北京航空航天大学数学二学位

《 数理统计 》

2019－2020 学年春季考试答题卡

学　　号：17373103　姓　　名：李析航

授课教师：冯伟　成　　绩：

请在纸上抄写以下内容并签名，拍照后将图片粘贴在下面空白处：

我承诺严格遵守本次考试的约定，在规定时间内独立、完成本次考试！诚信考试！

承诺人：

我承诺严格遵守本次考试的约定 在规定时间内
独立完成本次考试 诚信考试

承诺人：李析航

题号	一	二	三	四	五	六	总分	
答案								

一 、单选题（请将答案填写在相应位置空白处）

题号	1	2	3	4	5
答案	A	C	D	C	B

二、填空题（请将 5 道填空题目的最终答案清晰写在纸上并拍照，按照下图所示将答案图片粘贴到文档中）

二.填空

1. $\frac{729}{4}$

2. 3

3. $pq(r-1)$ 或 $n-pq$ ，其中 $n=pqr$

4. $\hat{\theta}=2\overline{X}$

5. $\frac{n-m}{m}$

三、（10 分，任选一个） 1．证明：$(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n))^2 = F_{1-\alpha}(1,n)$

2．设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，令 $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，

$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$，试证明：$T = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{x_{n+1}-\bar{x}_n}{S_n} \sim t(n-1)$

选择 2

5. $\frac{n-m}{m}$

三. 2. 证明：$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 则 $\bar{x}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,

$x_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$

$x_{n+1} - \bar{x}_n \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2)$

$(n-1)S_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ 则

$$\frac{\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}(x_{n+1}-\bar{x}_n)}{S_n/\sigma} \sim t(n-1) \text{ 即，}$$

$$T = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{x_{n+1}-\bar{x}_n}{S_n} \sim t(n-1).$$

四、**（15 分）**设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单样本，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是来自正态总体 $N(2\mu,1)$ 的简单样本，两样本独立，其中 μ 是未知参数。将两样本合并成样本容量为 $m+n$ 样本 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，$y_1, y_2, \cdots, y_n$。（1）证明 $T_1 = \frac{1}{2}(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2})$ 是 μ 的无偏估计；（2）求 μ 的一致最小方差无偏估计 T_2；（3）问 T_2 是否为 μ 的有效估计？证明你的结论。

四 (1) 由于 $E_\mu(\bar{x}) = \mu$，$E_\mu(\bar{y}) = 2\mu$，所以

$E_\mu(T_1) = \frac{1}{2}[E_\mu(\bar{x}) + \frac{1}{2}E_\mu(\bar{y})] = \mu$

因而统计量 $T_1 = \frac{1}{2}(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2})$ 是 μ 的无偏估计

(2) $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n$ 的联合密度函数为 $p(x_1, \cdots x_m, y_1, \cdots y_n; \mu)$

$= (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i-2\mu)^2]\}$

$= (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(m+4n)\mu^2\} \exp\{-\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{m}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i^2)\} \exp\{\mu(m\bar{x}+2n\bar{y})\}$

令 $C(\mu) = (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(m+4n)\mu^2\}$

$h(x, y) = \exp\{-\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{m}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i^2)\}$

$w(\mu) = \mu$　$T = m\bar{x} + 2n\bar{y}$

则有分解式 $p(x_1, \cdots x_m, y_1, \cdots y_n; \mu) = C(\mu)h(x,y)\exp\{w(\mu)T\}$

由于 $w(\mu) = \mu$ 的值域 $(-\infty, +\infty)$ 有内点，由定理 2.2.4 知 T 是完全充分统计量。又因为 $E_\mu(T) = mE_\mu(\bar{x}) + 2nE_\mu(\bar{y}) = (m+4n)\mu$

即 $E_\mu[\frac{1}{m+4n}(m\bar{x}+2n\bar{y})] = \mu$

所以 $T_2 = \frac{1}{m+4n}(m\bar{x}+2n\bar{y})$ 既是完全充分统计量 $T = m\bar{x}+2n\bar{y}$ 的函数又是 μ 的无偏估计

由定理 2.2.5 知 $T_2 = \frac{1}{m+4n}(m\bar{x}+2n\bar{y})$ 是 μ 的一致最小方差无偏估计

(3) 因为 $\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln p(x_1,\cdots x_m, y_1,\cdots y_n,\mu) = -(m+4n)$ 所以

样本 $x_1,\cdots x_m, y_1,\cdots y_n$ 所包含的Fisher信息量为 $I(\mu)=m+4n$

当然也可以分别计算两个样本所包含的Fisher信息量求。

$$I_X(\mu) = E_\mu\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}\right]\right\}^2 = E_\mu(x-\mu)^2=1$$

$$I_Y(\mu) = E_\mu\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2\mu)^2}{2}}\right]\right\}^2 = 4E_\mu(y-2\mu)^2=4$$

则 $I(\mu)=mI_X(\mu)+nI_Y(\mu)=m+4n$

由 $Var_\mu(\bar{x})=\frac{1}{m}$ $Var_\mu(\bar{y})=\frac{1}{n}$ 以及 $\bar{x}$ 与 $\bar{y}$ 相互独立

~~有 Var_μ(x̄) = 1/m, Var_μ(ȳ)~~

有 $Var_\mu(T_2)=\frac{1}{(m+4n)^2}[m^2Var_\mu(\bar{x})+4n^2Var_\mu(\bar{y})]=\frac{1}{m+4n}$

所以对所有的 $\mu\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$Var_\mu(T_2)=\frac{1}{m+4n}=\frac{(\mu')^2}{I(\mu)}$$

即信息不等式中的等号成立 故 $T_2=\frac{1}{m+4n}(m\bar{x}+2n\bar{y})$ 是 μ 的有效估计

五、（10 分，任选一个）

1. 设 $x_1,x_2,L\ ,x_n$ 是来自正态总体 N（μ，1）的简单样本，求检验问题 H_0：μ=0，H_1：μ=1 的水平为 α（0<α<1）的 MPT

2. 设有某种产品，其长度服从正态分布，现从该种产品中随机抽取 25 件，得样本均值 $\bar{x}=9.28$（cm），样本标准差 s＝0. 36（cm），问：这批产品的长度能否认为是 9cm?（已知 $z_{0.95}=1.645$； $z_{0.975}=1.96$； $t_{0.975}(24)=2.064$， $t_{0.975}(25)=2.060$； $t_{0.95}(24)=1.711$； $t_{0.95}(25)=1.708$ ）

选择 2

即信直不等式中的等号成立 故 $T_2 = \frac{1}{m+4n}(m\bar{X}+2n\bar{Y})$ 是μ的有效

五 2. 解：由于 $\bar{x}=9.28$. $s=0.36$

当 $\alpha=0.05$ 时 $t_{0.975}(24)=2.064$

得 $\bar{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=9.28-2.064\times\frac{0.36}{5}\approx 9.131$.

$\bar{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=9.28+2.064\times\frac{0.36}{5}\approx 9.429$

故长度95%的置信区间为(9.13, 9.43)

所以这批产品的长度不能认为是9 cm

六、（10 分）考虑某四因子二水平试验，除考察因子 A,B,C,D 外，还需考察交互作用 $A\times B$ 及 $A\times C$。今选用表 $L_8(2^7)$，表头设计及试验数据如表所示，所考虑的指标是越大越好。试用极差分析方法指出因子的主次顺序和较优工艺条件。

试验号 \ 列号	A 1	B 2	$A\times B$ 3	C 4	$A\times C$ 5	D 6	7	实验数据
1	1	1	1	1	1	1	1	350
2	1	1	1	2	2	2	2	325
3	1	2	2	1	1	2	2	425
4	1	2	2	2	2	1	1	425
5	2	1	2	1	2	1	2	200
6	2	1	2	2	1	2	1	250
7	2	2	1	1	2	2	1	275
8	2	2	1	2	1	1	2	375

六解.

	A 1	B 2	A×B 3	C 4	A×C 5	D 6	7
T_{1j}	1525	1125	1325	1250	1400	1350	1300
T_{2j}	1100	1500	1300	1375	1225	1275	1325
R_j	425	375	25	125	175	75	25

因主→次　A, B; A×C, C, D; A×B

最优方案　$A_1B_2C_1D_1$

七（10 分）随机向量(x_1,x_2,x_3,x_4)的协方差矩阵

$$\begin{pmatrix} 79.7382 & 22.3846 & 1.5266 & 0.1108 \\ 22.3846 & 13.8194 & -0.5844 & 0.0250 \\ 1.5266 & -0.5844 & 0.6434 & 0.0343 \\ 0.1108 & 0.0250 & 0.0343 & 0.2616 \end{pmatrix}$$

且其特征根为$\lambda_1=86.640$，$\lambda_2=7.094$，$\lambda_3=0.472$，$\lambda_4=0.257$。

（1）根据主成分85%的选取标准，应选取几个主成分？

（2）试求（1）中所选的主成分。

七解 (1) $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=94.463$

若只选1个主成分只需 $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}=\dfrac{86.640}{94.463}=0.917>85\%$

因此只选1个主成分即可

(2) 对于特征值λ_1的单位特征向量$(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)^T$

有
$$\begin{pmatrix} 6.9018 & -22.3846 & -1.5266 & -0.1108 \\ -22.3846 & 72.8206 & 0.5844 & -0.0250 \\ 1.5266 & 0.5844 & 85.9966 & -0.0343 \\ -0.1108 & -0.0250 & -0.0343 & 86.3784 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\\ \mu_4\end{pmatrix}=0$$

解方程并单位化有特征向量 $(0.9558, 0.2937, 0.015, 0.0013)^T$.

即主成分为 $Y=0.9558x_1+0.2937x_2+0.015x_3+0.0013x_4$.