LES MATHÉMATIQUES EN 3ème ANNÉE SECONDAIRE

Xy 3 Plus

Section : Mathématiques - Tome II

Résumé de cours - Exercices et problèmes corrigés

Lassâad KALLEL
Professeur Principal émérite

Zied BELHADJ
Professeur Principal émérite

XY Plus

LES MATHEMATIQUES

En $3^{ème}$ ANNEE SECONDAIRE

Section : Mathématiques

Tome II

Résumé de cours
Exercices et problèmes corrigés

Lassâad Kallel
Professeur principal
émérite

Zied Belhadj
Professeur principal
émérite

Med Ali EDITIONS

Collection : XY

Titre : Les mathématiques en 3ème Année secondaire

Section : Mathématiques - Tome II

Auteurs : Zied Belhadj - Lassaad Kallel

1ère Edition 2017

CAEU Med Ali ©

Rue Med Chaabouni Sfax 3027

Tél: +216/74407440 / Fax: +216/ 74407441

Email : edition.medali@tunet.tn

Site : www.edition-medali.tn

N° Editeur : 885-615/17

ISBN : 978-9973-33-515-9

AVANT-PROPOS

Dans le cadre de la nouvelle collection XY nous mettons à la disposition de nos élèves de troisième année secondaire, section Mathématiques, le premier tome de XY3 plus.

Ce manuel, dont le contenu est conforme aux programmes du Ministère de l'Education comporte :

- **un rappel de cours**
- **des exercices et des problèmes corrigés.**

Les exercices et les problèmes couvrent toutes les notions du cours et sont présentés selon une progression qui permet aux élèves l'**assimilation**, l'**entraînement** et la **maîtrise** de la matière, tout en développant chez eux des capacités de raisonnement et de synthèse.

Nous avons aussi œuvré pour que ce manuel soit utile à des élèves de niveaux différents, permettant l'amélioration des capacités des uns et des performances de ceux qui sont en quête de l'excellence.

Ce travail est dédié à la mémoire de notre défunte collègue **Lobna Mallouli Ajili** en reconnaissance à l'accompagnement qu'elle a prodigué à des générations d'apprenants, ainsi qu'à son implication, dans notre groupe, pour l'élaboration de parascolaires.

Bon travail et bonne chance à nos élèves.

Les auteurs

Chapitre 1
Produit scalaire dans le plan

1/ Définition

⇨ Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On désigne par A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel ainsi défini :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

⇨ ***Conséquence***

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

2/ Propriétés du produit scalaire

⇨ Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tous réels α et β :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

⇨ $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

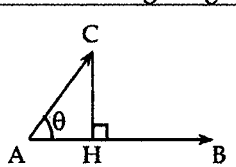
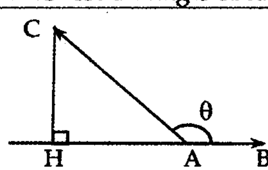
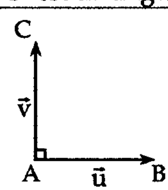
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

3/ Autre expression du produit scalaire

A, B et C étant trois points du plan tels que $A \neq B$.

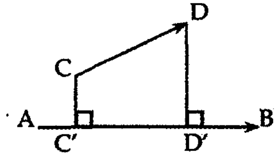
H le projeté orthogonal de C sur (AB). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \cdot AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraire.

$\widehat{BAC}$ est un angle aigu	$\widehat{BAC}$ est un angle obtus	$\widehat{BAC}$ est un angle droit
		
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AH$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \cdot AH$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

- Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non nuls alors on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB).



4/ Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

⇨ ***Base orthonormée :*** Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée du plan si et seulement si : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \perp \vec{j}$.

⇨ ***Théorème :*** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

Dans une base orthonormée, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$.

⇨ ***Conséquences :***

Dans une base orthonormée, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors on a :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy'=0$

5/ Notions utiles : (rappel)

Distance d'un point à une droite

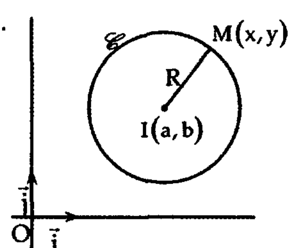
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, D la droite d'équation $ax+by+c=0$ $(a \neq 0$ ou $b \neq 0)$.

La distance du point $A(x_A, y_A)$ à la droite D est : $d(A,D) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Equation d'un cercle

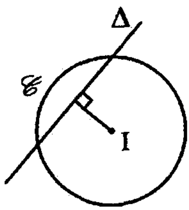
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

⇨ Soit I(a, b) un point du plan et R un réel strictement positif.
Une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon R est :
$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$.

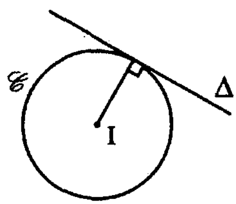


⇨ Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et de rayon R et Δ une droite. On a :
- $d(I,\Delta) < R$ si et seulement si Δ et $\mathscr{C}$ sont sécants.

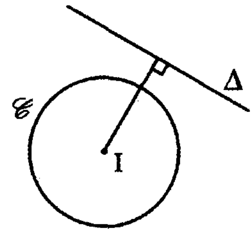
- $d(I,\Delta) = R$ si et seulement si Δ est tangente à $\mathscr{C}$.
- $d(I,\Delta) > R$ si et seulement si Δ et $\mathscr{C}$ sont extérieurs.



$d(I,\Delta) < R$



$d(I,\Delta) = R$



$d(I,\Delta) > R$

EXERCICES

1 ABCD est un parallélogramme tel que $AB=5$, $AD=3$ et $\widehat{BAD}=\frac{\pi}{3}$

a) Faire une figure.
b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
c) Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.
d) Calculer BD et AC.
e) O est le centre de ce parallélogramme. De $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ déduire le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$ puis une valeur approchée en degré de l'angle $A\hat{O}D$.

2 Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle ABCD tel que $AB=\sqrt{2}$ et $AD=1$. Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2-MB^2=1$.

1) a) Vérifier que les points C et I appartiennent à (Γ).
   b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ).
   c) En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

2) Retrouver le résultat c) en calculant $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CI}$.

3 Dans le plan P on considère un triangle ABC tel que :

$$AB=4\ ,\ AC=6 \text{ et } BC=8.$$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$.
   b) Déterminer et construire l'ensemble (Π) des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=-12$
2) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que $MA^2+MC^2-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=42$.
3) Vérifier que Δ est tangente à (Π)

4 Soit un triangle ABC rectangle en A du plan P. On donne $AB=2a$, $AC=a$ $(a\in\mathbb{R}_+^*)$

Soit G le barycentre des points pondérés $(A,-3)$; $(B,1)$ et $(C,4)$.

1) a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire AG puis BG et CG.
2) a) Montrer que pour tout point M du plan P, on a :

$$-3MA^2+MB^2+4MC^2=2MG^2-3GA^2+GB^2+4GC^2$$

   b) Soit k un réel et $(\Gamma_k)=\{M\in P/-3MA^2+MB^2+4MC^2=2ka^2\}$

5 Déterminer, suivant les valeurs de k, la nature de l'ensemble (Γ).
Soit A et B deus points du plan. Soient I le milieu de $[AB]$ et G le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,-2)$.

(Γ) est l'ensemble des points M tels que : $(3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=0$

(Γ') est l'ensemble des points M tels que : $3MA^2-2MB^2=0$

Δ_k est l'ensemble des points du plan tels que $(3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=k$ (k est un réel).

1) Caractériser l'ensemble (Γ).
2) Montrer que pour tout point M du plan $3MA^2-2MB^2=MG^2-6AB^2$
   Caractériser alors l'ensemble (Γ').
3) On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et on considère les points $A(1,2)$ et $B(-1,1)$.
   a) Ecrire une équation cartésienne de Δ_k.
   b) Déterminer selon k l'intersection des ensembles (Γ') et Δ_k.

6 Soit ABC un triangle tel que $AB=9$, $AC=4$ et $B\widehat{A}C=\dfrac{\pi}{3}$

Soit I le milieu de $[AC]$ et H le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,1)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}$.
2) Calculer AH et HI.
3) Soit $\Delta=\{M\in P \text{ tels que } MA^2-MC^2=-4\}$
   a) Vérifier que H appartient à Δ.
   b) Montrer qu'un point M appartient à Δ si, et seulement si, $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
   Déterminer Δ.

7 Soit ABC un triangle. A', B' et C' sont respectivement les pieds des hauteurs issues de A, B et C.

1) Démontrer que :
   (M appartient à la hauteur (AA')) $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC})$
2) H est l'intersection de (BB') et (CC').
   a) Comparer $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$
   b) En déduire que H est sur (AA'). Conclure.
3) En utilisant 2) a) montrer que $HA\cdot HA'=HB\cdot HB'=HC\cdot HC'$

8 un triangle ABC. On désigne par $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit de centre O et de rayon r et G son centre de gravité .On pose $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}$
   b) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.
2) Montrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ et en déduire que les points O, H et G sont alignés.

9 Soit ABCD un carré de centre O et de coté 1, on construit à l'intérieur du carré un triangle équilatéral ABE.

1-a- Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$.

b- Montrer alors que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $OE^2 = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2-a- Montrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = MO^2 - \dfrac{1}{2}$.

b- Déterminer alors l'ensemble $\xi_1 = \left\{ M \in P /\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \dfrac{1}{2} \right\}$.

3- Soit $\xi_2 = \left\{ M \in P /\ 4\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + 2MO^2 = 1 \right\}$.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,2).

a- Montrer que pour tout point M du plan on

$4\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + 2MO^2 = 6\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MG} + 1$.

b- En déduire l'ensemble ξ_2.

4- Soit $\xi_3 = \left\{ M \in P /\ MA^2 - MO^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

On désigne par F le milieu du segment [AO].

a- Vérifier que le point E appartient à l'ensemble ξ_3.

b- Montrer que pour tout point M de ξ_3 on a : $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{OA}$.

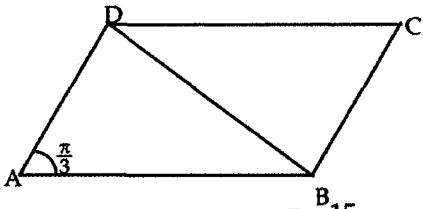
c- En déduire l'ensemble ξ_3.

CORRIGES

1

a) Figure

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$



b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB\times AD\times\cos(B\widehat{A}D) = 5\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{15}{2}$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$

$= AB^2-AD^2=25-9=16$

d) $DB^2=\overrightarrow{DB}^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=AB^2+AD^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=25+9-2\times\frac{15}{2}$

$=34-15=19$ donc $DB=\sqrt{7}$

$AC^2=\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2$ (ABCD est un parallélogramme)

$=AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=25+9+2\times\frac{15}{2}=34+15=49$ d'où $AC=7$

e) On a : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=16$

O est le centre du parallélogramme donc O est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=16 \Rightarrow (2\overrightarrow{AO})\cdot(2\overrightarrow{DO})=16 \Rightarrow 4\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DO}=16$

$\Rightarrow \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DO}=4 \Rightarrow (-\overrightarrow{OA})\cdot(-\overrightarrow{OD})=4 \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=4$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=4\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=OA\times OD\times\cos(A\widehat{O}D)\end{array}\right\}\Rightarrow OA\times OD\times\cos(A\widehat{O}D)=4$$

$$\cos A\widehat{O}D=\frac{4}{OA\times OD}=\frac{4}{\frac{\sqrt{19}\times7}{4}}=\frac{16}{\sqrt{19}\times7}$$

La calculatrice donne $\cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{19}\times7}\right)=58,37356485$. D'où $A\widehat{O}D\simeq 58,37°$.

2

a) (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2-MB^2=1$.

- $CD^2 - CB^2 = AB^2 - AD^2 = 2 - 1 = 1$ d'où $C \in (\Gamma)$.
- $ID^2 - IB^2 = (IA^2 + AD^2) - IB^2 = AD^2 = 1$ d'où $I \in (\Gamma)$.

b) $\Gamma = \{M \in P \text{ tels que } MD^2 - MB^2 = 1\}$

On a : $(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}) = \|\overrightarrow{MD}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 = MD^2 - MB^2$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MD^2 - MB^2 = 1$ *(soit K le milieu de $[DB]$)*

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}) = 1$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\cdot(2\overrightarrow{MK}) = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB). Donc $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{KH}$

Puisque $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{KH} > 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires et de même sens et par suite $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{KH} = DB \times KH$.

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow DB \times KH = \frac{1}{2} \Leftrightarrow KH = \frac{1}{2DB}$

Le triangle ADB est rectangle en A d'où $DB^2 = AD^2 + AB^2 = 2 + 1 = 3$

D'où $DB = \sqrt{3}$.

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow KH = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

L'ensemble (Γ) est la droite passant par H et perpendiculaire à (DB).

c) Puisque I et C sont deux points distincts qui appartiennent à (Γ) qui est une droite donc $(\Gamma) = (IC)$. (Γ) est perpendiculaire à (DB). On conclut alors que (IC) et (BD) sont perpendiculaires.

d) $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{IC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \times (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{IB} + \underbrace{\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{IB}}_{0} + \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{BA} \times (-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}BA^2 + AD^2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 + 1 = 0$$

d'où $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{IC}$ et par suite les droites (IC) et (BD) sont perpendiculaires.

3 1) a) $\overrightarrow{IB} \times \overrightarrow{IC} = (\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}).(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}) = (\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}).(\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{JB})$

$$= IJ^2 - JB^2 = IJ^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{AB^2}{4} - \frac{BC^2}{4} = -12$$

b) $\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}).(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}) = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}).(\overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{JB}) = MJ^2 - JB^2$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = -12$ et J le milieu de $[BC]$ $\Leftrightarrow MJ^2 - JB^2 = -12 \Leftrightarrow MJ^2 = 4$

L'ensemble (Π) est le cercle de centre J est de rayon 2.

2) $$MA^2+MC^2=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right\|^2$$
$$=\left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right\|^2=2(MI^2+IA^2)=2MI^2+\frac{AC^2}{2}$$

$$M\in\Delta \Leftrightarrow MA^2+MC^2-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=42 \Leftrightarrow 2MI^2+\frac{AC^2}{2}-2(MJ^2-JB^2)=42$$
$$\Leftrightarrow 2(MI^2-2MJ^2)+\frac{AC^2}{2}+2JB^2=42$$
$$\Leftrightarrow MI^2-MJ^2=-4 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ})=-4$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{JI}=-4 \text{ telle que } K=I*J \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KM}=-2$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KH}=-2$$ où H est le projeté orthogonal de M sur (IJ).

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KH}$ sont colinéaires et de sens contraires car

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KH}<0$ d'où $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KH}=-IJ\times KH$. $(IJ=\frac{1}{2}AB)$

On a donc $-IJ\times KH=-2 \Leftrightarrow KH=\frac{2}{IJ}=\frac{2}{2}=1$ or $KI=1$ et $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KI}$ sont colinéaires et de sens contraires d'où H et I sont confondus.

Δ est la droite perpendiculaire à (IJ) en I.

3) (Π) est le cercle de centre J et de rayon 2, or I appartient à (Π) car $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}=-12$ et Δ est la perpendiculaire à (IJ) en I donc la droite Δ est tangente au cercle (Π) et I est le point de contact.

4

1) a)

Rappel : G est le barycentre des points pondérés (A,α); (B,β) et (C,γ) alors :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\beta+\gamma},\quad \overrightarrow{BG}=\frac{\alpha\overrightarrow{BA}+\gamma\overrightarrow{BC}}{\alpha+\beta+\gamma},\quad \overrightarrow{CG}=\frac{\beta\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CA}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

G est le barycentre des points pondérés $(A,-3)$; $(B,1)$ et $(C,4)$ d'où

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1\cdot\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{-3+1+4}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

b) • $$AG^2=\left\|\overrightarrow{AG}\right\|^2=\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right\|^2=\frac{1}{4}AB^2+4AC^2+2(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\times(2\overrightarrow{AC})$$
$$=\frac{AB^2}{4}+4AC^2+2\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{0}=\frac{4a^2}{4}+4a^2=5a^2$$ donc $AG=a\sqrt{5}$.

- $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$BG^2 = \overrightarrow{BG}^2 = (-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}AB^2 + 4AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5a^2$ donc $BG = a\sqrt{5}$

- $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$CG^2 = \overrightarrow{CG}^2 = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}AB^2 + AC^2 - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2a^2$ donc $CG = a\sqrt{2}$.

2) $-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = -3\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 4\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2$

$$= -3\left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right\|^2 + 4\left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right\|^2$$

$$= -3(MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}) + (MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB})$$

$$+ 4(MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC})$$

$$= 2MG^2 - 3GA^2 + GB^2 + 4GC^2 + \underbrace{2\overrightarrow{MG}\cdot(\underbrace{-3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}})}_{0}$$

On obtient alors : Pour tout point M du plan :

$$-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = 2MG^2 - 3GA^2 + GB^2 + 4GC^2$$

3) $(\Gamma_k) = \{M \in P / -3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = 2ka^2\}$

$M \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow -3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = 2ka^2$

$\Leftrightarrow 2MG^2 - 3GA^2 + GB^2 + 4GC^2 = 2ka^2$

$\Leftrightarrow 2MG^2 = 3GA^2 - GB^2 - 4GC^2 + 2ka^2$

$\Leftrightarrow 2MG^2 = 15a^2 - 5a^2 - 8a^2 + 2ka^2.$

$\Leftrightarrow 2MG^2 = 2a^2 + 2ka^2 \Leftrightarrow MG^2 = a^2(1+k)$

k	$-\infty$		-1		$+\infty$
k+1		−	0	+	

1ère cas : Si $k \in]-\infty, -1[$ alors $k+1 < 0$ donc $(\Gamma) = \varnothing$

2ème cas : Si $k \in]-1, +\infty[$ alors $k+1 > 0$ donc (Γ) est le cercle de centre G et de rayon $a\sqrt{1+k}$.

3ème cas : Si $k = -1$ alors $k+1 = 0$ donc $(\Gamma) = \{G\}$.

5

1) G est le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,-2)$ d'où $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot(2\overrightarrow{MI}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MI} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MI}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\perp\overrightarrow{MI}$

L'ensemble (Γ) est le cercle de diamètre $[GI]$.

2) $3MA^2-2MB^2=3\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right\|^2-2\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right\|^2$

$$=3(MG^2+GA^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA})-2(MG^2+GB^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB})$$

$$=MG^2+3GA^2-2GB^2+2\overrightarrow{MG}\cdot(3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB})$$

G est le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,-2)$ donc $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}$ d'où $AG=2AB$ et $\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BA}$ d'où $BG=3BA$

Ainsi : $3MA^2-2MB^2=MG^2+3GA^2-2GB^2=MG^2+3(4AB^2)-2(9AB^2)$

$$=MG^2-6AB^2.$$

Conclusion : Pour tout point M du plan : $3MA^2-2MB^2=MG^2-6AB^2$.

$M\in(\Gamma')\Leftrightarrow 3MA^2-2MB^2=0\Leftrightarrow MG^2-6AB^2=0\Leftrightarrow MG^2=6AB^2$

$\Leftrightarrow MG=AB\sqrt{6}$

L'ensemble (Γ') est le cercle de centre G et de rayon $AB\sqrt{6}$.

3) $A(1,2)$ et $B(-1,1)$.

a) Equation cartésienne de Δ_k.

$M(x,y)\in\Delta_k \Leftrightarrow \underbrace{(3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})}=k\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{BA}=k$

D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Δ.

Coordonnées de G : on a $\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G-x_A=-2(-2)=4\\y_G-y_A=-2(-1)=2\end{cases}$

D'où $\begin{cases}x_G=4+1=5\\y_G=2+2\end{cases}$ donc $G(5,4)$

$M(x,y)$, $G(5,4)\Rightarrow\overrightarrow{MG}\begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$M(x,y)\in\Delta_k\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{BA}=k\Leftrightarrow(5-x)(2)+(4-y)(1)=k$

$\Leftrightarrow -2x-y+14-k=0$

D'où $\Delta_k : 2x+y-14+k=0$

b) Déterminer selon k l'intersection des ensembles (Γ') et Δ_k.

Pour étudier la position de Δ_k et (Γ') le cercle de centre G et de rayon $AB\sqrt{6}$, on compare $d(G,\Delta_k)$ au rayon de (Γ').

On a : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ donc $AB=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ d'où $R=\sqrt{6}\sqrt{5}=\sqrt{30}$

$$d(G,\Delta_k)=\frac{|2x_G+y_G-14+k|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

$$(d(G,\Delta_k))^2-R^2=\frac{|k|^2}{5}-30=\frac{k^2-150}{5}$$

k	$-\infty$		$-5\sqrt{6}$		$5\sqrt{6}$		$+\infty$
$\frac{k^2-150}{5}$		+	0	−	0	+	

Si $k\in\left]-5\sqrt{6},5\sqrt{6}\right[$ alors $d(G,\Delta_k)<R$ et par suite Δ_k et (Γ') se coupent en 2 points.

Si $k\in\left]-\infty,-5\sqrt{6}\right[\cup\left]5\sqrt{6},+\infty\right[$

Alors $d(G,\Delta_k)>R$ et par suite Δ_k et (Γ') sont disjoints. $\Delta_k\cap(\Gamma')=\varnothing$.

Si $k\in\left\{-5\sqrt{6}\ ,\ 5\sqrt{6}\right\}$ alors le cercle Δ_k est tangente à (Γ') .

6

1) • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=9\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=36\times\frac{1}{2}=18$

• On a I le milieu de $[AC]$ d'où $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

H est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1) d'où $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Par conséquent : $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\times18=3.$

2) • $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $AH=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}\times9=3$. D'où $AH=3$.

• Dans le triangle AHI, on a $\widehat{HAI}=\frac{\pi}{3}$.

En appliquant la formule d'El-Kashi, on obtient :

$HI^2=AH^2+AI^2-2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}=9+4-2(3)=7$ donc $HI=\sqrt{7}$

3) b) $M\in\Delta \Leftrightarrow MA^2-MC^2=-4$

Dans le triangle AHC on a I milieu de $[AC]$.

$HA^2+HC^2=2HI^2+\frac{AC^2}{2}$ d'où $HC^2=2HI^2+\frac{AC^2}{2}-HA^2=13$. D'où $HC=\sqrt{13}$

$HA^2-HC^2=9-13=-4$ d'où H appartient à Δ.

b) $MA^2-MC^2=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IM}$

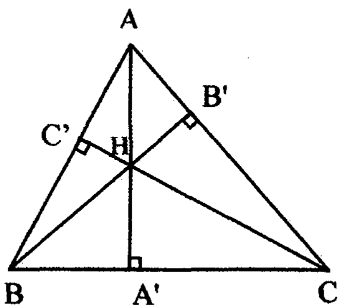
$M\in\Delta \Leftrightarrow MA^2-MC^2=-4$

$\Leftrightarrow MA^2-MC^2=HA^2-HC^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IM}=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IH}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IH})=0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HM}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

Ainsi Δ est la droite perpendiculaire à (AC) et passant par H.

7



1)

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow$ *M appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC* $\Leftrightarrow M\in(AA')$

2) a) H est l'intersection de (BB') et de (CC') donc $\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{CB}$

H appartient à la hauteur (BB') $\Leftrightarrow \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$ (1)

H appartient à la hauteur $[CC']$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HB}$ (2)

D'après (1) et (2), on conclut que : $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$

b) La double égalité précédente donne $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$ ce qui est équivalent à H appartient à la hauteur $[AA']$.

Conclusion : Les hauteurs dans un triangle sont concourantes.

3) • $(BC) \perp (AA')$ donc $(BC) \perp (AH)$ d'où A' est le projeté orthogonal de B sur (AH).
De même B' est le projeté orthogonal de C sur (HB) et C' le projeté orthogonal de A sur (HC).

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA} \\ \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'} \\ \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HB'} \\ \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HC'} \end{array}\right\} \text{ d'où } \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HB'}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HC'}$$

donc $\left|\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}\right|=\left|\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HB'}\right|=\left|\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HC'}\right|$

or les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HA'}$ sont colinéaires , de même pour

$\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HB'}$ et $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HC'}$, donc $HA\cdot HA'=HB\cdot HB'=HC\cdot HC'$.

Conclusion : $HA\cdot HA'=HB\cdot HB'=HC\cdot HC'$

8 1) a) • On a $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

1ère méthode :

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}\cdot=(2\overrightarrow{OA'})\cdot\overrightarrow{BC}$ où $A'=B*C$

or O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC donc (OA') est la médiatrice de $[BC]$ et par suite $(OA')\perp(BC)$.

Conclusion : $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

2ème méthode :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\\&=-OB^2+OC^2\\&=0 \text{ car } OC=OB=r \text{ (rayon du cercle circonscrit à ABC)}\end{aligned}$$

• On a $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$

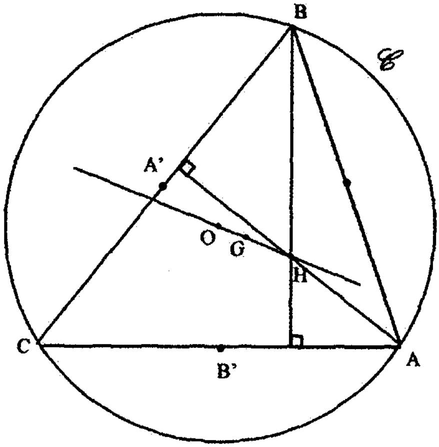
$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AC}\cdot=(2\overrightarrow{OB'})\cdot\overrightarrow{AC}$ où $B'=A*C$

O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC donc (OB') est la médiatrice de $[AC]$ et par suite $(OB')\perp(AC)$.

Conclusion : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

b) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ donc (AH) porte la hauteur issue du point A dans le triangle ABC.

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc (BH) porte la hauteur issue du point B dans le triangle ABC.
Donc H est l'intersection de deux hauteurs dans le triangle ABC et par suite H est l'orthocentre du triangle ABC.



2) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ donc $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}$

d'où $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}$ car G est le centre de gravité du triangle ABC.

Conclusion : $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires donc les point O, G et H sont alignés.
La droite passant par O, G et H est appelée droite d'Euler.

9

A .A A .A .co AD.A AD.A .co

1) a- B E = B E s $\frac{\pi}{}$ = $\frac{1}{2}$; E = E s $\frac{\pi}{}$ = $\frac{\sqrt{}}{2}$

A .A A .A AD.A

C E = B E + E = $\frac{1+\sqrt{}}{}$

6

b- C E = C E s$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{}\right)$ = $\sqrt{}$ s $\frac{\pi}{2}$ = $\frac{1+\sqrt{}}{2}$

o c co

d_n s $\frac{\pi}{2}$ = $\frac{\sqrt{}+\sqrt{}}{2}$

O OA A OA A AO.A A .A

E MA M + E MO = OA^2 . MO O = MO = OA C MO = 1 − $\frac{\sqrt{\ }}{2}$

2)a- C = (+) (+ C) = ^{2} − ^{2} = ^{2} − $\frac{1}{\ }$

b- $\in \xi_1 \Leftrightarrow$ ^{2} $\frac{1}{\ }$ = $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ = 1 d n ξ_1 est le cercle de centre O et de rayon 1.

3)a- G est le barycentre de (A,1) et (B,2) donc

M M = MO 2 3MG = MA M MO

4 B C 2 ^{2} 2 (−) C 2 ^{2}

M MG.M C 2 C C + l c rcl C a + r

b) $\in \xi \Leftrightarrow$ C = d n 3 e e e e d m t e [ ]

4)a- E ^{2} − E ^{2} = 1 − 1 + $\sqrt{\ }$ d n E $\in \xi$

b- $\in \xi_3 \Leftrightarrow$ (−)(+) = (E − E)(E + E)

$\Leftrightarrow$ M (F OA. M (F) $\Leftrightarrow$ F OA. = M 0 o c la é ia ric

c- $\in \xi_3 \Leftrightarrow$ (F − F) = $\Leftrightarrow$ F = d n ξ_3 e m d t e [ ]

Chapitre 2

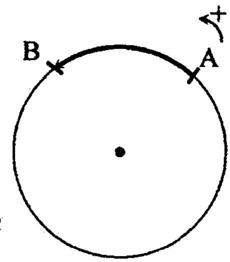
Angles orientés

I/ Arcs orientés

- Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).

⇨ ***Définition 1:***

Soient A et B deux points distincts d'un cercle $\mathscr{C}$, il y a deux arcs de cercle d'origine A et d'extrémité B, un seul orienté dans le sens de l'orientation du cercle. On l'appelle arc orienté d'origine A et d'extrémité B et on le note $\overset{\frown}{AB}$.



- Tout arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ détermine un unique arc géométrique appelé arc géométrique associé à $\overset{\frown}{AB}$.

⇨ ***Définition 2:***

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique, A et B deux points distincts de $\mathscr{C}$ et L la longueur de l'arc géométrique associé à $\overset{\frown}{AB}$.

On appelle mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ et on note mes $\overset{\frown}{AB}$ tout réel de la forme $L + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

Donc $\text{mes}\overset{\frown}{AB} = L + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ ou bien on écrit $\text{mes}\overset{\frown}{AB} \equiv L\ [2\pi]$

et on lit: mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ est congru à L modulo 2π.

- mes $\overset{\frown}{AA} = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- Si α et β deux mesures du même arc alors $\alpha - \beta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- Tout arc orienté possède dans $[0, 2\pi[$ une unique mesure qui est la longueur de l'arc géométrique associé.
- Pour tout point A du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et tout réel α il existe un unique point B de $\mathscr{C}$ tel que $\text{mes}\overset{\frown}{AB} = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

⇨ ***Propriétés***

Pour tous points A, B et C d'un cercle trigonométrique on a

mes $\overset{\frown}{AB}$ + mes $\overset{\frown}{BC} \equiv$ mes $\overset{\frown}{AC}$ (2π) (Relation de Chasles)

mes $\overset{\frown}{AB} \equiv -$mes $\overset{\frown}{BA}$ (2π)

⇨ ***Théorème admis***

- Toute symétrie axiale transforme les mesures des arcs orienté en leur opposées.
- Toute translation conserve les mesures des arcs orientés.

II/ Angles orientés

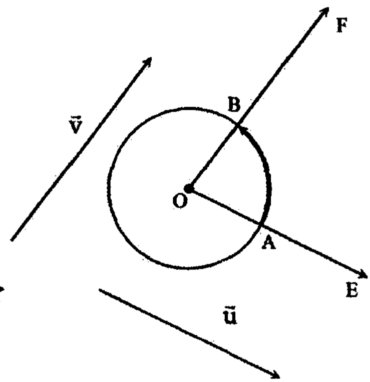
⇨ ***Définition***

Le plan orienté dans le sens direct, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soient les points E et F tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OE}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OF}$; les demi droites [OE) et [OF) coupent $\mathscr{C}$ respectivement en A et B.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ toute mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.

On note $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \text{mes}\,\overset{\frown}{AB}\,[2\pi]$



⇨ ***Propriétés:***

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

① $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

② $(\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

③ Soient a et b deux réels non nuls

→ Si $ab > 0$ alors $(\widehat{a\vec{u}, b\vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \ [2\pi]$

→ Si $ab < 0$ alors $(\widehat{a\vec{u}, b\vec{v}}) \equiv \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \ [2\pi]$

④ $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) \ [2\pi]$ (Relation de Chasles)

⑤ $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv -(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) \ [2\pi]$

⑥ Soit α un réel, il existe un unique vecteur unitaire $\vec{e}$ tel que $(\widehat{\vec{u}, \vec{e}}) \equiv \alpha [2\pi]$

⑦ $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) \ [2\pi]$ si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ colinéaires et de même sens.

⑧ $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ deux vecteurs non nuls:

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u}', \vec{v}'}) \ [2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \equiv (\widehat{\vec{v}, \vec{v}'}) \ [2\pi]$

⇨ ***Vecteurs colinéaires***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls:

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraire.

⇨ ***Vecteurs orthogonaux***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

⇨ ***Mesure principale***

- **Définition :**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ admet une unique mesure dans $]-\pi, \pi]$ appelée mesure principale.

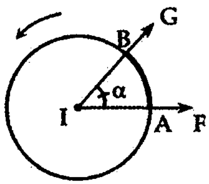
- **Propriétés**

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère trois points non alignés I, F et G tels que $\widehat{FIG} = \alpha$.

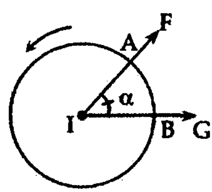
Les demi droites [IF) et [IG) coupent $\mathscr{C}$ respectivement en A et B.

Si L est la mesure de $\overset{\frown}{AB}$ qui appartient à $[0, 2\pi[$

et β est la mesure principale de $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG})$, alors $\beta = \begin{cases} \alpha & \text{si } 0 \le L \le \pi \\ -\alpha & \text{si } \pi < L < 2\pi \end{cases}$



la mesure principale de $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG})$ est égale à α



la mesure principale de $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IG})$ est égale à $-\alpha$

⇨ *Remarque:*

Si α et β deux mesures de $(\vec{u}, \vec{v})$ alors $\alpha - \beta \equiv 0 \quad [2\pi]$

⇨ *Somme des angles orientés dans un triangle*

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \pi \; [2\pi]$

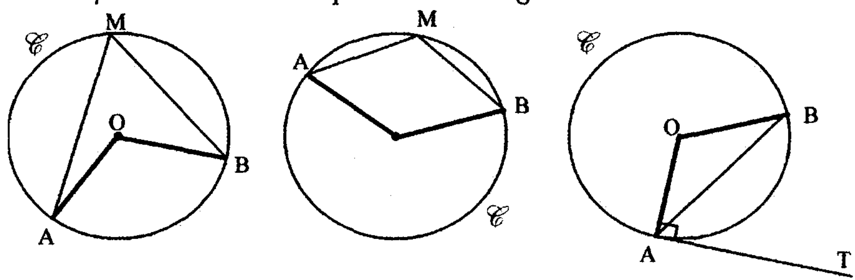
III/ Cercles et angles

⇨ *Angles inscrits et angle au centre*

- **Définition**

On dit qu'un angle est inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O si son sommet appartient à $\mathscr{C}$ et ses cotés recoupent $\mathscr{C}$.

Remarque: L'un de ses cotés pouvant être tangent à $\mathscr{C}$.



→ $\widehat{AMB}$ angle inscrit dans $\mathscr{C}$.

→ $\widehat{AOB}$ angle au centre associé de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$

→ $\widehat{TAB}$ angle inscrit dans $\mathscr{C}$ ([AT) tangente à $\mathscr{C}$ en A).

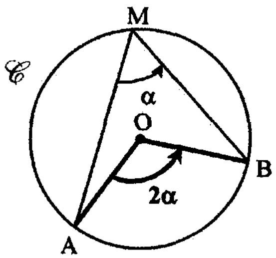
→ $\widehat{AOB}$ angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{TAB}$.

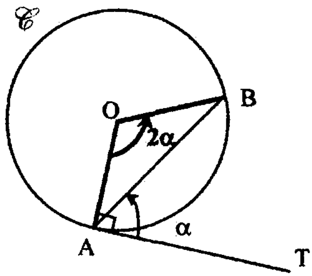
- **Théorème**

Dans le plan orienté on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

→ Pour tous points A, B et M de $\mathscr{C}$ on a: $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \quad [2\pi]$

→ Si la droite (AT) est tangente à $\mathscr{C}$ on a alors: $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}) \quad [2\pi]$

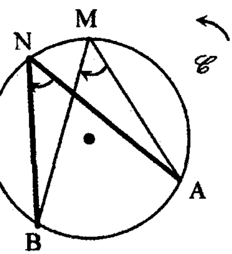




Dans le plan orienté dans le sens direct, soient A, B, M et N quatre points distincts d'un cercle $\mathscr{C}$.

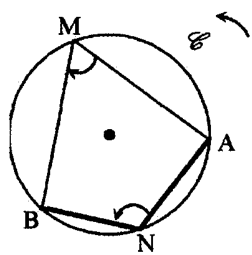
→ Si M et N appartiennent à l'arc $\overset{\frown}{AB}$

alors $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) \quad [2\pi]$



→ Si M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et N appartient à l'arc $\overset{\frown}{BA}$ alors

$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) \quad [2\pi]$



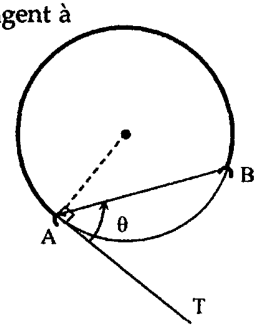
⇨ ***Ensemble de points M tel que*** $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta[2\pi]$; $\theta \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Soient A et B deux points distincts du plan orienté, θ un réel $(\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$;

T un point du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta \quad [2\pi]$

Il existe un unique cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangent à (AT) en A.

L'ensemble des points M tel que: $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta \quad [2\pi]$ est l'arc privé de A et B situé dans le demi plan de frontière (AB) et ne contenant pas [AT).



4/ Base orthonormée

⇨ ***Définition :***

→ On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe du plan si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et

$$(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

→ On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormé indirecte si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et

$$(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

⇨ ***Déterminant de deux vecteurs***

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le réel $\vec{v} \cdot \vec{u'}$ avec $\vec{u'}$ le vecteur vérifiant: $\|\vec{u}\| = \|\vec{u'}\|$ et $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u'}$.
- Soit α un réel; et $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$; $\det(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin\alpha$.

Remarque: Si l'un des deux vecteurs est nul alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :

① $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

② Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormé directe alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$

③ Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormé indirecte alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -1$

EXERCICES

1 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{\ }(2\pi)$

H le pied de la hauteur issue de A ; I et J les projeté orthogonaux de H respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$ et $\quad = \; * \quad .$

1) faire une figure
2) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AK}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)(2\pi)$
3) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{AI}}\right) \equiv \frac{3\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)(2\pi)$
4) En déduire que les droites ( ) ( ) sont perpendiculaires.

2 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$

1) Faire une figure
2) Soit H' le symétrique de H par rapport à l'un des côtés de ABC .

   Montrer que $\widehat{\overrightarrow{\quad},\overrightarrow{\quad}} \equiv \pi + (\widehat{H'A, H'C}) \quad [2\pi]$

3 Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles sécants en A et B

Une droite passant par A recoupe $\mathscr{C}$ en M et $\mathscr{C}'$ en M'

Une droite passant par B recoupe $\mathscr{C}$ en N et $\mathscr{C}'$ en N'

((AB) n'est pas forcément parallèle à (MN) ou à (M'N'))

Montrer que ( ) ( ).

4 Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles sécants en A et B. Une droite contenant A coupe $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement en M et M'.

La tangente en M à $\mathscr{C}$ et la tangente en M' à $\mathscr{C}'$ se coupent en T.

Montrer $\widehat{\overrightarrow{\quad},\overrightarrow{\quad}} \equiv \widehat{\overrightarrow{\quad},\overrightarrow{\quad}} + \pi \; [\;\pi]$

5 Soient A et B deux points du plan orienté tel que $AB = 8$

1) Déterminer et construire les ensembles suivants :

   $\mathscr{C} = \{M \in P / MA^2 - 9MB^2 = 0\}$; $\mathscr{C}' = \left\{M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{3}(2\pi)\right\}$

2) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en I, Montrer que $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = \frac{3}{\ } IB$
3) Calculer $\left\|\overrightarrow{\quad} - \overrightarrow{\quad}\right\|^2$ et en déduire IA et IB.

6 Dans le plan orienté on considère un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$, Δ tangente à $\mathscr{C}$ en A et $T \in \Delta \setminus \{A\}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{\quad},\overrightarrow{\quad}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{\quad},\overrightarrow{\quad}}\right) \; [\;\pi]$

Soit I un point du segment [ ] distinct de A et B .

La droite Δ_1 parallèle à Δ passant par I coupe (AC) en J.

1) Montrer que : $\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CB}\right)(2\pi)$

2) La droite Δ parallèle à Δ passant par B coupe (AC) en D

   Soit $\mathscr{C}'$ le cercle circonscrit au triangle BCD.

   Montrer que $\left(\quad\right) \equiv \pi + \left(\quad\right)(\ \pi)$

7 Soit OAB un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

et $OA > OB$. La bissectrice intérieure du secteur $[BO, BA]$ coupe (OA) en I.

On désigne par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles circonscrits respectivement au triangles BIO et ABI.

La tangente à $\mathscr{C}$ en O et la tangente à $\mathscr{C}'$ en A se coupent en J

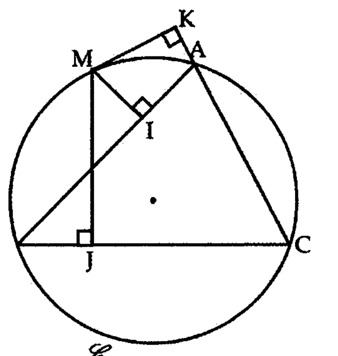
1) faire une figure
2) Montrer que le triangle AJO est isocèle et de sommet principal J
3) Montrer que $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}\right)(2\pi)$

8 ***La droite de Simpson***

Le plan est orienté dans le sens direct.

1) Dans la figure ci-contre,

   $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.
   M est un point de $\mathscr{C}$ et I, J et K sont les projetés orthogonaux de M sur les côtés du triangle ABC.



   a) Montrer que les points I, K, M et A appartiennent à un même cercle.

   b) En déduire que $\quad \equiv \quad [\ \pi]$

   c) Montrer que $2(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IM}) \equiv 2(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BM})\ [2\pi]$

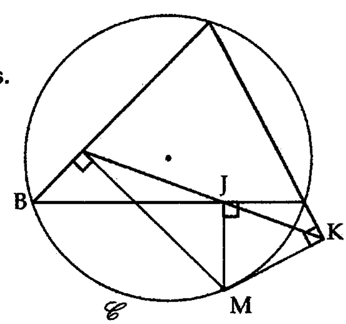
   d) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

2) Dans la figure ci-contre, N est un point dont les projetés orthogonaux I, J et K sur les côtés du triangle ABC sont alignés.

   a) Montrer que $2(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NA}) \equiv 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})\quad [2\pi]$

   b) En déduire que N est un point de $\mathscr{C}$, cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Conclure.



9 Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle OAB rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AO}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle OAB et de centre I.

1- Soit Γ l'ensemble des points M du plan tel que : $\left(\overrightarrow{MO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{MB}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

a- Montrer que : $\left(\overrightarrow{IB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IO}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

b- Soit J le symétrique du point I par rapport à la droite (OB), vérifier que $J \in \Gamma$.

c- Déterminer l'ensemble Γ.

2- Soit ζ' le cercle de centre J et passant par O, la droite (IJ) recoupe ζ' au point C.

a- Montrer que la droite (OC) est tangente au cercle ζ au point O.

b- Le segment [AJ] coupe ζ' au point D et le droite (BD) recoupe ζ au point E. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE}\right)$.

3- Soit Γ' l'ensemble des points M du plan tel que : $-2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MB} = MO\cdot MB$.

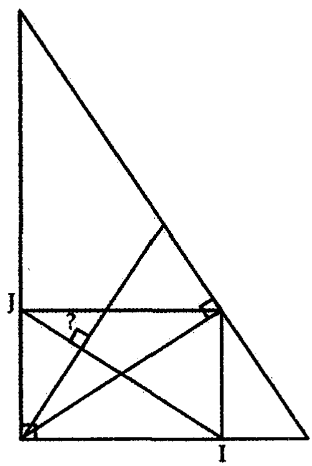
a- Vérifier que les points I et J appartiennent à Γ'.

b- Déterminer l'ensemble Γ'.

CORRIGES

1

1) Figure



2) On a ABC triangle rectangle en A
$K = B * C \Rightarrow$ ACK triangle isocèle de sommet principal K

d'où $(\overrightarrow{AJ}\widehat{,}\overrightarrow{AK}) \equiv (\overrightarrow{CK}\widehat{,}\overrightarrow{CA})\ [2\pi]$

C, K et B sont alignés et $\overrightarrow{\quad}$ $\overrightarrow{\quad}$ sont

de même sens donc $(\overrightarrow{AJ}\widehat{,}\overrightarrow{AK}) \equiv (\overrightarrow{CB}\widehat{,}\overrightarrow{CA})\ [2\pi]$

3) $(\overrightarrow{\ }\widehat{\ }\overrightarrow{\ }) \equiv (\overrightarrow{\ }\widehat{\ }\overrightarrow{\ })[\ \pi]$

$$\equiv \pi + (\overrightarrow{IJ}\widehat{,}\overrightarrow{IA})\ [2\pi]$$

Soit $\Delta = \text{med}[AI]$; AIHJ est un rectangle donc

$$\left.\begin{array}{l} S_\Delta(I) = A \\ S_\Delta(J) = H \\ S_\Delta(A) = I \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{l'image}(\overrightarrow{IJ}\widehat{,}\overrightarrow{IA}) \text{ par } S_\Delta \text{ est } (\overrightarrow{AH}\widehat{,}\overrightarrow{AI}) \\ \Rightarrow (\overrightarrow{IJ}\widehat{,}\overrightarrow{IA}) \equiv -(\overrightarrow{AH}\widehat{,}\overrightarrow{AI})\ [2\pi] \end{array}$$

d'où $(\overrightarrow{\ }\widehat{\ }\overrightarrow{\ }) \equiv \pi - (\overrightarrow{\quad}\widehat{\ }\overrightarrow{\ })$

Dans le triangle AHB, on a:

$$(\overrightarrow{AH}\widehat{,}\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{BH}) + (\overrightarrow{HB}\widehat{,}\overrightarrow{HA}) \equiv \pi\ [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AH}\widehat{,}\overrightarrow{AI}) \equiv \pi - (\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{BH}) - (\overrightarrow{HB}\widehat{,}\overrightarrow{HA})\ [2\pi]$$

$$\equiv \pi - (\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{BH}) - (-\frac{\pi}{2})\ [2\pi] \text{ (car AHB est rectangle en H)}$$

$$\equiv \frac{3\pi}{2} - (\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{BC})\ [2\pi] \qquad (\overrightarrow{BH} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ de meme sens})$$

$$\equiv -\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{BC})\ [2\pi]$$

donc $(\overrightarrow{IJ}\widehat{,}\overrightarrow{AI}) \equiv \pi + \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AH}\widehat{,}\overrightarrow{AI})\ [2\pi]$

$$\equiv \frac{3\pi}{} + (\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{BC})\ [2\pi]$$

4) $\left(\overrightarrow{IJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AK}\right) \equiv \left(\overrightarrow{IJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AI}\right) + \left(\overrightarrow{AI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AJ}\right) + \left(\overrightarrow{AJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AK}\right)\ [2\pi]$ (*relation de Chasles*)

$$\equiv \frac{3\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC}\right) + \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{CB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CA}\right)\ [2\pi]$$

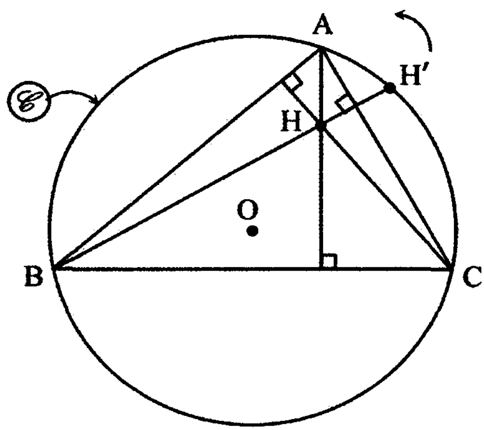
$$\equiv 2\pi + \underbrace{\left(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CA}\right)}\ [2\pi] \qquad \begin{pmatrix}\text{Somme des angles} \\ \text{dans un triangle}\end{pmatrix}$$

$$\equiv \qquad \pi - \left(\overrightarrow{AC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AB}\right)\ [2\pi]$$

d'où $\left(\overrightarrow{IJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AK}\right) \equiv \pi + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $(IJ) \perp (AK)$

2

1)



2) Montrons que: $\overrightarrow{\quad}\,\widehat{}\,\overrightarrow{\quad} \equiv \pi + \ '\ \widehat{}\ '\quad [\ \pi]$

(car B appartient à l'arc AC donc H′ appartient à l'arc CA)

On a: $(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{HA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC})\quad [2\pi]$

or: $\widehat{\quad} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [\ \pi]$ et $(HA\,\widehat{,}\,BC) \equiv -\frac{\pi}{}\ [2\pi]$

(en respectant le sens dans la figure).

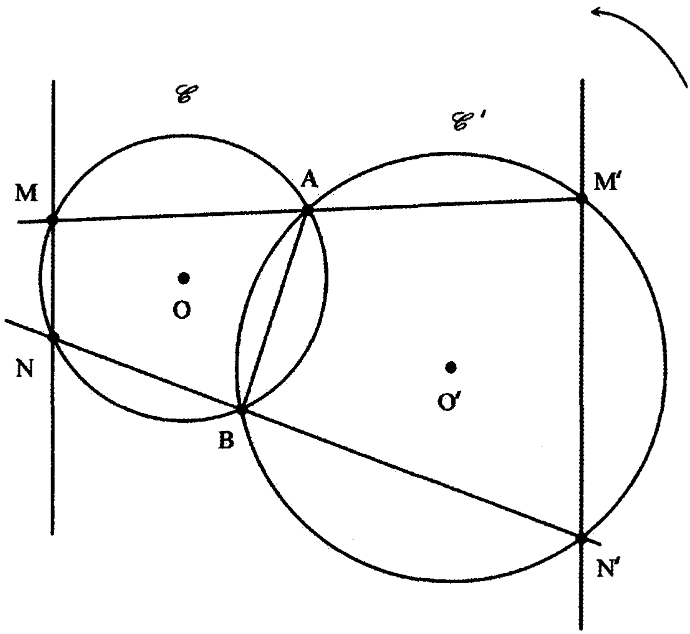
$(\overrightarrow{H'C}, \overrightarrow{H'A})$ l'image de $(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$ par $S_{(AC)}$

d'où $(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) \equiv -(\overrightarrow{H'C}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{H'A})\ [2\pi] \equiv (\overrightarrow{H'A}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{H'C})\ [2\pi]$

donc $(BA\,\widehat{,}\,BC) \equiv -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{H'A}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{H'C}) - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$$\equiv -\pi + (H'A\,\widehat{,}\,H'C)\ [2\pi] \equiv \pi + (H'A\,\widehat{,}\,H'C)\ [2\pi]$$

3



La droite (AB) n'est pas nécessairement parallèle à (MN).

Pour montrer que $(MN)//(M'N')$ on va montrer que: $(MN\,\widehat{,}\,M'N') \equiv 0 \quad [2\pi]$

$(MN\,\widehat{,}\,\overrightarrow{M'N'}) \equiv (MN\,\widehat{,}\,MA) + (MA\,\widehat{,}\,\overrightarrow{M'A}) + (\overrightarrow{M'A}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{M'N'}) \quad [2\pi]$

- On a: $A \in [MM'] \Rightarrow \qquad \equiv \pi \quad [\ \pi]$
- $(\overrightarrow{MN}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{MA}) \equiv \pi + (\overrightarrow{BN}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BA})\ (2\pi)$ car $M \in \overset{\frown}{AN}$ et $B \in \overset{\frown}{NA}$
- $(\overrightarrow{M'A}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{M'N'}) \equiv \pi + (\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BN'})\ (2\pi)$ car $M' \in \overset{\frown}{N'A}$ et $B \in \overset{\frown}{AN'}$

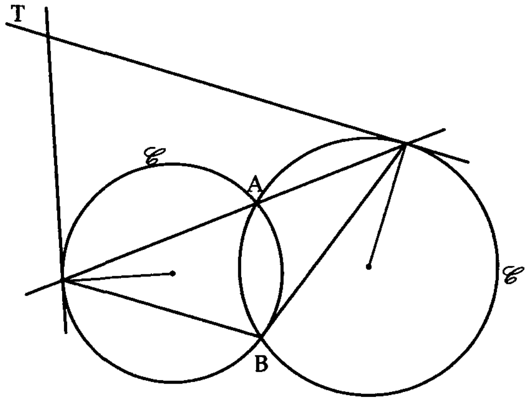
donc $(\overrightarrow{MN}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{M'N'}) \equiv \pi + (\overrightarrow{BN}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BA}) + \pi + \pi + (\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BN'})(2\pi)$

$$\equiv \pi + (BN\,\widehat{,}\,BN')\ (2\pi)$$

or $B \in [NN'] \Rightarrow (\overrightarrow{BN}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BN'}) \equiv \pi \quad [2\pi]$ donc $\qquad \equiv \qquad [\ \pi]$

Conclusion: $(MN)//(M'N')$.

4



La droite (MT) est tangente au cercle $\mathscr{C}$, et B appartient à l'arc $\overset{\curvearrowright}{MA}$ donc

$(MT\,\widehat{,}\,MA) \equiv (BM\,\widehat{,}\,BA)\ [2\pi]$

La droite (M'T) est tangente au cercle $\mathscr{C}'$ et B appartient à l'arc $\overset{\curvearrowright}{AM'}$ donc

$(M'T\,\widehat{,}\,M'A) \equiv (BM'\,\widehat{,}\,BA)\ [2\pi]$

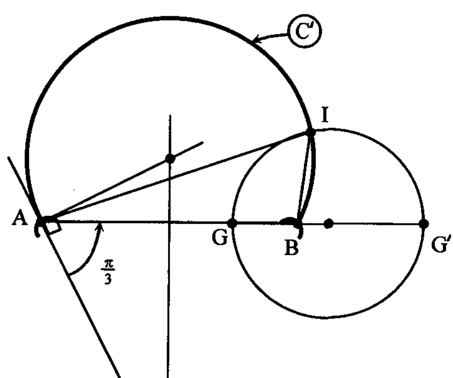
Par addition member à member on obtient:

$(MT\,\widehat{,}\,MA) + (M'A\,\widehat{,}\,M'T) \equiv (BM\,\widehat{,}\,BM')\ [2\pi]$

Puisque sont colinéaires et de sens contraires alors

$(MT\,\widehat{,}\,M'T) \equiv (MB\,\widehat{,}\,M'B) + \pi\ [2\pi]$.

5



1) •

$\mathscr{C} = \{M \in P \ /\ MA^2 - 9MB^2 = 0\}$

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$$

Soient G barycentre des points (A, 1) et (B, 3) $\Rightarrow \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$

G′ barycentre des points (A, 1) et (B, −3) $\Rightarrow \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MG'}$

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow (-2\overrightarrow{MG'}) \cdot (4\overrightarrow{MG}) = 0$

$\Leftrightarrow MG' \cdot MG = 0 \Leftrightarrow (MG) \perp (M'G) \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}$ [GG′] d'où $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{[GG']}$

- $\mathscr{C}' = \left\{ M \in P \ / \ (\overrightarrow{MA} \hat{,} \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{3} \ (2\pi) \right\}$

$\mathscr{C}'$ est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé de A et B du cercle passant par A et B et tangent à (AT) en A tel que $(\overrightarrow{AT} \hat{,} \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$

2) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = IA \cdot IB \cos(\overrightarrow{IA} \hat{,} \overrightarrow{IB})$ or $\in \mathscr{C}$ donc $\overrightarrow{\ } \hat{\ } \overrightarrow{\ } \quad \equiv \frac{\pi}{3} [\ \pi]$

or: $I \in \mathscr{C} \Rightarrow IA^2 - 9IB^2 = 0 \Rightarrow IA = 3IB$

Donc $IA \cdot IB = 3IB \cdot IB \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} IB^2$

3) $\left\| IA - IB \right\|^2 = \left\| BA \right\|^2 = 64$

$\left\| IA - IB \right\|^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA \cdot IB = 9IB^2 + IB^2 - 2 \times \frac{3}{2} IB^2 = 7IB^2$

$^2 =$ donc $IB^2 = \frac{64}{\ }$ d'où $IB = \frac{8\sqrt{7}}{7}$ et $IA = 3IB = \frac{24\sqrt{7}}{7}$

6 1) $\Delta_1 // \Delta$ passant par I

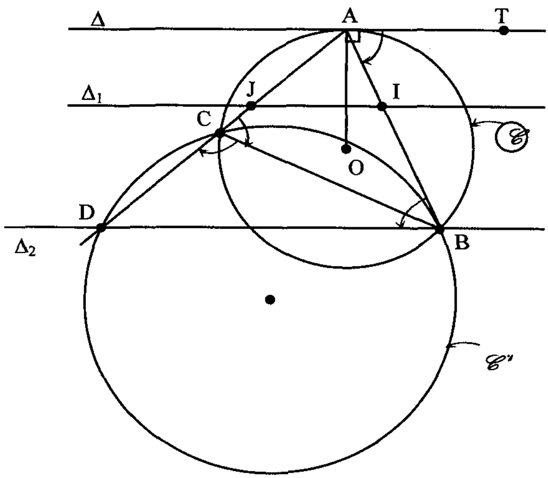
$\hat{\ } \equiv \hat{\ } + \hat{\ } \quad [\ \pi]$ (Relation de Chasles)

- On a $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AT}$ colinéaires de sens contraires $\Rightarrow (IJ \hat{,} AT) \equiv \pi \ [2\pi]$ (1)
- $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires et de même sens $\Rightarrow (AT \hat{,} IB) \equiv (AT \hat{,} AB) \ [2\pi]$

d'autre part $\equiv$ $[\ \pi]$ donc $\equiv$ $[\ \pi]$ (2)

d'après (1) et (2) $(\widehat{IJ, IB}) \equiv \pi + (\widehat{CA, CB})\ \ [2\pi]$ or $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CJ}$ colinéaires et de même sens donc $(\widehat{CA, CB}) \equiv (\widehat{CJ, CB})\ \ [2\pi]$ d'où

$(\widehat{IJ, IB}) \equiv \pi + (\widehat{CJ, CB})\ \ [2\pi]$



2) a) On a: $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}) \equiv (-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})\ \ [2\pi] \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}})\ \ [2\pi]$

or $\Delta_2 // \Delta \ \ \Rightarrow \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AT}$ colinéaires de sens contraires

$\Rightarrow\ (\widehat{AB, BD}) \equiv \pi + (\widehat{AB, AT})\ \ [2\pi]$

d'où $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}) \equiv 2\pi + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}})\ \ [2\pi] \equiv \qquad [\ \pi]$

or : (AT) tangente à $\mathscr{C}$ et C appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB}$ donc

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})\ \ [2\pi]$

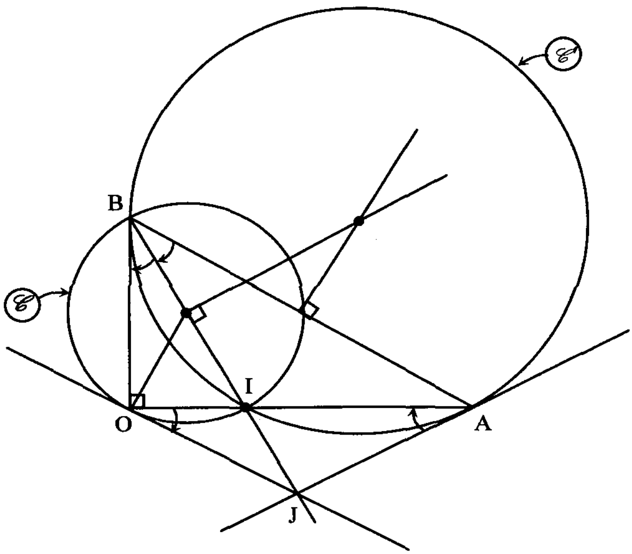
or $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires de sens contraires

$\Rightarrow\ (\widehat{CB, CA}) \equiv (\widehat{CB, CD}) + \pi\ \ [2\pi]$

d'où $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}})\ \ [2\pi]$

7

1) Construction



2) Pour montrer que OAJ est un triangle isocèle de sommet principal J: on

montre que $(\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OJ}) \equiv (\overrightarrow{AJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AO})\ (2\pi)$

Dans le cercle $\mathscr{C}$ on a:

$$\left.\begin{array}{l} B \in \overset{\frown}{IO} \\ (OJ) \text{ tangente en O à } \mathscr{C} \end{array}\right\} \Rightarrow\ (\overrightarrow{OI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OJ}) \equiv (\overrightarrow{BI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BO})\ \ [2\pi]\ (1)$$

Dans le cercle $\mathscr{C}'$ on a:

$$\left.\begin{array}{l} B \in \overset{\frown}{AI} \\ (AJ) \text{ tangente à } \mathscr{C} \text{ en A} \end{array}\right\} \Rightarrow (\overrightarrow{AJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AI}) \equiv (\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BI})(2\pi)\ \ (2)$$

or $[BI)$ bissectrice intérieure du secteur $[BO, BA]$

donc $(\overrightarrow{BI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BO}) \equiv (\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BI})\ (2\pi)$

$\Rightarrow (\overrightarrow{OI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OJ}) \equiv (\overrightarrow{AJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AI})\ (2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OJ}) \equiv (\overrightarrow{AJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AO})\ (2\pi)$

car $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OI}$ colinéaires de même sens de même $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AI}$.

$\Rightarrow$ OAJ triangle isocèle de sommet principal J.

3) On a:

$$\left.\begin{array}{l}(OJ)\ \text{tangente à}\ \mathscr{C}\\ I \in \widehat{OB}\end{array}\right\} \Rightarrow (\overrightarrow{OJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{IO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IB})\,(2\pi)$$

or $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IA}$ colinéaires de sens contraires $\Rightarrow (\overrightarrow{IO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IB})\ (2\pi)$

d'où $(\overrightarrow{OJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IB})\ (2\pi)$ dans $\mathscr{C}'$ on a:

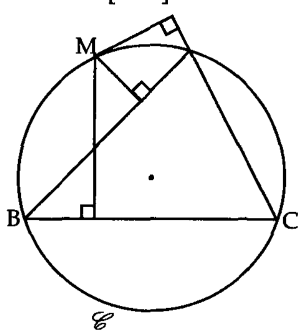
$$\left.\begin{array}{l}(AJ)\ \text{tangente à}\ \mathscr{C}'\ \text{en A}\\ I \in \widehat{BA}\end{array}\right\} \Rightarrow (\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{AJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AB})\ (2\pi)$$

d'où $(\overrightarrow{OJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{AJ}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AB})\ (2\pi)$

8

1) a) K et I sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AC) et (AB).

On a donc $\overrightarrow{KM} \perp \overrightarrow{KA}$ et $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{IA}$, par suite les points K, M, I et A sont situés sur le cercle de diamètre [ ].



b) Les points K, M, I et A étant situés sur le même cercle donc

$(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IK}) \equiv (\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AK})\quad [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IK}) \equiv \pi + (\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AK})\quad [2\pi]$

d'où

$2(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IK}) \equiv 2(\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AK})\quad [4\pi]$ ou $2(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IK}) \equiv 2\pi + 2(\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AK})\quad [4\pi]$

c'est-à-dire

$2(\overrightarrow{IM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK}) = 2(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AK}) + 4k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ ou $2(\overrightarrow{IM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK}) \equiv 2(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AK}) + 2\pi + 4k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$2(\overrightarrow{IM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK}) = 2(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AK}) + \underbrace{(2k)}_{\text{n pair}}2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ ou $2(\overrightarrow{IM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK}) \equiv 2(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AK}) + \underbrace{(1+2k)}_{\text{n impair}}2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$2(\overrightarrow{IM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK}) = 2(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AK}) + n2\pi\,(n \in \mathbb{Z})$

Il en résulte que $2(\overrightarrow{IM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK}) \equiv 2(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AK})\quad [2\pi]$

c) J et I sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (BC) et (AB).

On a donc $\overrightarrow{JM} \perp \overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{IB}$, par suite les points I, J, M et B sont situés sur le cercle de diamètre [ ].

$(\overrightarrow{IJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IM}) \equiv (\overrightarrow{BJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM})\quad [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{IJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IM}) \equiv \pi + (\overrightarrow{BJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM})\quad [2\pi]$

d'où $2(\overrightarrow{IJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IM}) \equiv (\overrightarrow{BJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM})\quad [4\pi]$ ou $2(\overrightarrow{IJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IM}) \equiv 2\pi + 2(\overrightarrow{BJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM})\quad [4\pi]$

En procédant comme dans la question précédente : on obtient :

$2(\overrightarrow{IJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IM}) \equiv 2(\overrightarrow{BJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM})\quad [2\pi]$.

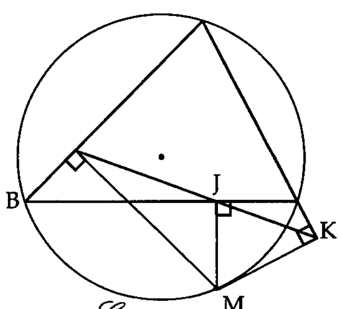
d) $$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{IJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK}) &\equiv 2(\overrightarrow{IJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IM}) + 2(\overrightarrow{IM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK})\quad [2\pi] \\ &\equiv 2(\overrightarrow{BJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM}) + 2(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AK})\quad [2\pi] \\ &\equiv 2(\overrightarrow{BC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM}) + 2(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC})\quad [2\pi]\ (\text{car } J \in (BC) \text{ et } K \in (AC)) \\ &\equiv 2(\overrightarrow{BC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM}) - 2(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AM})\ [2\pi] \end{aligned}$$

or les points A, B, C et M sont situés sur le cercle $\mathscr{C}$ donc $2(\overrightarrow{BC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM}) \equiv 2(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AM})\ [2\pi]$ d'où $2(\overrightarrow{IJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK}) \equiv 0\ [2\pi]$

Par suite $(\overrightarrow{IJ}\,\hat{,}\,\overrightarrow{IK}) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : les points I, J et K sont alignés.

2) a)



$2(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KI}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NI}})\ [2\pi]$ d'où $2(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KI}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NJ}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{NJ},\overrightarrow{NI}})\ [2\pi]$

donc $2(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KI}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NJ}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})\ [2\pi]$ (1)

car $2(\widehat{\overrightarrow{NJ},\overrightarrow{NI}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BI}})\ [2\pi]$ d'où $2(\widehat{\overrightarrow{NJ},\overrightarrow{NI}}) \equiv 2((\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})[2\pi]$

$2(\widehat{\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KJ}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NJ}})\ [2\pi]$ d'où $2(\widehat{\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KJ}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NJ}})\ [2\pi]$ (2)

$2(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KI}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KJ}})\ [2\pi]$ **(3)** (car $\overrightarrow{KA}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont colinéaires)

(1), (2) et (3) donnent

$2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NJ}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NJ}})\ [2\pi]$

Par conséquent : $2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}})\ [2\pi]$

b) $2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}})\ [2\pi]$ donc $2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}}) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

d'où $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}}) + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donc $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}}) + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ ou $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}}) + (2n+1)\pi\ (n \in \mathbb{Z})$

d'où $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}})\ [2\pi]$ ou $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NA}}) + \pi\ [2\pi]$

donc N appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

c) L'ensemble des points M du plan dont les projections orthogonales sur (AB), (AC) et (BC) sont alignés.

9

1)a- $(\widehat{B\ \ O}) \equiv 2(\widehat{B\ \ IO,I})[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ (e nc e te sso)

b- $(\widehat{J\ JB}) \equiv -(\widehat{\ \ B})[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ do J $\in \Gamma$

c- B = et $(J) \perp (B\ )$ do $(J) = m\ \ d[\ B]$ do $(\widehat{B\ J}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

or J = $(B)()$ do B BJ d'où IBJ équilatéral donc IJ =IB d'où J $\in \zeta$

et par suite $\Gamma \cap \zeta$ = { B a é e ζ nc OI O ' ù O

2)a- $\in \zeta$ e e e d m te [C] do ( ) $\perp$ (C) do (;) est tangente au cercle ζ en O.

b- $2(\widehat{C\ \ E}) \equiv 2(\widehat{C\ \ }) + 2(\widehat{\ \ E})[2\pi]$

$$\equiv -\pi+\pi-\left(\widehat{\quad E}\right)[2\pi]$$ e t so e e

$$\equiv\left(\widehat{\quad E}\right)[2\pi]\equiv 2\left(\widehat{B\quad B}\right)[2\pi]$$ (e e t e sso)

$$\equiv\left(\widehat{J\quad J}\right)[2\pi] \equiv\left(\widehat{B\quad B}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

' ù O ,O k k O

d o O ,O $\left(\widehat{C\quad E}\right)=\frac{\pi}{2}+ \pi$' $\in\mathbb{Z}$ or $\widehat{C\quad E}>\frac{\pi}{2}$ donc la mesure

principale de $\left(\widehat{C\quad E}\right)$ e t s $-\frac{\pi}{2}$

3)a- $-2\ .\ B=-2\ .\ B\ \text{os}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\ .\ B$

$-2J\ .\ JB=-2J\ .\ JB\ \text{os}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=J\ .\ JB$ do et J $\in\Gamma$

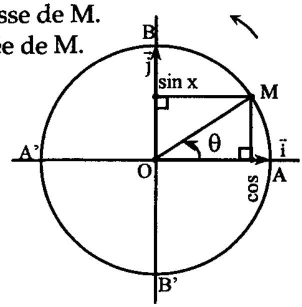
Chapitre 3
Trigonométrie

1. Cosinus et sinus d'un réel

⇨ ***Définition***

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit θ un réel et M le point du cercle trigonométrique de centre O tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \theta \; [2\pi]$.



① On appelle cosinus de θ, et on note $\cos\theta$, l'abscisse de M.

② On appelle sinus de θ et on note $\sin\theta$, l'ordonnée de M.

③ Pour tout réel θ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$$

⇨ ***Propriétés***

- Pour tout réel θ, on a

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$-1 \le \cos\theta \le 1$$
$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

- ***Formules relatives aux angles associés***

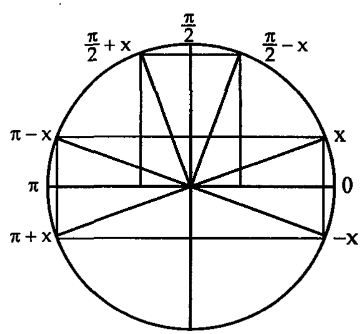
$\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ et $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

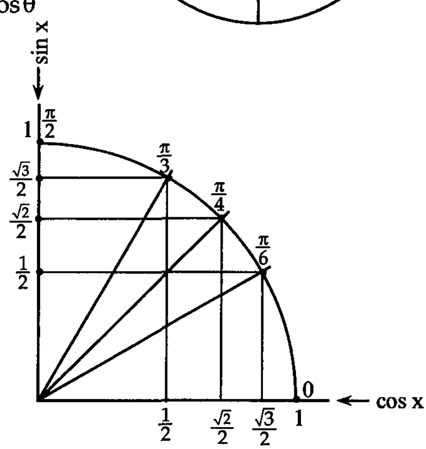
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$



Angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	╳
cot x	╳	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



2. Tangente d'un réel

⇨ *Définition*

On appelle tangente de θ, le réel noté $\tan\theta$ et défini par $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

⇨ *Propriétés*

Pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ on a :

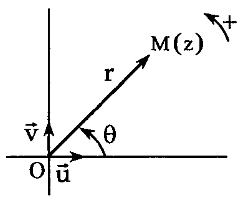
- $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$
- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

3. Coordonnées polaires

⇨ *Théorème*

- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

  Pour tout point M du plan distinct de O, il existe un unique couple (r, θ) tel que $r > 0$, $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$
- Le couple (r, θ) appelé coordonnées polaires de M, est tel que $r = OM$ et θ est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



- Réciproquement, pour tout couple (r, θ) tel que $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$.
- M est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon r et de la demi-droite $[OA)$ telle que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OA}}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

⇨ *Propriété*

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point du plan distinct de O, de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ). Alors

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ \text{ et }\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

4. Cosinus et sinus d'un angle orienté

⇨ ***Définition***

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On désigne par $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ respectivement le cosinus et le sinus d'une mesure quelconque de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.

⇨ ***Propriétés***

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de composantes (x,y) et (x',y') dans une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\text{dét}(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
  Soit ABC un triangle.
  L'aire du triangle ABC est égale $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left|\text{dét}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$.
  Soit ABCD un parallélogramme .
  L'aire du parallélogramme ABCD est égale à $\mathscr{A} = \left|\text{dét}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$

5. Formules de transformation

⇨ ***Formules d'addition***

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\sin(a+b) = \cos a\sin b + \sin a\cos b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\longrightarrow$

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$

⇨ ***Formules de multiplication par 2***

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\nearrow$ • $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \;\leftrightarrow\;$ • $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
  $\searrow$ • $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \;\leftrightarrow\;$ • $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

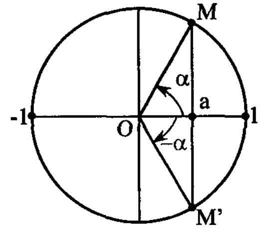
6. Lignes trigonométriques

Equations en cosinus : $\cos x = a$ où $a \in \mathbb{R}$

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$; alors l'équation $\cos x = a$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$
- Si $a \in [-1,1]$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \alpha = a$

  donc $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ avec $(k \in \mathbb{Z})$

  $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$

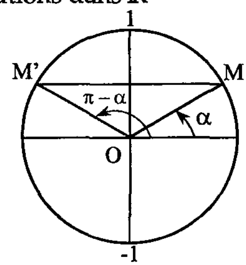


Equation en sinus : $\sin x = a$ où $a \in \mathbb{R}$

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$; alors l'équation $\sin x = a$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$
- Si $a \in [-1,1]$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sin \alpha = a$

  donc $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ avec $(k \in \mathbb{Z})$

  $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$



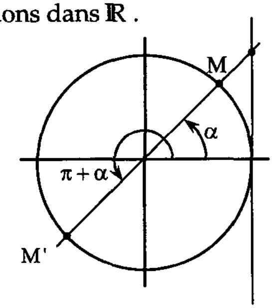
Equations en tangente : $\tan x = c$ où $c \in \mathbb{R}$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan x = c$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$.

Soit α l'une de ces solutions.

$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$



Equations particulières :

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$

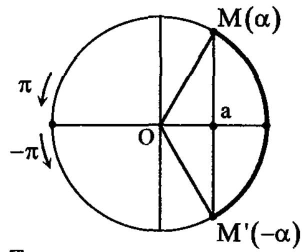
⇨ ***Equations*** $\sin(x+a)=\alpha$ ***et*** $\cos(x+a)=\alpha$

Soit $\alpha \in [-1,1]$.

- x_0 est solution de l'équation $\sin x = \alpha$, si et seulement si, $x_0 - a$ est solution de l'équation $\sin(x+a)=\alpha$.
- x_0 est solution de l'équation $\cos x = \alpha$, si et seulement si, $x_0 - a$ est solution de l'équation $\cos(x+a)=\alpha$.

7. Inéquations trigonométriques

- $\cos x \geq a$ et $a \in [-1,1]$



par exemple dans $[-\pi,\pi]$

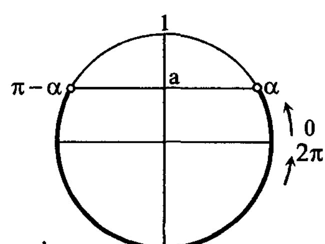
Soit $\alpha \in [0,\pi]$ tel que $\cos\alpha = a$

donc $S_{[-\pi,\pi]} = [-\alpha,\alpha]$

$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ avec $I_k = [-\alpha+2k\pi;\alpha+2k\pi]$ pour $k \in \mathbb{Z}$

l'ensemble des solutions est représenté par l'arc gris.

- $\sin x < a$ et $a \in [-1,1]$



par exemple dans $[0,2\pi]$

soit $\alpha \in [0,2\pi]$ tel que $\sin\alpha = a$

donc $S_{[0,2\pi]} = [0,\alpha[\cup]\pi-\alpha,2\pi]$

L'ensemble des solutions est représenté par l'arc gris.

EXERCICES

1

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).\sin(\pi+x)-\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right).\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cos 2x$

b) $\sin(3\pi-x).\sin\left(\frac{21\pi}{2}+x\right)-\cos(x-\pi).\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)=\sin 2x$

c) $\sin^2 x-2(1+\cos x)=-4\cos^4(\frac{x}{2})$

d) $2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\cos 2x=1+\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

2 $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.

$\vec{u}$ est le vecteur tel que $\|\vec{u}\|=4$ et $(\widehat{\vec{j},\vec{u}})\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$.

3 $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$

Déterminer la mesure principale en radians de tel que $(\vec{i},\vec{u})$.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer et représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(r,\frac{2\pi}{3})$ où $r>0$.
2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(6,\theta)$ où $\theta\in\left]-\pi,\pi\right]$.

5

1) En utilisant la formule $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ $\left(\text{avec } a,2a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$

montrer que $\tan\frac{\pi}{12}$ est une solution de l'équation $(E): t^2+2\sqrt{3}t-1=0$

2) En déduire alors la valeur de $\tan\frac{\pi}{12}$
3) Déterminer le réel $\alpha\in\left]0,\pi\right[$ tel que $\tan\alpha$ soit la seconde solution de (E).

6

1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=\sin 8x$
2) Calculer alors : $\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9}$ puis $\sin\frac{\pi}{18}.\sin\frac{5\pi}{18}.\sin\frac{7\pi}{18}$.

7

1) Montrer que pour tout réel x on a : $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

2) Soient, pour réel x, $f(x)=\cos^2 x+\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

$$g(x)=\sin^2 x+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$$

a) Calculer $f(x)+g(x)$

b) Montrer que $f(x)-g(x)=\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$

c) En déduire que pour tout réel x : $f(x)=g(x)=\frac{3}{2}$.

8 Soit pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\cos 2x+\cos 6x+\cos 10x$

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $2\sin 2x.f(x)=\sin 12x$

b) En déduire la valeur de $f\left(\frac{\pi}{14}\right)$

2) Calculer alors : $\sin^2\frac{\pi}{14}+\sin^2\frac{3\pi}{14}+\sin^2\frac{5\pi}{14}$.

9

1) Montrer que pour tous réels a et b on a : $\cos a\sin b=\frac{1}{2}[(\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

2) Soit $S_1=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$.

x étant un nombre réel quelconque et n un entier naturel non nul quelconque.

Simplifier $2S_1\sin\frac{x}{2}$ et en déduire S_1.

3) Calculer $S_2=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cdots+\cos^2 nx$

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,2\pi]$ les équations suivantes et représenter les images des solutions :

1) $2\cos 2x-\sqrt{3}=0$

2) $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

3) $2\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos 2x=0$

4) $\cos^2 x-\sin^2 x=0$

5) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

6) $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$

7) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$
2) $\cos 2x+\sqrt{3}\cos x-2=0$
3) $2\sin x\cos x=\cos 3x$
4) $4\cos^2 x-2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{3}=0$
5) $\cos 2x=5-6\cos^2 x$

12 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto \dfrac{\sqrt{2}(\cos x+\sin x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Résoudre dans $\mathbb{R}: f(x)=0$
3) a) Montrer que $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
   b) Simplifier alors $f(x)$
   c) Résoudre dans $[0,2\pi]: f(x)\geq\sqrt{2}$

13 Résoudre dans $[0,2\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter les images des solutions :

1) $2\cos x\geq\sqrt{2}$
2) $2\sin 2x-1>0$
3) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\leq 0$
4) $2\cos^2 x+\cos x-1>0$
5) $4\sin^2 x+2\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{3}\leq 0$

14

1) Résoudre dans $[0,\pi]: \cos 4x-3\cos 2x+2=0$
2) Soit $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}: x\to\dfrac{\cos 4x-3\cos 2x+2}{2\cos 2x-1}$
   a) Déterminer le domaine de définition de f
   b) Montrer que pour tout $x\in D_f: f(x)=\cos 2x-1$
   c) Résoudre dans $[0,\pi]: f(x)-\sin 2x=-1$
   d) Résoudre dans $[0,\pi]: f(x)\leq-\frac{1}{2}$

15 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $x\mapsto 1+\cos 2x-\sin 2x$

1) a) Montrer que $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans $[0,\pi]$:

• $f(x)=0$ • $f(x)>0$

2) $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\dfrac{\sin 2x-1}{1+\cos 2x-\sin 2x}$

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Résoudre dans $[0,\pi]: g(x)\geq 0$

3) a) Montrer que pour tout $x\in D_g : g(x)=\frac{1}{2}(\tan x-1)$

b) En déduire que $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

16 Soit la fonction :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{1+2\cos 2x+\cos 4x}{1-2\cos 2x+\cos 4x}$$

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}: 1-2\cos 2x+\cos 4x=2\cos 2x(\cos 2x-1)$

b) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Montrer que pour tout $x\in D_f : f(x)=-\dfrac{1}{\tan^2 x}$

b) En déduire que $\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2}+1$

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}:\cos x+\left(\sqrt{2}+1\right)\sin x=\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\frac{\pi}{8}}$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,\pi]$: $\cos x+\left(\sqrt{2}+1\right)\sin x=1$

17 Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\sin(3x)}$.

1- Déterminer le domaine de définition D de f.

2- Montrer que pour tout $x\in D$: $f(x)=\dfrac{2\cos(2x)}{\sin(3x)}$.

3- Montrer que: $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}-\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$ et en déduire que : $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

4-a- Vérifier que : $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1$.

b- Résoudre dans IR puis dans $]0,2\pi[$: $\cos x+\left(\sqrt{2}-1\right)\sin x=1$.

5- Etablir que : $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)}+\dfrac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}-\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=0$

18 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. A et B les points de coordonnées cartésiennes respectives $\left(-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3}\right)$ et $\left(\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$ et le point C de coordonnées polaires $\left[\sqrt{2},-\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

1-a- Déterminer les coordonnées polaires de B et les coordonnées cartésiennes de C.

b- Construire le point B.

2-a- Montrer que OBAC est un rectangle.

b- Construire le point A.

3-a- Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

b- Déduire les coordonnées polaires de A.

c- Déterminer alors les valeurs de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

4- Soit ζ le cercle trigonométrique de centre O.

a- Représenter l'ensemble des points M de ζ tels que $\left(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv\theta\,[2\pi]$ et $0\leq\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos\theta\leq 1$.

b- Déterminer les réels θ de $[0,2\pi[$ tels que $0\leq\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos\theta\leq 1$

CORRIGES

1

a) $\cos(\frac{3\pi}{2}+x)\sin(\pi+x)-\sin(\frac{5\pi}{2}+x)\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$

$$= \cos(\pi+\frac{\pi}{2}+x)(-\sin x)-\sin(2\pi+\frac{\pi}{2}+x)\sin(\pi+\frac{\pi}{2}+x)$$
$$= -\cos(\frac{\pi}{2}+x)(-\sin x)-\sin(\frac{\pi}{2}+x)\left[-\sin(\frac{\pi}{2}+x)\right] = -\sin^2 x+\cos^2 x$$
$$= \cos 2x$$

b) $\sin(3\pi-x)\sin(\frac{21\pi}{2}+x)-\cos(x-\pi)\cos(\frac{7\pi}{2}+x)$

$$= \sin(\pi+2\pi-x)\cdot\sin(10\pi+\frac{\pi}{2}+x)+\cos x\cos(4\pi-\frac{\pi}{2}+x)$$
$$= \sin(\pi-x)\sin(\frac{\pi}{2}+x)+\cos x\cos(-\frac{\pi}{2}+x)$$
$$= \sin x\cos x+\cos x\sin x = 2\sin x\cos x$$
$$= \sin 2x$$

c) $\sin^2 x-2(1+\cos x) = (2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})^2-2(2\cos^2\frac{x}{2}) = 4\cos^2\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2}-1\right)$

$$= 4\cos^2\frac{x}{2}(-\cos^2\frac{x}{2}) \quad \text{car} \quad \cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$$
$$-4\cos^4\frac{x}{2}$$

d) $2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\cos 2x = \left(1-\cos(2x+\frac{\pi}{2})\right)-\cos 2x = 1+\sin 2x-\cos 2x$

$$= 1+\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x)$$
$$= 1+\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x-\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x)$$
$$= 1+\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$$

2 On pose $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ et on a $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cos(\vec{j},\vec{u}) = \dfrac{\vec{j}\cdot\vec{u}}{\|\vec{j}\|\|\vec{u}\|} = \dfrac{0\cdot x+y\cdot 1}{1\cdot 4} = \dfrac{y}{4}$ et puisque $(\widehat{\vec{j},\vec{u}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ alors $\cos(\vec{j},\vec{u}) = \frac{1}{2}$

donc $\frac{y}{4} = \frac{1}{2}$. Par suite $y = 2$

$\sin(\widehat{\vec{j},\vec{u}}) = \dfrac{\text{dét}(\widehat{\vec{j},\vec{u}})}{\|\vec{j}\|\|\vec{u}\|} = \dfrac{0\cdot y-1\cdot x}{1\cdot 4} = \dfrac{-x}{4}$ et puisque $(\widehat{\vec{j},\vec{u}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ alors

$\sin(\widehat{\vec{j},\vec{u}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\frac{-x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Par suite $x = -2\sqrt{3}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$

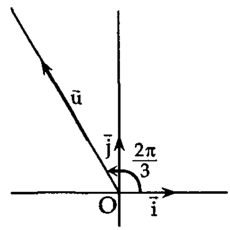
3

$\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ et $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{1+3}=2$

$\cos(\widehat{\vec{i},\vec{u}})=\dfrac{\vec{i}\cdot\vec{u}}{\|\vec{i}\|\|\vec{u}\|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin(\widehat{\vec{i},\vec{u}})=\dfrac{\text{dét}(\vec{i},\vec{u})}{\|\vec{i}\|\|\vec{u}\|}=\dfrac{1\times1-\sqrt{3}\times0}{2}=\dfrac{1}{2}$

D'où $(\widehat{\vec{i},\vec{u}})\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

4



1) $M(r,\frac{2\pi}{3})\Leftrightarrow\begin{cases}OM=r\\(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}$

L'ensemble de points M est la demi droite $[O,\vec{u})\setminus\{O\}$ tel que $(\widehat{\vec{i},\vec{u}})\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

2) $M(6,\theta)$ et $\theta\in\,]-\pi,\pi]\Leftrightarrow\begin{cases}OM=6\\\theta\in\,]-\pi,\pi]\end{cases}\Leftrightarrow M\in\mathscr{C}_{(O,6)}$

5

1) $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$

$$\Leftrightarrow 1-\tan^2\frac{\pi}{12}=2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow\tan^2\frac{\pi}{12}+2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{12}-1=0$$

donc $\tan\dfrac{\pi}{12}$ vérifie l'équation (E) $\left(\text{On pose } t=\tan\dfrac{\pi}{12}\right)$

2) on a : $t^2+2\sqrt{3}t-1=0$

$\Delta'=b'^2-ac=3+1=4$

donc $t'=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-\sqrt{3}-2$ ou $t''=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=2-\sqrt{3}$

or $\tan\dfrac{\pi}{12}$ est une solution de l'équation (E)

$\dfrac{\pi}{12}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\tan\dfrac{\pi}{12}>0\Rightarrow\tan\dfrac{\pi}{12}=t''=2-\sqrt{3}.$

3) on sait que $\tan\dfrac{\pi}{6}=\tan\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

donc $\tan\dfrac{7\pi}{12}$ vérifie aussi l'équation (E) et $\dfrac{7\pi}{12}\in\,]0,\pi[\Rightarrow\alpha=\dfrac{7\pi}{12}$

6

1) $8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x = 4\times 2\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x$
$= 4(\sin 2x)\cos 2x\cos 4x$
$= 2(2\sin 2x\cos 2x)\cos 4x$
$= 2(\sin 4x)\cos 4x = \sin 8x$

2) D'après 1) on obtient $\cos x\cos 2x\cos 4x = \dfrac{\sin 8x}{8\sin x}$ où $x \neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

On prend $x=\frac{\pi}{9}$, $\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9} = \dfrac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}} = \dfrac{\sin(\pi-\frac{\pi}{9})}{8\sin\frac{\pi}{9}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}} = \dfrac{1}{8}$

$\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18} = \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{8\pi}{18})\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{18})\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{18})$
$= \cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} = \frac{1}{8}$

7

1) $\cos x + \cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$
$= \cos x + \cos(x+\dfrac{2\pi}{3}) + \cos(x-\dfrac{2\pi}{3})$ *car* $\dfrac{4\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{3}$
$= \cos x + \cos x\cos\dfrac{2\pi}{3} - \cancel{\sin x\sin\dfrac{2\pi}{3}} + \cos x\cos\dfrac{2\pi}{3} + \cancel{\sin x\sin\dfrac{2\pi}{3}}$
$= \cos x + 2\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos x = \cos x + 2\times(-\dfrac{1}{2})\cos x = \cos x - \cos x = 0$

2) a-

$$f(x)+g(x) = \underbrace{\cos^2+\sin^2 x}+\underbrace{\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}+\underbrace{\cos^2\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)} = 3$$

$$b-\ f(x)-g(x) = \underbrace{\cos^2 x-\sin^2 x}+\underbrace{\cos^2\left(x+\tfrac{2\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\tfrac{2\pi}{3}\right)}+\underbrace{\cos^2\left(x+\tfrac{4\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\tfrac{4\pi}{3}\right)}$$
$$= \cos 2x + \cos\left(2x+\tfrac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(2x+\tfrac{8\pi}{3}\right)$$
$$= \cos 2x + \cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

c- on a : $f(x)-g(x)=0$ d'après 1^e)

donc $\begin{cases} f(x)+g(x)=3 \\ f(x)-g(x)=0 \end{cases} \Rightarrow 2f(x)=3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}=g(x)$

8

1) a) $2\sin 2x\, f(x) = 2\sin 2x.\cos 2x + 2\sin 2x.\cos 6x + 2\sin 2x\cos 10x$
$= \sin 4x + \sin(2x+6x) + \sin(2x-6x) + \sin(2x+10x) + \sin(2x-10x)$
$= \sin 4x + \sin 8x - \sin 4x + \sin 12x - \sin 8x = \sin 12x$

b) On pose $x = \frac{\pi}{14}$: $2\sin\frac{2\pi}{14}.f\left(\frac{\pi}{14}\right) = \sin\frac{12\pi}{14}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{7}f\left(\frac{\pi}{14}\right) = \sin\frac{6\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}$$

2) $$\sin^2\frac{\pi}{14} + \sin^2\frac{3\pi}{14} + \sin^2\frac{5\pi}{14} = \frac{1-\cos\frac{2\pi}{14}}{2} + \frac{1-\cos\frac{6\pi}{14}}{2} + \frac{1-\cos\frac{10\pi}{14}}{2}$$

$$= \frac{3 - \left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right)}{2} = \frac{3 - f\left(\frac{\pi}{14}\right)}{2} = \frac{5}{4}$$

9

1) $$\frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)] = \frac{1}{2}(\sin a\cos b + \cos a\sin b - \sin a\cos b + \cos a\sin b)$$
$$= 2\cos a\sin b$$

2) $$2S_1\sin\frac{x}{2} = 2\cos x\sin\frac{x}{2} + 2\cos 2x\sin\frac{x}{2} + \cdots + 2\cos nx\sin\frac{x}{2}$$

D'après la question 1) on a :

$$2\cos x\sin\frac{x}{2} = 2\left[\frac{1}{2}(\sin(x+\frac{x}{2}) - \sin(x-\frac{x}{2})\right] = \sin(\frac{3x}{2}) - \sin(\frac{x}{2})$$

$$2\cos 2x\sin\frac{x}{2} = 2\left[\frac{1}{2}(\sin(2x+\frac{x}{2}) - \sin(2x-\frac{x}{2})\right] = \sin(\frac{5x}{2}) - \sin(\frac{3x}{2})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$2\cos nx\sin\frac{x}{2} = 2\left[\frac{1}{2}(\sin(nx+\frac{x}{2}) - \sin(nx-\frac{x}{2})\right] = \sin(2n+1)\frac{x}{2} - \sin(2n-1)\frac{x}{2}$$

$$2S_1\sin\frac{x}{2} = \cancel{\sin\frac{3x}{2}} - \sin\frac{x}{2} + \cancel{\sin\frac{5x}{2}} - \cancel{\sin\frac{3x}{2}} + \cdots + \sin(2n+1)\frac{x}{2} - \cancel{\sin(2n-1)\frac{x}{2}}$$

$$2S_1\sin\frac{x}{2} = \sin(2n+1)\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$$

Si $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ alors $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ et $S_1 = \dfrac{\sin(2n+1)\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

Si $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, alors $\cos x = \cos 2x = \ldots = \cos nx = 1$ et $S_1 = n$.

3) $$S_2 = \cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \ldots + \frac{1+\cos 2nx}{2}$$

$S_2 = n\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}S_1'$ où $S_1' = \cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2nx$ qui se déduit de S_1 en remplaçant x par 2x.

Si $x \neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$, $S_2 = \frac{n}{2}+\frac{\sin(2n+1)x-\sin x}{2\sin x}$

Si $x = k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ alors $S_1' = n$ et $S_2 = \frac{n}{2}+\frac{n}{2} = n$

10

1) $2\cos 2x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

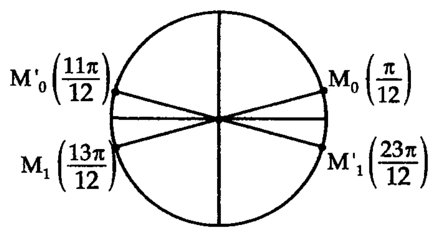
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x = \frac{-\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{12}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{-\pi}{12}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$

- Dans $[0,2\pi[$

$x = \frac{\pi}{12}+k\pi \begin{cases} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{12} \to M_0 \\ \xrightarrow{k=1} x = \frac{13\pi}{12} \to M_1 \end{cases}$

$x = \frac{-\pi}{12}+k\pi \begin{cases} \xrightarrow{k=1} x = \frac{11\pi}{12} \to M'_0 \\ \xrightarrow{k=2} x = \frac{23\pi}{12} \to M'_1 \end{cases}$



$S_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\frac{23\pi}{12}\right\}$

2) $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z})$

$S_{\mathbb{R}} = \{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ $S_{[0,2\pi[} = \left\{0,\frac{\pi}{2}\right\}$

3) $2\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x = 0$

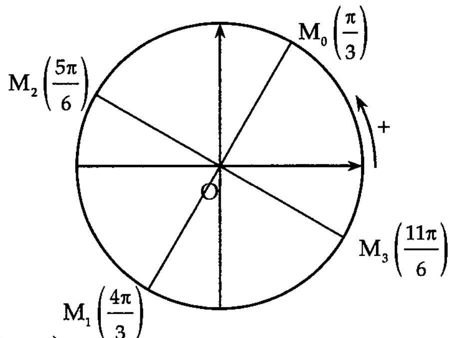
$$\Leftrightarrow \sin 2x + \tan\frac{\pi}{3}\cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x}{\cos\frac{\pi}{3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3} = k\pi \ ;\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Dans $[0,2\pi]$, $0\le -\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\le 2\pi k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le k\le\frac{13}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\in\{1,2,3,4\}$

$$S_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6};\frac{4\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\right\}$$



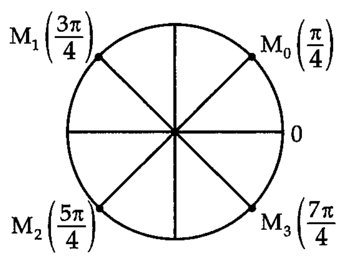
4) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$$

- dans $[0,2\pi[$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\begin{cases} \xrightarrow{k=0} x=\frac{\pi}{4}\to M_0 \\ \xrightarrow{k=1} x=\frac{3\pi}{4}\to M_1 \\ \xrightarrow{k=2} x=\frac{5\pi}{4}\to M_2 \\ \xrightarrow{k=3} x=\frac{7\pi}{4}\to M_3 \end{cases}$$



5) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

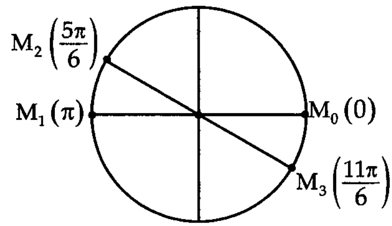
$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x+\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-x+\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(\text{impossible}) \\ 2x=2k\pi(k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad S_{[0,2\pi[} = \{0, \pi\}$

6) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$



$S_{\mathbb{R}} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$S_{[0,2\pi[} = \left\{0, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}\right\}$

7) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

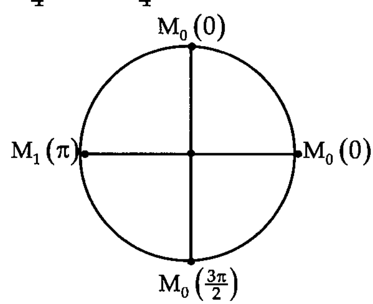
$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow \underbrace{2x - \frac{\pi}{4} = 2x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi}_{\text{impossible}}$ $(k \in \mathbb{Z})$ ou $2x - \frac{\pi}{4} = -2x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 4x = 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$



11

1) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

On pose $t = \sin x$, donc l'équation devient :

$2t^2 + 3t + 1 = 0 \quad (a - b + c = 2 - 3 + 1 = 0)$

donc $t = -1$ ou $t = \frac{-c}{a} = \frac{-1}{2}$

d'où $\sin x = -1$ ou $\sin x = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) $\cos 2x+\sqrt{3}\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+\sqrt{3}\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x-3=0$

On pose $t=\cos x$, donc l'équation devient :

$2t^2+\sqrt{3}t-3=0$

$\Delta=\sqrt{3}^2+4\times 2\times 3=27 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3\sqrt{3}$

donc $t=\dfrac{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $t=\dfrac{-\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{4}=-\sqrt{3}$

d'où $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x=-\sqrt{3}$ impossible car $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos x\in[-1,1]$

$\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

d'où $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{-\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $2\sin x\cos x=\cos 3x \Leftrightarrow \sin 2x=\cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 3x$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-2x=3x+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2}-2x=-3x+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

4) $4\cos^2 x-2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{3}=0$

On pose $t=\cos x$, l'équation devient :

$4t^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}=0$

$\Delta'=b'^2-ac=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{3}=1^2+2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{3}$

$=1^2-2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

$\sqrt{\Delta'}=\left|1-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-1$

donc $t=\dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{4}=\dfrac{1}{2}$ ou $t=\dfrac{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

donc $\cos x=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$ ou $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

5) $\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x \Leftrightarrow \cos 2x = 5 - 6\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \Leftrightarrow \cos 2x = 5 - 3 - 3\cos 2x$

$$\Leftrightarrow 4\cos 2x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

12

1) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}, \cos(x - \frac{\pi}{4}) \neq 0\right\}$

$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos x + \sin x)\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \text{ ou } \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

- $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (inacceptable)
- $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (appartiennent à D_f)

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) a) $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)$

$= \cos x + \sin x$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos(x - \frac{\pi}{4})} = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})$

c) $x \in D_f \text{ et } x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} \text{ et } x \neq \frac{7\pi}{4}$

$$f(x) \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\cos(x+\frac{\pi}{4}) \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(x+\frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

on pose $t = x+\frac{\pi}{4}$, $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{9\pi}{4}$

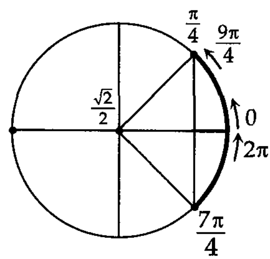
l'inéquation devient $\cos t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{9\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{4} \leq t \leq \frac{9\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{4} \leq x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$$

$$S_{[0,2\pi]} = \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \setminus \left\{\frac{7\pi}{4}\right\}$$

13

1) $2\cos x \geq \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$



donc $S_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

Dans $\mathbb{R}$: pour $k \in \mathbb{Z}$ $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$$x \in \left[\underbrace{2k\pi \,;\, \frac{\pi}{4}+2k\pi}_{I_k}\right] \cup \left[\underbrace{\frac{7\pi}{4}+2k\pi \,;\, 2(k+1)\pi}_{J_k}\right]$$

donc $S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (I_k \cup J_k)$

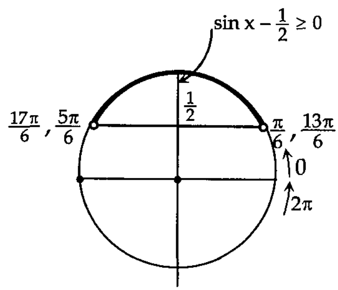
2) $2\sin 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \sin 2x > \frac{1}{2}$

On pose $t = 2x$

$0 \leq x \leq 2\pi$

$0 \leq 2x \leq 4\pi$

$0 \leq t \leq 4\pi$



l'inéquation devient : $\sin t > \frac{1}{2}$

donc $\quad \frac{\pi}{6} < t < \frac{5\pi}{6} \quad$ ou $\quad \frac{13\pi}{6} < t < \frac{17\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{13\pi}{6} < 2x < \frac{17\pi}{6}$

$\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ ou $\frac{13\pi}{12} < x < \frac{17\pi}{12}$

donc $S_{[0,2\pi]} = \left]\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right[$

Dans $\mathbb{R}$: pour $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad x \in \underbrace{\left]\frac{\pi}{12}+2k\pi, \frac{5\pi}{12}+2k\pi\right[}_{I_k} \cup \underbrace{\left]\frac{13\pi}{12}+2k\pi, \frac{17\pi}{12}+2k\pi\right[}_{J_k}$$

$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (I_k \cup J_k)$

3) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3} \le 0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

On pose $t = x-\frac{\pi}{3}$, $\quad 0 \le x \le 2\pi$ donc $\frac{-\pi}{3} \le x-\frac{\pi}{3} \le \frac{5\pi}{3}$

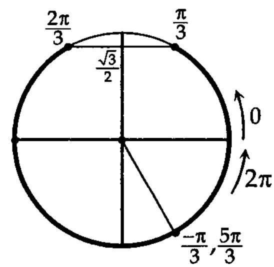
l'inéquation devient : $\sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{-\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{3}$$

$$\frac{-\pi}{3} \le x-\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \le x-\frac{\pi}{3} \le \frac{5\pi}{3}$$

$$0 \le x \le \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \pi \le x \le 2\pi$$

donc $S_{[0,2\pi]} = \left[0,\frac{2\pi}{3}\right] \cup [\pi, 2\pi]$



dans $\mathbb{R}$: pour $k \in \mathbb{Z}$

$$x \in \left[\underbrace{2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi}_{I_k}\right] \cup \left[\underbrace{\pi+2k\pi, 2(k+1)\pi}_{J_k}\right]$$

$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (I_k \cup J_k)$

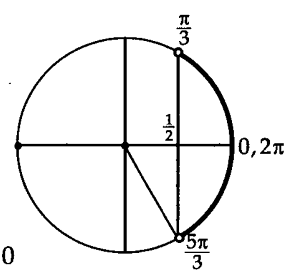
4) $2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$

On pose $t = \cos x$, l'équation devient :

$2t^2 + t - 1 = 0$

$a - b + c = 0$ donc :

$t = -1$ ou $t = \frac{-c}{a} = \frac{1}{2}$



donc $2t^2 + t - 1 = 2(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$\qquad = (t+1)(2t-1)$

donc $2\cos^2 x + \cos x - 1 = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$

On sait que $\cos x \ge -1$ pour tout $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos x + 1 \ge 0$

donc $2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow (\underbrace{\cos x + 1}_{\ge 0})(2\cos x - 1) > 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$$

$S_{[0,2\pi]} = \left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

Dans $\mathbb{R}$: pour $k \in \mathbb{Z}$

$$x \in \Big[\underbrace{2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi}_{I_k}\Big] \cup \Big[\underbrace{\frac{5\pi}{3}+2k\pi, 2(k+1)\pi}_{J_k}\Big] \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (I_k \cup J_k)$$

5) $4\sin^2 x + 2\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x - \sqrt{3} \le 0$

On pose $t = \sin x$, l'inéquation devient :

$$4t^2 + 2\left(1-\sqrt{3}\right)t - \sqrt{3} \le 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 + 4\sqrt{3}$$

$$= 1^2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 4\sqrt{3}$$

$$= 1^2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{3}+1 \text{ donc } t' = \frac{-1}{2} \quad ou \quad t'' = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4\sin^2 x + 2(1-\sqrt{3})\sin x - \sqrt{3} = 4(\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\sin x + \frac{1}{2}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$4\sin^2 x + 2\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x - \sqrt{3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$$

Dans $\mathbb{R}$: pour $k \in \mathbb{Z}$

$$x \in \underbrace{\left[2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right]}_{I_k} \cup \underbrace{\left[\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right]}_{J_k} \cup \underbrace{\left[\frac{11\pi}{6}+2k\pi, 2(k+1)\pi\right]}_{L_k}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (I_k \cup J_k \cup L_k)$$

14

1) Dans $[0,\pi]$: $\cos 4x - 3\cos 2x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 - 3\cos 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 1 = 0$$

On pose $t = \cos 2x$, donc l'équation devient

$2t^2-3t+1=0$

$a+b+c=0$ donc : $t'=1$ ou $t''=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

- $t=1 \Leftrightarrow \cos 2x=1 \Leftrightarrow 2x=2k\pi \Leftrightarrow x=k\pi$

  $k=0 \to x=0$; $k=1 \to x=\pi$

- $\cos 2x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$

  $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ ou $x=\frac{-\pi}{6}+k\pi$

  $k=0 \to x=\frac{\pi}{6}$, $k=1 \to x=\frac{5\pi}{6}$

$S_{[0,\pi]}=\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\pi\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{\cos 4x-3\cos 2x+2}{2\cos 2x-1}$; $x\in[0,\pi]$

a) $D_f=\{x\in[0,\pi];2\cos 2x-1\neq 0\}$

$2\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$ (d'après 1^e)

donc $D_f=[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$

b) On a : $\cos 4x-3\cos 2x+2=2\cos^2 2x-3\cos 2x+1$

$=2(\cos 2x-1)\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\right)$

$=(\cos 2x-1)(2\cos 2x-1)$

donc $f(x)=\dfrac{(\cos 2x-1)\cancel{(2\cos 2x-1)}}{\cancel{2\cos 2x-1}}=\cos 2x-1$

c) $f(x)-\sin 2x=-1$ condition : $x\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$

$\cos 2x-1-\sin 2x=-1 \Leftrightarrow \cos 2x=\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x=\sin 2x$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$

$k=0 \to x=\frac{\pi}{8}$, $k=1 \to x=\frac{5\pi}{8}$ (vérifient la condition)

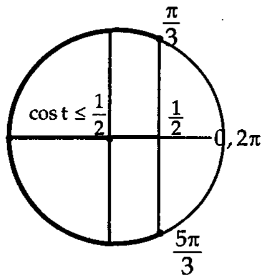
$S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right\}$

d) $f(x) \leq \frac{-1}{2}$ et $x \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

$\Leftrightarrow \cos 2x - 1 \leq \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x \leq \frac{1}{2}$

On pose $t = 2x$, $0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{2x}_{t} \leq 2\pi$

l'équation devient : $\cos t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}$



$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

Or d'après $D_f : x \neq \frac{\pi}{6}$ et $x \neq \frac{5\pi}{6}$ d'où $S_{[0,\pi]} = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$

15

1) *a)* $2\sqrt{2}\cos x \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\cos x \left[\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right]$

$= 2\sqrt{2}\cos x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 2\cos^2 x - 2\sin x \cos x$

$= 1 + \cos 2x - \sin 2x = f(x)$

b) • $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

• $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\rightarrow$ dans $[0,\pi]$, $x = \frac{\pi}{2}$.

• $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z}) \rightarrow$ dans $[0,\pi]$, $x = \frac{\pi}{4}$

$S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$t = x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$				$\frac{5\pi}{4}$
$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos t$		+	0	−		−	
$\cos x$		+		+	0	−	
f(x)		+	0	−	0	+	

$S_{[0,\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

2) a) $D_g = \{x \in [0,\pi] \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$

$D_g = [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ (d'après 1)b))

b) $\sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

Dans $[0,\pi]$, $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Pour tout réel x, $\sin 2x - 1 \leq 0$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin 2x - 1$		$-$	0	$-$		$-$	
f(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	
g(x)		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

$S_{[0,\pi]} = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

3) a) $g(x) = \dfrac{\sin 2x - 1}{1 + \cos 2x - \sin 2x} = \dfrac{2\sin x \cos x - 1}{2\cos^2 x - 2\sin x \cos x}$

On divise le numérateur et le dénominateur par $\cos^2 x$ (puisque $x \neq \frac{\pi}{2}$)

$$g(x) = \dfrac{\dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{2\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x}} = \dfrac{2\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{2 - 2\dfrac{\sin x}{\cos x}}$$

$$g(x) = \frac{2\tan x - 1 - \tan^2 x}{2(1-\tan x)} = \frac{-\tan^2 x + 2\tan x - 1}{2(1-\tan x)} = \frac{-(1-\tan x)^2}{2(1-\tan x)} = -\frac{1}{2}(1-\tan x)$$

b) $$g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{4} - 1}{1 + \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

D'autre part : $g(\frac{\pi}{8}) = -\frac{1}{2}(1-\tan\frac{\pi}{8})$ donc $-\frac{1}{2}(1-\tan\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

$1-\tan\frac{\pi}{8} = 2-\sqrt{2} \Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.

16

1) a) $1-2\cos 2x+\cos 4x = 1+\cos 4x - 2\cos 2x$

$$= 2\cos^2 2x - 2\cos 2x = 2\cos 2x(\cos 2x - 1)$$

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 1-2\cos 2x + \cos 4x \neq 0\}$

$1-2\cos 2x+\cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 2x-1) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$ ou $\cos 2x = 1$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad 2x = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \right)$$

2) a) $f(x) = \dfrac{1+\cos 4x + 2\cos 2x}{1-2\cos 2x+\cos 4x} = \dfrac{2\cos^2 2x + 2\cos 2x}{2\cos 2x(\cos 2x - 1)} = \dfrac{2\cos 2x(\cos 2x+1)}{2\cos 2x(\cos 2x-1)}$

$$= \frac{\cos 2x + 1}{\cos 2x - 1} = -\frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan^2 x}$$

b) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{\cos\frac{\pi}{4}-1} \quad \left(\text{car } f(x) = \dfrac{\cos 2x+1}{\cos 2x - 1}\right)$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2} = -\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

d'autre part $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -\dfrac{1}{\tan^2\frac{\pi}{8}} = -\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

donc $\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}+1$ car $\dfrac{\pi}{8} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \tan\dfrac{\pi}{8} > 0$

3) a) $\cos x + \left(\sqrt{2}+1\right)\sin x = \cos x + \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} . \sin x = \cos x + \dfrac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} \sin x$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\cos x + \cos\frac{\pi}{8}\sin x\right) = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

b) $\cos x + \left(\sqrt{2}+1\right)\sin x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}+2k\pi \\ \text{ou} \qquad\qquad\qquad (k\in\mathbb{Z}) \\ x+\frac{\pi}{8} = \pi-\frac{\pi}{8}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{ou} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \\ x = \frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{2k\pi \ ; k\in\mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi \ , k\in\mathbb{Z}\right\}$$

17 1) $x \in D_f \Leftrightarrow \sin x \neq 0$ **et** $\sin 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{3}; k\in\mathbb{Z}$

Donc $D_f = IR \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{3}; k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin x\cos 2x + \cos x \sin 2x$

$= \sin x \cos 2x + 2\sin x\cos^2 x = \sin x\left(2\cos 2x+1\right)$

Pour $x\in D_f$ on a $f(x) = \dfrac{2\cos 2x+1-1}{\sin 3x} = \dfrac{2\cos 2x}{\sin 3x}$

3) • $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \dfrac{1}{\sin\frac{3\pi}{8}} = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8})} = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}$

$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}}$ donc $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}}$

• $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}}$ donc $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\cos\frac{\pi}{8}}$ d'où $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{8}}{1+\sqrt{2}}$

or $\sin\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$ *donc* $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{4\cos\frac{\pi}{8}}$ d'où $\cos^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{8} > 0$ donc $\cos\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ *et* $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

4)a) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\dfrac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

b) $\cos x+\left(\sqrt{2}-1\right)\sin x=1 \Leftrightarrow \cos x+\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sin x=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos x+\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin x=\sqrt{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{8}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{8}\sin x=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=\cos\dfrac{\pi}{8} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \text{ où } x=2k\pi; k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{\pi}{4}+2k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{2k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}\quad S_{]0,2\pi[}=\left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$

5) $f\left(\dfrac{\pi}{7}\right)=\dfrac{2\cos\dfrac{2\pi}{7}}{\sin\dfrac{3\pi}{7}}=\dfrac{2\cos\dfrac{2\pi}{7}}{\sin(\pi-\dfrac{3\pi}{7})}=\dfrac{2\cos\dfrac{2\pi}{7}}{\sin\dfrac{4\pi}{7}}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}$

Donc $\dfrac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{3\pi}{7}}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{7}}=0$

Rotations

1/ Définitions

⇨ ***Définition d'une rotation***

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit I un point du plan et θ un réel donné.

On appelle rotation de centre I et d'angle θ, l'application du plan dans lui-même qui fixe le point I et qui à tout point M du plan distinct de I associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} IM = IM' \\ \left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) = \theta\,[2\pi] \end{cases}$$

La rotation de centre I et d'angle θ est généralement notée $R_{(I,\theta)}$.

Le point I et le réel θ sont dits les éléments caractéristiques de $R_{(I,\theta)}$.

Une rotation est parfaitement déterminée par la donnée de son angle et celle d'un point et son image.

⇨ ***Cas particulier***

① La rotation de centre I et d'angle nul est l'identité du plan.

② La rotation de centre I et d'angle π est la symétrie centrale de centre I.

⇨ ***Réciproque d'une rotation***

Définition

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit I un point du plan, θ un réel et R la rotation de centre I et d'angle θ.

La rotation $R_{(I,-\theta)}$ est appelée rotation réciproque de $R_{(I,\theta)}$.

$$R_{(I,\theta)}(M) = M' \text{ si, et seulement si, } R_{(I,-\theta)}(M') = M$$

2/ Isométries du plan

⇨ ***Définition***

Soit f une application du plan dans lui-même.

On dit que f est une isométrie du plan si pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $MN = M'N'$.

3/ Propriétés d'une rotation

⇨ Toute rotation conserve le produit scalaire et les distances.
Toute rotation est une isométrie.

Le centre d'une rotation d'angle non nul est le seul point invariant.

⇨ Le plan est orienté dans le sens direct.
Soit I un point du plan, θ un réel et R la rotation de centre I et d'angle θ.

Pour tous points A, B, C et D d'images respectives A', B', C' et D' par la rotation R, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Pour tous points distincts A et B :

$$\text{Si} \begin{cases} r_{(I,\theta)}(A) = A' \\ r_{(I,\theta)}(B) = B' \end{cases} \text{alors} \begin{cases} AB = A'B' \\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

Pour tous points A, B, C et D tels que A est distinct de B et C est distinct de D, d'images respectives A', B', C' et D' par R :

$$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})\ [2\pi]$$

pour tout réel x : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{C'D'}$

⇨ Toute rotation conserve l'alignement.

L'image d'une droite par une rotation est une droite.

L'image d'un segment par une rotation est un segment qui lui est isométrique.

Toute rotation conserve le barycentre de deux points.

Toute rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites.

⇨ L'image d'un cercle de centre O par une rotation R est un cercle qui lui est isométrique et de centre $O' = R(O)$.

4/ Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct. Soient A, B, C et D quatre points tels que les points A et B sont distincts, $AB = CD$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.

Il existe une rotation et une seule qui transforme A en C et B en D, d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et de centre appartenant aux médiatrices des segments $[AC]$ et $[BD]$.

5/ Composée de deux rotations de même centre

Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit I un point du plan, θ un réel et R la rotation de centre I et d'angle θ.

Si R et R' sont deux rotations de même centre I et d'angles respectifs θ et θ'.

Alors $R' \circ R$ sont deux rotations de même centre O et d'angles respectifs $\theta + \theta'$.

La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles.

Si $\theta + \theta' \equiv 0\ [2\pi]$ alors $R'\ R$ est l'identité du plan.

EXERCICES

1 Soit ABC un triangle isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB} \widehat{,} \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

On désigne par D le symétrique de C par rapport à B et soit r la rotation dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$ et tel que $r(D) = C$.

1) Déterminer et construire le centre I de r.
2) a) Montrer que $A = I * C$.
   b) En déduire et construire $r^{-1}(A)$.

2 Soient ABCD un carré de côté a $(a > 0)$ de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB} \widehat{,} \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

et r la rotation de centre A dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer $r(B)$.
2) Soient CEF un triangle isocèle tel que $\left(\overrightarrow{CE} \widehat{,} \overrightarrow{CF}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $D = E * C$
   a) Montrer que $r(C) = E$.
   b) Montrer que $r(F) = C$.
3) Soit $I = A * E$
   a) Montrer que $OF = IC$.
   b) Déterminer l'image de la droite (OF) par r.
   c) En déduire que O est l'orthocentre du triangle ICF.

3 Soit ABCD un parallélogramme, on considère deux triangles équilatéraux ABI et ADJ tel que : $\left(\overrightarrow{IB} \widehat{,} \overrightarrow{IA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{JA} \widehat{,} \overrightarrow{JD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit r la rotation de centre I tel que $r(B) = A$.

1) Faire une figure
2) Déterminer une mesure de l'angle de r.
3) a) Montrer que $r(C) = J$
   b) En déduire la nature du triangle ICJ.

4 Dans le plan orienté, ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB} \widehat{,} \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$; soit I le symétrique de B par rapport à (AC), Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et tel que $r(A) = C$

1) Montrer que I est le centre de r
2) Soit $D = r(B)$, montrer que $C = A * D$

3) Soit $M \in [AB] \setminus \{A,B\}$ et $M' \in [CD]$ tel que $AM = CM'$
   a) Montrer que $M' = r(M)$
   b) En déduire que IMM′ et un triangle équilatéral.

5 Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB} \widehat{,} \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

Soit N un point du segment $[BC] \setminus \{B\}$; on pose E l'intersection des droites (AN) et (CD).

La perpendiculaire Δ à (AN) passant par A coupe (BC) en F et (CD) en G
1) Faire une figure
2) Soit r la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer l'image de la droite (BC) par r.
   b) En déduire les images des points F et N par r.
   c) Quelle est la nature des triangles AEF et ANS ?
3) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[CD]$.

   on pose $\begin{cases} J = C * D \\ K = A * D \\ I = A * B \end{cases}$

   Soit r′ la rotation de centre K tel que $r'(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$
   a) Déterminer une mesure de l'angle de r′
   b) Soit $M \in \mathscr{C}$ et $M' \in \mathscr{C}'$ tel que $\left(\overrightarrow{IM} \widehat{,} \overrightarrow{JM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

      Déterminer $r(M)$.

6 Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB} \widehat{,} \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On pose $I = C * B$, Δ la droite perpendiculaire à (BC) passant par C et qui coupe (AB) en D.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
1) Faire une figure.
2) a) Déterminer r(B)
   b) Déterminer les images des droites (AC) et (BC) par r.
   c) En déduire r(C)
3) Caractériser $r \circ r$ et en déduire que A est le milieu de $[BD]$.
4) Déterminer et construire r(I) (on notera $r(I) = J$)
5) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   Déterminer et construire $\mathscr{C}' = r(\mathscr{C})$

6) Soit M un point du plan distinct de A et B tel que $\left(\overrightarrow{MA} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$
   a) Déterminer et construire l'ensemble des points M
   b) On pose $M' = r(M)$; déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie.
   c) Montrer que $(BM) \perp (CM')$ et $BM = CM'$.

7 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A(2,0), B(4,1), C(1,2) et D(0,4).
1) Démontrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en C et B en D.
2) Déterminer son angle.
3) Donner les coordonnées de son centre.

8 Dans le plan orienté, on donne un triangle ABC direct dont les angles sont aigus (c'est-à-dire que chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, admet une mesure principale entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

AEB est le triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AE} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

ACF est le triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AC} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1) En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, démontrer que

   $CE = BF$ et $(\overrightarrow{EC} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{BF}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$
2) Les droites (EC) et (BF) se coupent en un point I.
   Démontrer que le cercle $\mathscr{C}_1$ circonscrit au triangle AEB et le cercle $\mathscr{C}_2$ circonscrit au triangle ACF passent par le point I.
3) Soit M le milieu de $[EC]$ et N le milieu de $[BF]$.
   a) Démontrer que le triangle AMN est équilatéral direct.
   b) Démontrer que $(\overrightarrow{IM} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{IN}) \equiv \pi + (\overrightarrow{AM} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{AN})\ [2\pi]$.

9 ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

M est un point intérieur au triangle ABC.
L, K et H sont les projetés orthogonaux de M sur (AB), (BC) et (CA) respectivement.

1) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. M' est l'image de M par R.
   a) Montrer que BMM' est un triangle équilatéral.

b) L' est le projeté orthogonal de M' sur (AB). Démontrer que M'L' = MK.

2) Soit Δ la parallèle à (AB) menée par M'. Δ coupe (ML) en N.

a) Démontrer que $MN = ML + MK$.

b) Démontrer que l'image de Δ par la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$ passe par B.

c) En déduire que $ML + MK + MH$ est égale à la longueur de chacune des hauteurs du triangle ABC.

10 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soit f l'application qui à tout point M(x,y) du plan associe le point M'(x',y') du plan tel que :
$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}-3}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie du plan.

2) Montrer que le point $\Omega(1,-1)$ est l'unique point invariant par f.

3) Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tel que M' = f(M).

a) Exprimer en fonction de x et y : $\overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\det(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})$.

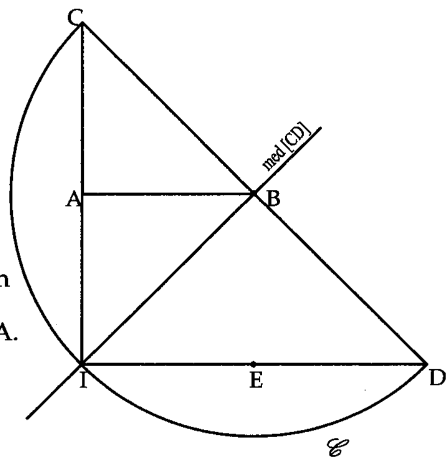
b) En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})$.

c) Quelle est alors la nature de f ?

CORRIGES

1

1) $r(D) = C \Leftrightarrow \begin{cases} IC = ID & (1) \\ \left(\overrightarrow{ID}, \widehat{\overrightarrow{IC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] & (2) \end{cases}$



(1) $IC = ID \Rightarrow I \in med[DC]$

(2) $\left(\overrightarrow{ID}, \widehat{\overrightarrow{IC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

$\Rightarrow$ I appartient à $\mathscr{C}$ le demi cercle de diamètre $[CD]$ situé dans le demi plan de frontière (CD) contenant le point A.

Conclusion : $\{I\} = med[CD] \cap \mathscr{C}$

2) a) on a $\left(\overrightarrow{BC}, \widehat{\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ (1) car ABC isocèle et $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

$$\left.\begin{array}{l} IC = ID \\ \left(\overrightarrow{ID}, \widehat{\overrightarrow{IC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overrightarrow{DB}, \widehat{\overrightarrow{DI}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{DB}, \widehat{\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \;(2)$$

car B, C, D alignés et d'après (1) et (2) : $(ID) // (AB)$

On a donc et $(IC) \perp (ID)$ donc $(IC) \perp (AB)$ et $(AC) \perp (AB)$ donc I, A et C sont alignés.

Dans le triangle ICD, on a :

$$\left.\begin{array}{l} B = C * D \\ (AB) // (ID) \end{array}\right\} \Rightarrow (AB) \text{ coupe } (IC) \text{ en son milieu}$$

conclusion : $A = I * C$

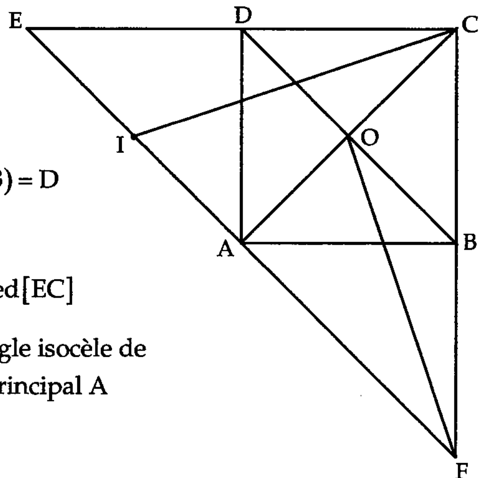
b) $r = r_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)}$ donc r^{-1} est la rotation de centre I dont une mesure de l'angle est $\frac{-\pi}{2}$ donc $r^{-1}(I) = I$ et $r^{-1}(C) = D$ car $r(D) = C$

d'où $r^{-1}(A) = r^{-1}(I * C)$

$= r^{-1}(I) * r^{-1}(C)$: la rotation conserve les milieux

$= I * D = E$

2



1) ABCD un carré ; $r = r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$

$$\left.\begin{array}{c}\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ } \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AB = AD\end{array}\right\} \text{ donc } r(B) = D$$

2) a) $$\left.\begin{array}{l} D = E * C \\ (AD) \perp (EC)\end{array}\right\} \Rightarrow (AD) = \text{med}[EC]$$

$\Rightarrow$ ACE triangle isocèle de sommet principal A

et puisque $\left(\overrightarrow{CD}, \widehat{\ } \overrightarrow{CA}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ alors $\left(\overrightarrow{AC}, \widehat{\ } \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ par suite on a :

$$\left.\begin{array}{c} AC = AE \\ \left(\overrightarrow{AC}, \widehat{\ } \overrightarrow{AF}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)\end{array}\right\} \Leftrightarrow r(C) = E$$

b) $$\left.\begin{array}{l} B = C * F \\ (AB) \perp (CF)\end{array}\right\} \Rightarrow (AB) = med[CF] \Rightarrow ACF \text{ triangle isocèle de sommet principal}$$

$$\left.\begin{array}{l} AF = AC \\ \left(\overrightarrow{AF}, \widehat{\ } \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)\end{array}\right\} \Leftrightarrow r(F) = C$$

2ème méthode : (Conservation des milieux)

On a $r(B) = D$

$\Rightarrow r(C * F) = E * C \Rightarrow r(C) * r(F) = E * C$

or $r(C) = E \Rightarrow E * r(F) = E * C \Rightarrow r(F) = C$

3) a) on a : ACE et AFC deux triangles isométriques

$$\begin{array}{l} AE = AC \\ AF = AC \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} I = A * E \\ O = A * C \end{array} \Rightarrow OF = IC$$

b) on a : $O = A * C$

$\Rightarrow r(O) = r(A) * r(C) = A * E = I$

donc $\begin{matrix} r(O) = I \\ r(F) = C \end{matrix} \Rightarrow$ l'image de la droite (OF) par r et la droite (IC)

c) On a une mesure de l'angle de r et $\frac{\pi}{2}$ et l'image de (OF) est la droite (IC)

$\Rightarrow (OF) \perp (IC)$ donc (OF) est une hauteur du triangle ICF

on a : CEF isocèle de sommet principal C donc $(AC) \perp (EF)$

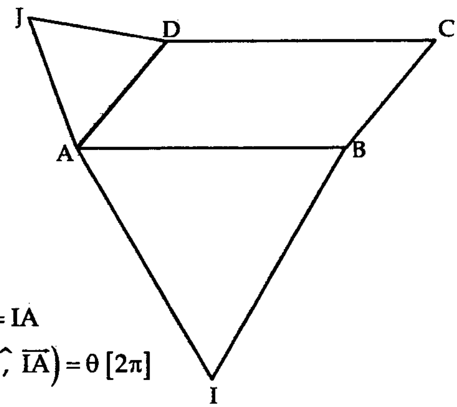
d'où $(AC) \perp (IF)$ car A, I, E et F sont alignés

$\Rightarrow (AC)$ est une hauteur du triangle ICF et puisque $\{O\} = (OF) \cap (AC)$

$\Rightarrow$ O est l'orthocentre de ICF.

3

1)



2) r de centre I tel que $r(B) = A \Leftrightarrow \begin{cases} IB = IA \\ (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) = \theta \ [2\pi] \end{cases}$

où θ une mesure de l'angle de r

or IBA triangle équilatéral direct $\Leftrightarrow \begin{matrix} IB=IA \\ (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{matrix}$ donc $\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

3) a) on a : ADJ triangle équilatéral direct $\Rightarrow (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AJ}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

et on a ABCD parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

d'où $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AJ}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. On a donc :

$\left. \begin{matrix} AJ = AD & \text{AJD équilatéral} \\ AD = BC & \text{parallélogramme} \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC = AJ$

donc : $\left.\begin{array}{l} r(B)=A \\ BC=AJ \\ (\overrightarrow{BC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AJ}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow r(C)=J$

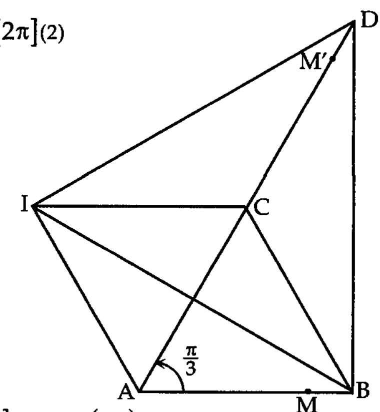
b) $\left.\begin{array}{l} IC=IJ \\ (\overrightarrow{IC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IJ}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow$ ICJ équilatéral.

4

1) r d'angle $\frac{\pi}{3}$ tel que $r(A)=C$

On pose Ω centre de r :

$$r(A)=C \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega A=\Omega C & (1) \\ (\overrightarrow{\Omega A}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] & (2) \end{cases}$$



(1) $\Omega A=\Omega C \Rightarrow \Omega \in med[AC] \Rightarrow \Omega \in (IB)$

(2) $(\overrightarrow{\Omega A}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \Rightarrow \Omega$ appartient à l'arc $\mathscr{C}$ du cercle passant par A et C situé dans le demi plan de frontière (AC) ne contenant pas la demi tangente [AT) tel que $(\overrightarrow{AT}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ or $(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ donc $[AT)=[AB)$ .Conclusion : $\{\Omega\}=(IB)\cap\mathscr{C}$

$$\text{or } \left(\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \text{ car } \begin{cases} S_{(AC)}(B) = I \text{ d'où l'image de l'angle orienté} \\ \left(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC}\right) \text{ par } S_{(AC)} \text{ est } \left(\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IC}\right) \\ \text{donc} \left(\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IC}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC}\right)(2\pi) \end{cases}$$

$\Rightarrow I \in (IB) \cap \mathscr{C} \Rightarrow \Omega = I$

2) $D = r(B) \Leftrightarrow \begin{cases} IB = ID \\ \left(\overrightarrow{IB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ID}\right) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$

on a (IB) la bissectrice de $\widehat{CIA} \Rightarrow \left(\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IB}\right) \equiv \frac{\pi}{6}(2\pi)$

d'où $\left(\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ID}\right) \equiv \left(\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{IB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ID}\right)(2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc AID triangle rectangle en I,

d'autre part on a : $\left(\overrightarrow{AC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AI}\right) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ car IAC est équilatéral

$\left(\overrightarrow{AD}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AI}\right) + \left(\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ID}\right) + \left(\overrightarrow{DI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{DA}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{DI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{DA}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{AD}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AI}\right) - \left(\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ID}\right)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{DI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{DA}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{AC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AI}\right) - \left(\overrightarrow{IA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ID}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

de même $\left(\overrightarrow{IC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ID}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ donc ICD est isocèle en C

par suite $IC = CD = AC$ et IAD est un triangle rectangle en I donc $C = A * D$

3) $M \in [AB] \setminus \{A, B\}, M' \in [CD] \setminus \{C, D\}$ et $AM = CM'$

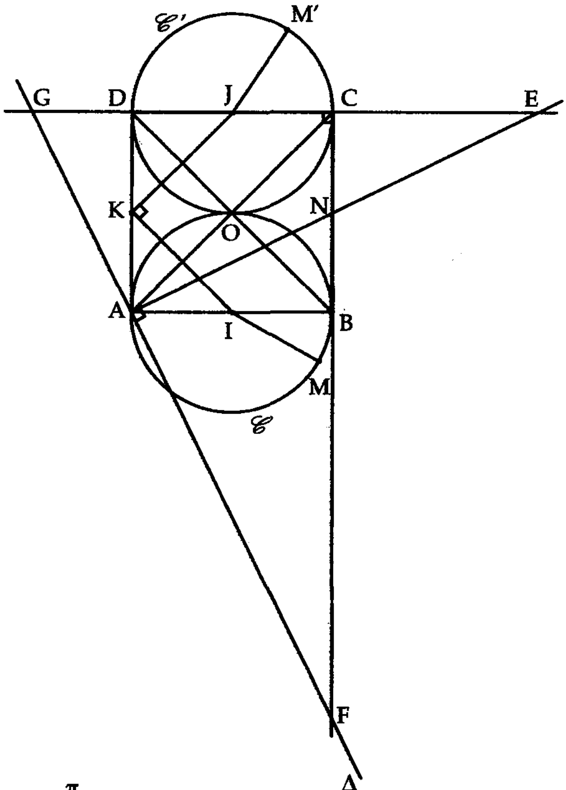
a) On a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ AM = CM' \\ \bullet\ \left(\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)\,[2\pi] \\ \qquad \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \bullet\ r \text{ rotation d'angle } \frac{\pi}{3} \text{ et } r(A) = C \end{array}\right\} \Rightarrow r(M) = M'$$

b) $r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM = IM' \\ \left(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IM'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ donc IMM' est un triangle équilatéral

5

1)



2) a) L'angle de r est $\frac{\pi}{2}$

On a $r(B)=D$ car $AB=AD$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ d'où l'image de la droite (BC) par r est la droite perpendiculaire à (BC) passant par $r(B)=D$ donc $r((BC))=(CD)$

b) Δ passe par A le centre de r donc $r(\Delta)$ est la perpendiculaire à Δ passant par $A \Rightarrow r(\Delta)=(AN)$

$F \in (BC) \cap \Delta \Rightarrow r(F) \in r((BC)) \cap r(\Delta)$

$\Rightarrow r(F) \in (CD) \cap (AN) \Rightarrow r(F)=E$

de même $r((AE))=(AG)$ car $(AG) \perp (AE)$ passant par A

donc : $N \in (BC) \cap (AN) \Rightarrow r(N) \in r((BC)) \cap r((AN))$

$\Rightarrow r(N) \in (CD) \cap (AG) \Rightarrow r(N)=G$

c) On a: $r(F)=E \Leftrightarrow \begin{cases} AF = AE \\ \left(\overrightarrow{AF}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow$ AEF triangle rectangle isocèle en A

de même pour le triangle ANS rectangle isocèle en A.

3) a) On a :

$$\left.\begin{array}{l} r'(\mathscr{C})=\mathscr{C}' \\ I \text{ centre } \mathscr{C} \\ J \text{ centre } \mathscr{C}' \end{array}\right\} \Rightarrow r(I)=J$$

On pose θ une mesure de l'angle de r'

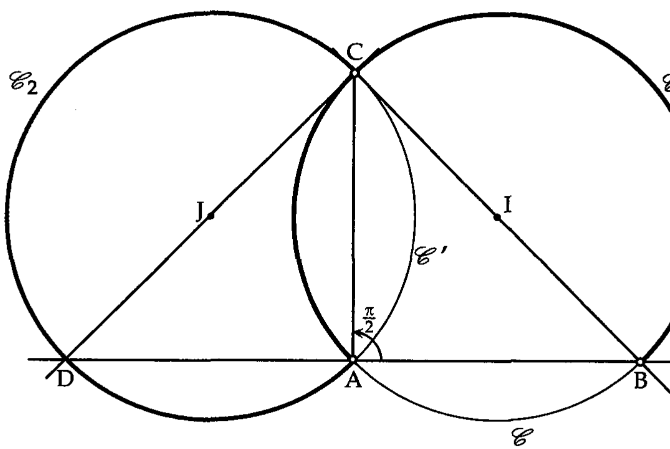
$$r'(I)=J \Rightarrow \left(\overrightarrow{KI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{KJ}\right) \equiv \theta(2\pi) \text{ or } \left(\overrightarrow{KI}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{KJ}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \text{ donc } \theta \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$$

b) On a $M \in \mathscr{C}$, $M' \in \mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de même rayon donc $IM = JM'$ donc on a :

$$\left.\begin{array}{l} IM = JM' \\ \left(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{JM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \\ r(I)=J \end{array}\right\} \Rightarrow r(M)=M'$$

6

1)



2) a) On a : $\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow r(B)=C$

b) L'angle de r est $\frac{\pi}{2}$

• $r(A)=A$ donc $r((AC))$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par A $\Rightarrow r((AC))=(AB)$

• $r(B)=C$ donc $r((BC))$ est la droite perpendiculaire à (BC) passant par C

donc $r((BC))=\Delta$.

c) $C\in(BC)\cap(AC)\Rightarrow r(C)\in r((BC))\cap r((AC))$

$\Rightarrow r(C)\in\Delta\cap(AB)\Rightarrow r(C)=D$

3) $r\circ r$: est la composée de deux rotations de même centre A et dont la somme des angles est $\pi(2\pi)$ $(\neq 2k\pi \;\; k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow r\circ r$ est une rotation de centre A et d'angle π

$\Rightarrow r\circ r=S_A$: symétrie centrale de centre A

On $(r\circ r)(B)=r[r(B)]=r(C)=D$ or $r\circ r=S_A$ donc $S_A(B)=D$ d'où $A=B*D$.

4) $I=B*C\Rightarrow r(I)=r(B)*r(C)$ (La rotation conserve les milieux)

d'où $r(I)=C*D$ donc $r(I)=J$.

5) ABC triangle rectangle en A et $I=B*C$

$\Rightarrow$ $\mathscr{C}$ de centre I de rayon IA

$\Rightarrow r(\mathscr{C})=\mathscr{C}'$ le cercle de centre $r(I)=J$ de même rayon que $\mathscr{C}$

6) a) $(\overrightarrow{MA},\widehat{\ \ }\overrightarrow{MB})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc M appartient à l'arc $\mathscr{C}_1$ du cercle $\mathscr{C}$ privé de A et B et contenant le point C car $(\overrightarrow{CA},\widehat{\ \ }\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) on a $r(M)=M'$

$r(A)=A$

$r(B)=C$

$(\overrightarrow{MA},\widehat{\ \ }\overrightarrow{MB})\equiv\frac{\pi}{4}(2\pi)\Rightarrow(\overrightarrow{M'A},\widehat{\ \ }\overrightarrow{M'C})\equiv\frac{\pi}{4}(2\pi)$ (car la rotation conserve les mesures des angles orienté

donc $M'\in\mathscr{C}_2$ l'arc du cercle $\mathscr{C}'$ privé de A et C contenant D,

car $(\overrightarrow{DA},\widehat{\ \ }\overrightarrow{DC})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

c) On a $\begin{matrix} r(M)=M' \\ r(B)=C \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} BM=CM' \\ (\overrightarrow{BM},\widehat{\ \ }\overrightarrow{CM'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

d'où $BM=CM'$ et $(BM)\perp(CM')$.

7 Soit A(2,0), B(4,1), C(1,2) et D(0,4).

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$ et $AB=CD=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ d'où il existe une rotation unique R qui transforme A en C et B en D.

2) R est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB},\widehat{\ \ }\overrightarrow{CD})$.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\times CD} = \frac{-2\times1+2\times1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = 0$$

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = \frac{\text{dét}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})}{AB\times CD} = \frac{2\times2-(-1)\times1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = 1$$

Par conséquent $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

3) Le centre Ω de R appartient à la médiatrice de $[AC]$ et $[BD]$.

Soit I le milieu de $[AC]$ donc $I(\frac{3}{2},1)$. On pose Δ la médiatrice de $[AC]$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ donc $\Delta: -x+2y+c=0$

$I(\frac{3}{2},1)\in\Delta$ donc $-\frac{3}{2}+2+c=0$ d'où $c=-\frac{1}{2}$ donc $\Delta: -x+2y-\frac{1}{2}=0$

Soit J le milieu de $[BD]$ donc $J(2,\frac{5}{2})$. On pose Δ' la médiatrice de $[BD]$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ donc $\Delta: -4x+3y+c=0$

$J(2,\frac{5}{2})\in\Delta'$ donc $-4(2)+3(\frac{5}{2})+c=0$ d'où $c=\frac{1}{2}$ donc $\Delta': -4x+3y+\frac{1}{2}=0$

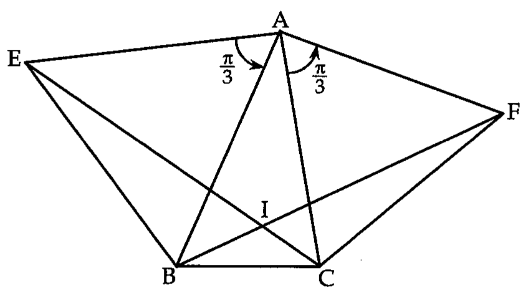
$$\{\Omega\}=\Delta\cap\Delta' \Leftrightarrow \begin{cases}-4x+3y+\frac{1}{2}=0\\ -x+2y-\frac{1}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4x+3y+\frac{1}{2}=0\\ 4x-8y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5y+\frac{5}{2}=0\\ -x+2y-\frac{1}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}\\ -x+1-\frac{1}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases} \quad \Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

8

1) R est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

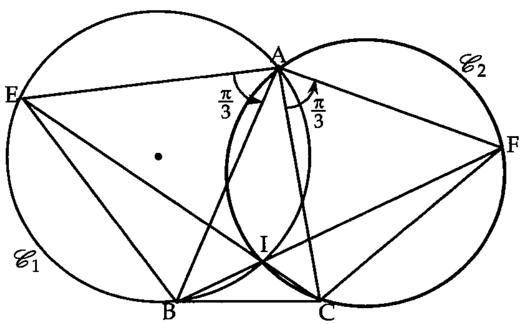
On a $R(E)=B$ et $R(C)=F$ donc $(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BF}})\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et $EC=BF$.



2) On a $(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BF}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc $(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IF}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où, comme $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, le point I appartient au cercle $(\mathscr{C}_2)$ circonscrit au triangle ACF.

$(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc $(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{FB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et par suite $(\widehat{\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Comme $(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ on déduit que I appartient au cercle $(\mathscr{C}_1)$ circonscrit au triangle AEB.

I appartient à $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$, I est le second point commun à ces deux cercles.



3) a) M est le milieu de $[EC]$ et N celui de $[BF]$. R étant une rotation donc R conserve les milieux et par suite l'image du milieu M de $[EC]$ est le milieu N de $[BF]$.

$R_{(A,\frac{\pi}{3})}(M) = N \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AN \\ (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$. Donc le triangle AMN est équilatéral direct.

b)

$$(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IN}}) + (\widehat{\overrightarrow{IN},\overrightarrow{IC}}) \equiv \pi\ [2\pi]$$

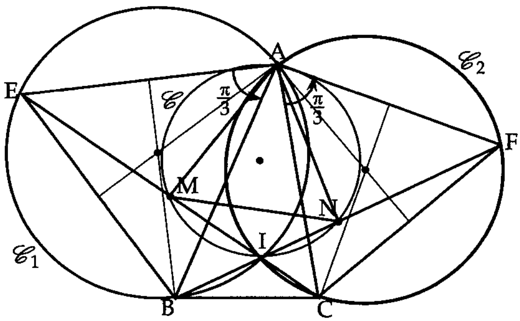
$$(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IN}}) + (\widehat{\overrightarrow{BF},\overrightarrow{EC}}) \equiv \pi\ [2\pi]$$

$(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IN}) \equiv \pi - (\overrightarrow{BF}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{EC})\ [2\pi]$

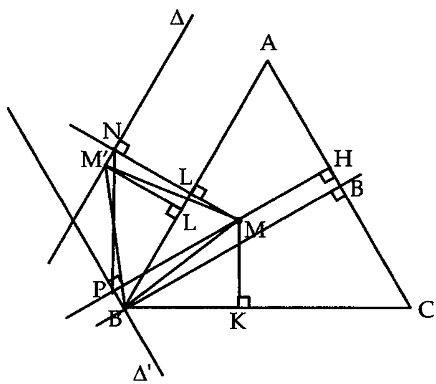
$(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IN}) \equiv \pi + (\overrightarrow{EC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BF})\ [2\pi]$

$(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IN}) \equiv \pi + \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IN}) \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$

Comme $(\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ alors $(\overrightarrow{IM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{IN}) \equiv \pi + (\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AN})\ [2\pi]$



9



1) R est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) M′ est l'image de M par R donc $BM = BM'$ et $(\overrightarrow{BM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

et par suite le triangle BMM′ est équilatéral.

b) L′ est le projeté orthogonal de M′ sur (AB).

$\{K\} = (BC) \cap (MK)$ donc $\{R(K)\} = R((BC)) \cap R((MK))$

$R(B) = B$ et $R(C) = A$ car ABC est équilatéral direct. D'où $R((BC)) = (BA)$

$R(M) = M'$ et $(MK) \perp (BC)$ donc $R((MK))$ est la droite passant par M′ et perpendiculaire à $R((BC)) = (BA)$.

D'où $R((MK)) = (M'L')$ et par suite $\{R(K)\} = (BA) \cap (M'L') = \{L'\}$

$R_{(B,\frac{\pi}{3})}(K) = L' \Rightarrow BK = BL'$ et puisque $BM = BM'$ alors les triangles BM′L′ et BKM, rectangles respectivement en L′ et K, sont isométriques.

Par conséquent : $MK = M'L'$.

2) Δ est la parallèle à (AB) menée par M′.

a) Le quadrilatère M′L′LN est un parallélogramme ayant un angle droit c'est un rectangle et par suite $M'L' = NL$

$MN = ML + LN = ML + M'L' = ML + MK$.

b) Puisque BMM′ est un triangle équilatéral direct alors $(\widehat{\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et $MM' = MB$ donc $R_{(M,\frac{\pi}{3})}(M') = B$ et $M' \in \Delta$ donc l'image de la droite Δ par la rotation $R_{(M,\frac{\pi}{3})}$ est une droite Δ' passant par B.

c) Δ est parallèle à (AB) d'où $\overrightarrow{BA}$ est un vecteur directeur de Δ.

Soit P l'image de N par la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

La droite Δ' est donc de vecteur directeur $\overrightarrow{BP}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

or $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ donc $(BP)//(AC)$ c'est-à-dire $\Delta'//(AC)$.

Puisque $(MN) \perp \Delta$ alors $(MP) \perp \Delta'$ et puisque $\Delta'//(AC)$ alors $(MP) \perp (AC)$ or $(MH) \perp (AC)$ alors M, H et P sont alignés.

et par suite $PH = PM + MH$ (M est l'intérieur du triangle)

$PH = MP + MH = MN + MH = MK + ML + MH$

Le quadrilatère BB′HP, ayant trois angles droits, est un est un rectangle donc $PH = BB'$. D'où $BB' = MH + MK + ML$.

10

1) Soient $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ deux points de P d'image respectives par f $M'(x'_M, y'_M)$ et $N(x'_N, y'_N)$.

$$M'N' = \sqrt{(x'_N - x'_M)^2 + (y'_N - y'_M)^2}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x_N - \tfrac{1}{2}y_N - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x_M + \tfrac{1}{2}y_M)^2 + (\tfrac{1}{2}x_N + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y_N - \tfrac{1}{2}x_M - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y_M)^2}$$
$$= \sqrt{\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}(x_N - x_M) - \tfrac{1}{2}(y_N - y_M)\right]^2 + \left[\tfrac{1}{2}(x_N - x_M) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}(y_N - y_M)\right]^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{3}{4}(x_N - x_M)^2 + \tfrac{1}{4}(y_N - y_M)^2 + \tfrac{1}{4}(x_N - x_M)^2 + \tfrac{3}{4}(y_N - y_M)^2}$$
$$= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = MN$$

D'où f conserve les distances donc f est une isométrie.

2) Soit $M(x,y) \in P$, M est invariant par f si et seulement si $f(M) = M$

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})x + \frac{1}{2}y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}x + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)y = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-\sqrt{3})x + y = 1 - \sqrt{3} \\ -x + (2-\sqrt{3})y = \sqrt{3} - 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (8-4\sqrt{3})y = -8 + 4\sqrt{3} \\ x = (2-\sqrt{3})y - (\sqrt{3}-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Donc f admet un point unique invariant $\Omega(1,-1)$.

3) a) $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = (x-1)(x'-1) + (y+1)(y'+1)$$
$$= (x-1)(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}) + (y+1)(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}-1}{2})$$
$$= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2)$$

$$\text{dét}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \begin{vmatrix} x-1 & x'-1 \\ y+1 & y'+1 \end{vmatrix} = (x-1)(y'+1) - (x'-1)(y+1)$$
$$= (x-1)(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}-1}{2}) - (y+1)(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1+\sqrt{3}}{2})$$
$$= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2)$$

b) On a d'après la question précédente a) :

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \frac{\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'}}{\Omega M \cdot \Omega M'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2)}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$
$$= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2}{x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\overrightarrow{\Omega M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Omega M}') = \frac{d\acute{e}t(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M}')}{\Omega M \cdot \Omega M'} = \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+2y+2)}{(x-1)^2+(y+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r}\cos(\overrightarrow{\Omega M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Omega M}') = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\overrightarrow{\Omega M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Omega M}') = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \text{donc } (\overrightarrow{\Omega M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Omega M}') \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

c) On a pour tout point M du plan d'image M' par f :

$$\left.\begin{array}{l}\Omega M = \Omega M'\\ (\overrightarrow{\Omega M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\Omega M}') \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{array}\right\} \text{donc f est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \frac{\pi}{6}.$$

$D' : (\sqrt{3}+2)x - 2y + \sqrt{3} - 1 = 0$.

Chapitre 5

Nombres Complexes

I/ Notion de nombre complexe

— *Définitions et Notations*

- On admet l'existence d'un nombre imaginaire, noté **i**, vérifiant $\mathbf{i^2 = -1}$.
- Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $x + iy$, où x et y sont deux nombres réels.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

— *Théorème admis*

- Tout nombre complexe z admet une écriture **unique** de la forme $\mathbf{x + iy}$ où x et y sont des réels.

- Cette écriture est **la forme algébrique** de z où :
  x est **la partie réelle** de z, notée $\Re e(z)$
  y est **la partie imaginaire** de z, notée $\Im m(z)$

- On additionne et on multiple des nombres complexes comme des réels : pour ces opérations, les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont celles utilisées dans $\mathbb{R}$, le résultat est toujours un nombre complexe.

— *Egalité - nombre complexe nul*

- Deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

$$z = z' \Leftrightarrow \Re e(z) = \Re e(z') \textbf{ et } \Im m(z) = \Im m(z')$$

- Un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles (simultanément).

$$\begin{cases} x + iy = 0 \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

— *Réels et imaginaires purs*

- z est réel $\Leftrightarrow \Im m(z) = 0$
- z est imaginaire $\Leftrightarrow \Re e(z) = 0$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \Re e(z) = 0$ et $\Im m(z) \neq 0$

III/ Nombres complexes conjugués

Définition et Notation:

- Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $\mathbf{x + iy}$, le **conjugué** de z est le nombre complexe $\mathbf{x - iy}$.
- Le **conjugué** du nombre complexe z est noté $\overline{\mathbf{z}}$.

Propriétés :

Pour tout nombre complexe z, de forme algébrique $z = x + iy$:

- $\overline{\overline{z}} = z$; $z + \overline{z} = 2x$; $z - \overline{z} = 2iy$; $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$
- z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

Conjugué et opérations

Pour tous nombres complexes z et z'.

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
- Si $z \neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

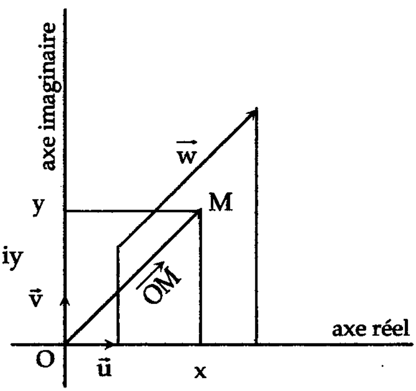
IV/ Représentation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

— *Affixe - Image*

Vocabulaire : x et y étant deux réels.

- $z = x + iy$ est l'**affixe** du point $M(x, y)$ ou du vecteur $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- Le point $M(x, y)$ est l'**image** du nombre complexe : $z = x + iy$.
- $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est **le vecteur image** de $z = x + iy$



- ***Notation :***
  - * z étant un nombre complexe, $M(z)$ se lit « le point M d'affixe z »
    L'affixe du point M est notée z_M.
  - * $\vec{w}(z)$ se lit « le vecteur $\vec{w}$ d'affixe z ». L'affixe d'un vecteur $\vec{w}$ est notée $z_{\vec{w}}$ ou $\text{aff}(\vec{w})$.

- $M(x, y)_{(O, \vec{u}, \vec{v})} \Leftrightarrow z_M = x + iy$
- $z_M = z_{M'} \Leftrightarrow M = M'$
- $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v})} \Leftrightarrow \text{aff}(\vec{w}) = x + iy$
- $\text{aff}(\vec{w}) = \text{aff}(\vec{w}') \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{w}'$

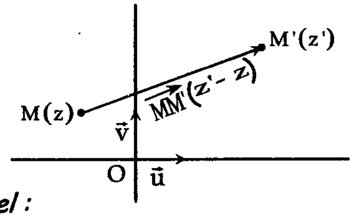
— ***Affixe du milieu d'un segment***

Soient A et B deux points du plan et K le milieu de $[AB]$.

$$z_K = \frac{z_A + z_B}{2}$$

— ***Affixe d'un vecteur*** $\overrightarrow{MM'}$

$$\text{affixe}(\overrightarrow{MM'}) = z_{M'} - z_M = z_{\overrightarrow{MM'}}$$



— ***Affixe d'un produit d'un vecteur par un réel :***

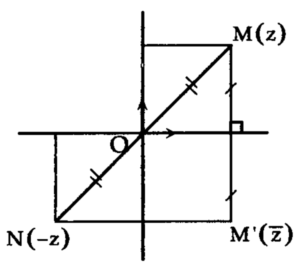
$$\text{aff}(\alpha\vec{w}) = \alpha \cdot \text{aff}(\vec{w}) \qquad (\text{où } \alpha \in \mathbb{R})$$

— ***Affixe d'une somme de deux vecteurs***

$$\text{aff}(\vec{w} + \vec{w}') = \text{aff}(\vec{w}) + \text{aff}(\vec{w}')$$

— ***Opposé - conjugué***

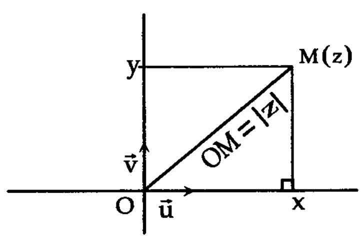
- Le point N d'affixe (-z) est l'image de M par la symétrie centrale de centre O.
- Le point M' d'affixe $\bar{z}$ est l'image de M par la symétrie axiale d'axe (Ox).



V/ Module

— ***Définition***

Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $x + iy$, **le module** de z est le nombre réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$ noté $|z|$.



— ***Interprétation géométrique du module***

- $|z|$ est la distance entre l'origine du repère et le point $M(z)$.

$$OM = |z_M|$$

- ***Distance de deux points:*** $MM' = |z' - z|$

— ***Propriétés***

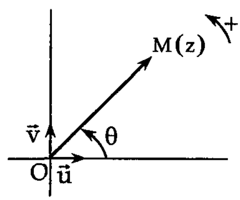
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\overline{z}| = |z|$ *et* $|-z| = |z|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $|z^2| = |z|^2$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ $(z \neq 0)$
- Si z est **réel**, son module est sa **valeur absolue**.
- Si $|z| = 1$ alors $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$

VI/ Argument

— ***Définition***

- Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M.

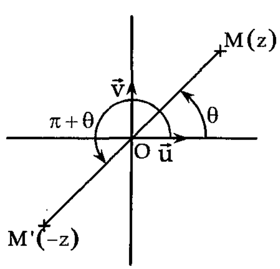
Un **argument** de z est une mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
La notation utilisée est **argz**.

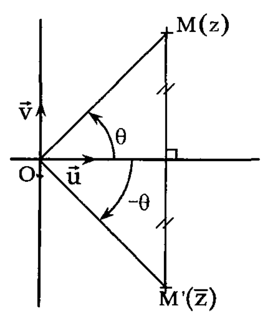


- Si θ et θ' sont deux arguments de z non nul, on a $\theta' = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
On écrit $\arg z = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- **0 n'a pas d'arguments**, car l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini si M est en O.

— ***Propriétés***

- *Argument de l'opposé*
$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$
- *Argument du conjugué*
$\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$





— ***Argument et opérations***

Pour tous nombres complexes non nuls z et z'.

- $\arg(z \cdot z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ • $\arg z^2 \equiv 2\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$ • $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

VII/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

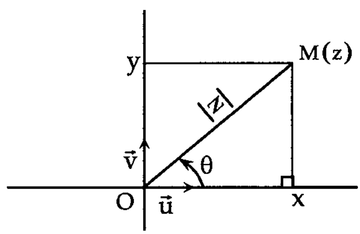
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

— ***Introduction :***

Un point M peut être repéré de deux façons :

- 1ère façon : par la donnée des coordonnées (x, y) de M.
- 2ème façon : lorsque M est distinct de O, par la donnée de l'angle $\theta = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$ et de la distance OM.

  Ceci conduit à une autre écriture d'un nombre complexe : forme trigonométrique.



— ***Théorème et définition***

- Tout nombre complexe **non nul**, dont θ est un argument, s'écrit sous forme trigonométrique $\mathbf{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$
- *Réciproquement,* l'écriture $\mathbf{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est la forme trigonométrique du nombre complexe de module r et d'argument θ.

— ***Formules de passage***

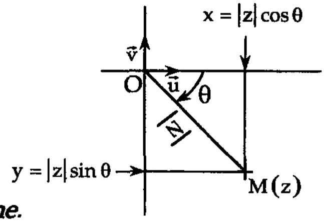
- ***De la forme algébrique à une forme trigonométrique***

  Si $z = x + iy$, où x et y sont des réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$,

  alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

  avec $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ tel que $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$

- ***D'une forme trigonométrique à la forme algébrique***
Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où r est un réel strictement positif et θ un réel,
alors $z = x + iy$
avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$



- ***Remarque :***
$\Re e(z)$ et $\cos\theta$ *ont le* ***même signe.***
$\Im m(z)$ et $\sin\theta$ *ont le* ***même signe.***

EXERCICES

1 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et I d'affixes respectives :
$z_A = -2i$; $z_B = 1+i$; $z_C = 4+2i$ et $z_I = 2$

1) a) Placer une figure les points A, B, C et I.
   b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AC]$.
2) a) Calculer les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
   b) Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle de sommet principal B.
3) Soit D le symétrique de B par rapport au point I.
   a) Déterminer l'affixe z_D du point D.
   b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

2

1) On considère le nombre complexe z de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{3}$.
   Déterminer le module et un argument de $Z = z^2 + z + 1$.
2) Plus généralement, z et z' sont deux nombres complexes.
   Montrer que si $|z| = |z'| = 1$ et $1 + zz' \neq 0$ alors le nombre $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

3

1) Soient z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $|z| = |z'| = 1$
   Montrer que $\dfrac{(z+z')^2}{z \cdot z'}$ est réel.
2) Soit z un nombre complexe. Montrer que $|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

4 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Déterminer, dans chaque cas :

1) l'ensemble E_1 des points M(z) tels que $|z+5| = \sqrt{10}$
2) l'ensemble E_2 des points M(z) tels que $|z-5+3i| = 3$
3) l'ensemble E_3 des points M(z) tels que $|z+5| = |z-i|$
4) l'ensemble E_4 des points M(z) tels que $|iz+4| = 6$
5) l'ensemble E_5 des points M(z) tels que $|\bar{z}+5-i| = |z-4i|$
6) l'ensemble E_6 des points M(z) tels que les points A, M et M' d'affixes respectives 1, z et $1+z^2$ soient alignés.
7) l'ensemble E_7 des points M(z) tels que $(\bar{z}-3)(iz+2)$ soit réel
8) l'ensemble E_8 des points M(z) tels que $(\bar{z}-i)(2iz+3)$ soit imaginaire pur.

5 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-6z+12=0$

   b) Donner les solutions sous forme trigonométrique.

2) Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A=3+i\sqrt{3}$ et $z_B=3-i\sqrt{3}$
   Quelle est la nature du triangle OAB ?

6 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient $A(i)$, $B(5i)$, $M(z)$ et $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{5i-z}{z-i}$ avec $z\neq i$.

1) a) Vérifier que $z'+1=\dfrac{4i}{z-i}$

   b) Montrer que lorsque M varie sur le cercle de centre A et de rayon 4, M' varie sur un cercle que l'on précisera.

2) a) Montrer que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}})\equiv\pi+(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}})\ [2\pi]$

   En déduire l'ensemble des points M, lorsque z' est un réel strictement positif.

7 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

Soit A le point d'affixe 4. Soit Δ la droite d'équation $x=4$.

A tout point M(z), distinct de A, on associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{4-z}{\bar{z}-4}$

1) a) Soit B le point d'affixe $1+3i$, déterminer l'affixe du point B' associé au point B.

   b) Soit N un point de Δ privé de A. Déterminer l'affixe du point N' associé au point N. Placer N' sur la figure.

2) Montrer que pour tout nombre complexe différent de 4, $|z'|=1$
   Interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z différent de 4 : $\dfrac{z'-1}{z-4}$ est un réel.

   b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

4) Construire alors le point C' associé au point C d'affixe 1+i.

8 1) Donner le module et un argument de $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$.

Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) En déduire le module et un argument de $u=\dfrac{z_1}{z_2}$.,

3) Ecrire u sous forme algébrique.

4) En déduire les valeurs exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

5) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x$
   a) Démontrer que l'on peut écrire, pour tout réel x, $f(x) = 4\cos(x - \frac{5\pi}{12})$
   b) Résoudre l'équation $f(x) = 2\sqrt{2}$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

9 Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 5(\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5})$ $\qquad$ $z_2 = -5(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9})$

$z_3 = 2(\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12})$ $\qquad$ $z_4 = 1 + i\tan\frac{\pi}{5}$

10 Soit z_1 et z_2 les nombres complexes suivants : $z_1 = 3 - i\sqrt{3}$; $z_2 = -3 - 3i\sqrt{3}$

1) Déterminer les formes trigonométriques de z_1 et z_2.
2) On pose $z_3 = z_1 + z_2$.
   Ecrire z_3 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (unité graphique 2 cm)
   On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
a) Représenter les points A, B et C (expliquer).
b) Quelle est la nature du quadrilatère OBCA ? Justifier.

11 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
M_1, M_2 et M_3 sont les points d'affixes respectives :

$$z_1 = -2\,,\ z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\ ,\ z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

1) a) Ecrire les nombres z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
   b) Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.
   c) Placer alors les points M_1, M_2 et M_3 dans le plan.
2) Soit I le milieu de $[M_1M_2]$.
   a) Déterminer l'affixe de I.
   b) Evaluer OI et $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OI}})$.
   c) En déduire le module et un argument de l'affixe de I.
3) Evaluer alors les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{8}$ et $\sin\frac{5\pi}{8}$.

12 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A et B sont les points d'affixes respectives $z_A=\sqrt{3}+i$ et $z_B=\sqrt{3}-i$.

1) a) Calculer le module et un argument de z_A.
En déduire le module et un argument de z_B.
b) Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A et B.

2) a) Calculer le module et un argument de $\frac{z_A}{z_B}$
b) Ecrire le nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.
c) Montrer que B est l'image de A par une rotation que l'on précisera.

3) a) Soit C le symétrique de A par rapport à O.
Déterminer l'affixe z_C du point C.
b) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Déterminer l'affixe z_D de l'image D du point A par la translation T.
c) Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

13 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $a=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

1) a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombre a et b.
b) Représenter les points A et B dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

2) On pose $z=a+b$ et on désigne par M le point d'affixe z.
a) Montrer que $z=b(1+i)$ et en déduire le module et un argument de z.
b) *) Montrer que OBMA est un carré.
*) Retrouver le module et un argument de z.

3) Calculer alors $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les nombres complexes $z_A=5-5i$, z_B de module égal $5\sqrt{2}$ et d'argument égal à $-\frac{7\pi}{12}$, $z_C=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

1) Calculer le module et un argument de z_A.

2) a) Montrer que B est l'image de A par une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
b) En déduire la construction de B.

3) a) Montrer que $z_B=z_A\cdot z_C$

b) Ecrire z_B sous forme algébrique

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

15 Dans le plan complexe muni du repère orthogonal $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et M d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_M = \sqrt{2}+z_A$

1) a) Calculer OA.

b) Construire A et M.

2) Calculer $|z_M|$

3) Soit Z le nombre complexe tel que $Z = z_M^2$

a) Calculer $z_A{}^2$ puis montrer que $z_M{}^2 = (2\sqrt{2}+2)(1+i)$.

b) En déduire un argument de $z_M{}^2$ puis un argument de z_M.

c) Ecrire z_M sous forme trigonométrique.

16 On considère le complexe $z = \sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

1) Calculer z^2

2) Trouver le module et un argument de z^2.

3) En déduire le module et un argument de z.

4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

17

I- Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 3z + 3 = 0$.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 = -\frac{3}{4}$.

2- En déduire le résolution de l'équation (E)

II-Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1-a- Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $Z = z_B - z_A$.

b- Donner une mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$.

c- Montrer que B appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1 et faire une figure.

III- A tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M ' d'affixe
$z' = \frac{\overline{z}+2}{\overline{z}}$.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $\dfrac{\overline{z}+2}{\overline{z}} = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2- Montrer que : $\overline{z}(z'-1) = 2$.

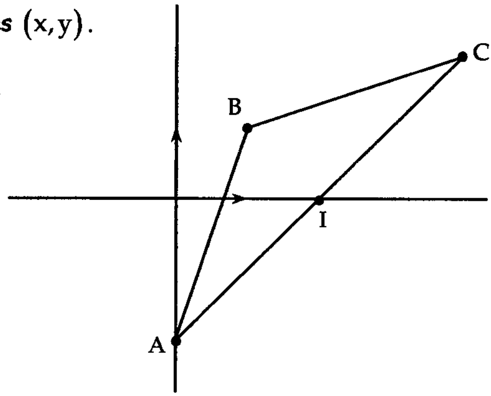
3- En déduire que si M ' appartient à (C) alors M appartient au cercle (C') que l'on déterminera.

CORRIGES

1 **Se rappeler que si x et y sont réels, le point d'affixe $z = x + iy$ n'est autre que le point de coordonnées (x, y).**

1)

$z_A = -2i$ donc $A(0,-2)$
$z_B = 1 + i$ donc $B(1,1)$
$z_C = 4 + 2i$ donc $C(4,2)$
$z_I = 2$ donc $I(2,0)$



b) I est le milieu de $[AC]$

On sait que $z_I = 2$ et $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2i + 4 + 2i}{2} = \frac{4}{2} = 2$

donc $z_I = \frac{z_A + z_C}{2}$ par suite I est le milieu de $[AC]$

2) a) Affixes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ $\rightarrow$ Se rappeler : $\text{aff}(\overrightarrow{MN}) = z_N - z_M$

$u = \text{aff}(\overrightarrow{BA}) = z_A - z_B = (-2i) - (1 + i) = -1 - 3i$
$u' = \text{aff}(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = (4 + 2i) - (1 + i) = 3 + i$

b) Montrons que ABC est un triangle isocèle de sommet principal B

$$\left.\begin{array}{l} BA = |z_A - z_B| = |-1 - 3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \\ BC = |z_C - z_B| = |3 + i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow BA = BC = \sqrt{10}$$

donc le triangle ABC est isocèle de sommet principal B.

3) a) Déterminons l'affixe du point D symétrique de B par rapport à I

$S_I(B) = D \Leftrightarrow$ I est le milieu de $[BD]$

$$\Leftrightarrow z_I = \frac{z_B + z_D}{2} \Leftrightarrow 2z_I = z_B + z_D$$
$$\Leftrightarrow z_D = 2z_I - z_B \Leftrightarrow z_D = 2 \times 2 - (1 + i) = 3 - i$$

b) Montrons que le quadrilatère ABCD est un losange.

On sait que I est le milieu de $[AC]$ et on a trouvé que I est aussi le milieu de $[BD]$ donc ABCD est un parallélogramme (ses diagonales se coupent en leur milieu).

D'après la question b) de la question 2), on a trouvé que $BA = BC$ donc ABCD est un losange.

Rappel :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.
Un losange est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs isométriques.

2

1) *Remarque : La notation algébrique convient mieux pour les sommes.*

La notation trigonométrique convient mieux pour les produits ou les quotients.

- Pour déterminer le module et un argument de $Z = z^2 + z + 1$, on écrit d'abord Z sous forme algébrique et en déduire par la suite le module et un argument de Z.

- $$\left.\begin{array}{l} |z| = 1 \\ \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1\left(\cos(-\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{3})\right)$$

- $Z = z^2 + z + 1$

$$Z = \left(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \tfrac{1}{4} - 2(\tfrac{1}{2})(\tfrac{\sqrt{3}}{2})i + (i\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2 + \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$Z = 1 - i\sqrt{3}$$

- $|Z| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$. Soit θ un argument de Z.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ donc } |Z| = 2 \textit{ et } \arg(Z) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

2) On pose $u = \dfrac{z + z'}{1 + zz'}$. Montrons que u est un réel.

On a : $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$ et $|z'| = 1 \Leftrightarrow \bar{z}' = \dfrac{1}{z'}$

$$\bar{u} = \overline{\left(\frac{z+z'}{1+z\cdot z'}\right)} = \frac{\overline{z+z'}}{\overline{1+z\cdot z'}} = \frac{\bar{z}+\bar{z}'}{1+\bar{z}\cdot\bar{z}'} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z+z'}{z\cdot z'}}{\frac{z\cdot z'+1}{z\cdot z'}} = \frac{z+z'}{1+zz'} = u$$

$\bar{u} = u$ donc u est un réel.

3

1) On pose $Z=\dfrac{(z+z')^2}{z\cdot z'}$,

$$\overline{Z}=\overline{\left[\frac{(z+z')^2}{z\cdot z'}\right]}=\frac{(\overline{z}+\overline{z}')^2}{\overline{z}\cdot\overline{z}'}=\frac{\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z'}\right)^2}{\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{z'}}=\frac{\dfrac{(z'+z)^2}{(zz')^2}}{\dfrac{1}{zz'}}=\frac{(z'+z)^2}{zz'}=Z$$

2) $|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow |z+i|^2=|z-i|^2$

$\Leftrightarrow (z+i)\overline{(z+i)}=(z-i)\overline{(z-i)}$

$\Leftrightarrow z\overline{z}-iz+i\overline{z}-i^2=z\overline{z}+iz-i\overline{z}-i^2$

4

1) $M(z)\in E_1 \Leftrightarrow |z+5|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow |z-(-5)|=\sqrt{10}$ (on considère le point A d'affixe -5)

$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=\sqrt{10} \Leftrightarrow AM=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow M\in\mathscr{C}_{(A,\sqrt{10})}$ donc $E_1=\mathscr{C}_{(A,\sqrt{10})}$ *où* $A(-5,0)$

2) $M(z)\in E_2 \Leftrightarrow |z-5+3i|=3 \Leftrightarrow |z-(5-3i)|=3 \Leftrightarrow |z_M-z_B|=3$ *où* $B(5-3i)$

$\Leftrightarrow BM=3$

$\Leftrightarrow M\in\mathscr{C}_{(B,3)}$ donc $E_2=\mathscr{C}_{(B,3)}$ où $B(5,-3)$

3) $M(z)\in E_3 \Leftrightarrow |z+5|=|z-i|$

$\Leftrightarrow |z-(-5)|=|z-i|$

$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=|z_M-z_J|$ *où* $z_A=-5$ *et* $z_J=i$

$\Leftrightarrow AM=JM$

E_3 est la médiatrice du segment $[AJ]$ où $A(-5,0)$ et $J(0,1)$.

4) $M(z=x+iy)\in E_4 \Leftrightarrow |iz+4|=6 \Leftrightarrow |i(x+iy)+4|=6 \Leftrightarrow |ix-y+4|=6$

$\Leftrightarrow |(4-y)+ix|=6 \Leftrightarrow \sqrt{(4-y)^2+x^2}=6$

$\Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=6^2$

E_4 est le cercle de centre $K(0,4)$ et de rayon 6.

5) $M(z=x+iy)\in E_5 \Leftrightarrow |\overline{z}+5-i|=|z-4i|$

$$\Leftrightarrow \quad |x - iy + 5 - i| = |x + iy - 4i|$$
$$\Leftrightarrow \quad |(x+5) + i(-y-1)| = |x + i(y-4)|$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+5)^2 + (-y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+5)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$$

E_5 est la droite d'équation x+y+1=0

6)$M(z) \in E_6 \quad \Leftrightarrow \quad$ A(1), M(z) et M'(1+z^2) *sont alignés*

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM}') = 0$$

M(z), A(1) et M'$(1+z^2)$. On pose $z = x + iy$, où x, y des réels.

$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$$\text{aff}(\overrightarrow{AM}) = z_M - z_A = x + iy - 1 = (x-1) + iy \quad \Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{AM'}) = z_{M'} - z_A = (x^2 - y^2) + 2yxi \Rightarrow \overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 1 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2xy) - y(x^2 - y^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2y - 2xy - yx^2 + y^3 = 0 \Leftrightarrow x^2y - 2xy + y^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow y(x^2 + y^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$y = 0$ est l'équation de l'axe des abscisses $(O, \vec{u})$.

$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

Conclusion : $E_6 = (O, \vec{u}) \cup \mathscr{C}_{(I,1)}$ où $I(1,0)$

7) Z est réel $\Leftrightarrow \overline{Z} = Z$

$M(z) \in E_7 \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{z} - 3)(iz + 2)$ est réel

$$\Leftrightarrow \quad \overline{(\overline{z} - 3)(iz + 2)} = (\overline{z} - 3)(iz + 2)$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{\overline{z} - 3})(\overline{iz + 2}) = (\overline{z} - 3)(iz + 2) \Leftrightarrow \quad (z-3)(-i\overline{z} + 2) = (\overline{z} - 3)(iz + 2)$$
$$\Leftrightarrow \quad -iz\overline{z} + 3i\overline{z} + 2z - 6 = iz\overline{z} - 6 - 3iz + 2\overline{z}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2iz\overline{z} - 3i(z + \overline{z}) - 2(z - \overline{z}) = 0 \quad \text{et } z = x + iy \text{ où } x, y \text{ réels}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2i(x^2 + y^2) + 3i(2x) + 2(2iy) = 0 \Leftrightarrow 2i(x^2 + y^2 - 3x - 2y) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x - \frac{3}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

E_7 est le cercle de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ et de centre $H(\dfrac{3}{2}, 1)$.

8) Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{Z} = -Z$

$$\begin{aligned}
M(z)\in E_8 &\Leftrightarrow (\bar{z}-i)(2iz+3) \text{ est imaginaire pur}\\
&\Leftrightarrow \overline{(\bar{z}-i)(2iz+3)} = -(\bar{z}-i)(2iz+3)\\
&\Leftrightarrow (z+i)(-2i\bar{z}+3) = (i-\bar{z})(2iz+3)\\
&\Leftrightarrow \cancel{-2iz\bar{z}} - 2i^2\bar{z} + 3z + \cancel{3i} = 2i^2z + \cancel{3i} \cancel{-2iz\bar{z}} - 3\bar{z}\\
&\Leftrightarrow 2\bar{z} + 3z = -2z - 3\bar{z}\\
&\Leftrightarrow 5z + 5\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0\\
&\Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow z \text{ est imaginaire pur}
\end{aligned}$$

E_8 est l'axe des ordonnées.

5

1) a) $z^2-6z+12=0 \Leftrightarrow (z-3)^2-9+12=0 \Leftrightarrow (z-3)^2+3=0 \Leftrightarrow (z-3)^2=-3$

$\Leftrightarrow (z-3)^2=(i\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow z-3=i\sqrt{3}$ ou $z-3=-i\sqrt{3}$

$z'=3+i\sqrt{3}\ ,\ z''=3-i\sqrt{3}$

b) $z'=3+i\sqrt{3},\ |z'|=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$z'=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$z''=\overline{z'}$ donc $z''=2\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

2) On sait que $|z_A|=OA$ et $|z_B|=OB$ or $|z_A|=|z_B|$ donc OA = OB. Le triangle OAB est donc isocèle de sommet O.

D'autre part, $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA},\vec{u}})+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}})\ [2\pi]$ or $\arg(z_A)\equiv(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}})\ [2\pi]$

et $\arg(z_B)\equiv(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}})\ [2\pi]$ donc

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) &\equiv -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\
&\equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

Le triangle est donc équilatéral.

6

1) a) $z'+1=\frac{5i-z}{z-i}+1=\frac{5i-z+z-i}{z-i}=\frac{4i}{z-i}$

b) $|z'+1|=\left|\frac{4i}{z-i}\right|=\frac{|4i|}{|z-i|}=\frac{4}{|z_M-z_A|}$ d'où $|z'-(-1)|=\left|\frac{4i}{z-i}\right|=\frac{|4i|}{|z-i|}=\frac{4}{|z_M-i|}$

On a $A(i)$ et on pose $I(-1)$.

On obtient donc $|z_{M'}-z_I|=\frac{4}{|z_M-z_A|}$

$M \in \mathscr{C}_{(A,4)} \Leftrightarrow AM = 4$ d'où $|z_M - z_A| = 4$

d'où $|z_{M'} - z_I| = \frac{4}{4} = 1$. Donc $IM' = 1$

Lorsque M appartient au cercle de centre A et de rayon 4, le point M' appartient au cercle de centre I(-1) et de rayon 1.

2) a) $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM'}}) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{5i - z}{z - i}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{z - 5i}{z - i}\right) + \pi\ [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) + \pi\ [2\pi]$$

$$\equiv \pi + \arg(z_M - z_B) - \arg(z_M - z_A)\ [2\pi]$$

$$\equiv \pi + (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) - (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM}})\ \ [2\pi]$$

$$\equiv \pi + (\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{BM}})\ \ [2\pi]$$

b) $z' \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z') \equiv 0\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM'}}) \equiv 0\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) + \pi \equiv 0\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) \equiv -\pi\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et de sens contraires

$\Leftrightarrow M \in [AB] \setminus \{A, B\}$

7

1) a) $z_B = 1 + 3i$ d'où $\bar{z}_B = 1 - 3i$

$$z_{B'} = \frac{4 - z_B}{\bar{z}_B - 4} = \frac{4 - 1 - 3i}{1 - 3i - 4} = \frac{3 - 3i}{-3 - 3i} = \frac{1 - i}{-1 - i} = \frac{-(1 - i)}{1 + i}$$

$$= \frac{-(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-(-2i)}{1 + 1} = i$$

$z_{B'} = i = z_J$ d'où $B' = J$. $z_{B'} = z_J = i$.

b) $N \in \Delta$ et $N \neq A$ donc $x_N = 4$ d'où $z_N = 4 + iy$ et $\bar{z}_N = 4 - iy$ (où $y \in \mathbb{R}$)

$$z_{N'} = \frac{4 - z_N}{\bar{z}_N - 4} = \frac{4 - (4 + iy)}{(4 - iy) - 4} = \frac{-iy}{-iy} = 1$$

$z_{N'} = 1 = z_I$ d'où $N' = I$. (le plan est muni du repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$)

A tout point N de Δ (N distinct de A) on associe le même point I(1).

2) • $|z'| = \left|\frac{4-z}{\overline{z}-4}\right| = \frac{|4-(x+iy)|}{|(x-iy)-4|} = \frac{|(4-x)-iy|}{|(x-4)-iy|} = \frac{\sqrt{(4-x)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}} = 1$

• Interprétation : $M'(z')$ et $|z'| = 1$ donc $OM' = 1$ d'où $M' \in \mathscr{C}_{(O,1)}$.

3) Pour $z \neq 4$, $\frac{z'-1}{z-4} = \frac{\frac{4-z}{\overline{z}-4}-1}{z-4} = \frac{\frac{4-z-\overline{z}+4}{\overline{z}-4}}{z-4} = \frac{8-z-\overline{z}}{(\overline{z}-4)(z-4)}$

$\frac{z'-1}{\overline{z}-4} = \frac{8-(z+\overline{z})}{z\overline{z}+16-4(z+\overline{z})}$ or $z+\overline{z} = 2\Re e(z) \in \mathbb{R}$ d'où $8-(z+\overline{z})$ est un réel.

$z\overline{z} \in \mathbb{R}_+^*$ et $(z+\overline{z}) \in \mathbb{R}$ donc $z\overline{z}+16-4(z+\overline{z})$ est un réel non nul (car $z \neq 4$)

Il en résulte que $\frac{z'-1}{\overline{z}-4} \in \mathbb{R}$ donc $\frac{z'-1}{\overline{z}-4} = k$ où k est un réel.

b) Déduction :

$z'-1 = z_{M'} - z_I = \text{aff}(\overrightarrow{IM'})$ et $z-4 = z_M - z_A = \text{aff}(\overrightarrow{AM})$.

$\frac{z'-1}{z-4} = k$ et $k \in \mathbb{R} \Rightarrow z'-1 = k(z-4) \Rightarrow \text{aff}(\overrightarrow{IM'}) = k \cdot \text{aff}(\overrightarrow{AM})$

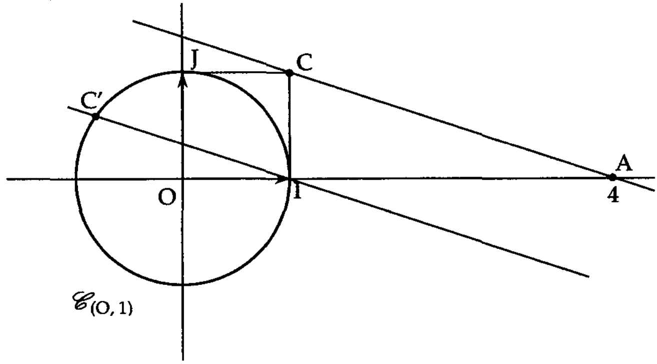
$\Rightarrow \text{aff}(\overrightarrow{IM'}) = \text{aff}(k \cdot \overrightarrow{AM})$

Il en résulte que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{AM}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

4) a) $z_C = 1+i$, C′ est le point associé à C.

On a $|z'| = 1$ donc $|z_{C'}| = 1$ d'où $C' \in \mathscr{C}_{(O,1)}$ et d'après ce qui précède $\overrightarrow{IC'}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires .

C′ est le deuxième point d'intersection du $\mathscr{C}_{(O,1)}$ et de la droite parallèle à (AC) et passant par I.



8

1) • $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\Re e(z_1) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $\Im m(z_1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$|z_1| = \sqrt{\dfrac{6}{4}+\dfrac{2}{4}} = \sqrt{2}$. On pose $\arg(z_1) = \theta_1$.

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi] \text{ donc } z_1 = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$$

• $z_2 = 1-i$. $\Re e(z_2) = 1$ et $\Im m(z_2) = -1$

$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. On pose $\arg(z_2) = \theta_2$.

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_2 \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi] \text{ donc } z_2 = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

2) On en déduit $|u| = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

$$\arg\frac{z_1}{z_2} \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

d'où $\arg(u) \equiv \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ et $u = \cos(\dfrac{\pi}{12}) + i\sin(\dfrac{\pi}{12})$.

3) Ecriture de u sous forme algébrique :

$$u = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}-i^2\sqrt{2}}{4}$$

$$u = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

4) Déduction de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

On a trouvé : $u = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $u = \cos(\dfrac{\pi}{12}) + i\sin(\dfrac{\pi}{12})$

Il en résulte : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5) a) $f(x) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x$

$$f(x) = 4\cos(\frac{\pi}{12})\cos x + 4\sin(\frac{\pi}{12})\sin x$$
$$= 4(\cos(\frac{\pi}{12})\cos x + \sin(\frac{\pi}{12})\sin x) = 4\cos(x - \frac{\pi}{12})$$

b) Résolution de l'équation $f(x) = 2\sqrt{2}$

On rappelle : $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$f(x) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4\cos(x - \frac{\pi}{12}) = 2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4})$$
$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{2} \\ x \in \left]-\pi, \pi\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x \in \left]-\pi, \pi\right] \end{cases}$$

Dans l'intervalle $\left]-\pi, \pi\right]$, les solutions sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{6}$

9

- $z_1 = 5(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow z_1 = 5\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})\right)$

Rappel : $\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \end{cases}$

- $z_2 = -5(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}) \Rightarrow z_1 = 5\left(-\cos(\frac{4\pi}{9}) - i\sin(\frac{4\pi}{9})\right)$

$$z_2 = 5\left(\cos(\pi + \frac{4\pi}{9}) + i\sin(\pi + \frac{4\pi}{9})\right) = 5\left(\cos(\frac{13\pi}{9}) + i\sin(\frac{13\pi}{9})\right)$$
$$z_2 = 5\left(\cos(-\frac{5\pi}{9}) + i\sin(-\frac{5\pi}{9})\right)$$

Rappel : $\begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \end{cases}$

A retenir :

Si $z = x(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $x \in \mathbb{R}_-^*$ alors $z = |x|(\cos(\pi + x) + i\sin(\pi + x))$

- $z_3 = 2(\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12})$. On a : $\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12} = i(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12})$

$z_3 = 2i\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, on pose $u = 2i$ et $v = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$

$u = 2i$ donc $|u| = 2$ et $\arg(u) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$v = 1\left(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right)$

$z_3 = u \cdot v = \left[2, \frac{\pi}{2}\right]\left[1, -\frac{\pi}{12}\right] = \left[2\times 1, \frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{12})\right] = \left[2, \frac{5\pi}{12}\right]$

Conclusion : $|z_3| = 2$ et $\arg(z_3) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$.

$z_4 = 1 + i\tan(\frac{\pi}{5}) = 1 + i \times \frac{\sin(\frac{\pi}{5})}{\cos(\frac{\pi}{5})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5})}{\cos(\frac{\pi}{5})} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{5})}(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5}))$

$|z_4| = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}} > 0$ et $\arg(z_4) = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

10

1) • $z_1 = 3 - i\sqrt{3}$ $\quad (\Re e(z_1) = 3$ et $\Im m(z_1) = -\sqrt{3})$

$|z_1| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. On pose $\theta_1 = \arg z_1$.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$$

• $z_2 = -3 - 3i\sqrt{3}$ $\quad (\Re e(z_2) = -3$ et $\Im m(z_2) = -3\sqrt{3})$

$|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

On pose $\theta_2 = \arg(z_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_2 = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$\theta_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ or $\frac{4\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3}$ d'où $\theta_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$z_2 = 6\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})\right)$$

2) $z_3 = z_1 + z_2 = (3 - i\sqrt{3}) + (-3 - 3i\sqrt{3}) = -4i\sqrt{3}$

z_3 est un nombre imaginaire pur dont $\Im m(z_3) = -4\sqrt{3}$.

$|z_3| = 4\sqrt{3}$ et $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

3) a) $z_C = -4i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} |z_C| = 4\sqrt{3} = 2|z_A| \text{ donc } OC = 2OA \\ C \in (O, \vec{v}) \text{ et } y < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_A = 3 \text{ donc } A \in \Delta : x = 3 \\ \arg z_A = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OA}}) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\begin{cases} x_B = -3 \text{ donc } B \in \Delta' : x = -3 \\ \arg z_B = -\frac{2\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

b) Un rectangle est un parallélogramme ayant un angle droit.

- Montrons que OBCA est un parallélogramme :

  $\text{aff}(\overrightarrow{OA}) = z_A = z_1$

  $\text{aff}(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = z_3 - z_2 = z_1$ (car $z_3 = z_1 + z_2$)

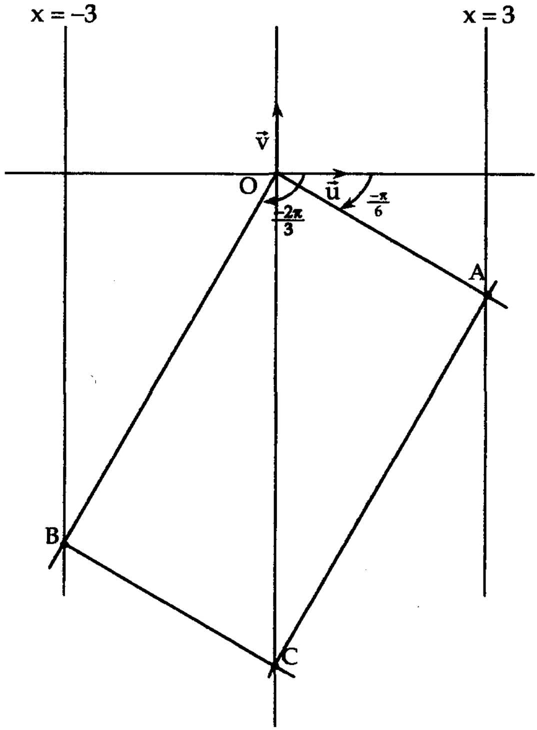
  d'où $\text{aff}(\overrightarrow{OA}) = \text{aff}(\overrightarrow{BC})$. Il en résulte $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ d'où le quadrilatère OBCA est un parallélogramme. (1)

- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \arg(\frac{z_B}{z_A}) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$$= -\arg z_A + \arg z_B + 2k'\pi, \ k' \in \mathbb{Z}$$
$$= -\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) + 2k''\pi, \ k'' \in \mathbb{Z}$$
$$= -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

L'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est droit. (2)

D'après (1) et (2), on conclut que le quadrilatère OBCA est un rectangle.



11

1) a) • $z_1 = -2$, z_1 est un réel donc $|z_1| = |-2| = 2$ et $\arg(z_1) \equiv \pi\ [2\pi]$

$$z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

• $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

Un argument de z_2 est tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

• $z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ donc z_3 et z_2 sont conjugués d'où $|z_3| = |z_2|$ et $\arg(z_3) \equiv -\arg(z_2)\ [2\pi]$ donc

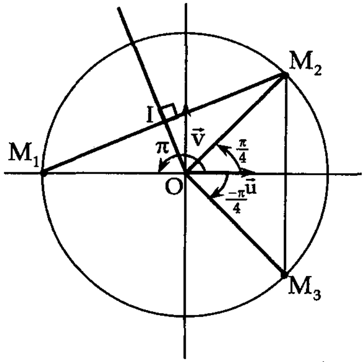
$$|z_3| = 2 \text{ et } \arg(z_3) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$z_3 = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

b) On a : $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ et $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ donc :

$$OM_1 = OM_2 = OM_3 = 2$$

Il en résulte : M_1, M_2 et M_3 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.



2) a) I est le milieu de $[M_1M_2] \Leftrightarrow z_I = \dfrac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2} = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) • $OI = |z_I| + \left|\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{(-2+\sqrt{2})^2}{4} + \dfrac{(\sqrt{2})^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{8-4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

• Evaluation de $(\vec{u} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OI})$: $(\vec{u} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OI}) \equiv (\vec{u} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OM_2}) + (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OI})$ $[2\pi]$

Le triangle OM_1M_2 est isocèle et I est le milieu de $[M_1M_2]$ donc (OI) porte la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ et par suite

$(\overrightarrow{OM_2} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OI}) \equiv \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_1})$ $[2\pi]$

or $(\overrightarrow{OM_2} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OM_1}) \equiv (\overrightarrow{OM_2} \,\widehat{,}\, \vec{u}) + (\vec{u} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OM_1})$ $[2\pi]$

$$\begin{aligned}
&\equiv -(\vec{u} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OM_2}) + (\vec{u} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OM_1}) && [2\pi] \\
&\equiv -\arg(z_2) + \arg(z_1) && [2\pi] \\
&\equiv \frac{3\pi}{4} && [2\pi]
\end{aligned}$$

d'où $(\overrightarrow{OM_2} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OI}) \equiv \dfrac{3\pi}{8}$ $[2\pi]$ d'où $(\vec{u} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OI}) \equiv \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{8}$ $[2\pi]$

$$(\vec{u} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{5\pi}{8} \ [2\pi]$$

c) • $|z_I| = OI$ d'où $|z_I| = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

• $\arg(z_I) \equiv (\vec{u} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{OI})$ $[2\pi]$ d'où $\arg(z_I) \equiv \dfrac{5\pi}{8}$ $[2\pi]$.

3) $z_I = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos(\dfrac{3\pi}{8}) + i\sin(\dfrac{3\pi}{8})\right)$

donc $\begin{cases} \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\dfrac{5\pi}{8} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ \sin\dfrac{5\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{5\pi}{8} = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \sin\dfrac{5\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{cases}$

12

1) a) • $z_A = \sqrt{3} + i$. $|z_A| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$. Soit θ un argument de z_A :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

$$|z_A| = 2 \text{ et } \arg(z_A) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

• $z_B = \sqrt{3} - i$ donc z_A et z_B sont conjugués donc

$|z_A| = |z_B|$ et $\arg(z_A) - \arg(z_B)\ [2\pi]$

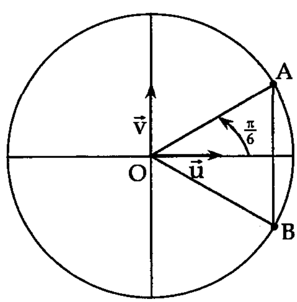
$$|z_B| = 2 \text{ et } \arg(z_B) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

b) Figure :

Représentation de A :

$|z_A| = 2$ donc $OA = 2$ d'où A $\mathscr{C}_{(O,2)}$ et $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Représentation de B : z_B et z_A sont conjugués donc $B = S_{(O,\vec{u})}(A)$.



2) a) Module et argument de $\dfrac{z_A}{z_B}$:

- $\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right| = \dfrac{|z_A|}{|z_B|} = \dfrac{2}{2} = 1$
- $\arg(\dfrac{z_A}{z_B}) \equiv \arg(z_A) - \arg(z_B)\ [2\pi]$ d'où $\arg(\dfrac{z_A}{z_B}) \equiv \underbrace{\dfrac{\pi}{6} - (-\dfrac{\pi}{6})}_{\frac{\pi}{3}}\ [2\pi]$

$$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1 \text{ et } \arg(\frac{z_A}{z_B}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

b) Ecrire le nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.

$\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right| = 1 \text{et} \arg(\dfrac{z_A}{z_B}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ d'où $\dfrac{z_A}{z_B} = 1\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right) = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Montrons qu'il existe une rotation de centre O, d'angle à préciser qui transforme A en B.

On a : OA = OB, et les points O, A, B sont trois points distincts du plan.

Donc il existe une rotation de centre O qui transforme A en B.

L'angle de cette rotation est $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}) \quad [2\pi]\\ &\equiv -(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}) \quad [2\pi]\\ &\equiv -\arg(z_A) + \arg(z_B) \quad [2\pi]\\ &\equiv -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

On obtient alors : $\begin{cases} OA = OB \\ (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ d'où B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

3) a) $S_O(A) = C$ donc O, l'origine du repère, est le milieu de $[AC]$

d'où $z_C = -z_A = -\sqrt{3} - i$.

b)

$$D = t_{\overrightarrow{BC}}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B$$
$$\Leftrightarrow z_D = z_A + z_C - z_B$$
$$\Leftrightarrow z_D = -z_B = -\sqrt{3} + i$$

c) • ABCD est un parallélogramme car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (1).

• $\text{aff}(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = -2\sqrt{3}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v})}$ d'où $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et par suite $(BC)//(O,\vec{u})$;

$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = \sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i = -2i$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v})}$ d'où $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et par suite $(AB)//(O,\vec{v})$;

et puisque $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $(BC) \perp (AB)$ (2).

(1) et (2) se traduit par : ABCD est un rectangle.

13

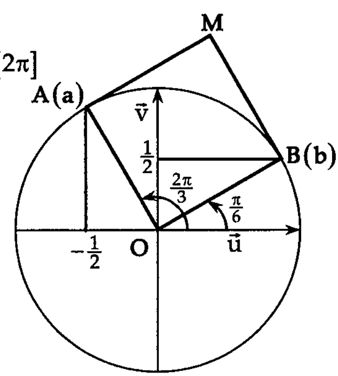
1) a) • $a = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad |a| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$. Soit α un argument de a.

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{-1}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

• $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $\quad |b| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$. Soit α' un argument de b

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha' &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha' &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

b)



2) a) On a : $b(1+i)=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)(1+i)=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i(\frac{\sqrt{3}+1}{2})$

$$z=a+b=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Donc $z=b(1+i)$

$\begin{cases}|b|=1\\ \arg b\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi]\end{cases}$ et $\begin{cases}|1+i|=\sqrt{2}\\ \arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}\,[2\pi]\end{cases}$ (car $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$)

et puisque $z=b(1+i)$ alors :

* $|z|=|b||1+i|=1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$
* $\arg(z)\equiv\arg(1+i)+\arg b\,[2\pi]$ et puisque $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ alors

$\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ d'où $\arg(z)\equiv\frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$

$$z=\sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})$$

b) Montrer que OBMA est un carré. $z=a+b$ et $M(z)$

- **Pour le parallélogramme :**

  On montre que $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BM}$ par passage aux affixes

  $\text{aff}(\overrightarrow{OA})=z_A=a$; $\text{aff}(\overrightarrow{BM})=z_M-z_B=(a+b)-b=a$

  $\text{aff}(\overrightarrow{OA})=\text{aff}(\overrightarrow{BM})$

  d'où $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BM}$ donc **OAMB est un parallélogramme (1)**

- **Angle droit :**

  $\text{aff}(\overrightarrow{OA})=a=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

  $\text{aff}(\overrightarrow{OB})=b=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

  $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{-1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=0$

  d'où **$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux (2)**

- **Distances :**

  $\left.\begin{array}{l}OA=|z_A|=|a|=1\\ OB=|z_B|=|b|=1\end{array}\right\}\Rightarrow$ **OA = OB (3)**

les résultats (1), (2), (3) montrent que OAMB est un carré.

- $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb'$

Remarque :

- **Pour le parallélogramme :** Image de la somme de deux complexes
  $A(a), B(b)$ et $M(a+b)$

  $aff(A) + aff(B) = aff(M)$

  $aff\left(\overrightarrow{OA}\right) + aff\left(\overrightarrow{OB}\right) = aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$ ce qui donne $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$

  par conséquent **OAMB est un parallélogramme (1)**

b) Forme trigonométrique de z

- **Module de z :** $|z| = OM$
  On a trouvé OBMA un lcarré donc on peut calculer OM.
  D'après le théorème de Pythagore : puisque OAM est rectangle en A :
  $OM^2 = OA^2 + OB^2 = 1 + 1 = 2$ donc $OM = \sqrt{2}$ soit $|z| = \sqrt{2}$

- **Argument de z :** calculer $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$

  $\arg(z_M) \equiv \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) [2\pi]$

  or OAMB est un carré donc (OM) porte la bissectrice intérieure de l'angle droit $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ d'où $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

  $$\begin{aligned} \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) &\equiv \underbrace{\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right)}_{\frac{\pi}{6}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}\right)}_{\frac{\pi}{4}} [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ &\equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$

  ainsi $\arg(z) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

  Conclusion : $z = \sqrt{2}\ (\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$

3) **Déduction :** $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

Identifier les deux écritures : algébrique et trigonométrique :

$$\left.\begin{array}{l} z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \\ z = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \cos\frac{5}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{5}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

14

1) $|z_A| = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Soit θ un argument de z_A :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$|z_A| = 5\sqrt{2} \quad \text{et } \arg(z_A) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

2) a) z_B est de module égal $5\sqrt{2}$ et d'argument égal à $-\frac{7\pi}{12}$.

- $OA = OB$
- $(\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\vec{u}) + (\vec{u}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$

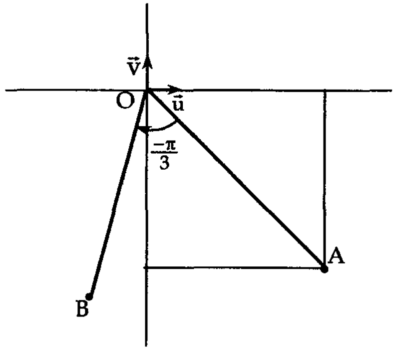
$$\begin{aligned} &\equiv -(\vec{u}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OA}) + (\vec{u}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB})\ [2\pi] \\ &\equiv -\arg(z_A) + \arg(z_B)\ [2\pi] \\ &\equiv -(-\tfrac{\pi}{4}) + (-\tfrac{7\pi}{12})\quad [2\pi] \\ &\equiv -\tfrac{\pi}{3}\quad [2\pi] \end{aligned}$$

On a alors : $\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$ B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

b) Construction de B :

$R_{(O,-\frac{\pi}{3})}(A) = B$ donc le triangle OAB est équilatéral. De plus

$(\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc le triangle OAB est équilatéral indirect.



c) Montrons que $z_B = z_A \cdot z_C$

- $|z_A| = 5\sqrt{2}$ et $\arg(z_A) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
- $|z_B| = 5\sqrt{2}$ et $\arg(z_B) \equiv -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$.
- $z_C = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $|z_C| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

Soit θ un argument de z_C : $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$$|z_C| = 1 \text{ et } \arg(z_C) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

- ♦ $|z_A \cdot z_C| = |z_A| \cdot |z_C| = 5\sqrt{2} \times 1 = 5\sqrt{2}$ et $|z_B| = 5\sqrt{2}$
- ♦ $\arg(z_A \cdot z_C) \equiv \arg(z_A) + \arg(z_C)\ [2\pi]$ d'où $\arg(z_A \cdot z_C) \equiv -\frac{\pi}{4} + (-\frac{\pi}{3}) = -\frac{7\pi}{12}$

  et $\arg(z_B) \equiv -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

Conclusion : $\left.\begin{array}{l} |z_A \cdot z_C| = |z_B| \\ \arg(z_A \cdot z_C) \equiv \arg(z_B)\ [2\pi] \end{array}\right\} \Leftrightarrow z_A \cdot z_C = z_B$

A retenir : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$

b) Ecriture algébrique de z_B :

$$z_B = z_A \cdot z_C = \frac{(5-5i)(1-i\sqrt{3})}{2} = \frac{5-5i\sqrt{3}-5i+5i^2\sqrt{3}}{2}$$

$$z_B = \frac{(5-5\sqrt{3})}{2} + i\frac{-5-5\sqrt{3}}{2}$$

c) $z_B = 5\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{7\pi}{12})\right) = 5\sqrt{2}\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i5\sqrt{2}\sin(-\frac{7\pi}{12})$

et $z_B = \frac{5(1-\sqrt{3})}{2} + i\frac{-5(1+\sqrt{3})}{2}$

donc $5\sqrt{2}\cos(-\frac{7\pi}{12}) = \frac{5(1-\sqrt{3})}{2}$ et $5\sqrt{2}\sin(-\frac{7\pi}{12}) = \frac{5(1+\sqrt{3})}{2}$

d'où $\begin{cases} \cos(-\frac{7\pi}{12}) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin(-\frac{7\pi}{12}) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

15

1) a) $OA = |z_A| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

b) $z_A = 1+i$ donc $A(1,1)$.

$z_M = \sqrt{2} + z_A = \sqrt{2} + 1 + i$.

$y_M = y_A$. $x_M = \sqrt{2} + 1 = OA + 1$

2) $|z_M| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

3) a) $z_A^{\ 2} = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$z_A^{\ 2} = 2i$

$$\begin{aligned} z_M^{\ 2} &= (\sqrt{2} + z_A)^2 = 2 + 2\sqrt{2}\,z_A + z_A^{\ 2} \\ &= 2 + 2\sqrt{2}(1+i) + 2i \\ &= 2 + 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} + 2) \\ &= (2 + 2\sqrt{2})(1+i) \\ &= (2 + 2\sqrt{2})z_A \end{aligned}$$

b) $\arg z_M^{\ 2} \equiv \arg(2 + 2\sqrt{2}) + \arg z_A \quad [2\pi]$

or $2 + 2\sqrt{2}$ est un réel positif donc il a pour argument $0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

et $\arg(z_M^{\ 2}) \equiv \arg(z_A) \quad [2\pi]$

Déterminons $\arg(z_A)$. On pose $\alpha = \arg(z_A)$. On a calculé $|z_A| = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

Il en résulte : $\arg(z_M{}^2)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. d'où $2\arg(z_M)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Donc $\arg(z_M)=\frac{\pi}{8}+k\pi$. On pose $\theta=\arg(z_M)$.

Puisque $\begin{cases}\Re e(z_M)>0\Rightarrow\cos\theta>0\\ \Im m(z_M)>0\Rightarrow\sin\theta>0\\ \theta=\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ alors $\theta\equiv\frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

Conclusion : $\arg(z_M)\equiv\frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

c) $\left.\begin{array}{l}\arg(z_M)\equiv\frac{\pi}{8}\ [2\pi]\\ |z_M|=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow z_M=\sqrt{4+2\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$

16 1) $z=\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$z^2=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+2i(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$=4\sqrt{12}+2i\,(6-2)=4\sqrt{12}+8i=8\left(\sqrt{3}+i\right)$

2) $z^2=8(\sqrt{3}+i)$

$|z^2|=8\times\sqrt{3+1}=16$.

$z^2=16(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=16(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ donc $\arg(z^2)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

3) $|z^2|=8\times\sqrt{3+1}=16$ donc $|z|=4$

$\arg(z^2)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $2\arg(z)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ d'où $\arg(z)=\frac{\pi}{12}+k\pi$

donc $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $\arg(z)\equiv-\frac{11\pi}{12}\ [2\pi]$

Soit α un argument de z.

$\left.\begin{array}{l}\Re e(z)=\sqrt{6}+\sqrt{2}>0\ \Rightarrow\cos\alpha>0\\ \Im m(u)=\sqrt{6}-\sqrt{2}>0\Rightarrow\sin\alpha>0\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{12}$ D'où $z=4(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

4) Forme trigonométrique : $z=4(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

Forme algébrique : $z=\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

donc $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

17 I) 1) $z^2=-\frac{3}{4}=\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow z=i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *ou* $z=-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $S_{\mathbb{C}}=\left\{i\frac{\sqrt{3}}{2},-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

2) $(E):z^2-3z+3=0 \Leftrightarrow \left(z-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow z-\frac{3}{2}=i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ou $z-\frac{3}{2}=-i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ *ou* $z=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$; $S_{\mathbb{C}}\left\{\frac{3+i\sqrt{3}}{2};\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

II) 1) a- $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

b- $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv \arg Z\,[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

c)- $AB=|Z|=1$ donc $B\in C_{(A,1)}$

III) 1) $\bar{z}+2=z_B\bar{z} \Leftrightarrow \bar{z}(1-z_B)=-2 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{2}{z_B-1}=\frac{2}{Z}=\frac{2}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$

$\bar{z}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2) $\bar{z}(z'-1)=\bar{z}\left(\frac{\bar{z}+2-\bar{z}}{\bar{z}}\right)=2$

3) $|\bar{z}|.|z'-1|=2 \Leftrightarrow OM.AM'=2 \Rightarrow OM=2 \Rightarrow M\in C_{(O,2)}$

Dénombrement

I/ P-uplet :

Définition

- Soit E un ensemble non vide et p est un entier naturel non nul.
  On appelle p-uplet d'éléments de E toute écriture de la forme $(a_1, \ldots\ldots, a_p)$ où $a_i \in E$ pour tout $1 \leq i \leq p$.
- Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p\,\text{fois}}$ est l'ensemble des p-uplet $(a_1, \ldots\ldots, a_p)$ tels que $a_i \in E$. On le note E^p.
- $\text{card}(E^p) = (\text{card}(E))^p$.
- Un p-uplet d'éléments de E est une liste ordonnée de p éléments de E, deux à deux distincts ou non.
- Lorsque $p = 2$, un 2-uplet est un **couple.**
  Lorsque $p = 3$, un 3-uplet est un **triplet.**

II/ Arrangements

Définition

E est un ensemble de n éléments et p est un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$.

- Un **arrangement** de p éléments d'un ensemble E est un p-uplet d'éléments **deux à deux distincts** de E.
- Un arrangement de p éléments d'un ensemble de n éléments est dit : « **arrangement de n éléments p à p** »

Nombre d'arrangements : Théorème

- Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de n éléments est $A_n^p = n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
- *Remarque :* Pour calculer A_n^p il suffit, à partir de n, de multiplier p facteurs, en diminuant de 1 à chaque fois.
  Exemple : $A_{30}^4 = 30 \times 29 \times 28 \times 27 = 657720$.

III/ Permutations

⇨ ***Définition : permutations***

Soit E un ensemble de n éléments. On appelle permutation de E tout arrangement de n éléments de E.

⇨ ***Définition : factorielle***

Soit n un entier naturel.

On dit que $n!$ (qui se lit « factorielle n ») l'entier naturel défini par :

- pour $n \neq 0$, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$;

- pour $n = 0$, $0! = 1$.

Exemple : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

⇨ ***Théorème***

Le nombre de permutations de n éléments est $A_n^n = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$

III/ Combinaisons

⇨ ***Définition***

Soit n un entier et p un entier $0 \leq p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble E à n éléments toute partie à p éléments de E.

⇨ ***Nombre de combinaisons : Théorème***

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!}$

Exemple : $C_{40}^8 = \dfrac{A_{40}^8}{8!} = \dfrac{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35 \times 34 \times 33}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 76904685$

⇨ ***Propriétés de C_n^p***

- Pour tout entier naturel n : $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$
- Pour tout entier $n \geq 1$: $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

- Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$: $C_n^{n-p} = C_n^p$

  Exemple : $C_8^7 = C_8^1 = 8$

- Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$: $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

  Calcul rapide des C_n^p : ***Triangle de Pascal***

$$\begin{array}{c} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} \\ \downarrow \\ C_n^p \end{array}$$

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	

IV/ Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

⇨ ***Théorème***

Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments avec $p \in \mathbb{N}^*$, dans un ensemble à n éléments avec $n \in \mathbb{N}^*$ est n^p.

V/ Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux réels et n un entier naturel non nul, on a :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^p a^{n-p} b^p + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Application : Nombre de parties d'un ensemble

Le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments avec $n \in \mathbb{N}^*$ est 2^n

VI/ Tableau récapitulatif

Soient p et n deux entiers naturels. On tire p éléments d'un ensemble de n éléments.

Nature du tirage	Tirage simultané	Tirages successifs avec remise	Tirages successifs sans remise
Un tirage possible	une combinaison	une application	un arrangement
L'ordre	n'intervient pas	intervient	intervient
Nombre de tirages possibles	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ $0 \leq p \leq n$	n^p	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ $0 \leq p \leq n$

Remarque :

Dans le cas des tirages successifs sans remise, si $n = p$, un tirage est appelé permutation de n éléments et le nombre de tirages possibles est $n!$

EXRCICES

1

Un sac contient 15 boules dont 6 rouges et 4 vertes et 5 blanches.

1) Un joueur tire simultanément du sac 4 boules.
   De combien de façons peut-il :
   a) tirer exactement une boule rouge ?
   b) tirer au moins une boule verte ?
   c) tirer 4 boules toutes de même couleur ?

2) Un joueur tire successivement et sans remise 4 boules.
   De combien de façons peut-il :
   a) avoir la première boule tirée rouge ?
   b) tirer au moins une boule verte ?
   c) tirer une seule boule rouge ?

2 Un sac contient : cinq boules rouges numérotées 0, 0, 1, 2, 2
trois boules blanches numérotées 0, 1, 2
deux boules jaunes numérotées 0, 4

1) On tire simultanément trois boules du sac.
   Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :
   a) obtenir trois boules de même couleur.
   b) obtenir une seule boule jaune.
   c) la somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est égale à 5.
   d) Le produit des trois numéros obtenus est nul.
   e) obtenir une seule boule rouge et une seule boule portant le numéro 0.
2) On tire successivement sans remise quatre boules du sac.
   Dénombrer les tirages donnant :
   a) deux boules blanches.
   b) au moins une boule jaune
   c) la somme des 4 numéros inscrits sur les boules tirées est égal à 3.
   d) la première boule tirée est rouge et la deuxième porte le numéro 0.

3) On répartit les dix boules dans trois urnes u_1, u_2, u_3.

   De combien de manières peut-on les placer dans chacun des cas suivants :

   a) les boules de même couleur sont placées dans une seule urne.

   b) Une seule urne est vide.

   c) aucune urne ne reste vide.

3 Un code d'accès est composé de 4 chiffres choisis parmi 0 et 1. Combien de codes peut-on composer ?

4 Un mot de 3 lettres est tout assemblage ordonné de trois lettres de l'alphabet, une même lettre pouvant être utilisée plusieurs fois (un mot n'a donc pas nécessairement de sens). En utilisant les lettres du mot TUNIS :

1) combien peut on écrire de mots de trois lettres ?
2) combien peut on écrire de mots de trois lettres distinctes?
3) combien peut-on écrire de mots de trois lettres distinctes dont la deuxième lettre est la lettre u ?

5 On lance un dé parfait (non truqué), numéroté de 1 à 6, deux fois de suite. Chaque résultat est un couple (a,b) où a est le numéro inscrit sur la face supérieur du dé au 1er lancer et b celui du 2ème lancer.

1) A l'aide d'un tableau donner tous les couples (a,b) possibles.
   Quel est le nombre de réalisations possibles ?
2) Combien y a-t-il de réalisations où les deux lancers ont donné
   a) le même numéro ?
   b) le résultat du premier lancer est strictement supérieur au résultat du second.
3) a) la somme des points marqués est égale à 6.

   b) la somme des points marqués est impaire.

6

1) Combien y a –t-il de nombres entiers écrits avec trois chiffres distincts pris dans l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

2) En utilisant les chiffres de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, combien y a-t-il de nombres entiers de trois chiffres dans lesquels un chiffre est répété deux fois ?

3) En utilisant les chiffres de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ combien y a –t-il de nombres entiers de quatre chiffres qui contiennent au moins un des chiffres 5 et 7 ?

7

1) Combien de nombres entiers de 8 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2) Combien y a-t-il de ces nombres où les chiffres 6, 7, 8 sont toujours ensemble dans cet ordre.
3) Combien y a-t-il de ces nombres où les chiffres 6, 7, 8 sont toujours ensemble dans un ordre quelconque.

8 Un jeu est constitué d'une boîte contenant quatre cases et de six boules toutes de couleurs différentes, chaque case ne pouvant contenir qu'au plus deux boules. Déterminer le nombre de répartitions possibles.

9 On prépare quatre colis différents et quatre étiquettes portant le nom de quatre destinataires. Les destinataires sont désignés par les lettres A, B, C, D et les colis correspondants sont désignés par les lettres C_A, C_B, C_C et C_D.

On colle au hasard une étiquette sur chaque colis.

Quel est le nombre de cas dans lesquels :

a) les quatre colis arrivent à leurs destinataires ?
b) le destinataire A est le seul à recevoir son colis ?
c) un destinataire seulement reçoit son colis ?
d) deux destinataires seulement reçoivent leurs colis ?
e) aucun des destinataires ne reçoit son colis ?

10 La fabrication d'une pièce nécessite de passer celle-ci sur quatre machines A, B, C et D. Dénombrer les trajets possibles dans chacun des cas suivants :

a) L'ordre de passage est indifférent.
b) La pièce doit d'abord passer par A.
c) La pièce doit passer en B avant C et D.

11 On veut colorier six bandes dans un rectangle.

Chacune des bandes est coloriée avec couleur choisie parmi l'une des cinq couleurs suivantes : rouge, jaune, vert, bleu, blanc. Les couleurs sont choisies de telle sorte que deux bandes voisines soient toujours de couleurs différentes. Dénombrer le nombre de coloriages possibles.

12 Trois personnes partagent entre eux 5 morceaux de gâteaux.

I/ On suppose que chacune des trois personnes choisit un morceau pour le manger. Combien y a-t-il de choix possibles.

II/ On suppose que chacune de trois personnes choisit un et le mange. Deux d'entre eux se partagent les deux gâteaux restants.
Combien y a t-il de répartitions possibles ?
On ne tiendra pas compte de l'ordre dans lequel les gâteaux sont mangés par celles des personnes qui en mangent deux.

13

I/ Un portemanteaux comporte trois patères alignés. Cinq personnes laissent leur manteau. Deux manteaux au plus pouvant être accrochée au même portemanteau.
Combien y a-t-il de dispositions possibles des manteaux.
(s'il y a deux manteaux sur un même portemanteau, l'ordre d'accrochage de ces manteaux est indifférent).

II/ Un portemanteaux comporte cinq patères alignées.
Sans mettre deux manteaux l'un sur l'autre, combien y a-t-il de dispositions possibles, pour :

a) trois manteaux ?
b) cinq manteaux ?

14 En informatique, on appelle octet une liste de 8 éléments pris dans l'ensemble $\{0,1\}$.

1) Combien y a –t-il d'octets possibles ?
2) Combien y a-t-il d'octets commençant par un 0 et se terminant par un 0 ?
3) Combien y a-t-il d'octets contenant exactement quatre 1.

15 On jette trois dés de couleurs différentes rouge, vert et bleu. Les faces sont de chacun de ces dés sont numérotées de 1 à 6.

1) combien y a-t-il de résultats possibles ?
2) Dans combien de cas obtient-on deux résultats pairs exactement ?
3) Dans combien de cas obtient-on de résultats tous distincts ?
4) Dans combien de cas obtient-on trois résultat égaux ?
5) Dans combien de cas obtient-on deux résultats égaux exactement ?

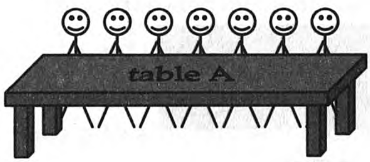
16

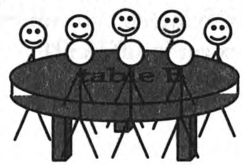
Un élève dispose de 30 livres classifiés en 6 disciplines : 10 livres de Mathématiques, 6 livres de Sciences physiques, 5 livres de Sciences naturelles et 4 livres d'Informatiques, 3 livres d'Anglais et 2 livres de Philosophie.
Il désire ranger ses livres dans sa bibliothèque de telle sorte que les ouvrages traitant la même discipline se trouvent côte à côte.
De combien de façon peut-il faire son classement ?

17 De combien de façons peut-on aligner 5 personnes A, B, C, D et E sachant que A ne peut être en dernière position, ni E en première ?

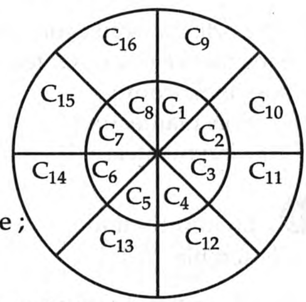
18

1) Dénombres les dispositions de 7 personnes alignés le long d'une table A.
2) Dénombrer les dispositions de 7 personnes autour d'une table ronde.





19



On veut colorier la figure ci-contre.

I/ De combien de façons peut-on le faire dans chacune des conditions suivantes :

a) chaque case peut être au choix noire, blanche ou rouge ;
b) 8 cases doivent être noires et 8 blanches ;
c) 3 cases doivent être noires, 5 blanches et 8 rouges ;
d) chacune des cases intérieures au petit cercle peut être au choix noire ou blanche et chacune des cases de la couronne extérieure peut être au choix rouge ou jaune ;
e) on dispose de 8 couleurs : chacune des cases intérieures est d'une couleur différente ; il en est de même pour chacune des cases extérieures.

II) On dispose de 8 couleurs différentes mais on veut en employer au maximum 3, chaque case pouvant être de l'une des trois couleurs. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?

20 Montrer que :

1) Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $3 \leq p \leq n$: $C_n^p = C_{n-3}^p + 3C_{n-3}^{p-1} + 3C_{n-3}^{p-2} + C_{n-3}^{p-3}$
2) Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n-k$ avec $k \in \{1, 2, ..., n-p\}$:

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_{n-1}^p + C_{n-2}^p + \dots\dots + C_{n-k}^p + C_p^p$$

21 Résoudre dans $\mathbb{N}$:

1) $C_n^3 = 4C_n^4$
2) $C_n^2 + C_n^3 = 2n^2 - 2n$
3) $2A_n^3 + A_{2n}^3 = 32n(n-1)$

22

1) Montrer que :
   $C_n^m . C_{n-m}^{p-m} = C_p^m C_n^p$ avec $0 \leq m \leq p \leq n$
2) En déduire que :
   $S_p = C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_{n-1}^{p-1} + C_n^2 C_{n-2}^{p-2} + \dots\dots + C_n^p C_{n-p}^0 = 2^p C_n^p$
3) Résoudre alors dans $\mathbb{N}$:
   $C_n^0 . C_n^2 + C_n^1 . C_{n-1}^1 + C_n^2 . C_{n-2}^0 = n^2 + 4n - 5$

23

1) Montrer que pour tout entier naturel n et p tel que : $1 \leq p \leq n+1$
   $$\frac{1}{n+1} C_{n+1}^p = \frac{1}{p} C_n^{p-1}$$
2) En déduire que :
   $$C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \frac{1}{4} C_n^3 + \dots\dots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$$

24 Résoudre dans $\mathbb{N}$:

1) $C_n^3 = 4C_n^4$
2) $C_n^2 + C_n^3 = 2n^2 - 2n$
3) $2A_n^3 + A_{2n}^3 = 32n(n-1)$

25 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (1+x)^n \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1) Calculer la fonction de f de deux façons
2) En déduire que : $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots\dots + nC_n^n = n.2^{n-1}$

CORRIGES

1

1) a) Le nombre de tirages contenant 1 seule boule rouge est

$n_1 = C_6^1 \times C_9^3 = 504$

choix de 3 boules non rouges

choix d'une boule rouge

b) n_2 = nombre de tirages de 4 boules contenant au moins une boule verte.

Le nombre de tirages de 4 boules est $C_{15}^4 = 1365$

le nombre de tirages contenant 4 boules non vertes parmi 11 est $C_{11}^4 = 330$

d'où $n_2 = 1365 - 330 = 1035$

c) n_3 est le nombre de tirages contenant des boules toutes de même couleur.

$n_3 = C_6^4 + C_4^4 + C_5^4 = 21$

2) a) Chaque tirage est un arrangement de 4 éléments d'un ensemble de 15 éléments.

n_4 = le nombre de tirages tel que la première boule tirée est rouge.

$$n_4 = 6 \times A_{14}^3 = 13104$$

b) n_5 = le nombre de tirages contenant au moins une boule verte.

$$n_5 = A_{15}^4 - A_{11}^4 = 24840$$

c) n_6 = le nombre de tirages contenant une seule boule rouge.

$$n_6 = 6 \times A_9^3 \times 4 = 12096$$

2

1) a) n_1 : le nombre de tirages contenant trois boules de même couleur

$n_1 = C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$

b) n_2 : le nombre de tirages contenant une seule boule jaune.

$n_2 = C_2^1 \times C_8^2 = 56$

c) n_3 = le nombre de tirages donnant la somme des numéros inscrits égale à 5.

Pour obtenir 5 comme somme de 3 numéros, on réalise l'un des types de tirages suivants : 0, 1, 4} ou { 1, 2, 2}

$$n_5 = C_4^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_3^2 = 14$$

d) n_4 = le nombre de tirages donnant un produit nul.

Le produit est nul si on obtient au moins un numéro ⓪.

$$n_4 = C_{10}^3 - C_6^3 = 100$$

e) n_5 = le nombre de tirages contenant une seule boule rouge et une seule boule portant le numéro (0)

$n_5 = C_2^1 \times C_3^2 + C_3^1 \times C_2^1 \times C_3^1 = 24$.

2) a) n_6 = le nombre de tirages contenant 2 boules blanches.

$n_6 = A_3^2 \times A_7^2 \times C_4^2 \leftarrow$ l'ordre intervient. $n_6 = 1512$.

b) n_7 = le nombre de tirages contenant au moins une boule jaune.

$n_7 = A_{10}^4 - A_8^4 = 3360$.

c) n_8 = la somme des 4 numéros inscrits sur les boules tirées est égal à 3.

$n_8 = A_4^2 \times A_3^1 \times A_2^1 \times \underbrace{C_4^2 \times C_2^1}_{\text{ordre}} = 864$

d) Il y a deux cas : car les tirages sont successivement sans remise donc le tirage de la 2ème boule tirée est influencé par le tirage de la 1ère.

• la première boule tirée est rouge et portant (0), la deuxième boule portant (0) et la 3ème et la 4ème quelconque, ou

• la première boule tirée est rouge non (0), la deuxième est (0) et la 3ème et la 4ème quelconque.

$n_9 = A_2^1 \times A_3^1 \times A_8^2 + A_3^1 \times A_4^1 \times A_8^2$ (l'ordre est donnée)

3) a) $n_{10} = 3!$

b) Une seule urne vide : Il y a C_3^1 choix pour l'urne vide. Pour chaque choix d'une urne vide

il y a $2^{10} - 2$ possibilités.

Les cas où les boules sont placées dans une même urne

$n_{11} = C_3^1 \times (2^{10} - 2)$

c) $n_{12} = 3^{10} - (n_{11} + C_3^1 \times 1^{10})$

Nombre de placements pour que deux urne soient vides donc une urne parmi trois reçoit toutes les boules.

Nombre de placements pour qu'une seule urne soit vide.

Nombre de placements total

3

a	b	c	d
2 choix	2 choix	2 choix	2 choix

Un chiffre peut être utilisé plus qu'une fois.
Le chiffre 0 peut être placer dans n'importe quelle case.
Chaque code correspond à une application de l'ensemble de ces 4 cases dans l'ensemble de 2 chiffres $\{0,1\}$. On obtient donc $2^4 = 16$ codes.

4

1) On veut constituer un mot en utilisant les lettres du mot tunis, donc il s'agit d'avoir trois lettres ordonnées prises parmi les lettres t, u, n, i et s.
L'énoncé ne dit pas que les lettres du mot doivent être distinctes.
Le nombre total de mots est $5^3 = 125$.
2) Dans cette question on doit tenir compte que les lettres doivent être distinctes.
Le nombre de mots possibles est le nombre d'arrangement de 3 éléments d'un ensemble de 5 éléments ; $A_5^3 = 60$ mots.

3)Le nombre de mots est donc $4 \times 1 \times 3 = 12$.

5

1)

1^er^ lancer / 2^ème^ lancer	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Il y a 36 réalisations possibles.

2) a) Il y a 6 réalisations qui ont donné le même numéro : (1,1) ; (2,2) ; (3,3) ; (4,4) ; (5,5) ; (6,6).

b)

1^er^ lancer / 2^ème^ lancer	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Il y a 15 réalisations possibles.

3) a)

1^{er} lancer / $2^{ème}$ lancer $\oplus$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a 5 réalisations donnant une somme égale à 6.

b) Il y a 18 couples dont la somme des numéros est impaire.

6

1)

Centaines	Dizaines	Unités
$\neq 0$		
9 choix	9 choix	8 choix

Donc le nombre d'entiers qu'on peut former est $9 \times 9 \times 8$.

2)

	centaines	Dizaines	unités	Résultat	
ou	a	a	b	(a, a, b)	$a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
ou	a	b	a	(a, b, a)	$b \neq a$
	a	b	b	(a, b, b)	

Le nombre d'entiers qu'on peut former est $3(9 \times 9) = 243$

3) Dans un entier de 4 chiffres, le chiffre des milliers est différent de 0.

Milliers	Centaines	Dizaines	unités
$\neq 0$			

Le nombre d'entiers à 4 chiffres et ne contenant ni 5 ni 7 est :

$$n'_3 = 7 \times 8^3$$

Nombre de façons pour remplir les autres cases

Choix du chiffre des milliers (non nul et différent de 5 et 7)

Les entiers à 4 chiffres sont de deux sortes :

- Des entiers qui contiennent au moins 5 ou 7.

• Des entiers qui ne contiennent aucun des chiffres 5 ni 7.

Le nombre d'entiers à 4 chiffres (sans contraintes) est 9×10^3

Conclusion : Le nombre d'entiers à quatre chiffres qui contiennent au moins un des chiffres 5 et 7 est $n_3 = 9\times10^3 - 7\times8^3$.

7

1) $n_1 = 8!$

2)

			6	7	8		
case 1	case 2	case 3	case 4			case 5	case 6

On assimile le bloc 6,7,8 à un seul chiffre, donc le nombre d'entiers naturels formés est le nombre de permutations de 6 chiffres.

$n_2 = 6!$

3) Si on assimile le bloc 6,78 à un seul chiffre, on peut former $6!$ entiers naturels, or dans un bloc $\boxed{6,7,8}$, il y a 6 ! façons de placer les 3 chiffres.

Donc $n_3 = 3!\times6!$

8 Il y aura :

- soit 3 cases contenant 2 boules et 1 case vide (1)
- soit 2 cases contenant 2 boules et 2 cases contenant 1 boule (2)

1er cas : il y a C_4^3 façons de choisir 3 cases, C_6^2 façons de remplir l'une de ces 3 cases , C_4^2 façons de remplir la 2ème case, et $C_2^2 = 1$ façon de remplir la 3ème donc $C_4^3\times C_6^2\times C_4^2\times C_2^2$ répartitions possibles.

2ème cas : il y a C_4^2 façons de choisir 2 cases, $C_6^2\times C_4^2$ façons de mettre 2 boules par case, 2 façons de remplir les 2 case restantes, donc :

$C_4^2\times C_6^2\times C_4^2\times2$ répartitions possibles.

En total : il y a $C_4^3\times C_6^2\times C_4^2 + C_4^2\times C_6^2\times C_4^2\times2$ =1440 remplissages possibles.

9

a) Il y a une seule façon pour que chacun des destinataires reçoit son colis.

$n_1 = 1\times1\times1 = 1$.

b) Le destinataire A est le seul qui reçoit son colis :

Il reste les colis C_B, C_C et C_D. Comme A est le seul qui reçoit son colis, alors chacun des destinataires B, C et D ne reçoit pas son colis.
Pour le destinataire B il y a deux choix : C_C ou C_D.

Pour chacune de ces deux possibilités, chacun des destinataires C et D ont une seule possibilité . Donc le nombre de cas pour que A seulement reçoit son colis est :

$$n_2 = 1\times2\times1 = 2$$

c) Une seule personne retrouve son colis : Il y a 4 choix pour la personne qui retrouve son colis, et pour chaque choix le nombre de cas possible pour que les 3 qui restent ne retrouve pas leurs colis est n_2 .

$$n_3 = 4\times n_2 = 4\times2 = 8\ .$$

d) Deux personnes seulement retrouvent leur colis :

On commence par choisir 2 destinataires parmi 4 qui retrouvent leurs colis : il y a C_4^2 choix pour ces deux destinataires.

Pour chaque choix de deux destinataires ayant retrouvé leurs colis, il reste deux destinataires et leurs colis, or ces deux ne doivent pas retrouver leurs colis, donc ils ont une seule possibilité : échanger les colis.
Le nombre de façons est $C_4^2\times1\times1\times1\times1 = 6$

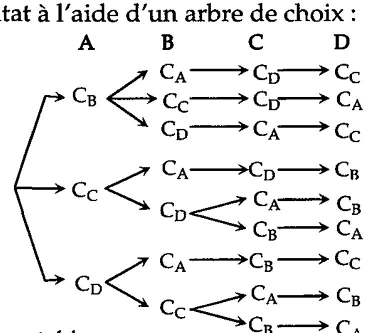
e) Il y a $4! = 24$ façons possibles pour distribuer les colis sur les destinataires. Ces 24 façons contiennent 4 cas qui s'excluent mutuellement : la réalisation d'un cas exclut les 3 autres cas.

$$24 \text{ cas possibles}\begin{cases}\text{4 destinataires reçoivent leurs colis}\\ \text{2 destinataires reçoivent leurs colis}\\ \text{1 seul destinataire reçoit son colis}\\ \text{aucun destinataire ne reçoit son colis}\end{cases}$$

On remarque que lorsque 4 destinataires reçoivent leurs colis c'est équivalent que 3 destinataires reçoivent leurs colis.

Désignons par n_4 le nombre de cas possibles où aucun destinataire ne retrouve son colis. Donc
$n_4 = 24-(n_1+n_2+n_3) = 24-(1+6+8) = 24-15 = 9$

On peut retrouver ce résultat à l'aide d'un arbre de choix :



10 a) Le nombre de trajets est 4 !

b) La pièce doit passer d'abord par A, donc il reste 3 ! façons pour passer par les 3 autres machines.

c) Si B est la première machine alors on a 3 ! pour les 3 passages par les autres machines.

Si B est la deuxième machine donc obligatoirement A est la première puisque B est avant C et D. On a 2 ! façons pour les passages par C et D.

B ne peut être la 3ème ni la 4ème car dans ces deux cas l'une des machine C ou D au moins vient avant B ce qui n'est pas acceptable.

Le nombre de trajets où la pièce passe en B avant C et D est : $3!+2!$

11 Pour colorier la 1ère bande on a 5 choix possibles de couleurs.

La couleur de la 1ère bande est interdite dans la bande suivante. Donc pour colorier la 2ème bande on a 4 choix.

D'où pour colorier la 1ère et la 2ème bande on a 5×4 choix. Pour colorier la 3ème bande, on peut utiliser la 1ère couleur. Donc pour chaque coloriage des deux premières 4 choix pour la troisième bande.

Il y a donc $5\times 4\times 4\times 4\times 4 = 1280$ possibilités.

12

I/ Chaque personne mange le gâteau qu'elle a choisi. Le nombre de choix possibles est le nombre d'arrangement 3 à 3 de l'ensemble de 5 gâteaux .
On obtient $A_5^3 = 60$ choix possibles.

II/ Deux des trois personnes mangent deux gâteaux, l'une d'elles un seul. Il y a trois façons de choisir cette dernière personne, et cinq façon pour le gâteau qu'elle mange.
Il reste quatre gâteaux à partager entre deux personnes. Il y a C_4^2 façons de choisir 2 morceaux parmi les 4 et de les donner à l'une des deux personnes. Les deux morceaux qui restent sont reçus par l'autre personne.
Le nombre de distributions possibles est donc : $3\times 5\times C_4^2 = 90$

13

I/ Le même raisonnement qu'à l'exercice précédent en remplaçant les 3 personnes par les trois portemanteaux et les 5 gâteaux par les 5 manteaux.
On trouve $3\times 5\times C_4^2 = 90$ dispositions.

II/ a) Chaque disposition est un arrangement de 3 éléments d'un ensemble de 5 éléments.
On trouve $A_5^3 = 5\times 4\times 3 = 60$ dispositions.

b) Le nombre de dispositions est le nombre de permutations de 5 éléments.
On trouve $5! = 120$ dispositions.

14

1) Former un octet c'est ordonner les chiffres 0 et 1 dans 8 cases avec la permission de répétition.

Le nombre d'octets possibles est 2^8

2) Le nombre d'octets commençant par 0 et se terminant par 0 est 2^6.

   C'est le nombre de choix de remplissage de 6 cases de chiffres prises de $\{0,1\}$)

3) Un octet qui contient exactement quatre 1 contient aussi quatre 0.

   Tout revient à choisir 4 places parmi 8 pour les quatre 1 et les places qui restent seront occupés obligatoirement par les quatre 0 : On a donc C_8^4 octets.

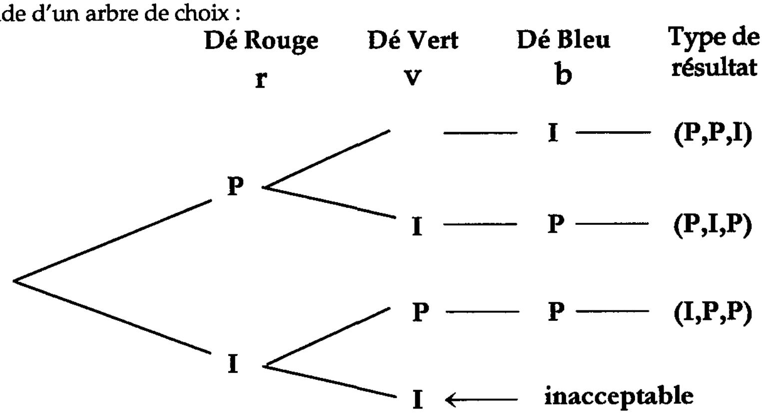
15

1) On note : r le résultat du dé rouge ; v le résultat du dé verts et b le résultat du dé bleu.
   Chaque résultat est un triplet (r, v, b) où r, v et b sont des entiers de 1 à 6.

r	v	b
6 résultats	6 résultats	6 résultats
$6 \times 6 \times 6 = 6^3$ résultats		

   On obtient $6^3 = 216$ résultats possibles.

2) On obtient deux résultats pairs exactement dans 3 cas : lorsque l'un des trois dés donne un résultat impair et les deux autres donnent chacun un résultat pair. Dans chacun de ces cas, il y a $3 \times 3 \times 3$ résultats possibles, puisque chaque résultat pair (ou impair) est choisi parmi 3.
   On obtient donc deux résultats pairs exactement dans $3 \times (3 \times 3 \times 3) = 91$ cas.
   A l'aide d'un arbre de choix :



Pour obtenir (P,P,I) il y a $3 \times 3 \times 3 = 27$; de même pour le résultat (P ,I,P) et (I,P,P).
On obtient $3 \times (3 \times 3 \times 3) = 91$ résultats.

3) On obtient des résultats tous distincts dans $A_6^3 = 120$ cas.

Cela revient à faire des arrangements de l'ensemble de 6 numéros 3 à 3.

4) On obtient trois résultats égaux dans 6 cas : les trois dés donnent le même résultat élément de $\{1,2,3,4,5,6\}$

5) On a deux résultats égaux exactement dans 90 cas :

1$^{\text{ère}}$ méthode : $6\times5\times C_3^2 = 90$

Choix des dés qui donnent le même résultat

choix de l'autre résultat

choix du résultat obtenu deux fois

2$^{\text{ème}}$ méthode : $N+120+6=216$

Nombre total de résultats

3 résultats égaux

3 résultats distincts

2 résultats égaux exactement

Donc $N = 216-(120+6) = 90$

16

Si on ne considère que les 6 disciplines, il y a 6 ! façons de les permuter. Pour chaque classement de disciplines choisi, on peut permuter tous les livres traitant la même discipline.
On a donc $10!\times6!\times5!\times4!\times3!\times2!$ rangements possibles pour un classement de disciplines fixé.
Donc : il y a $6!\times10!\times6!\times5!\times4!\times3!\times2!$ façons de ranger les livres de cet élève.

17

Position	$1^{\text{ère}}$	$2^{\text{ème}}$	$3^{\text{ème}}$	$4^{\text{ème}}$	$5^{\text{ème}}$
	$\cancel{E}$				$\cancel{A}$

1$^{\text{ère}}$ méthode

Soit un alignement de A, B, C, D et E où A n'est pas en dernière position et E n'est pas en première position. Il y a 4 possibilités pour A (positions 1, 2, 3 ou 4) et 4 possibilités pour E (2, 3, 4 ou 5). On peut donc placer A et E de 13 façons différentes : il faut éliminer les cas où A et E sont simultanément dans les positions 2, 3 ,4.
Pour chacune des 13 dispositions de E et A, il reste 3 personnes qu'on peut alignés de 3 ! = 6 façons.
Le nombre d'alignements cherché est donc égal à : $13\times6=78$.

2ème méthode :
Si on n'exige aucune condition, on peut ranger, 5 personnes A, B, C, D et E dans un rang de 5 ! = 120 façons différentes (nombre de permutations d'un ensemble de 5 éléments).
Dans ces 120 façons, on a compté le nombre d'alignements où A est en dernière position, comme on a compté le nombre d'alignements où E est en première position.
Le nombre d'alignements où A est en dernière position est 4 ! = 24.
De même, le nombre d'alignements où E est en première position est 4 ! = 24.
Dans chacun de ces deux cas on a compté les alignements suivants : E premier et A dernier.
Il y a 3 ! = 6 alignements où E est le premier et A est le dernier.
Le nombre d'alignements cherché est égal à : $5!-(4!+4!-3!)=78$

18

1) Le nombre de dispositions des 7 personnes alignés le long d'une table A est le nombre de files qu'on peut former avec ces personnes: c'est le nombre de permutations de 7 éléments :

   $N_1 = 7!$

2) Chaque ronde rompue donne naissance à une file et il existe **7 files distinctes** permettant de former la **même ronde**.

   Avec 7 personnes on peut former 7 ! files. Une même ronde est former par 7 files distinctes donc pour trouver le nombre de rondes il suffit de diviser le nombre de files par 7.

   Le nombre de dispositions de 7 personnes autour d'une table ronde est : $\frac{7!}{7} = 6!$

19

a) La figure à colorier comporte 16 cases. Définir une disposition pour laquelle chaque case peut être noire, blanche ou rouge consiste à chaque élément de {(1), (2), ..., (16)} un élément de $\{N, B, R\}$.

   Le nombre de dispositions cherchées est le nombre d'application d'un ensemble de 16 cases dans un ensemble de 3 couleurs.

   $n_1 = 3^{16} = 43046721$ façons de colorier la figure en n'utilisant que du noir, du blanc ou du rouge.

b) 8 cases doivent être noires : il y a autant de façons différentes de colorier la figure que de choisir 8 cases parmi 16 et les autres seront nécessairement blanches.

   $n_2 = C_{16}^{8} = 12870$ façons de colorier 8 cases noires et 8 blanches.

c) 3 cases doivent être noires, 5 blanches et 8 rouges. Le choix des cases noires et des cases blanches donnent le nombre de dispositions possibles. On

choisit d'abord 3 cases parmi 16 (coloriées en noir) puis 5 case parmi les 13 qui ne sont pas encore coloriées.
Il y a $n_3 = C_{16}^3 \times C_{13}^5 = 720720$ dispositions.

d) Pour colorier les cases intérieures, on associe à chaque case une couleur (noir ou blanc), cela peut se faire de 2^8 façons ; il y a de même 2^8 façons de colorier la couronne extérieure.

Pour colorier la figure, il y a $2^8 \times 2^8 = 2^{16} = 65536$ possibilités.

e) Chaque case intérieure est coloriée d'une couleur différente : il y a $8!$ possibilités. Il y a aussi 8 ! possibilités de colorier la couronne extérieure.
Donc il y a $(8!)^2$ possibilités.

II) On dispose de 8 couleurs.
Utiliser au maximum 3 couleurs c'est utiliser 1 seule couleur, ou bien 2 couleurs exactement ou bien 3 couleurs exactement.
Pour une seule couleur :
il y a 8 possibilités de colorier la figure en utilisant une seule couleur.
Pour deux couleurs :
Il y a C_8^2 façons de choisir les couleurs.

Si on prend 2 couleurs il y a 2^{16} façons de colorier, mais il y a dans ce nombre 2 coloriages unicolores.
Les deux couleurs étant choisies, il y a $2^{16} - 2$ coloriages bicolores.
Donc le nombre de coloriages bicolores est de $C_8^2 \times (2^{16} - 2)$.

Pour 3 couleurs :
Il y a C_8^3 façons de choisir les trois couleurs .

Si on prend 3 couleurs , il y a 3^{16} façons de colorier, mais il y a dans ce nombre 3 coloriages unicolores et $C_3^2 \times (2^{16} - 2)$ coloriages bicolores.
Le nombre de coloriages tricolores est de :

$$C_8^3 \times \left[3^{16} - C_3^2(2^{16} - 2) - 3\right].$$

Le nombre de coloriages qui fait intervenir au plus trois couleurs est de :

$$C_8^3\left[3^{16} - C_3^2(2^{16} - 2) - 3\right] + C_8^2(2^{16} - 2) + 8$$

20 $\left(\text{application de la formule } C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}\right)$

1) $C_{n-3}^p + 3C_{n-3}^{p-1} + 3C_{n-3}^{p-2} + C_{n-3}^{p-3} =$

$$\underbrace{C_{n-3}^p + C_{n-3}^{p-1}} + 2\underbrace{\left(C_{n-3}^{p-1} + C_{n-3}^{p-2}\right)} + \underbrace{C_{n-3}^{p-2} + C_{n-3}^{p-3}} =$$

$$C_{n-2}^p \quad + \quad 2C_{n-2}^{p-1} \quad + \quad C_{n-2}^{p-2} =$$

$$C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p+1} = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$$

2) on a :

$$\left.\begin{array}{l} C_{n+1}^{p+1} = \cancel{C_n^{p+1}} + C_n^p \\ \cancel{C_n^{p+1}} = \cancel{C_{n-1}^{p+1}} + C_{n-1}^p \\ \quad\vdots \\ \cancel{C_{p+2}^{p+1}} = \cancel{C_{p+1}^{p+1}} + C_{p+1}^p \\ \cancel{C_{p+1}^{p+1}} = C_p^p \end{array}\right. \quad +$$

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_{n-1}^p + C_{n-2}^p + \dots\dots + C_p^p$$

21

1) $C_n^3 = 4C_n^4$ Condition : $\left.\begin{array}{l} n \geq 3 \\ n \geq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{n \geq 4}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{n!}}{3!(n-3)!} = 4\frac{\cancel{n!}}{4!(n-4)!} \Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{3!}(n-3)!} = \frac{1}{4\times\cancel{3!}(n-4)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-3)!}{(n-4)!} = 4 \Leftrightarrow n-3 = 4 \Leftrightarrow n = 7$$

$S_{IN} = \{7\}$

2) $\underbrace{C_n^2 + C_n^3}_{} = 2n^2 - 2n$ Condition : $\left.\begin{array}{l} n \geq 3 \\ n \geq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{n \geq 4}$

$$\Leftrightarrow C_{n+1}^3 = 2n^2 - 2n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{3!((n+1)-3)!} = 2n^2 - 2n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)\cancel{(n-2)}!}{6.\cancel{(n-2)}} = 2n^2 - 2n$$

$$\Leftrightarrow n(n+1)(n-1) = 12n(n-1) \Leftrightarrow n(n-1)(n+1-12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n = 0 \text{ ou } n = 1}_{\text{impossible car } n\geq 3} \quad \text{ou} \quad n = 11 \Rightarrow S_{IN} = \{4\}$$

22

1) $C_n^m . C_{n-m}^{p-m} = \dfrac{n!}{m!\cancel{(n-m)}!} \times \dfrac{\cancel{(n-m)}!}{(p-m)!(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \times \dfrac{p!}{m!(p-m)} = C_n^p \times C_p^m$

2) d'après 1) :

$m=0 \quad C_n^0\,C_n^p = C_n^p\,C_p^0$
$m=1 \quad C_n^1\,C_{n-1}^{p-1} = C_n^p\,C_p^1$
$m=2 \quad C_n^2\,C_{n-2}^{p-2} = C_n^p\,C_p^2$
$\vdots$
$m=p \quad C_n^p\,C_{n-p}^0 = C_n^p\,C_p^p$

donc : $S_p = C_n^p.C_p^0 + C_n^p.C'_p + C_n^p.C_p^2 + ... + C_n^p.C_p^p$

$$= C_n^p\left(C_p^0 + C_p^1 + C_p^2 + ... + C_p^p\right) = C_n^p.2^p$$

3) $C_n^0.C_n^2 + C_n^1.C_{n-1}^1 + C_n^2.C_{n-2}^0 = S_2$ (d'après 2))

$$= 2^2 C_n^2 \quad (p=2)$$

donc l'équation devient :

$$2^2 C_n^2 = n^2 + 4n - 5 \Leftrightarrow 4\frac{n!}{2!(n-2)!} = n^2 + 4n - 5$$

$$\Leftrightarrow 2n(n-1) = n^2 + 4n - 5 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow n = 1 \ ou \quad n = \frac{c}{a} = 5$$

On a $p = 2 \le n \Rightarrow n = \frac{c}{a} = 5$

23

1) $\frac{1}{n+1}C_{n+1}^p = \frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} = \frac{n!}{p!(n+1-p)!} \quad = \frac{1}{p}.\frac{n!}{(p-1)!(n-(p-1))!}$

$$= \frac{1}{p}C_n^{p-1}$$

2)

d'après 1) :

$p=1 \qquad \frac{1}{1}C_n^0 = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^1$

$p=2 \qquad \frac{1}{2}C_n^1 = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^2$

$p=3 \qquad \frac{1}{3}C_n^2 = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^3$

$\vdots$

$p=n \qquad \frac{1}{n}C_n^{n-1} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^n$

$p=n+1 \qquad \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+....+\frac{1}{n}C_n^{n-1}+\frac{1}{n+1}C_n^n$$
$$=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^1+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^2+....+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^n+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+....+C_{n+1}^{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left[\left(C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+....+C_{n+1}^{n+1}\right)-\underbrace{C_{n+1}^0}_{=1}\right]=\frac{1}{n+1}\left[2^{n+1}-1\right]$$

24

1) $C_n^3=4C_n^4$ Condition : $\left.\begin{array}{l}n\geq 3\\ n\geq 4\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{n\geq 4}$

$$\Leftrightarrow\frac{\cancel{n!}}{3!(n-3)!}=4\frac{\cancel{n!}}{4!(n-4)!}\Leftrightarrow\frac{1}{\cancel{3!}(n-3)!}=\frac{1}{4\times\cancel{3!}(n-4)!}$$
$$\Leftrightarrow\frac{(n-3)!}{(n-4)!}=4\Leftrightarrow n-3=4\Leftrightarrow n=7$$

$S_{IN}=\{7\}$

2) $\underbrace{C_n^2+C_n^3}=2n^2-2n$ Condition : $\left.\begin{array}{l}n\geq 3\\ n\geq 4\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{n\geq 4}$

$$\Leftrightarrow C_{n+1}^3=2n^2-2n\Leftrightarrow\frac{(n+1)!}{3!((n+1)-3)!}=2n^2-2n$$
$$\Leftrightarrow\frac{(n+1)n(n-1)\cancel{(n-2)}!}{6.\cancel{(n-2)}!}=2n^2-2n\Leftrightarrow n(n+1)(n-1)=12n(n-1)$$
$$\Leftrightarrow n(n-1)(n+1-12)=0\Leftrightarrow\underbrace{n=0\ ou\ n=1}_{impossible\ car\ n\geq 3}ou\ n=11\Rightarrow S_{IN}=\{11\}$$

25

1) $f(x)=(1+x)^n\Rightarrow f'(x)=n(1+x)^{n-1}$

d'autre part $f(x)=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+....+C_n^px^p+C_n^nx^n$

(d'après la formule du binôme de Newton)

$$\Rightarrow f'(x)=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+....+pC_n^px^{p-1}+....+nC_n^nx^{n-1}$$

2) On prend $x=1$, $f'(1)=n(1+1)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2\times1+3C_n^3\times1^2+\cdots+nC_n^n\times1^{n-1}$

D'où $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+....+nC_n^n=n.2^{n-1}$

Chapitre 7
Divisibilité dans IN

1/ Le principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- P_{n_0} est vraie,
- Si P_n est vraie entraine P_{n+1} est vraie,

alors P_n est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

2/ Divisibilité

⇨ ***Diviseurs d'un entier naturel***

Définition

Soient a et d deux entiers naturels, tels que d soit non nul.
On dit que a est divisible par d s'il existe un entier naturel k tel que $a = dk$.

Propriétés

Pour tous entiers naturels a, b et c tels que a et b soient non nuls.
1 divise a et a divise a.

Si a divise b et b divise a alors a = b.

Si a divise b et b divise c alors a divise c.

Si a divise b alors a divise bc.

⇨ ***Combinaisons linéaires***

Propriétés

Soient a et b deux entiers naturels et c un entier naturel non nul.
Si c divise a et b alors c divise $a+b$ et $a-b$ et $\alpha a+\beta b$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Si c divise a et ne divise pas b alors c ne divise pas $a+b$.

⇨ ***Division euclidienne***

Propriétés

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.
Il existe un couple unique (q,r) d'entiers naturels tels que

$$\mathbf{a = bq + r \quad avec \quad 0 \leq r < b}$$

q est le quotient et r est le reste de la **division euclidienne** de a par b.

3/ PGCD de deux entiers naturels non nuls

⇨ ***Définition :***

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Le plus grand commun diviseur de a et b est l'entier naturel non nul d, noté $a \wedge b$ et tel que

- d divise a et b.
- tout diviseur k de a et b est inférieur ou égal à d.

⇨ ***Propriété***

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

- Si b divise a alors $a \wedge b = b$.
- Si d est un diviseur commun à a et b, alors d divise $a \wedge b$.
- Pour tout entier naturel non nul k, $ka \wedge kb = k(a \wedge b)$.

⇨ ***Algorithme d'Euclide***

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On peut effectuer les divisions euclidiennes successives .Le **dernier reste non nul** de cette suite de division est **le pgcd** de a et b.

4/ Entiers premiers entre eux

Soient a et b deux entiers naturels non nuls :

Les entiers naturels a et b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow$ $\text{pgcd}(a, b) = 1$

Théorème

Si a et b deux entiers naturels non nuls et $d = a \wedge b$ alors il existe un unique couple d' entiers (a', b') tels que $a = da'$ et $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$

5/ Lemme de Gauss

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc alors a divise c.

6/ PPCM de deux entiers naturels non nuls

⇨ ***Définition :***

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Le plus petit commun multiple à a et b est l'entier naturel non nul k noté $a \vee b$ et tel que

- k est un multiple de a et b,
- tout multiple non nul de a et b est supérieur ou égal à k.

⇨ ***Propriété***

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

- Si b divise a alors $a \vee b = a$.
- Pour tout entier naturel non nul k, $ka \vee kb = k(a \vee b)$.

⇨ ***PGCD et PPCM***

Soient a et b deux entiers naturels non nuls, $(a \wedge b) \cdot (a \vee b) = ab$

EXERCICES

1 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{n^3-n}{}$ est un entier naturel.

2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

a) 4^n+5 est un multiple de 3.

b) $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

3 Un nombre entier naturel s'écrit sous la forme x5619.
Déterminer x pour qu'il soit divisible par 11.

4 Quel est le plus petit entier naturel non nul qui donne pour reste :
9 quand on le divise par 10
13 quand on le divise par 14
15 quand on le divise par 16

5 Trouver tous les entiers naturels a et b tels que $a^2-b^2=65$.

6 On divise 524 par un entier naturel non nul b ; le quotient est 15 et le reste est r. Déterminer les valeurs possibles de b et de r.

7 On divise 394 par un entier naturel non nul b, le quotient est 17 et le reste est r. Déterminer b et r.

8

1) a) Décomposer le nombre 60 en un produit de facteurs premiers.
 b) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 60.
 c) Ecrire tous les couples (a,b) d'entiers naturels dont le produit est égal à 60.
 d) On donne le système $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$ où a, b, x et y sont des entiers naturels.
 Déterminer chacun des entiers x et y en fonction de a et b :
2) Trouver les couples (x,y) de $\mathbb{N}^2$ solutions de $x^2-y^2=60$.

9 Déterminer tous les entiers naturels a qui divisés par 20, donnent un reste égal au carré du quotient.

10

1) Déterminer, dans IN, l'ensemble des diviseurs communs de 4512 et 4128.
2) Trouver un entier naturel d tel que, si on divise par d les nombres 4525 et 4147, les restes obtenus soient respectivement 13 et 19. Préciser le nombre de solutions.

11 Soit n et a deux entiers naturels non nuls.

1) On suppose que a divise $5n+31$ et a divise $3n+12$; montrer que a divise 33.
2) En déduire les valeurs possibles de a.

12 Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux.

13 Soit n un entier naturel non nul.

1) On pose $\alpha = 2n+3$ et $\beta = 5n-2$. On pose $d = \text{PGCD}(\alpha,\beta)$
   Etablir une relation entre α et β indépendant de n.
2) En déduire que si α et β ne sont pas premiers entre eux, leur PGCD est 19.

14

1) a) Soit n un entier quelconque qui **n'est pas un multiple** de 3.
   On le divise par 3. Quelles sont les valeurs possibles du reste ?
   b) On divise n^2 par 3. Quelles sont les valeurs possibles du reste ?
2) Si a, b et c sont trois entiers et mesurent respectivement l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle. **Si aucun de ces entiers n'est un multiple** de 3, est-il possible de trouver un triangle correspondant aux conditions posées ?

15 Soit x un entier naturel.

1) Développer $(x-1)(1+x+x^2+x^3)$
2) a) On pose $x=2$. Montrer que $^{12} -$ est divisible par 7.
   b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $2^{3n}-1$ est divisible par 7.
   c) On déduire les restes de la division par 7 des puissances de 2.

16

1) Montrer que les nombres 1617 et 325 sont premiers entre eux.
2) a) Les nombres entiers naturels 273 et 36 sont-ils premiers entre eux.
   b) L'équation (E) $273x-36y=1$ admet – elle un couple solution ?

17 Montrer que si deux nombres entiers naturels x et y sont premiers entre eux, il en est de même des entiers + + .

18 Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls inférieurs à 300 et vérifiant $\begin{cases} a \wedge b = 15 \\ a - b = 105 \end{cases}$

19 Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls (a,b) tels que :

$$\begin{cases} a+b=651 \\ \dfrac{a \vee b}{a \wedge b}=108 \end{cases}$$

20 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose $a = 2n - 1$, $b = 9n + 4$ et $d = a \wedge b$.

1- Montrer que $d = 1$ ou $d = 17$.

2- Montrer que $d = 17$ si et seulement si $n = 9 + 17p$ avec p un entier naturel.

21

1)a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$: $a_n = 12^n - 1$ est divisible par 11.

b) En déduire le reste dans la division euclidienne de $A = 12^{2014} + 12^{2015} + 12^{2016}$ par 11.

2) Pour tout entier supérieur ou égal à 3, on pose: $x = 2n + 5$ et $y = n - 3$ et $d = x \wedge y$.

a) Montrer que d divise 11.

b) Déterminer les valeurs de n pour que d soit égal à 11.

c) En déduire que $\left(2 \times 12^{2016} + 5\right)$ et $\left(12^{2016} - 3\right)$ sont premiers entre eux

22

Soit dans $IN \times IN$ l'équation (E) : $31x - 27y = 5$.

1) a) Vérifier que le couple $(35,40)$ est une solution de l'équation (E).

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les couples $(35 + 27k, 40 + 31k)$ avec $k \in IN$.

c) Résoudre alors dans IN le système (S) $\begin{cases} n = 31x + 2 \\ n = 27y + 7 \end{cases}$ avec $(x,y) \in IN \times IN$.

2) Soit (x,y) une solution de l'équation (E), on pose $d = x \wedge y$.

a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 5$.

b Dans le cas où $d = 5$, quel est le reste de la division euclidienne de x par 135?

CORRIGES

1 Pour $n=0$, $\dfrac{0-0}{3}\in\mathbb{N}$.

Supposons que $\dfrac{n^3-n}{3}\in\mathbb{N}$ pour un entier n quelconque et montrons que $\dfrac{(n+1)^3-(n+1)}{3}\in\mathbb{N}$.

On a

$$\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}=\frac{n^3+3n^2+3n+1-n-1}{3}=\frac{n^3-n+3(n^2+n)}{3}=\frac{n^3-n}{3}+n^2+n$$

or $\dfrac{n^3-n}{3}\in\mathbb{N}$ et $n^2+n\in\mathbb{N}$. Donc $\dfrac{(n+1)^3-(n+1)}{3}\in\mathbb{N}$.

Conclusion : Pour tout entier n, $\dfrac{n^3-n}{3}$ est un entier naturel.

2

a) On note P_n la proposition « 4^n+5 est un multiple de 3 »

- Pour $n=0$, $4^0+5=6=3\times 2$ multiple de 3. Donc P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie pour un entier $n\geq 0$, c'est-à-dire que pour un entier n 4^n+5 est un multiple de 3 ». Montrons, sous cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que "$4^{n+1}+5$ est un multiple de 3 »

  Pour utiliser l'hypothèse de récurrence, on fait apparaître 4^n dans 4^{n+1} en écrivant $4^{n+1}=4^n\times 4$.

  L'hypothèse de récurrence : « 4^n+5 est un multiple de 3 » s'écrit $4^n+5=3p$, avec p entier naturel (non nul). D'où $4^n=3p-5$

  Ainsi $4^{n+1}+5=4^n\times 4+5=4(3p-5)+5=12p-15=3(4p-5)$.

  Cette dernière égalité prouve que $4^{n+1}+5$ est un multiple de 3 donc P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : P_n est vraie pour tout entier naturel n, donc pour tout $n\geq 0$, 4^n+5 est multiple de 3.

b) Montrons que $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est un multiple de 11.

On note P_n la proposition « $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est un multiple de 11 »

- Pour $n=0$, $3^3-4^2=11$ multiple de 11. Donc P_0 est vraie.
- Supposons que P_n est vraie pour un entier $n\geq 0$, c'est-à-dire que pour un entier n $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est un multiple de 11 ».

  Montrons, sous cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $3^{(n+1)+3}-4^{4(n+1)+2}$ est un multiple de 11 »

$$3^{(n+1)+3}-4^{4(n+1)+2}=3^{n+3}\times 3^1-4^{4n+2}\times 4^4=3^{n+3}\times 3-4^{4n+2}\times 256$$
$$=3^{n+3}\times 3-4^{4n+2}\times(253+3)=3\underbrace{(3^{n+3}-4^{4n+2})}_{11k}-4^{4n+2}\times\underbrace{253}_{11\times 23}$$
$$=3\times 11k-4^{4n+2}\times 11\times 23=11\underbrace{(3k-4^{4n+2}\times 23)}_{\text{entier}}$$

D'où P_{n+1} est vérifiée.

Cette dernière égalité prouve que $3^{(n+1)+3}-4^{4(n+1)+2}$ est un multiple de 11 donc P_{n+1} est vraie.

- Conclusion : P_n est vraie pour tout entier naturel n, donc pour tout $n\geq 0$, $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est multiple de 11.

3 Le nombre x5619 soit divisible par 11, donc $9+6+x-1-5=x+9$ soit divisible par 11. On cherche les entiers x tels que $x+9$ soit divisible par 11 et $x\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. La seule possibilité est $x=2$

Le nombre cherché est 25619.

4 Soit n le nombre qu'on veut trouver.

$n-9=10k$ avec $k\in\mathbb{N}$ donc $n=10k+9$ d'où $n+1=10(k+1)$.

Conclusion (1): $n+1\in M_{10}$

$n-13=14k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$ donc $n=14k'+13$ d'où $n+1=14(k'+1)$

Conclusion (2) : $n+1\in M_{14}$

$n-15=16k''$ avec $k''\in\mathbb{N}$ donc $n=16k''+15$ d'où $n+1=16(k''+1)$

Conclusion (3) : $n+1\in M_{16}$.

Ainsi : $N+1\in M_{10}\cap M_{14}\cap M_{16}$.

Le PPCM des nombres 12, 14 et 16 est $2^4\times 5\times 7=560$

D'où $N+1=560$ et par suite $N=559$.

5 On remarque que $a^2-b^2>0$ cela signifie que $a>b$.

On sait que $65=13\times 5$ et aussi $65=65\times 1$. Donc $a^2-b^2=65$ équivaut à $(a-b)(a+b)=5\times 13$ ou $(a-b)(a+b)=1\times 65$

Les couples (a,b) d'entiers naturels cherchés vérifient :

$$(S_1)\begin{cases}a-b=5\\a+b=13\end{cases}\text{ ou }(S_2)\begin{cases}a-b=1\\a+b=65\end{cases}$$

- $(S_1)\begin{cases}a-b=5 & (L_1)\\a+b=13 & (L_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=18 & (L_1+L_2)\\2b=8 & (L_2-L_1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\\b=4\end{cases}$
- $(S_2)\begin{cases}a-b=1 & (L_1)\\a+b=65 & (L_2)\end{cases}\Leftrightarrow(S_2)\begin{cases}2a=66 & (L_1+L_2)\\2b=64 & (L_2-L_1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=33\\b=32\end{cases}$

Les couples (a,b) solutions sont donc $(33,32)$ et $(9,4)$.

6 $524 = 15b + r$ avec $0 \leq r < b$

$r < b$ donne $15b + r < 15b + b$ ou encore $524 < 16b$

$b > \dfrac{524}{16}$ et par suite $b > 32,75$.

Si $b = 33$ alors $15 \times 33 = 495 \xrightarrow{\text{donne}} r = 29$: ce cas convient.

Si $b = 34$ alors $15 \times 34 = 510 \xrightarrow{\text{donne}} r = 14$: ce cas convient.

Si $b = 35$ alors $15 \times 35 = 525 > 524$: ce cas ne convient pas.

Conclusion : On trouve deux couples (b,r) solutions : $(33;29)$ et $(34;14)$.

7 $394 = 17b + r$ où $0 \leq r < b$ donc $394 = 17b + r$ donne $17b + r < 17b + b$ d'où $17b + r < 18b$ et par conséquent $394 < 18b$ ou encore $b > \dfrac{394}{18}$ donc $b > 21$

Si $b = 22 \longrightarrow 17 \times 22 = 374$ d'où $r = 394 - 374 = 20$.

Si $b = 23 \longrightarrow 17 \times 23 = 391$ d'où $r = 3$

Si $b = 24 \longrightarrow 17 \times 24 = 408 > 394$ ne convient pas.

Le couples (b,r) solutions sont (22,20) et (23,3).

8

1) a) $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

b) les diviseurs de 60 sont dans un ordre croissant :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Le nombre 60 a douze diviseurs.

c) Pour trouver les couples d'entiers naturels dont le produit est égal à 60 on peut écrire $60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$ dans l'ordre croissant 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on s'arrête dès qu'à l'étape suivante on obtient l'ordre inverse. Il y a 12 couples (a,b) possibles :

$(1;60), (2;30), (3;20), (4;15), (5;12), (6;10)$ et

$(60;1), (30;2), (20;3), (15;4), (12;5), (10;6)$.

d) $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$ signifie $\begin{cases} 2x = a + b \\ 2y = a - b \end{cases}$ signifie $\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$

2) Déterminer les entiers x et y tel que $x^2 - y^2 = 60$.

donc déterminer les entiers x et y tel que $(x - y)(x + y) = 60$ et en remarquant que $x > y$. On pose $a = x + y$ et $b = x - y$. Le problème se ramène à chercher a et b tel que $ab = 60$ et $a > b$. Donc les couples (a,b) qui peuvent être convenables sont : $(60;1),(30;2),(20;3),(15;4),(12;5),(10;6)$.

De plus les nombre a et b doivent être les deux pairs ou les deux impairs (même parité) pour que x et y soient des entiers.
Donc seuls deux couples peuvent convenir $(30;2)$ et $(10;6)$:

$(60 = 30\times 2$ et $60 = 10\times 6)$.

- Si on remplace 60 par 30×2, on obtient $x = \dfrac{30+2}{2} = 16$ et $y = \dfrac{30-2}{2} = 14$

  Si on remplace 60 par 10×6, on obtient $x = \dfrac{10+6}{2} = 8$ et $y = \dfrac{10-6}{2} = 2$

  Les couples (x,y) solutions sont $(16,14)$ et $(8,2)$.

9 $a = 20q + r$ où $0 \le r < 20$

$r = q^2 \Rightarrow a = 20q + q^2$

D'où $q^2 + 20q - a = 0$

Or $0 \le r < 20$ et $r = q^2 \Rightarrow 0 \le q^2 < 20$

$4^2 = 16$ et $5^2 = 25$ donc $0 \le q < 5$.

Si $q = 0 \longrightarrow a = 0 \quad (r = 0 = 0^2)$

Si $q = 1 \longrightarrow a = 21 \quad (r = 1 = 1^2)$

Si $q = 2 \longrightarrow a = 44 \quad (r = 4 = 2^2)$

Si $q = 3 \longrightarrow a = 69 \quad (r = 9 = 3^2)$

Si $q = 4 \longrightarrow a = 96 \quad (r = 16 = 4^2)$

10

1) $4512 = 2^5 \times 3 \times 47$ et $4128 = 2^5 \times 3 \times 43$

   L'ensemble des diviseurs communs de 4512 et 4128 est

   $D = \{1,\ 2,\ 3,\ 2^2, 2^3, 2^4,\ 2^5,\ 2\times 3,\ 2^2\times 3,\ 2^3\times 3,\ 2^4\times 3,\ 2^5\times 3\}$

   $D = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96\}$

2) $4525 = dq + 13$ et $4147 = dq' + 19$ avec $d > 19$ et $d > 13$ donc $d > 19$

   $4525 - 13 = d\times q$ donc $4512 = d\times q$

   $4147 - 19 = dq'$ donc $4128 = d\times q'$

   D'où d est un diviseur commun de 4128 et de 4512 et $d > 19$ donc $d \in \{24, 32, 48, 96\}$.

11

1) On doit établir une relation indépendante de n entre $5n+31$ et $3n+12$.
   On pose $\alpha = 5n+31$ et $\beta = 3n+12$. On a $3\alpha - 5\beta = 3\times 31 - 5\times 12 = 33$.
   Si d divise α et β alors d divise 3α et 5β.
   Donc d divise $3\alpha - 5\beta$ d'où d divise 33.
2) On a d divise 33 donc $d \in \{1, 3, 11, 33\}$.

12 On pose $a = 9p+4$ et $b = 2p+1$

Il faut établir une relation entre a et b indépendante de p.
On a : $2a - 9b = -1$ donc $9b - 2a = 1$
Soit d un diviseur de a et b.
d divise a donc d divise 2a
d divise b donc d divise 9b
donc d divise $9b - 2a$ d'où d divise 1. D'où $d = 1$.
Si d est un diviseur commun de a et b alors d nécessairement égal 1 d'où a et b sont premiers entre eux.

13

1) $5\alpha - 2\beta = 19$
2) Soit $d = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$
   d divise α et β donc d divise $5\alpha - 2\beta$ d'où d divise 19.
   d divise 19
   donc d = 1 ou d = 19.
   Si α et β ne sont pas premiers entre eux alors $d \neq 1$ d'où $d = 19$.

14

1) a) Soit n un entier quelconque qui n'est pas un multiple de 3. Dans une division par 3, les valeurs possibles du reste sont les entiers inférieurs à 3, c'est-à-dire 0, 1 ou 2. Comme 0 a été exclu puisque n n'est pas un multiple de 3, les restes possibles sont 1 et 2.

   b) Les restes possibles de la division de n par 3 sont 1 et 2, c'est-à-dire $n = 3p+1$ ou $n = 3p+2$.
   Lorsque $n = 3p+1$, on a :
   $$n^2 = (3p+1)^2 = 9p^2 + 6p + 1 = 3(p^2+2p) + 1$$
   $$= 3k + 1 \quad (\text{où } k = p^2 + 2p)$$
   Lorsque $n = 3p+2$, on a :
   $$n^2 = (3p+2)^2 = 9p^2 + 12p + 4 = 3(3p^2 + 4p + 1) + 1 = 3k' + 1 \quad (\text{où } k' = 3p^2 + 4p + 1)$$

Dans chacun des deux cas, le reste, quand on divise n^2 par 3 est 1.

2) Les entiers a, b et c mesurent respectivement l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle donc $a^2 = b^2 + c^2$.
Supposons qu'on peut trouver trois entiers a, b et c non multiples de 3 tels que $a^2 = b^2 + c^2$, alors
Le reste de la division de b^2 par 3 est 1.
Le reste de la division de c^2 par 3 est 1.
Le reste de la division de $b^2 + c^2$ serait donc 2, ce qui **est impossible** puisque le reste de la division de a^2 par 3 et 1.
Il est donc impossible de trouver un triangle correspondant aux conditions posées.
On peut retenir ce résultat :
x, y et z trois entiers naturels tels que $x^2 + y^2 = z^2$.
L'un d'eux au moins de ces trois entiers naturels est multiple de 3.

15

1) $(x-1)(1+x+x^2+x^3) = \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^4 - 1 - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} = x^4 - 1$

Pour tout entier x, on a : $(x-1)(1+x+x^2+x^3) = x^4 - 1$.

2) a) On prend : $x = 2$.

D'après 1) on peut écrire $2^{12} - 1 = \left(2^3\right)^4 - 1 = 8^4 - 1 = (8-1)(1+8+8^2+8^3)$

$2^{12} - 1 = 7 \times (\underbrace{1+8+8^2+8^3}_{\text{un entier naturel}})$ donc $2^{12} - 1$ est divisible par 7.

b) En s'inspirant de la question 1) on pense à développer

$(1-x)(1+x+x^2+\cdots x^{n-1})$ (pour tous entiers naturels non nuls n et x)

$(1-x)(1+x+x^2+\cdots x^{n-1}) =$

$$1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cdots + \cancel{x^{n-1}} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \cdots \cancel{x^{n-1}} - x^n$$

Ainsi, pour tous n et x entiers naturels non nuls on a

$(x-1)(1+x+x^2+\cdots x^{n-1}) = x^n - 1$

$2^{3n} - 1 = (2^3)^n - 1 = 8^n - 1 = (8-1)(\underbrace{1+8+\cdots+8^{n-1}}_{\in \mathbb{N}})$

donc $2^{3n} - 1 = 7p$ où p un entier naturel.

Conclusion $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

c) Une puissance de 2 s'écrit 2^k où k est un entier naturel.

La division euclidienne de k par 3 donne $k = 3n + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}$

- Si $k=3n$, $2^k=2^{3n}$. Or $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 donc il existe p appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $2^{3n}-1=7p$ et par conséquent $2^{3n}=7p+1$.

  Dans ce cas le reste de la division euclidienne de 2^k par 7 est 1.
- Si $k=3n+1$, $2^k=2^{3n+1}=2^{3n}\times 2=(1+7p)\times 2=2+7(2p)=7p'+2$ (où $p'\in\mathbb{N}$)

  Dans ce cas le reste de la division euclidienne de 2^k par 7 est 2.
- Si $k=3n+2$, $2^k=2^{3n+2}=2^{3n}\times 2^2=(7p+1)\times 4=7(\underbrace{4p}_{p''})+4=7p''+4$.

  Dans ce cas le reste de la division euclidienne de 2^k par 7 est 4.

16

1) $1617=325\times 4+317$

   $325=317\times 1+8$

   $317=8\times 39+5$

   $8=5\times 1+3$

   $5=3\times 1+2$

   $3=2\times 1+1$

   $2=1\times 2+0$

   Le dernier reste non nul est 1 donc pgcd(1617,325) = 1.

   Par suite les entiers 1617 et 325 sont premiers entre eux.

2) a)

   $273=36\times 7+21$
   $36=21\times 1+15$
   $21=15\times 1+6$
   $15=6\times 2+3$
   $6=3\times 2+0$

   Le dernier reste non nul est 3 donc $\mathrm{pgcd}(273,36)=3$.

   Les nombres 273 et 36 ne sont pas premiers entre eux.

   b) L'entier naturel 3 est un diviseur commun à 273 et 36 donc 3 divise aussi $273x+36y$. Cela entraîne 3 divise 1 : ce qui est impossible.
   D'où l'équation $273x+36y=1$ n'a pas de solution.

17 Soit d un entier naturel non nul tel que $d \mid 2x+y$ et $d \mid 5x+2y$.

Alors $d \mid 2(2x+y)$ et $d \mid 5x+2y$ donc $d \mid 5x+2y-2(2x+y)$

Ainsi $d \mid x$.

De même $d \mid 5(2x+y)$ et $d \mid 2(5x+2y)$ donc $d \mid 5(2x+y)-2(5x+2y)$

Ainsi $d \mid y$.

On obtient $d \mid x$ et $d \mid y$ et comme x et y sont premiers entre eux, alors d = 1.

Le PGCD de $2x+y$ et $5x+2y$ est 1 donc $2x+y$ et $5x+2y$ sont premiers entre eux.

18 On a : $\begin{cases} a \wedge b = 15 \\ a - b = 105 \end{cases}$

On note (a,b) un couple solution, $a = 15a'$ et $b = 15b'$ où a′ et b′ sont premiers entre eux.

- $a \leq 300$ donc $a' \leq 20$
- $b \leq 300$ donc $b' \leq 20$
- $a \wedge b = 15$ et $a' \wedge b' = 1$
- $a - b = 105 \Leftrightarrow a' - b' = 7$.

Le s entiers a′ et b′, premiers entre eux, inférieurs à 20 et vérifiant $a' = b' + 7$ sont : 8 et 1 ; 9 et 2 ; 10 et 3 ; 11 et 4 ; 12 et 5 ; 13 et 6 ; 15 et 8 ; 16 et 9 ; 17 et 10 ; 18 et 11 ; 19 et 12 puis 20 et 13.

En multipliant ces nombres par 15, on obtient des couples (a,b) solutions. Les couples solutions sont :

(120;15), (135;30) , (150;45), (165;60),

(180;75), (195;90); (225;120); (240;135);

(255;150), (270;165) , (285;180) , (300;195)

19 On pose $d = a \wedge b$ et $m = a \vee b$. Soient a′ et b′ tels que $a = da'$ et $b = db'$ a′ et b′ sont premiers entre eux et $d(a' + b') = 651$.

On a aussi $md = ab$ donc $\frac{m}{d} = \frac{ab}{d^2} = \frac{a}{d} \times \frac{b}{d} = a'b'$ d'où $a'b' = 108$.

Le système $\begin{cases} a + b = 651 \\ \dfrac{a \vee b}{a \wedge b} = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = da' \text{ et } b = db' \\ d(a' + b') = 651 \\ a'b' = 108 \end{cases}$

Les nombres premiers entre eux a′ et b′ ont pour produit 108 et leur somme divise 651 puisque $d(a' + b') = 651$.

or $108 = 2^2 \times 3^3$.

- $108 = 108 \times 1$, cette décomposition ne convient pas car $108 + 1$ ne divise pas 651.
- $108 = 4 \times 27$, cette décomposition convient car $4 + 27 = 31$ divise 651 et on a :

$\frac{651}{27 + 4} = 21$ donc $d = 21$)

$a = a' \times d = 4 \times 21 = 84$,

$b = b' \times d = 27 \times 21 = 567$

Conclusion : $a = 84$ et $b = 567$ ou $a = 567$ et $b = 84$.

20

1) $\left.\begin{matrix}\text{d divise a}\\ \text{d divise b}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ d divise $2b-9a=17$ $d=1$ ou $d=17$

2) $\left.\begin{matrix}\text{17 divise a}\\ \text{17 divise b}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 17 divise $b-4a=n+8$

donc il existe $k\in IN^*$ telque $n+8=17k$ (car pour $k=0$ $n=-8\notin IN$)

On pose $k=p+1$, donc il existe $p\in IN$ telque $n+8=17(p+1)\Rightarrow n=17p+9$

Réciproquement : $n=17p+9 \Rightarrow a=17(2p+1)$ et $b=17(9p+5)$

d'ou 17 est un diviseur commun de a et b ainsi $d=17$

21

1)a) • Pour $n=0$, $a_0=12^0-1=0$ donc a_0 est divisible par 11.

• Pour $n\in IN$, supposons que a_n est divisible par 11

Donc il existe $p\in IN$ tel que $a_n=11p$

• Montrons que a_{n+1} est divisible par 11.

On a $a_{n+1}=12^{n+1}-1=12\times12^n-1=12(11p+1)-1=11(12p+1)$

Donc a_{n+1} est divisible par 11

• Conclusion pour tout $n\in IN$, a_n est divisible par 11

b) $A=a_{2014}+a_{2015}+a_{2016}+3$

D'après 1)a) a_n est divisible par 11

donc $a_{2014}+a_{2015}+a_{2016}=11p$ avec $p\in IN$, d'ou $A=11p+3$,

ainsi le reste de A dans la division euclidienne par 11 est 3

2)a) On a $\left.\begin{matrix}\text{d divise x}\\ \text{d divise y}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ d divise $x-2y=11$, d'ou $d=1$ ou $d=11$.

b) On pose $d=11 \Rightarrow y=n-3=11p$ avec $p\in IN \Rightarrow n=11p+3$

Vérification pour $x=2n+5=2(11p+3)=11(2p+1)$

Donc 11 divise x, d'ou $d=1 \Leftrightarrow n=11p+3$ avec $p\in IN$.

c) On a $2\times12^{2016}+5=x$ et $12^{2016}-3=y$ donc $n=12^{2016}$ et $d=x\wedge y=11$ ou $d=1$

Supposons que $d=x\wedge y=11$,donc d'après 2)b) $n-3$ est divisible par 11

Or $n-1=12^{2016}-1$ est divisible par 11 (d'près 1)a))

Donc $(n-1)-(n-3)=2$ est divisible par 11 ce qui est absurde

d'ou la supposition est fausse d'ou $d=1$

Ainsi $\left(2\times12^{2016}+5\right)$ et $\left(12^{2016}-3\right)$ sont premiers entre eux.

22

1) a) $31\times35-27\times40=1085-1080=5$

donc (35,40) est une solution de l'équation (E).

b) (x,y) est une solution de

(E)$\Leftrightarrow 31x-27y=5 \Leftrightarrow 31x-27y=31\times35-27\times40 \Leftrightarrow 31(x-35)=27(y-40)$

On a $31\wedge27=1$, donc d'après Gauss $\begin{cases}27 \text{ divise } x-35\\ 31 \text{ divise } y-40\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=27k+35\\ y=31k'+40\end{cases}$

avec k et $k'\in IN$

Réciproquement: si $(27k+35,31k'+40)$ solution de (E) alors

$31(27k+35)-27(31k'+40)=5 \Rightarrow k=k'$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation (E) sont les couples $(27k+35,31k+40)$ avec $k\in IN$.

c) $\begin{cases}n=31x+2\\ n=27y+7\end{cases} \Rightarrow 31x+2=27y+7 \Rightarrow 31x-27y=5$

Donc (x,y) est une solution de (E), d'après 1)b) $x=35+27k$ et $y=40+31k$ avec $k\in IN$

d'ou $n=31(35+27k)+2=1087+837k$ avec $k\in IN$

Réciproquement: $n=31(35+27k)+2=31x+2$

$n=1087+837k=1080+31\times27+7=27(40+31k)+7=27y+7$

Conclusion: $S_{IN}=\{1087+837k, k\in IN\}$.

2)a) $\left.\begin{array}{l}d \text{ divise } x\\ d \text{ divise } y\end{array}\right\} \Rightarrow d$ divise $31x-27y=5$ (car x et y solutions de (E))

Donc $d=1$ ou $d=5$

b) $d=5 \Rightarrow 5$ divise $x \Rightarrow 5$ divise $x-35=27k$

Or $5\wedge27=1$ donc d'après Gauss 5 divise k d'ou $k=5p$ avec $p\in IN$.

Par suite $x=135p+35$,ainsi le reste dans la division euclidienne de x par 135 est 35.

Chapitre 8
Nombres premiers

1/ Nombres premiers

Un entier naturel $p \geq 2$ est dit premier si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier.
Il existe une infinité de nombres premiers.

Théorème

Tout entier naturel n admet au moins un diviseur premier.
Si n est un entier naturel distinct de 1, alors le plus petit diviseur de n distinct de 1 est premier.

Entier composé

Un entier naturel distinct de 1, non premier est appelé entier composé.

Théorème

Un entier naturel n > 1 est composé, si et seulement si, il admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

2/ Théorème fondamental de l'arithmétique

Théorème

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, se décompose en un produit de nombres premiers.

Théorème

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe des nombres premiers distincts deux à deux $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et des entiers naturels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tel que $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ et n se décompose de façon unique sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$.

Exemple :

$$1617 = 3 \times 7^2 \times 11.$$

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels et p un nombre premier qui divise le produit ab. Si p ne divise pas a alors p divise b.

Petit Théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un entier naturel. Alors p divise $a^p - a$.

EXERCICES

1 Soit un nombre premier p et deux entiers naturels a et b.

1) Montrer que si p divise b^2 alors p divise b.
2) Montrer que si p est un diviseur commun de a et de b^2 alors p divise $\text{pgcd}(a,b)$.
3) En déduire que si a et b sont premiers entre eux alors a et b^2 le sont.

2 On considère le nombre $E = n^4 + n^2 + 1$, n étant un entier naturel non nul.

1) Décomposer E en produit de deux facteurs du second degré.
2) Le nombre E peut-il être premier ?

3 Un entier naturel est dit parfait s'il est la somme de tous ses diviseurs, excepté lui-même.

1) Le nombre 28 est-il parfait ?
2) Déterminer un entier p premier tel que le nombre $2^4 p$ soit parfait.
3) Soient n et p deux entiers naturels , n non nul et p premier, quelle doit être l'expression nécessaire de p en fonction de n pour que $2^n p$ soit parfait ? Donner la liste des nombre parfaits de cette forme pour $n < 10$.

4

1) Expliquer pourquoi tout entier naturel peut s'écrire de la forme 6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4 ou 6k+5, $k \in \mathbb{N}$.
2) Montrer qu'un entier premier impair, est nécessairement de la forme 6k+1, 6k+3 ou 6k+5.
3) Donner des exemples d'entiers naturels de la forme 6k+1, 6k+3 ou 6k+5 qui ne sont pas premiers.

5

1) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $5a = 7b$
2) Déterminer tous les entiers naturels a et b tel que $13(a+3) = 8(b-2)$.

6 Soit n un entier supérieur à 1.

1) Montrer que $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5.
2) Montrer que $n^5 - n$ est divisible par 30.
3) Soit n un entier naturel impair. Montrer que $n^5 - n$ est divisible par 240.

7 Soit n un entier naturel non nul. Soient a et b deux entiers naturels non nuls : $a = 11n + 3$ et $b = 13n - 1$.

1) Démontrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50.
2) Vérifier que (6,27) est un couple solution de l'équation $50x - 11y = 3$.
3) Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls (x,y) vérifiant l'équation : $50x - 11y = 3$.

8

1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: $n - 1$ divise $n^6 - 1$.

2- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: $n^7 - n$ est divisible par 14.

3- En déduire que $\left(5 \times 2016^7 - 10079\right) \wedge 14 = 1$

9 L'entier n étant supérieur ou égal à 1

1) Montrer que $n(n^4 - 1)$ est multiple de 5.
2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, déduire que les nombres n^p et n^{p+4} se terminent par le même chiffre des unités.

10 Soit pour tout entier n supérieur ou égal à 6 : $F(n) = \dfrac{n + 416}{n - 5}$.

1)a) Vérifier que le nombre 421 est premier.

b) En déduire le nombre premier p qui divise $a = 5^p + 416$.

2) On pose $d = (n + 416) \wedge (n - 5)$.

a) Montrer que $d = 421 \wedge (n - 5)$.

b) En déduire les valeurs possibles de d.

c) Déterminer alors les valeurs possibles de n pour les quelles F(n) est un entier naturel.

CORRIGES

1

1) p divise b^2 signifie $b^2 = kp$ $(k \in \mathbb{N})$, d'après cette écriture b divise kp or p est premier donc b divise k qui va s'écrire $k = k'b$ $(k' \in \mathbb{N})$.
   Ainsi $b^2 = k'bp$ et $b = k'p$ d'où p divise b.
2) p diviseur commun de a et b^2, d'après la 1ère question p diviseur commun de a et b. Si $d = a \wedge b$ alors $a = kd$ et $b = k'd$ avec $k \wedge k' = 1$.
   Supposons que p ne divise pas d alors il va diviser k et k' ce qui est impossible car ils sont premiers entre eux, par suite p divise $d = a \wedge b$.
3) Soit $d = a \wedge b^2$ par suite d est un diviseur commun de a et b^2, d'après la 2ème question d divise $a \wedge b$ or $a \wedge b = 1$ par suite $d = 1$ et a et b^2 sont premiers entre eux.

2

1) $E = n^4 + n^2 + 1 + n^2 - n^2 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2$
   $= (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$
2) E est premier si l'un de ses facteurs vaut 1.
   - $n^2 + n + 1 = 1$ impossible $(n \in \mathbb{N}^*)$
   - $n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n(n-1) = 0 \Leftrightarrow n = 1$ (car $n \in \mathbb{N}^*$)

   Par suite $E = 3$.

3

1) Les diviseurs de 28 excepté lui-même sont : 1, 2, 4, 7, 14.
   On a $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Donc 28 est parfait.
2) Les diviseurs de $2^4 p$ excepté lui-même avec p premier sont :
   $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, p, 2p; 2^2p, 2^3p$.
   $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + p + 2p + 2^2p + 2^3p = 2^4p$ si et seulement si
   $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + p + 2p + 4p + 8p = 16p$
   $31 + 15p = 16p$ d'où $p = 31$.
   Conclusion : $2^4 \times 31$ est un nombre parfait.
3) Les diviseurs de $2^n p$, excepté lui-même avec p premier sont :
   $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4 \cdots, 2^n, p, 2p; 2^2p, 2^3p \cdots 2^{n-1}p$.
   On doit avoir $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + p + 2p + 2^2p + 2^3p + \cdots + 2^{n-1}p = 2^n p$
   $$\Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 + p(1 + 2 + 2^2 \cdots + 2^{n-1}) = 2^n p$$
   $$\Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 + p(2^n - 1) = 2^n p \Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 - p = 0$$
   donc il faut avoir $p = 2^{n+1} - 1$ avec p premier et n entier naturel non nul.

Les nombres parfaits de la forme $N = 2^n p$ pour $n < 10$ sont :

$n = 1$ donc $p = 3 \longrightarrow 2^n p = 2^1 \times 3 = 6$

$n = 2$ donc $p = 7 \longrightarrow 2^2 \times 7 = 28$

$n = 4$ donc $p = 31 \longrightarrow 2^4 \times 31 = 496$

$n = 6$ donc $p = 127 \longrightarrow 2^6 \times 127$

$n = 8$ donc $p = 511 \longrightarrow 2^8 \times 511$

Les nombres parfaits de la forme $2^n p$ avec $0 < n < 10$ sont :

6, 28, 496, $2^6 \times 127$, $2^8 \times 511$

4

1) Pour tout entier naturel a et pour tout entier non nul b il existe un couple unique (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ tel que $0 \le r < b$
   On prend $b = 6$, alors tout entier naturel n peut s'écrire $n = 6q + r$ où $0 \le r < 6$ c'est-à-dire $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
   Tout entier peut s'écrire de la forme
   6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4 ou 6k+5, $k \in \mathbb{N}$.
2) Un entier qui n'est pas de la forme 6k+1 , 6k+3 ni 6k+5 est un entier de la forme 6k, 6k+2 ou 6k+4 et par suite c'est un nombre pair donc s'il est distinct de 2 il n'est pas premier et n'est pas impair.
   Donc pour qu'un entier soit premier et impair il est nécessaire qu'il soit de la forme 6k+1, 6k+3 ou 6k+5 $k \in \mathbb{N}$.
3) Pour la forme 6k+1 :
   - $n = 6 \times 4 + 1 = 25$ est impair mais n'est pas premier
   - $n = 6 \times 8 + 1 = 49$ est impair mais n'est pas premier

   Pour la forme 6k+3 :
   - $n = 6 \times 4 + 3 = 27$ est impair mais n'est pas premier
   - $n = 6 \times 7 + 3 = 45$ est impair mais n'est pas premier

   Pour la forme 6k+5 :
   - $n = 6 \times 5 + 5 = 35$ est impair mais n'est pas premier
   - $n = 6 \times 10 + 5 = 65$ est impair mais n'est pas premier

5

1) 5 est un nombre premier qui divise $7b$ et 5 ne divise pas 7 donc 5 divise b et par suite il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b = 5k$.
   En remplaçant b par 5k on trouve $a = 7k$.
   Les couples $(7k, 5k)$ où $k \in \mathbb{N}$ vérifient l'égalité $5a = 7b$.
2) 13 est un nombre premier qui divise le produit $8(b-2)$ et 13 ne divise pas 8 donc 13 divise $b - 2$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b - 2 = 13k$ c'est-à-dire $b = 2 + 13k$.

$a+3=\dfrac{8(13k+2-2)}{13}$ d'où $a+3=8k$ et par suite $a=8k-3$

Les couples $(8k-3, 13k+2)$ où $k \in \mathbb{N}$ vérifient l'égalité $13(a+3)=8(b-2)$.

6

1) • si n est divisible par 5 alors $n(n^4-1)$ est divisible par 5.

• Si n n'est pas divisible par 5 alors n et 5 sont premiers entre eux,

D'après ***Fermat*** (petit) : 5 est premier donc n^5-n est divisible par 5.

Conclusion : Pour tout entier n on a : $n(n^4-1)$ est un multiple de 5.

2) Pour montrer que n^5-n est divisible par 30, il suffit de montrer que ce nombre est divisible par 6 donc par 2 et par 3.

Divisibilité par 2 :

$n=2p$ ou $n=2p+1$ et on remarque que $n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)$

Si n = 2p, alors $n(n^4-1)=2p((2p)^4-1)$ multiple de 2.

Si $n=2p+1$ alors $n^2-1=4p^2-4p=2(2p^2-2p)$ multiple de 2 d'où n^5-n est un multiple de 2.

Conclusion 1 : Le nombre n^5-n est divisible par 2 pour tout entier n.

Divisibilité par 3 : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

Si $n=3k$ alors $n(n^4-1) \in M_3$

Si $n=3k+1$ alors $n^2-1=9k^2+6k=3(3k^2+2k) \in M_3$

Si $n=3k+2$ alors $n^2-1=9k^2+12k+3=3(3k^2+4k+1) \in M_3$

Conclusion 2 : Le nombre n^5-n est un multiple de 3.

Conclusion : n^5-n est divisible par 5, 2 et 3 donc divisible par 30.

3) $240=2^4 \times 3 \times 5$.

n est entier impair. On pose $N=n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)$

On a trouvé que pour tout entier n, N est divisible par 3 et par 5 donc pour montrer que N est divisible par 240 on montre que ce nombre est divisible par $2^4=16$.

n est impair donc il existe un entier naturel p tel que $n=2p+1$.

$N=n(n^2-1)(n^2+1)=(2p+1)(4p^2+4p)(4p^2+4p+2)$

$N=8(2p+1)(p^2+p)(2p^2+2p+1)$

Or $p^2+p=p(p+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs donc divisible par 2.Ainsi :

$N=8\underbrace{p(p+1)}_{2k}\underbrace{(2p^2+2p+1)}_{k'}\underbrace{(2p+1)}_{k''}$ (k , k' et k" deux entiers naturels)

$N=16kk'$

Conclusion : Lorsque n est impair, $n(n^4-1)$ est un multiple de 240.

7

1) Si d est un diviseur de a et b alors d divise $13(11n+3)$ et d divise $11(13n-1)$ donc d divise $13(11n+3)-11(13n-1)=39+11=50$.
D'où tout diviseur de a et b est un diviseur de 50.
2) $50\cdot6-11\cdot27=3$ donc (6,27) est un couple solution de l'équation $50x-11y=3$.
3) $50x-11y=3$ et $50\cdot6-11\cdot27=3$ donc $50x-11y=50\cdot6-11\cdot27$
D'où $50(x-6)-11(y-27)=0$ soit aussi $50(x-6)=11(y-27)$
$11\wedge50=1$, donc 11divise $x-6$ et 50 divise $y-27$
d'où il existe $k,k'\in\mathbb{N}$ tel que $\begin{cases}x-6=11k\\y-27=50k'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=11k+6\\y=50k'+27\end{cases}$
Vérification: $50(11k+6)-11(50k'+27)=3\Rightarrow k=k'$
Les couples solutions de l'équation sont $(11k+6,50k+27)$ où $k\in\mathbb{N}$.

8

1) On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$: $n^6-1=(n-1)(n^5+n^4+n^3+n^2+n+1)$

$n-1\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, donc $n-1$ divise n^6-1.

2) 7 est un nombre premier, donc d'après Fermat
pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$: n^7-n est divisible par 7.

D'après 1) $n^7-n=n(n-1)(n^5+n^4+n^3+n^2+n+1)$

pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$: $n(n-1)$ est pair

On a $\left.\begin{array}{l}7 \text{ divise } n^7-n\\ 2 \text{ divise } n^7-n\\ 2\wedge7=1\end{array}\right\}\Rightarrow 7\times2=14$ divise n^7-n

3) On a $5\times2016^7-10079=5\left(2016^7-2016\right)+1$

D'après 2) 14 divise 2016^7-2016 donc $5\times2016^7-10079=14q+1$ avec $q\in\mathbb{N}$

Donc $\left(5\times2016^7-10079\right)\wedge14=1$

9

1) On a $n(n^4-1)=n^5-n$, 5 est premier donc d'après Fermat

5 divise $n(n^4-1)$.

2) ***Rappel*** : deux nombres qui ont le même chiffre des unités si leur différence est divisible par 10

On a $p\in IN^*$ donc : $n^{p+4}-n^p=n^{p-1}n(n^4-1)$, d'après 1) 5 divise $n(n^4-1)$

Donc 5 divise $n^{p+4}-n^p$.

D'autre part $n^{p+4}-n^p=n^{p-1}n(n^4-1)=n^{p-1}n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

On a pour tout entier supérieur ou égal à 1 : $n(n-1)$ est pair

Donc 2 divise $n^{p+4}-n^p$.

On a 5 divise $n(n^4-1)$ et 2 divise $n^{p+4}-n^p$ or $2\wedge 5=1$ d'ou $n^{p+4}-n^p$ est divisible par 10

Conclusion : n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités

10

1)a) $\sqrt{421}=20{,}518...$

2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 et 19 tous les nombres premiers inférieur à $\sqrt{421}$ puisque aucun d'eux ne divise 421 alors 421 est premier.

b) $a=5^p+416=5^p-5+421$

On a p premier donc d'après Fermat p divise 5^p-5 .

donc p divise a et p divise 5^p-5 par suite p divise 421

or 421 est premier donc $p=421$ ($p=1$ à rejeter car n'est pas premier)

2)a) $d=(n+416)\wedge(n-5)$ on pose $d'=421\wedge(n-5)$.

$$\left.\begin{array}{l}d \text{ divise } n+416\\ d \text{ divise } n-5\end{array}\right\}\Rightarrow d \text{ divise } n+416-(n-5)=421\Rightarrow d \text{ divise } d' \quad (1)$$

Réciproquement

$$\left.\begin{array}{l}d' \text{ divise } 421\\ d \text{ divise } n-5\end{array}\right\}\Rightarrow d' \text{ divise } 421+(n-5)=n+416\Rightarrow d' \text{ divise } d \quad (2)$$

D'après (1) et (2) $d=d'$.

b) D'après 2)a) $d=421\wedge(n-5)$ donc d divise 421 d'ou $d=1$ ou $d=421$.

c) $n\geq 6$: $F(n)\in IN\Rightarrow n-5$ divise $n+416\Rightarrow d=n-5$

or $d=421\wedge(n-5)\Rightarrow$n-5 divise $421\Rightarrow n-5=1$ ou $n-5=421$

$\Rightarrow n=6$ ou $n=426$

Vecteurs de l'espace

1/ Vecteurs de l'espace

⇨ ***Définition***

- Comme dans le plan, un couple de points (A,B) de l'espace définit un vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Pour tout couple de points (C, D) de l'espace :

  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
- Les bipoints (M,M) où M est un point quelconque de l'espace représentent le vecteur nul, noté $\vec{0}$.
- On désigne par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

⇨ ***Conséquence***

Soient A, B, C et D quatre points de $\mathscr{E}$ tels que A, B et C ne soient pas alignés.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme.

⇨ ***Définition***

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$, le réel positif défini par

$\|\vec{u}\| = AB$ où A et B sont deux points quelconques tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

2/ Opérations dans $\mathscr{W}$

⇨ ***Addition des vecteurs***

Soit O un point de $\mathscr{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$.

Soit A, B et C les points de $\mathscr{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $[OC]$ et $[AB]$ ont le même milieu. On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

On note $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

Conséquence

① Pour tous points A, B et C de E, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles)

② Soient A, B, C et D quatre points de $\mathscr{E}$ tels que A, B et C ne sont pas alignés.

Alors ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Propriétés

① Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

① Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{W}$, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

Le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ s'appelle vecteur opposé de $\vec{u}$ et se note $-\vec{u}$.

⇨ ***Multiplication d'un vecteur par un réel***

Définition

- Soit O un point de $\mathscr{E}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace et α un réel.

  Soit A le point de $\mathscr{E}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et M le point de la droite (OA) d'abscisse α dans le repère (O,A).

  On appelle vecteur produit de $\vec{u}$ par α et on note $\alpha\vec{u}$ le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}$

Conséquence

Soient A et B deux points distincts, α un réel et M un point de l'espace.

Alors $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ si et seulement si A, M et B sont alignés et M a pour abscisse α dans le repère (A,B).

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{W}$ et pour tous réels α et β :

- $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$, $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\cdot\beta)\vec{u}$, $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$
- $(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$
- $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

3/ Vecteurs colinéaires – Repère cartésien d'une droite

⇨ ***Définition***

Deux vecteurs de l'espace sont dits colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.

⇨ ***Théorème***

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{W}$.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est une droite, appelé droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Le couple $(A,\vec{u})$ est appelé repère cartésien de la droite $\mathscr{D}(A,\vec{u})$. De plus, M appartient à $\mathscr{D}(A,\vec{u})$ si et seulement si il existe un unique réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$.

⇨ ***Conséquence***

Soient A et B deux points de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathscr{W}$.

Alors $\mathscr{D}(A,\vec{u})$ est parallèle à $\mathscr{D}'(B,\vec{u})$, si et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4/ Combinaison linéaire – repère cartésien d'un plan

⇨ ***Définition***

- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$.

  On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- Lorsque l'un des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des deux autres, on dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement dépendants** ou encore que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est **liée.**

⇨ ***Théorème***

- Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

  L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un plan, appelé plan passant par A et de vecteur directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est appelé repère cartésien du plan $\mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.
- Un point M appartient au plan $\mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, si et seulement si il existe un unique couple de réels (x,y) tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

⇨ ***Conséquence***

Soient O, A, B et C quatre points de $\mathscr{E}$.

O, A, B et C sont coplanaires si et seulement si $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ est liée.

⇨ ***Propriétés***

① Soient A et B deux points de $\mathscr{E}$, trois vecteurs non nuls tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient non colinéaires.

Alors la droite $\mathscr{D}(A, \vec{u})$ est parallèle $\mathscr{P}(B, \vec{v}, \vec{w})$, si et seulement si la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

② Soient A et B deux points de $\mathscr{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$ deux vecteurs non colinéaires.

Alors $\mathscr{P}(A, \vec{v}, \vec{w})$ et $\mathscr{P}'(B, \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles, si et seulement si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'\}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'\}$ sont liées.

5/ Bases - Repères cartésiens

⇨ ***Définition***

Soient $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$.

- Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathscr{W}$ si la famille $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ n'est pas liée.
- Soit O un point de E.
  On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère cartésien de $\mathscr{E}$ si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathscr{W}$.

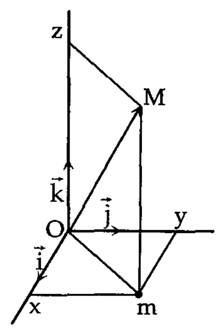
⇨ ***Vocabulaire***

Lorsque la famille de vecteurs $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas liée, on dit que c'est une famille libre.

⇨ ***Théorème***

Soit O un point de $\mathscr{E}$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathscr{W}$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{W}$, il existe un unique triplet (x,y,z) de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
  Le triplet (x,y,z) de réels s'appelle le triplet de composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- Pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet de réels (x,y,z) tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
  Le triplet (x,y,z) de réels s'appelle le triplet de coordonnées du point M dans le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $M(x,y,z)_R$.
  x : l'abscisse de M
  y : l'ordonnée de M
  z : la côte de M.



⇨ ***Règles de calculs***

- Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$.
  Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$. α et β deux réels.
  Les composantes de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' \end{pmatrix}$

- Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$ et $M(x,y,z)$ et $N'(x',y',z')$ deux points de $\mathscr{E}$.
  Le milieu de $[MN]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$
- Soit $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$.
  Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_B$ alors $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$

  Si $M(x,y,z)_R$ et $M'(x',y',z')_R$ alors $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}_B$
- ***Condition pour que deux vecteurs soient colinéaires***
  Soit $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$ et soient $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}_B$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ les trois déterminants $\begin{vmatrix}a&a'\\b&b'\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a&a'\\c&c'\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}b&b'\\c&c'\end{vmatrix}$ sont tous nuls.
  Si $a'b'c'\neq 0$ alors on a : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

6/ Déterminant de trois vecteurs

⇨ ***Définition***

Soit $\mathscr{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$ et soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

On appelle déterminant de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et on note $\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}$ le réel

$$D=x\begin{vmatrix}y'&y''\\z'&z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x'&x''\\z'&z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}$$

$$D=x(y'z''-z'y'')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')$$

$$\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}\longrightarrow x\begin{vmatrix}y'&y''\\z'&z''\end{vmatrix}\quad y\begin{vmatrix}x'&x''\\z'&z''\end{vmatrix}\quad z\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}$$

⇨ ***Théorème***

Un triplet de vecteurs de $\mathscr{W}$ forme une base, si et seulement si, son déterminant relativement à une base quelconque de $\mathscr{W}$ est différent de 0.

EXERCICES

1 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$.
Déterminer α β dans chacun des cas suivants pour que A, B et M soient alignés.
1) , $B(3;2;1)$ et $M(\alpha;\beta;2)$.
2) , et $M(3;\alpha;\beta)$.

2 Soit une base de $\mathscr{W}$
Dans chacun des cas suivants, $\{\vec{} \ \vec{} \ \vec{}\}$ est-elle-liée ?

1) $\vec{}\begin{pmatrix} - \\ \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{}\begin{pmatrix} - \\ \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{}\begin{pmatrix} -2 \\ - \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{}\begin{pmatrix} -1 \\ \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{}\begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$

3 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$ Dans chacun des cas suivants montrer que le triplet est une base de $\mathscr{W}$

1) $\vec{}\begin{pmatrix} \\ \\ - \end{pmatrix}$ $\vec{}\begin{pmatrix} \\ - \\ - \end{pmatrix}$ $\vec{}\begin{pmatrix} \\ - \\ - \end{pmatrix}$ 2) $\vec{}\begin{pmatrix} -2 \\ - \\ \end{pmatrix}$ $\vec{}\begin{pmatrix} -1 \\ \\ - \end{pmatrix}$ $\vec{}\begin{pmatrix} 1 \\ - \\ - \end{pmatrix}$

4 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.
Déterminer α pour que les points $A(2;3;1)$, $B(1;2;0)$, – et α α soient coplanaires.

5 On considère un tétraèdre ABCD. Soient I, J, K et L les points de l'espace définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{} = \frac{1}{}\overrightarrow{}$.
1) Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
2) Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

6 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$.
On donne les points $A(0;1;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(1;-3;2)$ et $D(3;-1;4)$.
1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Montrer que $\mathscr{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathscr{W}$
3) Soit $E(\frac{9}{};5;a)$ où $\in$.

a) Déterminer a pour que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires.

b) Donner alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ dans la base $\mathscr{B}$.

7 Soit ABCD un tétraèdre, on désigne par le milieu de $[AB]$ et on construit les parallélogrammes CAIE et DBIF.
Montrer que la droite (EF) passe par le milieu du segment $[CD]$.

8 est un repère de l'espace.

On donne $u = i + j$, $\vec{v} = \vec{j} + k$; $w = i + \vec{k}$

1) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathscr{V}$

2) Soit $= + +$. Calculer les coordonnées de dans la base $(\vec{u}, v, \vec{w})$.

3) Soit $A(1;-2;1)$ et $B(-1;2;2)$ dans le repère .
Déterminer les coordonnées de B dans le repère

9 est un repère de l'espace. On considère les points

1) Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
Puis calculer les coordonnées du centre I de ce parallélogramme.

2) Soit E d'abscisse 3. Comment choisir les autres coordonnées de E pour que la droite (OE) soit parallèle à (AB) ?

10 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$.
On considère les points $A(3;2;1)$, $B(1;2;0)$ et $C(3;1;-2)$.

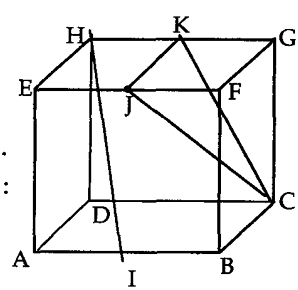
1) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Pour quelle valeur de a le point $D(a;1;3)$ appartient-il au plan (ABC).

11 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$.
On considère les plans $P(A, u, v)$ et $Q(B, \vec{u}', \vec{v}')$ où passant par ,

$$, \begin{pmatrix} \\ - \\ \ \end{pmatrix}, \ \vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ \ \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les P et Q sont sécants.



12 ABCDEFGH est un cube.

I, J et K sont les milieux respectifs de [ ] [ ] [ ].

Démontrer que la droite (HI) est parallèle au plan (JKC) :

a) en utilisant l'outil vectoriel.

b) en choisissant un repère de l'espace.

CORRIGES

1

1) $A(2;3;0)$, $B(3;2;1)$ et $M(\alpha;\beta;2)$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\alpha-2\\\beta-3\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & \alpha-2\\-1 & \beta-3\end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix}-1 & \beta-3\\1 & 2\end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix}1 & \alpha-2\\1 & 2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\beta-3+\alpha-2=0 & (1)\\-2-\beta+3=0 & (2)\\2-\alpha+2=0 & (3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-3+4-2=0\\\beta=1\\\alpha=4\end{cases} \Leftrightarrow M(4,1,2)$$

2) $A(4;0;1)$, $B(1;0;3)$ et $M(3;\alpha;\beta)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-1\\\alpha\\\beta-1\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}-3 & -1\\0 & \alpha\end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix}0 & \alpha\\2 & \beta-1\end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix}-3 & -1\\2 & \beta-1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-3\alpha=0\\2\alpha=0\\-3(\beta-1)+2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\\beta=\frac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow M(3;0;\tfrac{5}{3})$$

2

1) **1ère idée** : Cherchons s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{u}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{u}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases}-2=\alpha-3\beta & (1)\\3=-\alpha+\beta & (2)\\-1=-2\alpha-\beta & (3)\end{cases} \quad (S)$$

$(1)+(2)$ donne $-2\beta=1$ d'où $\beta=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ et $(1)\Rightarrow \alpha=-2-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$

Vérification dans (3) : On remplace α par $-\frac{7}{2}$ et β par $-\frac{1}{2}$ on obtient :

$-2(-\frac{7}{2})+\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$ d'où l'équation (3) n'est pas vérifiée.

Le système (S) est donc impossible.

Conclusion : La famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ **n'est pas liée.**

2ème idée :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2(1+2) - 3(-1-6) - (1-3)$$
$$= 17 \neq 0$$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$ donc la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ **n'est pas liée.**

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1ère idée : Cherchons s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -\alpha + \beta & (1) \\ -1 = \alpha - 2\beta & (2) \\ -2 = -\alpha + \beta & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2)$ donne $-\beta = -3$ d'où $\beta = 3$

$\beta = 3$ et $(1) \Rightarrow \alpha = 2+3 = 5$

Vérification dans (3) : On remplace α par 5 et β par 3, on obtient :

$-5+3 = -2$ d'où l'équation (3) est vérifiée.

Conclusion: $\vec{u} = 5\vec{v} + 3\vec{w}$ donc la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est liée.

2ère idée :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(1-2) + 1(-1+1) - 2(2-1) = 0$$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$ donc la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est liée.

3

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -18 \end{vmatrix} = 2(18-4) - 3(-18+8) - 1(-2+4) = 56 \neq 0$$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$ donc la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ n'est pas liée d'où $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathscr{W}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}-2 & -1 & 1\\-1 & 1 & -2\\1 & -2 & -1\end{vmatrix} = -2(-1-4)+(1+2)+(2-1) = 14$$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$ donc la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ n'est pas liée donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathscr{W}$

4 A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ est une famille liée

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\alpha-2\\\alpha-3\\2\end{pmatrix}$

$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ est liée $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-1 & 1 & \alpha-2\\-1 & -2 & \alpha-3\\-1 & -3 & 2\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$-1(-4+3(\alpha-3))+1(2+3(\alpha-2))-1(\alpha-3+2(\alpha-2)) = 0 \Leftrightarrow$

$4-3(\alpha-3)+2+3(\alpha-2)-\alpha+3-2(\alpha-2) = 0 \Leftrightarrow -3\alpha+16 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{16}{3}$.

5

1) $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.

On a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AC}+0\cdot\overrightarrow{AD} \Rightarrow I(\frac{1}{2},0,0)$

$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+0\cdot\overrightarrow{AD}$

donc $J(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$.

$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK} = 0\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $K(0,\frac{1}{4},\frac{3}{4})$.

$$\overrightarrow{DL}=\frac{1}{7}\overrightarrow{DA}\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AL}=\frac{1}{7}\overrightarrow{DA}\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AL}=\frac{1}{7}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DA}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AL}=0\cdot\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AD}\ \text{ d'où }\ L(0,0,\tfrac{6}{7})$$

2) I, J, K et L sont coplanaires $\Leftrightarrow\left\{\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{IK},\ \overrightarrow{IL}\right\}$ est une famille liée

$\Leftrightarrow$ dét$(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IL})=0$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{-1}{6}\\ \frac{2}{3}\\ 0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ 0\\ \frac{6}{7}\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}\frac{-1}{6}&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{4}&0\\ 0&\frac{3}{4}&\frac{6}{7}\end{vmatrix}=\tfrac{-1}{6}\times\tfrac{1}{4}\times\tfrac{6}{7}+(\tfrac{-1}{2})\cdot0\cdot0+\tfrac{2}{3}\times\tfrac{3}{4}\times\tfrac{-1}{2}-\left[\tfrac{-1}{2}\times\tfrac{1}{4}\times0+0\times\tfrac{3}{4}\times\tfrac{-1}{6}-\tfrac{1}{2}\times\tfrac{2}{3}\times\tfrac{6}{7}\right]$$

$$=-\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=0$$

donc I, J, K et L sont coplanaires.

6

1) $A(0;1;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(1;-3;2)$ et $D(3;-1;4)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}2&1\\0&-4\end{vmatrix}=-8\neq0$, un des trois déterminants de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est non nul donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) $\mathscr{B}=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathscr{W}\Leftrightarrow\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right\}$ n'est pas liée $\Leftrightarrow$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\neq0$

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&-4&-2\\2&3&5\end{vmatrix}$$
$$=2(-20+6)-0+2(-2+12)$$
$$=-8\neq0$$

donc $\mathscr{B}=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathscr{W}$

3) $E(\frac{9}{2},5,a)$

a) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\6\\a-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ les trois déterminants de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont tous nuls

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ a-4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ a-4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\times\frac{3}{2}+6=-6+6=0 \\ 6+4a-16=0 \\ \frac{3}{2}+a-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{5}{2}$$

d'où $E(\frac{9}{2},5,\frac{5}{2})$.

b) $\overrightarrow{CE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{9}{2}-1 \\ 5+3 \\ \frac{5}{2}-2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}=2x+y+3z & (1) \\ 8=-4y-2z & (2) \\ \frac{1}{2}=2x+3y+5z & (3) \end{cases}$$

$(1)-(3) \Rightarrow 3=-2y-2z$ et $(2) \Rightarrow 4=-2y-z$

donc on obtient $(S'): \begin{cases} -2y-z=4 & (1') \\ -2y-2z=3 & (2') \end{cases}$

$(1')-(2') \Rightarrow z=1$ donc d'après $(2')$ $y=-z-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$

Dans (S) $2x+3y+5z=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+3(-\frac{5}{2})+5=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Conclusion : $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

7

On a CAIE parallélogramme donc $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CE}$.

DBIF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{FD}$

or $I=A*B$ donc $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{CE}=\overrightarrow{FD}$ d'où les segment $[EF]$ et $[CD]$ ont même milieu et par suite la droite (EF) passe par le milieu de $[CD]$.

8

1) Pour montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base, on montre que les vecteurs $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ n'est pas liée.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 2$ donc $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ n'est pas liée donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathscr{W}$

2) On désigne par (X,Y,Z) les coordonnées de $\vec{K}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. On écrit alors $\vec{K} = X\vec{u}+Y\vec{v}+Z\vec{w}$ et on remplace les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ par leurs expressions dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$\vec{K} = X\vec{u}+Y\vec{v}+Z\vec{w}$ donc $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} = X(\vec{i}+\vec{j})+Y(\vec{j}+\vec{k})+Z(\vec{i}+\vec{k})$

$$\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} = (X+Z)\vec{i}+(Y+X)\vec{j}+(Z+Y)\vec{k}$$

D'où $\begin{cases}X+Z=1\\X+Y=1\\Y+Z=1\end{cases}$. Ce système est équivalent à $\begin{cases}X+Z=1\\X-Z=0\\Y-Z=0\end{cases}$

On obtient donc $X=Y=Z=\frac{1}{2}$ d'où $\vec{K} = \frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$.

3) Exprimer les coordonnées de B dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, c'est exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs du repère $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$

On désigne par (X,Y,Z) les coordonnées de B dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

On a: $\overrightarrow{AB} = X\vec{u}+Y\vec{v}+Z\vec{w}$ qui s'écrit $-2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k} = (X+Z)\vec{i}+(Y+X)\vec{j}+(Z+Y)\vec{k}$

$\begin{cases}X+Z=-2\\X+Y=4\\Y+Z=1\end{cases}$. Ce système est équivalent $\begin{cases}Z-Y=-6\\X-Z=3\\2Z=-5\end{cases}$

On obtient donc : $Z=-\frac{5}{2}$, $X=\frac{1}{2}$, $Y=\frac{7}{2}$

$B(\frac{1}{2};\frac{7}{2};-\frac{5}{2})$ dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

9

1) ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$D(x;y;z)$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-x \\ -1-y \\ 3-z \end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x=-2 \\ -1-y=1 \\ 3-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}$

Donc $D(7;-2;1)$.

Le centre I du parallélogramme ABCD est le milieu de $[AC]$,

$I(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}, \frac{z_A+z_C}{2})$ d'où $I(3;-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$

2) On note $E(3;y;z)$ d'où $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(OE) et (AB) sont parallèles $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ z & 2 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} y & 1 \\ z & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+2y=0 \\ 6+2z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2} \\ z=-3 \\ 2y-z=0 \text{ (vérifiée)} \end{cases}$ Donc $E(3;-\frac{3}{2};-3)$.

10 1) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On conclut donc que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) $D(a;1;3) \in (ABC)$ signifie $\left\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ est liée ce qui équivaut à dire

$\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} a-3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$(a-3)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 13$

Conclusion : $D(13;1;3)$ appartient au plan (ABC).

11 Les plans $P(A,\vec{u},\vec{v})$ et $Q(B,\vec{u}',\vec{v}')$ sont sécants si et seulement si P et Q ne sont pas parallèles ce qui équivaut à $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}'\}$ ou $\{\vec{u},\vec{v},\vec{v}'\}$ ne sont pas liés.

$$\text{dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{u}') = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}, \vec{u}'\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$= 1(6+2)+1(-3-2)-2(1-2) = 5$$

$$\neq 0$$

Les plans P et Q sont sécants.

12 ABCDEFGH est un cube.

I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[EF]$ et $[HG]$.

a) Pour montrer que (HI) est parallèle au plan (JCK), on montre qu'un vecteur directeur de la droite (HI) s'écrit $a\vec{v}+b\vec{w}$, où $\vec{v},\vec{w}$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (JCK).

$\overrightarrow{HI}$ est un vecteur directeur de la droite (HI) et $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (JKC) puisqu'ils sont non colinéaires.

Exprimons $\overrightarrow{HI}$ en fonction de $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KC}$.

En utilisant la relation de Chasles, on a :

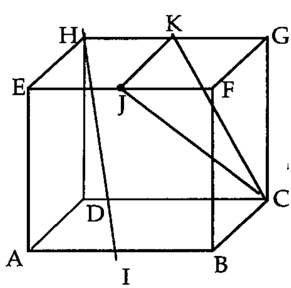
$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}$

or d'après les hypothèses on a : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{KJ}$ et aussi $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$,

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{HG}$. Donc $\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

Il en résulte que $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KJ}$

Donc la droite (HI) est parallèle au plan (JCK).



b) L'espace est muni du repère $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ (ADEH est un carré) donc $H(0,1,1)_{\mathscr{R}}$.

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$ $(I = A * B)$ donc $I(\frac{1}{2},0,0)_{\mathscr{R}}$

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $J(\frac{1}{2},0,1)_{\mathscr{R}}$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $K(\frac{1}{2},1,1)_{\mathscr{R}}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $C(1,1,0)_{\mathscr{R}}$

Pour montrer que (HI) est paralllèle au plan (JCK), on montre que

$\left\{\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JC}\right\}$ est lié.

1ère façon :

$$\text{dét}(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JC}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \overrightarrow{HI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{JC}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

par conséquent $\left\{\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JC}\right\}$ est lié ce qui entraîne (HI) est parallèle au plan (JKC).

Chapitre 10

Produit scalaire - Produit vectoriel dans l'espace

1/ Définition du produit scalaire dans l'espace

⇨ ***Définition***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$ et soit α la mesure en radians de l'angle géométrique déterminé par deux représentants quelconques de même origine des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le réel défini par :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

⇨ ***Conséquences***

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{W}$.

- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ (lorsque $\|\vec{u}\|=1$ on dit que le vecteur $\vec{u}$ est unitaire).
- $\|\vec{u}\|=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de $\mathscr{W}$, le vecteur $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ est unitaire.
- Pour tous points O, A et B de $\mathscr{E}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\cdot OB\cdot\cos(A\hat{O}B)$

2/ Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ et $\vec{w}$ de $\mathscr{W}$.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\vec{u}+\vec{x})\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{x}\cdot\vec{v}+\vec{x}\cdot\vec{w}$

- $(-\vec{u})\cdot\vec{v} = -(\vec{u}\cdot\vec{v})$ • $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$ • $(\alpha\vec{u})\cdot(\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}\cdot\vec{v})$

- $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ (inégalité de Cauchy Schwarz)

  $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

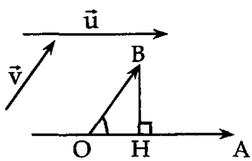
  $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ (inégalité de Minkowski)

• *Produit scalaire et projection orthogonale*

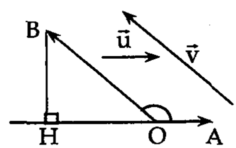
Soit O, A et B trois points de l'espace et H le projeté orthogonal de B sur (OA). Alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$

H étant le projeté orthogonal de B sur (OA).

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \begin{cases} OA\cdot OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ de même sens} \\ -OA\cdot OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ de sens contraires} \end{cases}$$



$\vec{u}\cdot\vec{v} = OA\cdot OH$



$\vec{u}\cdot\vec{v} = -OA\cdot OH$

3/ Orthogonalité

⇨ ***Définition***

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{W}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ et on note $\vec{u}\perp\vec{v}$

⇨ ***Théorème***

Soit A et B deux points de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathscr{W}$. Alors les droites $\mathscr{D}(A,\vec{u})$ et $\mathscr{D}'(B,\vec{v})$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

⇨ ***Vecteur normal à un plan***

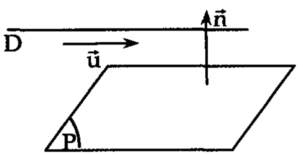
Définition

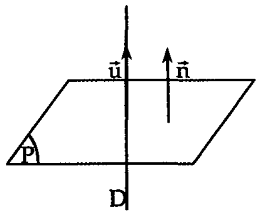
Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathscr{P}$ un plan.

On dit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si la droite $\mathscr{D}(A,\vec{n})$ est orthogonale à $\mathscr{P}$.

Conséquence

- $D//P \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=0$
- $D\perp P \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires





Définition

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriétés

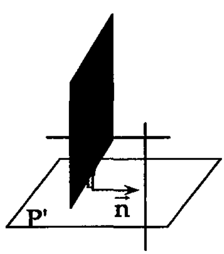
- Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}(O,\vec{u},\vec{v})$ si et seulement si

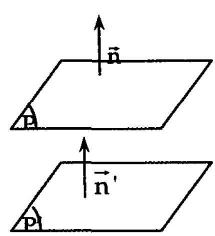
  $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.

- Deux vecteurs non nuls $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont normaux à un même plan, si et seulement si, ils sont colinéaires.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

  $\vec{n}$ un vecteur normal à P et $\vec{n}\,'$ un vecteur normal à P'.

- $P\perp P' \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{n}\,'=0$
- $P//P' \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont colinéaires





4/ Base orthonormée – Repère orthonormé

⇨ ***Définition***

- Une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathscr{W}$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.
- Un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathscr{E}$ est dit orthogonal si la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthogonale.
- Une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathscr{W}$ est dite orthonormée si les vecteurs $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

⇨ ***Expression analytique du produit scalaire***

- Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

  $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Pour tous points $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$ on a

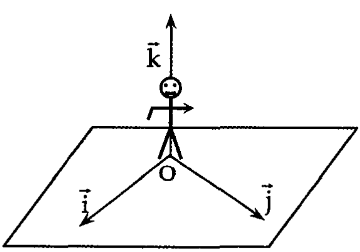
$$MM'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

5/ Produit vectoriel

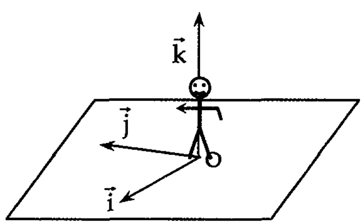
⇨ ***Orientation de l'espace***

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

L'observateur a les pieds en O, regarde vers le vecteur $\vec{i}$ et son corps dans le sens de $\vec{k}$.



Si $\vec{j}$ est à **gauche** on dit que le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est direct et la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est **directe**.



Si $\vec{j}$ est à sa **droite** on dit que le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est indirect et la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est **indirecte**.

L'espace est dit **orienté** s'il est muni d'un repère direct.

⇨ ***Définition du produit vectoriel***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$, A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

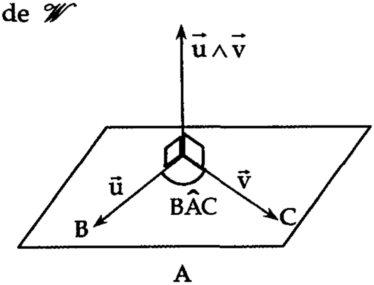
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur défini par :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que :

① $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

② $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de $\mathscr{W}$

③ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin B\widehat{A}C$



⇨ ***Propriétés***

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$

① $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

② $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$

③ Pour tout réel α, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

④ Pour tout réel α, $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$

⑤ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

⑥ Pour tous points A, B et C distincts d'un plan orienté par un vecteur normal et unitaire $\vec{k}$. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\vec{k}$

⑦ Soit ABCD un parallélogramme.

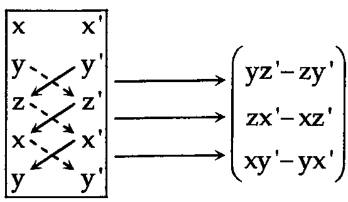
L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

⇨ ***Expression analytique du produit vectoriel***

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$



EXERCICES

1 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(0,2,0)$ et $B(3,0,4)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite $D(B,\vec{u})$.

1) Déterminer les coordonnées du point H.
2) En déduire la distance de A à la droite D.

2 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1,2,-1)$, $B(-1,0,2)$ et $C(0,1,-1)$.

a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Déterminer les longueurs des côtés du triangle ABC et donner à 1 degré près la mesure en degrés de chacun des angles de ce triangle.

3 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{u}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$ et $\vec{v}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$

1) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et de norme 1.
2) Montrer que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}4\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3) En déduire un vecteur $\vec{w}\,'$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\,')$ soit une base orthonormé.

4 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1,-2,1)$ et $B(2,-1,-2)$ et $C(1,0,1)$.

1) Démontrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2) $\vec{n}$ est un vecteur non nul de coordonnés (a,b,c).

Quelles relations doivent vérifier a, b et c pour que $\vec{n}$ soit orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

3) En déduire un vecteur normal au plan (ABC).

5 ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.

Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

6 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;2;2)$ et $B(7;3;0)$ et la droite Δ passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

1) Vérifier que le point $A(1,2,2)$ n'appartient pas à la droite Δ.

2) Soit M un point de Δ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ.

Déterminer $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}$ et en déduire la distance du point A à la droite Δ.

7 Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(1;1;1)$, $B(2;1;0)$ et $C(2;1;2)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) a) Montrer que ABC est un triangle isocèle rectangle.

b) Déterminer les coordonnées du point D pour que ABDC soit un carré.

8 Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$

Soit I le milieu de [AB], J le milieu de [BC] et K le milieu de $[AJ]$.

1) a) Vérifier que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{W}$: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

b) Déterminer l'ensemble (Π) des points M vérifiant $MA^2 - MB^2 = 4$.

2) Déterminer l'ensemble (γ) des points M vérifiant

$$\|5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$$

9 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle vérifiant :
$AB = AE = 2$ et $AD = 4$

Soit I le centre du rectangle ABFE et J le milieu du segment $[EH]$.

1) Calculer les produits scalaires suivants :

 a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$, $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FA}$

 b) En choisissant un repère orthonormé , calculer $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JG}$.

2) Déterminer à $0{,}1°$, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IJG}$.

10 (D) est une droite contenue dans un plan P.

A est un point extérieur à P, B est le projeté orthogonal de A sur P.

Montrer que A et B se projettent orthogonalement sur (D) en un même point C.

11 $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace . On considère les points $A(1,1,1)$; $B(2,0,3)$ et $C(-1,2,0)$. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et calculer l'aire du triangle ABC.

12 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$ et $\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$

1) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et de norme 1.

2) Déterminer un vecteur non nul orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3) En déduire un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormé.

13 Soit (D) une droite déterminée par un point A et un vecteur $\vec{u}$.

M est un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (D).

1) Montrer que $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}$.

2) En déduire que $MH = \dfrac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MA}\|}{\|\vec{u}\|}$. Conclure.

3) Dans un repère orthonormé direct, on considère les points $A(1;2;0)$, $B(-4;1;2)$ et $C(1;3;-1)$. Calculer la distance de C à la droite D passant par A et B.

14

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient $A(3;2;4)$, $B(0;3;5)$, $C(0;2;1)$ et $D(3;1;0)$

1) a) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

b) Calculer l'aire du parallélogramme ABCD

2) Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$

Déterminer les coordonnées de E.

3) Calculer le volume du prisme droit de base ABCD et de hauteur $[AE]$.

15 L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ABCDEFGH est un cube direct. Son arête a pour longueur 1, le centre de la face ABCD est le point I.

1) Déterminer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

2) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que

$(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

3) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M de l'espace tels que

$(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

16 Soit ABC un triangle vérifiant : $AB = 2$; $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$

Déterminer l'ensemble des points P vérifiant : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

17

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$.

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ vérifiant :

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$

18 Soit les points $A(0;1;1)$, $B(1;0;0)$, $C(-1;2;1)$ et $D(0;1;2)$

Calculer $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$. En déduire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

19 Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Etablir la relation :
$\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CB}$

20 On donne dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs
$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Déterminer un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

CORRIGES

1

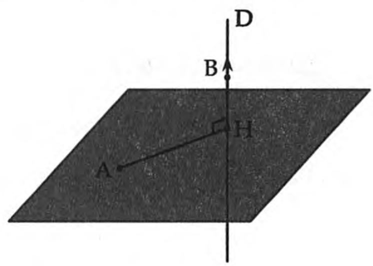
1) Un vecteur directeur de D est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Le plan P passant par A(0,2,0) et perpendiculaire à D.
Donc un vecteur directeur de D est un vecteur normal à P.
H est le projeté orthogonal de A sur la droite $D(B,\vec{u})$ donc

$H \in D(B,\vec{u})$ et $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$. On pose $H(x,y,z)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$H \in D(B,\vec{u}) \Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\overrightarrow{BH} = \alpha\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-3\\y\\z-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-2\alpha\\2\alpha\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+\alpha \\ y = -2\alpha \\ z = 4+2\alpha \end{cases}$$



$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow x\cdot 1 + (y-2)(-2) + z\cdot 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2y + 2z + 4 = 0$$

Les coordonnées de H vérifient le système : $\begin{cases} x = 3+\alpha \\ y = -2\alpha \\ z = 4+2\alpha \\ x-2y+2z+4 = 0 \end{cases}$

$$(3+\alpha) - 2(-2\alpha) + 2(4+2\alpha) + 4 = 0$$

On trouve $\alpha = -\dfrac{5}{3}$ et d'où $H(\dfrac{4}{3},\dfrac{10}{3},\dfrac{2}{3})$

2) $d(A,D) = AH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{10}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-0\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ d'où $d(A,D) = 2$.

2

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. On a : $\dfrac{-1}{-2} \neq \dfrac{0}{3}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $AB^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + 3^2 = 17$ $\qquad AC^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + 0 = 2$

$BC^2 = 1^2 + 1^2 + (-3)^2 = 11$

On applique la relation d'El-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ où $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

$$\cos\widehat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4}{\sqrt{34}}$$

Avec la calculatrice, la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ donne $\widehat{A} \cong 46,69°$

$$\cos\widehat{B} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{13}{\sqrt{187}}$$

Avec la calculatrice, la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ donne $\widehat{B} \cong 18,07°$.

$\widehat{C} \cong 180° - (46,69° + 18,07°)$ d'où $\widehat{C} \cong 115,24°$

3

1) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{3} \times 0 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{2}{3}) + \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ d'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires.

2) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4\sqrt{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (-\sqrt{2}) + \frac{2}{3} \times (-\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{w}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 4\sqrt{2} \times 0 + (\frac{-\sqrt{2}}{2}) \times (-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\sqrt{2}) = 0$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{w}$

$\vec{w}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3) $\|\vec{w}\| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{32 + 2 + 2} = \sqrt{36} = 6$.

Le vecteur $\vec{w'} = \frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$ est unitaire et colinéaire à $\vec{w}$.

D'où $\vec{w'}\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$ est unitaire et orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w'})$ est une base orthonormée de $\mathscr{W}$.

4

$A(1,-2,1)$ et $B(2,-1,-2)$ et $C(1,0,1)$.

1) $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C déterminent un plan.

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur non nul.

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow a+b-3c=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow 0+2b+0=0$

On obtient donc, $b=0$ et $a=3c$ d'où $\vec{n}\begin{pmatrix}3c\\0\\c\end{pmatrix}$.

3) $\vec{n}\begin{pmatrix}3c\\0\\c\end{pmatrix}$ et puisque $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et $b=0$ alors $c\neq 0$.

$\vec{n}=c\vec{u}$ où $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$. $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

5 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

Puisque le tétraèdre ABCD est régulier alors les faces ACD et ADB sont des triangles équilatéraux d'où $D\widehat{A}B = D\widehat{A}C = \frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = AD\times AC\times\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$. De même on trouve $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$

Donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2} = 0$. Les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

6

1) On a $A(1;2;2)$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}6 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ d'où A n'appartient pas à Δ.

2) a) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Soit M(x,y,z) un point quelconque de Δ, il existe donc un réel α tel que $\overrightarrow{BM}=\alpha\vec{u}$ $\quad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-7\\y-3\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BM}=\alpha\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases}x-7=-2\alpha\\y-3=0\\z=\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7-2\alpha\\y=3\\z=\alpha\end{cases} \qquad M(7-2\alpha,3,\alpha)$$

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=(6-2\alpha)(-2)+0+(\alpha-2)=5\alpha-14$

b) La distance de A à la droite Δ est la distance de A au point H projeté orthogonal de A sur la droite Δ.

On obtient H lorsque $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ (M = H) ce qui signifie $\alpha=\dfrac{14}{5}$.

D'où $x_H=7-2\times\dfrac{14}{5}=\dfrac{7}{5}$, $\; y_H=3$; $\; z_H=\dfrac{14}{5}$.

D'où $H(\frac{7}{5};3;\frac{14}{5})$ projeté orthogonal de A sur la droite Δ.

$AH=\sqrt{(\frac{7}{5}-1)^2+(3-2)^2+(\frac{14}{5}-2)^2}=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$ donc $d(A,\Delta)=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

7

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On a $\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=1+1=2\neq 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) a) $AB=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}\quad AC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\quad BC=2$

On a alors $AB=AC$ et $AB^2+AC^2=BC^2$ d'où le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

b) ABDC est un carré $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\text{ABDC est un parallélogramme ayant:}\\ \text{deux côtés consécutifs isométriques et}\\ \text{un angle droit}\end{cases}$

On a trouvé $AB=AC$ et $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ donc il suffit de trouver D tel que ABDC soit un parallélogramme.

ABDC est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$ d'où D(3,1,1)

8 1) a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

b) $MA^2-MB^2=\|\overrightarrow{MA}\|^2-\|\overrightarrow{MB}\|^2=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$

$M\in\Pi \Leftrightarrow MA^2-MB^2=4 \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=4 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=2$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB) et $I\in(AB)$ alors

$\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}$.

$M\in\Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}=2$ (strictement positif) donc $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens et par suite $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}=2 \Leftrightarrow IH\times AB=2$

$M\in\Pi \Leftrightarrow IH=\dfrac{2}{AB}=\dfrac{1}{2}$

Tous les points M de l'ensemble (Π) ont le même projeté le point H du segment [IB] tel que $IH=\frac{1}{2}$.

L'ensemble (Π) est le plan perpendiculaire en H à la droite (AB).

C'est le plan passant par H défini ci-dessus et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A,5) et (B,-2) et G' le barycentre des points pondérés (A,2) et (C,1).

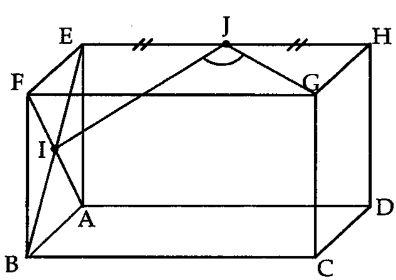
On a pour tout point M du plan : $5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG'}$

$M\in(\gamma) \Leftrightarrow \left\|5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MG'}\right\| \Leftrightarrow MG=MG'$

(γ) est l'ensemble des points équidistants de G et G' donc (γ) est le plan médiateur de [GG'].

9



1) • Calcul de $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$

$\left.\begin{array}{l}(BC) \perp (ABF) \\ I \in (ABF) \\ (ABF) \cap (BC) = \{B\}\end{array}\right\}$ donc B est le projeté orthogonal de I sur (BC).

$\left.\begin{array}{l}(BC) \perp (HGC) \\ (HGC) \cap (BC) = \{C\}\end{array}\right\}$ donc C est le projeté orthogonal de H sur (BC).

On en déduit que : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2 = 16$

• Calcul de $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FA}$

$\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FA} = (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EJ}) \cdot \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA}$

Comme ABFE est un carré, ses diagonales $[BE]$ et $[FA]$ sont

perpendiculaires donc $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FA} = 0$.

Comme la droite $(EJ) \perp (EABF)$ alors $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA} = 0$.

Ainsi, on obtient $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FA} = 0$

b) Calcul de $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JG}$

Le repère $(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$ est orthonormé.

Dans ce repère : $I(1,0,1)$; $J(0,2,2)$ et $G(2,4,2)$.

Ainsi $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}1 \\ -2 \\ -1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JG}\begin{pmatrix}2 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix}$.

On a alors : $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JG} = 1 \times 2 + (-2) \times 2 + (-1) \times 0 = -2$.

2) $\|\overrightarrow{JI}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ et $\|\overrightarrow{JG}\| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\cos \widehat{IJG} = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JG}}{JI \times JG} = \frac{-2}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

En utilisant la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ de la calculatrice, on obtient $\widehat{IJG} \cong 106{,}8°$ à $0{,}1°$ près.

10 On note C est le projeté orthogonal de B sur (D). Il s'agit alors de montrer que C est le projeté orthogonal de A sur (D), c'est-à-dire (AC) est perpendiculaire à (D). On montre alors que leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

On pose $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D). Il s'agit alors de montrer que $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=0$

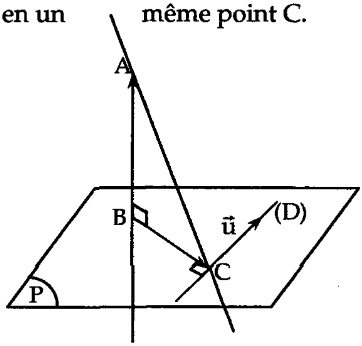
- B est le projeté orthogonal de A sur (P), donc (AB) est perpendiculaire à (P), donc orthogonale à toute droite de (P), donc à (D). D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0$
- C est le projeté de B sur (D) donc (BC) est perpendiculaire à (D) donc $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{u}=0$.

  On veut démontrer que $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=0$ et on sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{u}=0$.

  D'où l'idée d'écrire $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

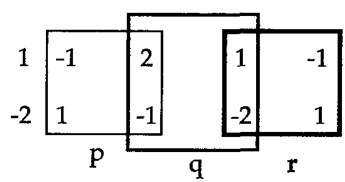
  Alors $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\vec{u}=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}+\overrightarrow{BC}\cdot\vec{u}=0$

D'où (AC) et (D) sont perpendiculaires et par suite A et B se projettent orthogonalement sur D en un même point C.



11

- On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.



$p=-1\times(-1)-2=-1$
$q=2\times(-2)-1\times(-1)=-3$ d'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$
$r=1\times1-(-1)\times(-2)=1-2=-1$

Comme le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est non nul, les points A, B et C ne sont pas alignés.

- On sait que $\mathscr{A}(ABC)=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

comme $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{11}$

donc $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{1}{2}\sqrt{11}$ (en unités d'aire).

12

1) $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}} = 1$ et $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{4}} = 1$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{3}\times 0 + (-\dfrac{\sqrt{2}}{2})(\dfrac{2}{3}) + \dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$ d'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc unitaires et orthogonaux.

2) Le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$\vec{u}\wedge\vec{v} \neq \vec{0}$ car les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ & p & & q & & r \end{array}$$

$p = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $q = \dfrac{-\sqrt{2}}{6}$ et $r = \dfrac{-\sqrt{2}}{6}$

d'où $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\| = \sqrt{(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2+(\frac{-\sqrt{2}}{6})^2+(\frac{-\sqrt{2}}{6})^2} = \sqrt{\frac{8}{9}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}} = \sqrt{\frac{36}{36}} = 1$.

D'où est unitaire et orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée.

13

1) Montrons que $\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM} = \vec{u}\wedge\overrightarrow{HM}$:

On sait que A et H sont deux points de la droite D, donc $\vec{u}\wedge\overrightarrow{AH} = \vec{0}$

D'où l'idée d'écrire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}$.

On obtient donc : $\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM} = \vec{u}\wedge(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}) = \underbrace{\vec{u}\wedge\overrightarrow{AH}}_{\vec{0}} + \vec{u}\wedge\overrightarrow{HM} = \vec{u}\wedge\overrightarrow{HM}$

D'où $\quad \vec{u}\wedge\overrightarrow{AM} = \vec{u}\wedge\overrightarrow{HM}$

2) $\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM} = \vec{u}\wedge\overrightarrow{HM}$ d'où $\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{HM}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|\times HM\times\underbrace{\sin(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{HM}})}_{1}$

car H est le projeté orthogonal de M sur la droite D entraîne $\vec{u}\perp\overrightarrow{HM}$

D'où $\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right\| = \|\vec{u}\| \times HM$ et par suite $HM = \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

Conclusion : $d(M,(D)) = \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

3) D passe par A et B donc on peut prendre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur de (AB). $d(C,(D)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$

$$\begin{array}{cccccc} -5 & -1 & 2 & & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & & 0 & 1 \\ & p & & q & & r \end{array}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-5\\-5\end{pmatrix}$

d'où $\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{1+25+25} = \sqrt{51}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30}$

D'où $d(C,(D)) = \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{51}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\dfrac{51}{30}}$

14

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

et par suite ABCD est un parallélogramme.

b) $\mathscr{A}(ABCD) = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccccc} -3 & 1 & 1 & & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & & 0 & -1 \\ & & & q & & r \end{array}$$

$\mathscr{A}(ABCD) = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{9+144+9} = \sqrt{162}$ (en unités d'aire)

2) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_0-3\\y_0-2\\z_0-4\end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$ a pour coordonnées $(-1;-4;1)$

donc $\begin{cases} x_0-3=-1 \\ y_0-2=-4 \\ z_0-4=1 \end{cases}$ ce qui donne $x_0 = 2$; $y_0 = -2$ et $z_0 = 5$

$E(2;-2;5)$

3) $\mathscr{V}(EABCD) = AE \times \mathscr{A}(ABCD)$

or $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$ donc $AE = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$

$\mathscr{V}(EABCD) = \sqrt{18} \times \sqrt{162} = 54$ (en unités de volume).

15

1) $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ est un vecteur orthogonal aux vecteur $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ Puisque

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont unitaires et orthogonaux alors $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ est tel que

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA})$ doit être une base orthonormée directe. Or

ABCDEFGH est un cube « direct » alors $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$ est une base

orthonormée directe donc $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BF}$.

2) $M \in (E_1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Or d'après la question précédente

$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BF}$

d'où $M \in (E_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires
L'ensemble (E_1) est la droite (BF).

3) $M \in (E_2) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{BM}$
(E_2) est le plan perpendiculaire en B à la droite (BF)
D'où $(E_2) = (ABC)$.

16 Par hypothèse, ABC est un triangle ce qui indique que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$. On conclut que P est distinct de A. (1)

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan P donc $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
un vecteur normal au plan P = (ABC) et donc vecteur directeur de toute droite perpendiculaire au plan (ABC) (2)

Soit (D) la droite perpendiculaire à (ABC) en A. L'ensemble des points P est $(D)\setminus\{A\}$

17

a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow M\in(AB)$

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ est la droite (AB).

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CM}=\vec{0}$ est la droite passant par C et parallèle à (AB).

18

Rappel : Soit $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan P passant par un point A.

P est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\text{ donc }\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\text{ et}$$

$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0+0+0=0$.

or $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$, étant un vecteur non nul, est un vecteur normal au plan

(ABC) et puisque $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$ alors $(AD)//(ABC)$ et par suite

$D\in(ABC)$. Par conséquent les points A, B, C et D sont coplanaires.

19 Tous les vecteurs du premier membre ont pour origine D. D'où l'idée d'écrire le deuxième membre $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB})\wedge(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC})$

$\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}-\underbrace{\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DB}}_{\vec{0}}-\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}$ or $-\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}$

d'où $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}$

On obtient donc $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}$.

20 Si $\vec{u} \wedge \vec{v}$ n'est pas nul, c'est un vecteur directeur de la droite orthogonale à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On a : $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix}2\times2-(-1)\times1\\4\times2-(-1)\times1\\4\times(-1)-(-1)\times2\end{pmatrix}$ d'où $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix}5\\-9\\-2\end{pmatrix}$

$$\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \sqrt{5^2+(-9)^2+(-2)^2} = \sqrt{110}$$

Il existe deux vecteurs unitaires orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$\overrightarrow{w_1} = \frac{1}{\sqrt{110}}\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\overrightarrow{w_2} = -\frac{1}{\sqrt{110}}\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Equations de droites et de plans
Equation d'une sphère

1/ Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Théorème

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\mathscr{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit le point $A(x_0,y_0,z_0)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

L'ensemble des points M(x,y,z) vérifiant $\begin{cases}x=x_0+\alpha a\\y=y_0+\alpha b\\z=z_0+\alpha c\end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ est la droite $\mathscr{D}(A,\vec{u})$.

Le système précédent est appelé représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}(A,\vec{u})$.

2/ Représentation paramétrique d'un plan de l'espace

Théorème

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\mathscr{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit le point $A(x_0,y_0,z_0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points M(x,y,z) vérifiant $\begin{cases}x=x_0+\alpha a+\beta a'\\y=y_0+\alpha b+\beta b'\\z=z_0+\alpha c+\beta c'\end{cases}$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ est le plan $\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$.

Le système précédent est appelé représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$.

3/ Equation cartésienne d'un plan de l'espace

Théorème :

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\mathscr{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Pour tout plan $\mathscr{P}$, il existe quatre réels a, b, c et d vérifiant $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et tels que M(x,y,z) appartient à $\mathscr{P}$, si et seulement si $ax+by+cz+d=0$.

L'équation $ax+by+cz+d=0$ est appelée équation cartésienne de $\mathscr{P}$

Théorème :

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de l'espace et a, b, c et d quatre réels tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

L'ensemble des points M(x,y,z) vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.

4/ Positions relatives de droites et plans

Théorème

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère cartésien $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'ensemble des points M(x,y,z) tels que $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'y + d' = 0 \end{cases}$ est une droite si et seulement si les triplets (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas proportionnels.

5/ Equations cartésiennes dans un repère orthonormé

Théorème

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriétés

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si un plan $\mathscr{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$

Vecteur d'un plan

Soit P un plan dont une équation cartésienne est : $ax + by + cz + d = 0$

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur de P $\Leftrightarrow$ $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

6/ Distance d'un point à un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

La distance de A à P, notée $d(A,P)$ est le réel $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

7/ La sphère

⇨ ***Définition***

Soit I un point de l'espace et R un réel strictement positif.
La sphère de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $IM = R$.

⇨ ***Théorème***

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace et R un réel strictement positif.
L'ensemble des points M(x,y,z) tels que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ est la sphère de centre A et de rayon R.

⇨ ***Théorème***

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit a, b, c et d quatre réels. On pose $h = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$ et on note

$A(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$. L'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \text{ est :}$$

- l'ensemble vide si $h < 0$
- le point A si $h = 0$
- la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{h}$ si $h > 0$.

⇨ ***Théorème***

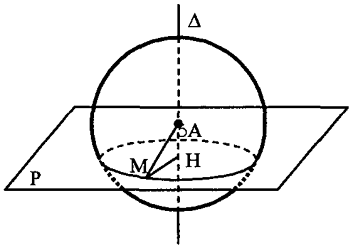
Soit A et B deux points distincts de l'espace.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

⇨ ***Intersection d'une sphère et d'un plan***

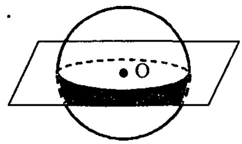
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit S une sphère de centre A et de rayon R. Soit P un plan, d la distance de A à P et H le projeté orthogonal de A sur P.
Alors l'intersection de S et P

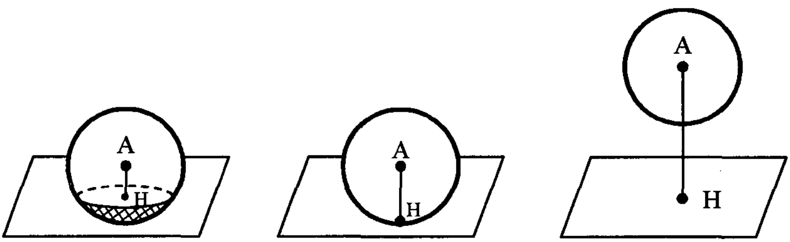
- est vide si $d > R$
- est réduite au point H si $d = R$
- est le cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ et de centre H si $d < R$.



⇨ Cas particulier

Un plan diamétral passe par le centre de la sphère .
On appelle grand cercle d'une sphère l'intersection de la sphère avec un plan diamétral.
Un grand cercle a le même centre et le même rayon que la sphère.





$AH < R$	$AH = R$	$AH > R$
L'intersection est un cercle	L'intersection est un point	L'intersection est vide

EXERCICES

1 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-2t \\ z = -3t \end{cases} \; (t \in \mathbb{R})$

Quels sont parmi les points suivants ceux qui appartiennent à cette droite.
A(3,−1,−3) ? B(0,2,1) ?

2 L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.
Etudier la position relative des droites D_1 et D_2 puis D_1 et D_3 :

$D_1 : \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases} \; (t \in \mathbb{R})$; $D_2 : \begin{cases} x = 6k \\ y = 2-2k \\ z = 5-4k \end{cases} \; (k \in \mathbb{R})$; $D_3 \begin{cases} x = 7+2t' \\ y = 2+2t' \\ z = -6-t' \end{cases} \; (t' \in \mathbb{R})$

3 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les droites $D_1 : \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = -1+\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases} \; (\alpha \in \mathbb{R})$; $D_2 : x-2 = y-1 = \dfrac{2-z}{2}$

1) Montrer que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.
2) Donner une équation cartésienne du plan P contenant D_1 et parallèle à D_2.

4 Dans un repère orthonormé, deux plans
$P_1 : x-4y+7=0$ et $P_2 : x-2z+5=0$

1) Vérifier que P_1 et P_2 sont sécants.
2) Donner une représentation paramétrique de leur droite D d'intersection.

5 Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation : $x-2y+3z-1=0$

et la droite Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = -1+2\alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Vérifier que Δ et P sont sécants.
b) Trouver les coordonnées du point d'intersection du plan P et la droite Δ

6 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit le plan P d'équation $2x+y-2z-4=0$

Représenter le plan et caractériser ce plan par un point A et une base $(\vec{u},\vec{v})$.

7 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par le point A et parallèle à P et P′

$$A(1,-2,3)\ ,\ P:\begin{cases}x=\alpha-\beta\\ y=1-\alpha+2\beta\\ z=1+2\alpha+2\beta\end{cases}\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad P':\begin{cases}x=2+s+t\\ y=1-s+2t\\ z=3s-t\end{cases}\ (s,t)\in\mathbb{R}^2$$

8 L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct.

$$P: 2x-y+z-1=0 \text{ et } P': x+2y-z=0$$

En utilisant le produit vectoriel, vérifier que P et P′ sont sécants donner un vecteur directeur de leur droite d'intersection.

9 $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

A, B et C sont les points de coordonnées : $A(-1,1,3)$; $B(2,1,0)$; $C(4,-1,5)$.

1) Existe-t-il un plan unique contenant ces trois points ?
2) Si oui donner une équation de ce plan.

10 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.

Dans chacun des cas suivants : trouver l'équation cartésienne du plan P passant par A et contenant la droite D :

a) $A(1;1;1)$ et $D: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=z$

b) $A(1;1;2)$ et $D: \begin{cases}x+y=0\\ 4x+y-z+1=0\end{cases}$

11 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

I/ Montrer que les plans P_m d'équations $(2m+1)x+my-(5m+2)z+m^2=0$ sont parallèles à une même droite lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

II/ $P_m : (m^2+5m+4)x-(m^2-9)y+mz-m=0$, où m est un paramètre réel.

Déterminer l'équation du plan P_m dans chacun des cas suivants :

a) P_m est parallèle à l'axe de coordonnées (x′Ox).

b) P_m est parallèle à $(y'Oy)$.

c) P_m est parallèle à (z′Oz).

d) P_m est parallèle à la droite D d'équations $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$

e) Montrer que les plans P_m passent par un point fixe lorsque m varie.

12 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Trouver des équations cartésiennes de la droite D passant par $A(2;1;1)$ et sécante aux deux droites $(D'):\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3} \end{cases}$ et $(D''):\begin{cases} y=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$

2) Trouver un vecteur directeur de D et une représentation paramétrique de D.

13 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(1,-1,3)$ et le plan P d'équation $-2x-3y+4z+16=0$.

1) Calculer la distance du point A au plan P.
2) a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan P.
   b) Retrouver la distance de A au plan P.

14 On donne dans une base orthonormé directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Déterminer une équation du plan P de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et contenant le point de coordonnées $A(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

15 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $A(2;-1;3)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $A(3;2;-1)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

16 L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.
On considère les plans $(P): 2x-y+2z-5=0$ et $(P'): 2x+2y-z-4=0$.
Soit $A(1,2,-1)$.

2) Montrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.
3) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D) intersection de (P) et (P').
   b) Déterminer, par ses coordonnées, le point M de la droite (D) pour lequel la distance AM est minimale.

17 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soient $A(1,1,1)$, $B(2,-1,3)$ et $C(1,2,3)$ et $\mathscr{D}$ la droite passant par C de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b) Etudier la position relative de (AB) et $\mathscr{D}$.
2) a) Ecrire une équation cartésienne du plan P passant par C et perpendiculaire à la droite (AB).
   b) Etudier la position de $\mathscr{D}$ et P.
   c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (AB) et P.
   d) Soit M un point de $\mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{CM}=\alpha\vec{u}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.
   Exprimer en fonction de α, IM^2.
   En déduire $d(I,\mathscr{D})$.

18 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soient $A(-1,1,0)$; $B(1,1,1)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

1) Donner une représentation paramétrique de $\mathscr{D}(A,\vec{u})$ et $\mathscr{D}'(B,\vec{v})$.
2) Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont ni orthogonales ni coplanaires.
3) a) Donner une équation cartésienne du plan P contenant $\mathscr{D}$ et parallèle à $\mathscr{D}'$.
   b) En déduire un vecteur directeur de la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
4) a) Donner une équation cartésienne du plan Q contenant $\mathscr{D}'$ et perpendiculaire à P.
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Q et $\mathscr{D}$.
   c) En déduire une représentation paramétrique de Δ.

19 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $m\in\mathbb{R}$ et S_m l'ensemble des points M(x ;y ;z) de l'espace vérifiant :

$$x^2+y^2+z^2-2mx-2y-2(m+1)z-m-2=0$$

1) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m.
2) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.
3) Déterminer le plus petit rayon R_m des sphères S_m.
4) Montrer que toutes les sphères contiennent un cercle à préciser.
5) Montrer qu'il existe une seule sphère tangente à P et à Q : y = 0.

20 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient les points $A(2,-1,1)$ et $B(2,0,1)$ et le plan $P: 3x-4z-1=0$.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M(x,y,z) du plan P tel que le triangle AMB soient rectangle en M.

21 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit le plan $P:\ 4y-3z+1=0$ et la droite $D:\begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$ (où $\alpha\in\mathbb{R}$)

Déterminer les sphères de rayon 2, tangentes à P et dont le centre appartient à D.

22 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient $A(1,2,-1)$, $B(3,1,-1)$ et $C(3,1,-2)$. et la droite Δ dont une

représentation paramétrique est $\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=-1 \end{cases}$ (où $\alpha\in\mathbb{R}$)

1) Les points A, B et C sont-ils des points de Δ ?
2) Ecrire une équation de la sphère (S) passant par A et B dont le centre appartient à Δ.
3) Ecrire une équation de la sphère (S′) passant par A et C et dont le centre appartient à Δ.
4) Ecrire une équation de la sphère (S") de centre A et tangente à Δ.

23 Soit ABC un triangle tel que $AB=2$, $AC=4$
Soit I le milieu de $[AB]$.

1) Déterminer l'ensemble (φ) des points M de E vérifiant $MA^2+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

2) Déterminer l'ensemble (ζ) des points M de E vérifiant $MA^2+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=2$.

24 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient les point $A(0,4,-1)$; $B(-2,4,-5)$; $C(1,1,-5)$ et $D(1,0,-4)$.
1) Donner une équation de chacun des plans médiateurs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.
2) Montrer que ces trois plans ont un point commun Ω.
   En déduire que Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.
3) Déterminer la droite Δ axe du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

4) Soit (Γ) la sphère contenant le cercle $\mathscr{C}$ et dont le centre Ω appartient au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Donner une équation de (Γ)
   b) Ecrire une équation cartésienne du plan P tangent à (Γ) en A.
   c) Déterminer une équation du plan Q parallèle à P et tangent à (Γ).

25 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(-1;-1;1)$, $B(3;2;-1)$ et $C(1;\frac{1}{2};1)$.

I) 1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   2) Déterminer une équation cartésienne du plan P = (ABC).

II) Soit m un réel. On considère l'ensemble S_m des points $M(x,y,z)$ vérifiant $x^2+y^2+z^2-2mx-2(m+1)y+m^2+2m=0$

1) a) Montrer que S_m est une sphère dont on précisera, en fonction de m, le centre I_m et le rayon R_m.
   b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

2) a) Etudier suivant les valeurs de m l'intersection de la sphère S_m et du plan P.
   b) Déterminer $S_{-5}\cap P$ et $S_0\cap P$.

26 Dans l'espace $\mathscr{E}$, on considère trois points non alignés O, A et B et on désigne par G le barycentre des points pondérés $(O;1),(A;2)$ et $(B;3)$.

Soit C un point n'appartenant pas au plan (OAB) et S l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MC}=0$

1) a) Montrer que $(M\in S)$ si et seulement si ($\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0$

b) En déduire la nature de S.

2) Dans la suite l'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; on suppose que $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$ et $C(0,0,4)$.
   a) Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés.
   b) Donner une équation de S.
   c) Soit P le plan d'équation $z=0$. Montrer que P coupe S suivant le cercle de diamètre $[OG]$.

27 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $S=\{M(x,y,z)\in\mathscr{E};\ x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0\}$

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est $x-2y+2z+2=0$
   a) Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle $\mathscr{C}$
   b) Déterminer les coordonnées du centre A et le rayon r du cercle $\mathscr{C}$
3) Soit $M(a,b,-1)$ un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan dont une équation cartésienne est $(a-1)x+(b+2)y+z-a+2b+3=0$
   a) Montrer que M appartient au plan Q
   b) Montrer que S et Q sont tangents en M.

28 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et soit $S=\{M(x;y;z)\in\mathscr{E} \text{ tel que } x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0\}$

1) Vérifier que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r.
2) Soit m un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$

   Soient A, B et N les points de $\mathscr{E}$ tels que :

   $$A(2;0;-1)\ ,\ B(0;0;-1) \text{ et } N(1+m;\sqrt{2m(1-m)};-m)$$

   a) Vérifier que A et B sont diamétralement opposés sur la sphère S
   b) Calculer $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$ et en déduire que $N\in S$.
3) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $x+z-1=0$
   a) Vérifier que $N\in P$.
   b) En déduire que quand m varie dans $[0,1]$ le point N varie sur un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

CORRIGES

1

$1^{\text{ère}}$ idée : La droite D passe par $I(2;1;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

Pour savoir si M est un point de la droite D on peut vérifier si $\overrightarrow{MI}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires puisque $\overrightarrow{AI}=-\vec{u}$

D'où A appartient à la droite D.

$2^{\text{ème}}$ idée :

$A(3,-1,-3)$ appartient à D $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}3=2+t\\-1=1-2t\\-3=-3t\end{cases}$

or $\begin{cases}3=2+t\\-1=1-2t\\-3=-3t\end{cases} \Leftrightarrow t=1$ d'où A appartient à D.

- $B(0,2,1)$ appartient à D $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}0=2+t\\2=1-2t\\1=-3t\end{cases}$

  or $\begin{cases}0=2+t\\2=1-2t\\1=-3t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-2\\t=-\frac{1}{2}\\t=-\frac{1}{3}\end{cases}$ impossible

  Donc le point B n'appartient pas à la droite D.

2 D_1 passe par $A(2;1;-3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$

D_2 passe par $B(0;2;5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$

D_3 passe par $C(7;2;-6)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u_3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

- Position relative de D_1 et D_2

  $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires car $\vec{u_2}=-2\vec{u_1}$ donc $D_1 // D_2$.

D'autre part $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\8\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ car $\frac{-2}{-3} \neq \frac{1}{1}$.

$B \notin D_1$ et par conséquent D_1 et D_2 sont strictement parallèles.

- Position relative de D_1 et D_3

On a : $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u_3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\begin{vmatrix}-3 & 2\\1 & 2\end{vmatrix} = -8 \neq 0$ donc D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

Etudions $D_1 \cap D_3$:

$M(x;y;z) \in D_1 \cap D_3 \Leftrightarrow$ il existe $(t;t') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 7+2t' \\ y = 2+2t' \\ z = -6-t' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-3t = 7+2t' \\ 1+t = 2+2t' \\ -3+2t = -6-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t+2t' = -5 \\ t-2t' = 1 \\ 2t+t' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = -4 \\ 8t' = -8 \\ 2t+t' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$

En remplaçant t dans la représentation paramétrique de (D) on obtient $I(5;0;-5)$ intersection de D_1 et D_3.

3

1) • $D_1 : \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = -1+\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, un vecteur directeur de D_1 est $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$D_2 : x-2 = y-1 = \frac{2-z}{2}$ signifie $D_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$

Si on appelle β la valeur commune des rapports précédents, on en déduit une représentation paramétrique de D_2 :

$D_2 : \begin{cases} x = 2+\beta \\ y = 1+\beta \\ z = 2-2\beta \end{cases}$ $(\beta \in \mathbb{R})$. Un vecteur directeur de D_2 est $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

On a : $\begin{vmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$ d'où les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Par suite les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

- Etudions $D_1 \cap D_2$

$M(x;y;z) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow$ il existe deux réels α et β tels que $\begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = -1+\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2+\beta \\ y = 1+\beta \\ z = 2-2\beta \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\alpha = 2+\beta \\ -1+\alpha = 1+\beta \\ 1+\alpha = 2-2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = -1 \\ \alpha-\beta = 2 \\ \alpha+2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \alpha-\beta = 2 \\ \alpha+2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{3}{2} \\ \alpha+2\beta = 1 \end{cases}$$

Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = -\dfrac{3}{2}$, on a $\alpha+2\beta = \dfrac{1}{2}-3 = -\dfrac{5}{2} \neq 1$

Le système est impossible. D'où $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

Conclusion : D_1 et D_2 ne sont pas parallèles ni sécantes donc elles ne sont pas coplanaires.

2) P contient D_1 et parallèle à D_2.

P contient D_1 signifie tout point de D_1 est aussi point de P_1, en particulier $A(1;-1;1)$ (obtenu pour $\alpha = 0$). On peut aussi déduire qu'un vecteur directeur de D_2 est aussi un vecteur de P_1.

Puisque P est parallèle à D_2 alors tout vecteur directeur de D_2 est aussi un vecteur de P. On a vérifié que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires donc $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de P.

Ainsi le plan P passe par A et ayant $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ comme base.

Déterminons une équation cartésienne du plan P :

$M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow$ il existe deux réels $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(-2-1)-(y+1)(2-1)+(z-1)(-1-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x+3-y-1-2z+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x-2z-y+4 = 0$$

$P : 3x+y+2z-4 = 0$

4

1) Montrons que P_1 et P_2 sont sécants : $P_1 : x-4y+7=0$ et $P_2 : x-2z+5=0$

On a : $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-4}$ d'où les plans P_1 et P_2 sont sécants.

2) Représentation paramétrique de la droite $D = P_1 \cap P_2$.

$M(x,y,z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y+7=0 \\ x-2z+5=0 \end{cases}$

Pour trouver une représentation paramétrique de D, on exprime deux des coordonnées en fonction de la troisième.

Par exemple, on choisit d'exprimer y et z en fonction de x, ce qui revient à

résoudre le système : $\begin{cases} 4y = x+7 \\ 2z = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4} \\ z = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$

Les points M de la droite D ont donc pour coordonnées $(x ; \frac{1}{4}x+\frac{7}{4} ; \frac{1}{2}x+\frac{5}{2})$ où x est un réel quelconque. Posons $x = \alpha$, une représentation paramétrique de

la droite (D) est donc : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{1}{4}\alpha + \frac{7}{4} \\ z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha \end{cases}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$)

5

a) $P : ax+by+cz+d=0$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur de $P \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ , $\vec{u}$ est-il un vecteur de P ?

$-1-2\times 1+3\times 2 = 3 \neq 0$ d'où $\vec{u}$ n'est pas un vecteur de P et par suite la droite Δ coupe le plan P.

b) $M(x,y,z) \in D \cap P \Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=-1+2\alpha \\ \underbrace{(1-\alpha)-2(2+\alpha)+3(-1+2\alpha)-1=0}_{(I)} \end{cases}$

L'équation **(I)** $\Leftrightarrow 1-\alpha-4-2\alpha-3+6\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{7}{3}$

En remplaçant $\alpha=\dfrac{7}{3}$, on obtient

$x=1-\dfrac{7}{3}=-\dfrac{4}{3}$; $y=2+\dfrac{7}{3}=\dfrac{13}{3}$; $z=-1+\dfrac{14}{3}=\dfrac{11}{3}$

$D \cap P=\left\{A(-\frac{4}{3},\frac{13}{3},\frac{11}{3})\right\}$

6 a) Représentation du plan P :

Pour représenter un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ où $(a;b;c) \neq (0;0;0)$

On représente ses traces avec les plans de base, (xOy), (yOz)et (zOx). Pour cela on cherche les points d'intersection (s'ils existent) du plan P avec chacun des axes du repère.

$P: 2x+y-2z-4=0$

Si $y=0$ et $z=0$, alors $x=2$

Le point $A(2,0,0)$ est le point d'intersection de P avec l'axe des abscisses.

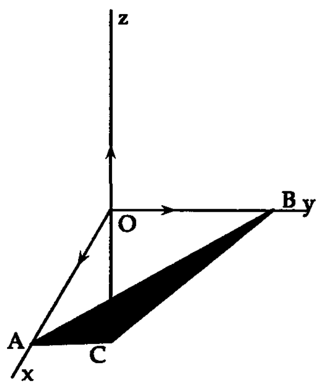
Si $x=0$ et $z=0$, on trouve $y=4$.

Le point $B(0;4;0)$ est le point d'intersection de P avec l'axe des ordonnées.

Si $x=0$ et $y=0$ alors $z=-2$.

Le point $C(0;0;-2)$ est le point d'intersection de P avec l'axe des cotes.

Ainsi $P=(ABC)$.



Caractérisation du plan P :

1ère méthode :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P.

2ème méthode :

Pour trouver un point et deux vecteurs directeurs du plan P il suffit de trouver une représentation paramétrique du plan P.

$$M(x,y,z) \in P \quad \Leftrightarrow \quad 2x+y-2z-4=0$$
$$\Leftrightarrow \quad y=2z-2x+4$$

Pour trouver une représentation paramétrique de P, on exprime l'une des coordonnées en fonction des deux autres

Par exemple, on a choisit d'exprimer y en fonction de x et z.

D'où $P=\{M(x,2z-2x+4;z) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$

On pose $x=\alpha$ et $z=\beta$, on obtient :

$$M(x;y;z) \in P \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-2\alpha+2\beta+4 \quad (\alpha,\beta)\in \mathbb{R}^2 \\ z=\beta \end{cases}$$

Soit $A(1;0;0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car $-2\times 0-1\times 2=-2\neq 0$). On obtient donc :

$$M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \Leftrightarrow M\in P(A,\vec{u},\vec{v})$$

Le plan P : $2x+y-2z-1=0$ passe par $A(1;0;0)$ et $(\vec{u},\vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs de P.

7 • Montrons que P et P' sont sécants et caractérisons la droite d'intersection :

P est le plan passant par $B(0,1,1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

P' est le plan passant par $C(2,1,0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}'\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Il s'agit de montrer qu'un vecteur du plan P n'est pas coplanaires avec les vecteurs directeurs du plan P'.

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{v}')=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -1 & 2\\2 & 3 & -1\end{vmatrix}\neq 0$ la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{v}'\}$ est libre et par suite les plans P et P' sont sécants.

• Soit $\Delta=P\cap P'$.

$$M(x,y,z)\in P\cap P' \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-\beta=2+s+t\\ 1-\alpha+2\beta=1-s+2t\\ 1+2\alpha+2\beta=3s-t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta+s+t+2\\ 1-\beta-s-t-2+2\beta=1-s+2t\\ 1+2\beta+2s+2t+4=3s-t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta+s+t+2\\ \beta=2+3t\\ 1+4+6t+2s+2t+4=3s-t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta+s+t+2\\ \beta=2+3t\\ 9+9t=s \leftarrow \text{il suffit de remplacer s dans la représentation de } P'\end{cases}$$

$$\Delta=P\cap P' : \begin{cases}x=2+s+t\\ y=1-s+2t\\ z=3s-t\end{cases} \text{avec } s=9+9t \Leftrightarrow \Delta : \begin{cases}x=2+9+9t+t\\ y=1-9-9t+2t\\ z=27+27t-t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Delta : \begin{cases}x=11+10t\\ y=-8-7t\\ z=27+26t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

- D passe par le point $A(1,-2,3)$ et parallèle à P et P′ sécants suivant Δ, donc $D//\Delta$ et par suite un vecteur directeur de D est celui de Δ.

$$D : \begin{cases}x=1+10\lambda\\ y=-2-7\lambda\\ z=3+26\lambda\end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$$

8 $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P et $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P′.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ & p & q & r & \end{array}$$

Cherchons les coordonnées de $\vec{n}\wedge\vec{n'}$

$p=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1-2=-1$

$q=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1+2=3$

$r=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4+1=5$

On a donc $\vec{n}\wedge\vec{n'}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$. Donc $\vec{n}\wedge\vec{n'}\neq\vec{0}$.

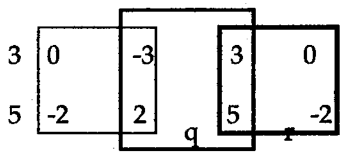
On conclut que les plans P et P' sont sécants selon une droite D dont $\vec{n} \wedge \vec{n'}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ un vecteur directeur.

9

1) ***Idée :***

- Le calcul du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ ou... permet de savoir si A, B et C sont alignés ou non.
- Si A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}$



$p = \begin{vmatrix}0 & -3\\-2 & 2\end{vmatrix} = -6$

$q = \begin{vmatrix}-3 & 3\\2 & 5\end{vmatrix} = -21$

$r = \begin{vmatrix}3 & 0\\5 & -2\end{vmatrix} = -6$

donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-21\\-6\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; A, B et C ne sont pas alignés et donc ils déterminent un plan et un seul.

2) ***Equation du plan (ABC) :***

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC) et on sait que A est dans ce plan.

On pose $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ d'où $\vec{n}\begin{pmatrix}-6\\-21\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

1$^{\text{ère}}$ idée : $(ABC): ax + by + cz + d = 0$

où (a, b, c) sont les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC).

*) On a alors : $(ABC): -6x - 21y - 6z + d = 0$

*) $A(-1,1,3) \in (ABC)$ donc $-6\times(-1) - 21\times1 - 6\times3 + d = 0$ ce qui donne $d = 33$. On obtient donc : $(ABC): -6x - 21y - 6z + 33 = 0$ ou encore

$$(ABC): 2x + 7y + 2z - 11 = 0$$

2ème idée :

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in(ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\\ &\Leftrightarrow -6(x+1)-21(y-1)-6(z-3)=0\\ &\Leftrightarrow -6x-21y-6z+33=0\\ &\Leftrightarrow 2x+7y+2z-11=0 \end{aligned}$$

Une équation de (ABC) est $2x+7y+2z-11=0$.

10

a) $D:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$

Détermination d'un point et un vecteur directeur de D :

Si on appelle α la valeur commune des rapports précédents, on en déduit une représentation paramétrique de D :

$$D:\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\alpha\\ \dfrac{y-2}{3}=\alpha\\ \dfrac{z}{1}=\alpha\end{cases} \Leftrightarrow D:\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=2+3\alpha\\ z=\alpha\end{cases}\ (\alpha\in\mathbb{R})$$

D est la droite passant par $B(1;2;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

D est incluse dans le plan P donc B appartient à P. De plus A est un point de P, donc le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur du plan P.

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur de P.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}=2\neq0$

Donc le couple de vecteurs $(\vec{u},\overrightarrow{AB})$ forme une base du plan P.

Le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\overrightarrow{AB}$ est donc un vecteur normal au plan P.

$\vec{u}\wedge\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$

2	3	1	2	3
0	1	-1	0	1
	-4	2	2	

Une équation cartésienne de P est de la forme $-4x+2y+2z+d=0$

$A(1;1;1)\in P$ donc $-4+2+2+d=0$ ce qui donne $d=0$

$P:-4x+2y+2z=0$ ou encore $P:-2x+y+z=0$

b) $A(1;1;2)$, $D:\begin{cases}x+y=0\\4x+y-z+1=0\end{cases} \Leftrightarrow D:\begin{cases}x=-y\\x=\dfrac{z-1}{3}\end{cases}$

On peut écrire les équations de $D: x=-y=\dfrac{z-1}{3}$ c'est-à-dire

$$D:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{3}$$

D passe par $B(0;0;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

On est ramené à la même question précédente a).

On trouve : $P:2x-y-z+1=0$

11

I/ $P_m:(2m+1)x+my-(5m+2)z+m^2=0$

Les plans P_m sont parallèles à même droite de vecteur $\vec{u}(a,b,c)$

$\Leftrightarrow (2m+1)a+mb-(5m+2)c=0$

$\Leftrightarrow m(2a+b-5c)+a-2c=0$

$m(2a+b-5c)+a-2c=0$ est vérifiée pour tout réel m si et seulement si

$\begin{cases}2a+b-5c=0\\a-2c=0\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}a=2c\\b=c\end{cases}$.

Les plans P_m sont parallèles à toute droite de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

II/ a)

$P_m//(x'Ox)\Leftrightarrow \vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur de P_m

$\Leftrightarrow m^2+5m+4=0$ pour $m=-1$ et pour $m=-4$

Les plans correspondants ont pour équations respectives : $8y-z+1=0$ et $7y+4z-4=0$

b) $P_m//(y'y)\Leftrightarrow \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur de $P_m \Leftrightarrow m^2-9=0$ pour $m=3$ ou $m=-3$,

Les plans correspondants ont pour équations respectives :

$28x+3z-3=0$ et $2x+3z-3=0$

c) $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur de $P_m \Leftrightarrow m=0$ donc $P_0 // (z'Oz)$ où $P_0 : 4x+9y=0$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ est un vecteur de $P_m \Leftrightarrow$

$(m^2+5m+4)\times 4-(m^2-9)\times 3+m(-2)=0 \Leftrightarrow m^2+18m+43=0$

$m=-9+\sqrt{38}$ ou $m=-9-\sqrt{38}$

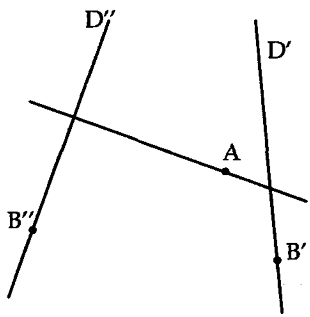
e) $(m^2+5m+4)x_0-(m^2-9)y_0+mz_0-m=0$

$\Leftrightarrow m^2(x_0-y_0)+m(5x_0+z_0-1)+4x_0+9y_0=0 \quad (1)$

L'équation (1) est vérifiée pour tout m réel si et seulement si $\begin{cases}x_0-y_0=0\\5x_0+z_0-1=0\\4x_0+9y_0=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0=y_0=0\\z_0=1\end{cases}$. Les plans P_m passent par le point fixe $I(0;0;1)$.

12



1) On remarque que A n'appartient pas à D' (car $x_A=2\neq 0$) donc on défini le plan P passant par A et contenant D' : $P(A,D')$.

Aussi, A n'appartient pas à D'' (car $y_A=1\neq 0$) donc on définit le plan P' passant par A et contenant la droite (D''): $P'(A,D'')$.

La droite D est l'intersection des plans $P'(A,D')$ et $P'(A,D'')$ passant par A et contenant respectivement D' et D''.

Cherchons les équations cartésiennes de ces plans :

$(D'):\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1+\dfrac{2}{3}z \end{cases}$. On pose $z=\beta$ on obtient une

représentation paramétrique de D' : $\begin{cases} x=0 \\ y=1+\dfrac{2}{3}\beta \quad (\beta\in\mathbb{R}) \\ z=\beta \end{cases}$

D' passe par $B'(0;1;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}'\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.

Le plan P' est le plan passant par $A(2;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}'\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB'}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$$M(x,y,z)\in P' \Leftrightarrow \left\{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB'},\vec{u}'\right\} \text{ est liée} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 0 & -2 \\ y-1 & 2 & 0 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\begin{vmatrix}2&0\\3&-1\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}0&-2\\3&-1\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}0&-2\\2&0\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(-2)-(y-1)(6)+(z-1)(4)=0$$

$$\Leftrightarrow -2x+4-6y+6+4z-4=0 \Leftrightarrow -2x-6y+4z+6=0$$

$$\Leftrightarrow x+3y-2z-3=0$$

$P': x+3y-2z-3=0$

On procède de même pour le plan P''. Les équations de D'' sont équivalentes à $\begin{cases} y=0 \\ x=z-1 \end{cases}$.

D'' passe par $B''(0;0;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}''\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

P'' est le plan passant par $A(2;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}''\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB''}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$. On trouve $P'': x-2y-z+1=0$

Les plans P' et P'' sont sécants car $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{3}{-2}$.

D est l'intersection des plans P' et P'' donc $D:\begin{cases} x+3y-2z-3=0 \\ x-2y-z+1=0 \end{cases}$

b) Représentation paramétrique de D : $M(x;y;z)\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z-3=0 \\ x-2y-z+1=0 \end{cases}$ (S)

$$\begin{cases} x+3y-2z-3=0 & L_1 \\ x-2y-z+1=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y-z-4=0 & L'_1 \longleftarrow L_1-L_2 \\ -x+7y-5=0 & L'_2 \longleftarrow L_1-2\times L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=5y-4 \\ x=7y-5 \end{cases}$$

Les solutions de (S) sont donc les triplets $(7y-5;y;5y-4)$ où y est un réel quelconque.

Puisque y est un réel quelconque, il suffit de poser $y=\alpha$, pour obtenir une représentation paramétrique de D.

On obtient donc $D:\begin{cases} x=-5+7\alpha \\ y=\alpha \\ z=-4+5\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

13

1) $A(1,-1,3)$ et le plan P d'équation $-2x-3y+4z+16=0$.

$d(A,P)=\dfrac{|-2\cdot(1)-3\cdot(-1)+4\cdot(3)+16|}{\sqrt{4+9+16}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$

2) a) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

Soit H le projeté orthogonal de A sur P. On pose $H(x_0,y_0,z_0)$

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_0-1\\y_0+1\\z_0-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc il existe un réel α tel que

$\vec{n}=\alpha\overrightarrow{AH}$ d'où $\begin{cases} x_0=1-2\alpha \\ y_0=-1-3\alpha \\ z_0=3+4\alpha \end{cases}$

D'autre part le point H appartient à P donc ses coordonnées vérifient l'équation de P c'est-à-dire on a : $-2x_0-3y_0+4z_0+16=0$.

d'où les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases} x_0=1-2\alpha \\ y_0=-1-3\alpha \\ z_0=3+4\alpha \\ -2x_0-3y_0+4z_0+16=0 \end{cases}$

$-2(1-2\alpha)-3(-1-3\alpha)+4(3+4\alpha)+16=0$ d'où $29\alpha+29=0$ donc $\alpha=-1$

Donc $H(3,2,-1)$

b) La distance du point A au plan P est égale à la distance AH.

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ d'où $AH=\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$.

d'où $d(A,P)=\sqrt{29}$

14 Un point M(x,y,z) appartient à P si et seulement si $\overrightarrow{AM}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants c'est-à-dire :

$$M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires} \Leftrightarrow \left\{\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right\} \text{ est liée}$$

$$\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\frac{1}{2} \\ z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 4 & -2 \\ y-\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ z-\frac{1}{2} & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - (y-\frac{1}{2})\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (z-\frac{1}{2})\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(x-1) - 26(y-\frac{1}{2}) - 2(z-\frac{1}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x - 26y - 2z - 8 + 13 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 13y - z + 3 = 0$$

$$P: \ 4x - 13y - z + 3 = 0$$

15

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ \hline & -2 & 1 & -3 & \end{array}$$

On sait que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan P.

$$M(x;y;z) \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(-2) + (y+1)(1) + (z-3)(-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + y + z + 14 = 0$$

$$P: -2x + y + z + 14 = 0$$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ \hline & 0 & -5 & 0 & \end{array}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P, d'où $P: 0x - 5y + 0z + d = 0$

c'est-à-dire $P: -5y + d = 0$

On exprime que $A(3;2;-1) \in P$ donc $-5 \times 2 + d = 0$ ce qui donne $d = 10$

Par conséquent : $P: -5y + 10 = 0$ ou encore $P: y = 2$.

16 $P : 2x-y+2z-5=0$ et $P' : 2x+2y-z-4=0$

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

$\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P'.

$\vec{n}\cdot\vec{n}' = 4-2-2=0$ d'où $\vec{n}\perp\vec{n}'$. Les plans P et P' sont perpendiculaires.

2) a) Représentation paramétrique de D :

$M(x;y;z)\in D \Leftrightarrow M(x;y;z)\in P$ et $M(x;y;z)\in P'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-y+2z-5=0\\2x+2y-z-4=0\end{cases}$$

On pose $z=\lambda$ (où $\lambda\in\mathbb{R}$)

$$M(x;y;z)\in D \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=-2\lambda+5 & (1)\\2x+2y=\lambda+4 & (2)\\z=\lambda\end{cases}$$

$(2)-(1) \Rightarrow 3y=3\lambda-1 \Rightarrow y=\lambda-\frac{1}{3}$.

$(1)\Rightarrow 2x=y-2\lambda+5=\lambda-\frac{1}{3}-2\lambda+5 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\lambda+\frac{7}{3}$.

$$M(x;y;z)\in D \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\lambda\\ y=-\frac{1}{3}+\lambda \quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$$

b) Coordonnées de M pour que AM soit minimale :

$M(x;y;z)\in D \Leftrightarrow M(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\lambda;-\frac{1}{3}+\lambda;\lambda)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{AM}$ est de coordonnées $(x_M-x_A, y_M-y_A, z_M-z_A)$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\lambda\\-\frac{7}{3}+\lambda\\\lambda+1\end{pmatrix} \text{ d'où } AM^2=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\lambda\right)^2+\left(-\frac{7}{3}+\lambda\right)^2+(\lambda+1)^2$$

$$AM^2=\frac{16}{9}-\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{49}{9}-\frac{14}{3}\lambda+\lambda^2+\lambda^2+2\lambda+1$$

$AM^2 = \frac{9}{4}\lambda^2 - 4\lambda + \frac{74}{9}$. La distance AM est minimale lorsque AM^2 est minimale.

On pose $AM^2 = f(\lambda)$.

$f(\lambda) = \frac{9}{4}\lambda^2 - 4\lambda + \frac{74}{9}$, $f'(\lambda) = \frac{9}{2}\lambda - 4$, $f'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{9}$

λ	$-\infty$		$\frac{8}{9}$		$+\infty$
$f'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
$f(\lambda)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$f(\frac{8}{9})$ est un minimum absolue de $f(\lambda)$. Donc AM^2 est minimale si $\lambda = \frac{8}{9}$.

C'est-à-dire AM est minimale si $\lambda = \frac{8}{9}$. $M\left(\frac{17}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}\right)$ et

$d(A,(D)) = AM = \sqrt{f(\frac{8}{9})} = \frac{\sqrt{58}}{3}$.

17

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $(AB): \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1-2\alpha \\ z = 1+2\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

b) $\mathscr{D} = \mathscr{D}(C, \vec{u})$, $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\mathscr{D}: \begin{cases} x = 1+4\beta \\ y = 2+\beta \\ z = 3-\beta \end{cases}$ $(\beta \in \mathbb{R})$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{4} \neq \frac{-2}{1}$ donc $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles.
Cherchons l'intersection de $\mathscr{D}$ et (AB) :
$M(x,y,z) \in \mathscr{D} \cap (AB) \Leftrightarrow$ il existe deux réels α et β tel que

$$\begin{cases} 1+\alpha = 1+4\beta \\ 1-2\alpha = 2+\beta \\ 1+2\alpha = 3-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 4\beta = 0 & (1) \\ 2\alpha + \beta = -1 & (2) \\ 2\alpha + \beta = 2 & (3) \end{cases}$$

$(2)-(3) \Leftrightarrow -3 = 0$ impossible.

Donc $\mathscr{D} \cap (AB) = \varnothing$ donc $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas coplanaires.

2) a) $(AB) \perp P \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ normal à P

Donc une équation de P est $x - 2y + 2z + d = 0$.
$C \in P \Rightarrow 1 - 2\times 2 + 2\times 3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$
$P : x - 2y + 2z - 3 = 0$.

b) $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 4\times 1 - 2\times 1 - 2\times 1 = 0$ donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ d'où $\mathscr{D}$ // P.

c) $\{I\} = \mathscr{D} \cap P$.

$I(1+\alpha, 1-2\alpha, 1+2\alpha) \in (AB)$

$I \in P \Rightarrow 1+\alpha-2(1-2\alpha)+2(1+2\alpha)-3=0$

$\Rightarrow 9\alpha-2=0$

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{2}{9}$

D'où $I(\frac{11}{9}, \frac{5}{9}, \frac{13}{9})$

d) $M(1+4\alpha, 2+\alpha, 3-\alpha) \in \mathscr{D}$ (car $\overrightarrow{CM}=\alpha\vec{u}$)

• $IM^2=(4\alpha-\frac{2}{9})^2+(\frac{13}{9}+\alpha)+(\frac{14}{9}-\alpha)^2$

$=16\alpha^2-\dfrac{16}{9}\alpha+\dfrac{4}{81}+\dfrac{169}{81}+\dfrac{26}{9}\alpha+\alpha^2+\dfrac{196}{81}-\dfrac{28}{9}\alpha+\alpha^2$

$=18\alpha^2-2\alpha+\dfrac{41}{9}$

• On pose $f(\alpha)=18\alpha^2-2\alpha+\dfrac{41}{9}$

f est polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(\alpha)=36\alpha-2$

α	$-\infty$		$\frac{1}{18}$		$+\infty$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	

$f(\alpha)$ admet un minimum pour $\alpha=\dfrac{1}{18}$

or $d(I, \mathscr{D})=$ la distance minimale IM.

$d(I,\mathscr{D})=\sqrt{f(\frac{1}{18})}=\sqrt{18\dfrac{1}{18^2}-2\dfrac{1}{18}+\dfrac{41}{9}}=\sqrt{\dfrac{1}{18}-\dfrac{2}{18}+\dfrac{82}{18}}=\sqrt{\dfrac{81}{18}}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}$

18

1) $\mathscr{D}(A,\vec{u}):\begin{cases}x=-1+2\alpha\\ y=1-\alpha\\ z=\alpha\end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$, $\mathscr{D}'(B,\vec{v}):\begin{cases}x=1+\beta\\ y=1+2\beta\\ z=1-\beta\end{cases}$ $(\beta\in\mathbb{R})$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times1-1\times2-1=-1\neq0$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas orthogonales.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-1}{2}$.

Donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

Cherchons $\mathscr{D}\cap\mathscr{D}'$:

$M(x,y,z)\in\mathscr{D}\cap\mathscr{D}'\Leftrightarrow\begin{cases}-1+2\alpha=1+\beta\\ 1-\alpha=1+2\beta\\ \alpha=1-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha-\beta=2 & (1)\\ \alpha+2\beta=0 & (2)\\ \alpha+\beta=1 & (3)\end{cases}$

$(2)-(3) \Rightarrow \beta = -1$

$(3) \Rightarrow \alpha = 1-\beta = 2$

Vérification dans (1) : $2\times2+1=5\neq2$ d'où $\mathscr{D}\cap\mathscr{D}'=\varnothing$.

Conclusion : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

3) a) $\mathscr{D}'//\,P \Rightarrow \vec{v}$ est un vecteur de P.

$\mathscr{D}\subset P \Rightarrow \begin{cases}\vec{u}\text{ est un vecteur de P}\\ A\in P\end{cases}$

D'où $P = P(A,\vec{u},\vec{v})$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

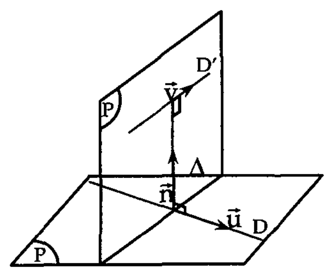
$$M(x,y,z)\in P(A,\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+1 & 2 & 1\\ y-1 & -1 & 2\\ z & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(1-2)-(y-1)(-2-1)+z(4+1)=0$$

$$\Leftrightarrow -x-1+3y-3+5z=0$$

$$\Leftrightarrow x-3y-5z+4=0$$

$P : x-3y-5z+4=0$



b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

Δ est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Donc un vecteur directeur de Δ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Or $\vec{n}\perp\vec{u}$ (car $\mathscr{D}\subset P$) et $\vec{n}\perp\vec{v}$ (car $\mathscr{D}'\subset P$)

d'où $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ.

4) a) $\mathscr{D}'\subset Q \Rightarrow \vec{v}$ est un vecteur de Q et $B\in Q$

$P\perp Q \Rightarrow \vec{n}$ est un vecteur de Q.

On a $\vec{v}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires ($\vec{v}\perp\vec{n}$) d'où $Q=Q(B,\vec{n},\vec{v})$.

$$M(x,y,z) \in Q \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM},\vec{n},\vec{u}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & -3 & 2 \\ z-1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 13x - 4y + 5z - 14 = 0$$

$Q : 13x - 4y + 5z - 14 = 0$.

b) $E(x,y,z) \in \mathscr{D} \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\alpha & (1) \\ y = 1 - \alpha & (2) \\ z = \alpha & (3) \\ 13x - 4y + 5z - 14 = 0 & (4) \end{cases}$

(1), (2) et (3) dans (4) : $13(-1+2\alpha) - 4(1-\alpha) + 5\alpha - 14 = 0$

$$35\alpha - 31 = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{31}{35}$$

$E(\frac{27}{35}, \frac{4}{35}, \frac{31}{35})$ est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et Q.

c) $\left.\begin{array}{l} \Delta \subset Q \\ \mathscr{D} \text{ coupe } Q \text{ en } E \\ \mathscr{D} \text{ et } \Delta \text{ sont sécantes} \end{array}\right\} \mathscr{D} \cap \Delta \text{ - } \{E\}$ d'où $E \in \Delta$

d'où $\Delta = \Delta(E, \vec{n}) : \begin{cases} x = \dfrac{27}{35} + \gamma \\ y = \dfrac{4}{35} - 3\gamma \quad (\gamma \in \mathbb{R}) \\ z = \dfrac{31}{35} - 5\gamma \end{cases}$

19

1) $M(x,y,z) \in S_m \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y - 2(m+1)z - m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2mx) + (y^2 - 2y) + (z^2 - 2(m+1)z) - m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x-m)^2 + (y-1)^2 + (z-(m+1))^2 = m^2 + 1 + (m+1)^2 + m + 2$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y-1)^2 + (z-(m+1))^2 = 2m^2 + 3m + 4$$

Pour $2m^2 + 3m + 4$ on a $\Delta = 9 - 4(8) < 0$ donc $2m^2 + 3m + 4 > 0$ pour tout réel m et par suite S_m est une sphère pour tout réel m.

S_m est de centre $I_m(m;1;m+1)$ et de rayon $\sqrt{2m^2 + 3m + 4}$.

2) $I_m(x,y,z)$ tel que $\begin{cases} x = m \\ y = 1 \\ z = m+1 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$

L'ensemble des points I_m est la droite passant par $I_0(0,1,1)$ et de rayon $R_m = \sqrt{2m^2+3m+4}$.

3) $f(m) = R_m^2 = 2m^2+3m+4$

$f'(m) = 4m+3$.

m	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(m)$	$-$	0	$+$
$f(m)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(m)$ est minimale pour $m = -\frac{3}{4}$ et on a $f(-\frac{3}{4}) = 2\times\frac{9}{16}+3\times(-\frac{3}{4})+4 = \frac{23}{8}$

Donc la valeur minimale de R_m est $\sqrt{\frac{23}{8}}$

4)

$M(x,y,z)\in S_m \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2mx-2y-2(m+1)z-m-2=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2y-2z-2+m(-2x-2z-1)=0$

M appartient à toutes les sphères S_m si et seulement si l'équation $x^2+y^2+z^2-2y-2z-2+m(-2x-2z-1)=0$ est vraie pour tout réel m

Cela signifie que $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y-2z-2=0 \\ -2x-2z-1=0 \end{cases}$

Pour tout réel m, $M(x,y,z)\in S_m \Leftrightarrow M(x,y,z)\in S_0 \cap Q$ où $Q: -2x-2z-1=0$.

On a $I_0(0;1;1)$ et $R_0=\sqrt{4}=2$ donc $d(I_0,Q) = \frac{|-2-1|}{\sqrt{4+4}} = \frac{3}{\sqrt{8}} < 2$

Donc $S_0 \cap Q$ est le cercle de rayon $r = \sqrt{4-\frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{23}{8}}$ et de centre H projeté orthogonal de I_0 sur Q.

$H(x,y,z)$, $\vec{n_Q}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{I_0H}\begin{pmatrix}x\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\overrightarrow{I_0H} = \alpha\vec{n_Q}$

$H(x,y,z)\in Q$.

Les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases} -2x-2z-1=0 \\ x=-2\alpha \\ y=1 \\ z=1-2\alpha \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha-2(1-2\alpha)-1=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{3}{8} \\ x=-2\alpha \\ y=1 \\ z=1-2\alpha \end{cases} \text{ d'où } H(\frac{-3}{4};1;\frac{1}{4}).$$

20

$$M(x,y,z)\in\mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} M(x,y,z)\in P \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4z-1=0 \\ (2-x)(2-x)+(-1-y)(0-y)+(1-z)(1-z)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4z-1=0 \quad (1) \\ x^2+y^2+z^2-4x+y-2z+5=0 \ (2) \end{cases}$$

L'équation (2) $\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(z-1)^2-1+5=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$$

l'équation (2) est celle d'une sphère (S) de centre $\Omega(2,-\frac{1}{2},1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

$M\in\mathscr{S} \Leftrightarrow M\in(P)$ et $M\in(S)$.

Etudions la position de (P) et (S) :

$$d(\Omega,P)=\frac{|3\times2-4\times1-1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}$$

$d(\Omega,P)<R=\frac{1}{2}$ d'où $(P)\cap(S)$ est un cercle de centre H projeté orthogonal de Ω sur le plan (P) et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$ où R est le rayon de (S) et $d=d(\Omega,P)$.

$$r=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{25}}=\sqrt{\frac{21}{100}}=\frac{\sqrt{21}}{10}.$$

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (P). On pose $H(x,y,z)$

On a $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc il existe un réel α tel que $\overrightarrow{\Omega H}=\alpha\,\vec{n}$

équivaut à $\begin{cases} x-2=3\alpha \\ y+\frac{1}{2}=0 \\ z-1=-4\alpha \end{cases}$ et puisque $H\in(P): 3x-4z-1=0$ alors

$$3(2+3\alpha)-4(1-4\alpha)-1=0 \Leftrightarrow 25\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{-1}{25}$$

On obtient donc : $H(\frac{47}{25},-\frac{1}{2},\frac{29}{25})$.

L'ensemble cherché est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $H(\frac{47}{25},-\frac{1}{2},\frac{29}{25})$ et de rayon $\frac{\sqrt{21}}{10}$.

21

Soit Ω le centre d'une sphère (S) de rayon 2 et tangente à P tel que $\Omega \in D$.

$\Omega \in D$ donc il existe un réel α tel que $\Omega(1-2\alpha, 2+\alpha, 1+\alpha)$.

La sphère (S) est tangente au plan P donc $d(\Omega, P) = 2$ rayon de (S).

$$d(\Omega,P)=2 \Leftrightarrow \frac{|4(2+\alpha)-3(1+\alpha)+1|}{5}=2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha+6|}{5}=2$$

$$\Leftrightarrow |\alpha+6|=10 \Leftrightarrow \alpha+6=10 \text{ ou } \alpha+6=-10 \Leftrightarrow \alpha=4 \text{ ou } \alpha=-16.$$

On trouve deux sphères :

S_1 de centre $\Omega_1(-7,6,5)$ et de rayon 2.

S_2 de centre $\Omega_2(33,-14,-15)$ et de rayon 2.

22

1) $A(1,2,-1) \in \Delta$: en prenant $\alpha = 0$.

Si $B(3,1,-1) \in \Delta \Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\begin{cases} 3 = 1+2\alpha \\ 1 = 2-\alpha \\ -1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1$

$B(3,1,-1) \in \Delta$.

$C(3,1,-2) \notin \Delta$ car la côte de tout point de Δ est égal à (-1) alors que $z_C = -2$.

2) On a : A et B deux points de Δ Ω le centre de (S) appartient à Δ alors les points A, B et Ω sont alignés.

De plus A et B sont deux points de la sphère (S) donc $[AB]$ est un diamètre de (S) et par suite le centre Ω est le milieu de $[AB]$

$$\Omega(2,\frac{3}{2},-1) \text{ et } R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(S) : (x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 + (z+1)^2 = \frac{5}{4}$$

3) Il suffit de trouver le centre de S. Soit Ω le centre de (S).

(S) passe par A et B donc Ω appartient au plan médiateur de $[AC]$.

De plus $\Omega \in \Delta$ donc $\Omega \in \Delta \cap Q$.

On note Q le plan médiateur de $[AC]$ et J le milieu de $[AC]$. Q passe par le milieu de $[AC]$ et perpendiculaire à (AC).

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan Q. Donc $Q: 2x-y-z+d=0$

$J(2,\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) \in Q$ d'où $2\times 2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+d=0$ d'où $d=-4$

$Q: 2x-y-z-4=0$.

$$\Omega(x,y,z)\in\Delta\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=2-\alpha\\ z=-1\\ 2x-y-z-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=2-\alpha\\ z=-1\\ 2(1+2\alpha)-(2-\alpha)+1-4=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{3}{5}\end{cases}$$

On obtient donc : $x=1+2(\frac{3}{5})=\frac{11}{5}$; $y=2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$ et $z=-1$

$\Omega\left(\frac{11}{5},\frac{7}{5},-1\right)$.

Le rayon R de (S′) est égal à $\Omega A=\sqrt{\frac{9}{5}}$

$(S'): (x-\frac{11}{5})^2+(y-\frac{7}{5})^2+(z+1)^2=\frac{9}{5}$

4) Ecrire une équation de la sphère (S") de centre C et tangente à Δ.

(S") est de centre C. Pour écrire une équation de (S") on détermine le rayon de cette sphère.

(S") est tangente à Δ donc le rayon de (S") est la distance de C à la droite Δ c'est-à-dire la distance minimale de C à n'importe quel point de Δ.

Tout point M de Δ a pour coordonnées $(1+2\alpha,2-\alpha,-1)$ et $C(3,1,-2)$.

$$CM=\sqrt{(1+2\alpha-3)^2+(2-\alpha-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{(2\alpha-2)^2+(1-\alpha)^2+1}$$
$$=\sqrt{5\alpha^2-10\alpha+6}$$

$CM^2=5\alpha^2-10\alpha+6$

On pose $f(\alpha)=5\alpha^2-10\alpha+6$.

Cherchons α pour que $f(\alpha)$ soit minimale :

$f'(\alpha)=10\alpha-10$, $f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=1$

CM^2 est minimale pour $\alpha=1$ cette distance est égale à $\sqrt{5-10+6}=\sqrt{1}=1$

d'où le rayon de la sphère (S") est égal à 1.

$(S''): (x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1$.

23

1) $M \in (\varphi) \Leftrightarrow MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = 0 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la sphère de diamètre $[AB]$.

(φ) est la sphère de diamètre $[AB]$

2) $M \in (\zeta) \Leftrightarrow MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = 2 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 2$

$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 2$

$\Leftrightarrow MI^2 = 2 + IA^2 = 3$

$\Leftrightarrow MI = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

(ζ) est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{3}$

24

On désigne par : P_1 le plan médiateur de $[AB]$

P_2 le plan médiateur de $[BC]$

P_3 le plan médiateur de $[AD]$

- Equation cartésienne de P_1 :

Soit I le milieu de $[AB]$ donc $I(-1;4;-3)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in P_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\times(-2) + (y-4)\times 0 + (z+3)\times(-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x - 4z - 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2z + 7 = 0 \end{aligned}$$

$P_1 : x + 2z + 7 = 0$

- Equation cartésienne de P_2

Soit J le milieu de $[BC]$, $J(-\frac{1}{2};\frac{5}{2};-5)$. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à P_2 donc $P_2 : 3x - 3y + d = 0$.

$J(-\frac{1}{2};\frac{5}{2};-5) \in P_2$ donc $3\times(-\frac{1}{2})-3\times\frac{5}{2}+d=0$ d'où $d=9$

$P_2 : 3x-3y+9=0$; après simplification :

$P_2 : x-y+3=0$

- Equation cartésienne de P_3 :

Soit K le milieu de $[AD]$ donc $K(\frac{1}{2};2;-\frac{5}{2})$. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à P_3 donc $P_3 : x-4y-3z+d=0$

$K(\frac{1}{2};2;-\frac{5}{2}) \in P_3$ donc $\frac{1}{2}-8+\frac{15}{2}+d=0$ d'où $d=0$

$P_3 : x-4y-3z=0$

2) $M(x;y;z) \in P_1 \cap P_2 \cap P_3 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z+7=0 \\ x-y+3=0 \\ x-4y-3z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=-7 \\ y=x+3 \\ x-4(x+3)-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ x+2z=-7 \\ x+z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3=-1+3=2 \\ z=-3 \\ x=-1 \end{cases}$

Les plans P_1, P_2 et P_3 ont un point commun de coordonnées $(-1;2;-3)$.

$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{\Omega(-15;-12;11)\}$

$\Omega \in P_1 \cap P_2 \cap P_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \Omega B = \Omega C \\ \Omega A = \Omega D \end{cases} \Leftrightarrow \Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$

Ω est équidistant des quatre sommets du tétraèdre ABCD donc Ω est le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

3) Le cercle $\mathscr{C}$ est circonscrit au triangle ABC.
Donc l'axe Δ du cercle $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points équidistants des points A, B et C .

$M \in \Delta \Leftrightarrow MA = MB = MC \Leftrightarrow MA = MB$ et $MB = MC \Leftrightarrow M \in P_1 \cap P_2$

$M(x;y;z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z+7=0 \\ x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2} \\ y=x+3 \end{cases}$

Δ est l'ensemble des points $M(x;-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2};x+3)$ où x est un réel quelconque.

On pose $x=\alpha$, on obtient :

$M(x;y;z) \in \Delta \Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\begin{cases} x=\alpha \\ y=3+\alpha \\ z=-\frac{7}{2}-\frac{\alpha}{2} \end{cases}$

$$\Delta : \begin{cases} x=\alpha \\ y=3+\alpha \\ z=-\frac{7}{2}-\frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

4) a) Déterminer les coordonnées du centre ω de la sphère (Γ)

(Γ) contient le cercle $\mathscr{C}$ donc passe par les points A, B et C.

D'où le centre ω de (Γ) est équidistant de A, B et C et par suite ω appartient à l'axe Δ.

D'autre part $\omega \in (O,\vec{i},\vec{j})$ d'où $\omega \in \Delta \cap (O,\vec{i},\vec{j})$.

Le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ est d'équation $z=0$.

$$\omega(x;y;z) \in \Delta \cap (O,\vec{i},\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=3+\alpha \\ z=-\frac{7}{2}-\frac{\alpha}{2} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=-4 \\ z=0 \\ \alpha=-7 \end{cases}$$

$\omega(-7;-4;0)$ est le centre de la sphère (Γ).

Rayon de la sphère (Γ) : $R=\omega A=\sqrt{(0+7)^2+(4+4)^2+(-1)^2}=\sqrt{114}$

Equation de la sphère (Γ) :

(Γ) : $(x+7)^2+(y+4)^2+z^2=114$

b) P est tangent à la sphère (Γ) en A donc $\overrightarrow{\omega A}$ est un vecteur normal à P.

On a : $\overrightarrow{\omega A}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $P: 7x+8y-z+d=0$

$A(0;4;-1) \in P$ donc $7\times 0+8\times 4-(-1)+d=0$ ce qui donne $d=-33$

$P: 7x+8y-z-33=0$

c) Soit Q un plan parallèle au plan $P: 7x+8y-z-33=0$ donc $Q: 7x+8y-z+\lambda=0$

On cherche parmi ces plans ceux qui sont tangents à (Γ).

$$d(\omega,Q)=\frac{|7\times(-7)+8\times(-4)+\lambda|}{\sqrt{49+64+1}}=\frac{|-81+\lambda|}{\sqrt{114}}$$

Q est tangent à (Γ) si et seulement si $d(\omega,Q)=\sqrt{114}$

$\frac{|-81+\lambda|}{\sqrt{114}}=\sqrt{114}$ d'où $|-81+\lambda|=114$ donc $-81+\lambda=114$ ou $-81+\lambda=-114$

$\lambda=195$ ou $\lambda=-33$

On trouve deux plans tangents à (Γ) :

$Q_1 : 7x+8y-z+195=0$

$Q_2 : 7x+8y-z-33=0$.

25

I) 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$. On a $\begin{vmatrix}4 & 2\\3 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}=6-6=0$ mais $\begin{vmatrix}4 & 2\\-2 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0$ d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (p,q,r) tel que :

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} & 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ & p & & q & & r \end{array} \qquad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC). Donc une équation du plan P est de la forme $3x-4y+d=0$

Exprimons $A(-1;-1,1)\in P$ donc $-3+4+d=0$ d'où $d=-1$

$$P : 3x-4y-1=0.$$

II) 1) a) ***1ère méthode :***

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in S_m &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2mx-2(m+1)y+m^2+2m=0\\ &\Leftrightarrow (x^2-2mx)+(y^2-2(m+1)y)+z^2+m^2+2m=0\\ &\Leftrightarrow (x-m)^2-m^2+(y-(m+1))^2-(m+1)^2+z^2+m^2+2m=0\\ &\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-(m+1))^2+z^2=m^2+1 \end{aligned}$$

Pour tout réel m, $m^2+1>0$ donc S_m est une sphère de centre $I_m(m;m+1;0)$ et de rayon $R_m=\sqrt{m^2+1}$.

2ème méthode : $S_m : x^2+y^2+z^2-2mx-2(m+1)y+m^2+2m=0$

on pose $\alpha=-2m$, $\beta=-2(m+1)$, $\gamma=0$, $d=m^2+2m$

$$h=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}-d=\frac{4m^2+4(m+1)^2}{4}-(m^2+2m)=\frac{8m^2+8m+4-4(m^2+2m)}{4}$$

$h=\dfrac{4m^2+4}{4}=m^2+1$. On a $h>0$ donc S_m est une sphère de rayon $R_m=\sqrt{h}=\sqrt{m^2+1}$ et de centre $I_m(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2};-\frac{\gamma}{2})$. $I_m(m;m+1;0)$.

b) $I_m(x,y,z)$ tel que $\begin{cases} x=m \\ y=m+1 \\ z=0 \end{cases}$ (où $m\in\mathbb{R}$)

L'ensemble des points I_m est la droite passant par $I_0(0;1;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

3) a) Pour étudier la position relative de S_m et P, on calcule $d(I_m,P)=d$

$$d=d(I_m,P)=\frac{|3m-4(m+1)-1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|-m-5|}{5}$$

$$R^2-d^2=m^2+1-\frac{(m+5)^2}{25}=\frac{25m^2+25-m^2-25-10m}{25}=\frac{24m^2-10m}{25}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{12}$		$+\infty$
$24m^2-10m$		+	0	−	0	+	

$24m^2-10m=0 \Leftrightarrow m(24m-10)=0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m=\dfrac{5}{12}$

Si $m\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]\frac{5}{12},+\infty\right[$, on a : $R>d$ donc P coupe S_m suivant un cercle.

Si $m\in\left]0,\frac{5}{12}\right[$, on a $R<d$ donc $S_m\cap P=\varnothing$

Si $m\in\left\{0,\frac{5}{12}\right\}$ alors S_m tangente à P.

b) • Pour $m=-5$ $S_{-5}\cap P$ est un cercle, or pour $m=-5$ on obtient $d(I_m,P)=0$ donc le centre I_{-5} de S_{-5} appartient à P et par suite P coupe S_{-5} suivant un grand cercle : son rayon et son centre sont ceux de S_{-5}.
D'où $S_{-5}\cap P$ est le cercle de centre $I(-5,-4,0)$ et de rayon $\sqrt{26}$.

• Pour $m=0$, S_0 est tangente à P.
Soit H le point de contact de S_0 et P.
H est le projeté orthogonal de I_0 sur P.

On a $\overrightarrow{I_0H}$ et $\vec{n}_P$ sont colinéaires et $H\in P$ donc il existe un réel α tels que

$\begin{cases} \overrightarrow{I_0H}=\alpha\vec{n}_P \\ H\in P \end{cases}$ où $\vec{n}_P\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$ $I_0(0;1;0)$

On pose $H(x,y,z)$.Les coordonnées de H vérifient le système

$$\begin{cases} x=3\alpha \\ y=1-4\alpha \\ z=0 \\ 3x-4y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\alpha \\ y=1-4\alpha \\ z=0 \\ 3\times 3\alpha-4(1-4\alpha)-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\alpha \\ y=1-4\alpha \\ z=0 \\ \alpha=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

d'où $H(\frac{3}{5};\frac{1}{5};0)$

26

1) a) $M\in S \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MC}=0$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{GB})\cdot\overrightarrow{MC}=0$$

$$\Leftrightarrow (6\overrightarrow{MG}+\underbrace{\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}})\cdot\overrightarrow{MC}=0$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0$$

b) Comme $(M\in S)\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ alors S est la sphère de diamètre $[GC]$.

2) a) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ et on a $\begin{vmatrix}6&0\\0&6\end{vmatrix}=36\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points O, A et B ne sont pas alignés.

b) Déterminons les coordonnées de G :
G est le barycentre des points pondérés $(O;1)$, $(A;2)$ et $(B;3)$ donc

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{6}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

On pose $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on a donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ d'où $x=2$; $y=3$ et $z=0$

$G(2;3;0)$.

S est la sphère de diamètre $[GC]$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in S &\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0 \\ &\Leftrightarrow (2-x)(0-x)+(3-y)(0-y)+(0-z)(4-z)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x-3y+y^2+z^2-4z=0 \end{aligned}$$

Une équation de S est : $x^2+y^2+z^2-2x-3y-4z=0$.

c) 1ère idée : S est de centre I et de rayon R tel que :

I est le milieu de $[GC]$ d'où $I(1,\frac{3}{2},2)$ et $R=\frac{GC}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$

$d(I,P)=\frac{|2|}{\sqrt{1}}=2<\frac{\sqrt{29}}{2}$ d'où $S\cap P$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre le point H projeté orthogonal de I sur le plan P et de rayon $r=\sqrt{\frac{29}{4}-4}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Le centre $H(x,y,z)$ vérifie $\begin{cases}\overrightarrow{IH}=\alpha\vec{n}_P \\ H\in P\end{cases}$ où $\vec{n}_P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\frac{3}{2}\\ z=2+\alpha\\ z=0\end{cases}$ d'où $H(1;\frac{3}{2};0)$.

Les coordonnées du milieu de $[OG]$ sont $(\frac{2}{2};\frac{3}{2};\frac{0}{2})=(x_H,y_H,z_H)$.

$\left.\begin{array}{l}\text{H est le milieu de } [OG].\\ \text{On a : } OG=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}=2\times r\end{array}\right\}$ $[OG]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$

Conclusion : Le plan P : z = 0 coupe la sphère S suivant le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OG]$

2ème idée : $M\in S\cap P \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-3y-4z=0$ et $z=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-3y=0$ et $z=0$

On remarque que G appartient au plan P : $z=0$

Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OG]$ et contenue dans le plan P est l'ensemble des points M(x,y) tel que $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MO}=0$ ce qui équivaut à $x^2+y^2-2x-3y=0$.

D'où $S\cap P$ est le cercle de diamètre $[OG]$.

27

1) $S=\{M(x,y,z)\in\mathscr{E};\ x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0\}$

$M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+4y+z^2+4z+5=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=-5+1+4+4=4$

S est la sphère de centre $\Omega(1;-2;-2)$ et de rayon $R=2$.

2) $P: x-2y+2z+2=0$

a) $d(\Omega,P)=\dfrac{|1+4-4+2|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{3}{3}=1$

$d(\Omega,P)<R=2$ donc P coupe la sphère S suivant un cercle $\mathscr{C}$.

b) Soit H le centre de $\mathscr{C}$. H est le projeté orthogonal de Ω sur P.

On a alors $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\vec{n}_P$ sont colinéaires où $\vec{n}_P$ est un vecteur normal à P.

On pose $H(x,y,z)$.

Les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases} x-2y+2z+2=0 \\ x=1+\alpha \\ y=-2-2\alpha \\ z=-2+2\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+\alpha)-2(-2-2\alpha)+2(-2+2\alpha)+2=0 \\ x=1+\alpha \\ y=-2-2\alpha \\ z=-2+2\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ \alpha=-\dfrac{1}{3}\ ;\ x=\dfrac{2}{3}\ ;\ y=-\dfrac{4}{3}$ et $z=-\dfrac{8}{3}$ d'où $H(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{8}{3})$

Le rayon de $\mathscr{C}$ est $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

$S\cap P=\mathscr{C}$ le cercle de centre $H(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{8}{3})$ et de rayon $\sqrt{3}$.

3) $Q:\ (a-1)x+(b+2)y+z-a+2b+3=0$ et $M(a,b,-1)$

$M(a,b,-1)\in S$ donc $a^2+b^2+(-1)^2-2a+4b+4(-1)+5=0$

d'où $a^2+b^2-2a+4b+2=0$

$(a-1)\times a+(b+2)\times b+(-1)-a+2b+3=a^2+b^2-2a+4b-1=0$

D'où $M(a,b,-1)\in Q$.

$\Omega(1;-2;-2)$, $d(\Omega,Q)=\dfrac{|(a-1)\times 1+(b+2)\times(-2)+(-2)-a+2b+3|}{\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2+1}}$

$d(\Omega,Q)=\dfrac{|a-1-2b-4-2-a+2b+3|}{\sqrt{a^2+1-2a+b^2+4b+4+1}}=\dfrac{|-4|}{\sqrt{\underbrace{a^2+b^2-2a+4b+2}_{0}+4}}=\dfrac{4}{4}=1$

$d(\Omega,Q)=R$ (rayon de S) donc Q est tangent à S et puisque M est un point commun à S et à P alors S et Q sont tangents en M.

28

1) S est une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon r.

On met l'égalité $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ sous la forme :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

$M(x,y,z)\in S \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$

D'où S est la sphère de centre $\Omega(1;0;-1)$ et de rayon $r=1$.

2) a) Pour montrer que A et B sont diamétralement opposés sur la sphère S :

on montre que : • A et B appartiennent à S <u>et</u>

• Ω est le milieu de $[AB]$

• Pour $A(2;0;-1)$: $(2-1)^2+0^2+(-1+1)^2=1$ d'où $A\in S$

Pour $B(0;0;-1)$: $(0-1)^2+0^2+(-1+1)^2=1$ d'où $B\in S$.

• Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2})$

On pose K le milieu de $[AB]$ donc $K(1;0;-1)$ or $\Omega(1;0;-1)$ donc

$K=\Omega$. D'où Ω est le milieu de $[AB]$.

Conclusion : A e B sont diamétralement opposés sur S.

Remarque : Pour montrer que A et B sont diaméralement opposés on peut montrer que Ω est le milieu le $[AB]$ et $AB=2r$.

b) Calcul de $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$

$$\overrightarrow{NA}\begin{pmatrix}1-m\\ -\sqrt{2m(1-m)}\\ -1+m\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{NB}\begin{pmatrix}-1-m\\ -\sqrt{2m(1-m)}\\ -1+m\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}&=(1-m)(-1-m)+2m(1-m)+(m-1)^2\\&=-1+m^2+2m-2m^2+m^2-2m+1\\&=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$ donc N appartient à la sphère de diamètre $[AB]$ qui est la sphère S d'où $N\in S$.

3) a) $P: x+z-1=0$. On a $x_N+z_N-1=1+m-m-1=0$ d'où $N\in P$.

b) Puisque $N\in S$ et $N\in P$ alors $N\in P\cap S$.

Etudions $P\cap S$: $d(\Omega,P)=\dfrac{|1-1-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1=r$

alors $S\cap P$ est le cercle du plan P de centre le point H projeté orthogonal de Ω sur P et de rayon $r'=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Déterminons les coordonnées de H : $H(x_0,y_0,z_0)$.

H est l'intersection du plan P et de la droite Δ passant par Ω et dont un vecteur directeur est un vecteur normal $\vec{n}_P$ à P. Soit $\vec{n}_P\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P.

$$H(x_0,y_0,z_0)\in P\cap\Delta \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{\Omega H}=\alpha\,\vec{n}_P\\ H\in P\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1+\alpha\\ y_0=0\\ z_0=-1+\alpha\\ x_0+z_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1+\alpha\\ y_0=0\\ z_0=-1+\alpha\\ (1+\alpha)+(-1+\alpha)-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1+\alpha\\ y_0=0\\ z_0=-1+\alpha\\ \alpha=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

D'où $x_0=\dfrac{3}{2}$; $y_0=0$ et $z_0=-\dfrac{1}{2}$ d'où $H(\dfrac{3}{2}\,;0\,;-\dfrac{1}{2})$.

Ainsi N varie sur le cercle de centre $H(\dfrac{3}{2}\,;0\,;-\dfrac{1}{2})$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

SOMMAIRE

Chapitre		Résumé	Exercices	Corrigés
1	Produit scalaire dans le plan	5	8	11
2	Angles orientés	21	27	30
3	Trigonométrie	41	46	51
4	Rotations	69	71	75
5	Nombres complexes	89	95	101
6	Dénombrement	124	128	134
7	Divisibilité dans IN	148	150	153
8	Nombres premiers	163	164	166
9	Vecteurs de l'espace	171	176	178
10	Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace	187	193	198
11	Equations de droites et de plans. Equation d'une sphère	210	214	221

xy 3 Plus

La nouvelle collection en mathématique de Med Ali Editions

Plus de rigeur

Plus d'efficacité

Pour une réussite assurée

xy 3 Plus LES MATHÉMATIQUES EN 3ème ANNÉE SECONDAIRE

Section : Mathématiques - Tome II

PRIX : 9.000

9789973335159

www.edition-medali.tn