DEMOS SOBRE GRAFOS

Apuntes de la primer práctica de grafos

TDA 2c2025

AVISO IMPORTANTE:

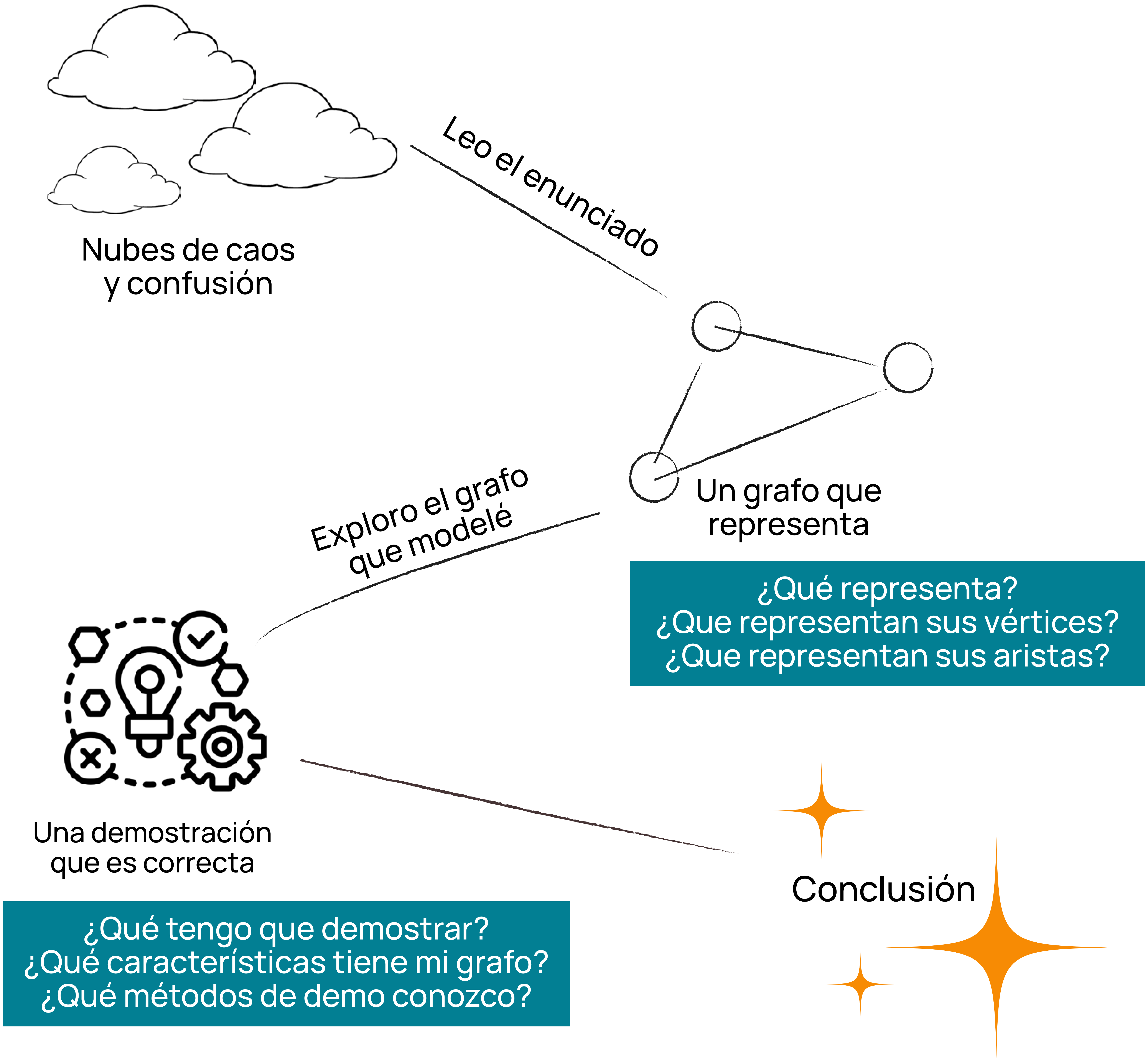
Éstos son mis apuntes de TDA pasados a digital,
no es un apunte oficial de la materia.

Siempre intentá hacer los ejercicios primero por tus propios medios y controlá que lo que veas acá esté bien.

Contienen interpretaciones y resoluciones mías que **pueden tener errores.**
Si notás un error, avisame!
Si tenés que elegir entre creerme a mí o a tu profe creele a tu profe! (o de última consultale)

2c2025 | Se aceptan correcciones y sugerencias : Mandá a mochamanapuntes@gmail.com

Cómo pienso los ejercicios (a veces xd):



CantidadAmigos

> Probar que en todo grupo de dos o más personas hay por lo menos dos o más de ellas que tienen la misma cantidad de amigos

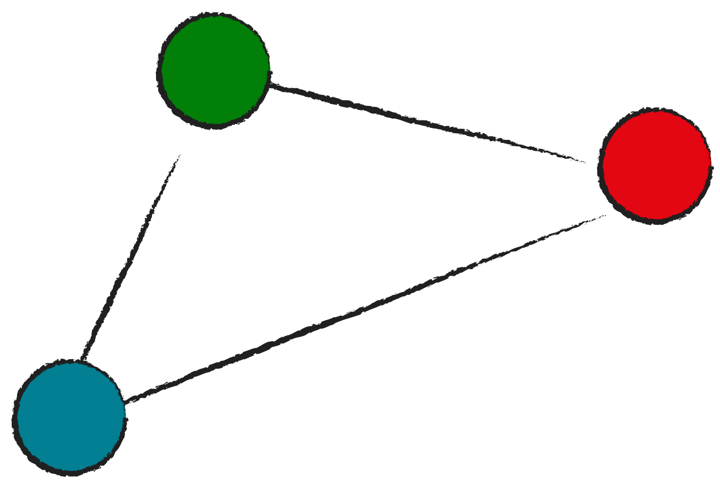
Modelemos un grafo que represente la situación

En éste caso es muy simple: Pensemos las relaciones o amistades como aristas y las personas como vértices.

Si, en éste ejercicio es una auténtica pavada pero modelar bien te ayuda un montón en problemas mas complejos y modelar mal te hace recursar la materia

Entonces el grafo en cuestión es

G(V,E) donde |V| = Integrantes
|E| = Amistades



Por lo tanto, matemáticamente, queremos demostrar que

Sea G(V,E) un grafo / |V| >= 2 ==> Existen i,j vértices del grafo tales que

$$d_G(i) == d_G(j)$$

Sabemos que tenemos la siguiente restricción : Prohibidos los loops

Entonces, ningún integrante puede ser amigo de sí mismo.
Entonces, cada integrante puede tener 0 amigos, 1 amigo, 2 amigos ... n-1 amigos (Que sería ser amigo de todos).

Es decir , $0 <= d(i) <= n-1$

Con ésto nada más

0 <= d(i) <= n-1

Ya tenemos dos opciones para probar lo que queremos

1. La directa, es la que está en el PDF de la materia
1. Por absurdo, que es lo que voy a hacer ahora

Digamos que NO hay 2 vértices con el mismo grado. Es decir, todos tienen grados distintos.

¿Cuántos grados distintos hay?

0 <= d(i) <= n-1

Como todos los vértices tienen un grado distinto:

- Alguien tiene sólo 1 amix
- Alguien tiene sólo 2 amix
- ...
- Alguien no tiene amigos
- Alguien es amix de TODOS

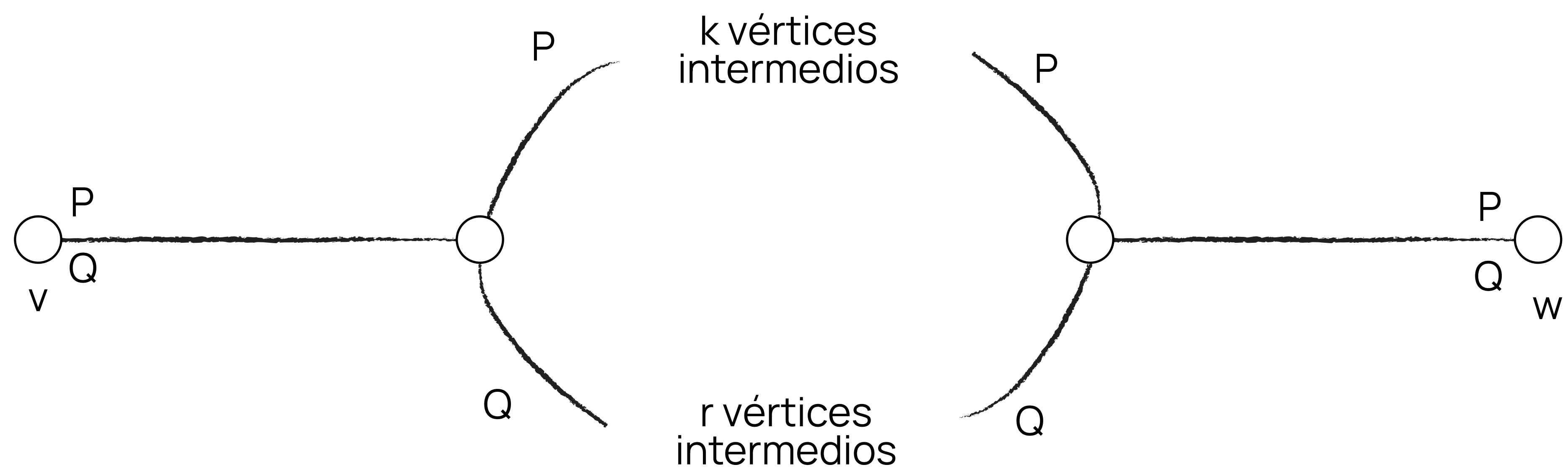
Si la persona k es amiga del resto entonces todas tienen por lo menos un amix, que es k. Eso se contradice con el hecho de que hay una que no tenía amix

Encontramos el absurdo!
El mismo proviene de alguna de las cosas que asumimos. Como sólo asumimos que NO hay 2 vértices con el mismo grado, no queda otra más que echarle la culpa a eso. Entonces queda demostrado que TIENE que haber 2 vértices con el mismo grado.

CicloCompartido

Sean P y Q dos caminos distintos de un grafo G que unen un vértice v con otro w. Demostrar de forma directa que G tiene un ciclo cuyas aristas pertenecen a P o Q

Imaginemos un grafo con los caminos P y Q:



Observá como éste es un grafo BIEN ABSTRACTO, no te compliqués

Sólo hace falta que P y Q sean caminos distintos, es decir, que existan un nodo en el que se separan y un nodo en el que se vuelven a juntar. Esos nodos no necesariamente son v y w. Tampoco hace falta que un camino tenga la misma cantidad de aristas que el otro.

Sólo hace falta que se pueda llegar de v a w y que eventualmente P y Q se separen y se vuelvan a juntar , nada más.

Demostración:

Queremos probar que: G tiene un ciclo cuyas aristas pertenecen a P ó a Q

Contamos con que P y Q son caminos DISTINTOS. Entonces hay por lo menos una instancia en la que se separan y otra en la que se vuelven a unir. Se que soy repetitivo pero ésto es clave.

Eso implica que existe un i natural / $1 < i < k$, $i < r$ y para todo l natural $1 <= l < i$ $p_lp = q_lp$ pero $p_i != q_i$ 1

También que existe un j_p y un j_q naturales tales que i < = l_p < j_p, i < = l_q < jq tales que p_ lp != q_lq pero p_jp = p_jq

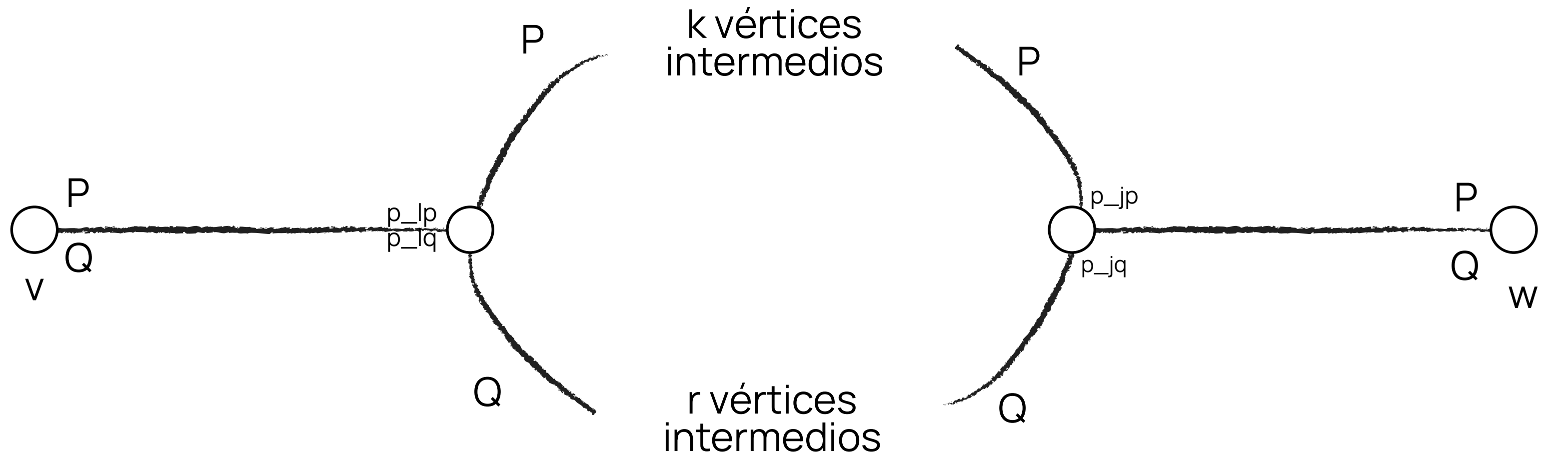
2

¿Viste que no era tan trivial?

En criollo

1. Quiere decir que en algún momento se separan, pero antes de eso los vértices son compartidos

2. Quiere decir que en algún momento se juntan, pero antes de eso los vértices NO son compartidos

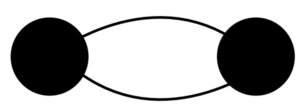


Eso es literalmente un ciclo, lo construimos de forma directa

Bueno, en realidad falta una cosa para demostrar que es un ciclo que es que tenga al menos 3 nodos.

► Un *ciclo o circuito simple* es un circuito de 3 o más vértices que no pasa dos veces por el mismo vértice.

Si no te convence el meme que hice con una screenshot de la teórica entonces pensá esto

 Es indistinguible de 

Ésto que ponele "es un ciclo"

ésto, que tiene de ciclo lo que yo tengo de Fede Lebrón

Por definición, un ciclo es un circuito de 3 o más vértices que etc etc

Entonces no puede pasar que el ciclo abarque sólo el nodo en el que se separan y el nodo en el que se juntan, porque sino P y Q no serían caminos distintos. Por eso debe haber al menos un tercer nodo por el cual un camino pasa y el otro no

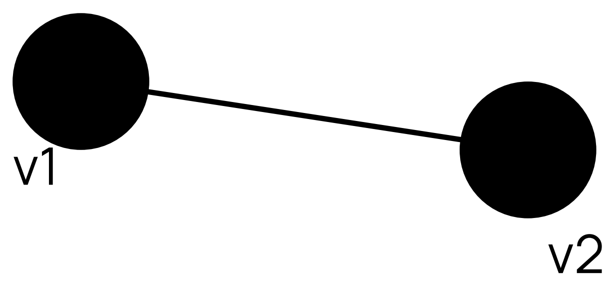
VérticesArticulación

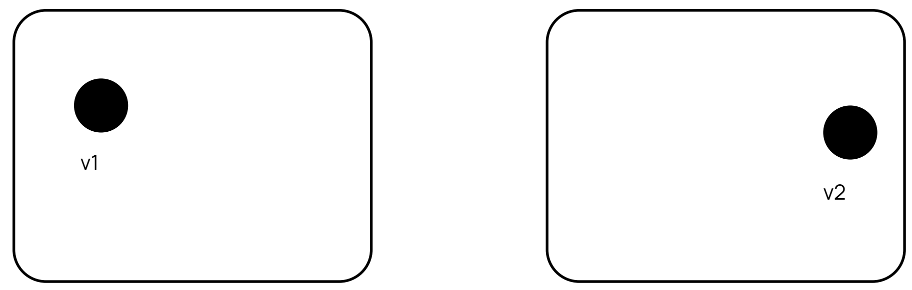
> Demostrar que Todo $G\_n(n >= 2)$ conexo tiene al menos dos vértices distintos v1 y v2 tales que $G\backslash\{v1\}$ y $G\backslash\{v2\}$ son conexos

Mi favorito y la razón por la que pensé que estaría bueno hacer éste apunte

Tenemos un grafo conexo de 2 o más vértices. Hagamos inducción sobre el número de vértices

Caso base (n = 2):





Eliminamos v1 o v2, en ambos casos quedan grafos de un vértice que son conexos por definición

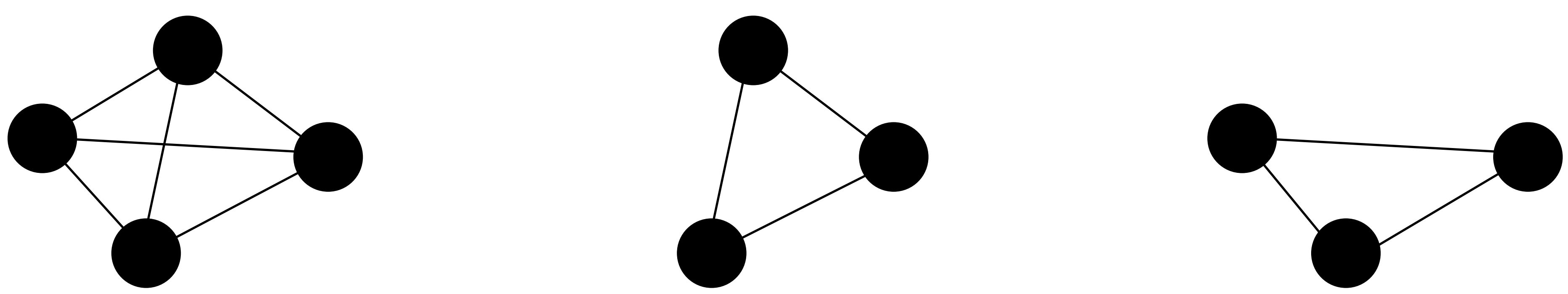
Paso inductivo:

HI: Para un grafo G de i vértices (i <= n) existen v1 != v2 dos vértices de G tales que $G\backslash\{v1\}$ y $G\backslash\{v2\}$ son conexos

Quiero ver que si vale para todo i <= n entonces va a valer para n+1 vértices

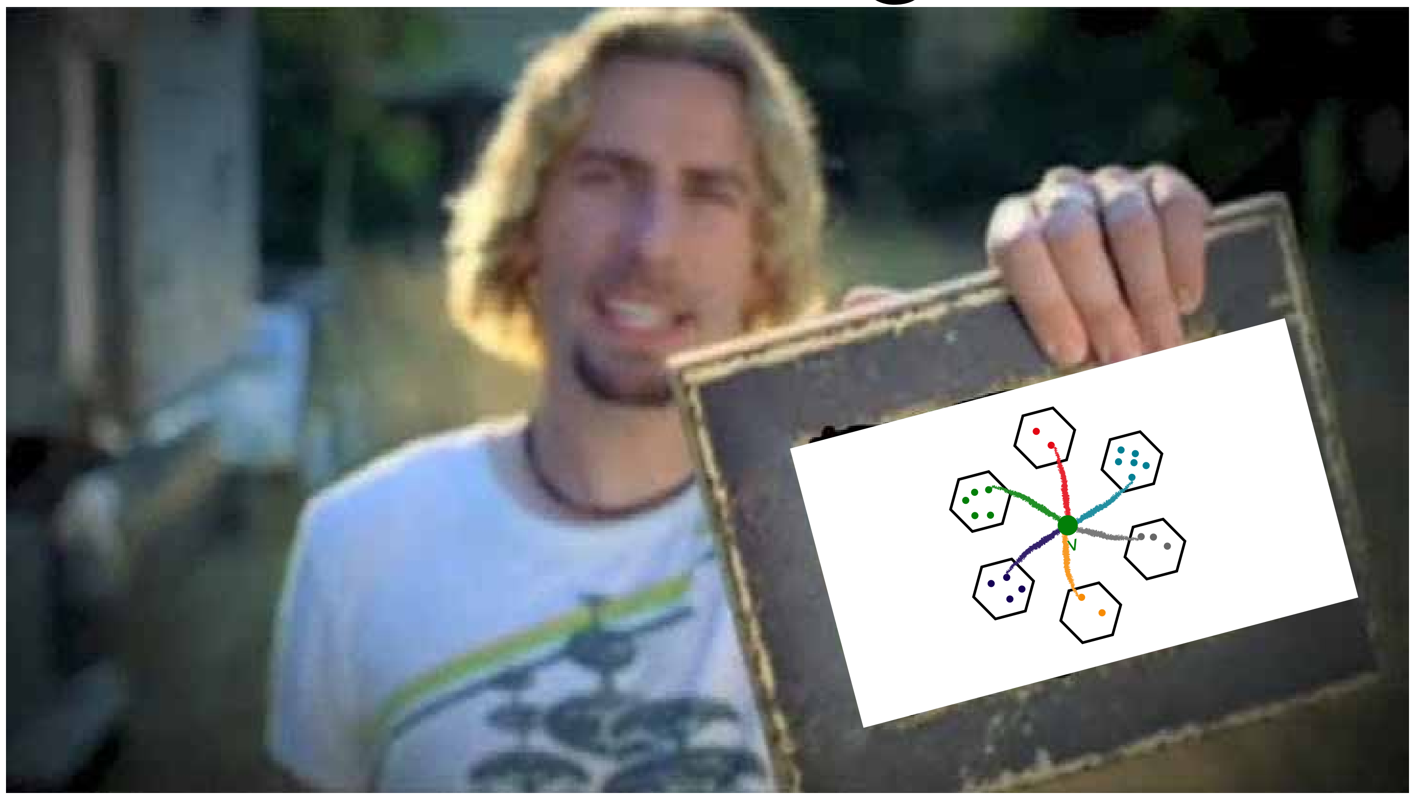
Bueno podría pasar que para todo vértide de G se cumple que si sacamos ése vértice entonces G sigue siendo conexo.

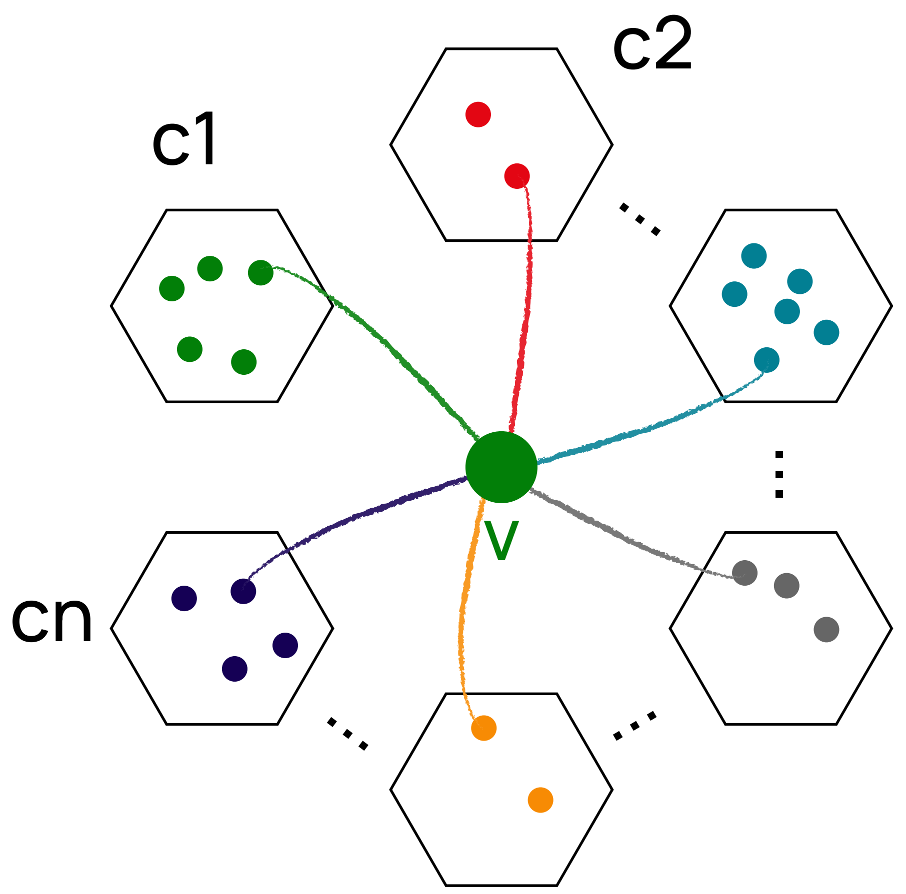
En ese caso la solución es trivial. Podemos simplemente sacar dos v1 y v2 cualesquiera y listo! G seguiría siendo conexo en cualquiera de los dos escenarios.



La cosa se pone un poco más shady si existe algún nodo v tal que si yo lo saco G deja de ser conexo. Veamos ese escenario.

Mirá este grafo

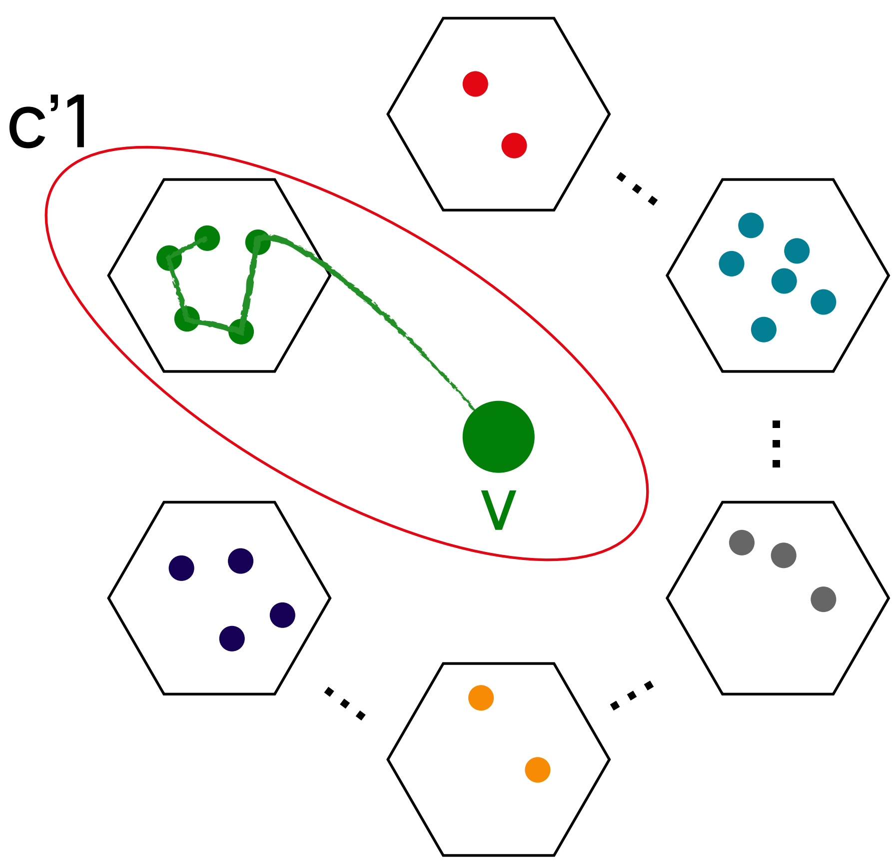




Éste grafo G es uno tal que si elimino el nodo v me queda un grafo NO conexo

Las componentes conexas de ese grafo son los hexágonos

Puede tener la cantidad de componentes conexas que vos quieras



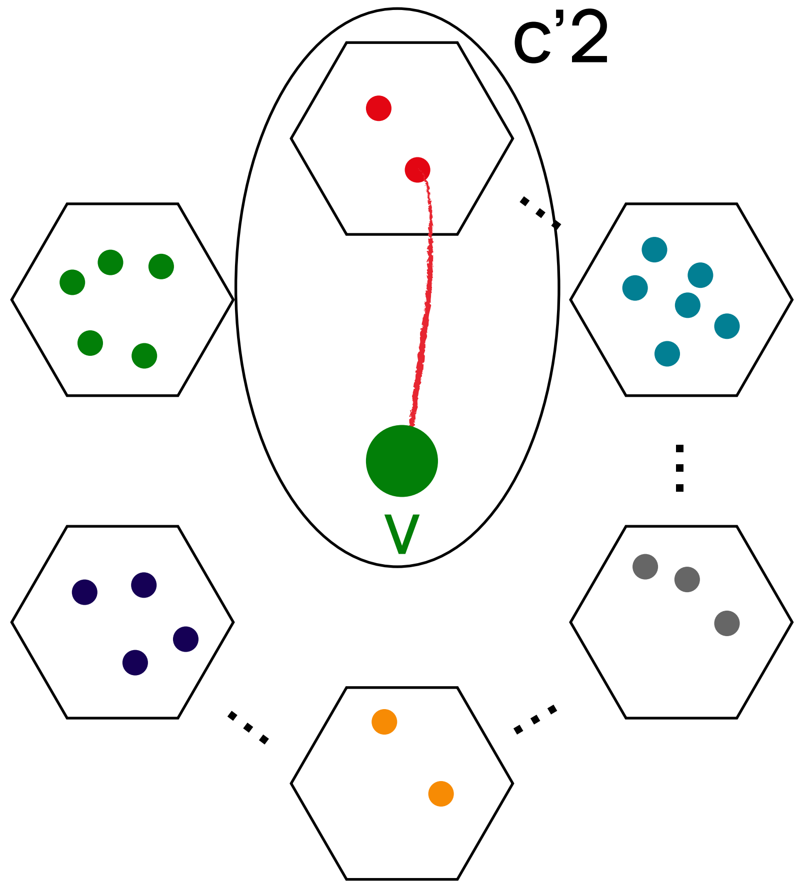
Eliminemos todas las aristas de v menos una, la que vos quieras

Ahora tenés la componente conexa c'1 = c1 U v . Que sí o sí tiene menos aristas que G

Entonces vale la HI sobre c'1, es decir tiene dos vértices v1 y v2 que si saco uno c'1 sigue siendo conexa

Ojo, no significa que pueda sacar cualquiera, sino que hay una manera de sacar dos y siga siendo conexa

Como estamos hablando de dos vértices, uno de ellos no es v



Repitamos el proceso pero con otra componente conexa, puede ser la que vos quieras.

Es la misma situación de antes, acá también vale la HI!

Entonces, como hay por lo menos 2 vértices que puedo sacar, al menos uno de ellos no es v

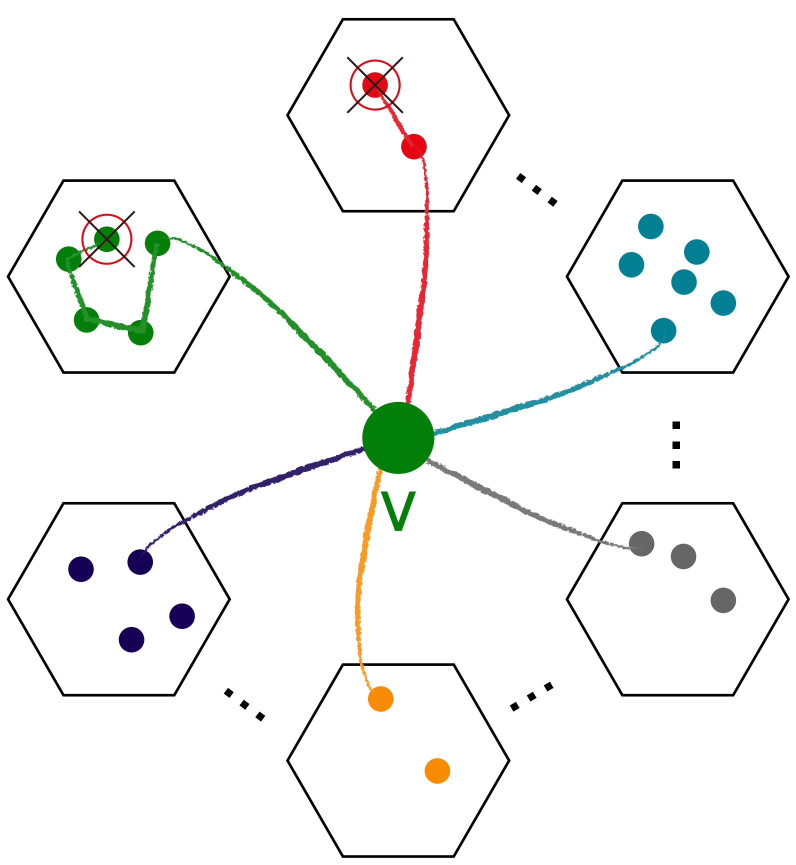
Reminder : Necesitamos NO AGARRAR el v porque sabemos que ese hace que G deje de ser conexo cuando lo sacamos.

Lo que hicimos fue ir en búsqueda de 2 vértices tales que de alguno de los 2 G siga siendo un grafo conexo.

Tenemos, de c’1 dos vértices que si los saco c’1 sigue siendo conexa {v1,v2} y de c’2 otros dos vértices que hacen lo mismo {v3,v4}

Tanto en c’1 como en c’2 sabemos que v puede ser a lo sumo uno de los dos vértices. Entonces elijamos los otros dos xd.

Éstos vértices no hacen que sus componentes dejen de ser conexas y como no son v tampoco hacen que G deje de ser conexo.



Hallamos 2 vertices v1 y v2 tales que si sacamos alguno de los 2 G sigue siendo conexo.

Ésto demuestra que si la proposición valía para Grafos de n-1 vértices entonces vale para Grafos de n vértices.

Queda entonces demostrado que para todo grafo conexo de n vértices existen dos vértices tales que si yo elimino alguno el grafo resultante sigue siendo conexo.

SumaDeGrados

> Demostrar que la suma de los grados de todos los vértices de un grafo es igual al doble de la cantidad de aristas.

$$\boxed{sum(vertices, d(v)) = 2\,|E(G)|}$$

Bueno acá vamos a hacer una inducción de toda la vida como las que hacíamos en Álgebra I sobre las aristas del grafo

Caso base : $|E(G)| = 0$

No hay aristas. Por lo tanto el grado de todos los vértices es efectivamente cero. Entonces la sumatoria da cero. Que es igual que el doble de cero.

Paso inductivo: Si vale para m-1 aristas, debe valer para m aristas

Sea G un grafo con m aristas y G' el grafo resultante de sacarle una arista $e = (v1,v2)$ (osea tiene m-1 aristas)

HI : $sum(vertices(G'), d(v)) = 2 * (m-1)$

Qvq : $sum(vertices(G), d(v)) = 2 * m$

También sabemos por definición de G' que :

- $|V(G')| = |V(G)|$
- $|E(G')| + 1 = |E(G)|$
- $|d_{G'}(v1)| + 1 = |d_G(v1)|$
- $|d_{G'}(v2)| + 1 = |d_G(v2)|$

Entonces

$$sum(vertices(G), d(v)) = sum(\overbrace{vertices(G)}^{\text{sin v1 y v2!}}, d_G(v)) + d_{G'}(v1) + 1 + d_{G'}(v2) + 1$$

Como exceptuando en v1 y v2, para todo v vale que $d_G(v) = d_{G'}(v)$

$$= sum(\underbrace{vertices(G')}_{\text{sin v1 y v2!}}, d_{G'}(v)) + d_{G'}(v1) + 1 + d_{G'}(v2) + 1 = \underbrace{sum(vertices(G')}_{\text{Ahora sí con v1 y v2}}) + 2$$

$= 2 * (m-1) + 2 = 2 * m$ Como queríamos ver

Queda entonces probado que $sum(vertices(G), d(v)) = 2\,|E(G)|$