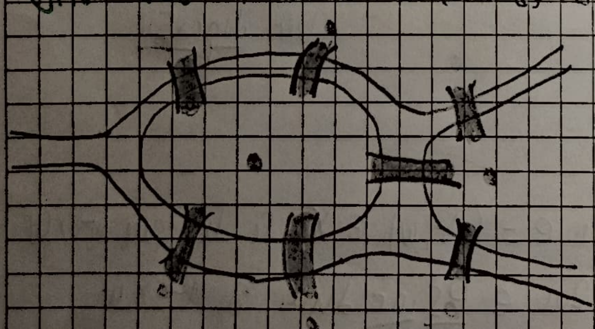
¿Qué hace un grafo?

Un grafo modela relaciones entre vértices. Permitiendo así representar problemas complejos tanto físicos como abstractos en los que debemos modelar relaciones

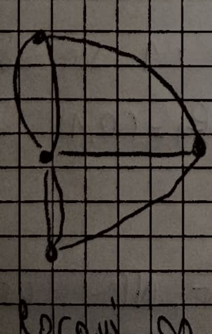
El origen: Los Puentes de Königsberg

Kaliningrado tenía 7 puentes en el siglo XVIII

Entonces Euler planteó el problema de cruzarlos todos exactamente una vez y volver al punto de partida



Elegí un punto de partida e intenté llegar de vuelta sin pasar más de una vez por cada puente. Vas a ver que no se puede!



En este grafo simplificado tampoco.

La demo de porqué no se puede es la resolución de un problema de grafos. La misma ya fue hecha por Euler gracias a Dios

En el PDF de la teórica hay más ejemplos!

Qué es un grafo

Definiciones: (Nivel 1)

Un grafo $G = (V, X)$ es un par de conjuntos, donde V es un conjunto de puntos ó nodos ó vértices y X es un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V. Lo que se dice **Aristas** ó **ejes** del grafo

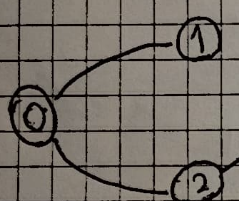


Fig 1. Un grafo $G(V,X)$

$G = (\{0,1,2,3\}, \{(0,1), (0,2), (2,3)\})$

✱ Por ahora no contemplamos la dirección $\Rightarrow (0,1) = (1,0)$

Ver digrafos

- Definiciones:

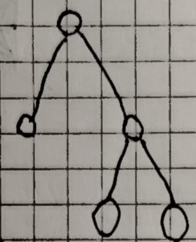
(1) Dados v y $w \in V$ si $e = (v,w) \in X$ se dice que v y w son **adyacentes** y que e es **incidente** a v y w

En la figura 1: Vemos que 0 y 1 son adyacentes porque los conecta la arista $e_1 = (0,1)$. e_1 entonces es incidente sobre 0 y 1.

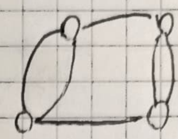
(2) La vecindad de un vértice v, $N(v)$, es entonces el conjunto de los vértices adyacentes a v.

$$N(v) = \{ w \in V : (v,w) \in X \}$$

(3) **Multigrafo:** Grafo en el que puede haber varias aristas entre el mismo par de vértices distintos



No es multi



Sí es multigrafo

Va a cobrar más sentido cuando veamos digrafos

(4) **Pseudografo:** Grafo en el que se puede ver que hay varias aristas entre algún par de vértices y también puede haber ciclos (loops) que unan un vértice con sí mismo

Salvo que se aclare lo contrario, siempre asumimos que no hay aristas múltiples ni loops.

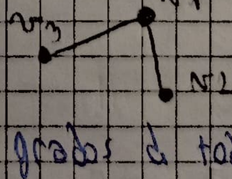
1

Definiciones nivel 2: Cómo es un grafo

(1) **Grado:** El grado de un vértice en el grafo G, $d_G(v)$ es la cantidad de aristas incidentes a v en G

$\Delta(G)$ es el máximo grado de los vértices de G

$\delta(G)$ el mínimo



$\Delta(G) = d_G(v_1) = 2$

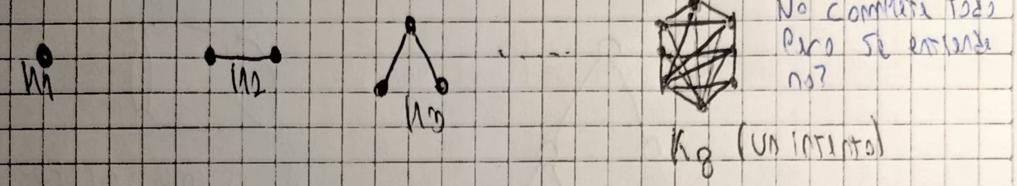
Teorema: La suma de los grados de todos los vértices de un grafo es igual al doble del número de aristas.

$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m \xrightarrow{\text{Corolario}}$ ∀ grafo, la cantidad de vértices de grado impar debe ser par!

(Hacé la cuenta!)

(2) <u>Grafo Completo</u>: Es uno que tiene todos los vértices adyacentes entre sí. No confundir con grafo conexo X

K_n es el grafo completo de n vértices



Usando (1) y (2):

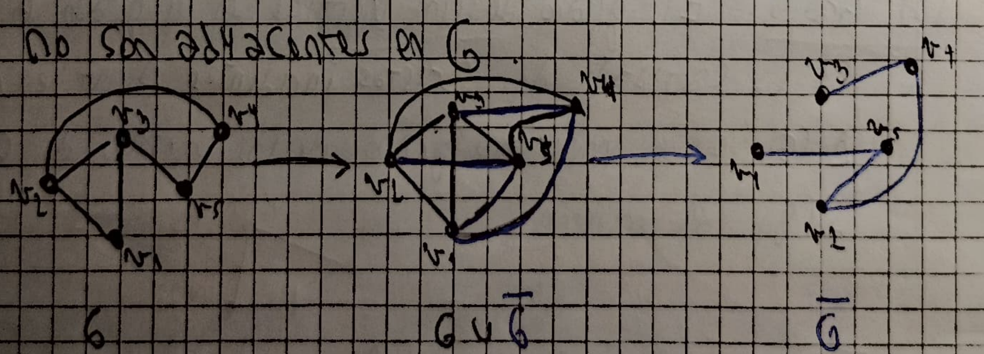
¿Cuántas aristas tiene un grafo completo de n vértices?

Si es un grafo completo, $d_G(v_i) = n-1 \; \forall i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = n^2 - n$

Como $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{n} n = 2 * \text{aristas}$. Vemos que la cantidad de aristas es igual a $\frac{n^2-n}{2}$

(3) <u>Grafo Complemento</u>: Dado un grafo $G(V, X)$, su complemento $\overline{G} = (V, \overline{X})$ es un grafo que tiene el mismo conjunto de vértices pero...

Un par de vértices son adyacentes en $\overline{G}$ si y sólo si no son adyacentes en G.



Como $G \cup \overline{G}$ me forma un grafo completo tenemos que

$\#\text{Aristas } G + \#\text{Aristas } \overline{G} = \#\text{Aristas } G \cup \overline{G} = \frac{n^2-n}{2}$ Donde n es el total de nodos

$\#\text{Aristas } \overline{G} = \frac{n^2-n}{2} - \#\text{Aristas } G$.

Definiciones nivel 3: Cómo me muevo en un grafo

(1) Recorrido: Es una secuencia alternada de vértices y aristas

$P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$. P es el recorrido de v_0 hasta v_n

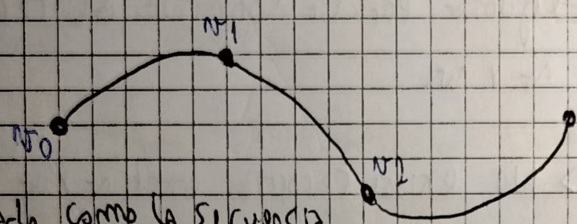


Fig 2. Un camino P que va de v_0 a v_3

Podés pensarlo como la secuencia
$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n$

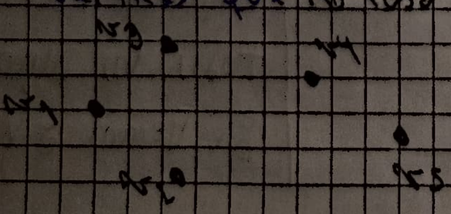
(1)(1) Un camino es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.

El camino de la figura 2 es, además de ser un recorrido, un camino.

(1)(2) Una sección es un cachito de un camino.
Si $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$ es el camino
$P_{v_i v_j} = v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots v_{j-1} e_j v_j$ es la sección que va de v_i hasta v_j.

(1)(3) Un circuito es un camino que empieza en el mismo vértice que termina

(1)(4) Un ciclo o camino simple es un circuito de 3 o más vértices que no pasa dos veces por el mismo vértice



Dibujá: (1) Un recorrido. (2) Dos caminos
(3) Un circuito que no sea ciclo
(4) Un ciclo

(2) Distancia

Dado un recorrido P, su longitud $\ell(P)$, es la cantidad de aristas que recorre

Entonces preguntar por la distancia entre dos vértices v y w es lo mismo que preguntar por la longitud del recorrido más corto que una v y w.

$d(v,w) = \infty \iff$ No existe recorrido entre v y w — Más info en Dijkstra, BF y creo que FW

$d(v,v) = 0$ Duh

Mirá de nuevo el grafo que dibujaste hace un rato y calculá la distancia entre v_1 y v_5

Fijate también que si un recorrido P que une v y w tiene longitud $d(v,w)$ P debe ser un camino.

Esto es porque si no es un camino, P pasa varias veces por el mismo vértice, lo cual incumple la promesa de que la distancia es el camino más corto de un nodo a otro.

Mirá tu grafo de nuevo y chequealo, vale la pena.

Propiedades de distancia:

Para todo $u, v, w \in V$:

- $d(u,v) \geq 0$ y $d(u,v) = 0 \iff u = v$
- $d(u,v) = d(v,u)$
- $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

Esto es muy importante para todos los algoritmos que vemos a ver!

Definiciones 4: (Subgrafos y Grafos Conexos)

(1) Dado un grafo $G(V_G, X_G)$, un subgrafo de G es un grafo H tal que $H=(V_H, X_H) / V_H \subseteq V_G$ y $X_H \subseteq X_G$ $(V_H \times V_H)$.
Lo notamos como $H \subseteq G$

En criollo: Todas las aristas de H están en G y todos los vértices de H están en G.
¡Ojo! No vale la vuelta. Puede haber vértices y/o aristas de G que no están en H.

- Asumimos que si $H \neq G \Rightarrow H \subset G$
- H es un grafo generador de G si $H \subseteq G$ y $V_G = V_H$ [importante en AGM]
- Si todo par de vértices pertenecientes a V_H están conectados por una arista en el grafo G y entonces están conectados por una arista en H se dice que $H=(V_H, X_H)$ es grafo inducido de $G=(V_G, X_G)$

Formalmente: H es grafo inducido de $G \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall u,v \in V_H / (u,v) \in X_G \Rightarrow (u,v) \in X_H)$

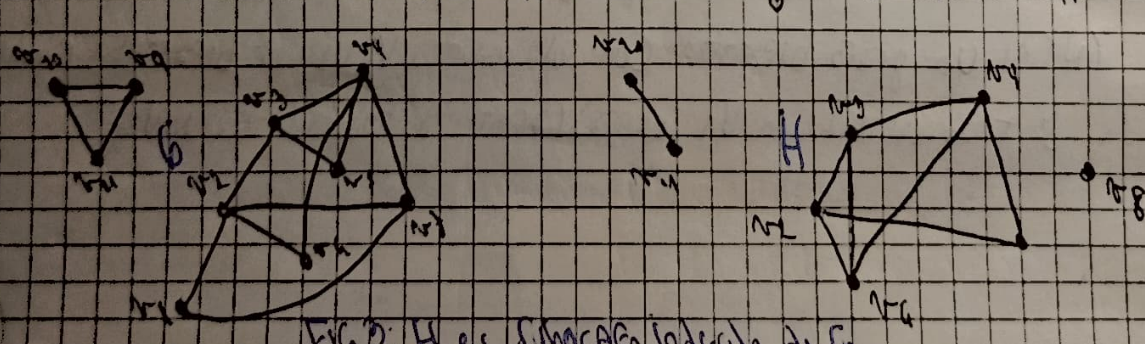


FIG 3: H es subgrafo inducido de G

(2) Grafo Conexo: Un grafo en el que existe un camino entre todo par de vértices

(2)(1): Una Componente conexa de un grafo G es un Subgrafo maximal de G

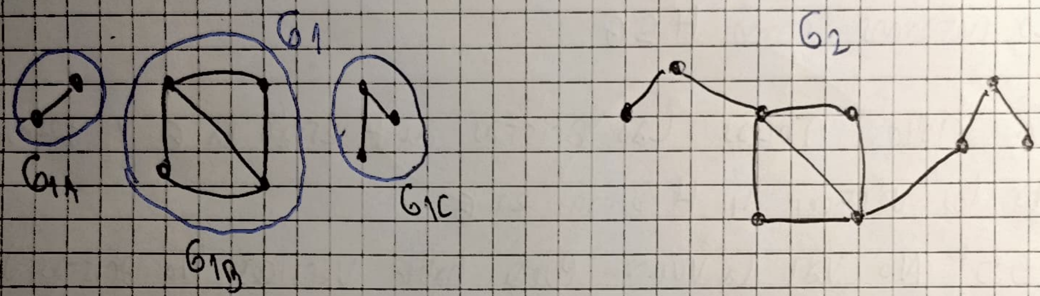


Fig 4: G_1 no es Conexo pero tiene 3 componentes Conexas G_{1A}, G_{1B} y G_{1C}

G_2 si es Conexo

4

Definiciones 5: Grafos bipartitos, isomorfismo en grafos

(1) Grafo bipartito:

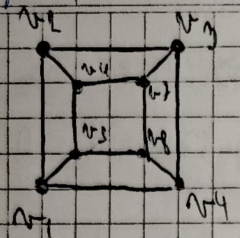
Un grafo $G(V,A)$ es bipartito si existen 2 ~~conjuntos~~ subconjuntos V_1, V_2 del conjunto de vértices V tal que:

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

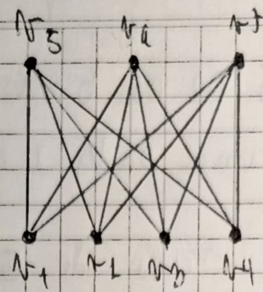
y todas las aristas de G tienen un extremo en V_1 y el otro en V_2

(1)(1) Un grafo bipartito con subconjuntos V_1, V_2 es bipartito completo si todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2

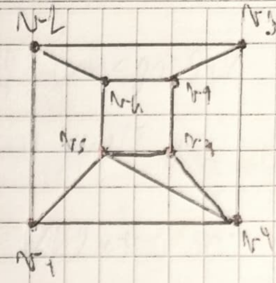
No bipartito



bipartito



bipartito completo



No bipartito

Teorema:

Un grafo G es bipartito $\iff$ No tiene ciclos de longitud impar

Dem:

$\Rightarrow$) Supongamos que G es bipartito y además tiene al menos un ciclo de longitud impar

Que sea bipartito implica que hay dos subconjuntos $V_1, V_2 \subseteq V$ tales que $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
y que todas las aristas de G tienen un extremo en V_1 y otro en V_2
Esto implica que si hay un camino de $v_i \in V_1$ a $v_j \in V_2$ no pueden ser adyacentes. Eso quiere decir que su distancia es estrictamente mayor a 1. Por definición de ciclo, el camino que va de v_i a v_j y de vuelta a v_i tiene que tener longitud $= 2d(v_i, v_j)$. Lo cual contradice la hipótesis de que hay un ciclo de longitud impar. Entonces si G es bipartito no debe tener ningún ciclo impar

(⇐) G no tiene ciclos de longitud impar ⇒ G es bipartito

Supongamos que G no es bipartito ⇒ hay una arista de G que tiene un extremo en V_1 y el otro también, o en V_2. (1)

Por otro lado los ciclos de G son todos de longitud par (2)

(1) Esto significa que hay dos vértices adyacentes entre sí!

Como estamos hablando de un grafo, no de un multigrafo ó un pseudografo:

- No puede haber más de una arista conectando v_u y v_w
- No existen los ciclos de longitud 1, que sería un vértice conectado a sí mismo.

Entonces, dados dos vértices v_u y v_w $\in V_i \subseteq V$ adyacentes necesitamos agregar un tercer vértice v_{t_1} y dos aristas $e_1 = (v_u, v_{t_1})$ y $e_2 = (v_{t_1}, v_w)$ que se suman a $e_{uw} = (v_u, v_w)$ para conformar el ciclo más chico posible, de longitud 3.

¡Epa, encontramos un ciclo de longitud impar, lo que contradice (2)! Acá ya tenemos suficiente para sospechar que la suposición de que G no es bipartito está mal.

Para probarlo veamos qué pasa si yo agrego una cantidad arbitraria n de vértices al ciclo $v_u \rightleftarrows v_w$.

Bueno, todo v_{t_i} que agrego voy a necesitar conectarlo con dos aristas

Entonces la cantidad total de aristas del ciclo es: $\overbrace{1}^{inicial} + \overbrace{2.n}^{nuevas}$ Lit la definición de impar!

Si no agregás 2 aristas rompés el ciclo. Dibujalo!

Tenía mucho miedo que no salga la demo pero ya está!

Viva Perón!

Isomorfismo en grafos:

Dados dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ se dicen isomorfos si existe una función biyectiva $f : V \to V'$ tal que $\forall\, v, w \in V$

$$(v, w) \in X \iff (f(v), f(w)) \in X'$$

Donde f es llamada función de isomorfismo

Cosas a tener en cuenta si G_1 y G_2 son isomorfos:

- La función de isomorfismo debe respetar las adyacencias
- Para cada $v_i \in V_G$ debe haber un único $v_j \in G'$

Esto nos lleva a las siguientes propiedades

Si dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ son isomorfos:

(1) Tienen el mismo número de vértices y aristas.

Pseudo demo: Sea $f : G \to G'$ biyectiva $\Rightarrow$ mismo num vértices (1) $\wedge$ mismo num aristas (2)

Supongamos $\neg((1) \wedge (2)) = \neg(1) \vee \neg(2)$

$\neg(1)$: Que no tengan misma cantidad de vértices hace que sea imposible que f sea biyectiva. Esto es porque G tiene menos que G' y f no es sobreyectiva (o directamente no es función) ó G' tiene menos que G y en ese caso f no puede ser inyectiva!

$\neg(2)$: Que no tengan la misma cantidad de aristas también hace que sea imposible que sea biyectiva f. Pero además si G tiene más aristas que G' hay adyacencias en G que van a faltar en G' y si G' tiene más que G entonces van a sobrar adyacencias en G'!

A partir de acá las demás son un poco más complicadas así que no las voy a hacer porque sino ésto es eterno.

(2) $\forall k, 0 \leq k \leq n-1$ tienen el mismo número de vértices de grado k

(3) Tienen el mismo número de componentes conexas

(4) $\forall k, 1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos de longitud k

Vos confiá.

Si no se cumple algo de ésto yo te juro que hay alguna adyacencia de más en algún lado.

(5) La recíproca de ésta proposición es falsa. Y sí.

(6) Hay grafos que cumplen todos los puntos y, sin embargo, no son isomorfos. LPM

(7) Esta proposición da condiciones necesarias para que dos grafos sean isomorfos pero no suficientes.

(8) No hay condiciones checkeables fácilmente (de complejidad polinomial) que aseguren que dos grafos son isomorfos

Dejá, yo no quería saber ésto igual

5

Definiciones nivel 4: Cómo se representan grafos

Bueno existían lo que son Matrices y Listas de adyacencia

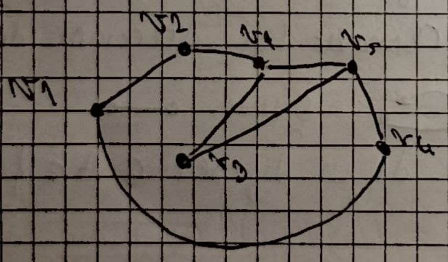
Cada una tiene sus pro y sus contra

Matrices:
- Si el grafo no es denso, tiene muchos 0 o es decir, ocupan espacio al pedo.
- Pero con matrices es más fácil ver algunas cosas (conceptualmente hablando)

Listas:
- Es una estructura más eficiente en espacio

Sea $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ donde los elementos a_{ij} de A se definen como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene una arista entre los vértices } v_i \text{ y } v_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} v_1 \text{ Conectados a } v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}$$

Props:

(a) La suma de los elementos de la columna i de A (o fila, ya que A es simétrica) es igual al grado de el vértice v_i $d(v_i)$

(b) Los elementos de la diagonal de A^2 indican los grados de los vértices: $a^2_{ii} = d(v_i)$

(b) Mini demo: $A^2_{ii} = \sum_{i=0} a_i a_i$ Como a_i puede ser 0 ó 1 A^2_{ii} debe ser la suma de 1s en cierta fila es decir el grado de v_i!

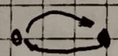
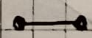
Definiciones nivel 7: Finally, dígrafos

(1) Un dígrafo $G = (V, X)$ es un par de conjuntos V y X sólo que ahora X es el conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V. En el apunte en vez de decirles aristas les dicen Arcos pero bueno. Son lo mismo, nada más que ahora tienen $\overrightarrow{\text{sentido}}$

(2) Ahora los arcos tienen cola (el elemento de donde sale) y cabeza (el elemento al que entra) (that's what she said)

(3) El grado ya no es grado a secas:

- grado de entrada $d_{in}(v)$: cantidad de arcos que llegan a v
- grado de salida $d_{out}(v)$: cantidad de arcos que salen de v

(4) El grafo subyacente de un dígrafo G es el grafo G^s que resulta de fingir demencia y remover las direcciones de sus arcos y si pasa esto  queda 

Entonces la matriz de adyacencia de un dígrafo G, $A \in \{0,1\}^{n \times n}$, $A = [a_{ij}]$ quedaría así:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene un arco de } v_i \text{ a } v_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Pero ahora el bicho cambiará:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Salen de fila

- La suma de los elementos fila i: $d_{out}(v_i)$
- La suma de los elementos columna i: $d_{in}(v_i)$

Entran aquí, ¡Osea que A ya no necesariamente es simétrica!

¡Llegaste!

Teórica Intro a grafos

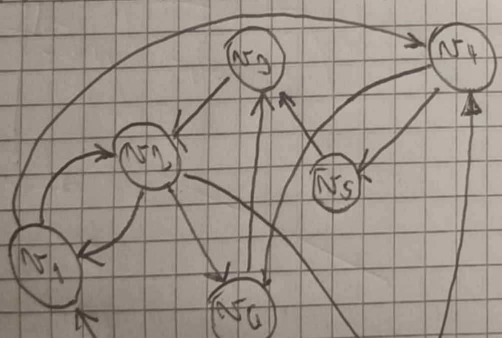
(5) Un recorrido/camino orientado en un grafo dirigido ahora es una sucesión de elementos $e_1 e_2 \dots e_k$ / el primer elemento del arco e_i coincide con el segundo elemento de e_{i-1} y el segundo elemento de e_i con el primero de e_{i+1}, $i = 2, \dots, k-1$.

e_i sigue a e_{i+1} pero e_{i+1} no lo sigue, sigue a e_{i+2} etc.

(5) Un circuito/ciclo orientado en un digrafo es un recorrido/camino que comienza y termina en el mismo vértice

(6) Un digrafo se dice fuertemente conexo si para todo par de vértices u, v existen caminos orientados de u a v y de v a u

Si no me creés mirá el ejemplo de la última diapo:



$P_1 = v_1, v_2, v$ [illegible] v_5, v_3 es camino orientado

$P_2 = v_2 v_3 v_4$ No es camino orientado

No puedo ir de v_2 a v_3

$C_1 = v_1, v_2, v_4, v_3, v_1$ es ciclo orientado

$C_2 = v_2 v_1 v_7 v_2$ No es ciclo orientado