant par A et perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$ .
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$ .
3. En déduire la distance de A au plan  $\mathcal{P}$ . Contrôler le résultat par un calcul direct.

## Exercice 17

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points A(0, 2, 1), B(3, 0, 2) et

C(1, 2, 0).

1. Placer les points A, B et C.
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Donner une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  passant par C et de vecteur normal  $\overrightarrow{AB}$ .

## Exercice 18

Soit ABCDEFGH un cube de côté 1. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC] et on munit l'espace du repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Sans justifications, donner une équation cartésienne de chacun des plans (ABC), (ABE) et (ADE).
2. a. Donner une équation cartésienne du plan (CFH).
- b. En déduire que  $\overrightarrow{AG}$  est un vecteur normal au plan (CFH).
3. a. Donner une équation cartésienne du plan (IJG).
- b. Le point E appartient-il au plan (IJG) ?

## Exercice 19

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par le point  $A(3, -1, 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et soit  $B$  le point de coordonnées  $(3, 1, -2)$ .

1. Donner une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  contenant  $B$  et perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ .
2. a. Calculer les coordonnées du point d'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$ .
- b. En déduire la distance de  $B$  à la droite  $\mathcal{D}$ .

## Exercice 20

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On donne les points  $A(2, 0, 1)$ ,  $B(-1, 1, 2)$ ,  $C(3, 2, 2)$  et l'on désigne par  $\mathcal{P}$  le plan perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $B$ .

1. Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .
2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite  $D$  passant par  $C$  et parallèle à  $(AB)$ .
- b. Calculer les coordonnées du point  $H$  intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$ .
- c. Quelle est la nature du quadrilatère  $ABHC$  ?

## Exercice 21

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On donne les plans  $\mathcal{P} : -x + y + z + 1 = 0$  et  $\mathcal{P}' : x + 2y - z + 2 = 0$ .

1. Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont perpendiculaires.
2. Soit  $A$  le point de coordonnées  $(1, 0, 1)$ .
  - a. Calculer la distance  $d$  de  $A$  au plan  $\mathcal{P}$ .
  - b. Calculer la distance  $d'$  de  $A$  au plan  $\mathcal{P}'$ .
  - c. En déduire la distance de  $A$  à la droite d'intersection de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .

## Exercice 22

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Déterminer l'ensemble des points  $M(x, y, z)$ .

1.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 0$ .
2.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 15 = 0$ .
3.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$ .

## Exercice 23

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $A(0, 1, 0)$ ,  $B(0, 0, 1)$  et  $C(1, 1, 1)$  et  $S$  la sphère de centre  $A$  et de rayon 2.

1. Déterminer l'intersection de  $S$  avec le plan  $(ABC)$ .
2. Déterminer l'intersection de  $S$  avec le plan passant par  $A$  et perpendiculaire à  $(AB)$ .
3. Déterminer l'intersection de  $S$  avec le plan passant par  $C$  et perpendiculaire à  $(AB)$ .

## Exercice 24

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Déterminer l'intersection de la sphère  $S$  et du plan  $\mathcal{P}$  dans chacun des cas ci-dessous.

1.  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0$   
et  $\mathcal{P} : x + y + z - 4 = 0$ .
2.  $S$  est la sphère de centre  $O$  et de rayon 2 et  $\mathcal{P}$  est le plan passant par  $O$  et de vecteur normal  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
3.  $S : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$

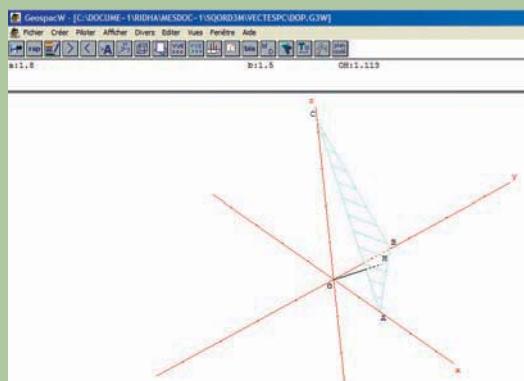
$$\text{et } \mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = 1 - \beta \quad ; \quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 3\beta \end{cases}$$

## Avec l'ordinateur

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le point A de coordonnées  $(a, 0, 0)$  avec  $a \geq 0$ , et les points mobiles B(0, b, 0) et C(0, 0, c) tels que  $b \leq a$ ;  $c \geq a$  et  $bc = 2a^2$ .

On se propose à l'aide du logiciel GeospacW, d'étudier les variations de distance du point O au plan (ABC) lorsque le réel b varie dans l'intervalle  $[0, a]$  pour une valeur de a fixée.

1. Dans un nouveau fichier GeospacW, créer une variable réelle positive nommée a, puis une autre nommée b dans l'intervalle  $[0, a]$ .
2. Créer les points A(a, 0, 0) et B(0, b, 0) puis le point C  $\left(0, 0, \frac{2a^2}{b}\right)$ .
3. Créer le triangle ABC en tant que polygone.
4. Créer la droite perpendiculaire au plan ABC en O, puis le point d'intersection H de D et du plan ABC.
5. Dans le menu " créer ", afficher les variables déjà définies a et b.
6. Dans le menu " créer ", afficher la longueur du segment [OH].

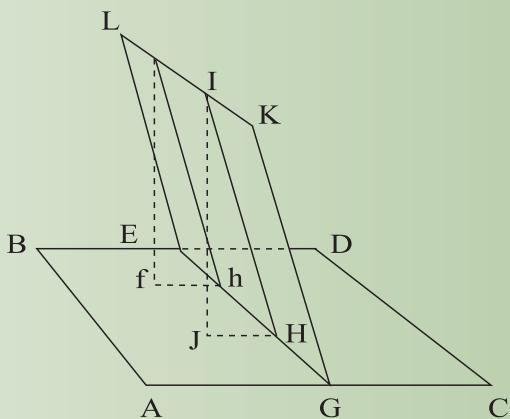


7. En utilisant le menu " Piloter ", on pourra piloter au clavier séparément les réels a et b. pour un réel a donné, faire varier le réel b et conjecturer sur la valeur de b pour laquelle la distance OH est maximale.
8. Exprimer en fonction de a et b, la distance  $d_a(b)$  du point O au plan ABC.
9. Etudier les variations de la fonction qui à b associe  $d_a(b)$ . Démontrer votre conjecture.



## René Descartes (1596-1650)

L'apport principal de Descartes consiste dans l'application des méthodes de l'algèbre aux problèmes traditionnels de la géométrie tels qu'ils ont été pratiqués sans changement majeur depuis l'antiquité grecque (Apollonius et Archimète notamment). C'est parce qu'il veut épargner une inutile fatigue à l'imagination que Descartes invente le moyen d'exprimer les relations géométriques (entre les droites et les courbes) en équations algébriques, fondant par là ce que l'on appellera la géométrie analytique.



Le début de la Géométrie montre bien en quoi consiste cette nouvelle méthode de réduction des problèmes géométriques à ceux, plus simples et plus faciles, de l'algèbre ; après avoir comparé les opérations de l'arithmétique à celles de la géométrie " touchant les lignes qu'on cherche ", Descartes ajoute ceci : " *Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre, le plus naturellement de tous, en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres...* " .