

Obtención de topografía de un objeto con proyección de Moiré.*

Javier Chávez Resendes and Jorge Abraham Corrales Cardoza†

A01235878@tec.mx and A01741370@tec.mx

Tecnológico de Monterrey.

(Dated: June 21, 2022)

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la tecnología para reconstruir imágenes tridimensionales es relativamente reciente y es un campo que sigue en desarrollo. La relevancia de la obtención de imágenes tridimensionales radica en su gran variedad de aplicaciones, por ejemplo en la el reconocimiento de gestos faciales, diseño prótesis, prototipado, detección de movimiento, impresión tridimensional, elaboración de moldes, desarrollo de ambientes de realidad virtual y realidad aumentada, entre muchos otros.

El objetivo de este proyecto es:

- Diseñar un algoritmo que permita obtener una imagen tridimensional de algún objeto a nivel de superficie a partir de una proyección óptica.

En este trabajo se asume que ya se tiene conocimiento de óptica. Por ejemplo: interferometría y polarización, A continuación se presenta un método para la reconstrucción de la topografía de una imagen, esto consta de tres partes: la generación de franjas, la obtención de la fase y el desdoblamiento de la imagen.

II. MARCO TEÓRICO

A. Generación de franjas

Se pueden generar franjas de varias formas, por ejemplo utilizando un proyector o construyendo un interferómetro.

Un interferómetro conveniente para este trabajo es el Sagnac, por que en todo el interferómetro se maneja el mismo camino óptico y no es afectado por perturbaciones externas. Como todo interferómetro, sus franjas presentan un perfil cosenoidal, explicado por:

$$\begin{aligned} I &= |E_A + E_B|^2 \\ &= |E_A|^2 + |E_B|^2 + 2\operatorname{Re}\{E_A \cdot E_B\} \\ &= |E_A|^2 + |E_B|^2 + 2E_A E_B \operatorname{Re}\left\{e^{i(\phi_A - \phi_B)}\right\} \hat{u}^A \cdot \hat{u}^B. \end{aligned} \quad (1)$$

Pasando todo a termino de las intensidades y considerando que las polarizaciones de las campos que interfieren es la misma, llegamos a:

$$I = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi), \quad (2)$$

en donde el último término es el que nos da información del perfil de interferencia de las franjas [1].

B. Obtención de la fase (fase enveuelta)

Este método se basa en incidir las franjas de interferencia sobre el objeto y capturar una imagen de intensidades cada vez que se varía la fase ϕ . Considerando que tenemos la ecuación 2, tenemos las incógnitas I, I_A, I_B y ϕ , por lo tanto resulta necesario considerar cuatro expresiones para resolver el sistema. Para esto se varía la fase $\pi/2$, por lo que terminamos teniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi) \\ I_2 &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi + \frac{\pi}{2}) \\ I_3 &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi + \pi) \\ I_4 &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi + \frac{3\pi}{2}), \end{aligned} \quad (3)$$

con la identidad trigonométrica $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ esto se puede simplificar a:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi) \\ I_2 &= I_A + I_B - 2\sqrt{I_A I_B} \sin(\phi) \\ I_3 &= I_A + I_B - 2\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi) \\ I_4 &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \sin(\phi). \end{aligned} \quad (4)$$

Para obtener la fase resulta necesario considerar que:

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 &= -4\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi) \\ I_2 - I_4 &= 4\sqrt{I_A I_B} \sin(\phi). \end{aligned} \quad (5)$$

Obteniendo el cociente de ambas expresiones y aplicando propiedades trigonométricas llegamos a la sencilla expresión mostrada en la ecuación 6.

$$\frac{-(I_2 - I_4)}{I_1 - I_3} = \frac{4\sqrt{I_A I_B} \sin(\phi)}{4\sqrt{I_A I_B} \cos(\phi)} = \tan(\phi). \quad (6)$$

Llegando a este punto es sencillo visualizar que la obtención de la fase está dada por:

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{-(I_2 - I_4)}{I_1 - I_3} \right], \quad (7)$$

esto es lo que se le conoce como fase envuelta [2]. Por la naturaleza de la función tangente inversa, la fase que obtenemos presenta discontinuidades, por lo que resulta necesario algún método que nos ayude a corregir esta situación.

* F2008B.302 - Caracterización Experimental de Sistemas Ópticos

† Profesores: Raúl Hernández, Dorilian López y Rodolfo Masegosa.

C. Desenvolvimiento de la fase

El desenvolvimiento de la fase es la parte del método que se encarga de tratar de corregir las discontinuidades generadas por la obtención de la fase envuelta. Una manera de hacerlo es usar el algoritmo desarrollado por Ghiglia y Romero en 1994 [3].

Lo primera que se necesita es conocer las diferencias que existe en la matriz de la fase envuelta en ambas dimensiones, así como lo indica la ecuación 8.

$$\begin{aligned}\Delta_{i,j}^x &= \psi_{i+1,j} - \psi_{i,j} \\ \Delta_{i,j}^y &= \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}.\end{aligned}\quad (8)$$

Haciendo una relación entre las diferencias de la fase podemos calcular y definir que:

$$\rho_{i,j} = (\Delta_{i,j}^x - \Delta_{i-1,j}^x) + (\Delta_{i,j}^y - \Delta_{i,j-1}^y). \quad (9)$$

A esta última expresión le calculamos su Transformada Coseno Discreta (DCT) en dos dimensiones para obtener $\hat{\rho}$. A partir de aquí, calculamos $\hat{\phi}$ de la siguiente manera:

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\rho}}{2(\cos \frac{\pi i}{M} + \cos \frac{\pi j}{N}) - 2}. \quad (10)$$

Finalmente la fase desenvuelta esta dada por:

$$\phi = DCT^{-1}(\hat{\phi}). \quad (11)$$

III. METODOLOGÍA

Para hacer la reconstrucción de la topografía del objeto se siguió con el siguiente procedimiento. El objeto que se utilizó fue una esfera de 3 cm de radio.

Lo primero fue encontrar la manera de generar franjas. Esto se logró construyendo un interferómetro de Sagnac dado por el diagrama de la figura 1.

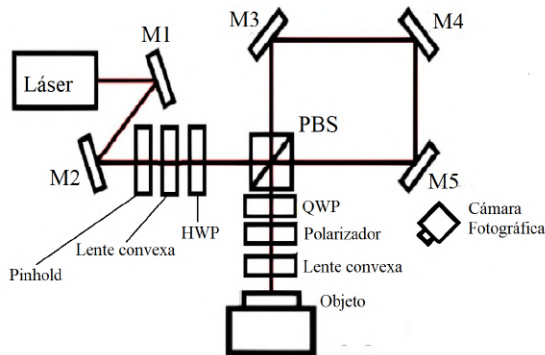


FIG. 1: Diagrama de interferómetro de Sagnac.

El procedimiento para crear el interferómetro es lineal como se muestra en el diagrama; se comienza con un pinhole y una lente convexa seguida de la alineación del láser,

después de ello un retardador de media longitud de onda cuya funcionalidad es rotar la polarización en el ángulo preciso para tener la misma intensidad en los dos caminos ópticos a la salida del consecutivo divisor de haz polarizado, dichos caminos ópticos son guiados por tres espejos totalmente reflejantes nuevamente hacia el divisor y así obtener la interferencia. En la salida del interferómetro tenemos un retardador de $\lambda/4$, seguido de un polarizador lineal, esto nos ayuda a generar una polarización circular y finalmente se tiene una lente convexa para ampliar la proyección de las franjas.

Con el polarizador lineal es posible generar el desfase de las franjas a la hora de tomar las imágenes de intensidad rotándolo así como lo indica la expresiones de la ecuación 3, empezando en una referencia que consideramos cero y girándolo $\pi/4$ cada que se tomaba una fotografía, este se giró hasta llegar a $3\pi/2$; como la polarización que pasa por este elemento óptico es circular, la intensidad que incide sobre la superficie no se ve afectada.

Este procedimiento de tomar imágenes y rotar el polarizador se realizó dos veces. En la primera se tomaron imágenes de una superficie plana sin el objeto, estas se utilizaron como referencia para eliminar todo aquello que no fuera la topografía que queremos reconstruir. Posteriormente se agregó el objeto sobre la superficie plana, y se tomaron cuatro imágenes de nuevo con sus respectivos desfases en las franjas. Dentro de nuestro análisis holográfico resulta muy importante conocer a cuantos grados esta desalineado el centro del objeto con el eje óptico de la cámara y la distancia que existe entre una franja y otra considerando de centro a centro.

Teniendo cuatro imágenes para la referencia y cuatro para el objeto, estas importaron a Matlab para obtención de la fase de ambas. Con las imágenes sobre el software se modificó su datatype de unit8 a double para trabajarlas como matrices numéricas. Tanto para la referencia como para el objeto se utilizó la ecuación 7 para obtener la fase envuelta. Por último se restó la fase envuelta de la referencia sobre la del objeto para así eliminar el ruido del fondo que no nos interesa reconstruir.

Sobre esta última matriz resultante se aplicó el método de Ghiglia y Romero para desenvolver la fase.

IV. RESULTADOS

A. Imágenes del objeto

Ya con el interferómetro montado, primeramente se pasó a fotografiar la referencia con los desfases anteriormente mencionados en la ecuación 3. La imágenes capturadas se presentan en la figura 2. El periodo de las franjas fue de $T = 18$.

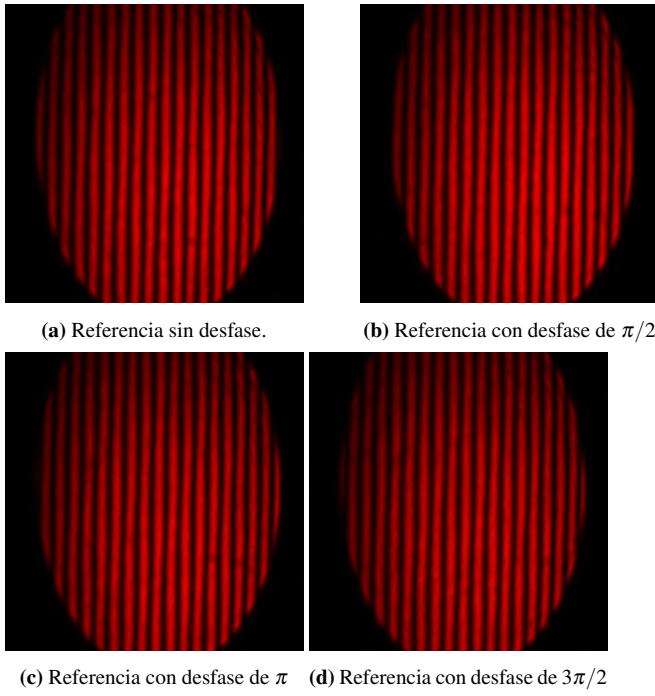


FIG. 2: Fotografías de intensidad de la referencia.

Posterior a esto se fotografió el objeto, en este caso en particular una esfera. Las imágenes capturadas se presentan en la figura 3. El radio de la esfera era de 3cm y el eje óptico de la cámara estaba desalineado 15 grados respecto al centro de la esfera.

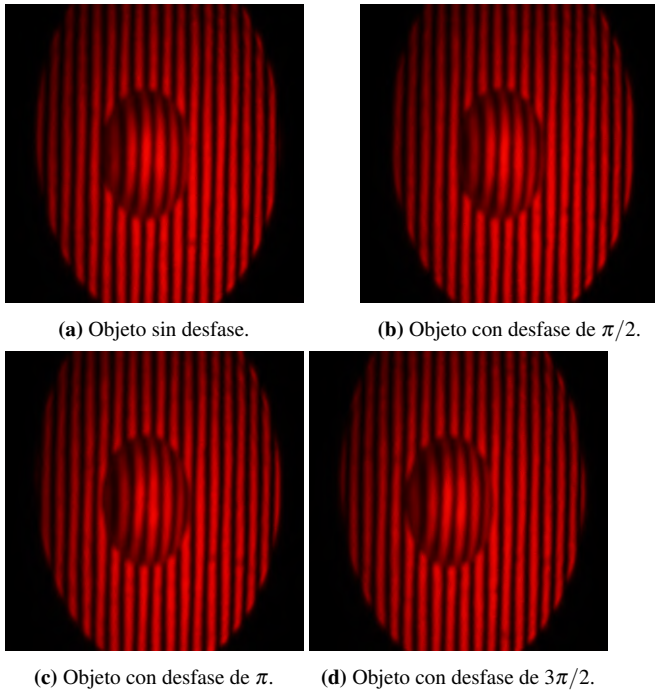


FIG. 3: Fotografías de intensidad del objeto.

B. Obtención de la fase (fase envuelta).

Estas imágenes se importaron a Matlab para trabajarlas como matrices. Se tuvieron que convertir de RGB a escala de grises para que los valores de intensidad estuviera dado entre cero y uno. Con todos estos valores de intensidades correspondientes a un desfase determinado se pudo aplicar la ecuación 7 generando imágenes de las figuras 4a y 4b:

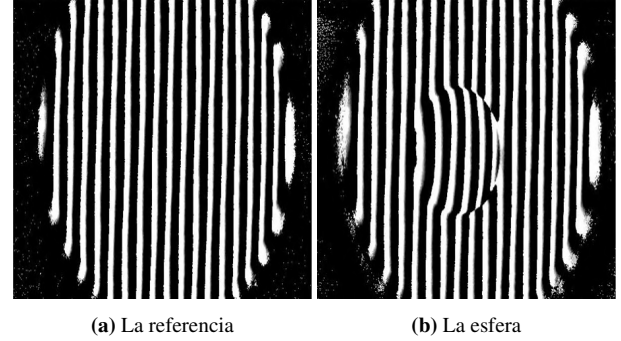


FIG. 4: Fases envueltas de la referencia y el objeto.

Si restamos los valores de la referencia sobre las del objeto tenemos el resultado mostrado en la figura 5.

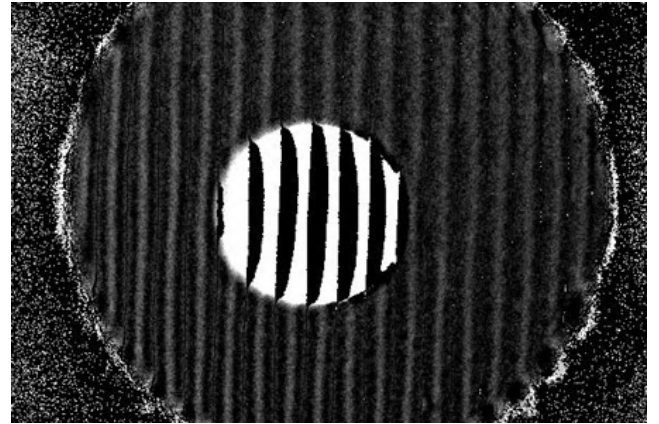


FIG. 5: Fase envuelta del objeto menos los valores de la referencia.

Hay parte del fondo que no se logra eliminar y queda como ruido. Esto se debe a causa de que se uso un interferómetro que se estuvo manipulando de manera manual, y por ende, a veces el desfase de las franjas no es exacto.

C. Desenvolvimiento de la fase.

Al desenvolver la fase se obtiene un mapa de frecuencias como el de la figura 6 en donde se observa el ruido mencionado en el inciso anterior y demás picos fuera de la proyección de las franjas, por lo que es necesario eliminarlos.

Además, el mapa está dado en los píxeles de la imagen trabajada en los ejes X y Y, por lo que es necesario realizar un escalamiento a los valores reales.

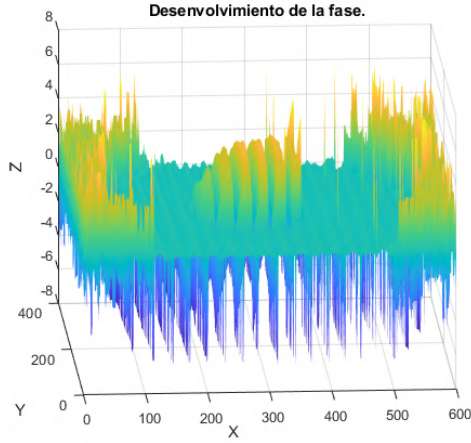


FIG. 6: Obtención de la fase desenvuelta.

Primeramente se recortó la imagen hacia nuestra área de interés para eliminar las frecuencias altas que se encuentran fuera de la circunferencia de la proyección de las franjas. Luego se realizó el factor de escala para los ejes de la figura, en los ejes X y Y:

$$\hat{X} = \frac{n_x 2r}{N_x} \quad (12)$$

$$\hat{Y} = \frac{n_y 2r}{N_y}, \quad (13)$$

en donde n_x y n_y son las dimensiones de la nueva matriz recortada, N_x y N_y son las dimensiones originales y r corresponde al radio de la esfera.

Para el eje Z se usó el factor

$$\hat{\phi} = \frac{\phi}{2\pi} T \frac{1}{\tan(\theta)}, \quad (14)$$

en donde ϕ es la matriz de valores recortada, T es el periodo de las franjas y θ es el ángulo formado entre la cámara y el haz incidente en el plano. En donde

$$T = 18 \text{ franjas} \\ \theta = 19.14^\circ.$$

Una vez realizado el escalamiento se eliminaron las frecuencias altas por ruido con el parámetro $\hat{\phi}(\hat{\phi} \leq \pm 4.5) = 0$ como límite, el resultado corresponde al de la figura 7.

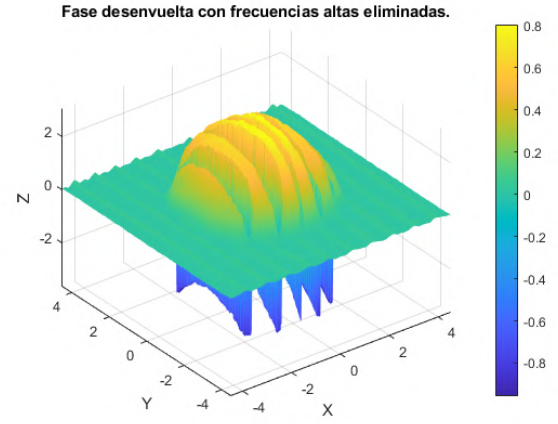


FIG. 7: Fase desenvuelta con suavizado del ruido y discontinuidad.

De esta forma ya se cuenta con la fase desenvuelta y suavizada de las frecuencias altas por ruido, sin embargo, se presenta discontinuidad, se aprecian dos fases intercaladas en un plano positivo y otro negativo que se presenta en el rango de $[-\pi, \pi]$ como se muestra en la figura 8. Para corregirlo es necesario realizar un corrimiento de 2π del plano negativo, es decir $\hat{\phi}(\hat{\phi} < 0) = \hat{\phi}(\hat{\phi} < 0) + 2\pi$, y de esta manera tener una sola fase en un solo plano positivo [4].

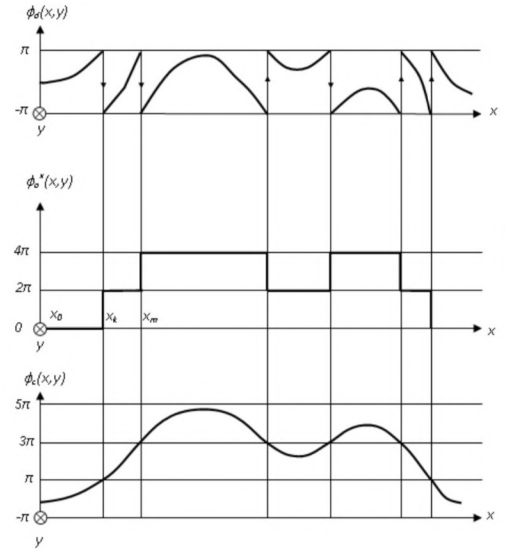


FIG. 8: Corrimiento de 2π por discontinuidad.

El resultado final de la topología del objeto corresponde a la figura 9, la cual da una excelente aproximación al objeto en cuestión, la geometría es esférica con pequeñas imperfecciones en la superficie y con dimensiones muy cerca de las reales.

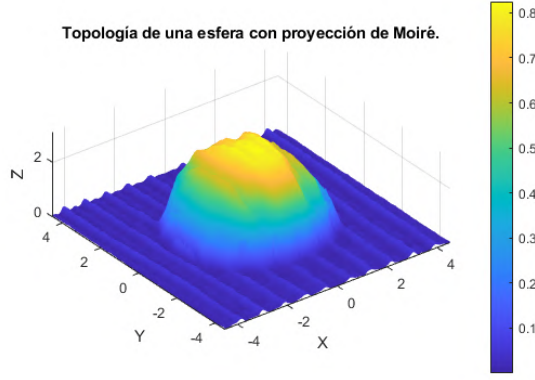


FIG. 9: Topología obtenida del objeto con suavizado, escalamiento y corrimiento de fase.

D. Cálculo de Error.

Para el cálculo del error obtenido en nuestra reconstrucción de la superficie se usó el error cuadrático medio, dado por la ecuación

$$ECM = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\hat{\phi}_i - Z_i)^2, \quad (15)$$

en donde $\hat{\phi}$ es la matriz obtenida por la ecuación 14 representada por la figura 9 y Z es la matriz de una esfera ideal, véase la figura 10.

Sabemos que la ecuación de la esfera es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad (16)$$

por lo tanto, la matriz de valores de Z está dada por

$$Z = \mathbb{R}[\sqrt{3^2 - X^2 - Y^2}] \quad (17)$$

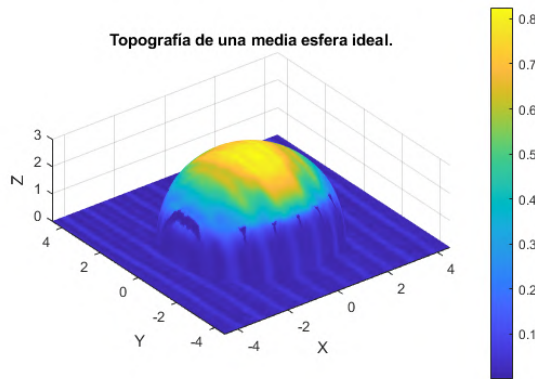


FIG. 10: Topología de una media esfera ideal con radio $r = 3cm$.

Implementando el error cuadrático medio en MATLAB con el comando 'immse', el error obtenido corresponde a $ECM = 11.90\%$ [5].

V. CONCLUSIÓN

La reconstrucción de imágenes 3D tiene muchas aplicaciones que son de utilidad, por ejemplo la reconstrucción de una pieza de gran valor histórico para ser exhibida al mundo. Para este particular caso, la reconstrucción de una esfera para entender esta metodología de manera introductoria.

En términos generales, se puede decir que el objetivo del trabajo se logró. Se logró una reconstrucción de la esfera, sin embargo, el procedimiento no es perfecto. Como se puede notar en las imágenes, la esfera no es exactamente igual, resultado que queda mayormente evidenciado por el cálculo del error. Entre los obstáculos y limitantes que se presentaron esta el uso del interferómetro, pues la posición de polarizador para generar el desfase en franjas no era exacto, a causa del error humano, quizás con imágenes ya hechas y desplegadas con un proyector de alta resolución podría ayudarnos a mejorar este aspecto. También la cuestión fue la de la cámara, debido que tiene una configuración muy variada, y buscar los parámetros adecuados como apertura, velocidad de obturación e ISO para llegar a una imagen adecuada representó una dificultad. Otra área de oportunidad puede ser jugar con una mayor cantidad de periodo en las franjas. Y sin duda alguna, la mayor de las dificultades fue el poder computacional, el motivo era que las imágenes producían matrices muy grandes al momento de importarse a MATLAB, al momento de correr el código, el render de la computadora no era suficiente para terminar el algoritmo. Tenemos áreas de mejora, a pesar de eso, consideramos que el resultado es bastante bueno, tenemos una figura con una forma esférica y logramos entender la metodología de manera adecuada.

Este trabajo nos puede traer grandes beneficios en el área profesional. En general, todo el trabajo hecho en laboratorio nos brinda una experiencia que nos ayuda a generar competencias que podemos llevar con destreza al momento de participar en un trabajo de mayor seriedad. A ver utilizado elementos ópticos nos da noción de como trabajar en un ambiente de investigación.

VI. BIBLIOGRAFÍA.

-
- [1] E. Hecht, *Optics*, 5th ed. (Addison-Wesley, 1987).
 - [2] Y. López-Álvarez, M. Rodríguez-Franco, R. Jara-Ruiz, and S. Delgado-Guerrero., Aplicación del método de takeda y corrimiento de fase en la reconstrucción de perfiles mediante luz estructurada., *Revista de Operaciones Tecnológicas* (2018).
 - [3] D. C. Ghiglia and L. A. Romero, Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods, *Journal of the Optical Society of America A*. (1994).
 - [4] K. J. Gasvik and M. E. Fournery, Projection moire using digital video processing: A technique for improving the accuracy and sensitivity. (1986), <https://doi.org/10.1115/1.3171826>.
 - [5] D. Wackerly and W. Scheaffer, *Mathematical Statistics with Applications*, 7th ed. (2008).
-

VII. APÉNDICES.

Appendix A: Interferómetro construido.

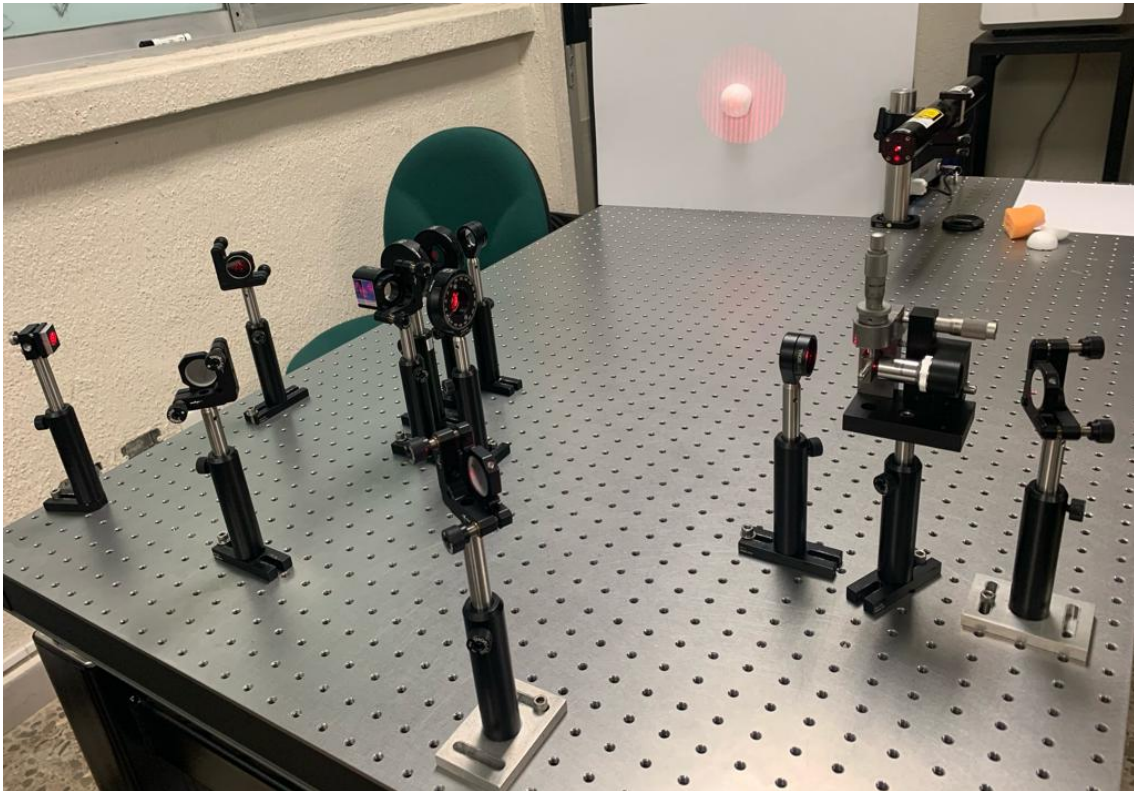


FIG. 11: Generación de franjas con interferómetro de Sagnac.

Appendix B: Códigos.

1. Código para obtención de topología de un objeto con proyección de Moiré.

```
% Codigo para topografia con proyeccion de moire
% Javier Chavez and Jorge Corrales
clc
```

```

clear all

%Valores de entrada
diametro = 15;
lineas = 18;
angulo = atand(12.5/36);
x=6;
y=6;
r = 3;

%% Carga de imagenes
I1 = rgb2gray(imgaussfilt(imresize(imread("DSC_0101.JPG"),0.1)));
I2 = rgb2gray(imgaussfilt(imresize(imread("DSC_0102.JPG"),0.1)));
I3 = rgb2gray(imgaussfilt(imresize(imread("DSC_0103.JPG"),0.1)));
I4 = rgb2gray(imgaussfilt(imresize(imread("DSC_0104.JPG"),0.1)));

R1 = rgb2gray(imgaussfilt(imresize(imread("DSC_0105.JPG"),0.1)));
R2 = rgb2gray(imgaussfilt(imresize(imread("DSC_0106.JPG"),0.1)));
R3 = rgb2gray(imgaussfilt(imresize(imread("DSC_0107.JPG"),0.1)));
R4 = rgb2gray(imgaussfilt(imresize(imread("DSC_0108.JPG"),0.1)));

% Recorte y cruce de imagenes
I1=[I1(:,86:285) fliplr(I1(:,86:285))];
I2=[I2(:,86:285) fliplr(I2(:,86:285))];
I3=[I3(:,86:285) fliplr(I3(:,86:285))];
I4=[I4(:,86:285) fliplr(I4(:,86:285))];

R1=[R1(:,86:285) fliplr(R1(:,86:285))];
R2=[R2(:,86:285) fliplr(R2(:,86:285))];
R3=[R3(:,86:285) fliplr(R3(:,86:285))];
R4=[R4(:,86:285) fliplr(R4(:,86:285))];

%% Fase envuelta
Ref = atan2(-(wiener2(im2double(R2),[5 5])-wiener2(im2double(R4),[5 5]))...
,(wiener2(im2double(R1),[5 5])-wiener2(im2double(R3),[5 5])));
theta = atan2(-(wiener2(im2double(I2),[5 5])-wiener2(im2double(I4),[5 5]))...
,(wiener2(im2double(I1),[5 5])-wiener2(im2double(I3),[5 5])));

phiR = GR(Ref); %fase desenvuelta de referencia
phiT = GR(theta); %fase desenvuelta de objeto

%% Suavizado de ruido
F = -(phiT - phiR); %resta de la referencia

[X Y] = meshgrid(1:length(phiR(1,:)),1:length(phiR(:,1)));
figure
surf(X,Y,F), shading interp,
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('Desenvolvimiento de la fase.')
colorbar

F(F>5)=0; %Eliminar picos positivos
F(F<-5)=0; %Eliminar picos negativos
F(F<-2)=F(F<-2)+(2*pi); %Corrimiento
F(F<0)=0; %Eliminar todos los negativos
F=F*0.2; %Filtro
Fd=wiener2(F(47:347,50:350),[5 5]); %Centrado de imagen

figure
surf(X,Y,F), shading interp,
axis equal
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('Desenvolvimiento de la fase con suavizado de ruido.')
colorbar

```

```

%% Escala
[Ny,Nx] = size(Fd); %Dimension de matriz recortada
[yo,xo] = size(F); %Dimension de matriz original
ny = (Nx*yo)/xo; %Escalamiento de x
nx = (Ny*xo)/yo; %Escalamiento de y
xs = linspace(-nx,nx,Nx); %vector de valores de x
ys = xs; %vector de valores de y
[Xs,Ys] = meshgrid(xs,ys); %Nuevas matrices de valores de x y y
z = (Fd./2.*pi).*( diametro ./ lineas ).*(1/tand(angulo)); %Escalamiento de Z

Fd=imgaussfilt(Fd); %Mas suavizado de ruido

figure
surf(Xs,Ys,z,Fd), shading interp,
axis equal
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('topografia de una esfera con proyeccion de Moire.')
%view(2)
colorbar

%% Calculo de error
Zzz=sqrt(3^2-Xs.^2-Ys.^2); %Creacion de matriz de valores de la esfera
% ploteo de esfera ideal
figure
surf(Xs,Ys,real(Zzz),Fd), shading interp,
axis equal
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('Topografia de una media esfera ideal.')
view(3)
colorbar

Error= immse(z,real(Zzz))*100; %Error cuadratico medio

```

2. Función de desenvolvimiento de fase

```

%% Funcion para fase desenvuelta.
function phi = GR(psi)
% get the wrapped differences of the wrapped values
dx = [zeros([size(psi,1),1]), diff(psi, 1, 2), zeros([size(psi,1),1])];
dy = [zeros([1,size(psi,2)]); diff(psi, 1, 1); zeros([1,size(psi,2)])];
rho = diff(dx, 1, 2) + diff(dy, 1, 1);

% get the result by solving the poisson equation
dctRho = dct2(rho);
[N, M] = size(rho);
[I, J] = meshgrid([0:M-1], [0:N-1]);
dctPhi = dctRho ./ 2 ./ (cos(pi*I/M) + cos(pi*J/N) - 2);
dctPhi(1,1) = 0; % handling the inf/nan value

% now invert to get the result
phi = idct2(dctPhi);
end

```