

Simulación de dinámica de partículas

12 de Junio del 2021

Ricardo Aguirre, Javier Chávez, Carlos Contreras, Edgar Galarza

Resumen— En el siguiente trabajo, se investigarán las características de un ciclotrón y se escribirá un reporte de su funcionamiento, junto a algunos problemas relevantes del tema.

I. INTRODUCCIÓN

El principio del acelerador resonante magnético, ahora conocido como el ciclotrón, fue propuesto por el Professor Ernest O. Lawrence en la Universidad de California en 1930, en un artículo corto para la revista Science.

Fue una sugerencia del experimento de Wideroe en 1928, en donde los iones de Na y K eran acelerados al doble del voltaje aplicado mientras estas atravesaban dos electrodos en forma de tubo lineal, que producía un campo eléctrico oscilatorio con el acelerador lineal. Luego de un desarrollo constante, en 1931 los primeros iones artificialmente acelerados hasta 1.2 MeV fueron producidos en los primeros ciclotrones.

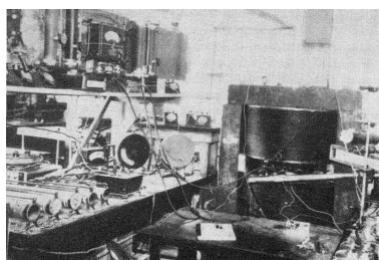


Fig. 1: Primer ciclotrón en la Universidad de California

Un ciclotrón es un acelerador de partículas, o bien una máquina que utiliza campos electromagnéticos para impulsar partículas cargadas a velocidades y energías muy altas. La funcionalidad de un ciclotrón desde un punto de vista físico depende de dos principios básicos: un campo eléctrico que acelera las partículas y un campo magnético que cambia la dirección de estas. Dichos campos son perpendiculares el uno al otro, brindando como resultado una órbita espiral para las partículas.

El método directo de acelerar iones utilizando la diferencia de potencial presentaba grandes dificultades experimentales asociadas a los campos eléctricos intensos. El ciclotrón evita estas dificultades por medio de la aceleración múltiple de los iones hasta alcanzar elevadas velocidades sin el empleo de altos voltajes.

La mayoría de los actuales aceleradores de partículas de alta energía descienden del primer ciclotrón de protones de 1 MeV construido por Ernest Lawrence y M. Stanley Livingston en Berkeley (California, EE. UU.). El artículo original publicado en la revista Physical Review, volumen 40, del 1 de abril de 1932, titulado "Producción de iones ligeros de alta

velocidad sin el empleo de grandes voltajes", describe este original invento. El primer ciclotrón en Sudamérica fue construido por el ingeniero argentino Mario Bángora, quien fue discípulo de Lawrence en Berkeley.

II. MARCO TEÓRICO

A. ¿Cómo funciona un ciclotrón?

A manera general el funcionamiento de un ciclotrón podría estar definido como la inyección de partículas a un sistema en el seno de un campo magnético, que las acelera continuamente. A medida que estas partículas ganan energía, el campo electromagnético las obliga a recorrer una espiral que va incrementando en radio, hasta que al final puedan salir expulsadas con una energía y velocidad mucho mayor.

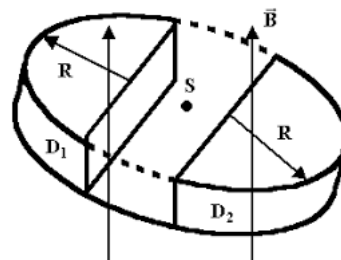


Fig. 2: Estructura interna de un ciclotrón

La construcción de un ciclotrón consta de dos placas semicirculares huecas llamadas *Ds* debido a su forma de D. Estas placas están fabricadas con un material conductor para así funcionar como electrodos y poder aplicar un potencial eléctrico alterno entre ellas usando una fuente eléctrica conocida como oscilador eléctrico, de igual forma para proteger a las partículas cargadas en movimiento del campo eléctrico. Estas se mantienen diametralmente opuestas la una con la otra a través de una pequeña distancia en la que se produce el potencial eléctrico. Es importante saber que el campo eléctrico opera solamente a través de esta distancia y sirve para acelerar la partícula cargada. Sin embargo, todo el sistema se encuentra dentro del campo magnético generado por placas fuera de y paralelas a las *Ds*. Por la fuerza de Lorentz la partícula se mantiene realizando movimientos circulares dentro de las placas *Ds*. La fuente de voltaje se alterna cada vez que la partícula cargada sale de una placa D cambiando la dirección del campo eléctrico acelerándola al mismo tiempo. Finalmente, hay un canal de salida en el perímetro de una de las placas que guía a la partícula cargada suficientemente acelerada hacia un objetivo.

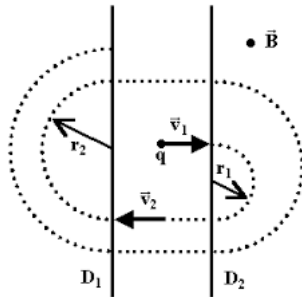


Fig. 3: Movimiento de una partícula dentro un ciclotrón

B. Aplicaciones

Los aceleradores de partículas tienen diversas aplicaciones en ámbitos médicos y de estudio de estructuras moleculares. Al bombardear algún elemento con partículas cargadas se puede transmutar el núcleo de dicho elemento, formando así isótopos con utilidades específicas, como el tratamiento de radioterapia para pacientes con cáncer.

C. Ecuaciones Importantes

En el funcionamiento de un ciclotrón se pueden generalizar en 5 ecuaciones importantes para la comprensión física del fenómeno. Véase la figura 3, como condición de frontera se percibe un campo magnético que describe una circunferencia con un radio inicial r_1 y velocidad angular w que pueden ser obtenidas con las ecuaciones (1) y (2) que se presentan en la cámara metálica D_2 . Al salir a la cámara metálica D_1 su radio cambia en aumento r_2 y la velocidad tangencial disminuye, véase en la ecuación 3. La velocidad máxima de expulsión de la partícula puede ser calculada con la ecuación 4 e igualmente la energía cinética final es obtenida con la ecuación 5.

$$r_1 = \frac{m \cdot v_1}{qB} \quad (1)$$

$$w = \frac{B \cdot q}{m} \quad (2)$$

$$r_2 = \frac{m \cdot v_2}{q \cdot B} \quad (3)$$

$$v_{max} = \frac{R \cdot B \cdot q}{m} \quad (4)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 \cdot B^2 \cdot R^2}{m} \quad (5)$$

III. PROBLEMAS

- (a) Mostrar que el periodo del movimiento (o sea, el tiempo entre un impulso y el siguiente impulso en la misma dirección), no depende de la velocidad del protón considerando velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Como consecuencia favorable de este resultado, podemos colocar a través de las Ds una diferencia de potencial sinusoidal con el mismo periodo y así lograr una aceleración continua hasta el radio máximo del ciclotrón.

Sol. Sabemos que:

$$T = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} \quad (6)$$

Por lo tanto debemos encontrar la distancia recorrida y la velocidad promedio. Por tener forma de circunferencia la distancia recorrida es la del perímetro de la circunferencia con radio r . Para encontrar la velocidad hay que involucrar más variables de esta situación. Sin considerar los límites relativistas, este protón que se libera tiene una velocidad v y está moviéndose sobre un campo magnético B . Debido a esto último al protón se le atribuye una fuerza magnética F descrita por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7)$$

Cuyas magnitudes se pueden obtener con:

$$F = qvB \quad (8)$$

Tomando en cuenta la segunda ley de Newton en Ec.(8) y que la aceleración presente es sólo radial o centrípeta podemos encontrar v .

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= qvB \\ m \frac{v^2}{r} &= qvB \\ v &= \frac{qrB}{m} \end{aligned} \quad (9)$$

Sustituimos ambas expresiones en la Ec. (6) y despejamos para encontrar el periodo.

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi r m}{qrB} \\ T &= \frac{2\pi m}{qB} \end{aligned} \quad (10)$$

Como podemos observar, la Ec. (10) no depende de la velocidad de la partícula sino de la intensidad del campo magnético además de la masa y carga de la partícula, que en este caso es un protón.

- (b) Uno de los primeros ciclotrones de Ernest Lawrence, construido en 1932, tenía un diámetro de sólo unos 30 cm y fue colocado en un campo magnético de aproximadamente 1 T. ¿Cuál era la frecuencia de la diferencia de potencial sinusoidal colocada a través de las Ds para acelerar los protones?

Sol. Aprovechando la Ec. (10) y sustituyendo los valores encontramos T .

$$T = \frac{2\pi \cdot (1.672 \times 10^{-27} \text{kg})}{(1.609 \times 10^{-19} \text{C}) \cdot (1 \text{T})} = 6.5577 \times 10^{-8} \text{seg}$$

Recordemos que la frecuencia es el recíproco del periodo, por lo tanto:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{6.5577 \times 10^{-8} \text{seg}} = 1.5249 \times 10^7 \text{Hz}$$

La frecuencia de la diferencia de potencial colocada a través de las Ds es de 15,249 MHz.

- (c) Demuestra que el potencial eléctrico equivalente de este pequeño ciclotrón era de unos millones de voltios. Es decir, la ganancia de energía cinética desde el centro hasta el radio más exterior fue de $\Delta k = e\Delta V_{eq}$, con $\Delta V_{eq} = 1 \times 10^6$ V.

Sol. Establecemos la diferencia de energía cinética del final y del principio.

$$\Delta k = k_{final} - k_{inicial} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (11)$$

Como parte del reposo la energía inicial es nula y se queda la energía final. La velocidad con la que sale disparada es la que tiene cuando se encuentra en el último semicírculo con el mayor radio (radio exterior). Sustituimos Ec.(9) en Ec.(12)

$$\begin{aligned} \Delta k &= \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 r^2 B^2}{m} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1.609 \times 10^{-19} \text{C})^2 (0.15 \text{m})^2 (1 \text{T})^2}{(1.672 \times 10^{-27} \text{kg})} \\ &= 1.7267 \times 10^{-13} \text{J} \end{aligned} \quad (12)$$

Despejamos ΔV_{eq} de la Ec. dada por el problema, sustituimos en Δk y encontramos el primer valor.

$$\Delta V_{eq} = \frac{\Delta k}{e} = \frac{1.7267 \times 10^{-13} \text{J}}{1.609 \times 10^{-19} \text{C}} = 1.0778 \times 10^6 \text{V}$$

- (d) Si la diferencia de potencial sinusoidal aplicada a las Ds tenía una amplitud de 500 V (es decir, variaba entre +500 y -500 V), mostrar que un protón tarda unos 65 microsegundos en moverse del centro al radio exterior.

Sol. Para encontrar el tiempo total que necesita el protón hay que considerar el periodo de cada rotación por el número de rotaciones dentro del ciclotrón. Se define N como la cantidad de rotaciones y ΔE el cambio de energía por cada vuelta.

$$E_{total} = N \cdot \Delta E \quad (13)$$

Sustitución de Ec.(12) en Ec.(13) y despejamos N :

$$\begin{aligned} E_{total} &= 2qNV = \Delta k = \frac{1}{2} \frac{q^2 r^2 B^2}{m} \\ N &= \frac{q^2 r^2 B^2}{4mqV} \end{aligned} \quad (14)$$

Ahora multiplicamos este valor N por el periodo por cada revolución T .

$$\begin{aligned} T_{total} &= N \cdot T = \frac{q^2 r^2 B^2}{4mqV} \cdot \frac{2\pi m}{qB} \\ &= \frac{2r^2 B \pi}{4V} = \frac{2(0.15 \text{m})^2 (1 \text{T}) \pi}{4(500 \text{V})} = 7.0686 \times 10^{-5} \text{seg} \end{aligned}$$

Convertido a 70.6 microsegundos vemos que este resultado se separa del esperado por sólo 5 microsegundos.

IV. DESARROLLO

Para simular la situación pedida, planteamos el problema y las posibles formas de obtener el movimiento que realizaría el protón dentro del sistema. Hicimos un código en Matlab que para empezar plantea las condiciones iniciales como la carga y masa del protón, el campo magnético y la diferencia de voltaje, entre otros.

```
1 %% Simulación del ciclotrón para Fundamentación
  de la electrodinámica
2 clear; clc; close all;
3 % Condiciones iniciales
4 q = 1.602e-19; %Carga del protón
5 m = 1.67e-27; %Masa de un protón
6 B0 = 1; %Campo magnético
7 V = 5000; %Diferencia de voltaje
8 d = 0.005; %Distancia entre placas
9 E = V/d; %Campo magnético y eléctrico
10 signo = 1; %Orientación del campo elé
    ctrico
11 Radio = 0.05; %Tamaño del ciclotrón
12
13 xFMin1 = d/2; xFMax1 = Radio; %D1
14 yFMin1 = -Radio; yFMax1 = -yFMin1;
15
16 xFMin2 = -Radio; xFMax2 = -d/2; %D2
17 yFMin2 = -Radio; yFMax2 = -yFMin2;
18
19 h = 0.1*10^-10;
20 t = 0;
21
22 c = 2.99*10^8;
23 B = [0;B0;0];
24
25 w = norm(B)*q/m;
```

Luego, inicializamos los vectores que almacenarían las variables relevantes para los cálculos y empezamos con un método numérico de tipo diferencias finitas. En el ciclo calculamos con euler las fuerzas y las velocidades, así como una variable que almacene la distancia del protón hasta el origen para parar el calculo en el punto donde el protón salga del ciclotrón.

```
1 % Arreglos de inicializacion de la posición, la
  velocidad, la energía y las fuerzas
2 r = [0;0;0];
3 v = [0;0;0];
4 Ek(:,1) = 0.5*m*v(:,1).^2;
5 dB = [0;0;0];
6 Fe = [0;0;0];
7 Fm = [0;0;0];
8
9 vmax = Radio*w;
10 Emax = 0.5*m*vmax^2;
11 n = Emax/(2*q*V);
12
13 % Metodo numerico de diferencias finitas para
  obtener con
14 i = 1;
15 while (norm(r(:,i)) < Radio)
16     if abs(r(1,i)) < d/2
17         Fe(1,i) = q*E*sin(w*t(i));
18         Fm(:,i) = q*cross(v(:,i),B);
19         F(:,i) = Fe(:,i) + Fm(:,i);
20         v(:,i+1) = v(:,i) + F(:,i)*h/m;
21         r(:,i+1) = r(:,i) + v(:,i+1)*h;
22     else
23         F(:,i) = q*cross(v(:,i),B)/m;
24         v(:,i+1) = v(:,i) + F(:,i)*h;
25         r(:,i+1) = r(:,i) + v(:,i+1)*h;
26     end
27     vf(i) = norm(v(:,i));
28     Ek(i) = (1/2*m*vf(i)^2)/q;
29     t(i+1) = t(i)+h;
30     i = i + 1;
31 end
```

Dado este momento, graficaremos los resultados obtenidos para cada variable de interés, tanto la trayectoria del protón como su velocidad y su energía cinética con respecto al tiempo.

```

1 tf = (0:h:t(i));
2 tiledlayout(2,2)
3
4 figure(1) %figura que grafica el ciclotrón y la
   trayectoria que seguira el protón
5 hold on
6 grid on
7 h_rect1 = rectangle('Position',[xFMin1 yFMin1
   xFMax1-xFMin1 yFMax1-yFMin1]); %rectangulos
   para dar una aproximación a las D's
8 h_rect2 = rectangle('Position',[xFMin2 yFMin2
   xFMax2-xFMin2 yFMax2-yFMin2]);
9 set(h_rect1,'FaceColor','#DDCDF5','EdgeColor','#
   DDCCDF5');
10 set(h_rect2,'FaceColor','#DDCDF5','EdgeColor','#
   DDCCDF5');
11 hold on
12 axis equal
13 grid on
14 xlabel("Posición en X (m)")
15 ylabel("Posición en Y (m)")
16 title("Simulación del Ciclotrón")
17 head1 = plot(r(1,end),r(3,end),'ro','MarkerSize',
   5, 'markerfacecolor', '#000000');
18 curve1 = animatedline('Color','#000000','
   LineWidth',1);
19 plot(r(1,:),r(3,:),'k');
20 title('Simulación del ciclotrón');
21
22 figure(2) %figura que grafica la velocidad que
   tiene el protón conforme pasa el tiempo
23 plot(tf,vf);
24 title('Velocidad respecto al tiempo'); xlabel('
   Tiempo (s)'); ylabel('Velocidad (m/s)');
25
26 figure(3) %figura que grafica la energia
   cinetica del protón
27 plot(tf,Ek);
28 title('Energía respecto al tiempo'); xlabel('
   Tiempo (s)'); ylabel('Energia (eV) ');

```

Adjuntamos un diagrama de flujo que explica nuestro código.

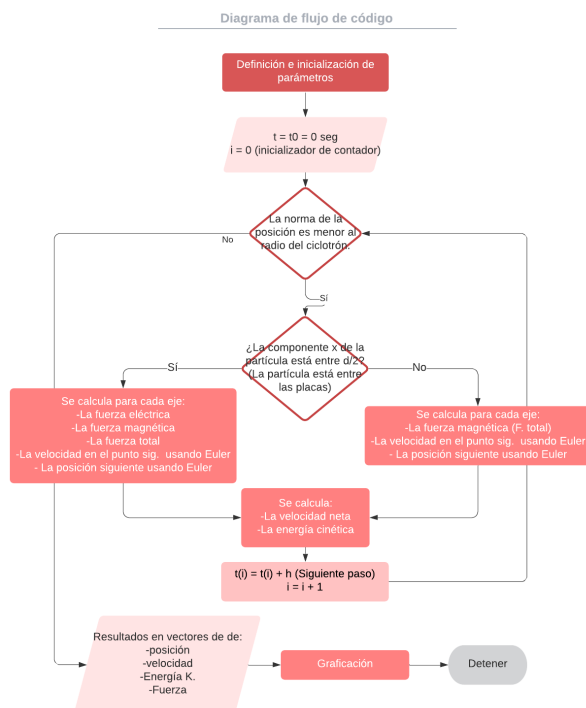


Fig. 4: Diagrama de flujo

V. RESULTADOS

- (a) ¿Cuál es la frecuencia angular ω de la diferencia de potencial sinusoidal que se requiere aplicar?

Sabemos que la ecuación de frecuencia angular

es a siguiente:

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

Considerando las características de un protón e introduciéndolas en la ecuación para obtener la frecuencia angular, a lo que sustituimos nuestros valores de carga $q = 1.602 \times 10^{-19} [C]$, de campo magnético $B = 1 [T]$ por ser uniforme, y una masa de $m = 1.67 \times 10^{-27} [kg]$:

$$\omega = \frac{1.602 \times 10^{-19}}{1.67 \times 10^{-27}} \quad (15)$$

Obtenemos que se debe aplicar una frecuencia angular de $\omega = 9.59 \times 10^7 \frac{rad}{s}$.

- (b) Muestra la trayectoria de un protón en el ciclotrón. Despliega la curva trazada. Asume que el protón no alcanza una velocidad cercana a la velocidad de la luz como para requerir corrección relativista. Verifica que dicha suposición es correcta. Para arrancar el programa, puede considerar un valor largo de dt (por ejemplo, $1 \times 10^{-10} s$), pero será necesario disminuir dicho valor más adelante.

Nuestro programa acaba con velocidades mucho menores a las necesarias para requerir corrección relativista. Al simular nos da una gráfica así:

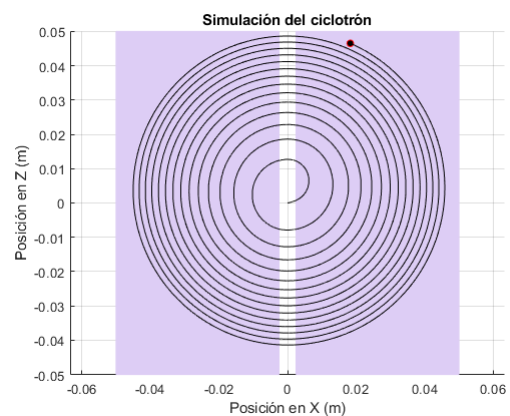


Fig. 5: Trayectoria de un protón en el ciclotrón

- (c) Gráfica la energía cinética K (en eV) del protón en función del tiempo. Explica la forma de la gráfica observada.

Podemos observar que la velocidad del protón se mantiene constante a medida de que se encuentra recorriendo la trayectoria semicircular en el espacio de cada una de las D's. Cuando logra salir de esta trayectoria, su velocidad aumenta debido a el campo eléctrico, para después volver a entrar en la próxima D. La tendencia de la gráfica indica que la energía cinética incrementa cuando la velocidad se ve influenciada por el campo eléctrico, luego se mantiene sin ningún cambio debido a la velocidad constante del protón dentro de la D.

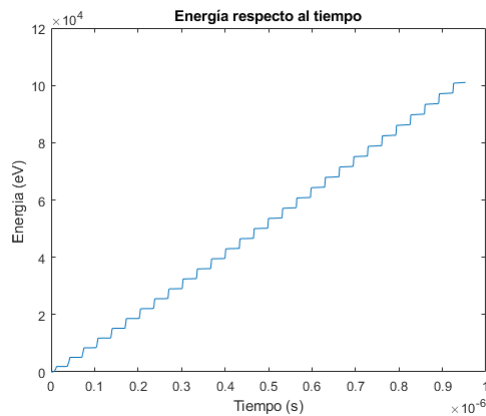


Fig. 6: Energía cinética en electrón-volts del protón en función del tiempo

- (d) **¿Qué ocurre si se utiliza una frecuencia distinta para la diferencia de potencial sinusoidal? Por ejemplo, utilice una frecuencia de 0.6ω .**

La frecuencia con la que se alterna el campo eléctrico es alterada, por lo que cuando la partícula regrese a la zona entre las placas la partícula no se va a acelerar, o no como se espera, puede incluso repeler la placa a la que se dirige y regresar a la dirección en la que venía, alterando completamente su trayectoria.

- (e) **Si el protón gana demasiada energía cinética mientras se encuentra dentro de las D's, ¿el tamaño de dt es muy grande! Ajusta el dt apropiadamente. ¿Qué valor de dt da valores razonables?**

Nuestro valor de dt es ya es razonable porque en el ciclotrón de este tamaño no aumenta demasiada su energía cinética. Si se llega a alterar este valor la partícula puede perder su trayectoria. (ej. el dt hace que la diferencia de posición sea mayor al espacio entre placas y no sufra la aceleración esperada)

- (f) **¿Cuánto tiempo le toma al protón alcanzar el borde exterior del ciclotrón?**

Analizando la gráfica obtenida mediante la simulación computacional realizada, tenemos que:

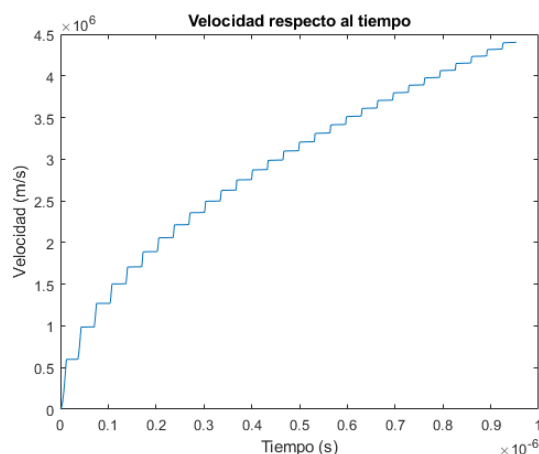


Fig. 7: Tiempo calculado al borde exterior del ciclotrón

al llegar al borde exterior del ciclotrón, habrían pasado aproximadamente 9.47×10^{-7} segundos.

- (g) **¿Qué valor tiene K (en eV) cuando el protón alcanza el borde exterior del ciclotrón?**

Sabemos que la ecuación de energía cinética es:

$$k = \frac{1}{2}mv^2$$

A lo que sustituyendo los valores de masa $m = 1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y de la velocidad en el borde exterior del ciclotrón $v = 4.4 \times 10^6 \text{ m/s}$ se tiene:

$$k = \frac{1}{2} \cdot (1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg}) \cdot (4.4 \times 10^6 \text{ m/s}) \quad (16)$$

$$k = 1.619 \times 10^{-14} \text{ J}$$

Dando un valor de $k = 1.619 \times 10^{-14} \text{ J}$

Para convertir este valor lo dividimos entre 1.602×10^{-19} que es la equivalencia a electron-voltos.

$$k = \frac{1.619 \times 10^{-14} \text{ J}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 1.011 \times 10^5 \text{ eV} \quad (17)$$

Obtenemos un valor de energía cinética en el borde exterior de $k = 1.011 \times 10^5 \text{ eV}$.

- (h) **Dada la respuesta a la pregunta (g), ¿cuántas orbitas debió haber hecho el protón para alcanzar el borde exterior del ciclotrón?**

Para la solución de este problema se despejó la ecuación 5 de energía cinética en relación al número de vueltas y se obtuvo la siguiente ecuación:

$$N = \frac{qB^2R^2}{4mV} \quad (18)$$

Sustituyendo los valores presentados anteriormente y en adición un radio de $R = 0.05 \text{ m}$:

$$N = \frac{1.602 \times 10^{-19} [\text{C}] \cdot (1 [\text{T}])^2 \cdot (0.05 \text{ m})^2}{4 \cdot 1.67262 \times 10^{-27} [\text{kg}] \cdot 4.4 \times 10^3} \quad (19)$$

Se obtuvo un valor de número de vueltas $N = 13.6$ vueltas

- (i) **¿Cuál es la velocidad final del protón? ¿se cumple que v sea mucho menor la velocidad de la luz?**

Viendo los resultados de nuestro Matlab, en nuestro ultimo punto:

$$v = 4402450 \ll c = 299792458 \quad (20)$$

Por lo que podemos asegurar que la velocidad no alcanza limites relativistas.

VI. CONCLUSIONES

(a) **Ricardo Aguirre**

En esta entrega pude comprender los temas anteriormente vistos en la materia de electrodinámica junto a la materia de sistemas numéricos. La comprensión del funcionamiento del ciclotrón es muy aplicable pues comprende los conocimientos involucrados en la interacción de partículas en campos electromagnéticos, que demuestra oportunidades en otros campos de trabajo. Este simulador no está completamente terminado; supone que sobre el eje z la partícula está perfectamente alineada en el origen; y falta programar el comportamiento de la partícula fuera del ciclotrón. Finalmente quizás sea más óptimo utilizar un ciclo *for* ya que la simulación se detiene hasta que sale del ciclotrón y a algún profesional le puede interesar su comportamiento después de salir disparado.

(b) **Javier Chávez**

EL comprender la física de un ciclotrón me ayudó bastante en saber aplicar conceptos y ecuaciones vistas durante clase, ya que a un inicio se vuelve imperceptible saber cómo aplicaríamos dichos aprendizajes en la vida real, a lo que con esto pude darme una idea de cómo es modelar física y matemáticamente un sistema eléctrico del que es muy difícil medir experimentalmente lo que se obtendrá. Por lo que la simulación computacional fue de gran ayuda para comprenderlo y a su vez esquematizarlo con plots y gráficas de lo cual es mayormente visual para saber si la aproximación obtenida está cercana a un contexto real.

(c) **Carlos Contreras**

Este entregable demostró ser muy retador para la aplicación de las formulas y conceptos de magnetismo. La integración del reto con métodos numéricos fue muy interesante pues pudimos involucrar temas de diferentes materias para resolver un problema. En general esta situación problema me gusto mucho por el hecho de trabajar con herramientas como los aceleradores de partículas.

(d) **Edgar Galarza**

Durante la primer entrega me parece que se logró comprender los principios básicos y fundamentales para tener una idea clara del funcionamiento general que tiene el ciclotrón y la relación que tiene con algunos de los temas vistos durante todo el semestre, permitiendo aclarar en cuanto a las distintas aplicaciones que puede llegar a tener en múltiples disciplinas. Para la segunda parte y entrega final, todo esto sirvió para poder culminar con una simulación exitosa y lo más cercana a su funcionamiento real, logrando valores bastante acercados. En general esta situación problema sirvió para aplicar y

reforzar los conocimientos adquiridos en clase.

REFERENCIAS

- [1] L. Dewan. *Design and construction of a cyclotron capable of accelerating protons to 2 MeV*. Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [2] J. A. S. Fuentes. *El Ciclotrón como Fundamento de Desarrollo Científico*. Ingeniería, 2000.
- [3] AK Lectures. Cyclotron and cyclotron frequency. <https://www.youtube.com/watch?v=4whimjhJpcl>. [En línea; accesado abril-15-2021].
- [4] M. S. Livingston and E. M. McMillan. *History of the cyclotron (Part 1, Livingston; Part 2 McMillan)*. Physics Today, 1959.
- [5] R. Moreira. *Principios y elementos de un ciclotrón*. Facultades de Medicina e Ingeniería, Universidad de la República Oriental del Uruguay, 2005.
- [6] K. Sunil. Electricity and magnetism, cyclotron. <https://cnx.org/contents/UBPo-xuY@13.12:aSdcSOPH@2/Cyclotron>. [En línea; accesado abril-16-2021].
- [7] Cuna G. H. I. M. Thompson, E. J. *Diseño de un ciclotrón compacto para propósitos educativos*. Jóvenes en la ciencia, 2016.
- [8] A. A. Timothy. *Cyclotron Basics*. MIT Plasma Science and Fusion Center.
- [9] L. Walter. 8.02x - lect 13 - moving charges in b-fields, cyclotrons, mass spectrometers, lhc. <https://www.youtube.com/watch?v=sDnG1JhZ2N4>, 2006. [En línea; accesado abril-15-2021].