Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Análisis de sistemas cuánticos (Gpo 3)

Proyecto de Segundo Parcial

Integrantes:

Javier Chávez Resendes **A01235878**
Ricardo Aguirre Rodríguez **A01235869**
Carlos David Contreras Chacón **A01232543**

Profesor
Dr. Julio Cesar Gutierrez Vega

21 de noviembre del 2021

Índice

1. Armónicos esféricos

Programa una rutina computacional que calcule el armónico esférico $Y_l^m(\theta, \phi)$ para los índices (l, m) y las variables (θ, ϕ). Programa la ecuación analítica que incluye el factor de normalización

$$Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\mathcal{P}_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{1}$$

donde

$$l = 0, 1, 2, ... \qquad y \qquad m = -l, -l+1, ..., -1, 0, 1, ..., l-1, l, \tag{2}$$

Para esto creamos una función local llamada *FcnArmonicoEsferico(m,l,theta,phi)* cuyos parámetros son los índices m y l de los armónicos esféricos, así como las matrices 'theta'y 'phi' para poder visualizar nuestro armónico en cualquier región. 'theta'y 'phi' son matrices numéricas obtenidas por la función integrada de MATLAB *meshgrid(phivc,thetavc)* de los vectores 'thetavc' y 'phivc' que respectivamente representan $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in (0, 2\pi]$ discretizados con diferencial de $\pi/120$.

Es importante mencionar que para lograr programar los armónicos esféricos separamos la función para $m < 0, m = 0, m > 0$

1.a. Muestra por medio de gráficas superficiales esféricas el comportamiento de $g(\theta, \phi)$ sobre la superficie de la esfera.

Para empezar con el problema, utilizamos la función de $g(\theta, \phi)$ que se nos da en el documento:

$$g(\theta, \phi) = A\theta\cos^3(\phi - 2\theta)(pi - \theta)^2 \tag{3}$$

Comenzamos buscando la constante de normalización A normalizando $g(\theta, \phi)$ e igualando a 1 para luego despejar A. Es decir,

$$\int_{\infty}^{-\infty} |g(\theta, \phi)|^2 dA = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} A^2\ \theta^2\cos^6(\phi - 2\theta)(\pi - \theta)^4\sin(\theta)\, d\theta\, d\phi = 1 \tag{4}$$

lo anterior lo logramos con integrales en Wolfram Mathematica para obtener un valor de $A = \frac{2}{\sqrt{5\pi(-720+84\pi^2-\pi^4)}}$ o 0.147923. Posteriormente utilizamos una transformación de MATLAB para convertir las coordenadas esféricas en cartesianas para graficar la representación de $g(\theta, \phi)$, un proceso que luego convertimos en una función local llamada *grafos* para poder convertir matrices de valores en coordenadas esféricas a esferas unitarias con una superficie dependiente de la magnitud de dicha matriz.

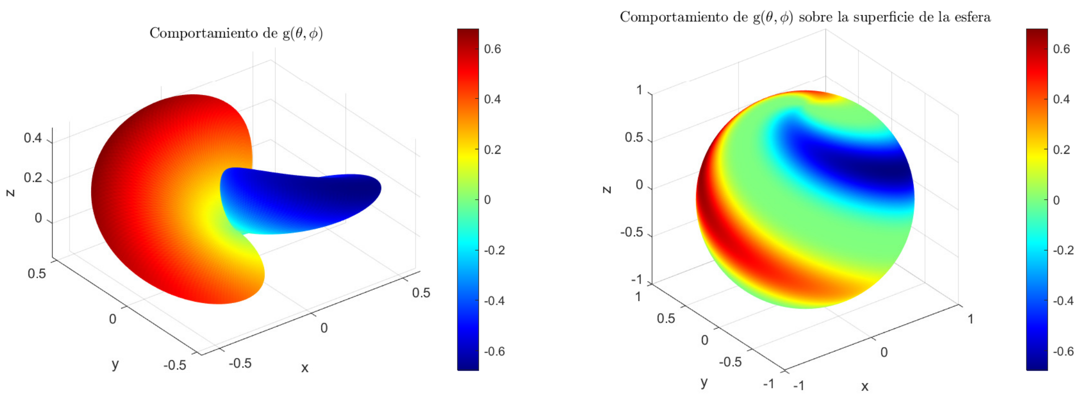

Figura 1: Función $g(\theta, \phi)$ no en y en superficie esférica

Decidimos no normalizar la intensidad pues la función que grafica es la misma que utilizamos para comprobar que los armónicos esféricos numéricos tuvieran los mismos coeficientes C_l^m que los resultados teóricos.

1.b. Tabulación de los coeficientes de expansión de la función $g(\theta, \phi)$ en términos de los armónicos esféricos.

Para obtener los coeficientes de $g(\theta, \phi)$ usamos la siguiente ecuación:

$$C_l^m = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} g(\theta, \phi)[Y_l^m(\theta, \phi)]^* \sin(\theta) d\theta d\phi \tag{5}$$

Integraremos la función con cada armónico esférico para ir generando toda la matriz de coeficientes que presentamos a continuación.

1.b.1. Muestra los coeficientes en una tabla de valores.

	m																				
l	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											0										
1										194.05	0	546.20									
2									0	626.06	0	28.13	0								
3								6.95	0	177.03	0	398.28	0	4.98							
4							0	37.80	0	125.04	0	143.99	0	27.26	0						
5						0	0	44.70	0	39.33	0	13.85	0	110.14	0	0					
6					0	0	0	183.19	0	23.21	0	17.19	0	28.21	0	0	0				
7				0	0	0	0	21.80	0	12.05	0	2.89	0	188.66	0	0	0	0			
8			0	0	0	0	0	109.37	0	7.96	0	4.95	0	59.20	0	0	0	0	0		
9		0	0	0	0	0	0	46.28	0	5.00	0	1.02	0	11.32	0	0	0	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	0	0	29.29	0	3.57	0	2.03	0	3.87	0	0	0	0	0	0	0

Como se observa hay muchos valores que se reducen a 0 por la cantidad de cifras significativas.

1.b.2. Muestra los coeficientes en un histograma.

De la misma forma aquí graficamos los valores con una gráfica tridimensional. Podemos observar que al principio los valores van siendo importantes mientras se acercan a $m = 0$ y a $j = 0$ pero llega un punto donde se vuelven muy pequeños como para que se vean diferentes a 0. Podemos decir que el armónico dominante es el Y_3^1 pues es el que mas aporta a la construcción de la función que se busca.

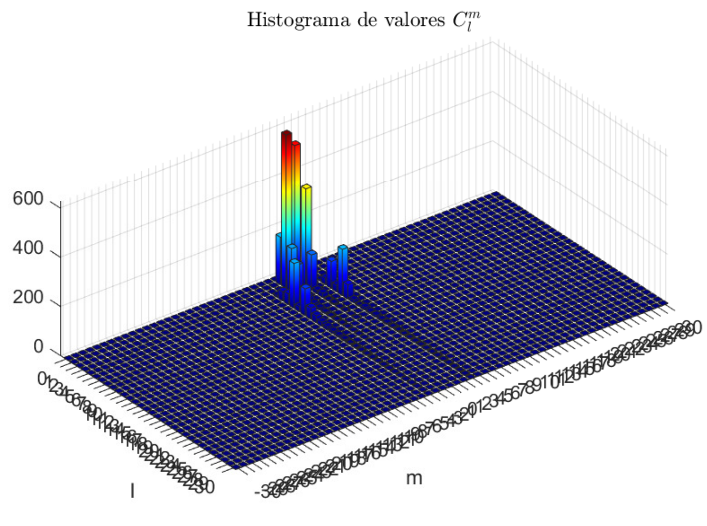

Figura 2: Gráfica de valores de los coeficientes.

Para evaluar la exactitud de nuestra aproximación, en este punto utilizamos hasta $l = 30$ para acercarnos lo mas posible a la función original y calcular cuantos de nuestros valores de la esfera construida cumplían la condición de tener una diferencia menor a un 1 %. Nuestra matriz tiene un total de 29161 elementos y con un condicional evaluamos la matriz del error para saber que había un total de 5284 valores que tenían un error menor. Si sacamos la proporción podemos decir que nuestra reconstrucción tiene errores mayores al 1 % en un 18.12 % de los valores. Nuestro error promedio tienen una magnitud de 0.0200.

1.c. Muestra gráficas representativas de la función reconstruida $F(\theta, \phi)$.

Para construir nuestra función en forma esférica superficial usamos el mismo proceso de convertir las coordenadas en cartesianas para poder graficarlas y obtuvimos la siguiente gráfica:

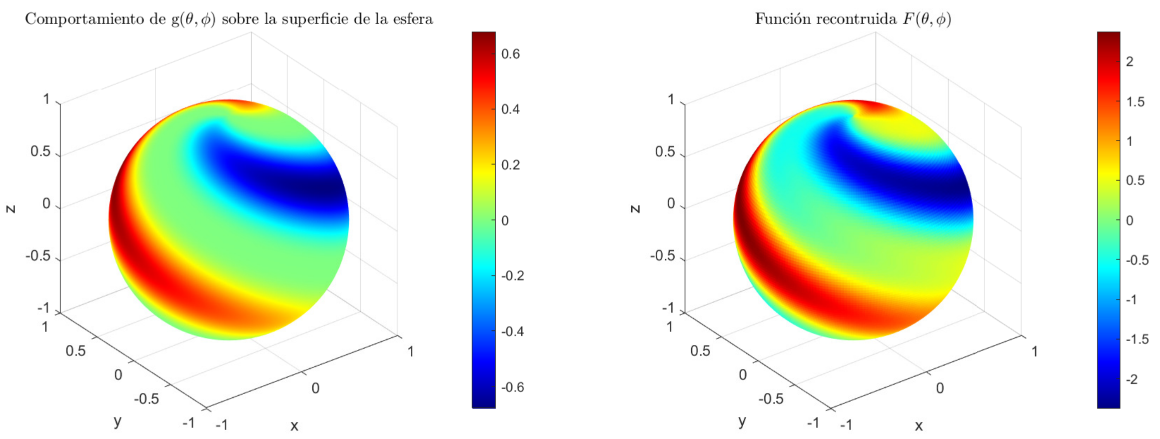

Figura 3: Función original(Izquierda), aproximación con los armónicos esféricos (Derecha)

2. Visualizando las distribuciones esféricas con la proyección cartográfica de Hammer.

2.a. Gráfica la función $g(\theta, \phi)$ de la Ec. (5) dentro de una elipse de Hammer.

Para resolver este problema primero definimos nuevamente los vectores numéricos de $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in (-\pi, \pi]$ para generar la matriz que ingresaremos a la función que grafica en la elipse de Hammer. Nuestra función se llama *grafosHammer* y recibe de parámetros las matrices phi, theta y la función $g(\theta, \phi)$ evaluando dichas matrices. Dentro de la función *grafosHammer* se hacen las transformaciones de coordenadas esféricas a cartesianas:

$$x = \frac{\sqrt{8}\sin\theta\sin(\phi/2)}{\sqrt{1+\sin\theta\cos(\phi/2)}}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{1+\sin\theta\cos(\phi/2)}} \qquad z = 0. \tag{6}$$

Además, para el eje z se crea una matriz de ceros del mismo tamaño que x y y puesto que queremos una elipse de dos dimensiones. Se aplica la función surf de MATLAB con dichos parámetros (x,y,z) y el color o intensidad es la función matricial $g(\theta, \phi)$. Finalmente se agrega también el contorno definido por la función de la elipse

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \tag{7}$$

para mostrar la restricción. Posteriormente encontramos el siguiente resultado para nuestro primer inciso.

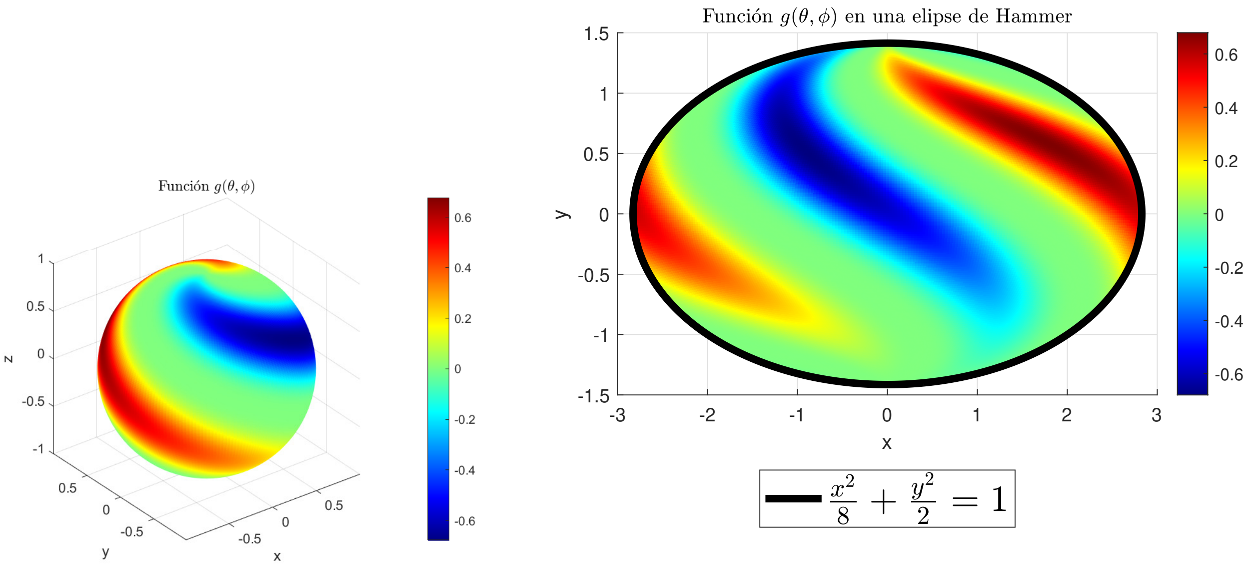

Figura 4: Función $g(\theta, \phi)$ en una elipse de Hammer

Aunque en la elipse de Hammer tenemos los ejes x y y en realidad estamos viendo la vista xz de la superficie esférica transformada a una elipse de Hammer. Además, podemos ver que los polos o extremos de la región más intensa se dirigen a $x = 0$.

2.b. Gráfica la parte real del armónico $Y_9^6(\theta, \phi)$ dentro de una elipse de Hammer

Para este inciso, se calcula primero el armónico esférico correspondiente al Y_9^6 con nuestra función *FcnArmonicoEsferico* con $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in (0, 2\pi]$ y se ingresa la función graficadora *grafosHammer*

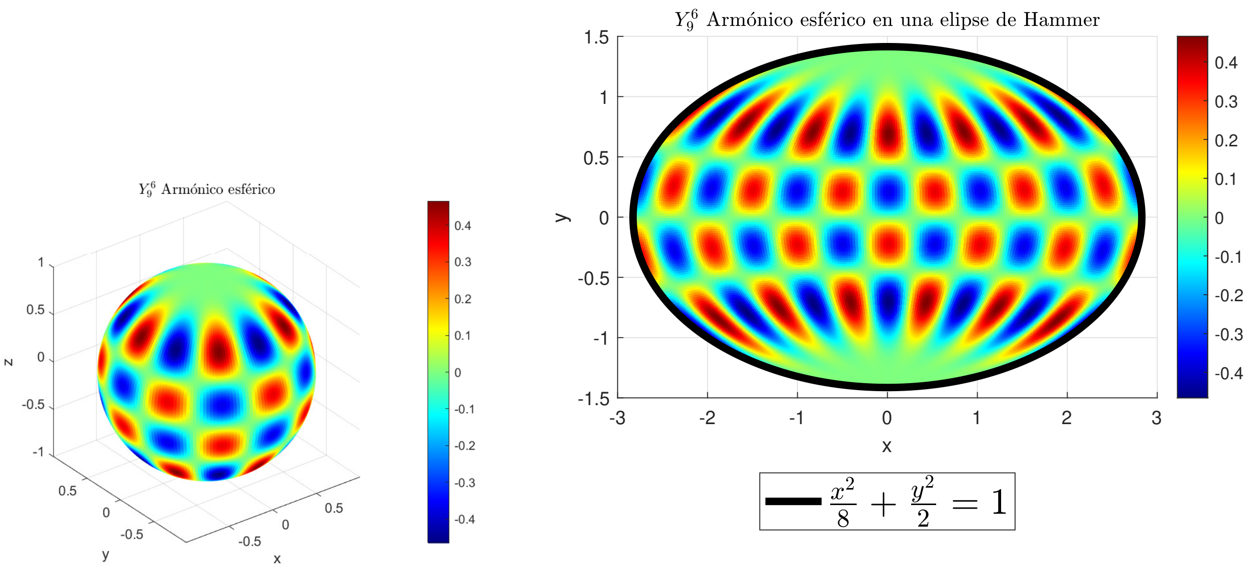

Figura 5: Parte real de Y_9^6 en una elipse de Hammer

2.c. Gráfica la parte real del armónico $G_9^6(\theta, \phi)$ dentro de una elipse de Hammer

Bajo ciertas condiciones la función de spin puede mapearse a la superficie de una esfera a través de la función

$$G_s^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}\frac{(2s)!}{(s+m)!(s-m)!}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{s+m}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{s-m} e^{im\theta}, \tag{8}$$

donde

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ... \qquad m = [-s, -s+1, ..., s-1, s]. \tag{9}$$

De forma similar a como creamos la función *FcnArmonicoEsferico* computamos la función G_s^m en nuestra función *FcnSpin* que recibe de parámetros m, s, theta y phi. Generamos G_9^6 y la ingresamos a *grafosHammer* para obtener los siguientes resultados.

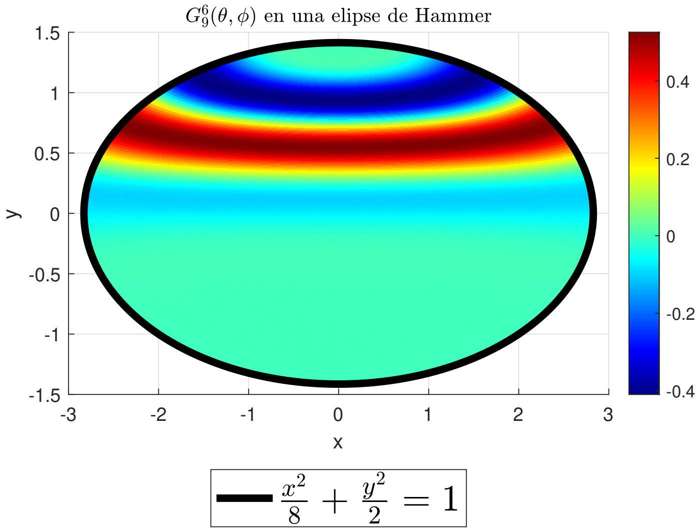

Figura 6: Parte real de G_9^6 en una elipse de Hammer

Podemos visualizar que esta función pierde simetría horizontal con respecto a $y = 0$.

2.d. Gráfica la función de densidad de probabilidad del estado $G_{5/2}^{-3/2}(\theta, \phi)$ dentro de una elipse de Hammer

De forma directa la función de densidad de probabilidad del estado $G_{5/2}^{-3/2}(\theta, \phi)$ es $|G_{5/2}^{-3/2}(\theta, \phi)|^2$, así esta es la función que ingresamos a la función *grafosHammer* para obtener la siguiente gráfica.

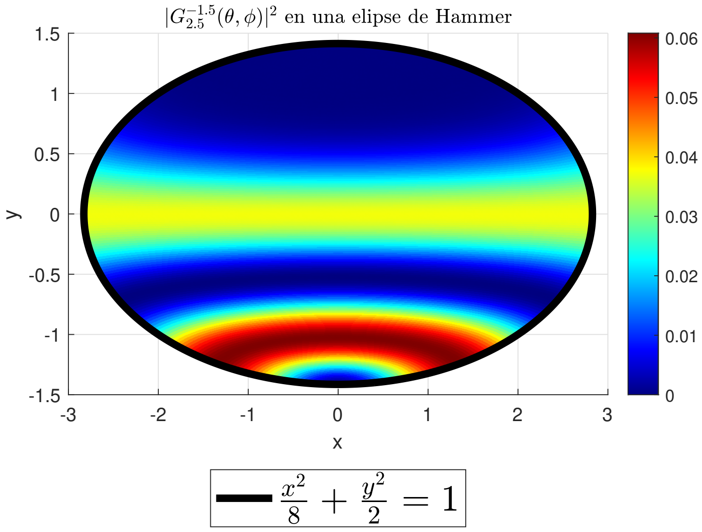

Figura 7: $|G_{5/2}^{-3/2}(\theta,\phi)|^2$, en una elipse de Hammer

3. Visualizando una función para representar una pelota de tenis.

Para comenzar a programar primero necesitamos definir alguna función que se asemeje a la forma del relieve de una pelota de tenis, por lo que luego de una consulta encontramos un sistema de ecuaciones paramétricas en una sección de el “American Journal of Physics” [López-López, 1996] y consultar articulos elegimos el siguiente sistema de curva parametrizada como nuestra propuesta para $T(\theta,\phi)$:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t \end{cases} \tag{10}$$

Ya que tuvimos nuestra curva, procedimos a convertir nuestros valores a coordenadas esféricas para que la función dependa solo de θ y de ϕ. Utilizamos funciones integradas en Matlab para hacer la transformación y manipulamos los vectores para que las curvas conservaran su forma original y para construir nuestra función como se pedía, convertimos los valores a 1 o -1 para que representaran los dos gajos de la pelota al momento de escribirlos matricialmente.

3.a. Gráfica $T(\theta,\phi)$ en una superficie esférica y dentro de una elipse de Hammer.

Para gráfica la curva $T(\theta,\phi)$, graficamos simultáneamente una esfera de radio = 1 y la curva en un plot de Matlab.

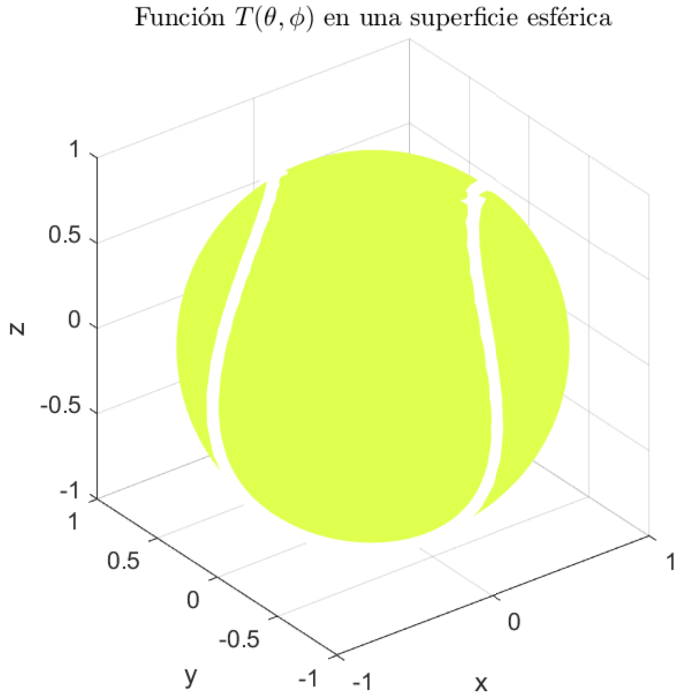

Figura 8: Curva $T(\theta, \phi)$ en una superficie esférica

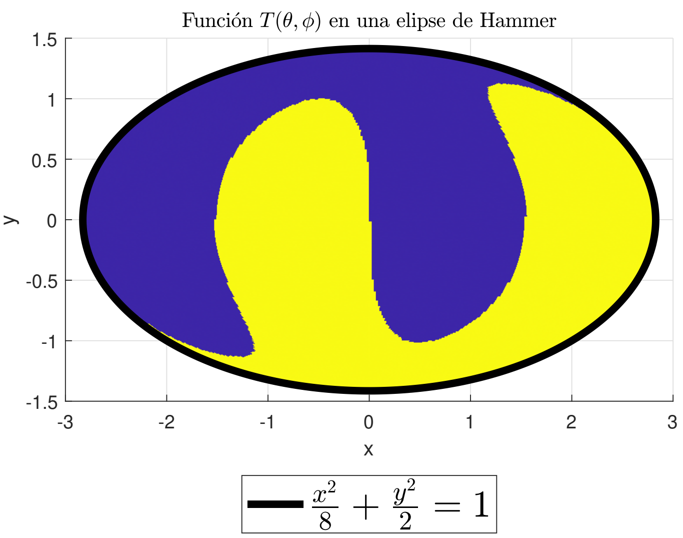

Figura 9: Curva $T(\theta, \phi)$ en una elipse de Hammer

Como podemos observar, en ambos casos vemos las representaciones de nuestra curva en diferentes espacios. En ambos se conserva bien la figura y nos permite observar las propiedades como la igualdad de los dos gajos y las simetrías de las mismas.

3.b. Muestra los coeficientes de la expansión de $T(\theta, \phi)$ usando una tabla de valores (l, m)

Si obtenemos los coeficientes de cada armónico esférico de la misma manera que en el inciso anterior, podemos generar una tabla con los valores de los coeficientes C_l^m:

	m																				
l	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											2.79										
1										1.08	3426.35	0.73									
2									5738.99	0.13	3.96	0.19	3.72								
3								1.05	1.77	0.74	2302.10	0.25	1.20	0.99							
4							0.04	0.68	1088.90	2.03	4.61	1.66	4.16	0.77	0.70						
5						1.33	0.52	2.90	2.24	2.34	402.90	0.71	1.41	1.73	579.80	0.74					
6					1663.44	1.57	0.02	0.58	331.08	0.86	2.40	1.87	0.59	0.79	4.08	1.05	4.92				
7				1.87	1.27	2.17	1.67	0.70	0.19	1.52	543.60	0.57	1.21	2.75	757.81	0.30	1.79	0.47			
8			0.07	0.71	607.10	2.26	0.14	1.22	613.73	2.21	1.29	3.49	1.55	2.14	1.84	3.09	2.06	0.19	1.64		
9		1.68	0.12	1.43	3.67	1.90	1.86	3.64	1.66	1.04	461.26	0.70	0.02	1.44	488.64	0.13	1.35	0.31	282.22	0.71	
10	911.48	0.86	0.02	0.68	4.25	1.20	0.70	1.75	286.44	0.57	3.56	0.98	4.78	3.40	0.20	0.46	2.55	2.37	1.59	0.02	5.23

3.c. Muestra gráficas representativas de la superposición donde se vea que se reconstruye la función sobre la superficie de la esfera.

Con la función que obtuvimos, podemos aplicar el proceso de reconstrucción a partir de armónicos esféricos para generar una nueva superficie esférica que simule a una pelota de tenis. Usamos el mismo proceso de la sección 1.c y obtenemos la siguiente reconstrucción, donde si observamos, podemos concluir en que la función se construye adecuadamente pero tiene irregularidades en algunos puntos que pueden ser solucionados si se aumenta el limite de las l's.

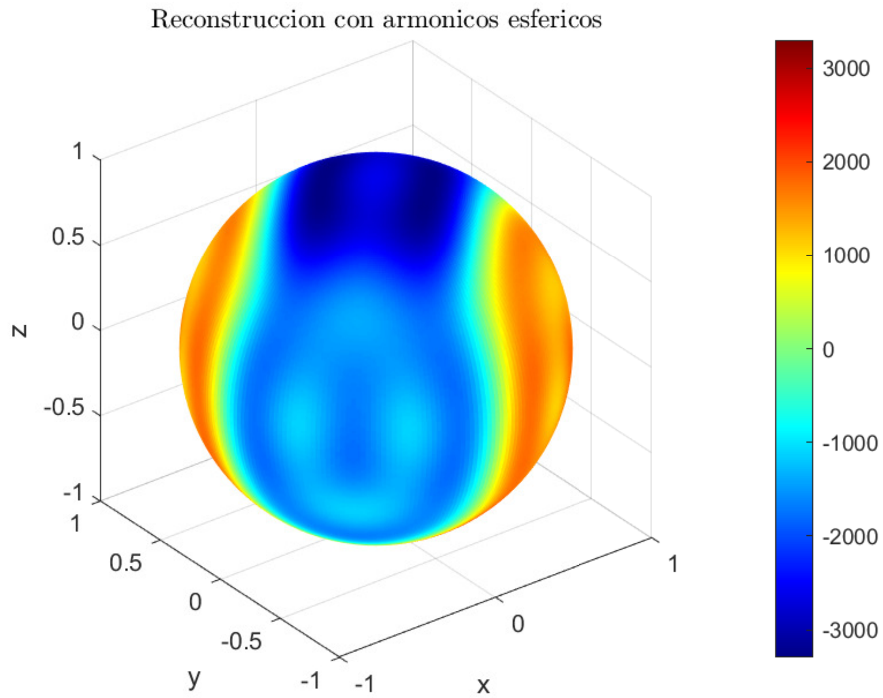

Figura 10: En la gráfica se observa la reconstrucción utilizando hasta $l = 10$

3.d. ¿Cómo influye en la expansión que el límite entre un gajo y el otro gajo corresponde a una discontinuidad de la función $T(\theta, \phi)$?

En la expansión se trata de aproximar lo mas posible a la función real, pero como vemos en la gráfica, las fronteras de los dos gajos no pueden ser discontinuos así que se ve el cambio brusco de valor de $g(\theta, \phi)$. Si la frontera uniera los valores de manera mas suave, seguramente con menos l's se podría obtener un resultado mas parecido.

4. Considera una partícula de masa M que se puede mover libremente sobre la superficie de una esfera de radio α

4.a. Escribe explícitamente los estados estacionarios y las eigenenergías que puede tomar la partícula.

Primeramente definimos las condiciones de frontera de una esfera.

$$U = 0 \begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{cases} \tag{11}$$

Al tener las condiciones de frontera en libertad en toda la superficie, los estados estacionarios es posible obtenerlos con su armónico esférico de forma directa

$$Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \mathcal{P}_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{12}$$

De igual forma las eigenenergías, cuales están dadas por

$$E_l = \frac{L^2}{2M\alpha^2} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2M\alpha^2} \tag{13}$$

donde $l = 0, 1, 2, 3, ...$ y $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \pm l$.

4.b. Considera que la función de estado de la partícula en $t = 0$ está dada por

$$H(\theta, \phi; t = 0) C \exp\left(-\left(\frac{\theta - \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{12}}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{\phi - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{6}}\right)^2\right) \tag{14}$$

donde C es una constante de normalización. Si se hace una medición de la energía de la partícula, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea $E = 3\hbar/Ma^2$?

Primeramente normalizamos H

$$1 = |C|^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \exp\left(-\left(\frac{\theta - \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{12}}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{\phi - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{6}}\right)^2\right) \right|^2 \sin(\theta)\, d\phi\, d\theta \tag{15}$$

Que al despejar y sacar raíz obtenemos $C = 2.32569 + 1.49073 \times 10^{-16} i$ cual valor de importancia es únicamente la parte real $C = 2.32569$.

Para obtener la probabilidad de que la energía sea $E = 3\hbar/Ma^2$, primeramente calculamos los coeficientes como lo hemos hecho anteriormente con la ecuación 5, usando la ecuación 14 como función $g(\theta, \phi)$ e integrando para cada valor de l y m, después, podemos darnos cuenta que la energía $E = 3\hbar/Ma^2$ corresponde al valor de $l = 2$, por lo tanto, la probabilidad de que obtengamos esta energía será la suma de los coeficientes con este valor de l de manera normalizada, dado esto, procedemos con la operación cual valor es

Si se hace una medición de la energía de la partícula, la probabilidad de que el resultado sea $E = 3\hbar/Ma^2$ es $0.0991 = 9.91\,\%$.

4.c. Si se hace una medición de la componente z del momentum angular orbital, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea $L_z = 2\hbar$?

De la misma forma que resolvimos el inciso anterior podemos resolver este, sólo que ahora se tomará el valor de $m = 2$ de la tabla de coeficientes, que es el equivalente a $L_z = 2\hbar$, por lo tanto

Si se hace una medición de la componente z del momentum angular orbital, la probabilidad de que el resultado sea $L_z = 2\hbar =$ es $0.1202 = 12.02\,\%$.

l	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0.24051	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	-0.2369	0.1978	2.8082e-06	0	0	0	0
2	0	0	0	4.2057e-07	-0.2435	-0.0672	2.8865e-06	-0.1877	0	0	0
3	0	0	0.1264	4.9575e-07	-0.0390	-0.2293	4.6248e-07	-0.2213	2.4740e-06	0	0
4	0	7.0223e-07	0.1640	2.0153e-07	0.1543	-0.1420	-1.8294e-06	-0.08998	3.2088e-06	0.0735	0
5	-0.0371	9.7815e-07	0.0931	-1.6480e-07	0.1590	0.0526	-1.8843e-06	0.0735	1.8229e-06	0.1024	1.9883e-06

4.d. Realiza una simulación de la evolución del estado inicial $H(\theta, \phi; t = 0)$ en función del tiempo $H(\theta, \phi; t)$ graficando sobre la esfera de radio unitario.

Para realizar la evolución temporal del estado inicial representado por la ecuación 14 es necesario agregar la parte dependiente del tiempo

$$exp(iEt) \tag{16}$$

donde E es la energía del armónico en ese instante con su respectivo índice l.

La animación se presenta en formato mp4 como archivo adjunto.

5. Discusión

5.a. ¿Cuáles conceptos aprendimos con este proyecto? y ¿Cuáles habilidades desarrollamos con el desarrollo del proyecto?

5.a.1. Carlos

En este proyecto, pude comprender e integrar los conocimientos que tenia acerca de los armónicos esféricos, así como la aproximación de funciones con serias truncadas para construir una función original. Fue muy valioso la experimentación y las pruebas que pudimos ir realizando con los armónicos así como la practica con software como Matlab para hacer operaciones sobre funciones y programar rutinas de aproximación de polinomios. Creo que en el proyecto pude desarrollar mi pensamiento espacial y mi familiaridad con las coordenadas en otros sistemas, pudiendo utilizar estos sistemas cuando el problema lo ameritaba. Algo que en lo personal me gusto fue poder visualizar las funciones de los armónicos esféricos y ver como las esferas superficiales se relacionaban con las figuras reales que obtuvimos. También fue interesante aplicar los conocimientos para hacer modelaciones de cosas cotidianas pero matemáticamente complejas como la pelota de tenis

5.a.2. Ricardo

Los principales conceptos aprendidos y reforzados son los famosos armónicos esféricos, su representación original y en la superficie de una esfera unitaria, la elipse de Hammer y los conceptos de la partícula libre sobre una superficie esférica como sus eigenestados y eigenenergías. Las habilidades más desarrolladas durante este proyecto fueron el uso de estructuras matriciales en funciones numéricas de MATLAB, así como el desarrollo de una base ortonormal para construir funciones esféricas a través de los coeficientes de los armónicos esféricos. Además logramos practicar la visualización de estas estructuras, tanto reales, como sobre la superficie esférica como en una elipse de Hammer. Las transformaciones de coordenadas esféricas a cartesianas de forma directa y en las elipses de Hammer, la medición de probabilidades y los métodos de obtención de constantes de normalización.

5.a.3. Javier

Con la elaboración de este proyecto, siendo sincero pude comprender cómo funciona un armónico esférico, ya que dentro de clases se observaba meramente el comportamiento analítico, sin embargo, es muy complicado imaginarte las propiedades físicas que lo conforman, y ahora puedo decir que tengo la capacidad de interpretar una gráfica. También comprendí el cómo se relacionan los índices dentro de los cálculos de los coeficientes de un armónico, y además que si sumamos la lista de índices podemos obtener la probabilidad de obtener un estado o una energía.En realidad me fue muy satisfactorio realizar este proyecto, pues apliqué los temas aprendidos en clase. En cuanto las habilidades desarrolladas están la programación en MatLab enfatizada elaboración de gráficas tridimensionales, uso de polinomios de legendre, trabajar con coordenadas cartesianas y cambiarme a esféricas, cálculo de probabilidades y de constantes de normalización en armónicos esféricos.

6. Apéndices

```
%Calculo de los armonicos esfericos
clear; clc;

l = 2;
m = 1;

dx = pi/120;
col = 0:dx:pi;
az = 0:dx:2*pi;
[phi,theta] = meshgrid(az,col);

[Ylm] = FcnArmonicoEsferico(m,l,theta,phi);
grafos(phi,theta,Ylm,"$Y_{"+m+"}^{"+l+"}$ Arm\'onico Esf\'erico")

A = 2 / sqrt(5*pi * (-720 + 84*pi^2 - pi^4));
g = A .* theta .* (cos(phi - 2.*theta)).^3 .* (pi-theta).^2;

grafos(phi,theta,g,"funcion g")


%  Problema 1

% constantes y variables iniciales
dx = pi/120;
col = 0:dx:pi;
az = 0:dx:2*pi;
[phi,theta] = meshgrid(az,col);
lmax = 10;

A = 2 / sqrt(5*pi * (-720 + 84*pi^2 - pi^4));
g = A .* theta .* (cos(phi - 2.*theta)).^3 .* (pi-theta).^2;

sum1 = 0;
gfinal = 0;
coefClm = zeros(lmax,lmax*2+1);

% ciclo para obtener la sumatoria de la funcion g(theta,phi)
for l = 0:1:lmax % truncamos el infinito hasta l = lmax
    c = lmax - l + 1;
    for m = -l:1:l
        [Ylm] = FcnArmonicoEsferico(m,l,theta,phi);

        A = 2 / sqrt(5*pi * (-720 + 84*pi^2 - pi^4));
        g = A .* theta .* (cos(phi - 2.*theta)).^3 .* (pi-theta).^2;
        Clm_sin_integrar = g .* conj(Ylm) .* sin(theta);
        int_columnas = trapz(Clm_sin_integrar,2);
        Clm = trapz(int_columnas);

        coefClm(l+1,c) = abs(Clm);
        sum1 = (Clm .* Ylm) + sum1;
        c = c+1;
    end

gfinal = sum1 + gfinal;
sum1 = 0;
end

grafos(phi,theta,gfinal,":)")
```

```
% histograma
histograma3d(coefClm)


%% Problema 2
close all
thetavc = linspace(0,pi,200);
phivc = linspace(-pi,pi,200);
[phi,theta] = meshgrid(phivc,thetavc);
A = 2 / sqrt(5*pi * (-720 + 84*pi^2 - pi^4));
g = A .* theta .* (cos(phi - 2.*theta)).^3 .* (pi-theta).^2;

    %% Inciso a
    titulo = "Funci\on $g(\theta,\phi)$";
    grafosHammer(phi,theta,g,titulo)

    %% Inciso b
    l = 6;
    m = 9;
    [Ylm] = FcnArmonicoEsferico(l,m,theta,phi);
    Y69 = Ylm;
    titulo = "$Y_{"+ string(m) +"}^{"+l+"}$ Arm\'onico esf\'erico";
    grafos(phi,theta,Y69,titulo);
    grafosHammer(phi,theta,Y69,titulo);

    %% Inciso c
    m = 6;
    s = 9;
    [Gms] = FcnSpin(m,s,theta,phi);
    titulo = "$G_{"+ s +"}^{"+m+"} (\theta,\phi)$";
    grafos(phi,theta,Gms,titulo);

    %% Inciso d
    m = -3/2;
    s = 5/2;
    [Gms] = FcnSpin(m,s,theta,phi);
     Gms = abs(Gms).^2;
    titulo = "$|G_{"+ s +"}^{"+m+"} (\theta,\phi)|^2$";
    grafosHammer(phi,theta,Gms,titulo);


%% Problema 3


dx = pi/120;
col = 0:dx/2:pi;
az = -pi:dx:pi;
[phi,theta] = meshgrid(az,col);

t = 0:0.1:2*pi;
x = cos(t).^3;
y = sin(t).^3;
z = (sqrt(3)/2) .* sin(2.*t);


[phi_con,theta_con,radio] = cart2sph(x,y,z);
phi_esf = rescale(phi_con,-pi,pi);
theta_esf = rescale(theta_con,pi/2 - max(theta_con),pi-(pi/2 -max(theta_con)));
theta_tenis = interp1(phi_esf,theta_esf,az);

```

```
% funcion "g" de la costura
g = [];
for i = 1:length(az)
    g(:,i) = ones(size(az))' - 2 * (col' < (ones(size(az))' .* theta_tenis(i)));

end

%grafica de la esfera con la funcion T
figure()
[Xm,Ym,Zm] = sph2cart(phi, pi/2-theta, ones(size(phi)));
S = surf(Xm,Ym,Zm,'FaceColor','#dfff4f');
hold on
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')

plot3(x,y,-z,'white','linewidth',9)
title("Funcion  T")
S.EdgeColor = 'none';
axis equal
hold off

%% Problema 4

% constantes y variables iniciales
dx = pi/120;
col = 0:dx:pi;
az = 0:dx:2*pi;

[phi,theta] = meshgrid(az,col);
lmax = 10;

C = 2.32569;
g = C .* exp(-((theta-pi/3)/(pi/12)).^2).*(exp(-((phi-pi/2)/(pi/6)).^2));

sum1 = 0;
gfinal = 0;
coefClm = zeros(lmax,lmax*2+1);

% ciclo para obtener la sumatoria de la funci n g(theta,phi)
for l = 0:1:lmax % truncamos el infinito hasta l = lmax
    c = lmax - l + 1;
    for m = -l:1:l
        [Ylm] = FcnArmonicoEsferico(m,l,theta,phi);

        C = 2.32569;
        g = C .* exp(-((theta-pi/3)/(pi/12)).^2).*(exp(-((phi-pi/2)/(pi/6)).^2));
        Clm_sin_integrar = g .* conj(Ylm) .* sin(theta);

        Clm = trapz(col,trapz(az,Clm_sin_integrar,2));

        coefClm(l+1,c) = (Clm);
        E(l+1,c)=l*(l+1)/2;
        sum1 = (Clm .* Ylm) + sum1;
        c = c+1;
    end
gfinal = sum1 + gfinal;
sum1 = 0;
end
```

```
coefl2=coefClm(3,:);
l2=sum(coefl2.^2)
coefm2=coefClm(:,13);
m2=sum(coefm2.^2)
%% Simulaci n
t=0:0.2:32;
cont=1;
figure(1)
hold on
for av=1:1:length(t)
    tt=t(1,cont);
    for l = 0:1:lmax % truncamos el infinito hasta l = lmax
        c = lmax - l + 1;
        for m = -l:1:l
            [Ylm] = FcnArmonicoEsferico(m,l,theta,phi);
            E=l*(l+1)/2;
            C = 2.32569;
            g = C .* exp(-((theta-pi/3)/(pi/12)).^2).*(exp(-((phi-pi/2)/(pi/6)).^2)).*exp(-1*i*E*
            Clm_sin_integrar = g .* conj(Ylm) .* sin(theta);

            Clm = trapz(col,trapz(az,Clm_sin_integrar,2));

            coefClm(l+1,c) = (Clm);

            sum1 = (Clm .* Ylm) + sum1;
            c = c+1;
        end
    gfinal = sum1 + gfinal;
    sum1 = 0;
    end
    grafos(phi,theta,abs(gfinal),":)")
    drawnow
    cont=cont+1
end

%%
function [Ylm] = FcnArmonicoEsferico(m,l,theta,phi)
%Genera Armonico esferico en superficie de esfera unitaria
Pml = legendre(l,cos(theta));
    if l ~= 0
        Pml = reshape(Pml(abs(m)+1,:,:),size(phi));
    end
    raiz =  sqrt( (2*l+1)*factorial(l-abs(m)) / (4*pi*factorial(l+abs(m))));
    if m >= 0
        Ylm = raiz .* Pml .*cos(abs(m)*phi);
    elseif m < 0
        Ylm = raiz .* Pml .*sin(abs(m)*phi);
    end
end

function [Gms] = FcnSpin(m,s,theta,phi)
%Genera la funcion que permite mapear la funcion del spin
    raiz = sqrt( (2*s+1)*factorial(2*s) / (4*pi * factorial(s+m)*factorial(s-m)));
    CS = cos(theta/2).^(s+m) .* sin(theta/2).^(s-m);
    if m >= 0
        Gms = raiz .* CS .*cos(abs(m)*theta);
    elseif m < 0
        Gms = raiz .* CS .*sin(abs(m)*theta);
    end
 end
```

```
function [] = grafos(phi,theta,z,titulo)
% grafica una esfera con colores acordes a la matriz z
    figure
    [Xm,Ym,Zm] = sph2cart(phi, pi/2-theta, ones(size(phi)));
    S = surf(Xm,Ym,Zm, (z));
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    zlabel('z')
    title(""+titulo,'interpreter','latex')
    S.EdgeColor = 'none';
    colorbar
    colormap(jet)
    axis equal
end

function [] = histograma3d(coefClm)
    figure
    b = bar3(abs(real(coefClm)));
    for i = 1:length(b)
        zdata = b(i).ZData;
        b(i).CData = zdata;
        b(i).FaceColor = "interp";

    end
    m = (size(coefClm,2)-1) / 2;
    xlabel("m")
    ylabel("l")
    title("Histograma $|C^m_l|$",'interpreter','latex')
    xticks(1:size(coefClm,2)*2 + 1)
    xticklabels(-m:m)
    yticks(1:size(coefClm,1))
    yticklabels(0:size(coefClm,1)-1)
end

function [] = grafosHammer(phi,theta,z,titulo)
    % grafica la matriz z en una elipse de Hammer
    xH = (sqrt(8).*sin(theta).*sin(phi/2))./(sqrt(1+sin(theta).*cos(phi/2)));
    yH = (sqrt(2).*cos(theta))./(sqrt(1+sin(theta).*cos(phi/2)));
    zH = zeros(size(xH));

    figure;
    S = surf(xH,yH,zH,z);
    S.EdgeColor = 'none';
    colormap(jet(1000))
    colorbar
    hold on

    syms x y
    f = x.^2 / 8 + y.^2 / 2 - 1;
    contorno = fimplicit(f,'k','LineWidth',4);
    xlabel("x")
    ylabel("y")

    title(""+titulo+" en una elipse de Hammer",'interpreter','latex')
    legend(contorno,"$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$",'interpreter','latex','Location','south
    view(2)

end
```

Referencias

[López-López, 1996] López-López, F. J. (1996). Question 48. is there a physical property that determines the curve which defines the seam of a baseball? *American Journal of Physics*, 64(9):1097–1097.