Modelado Mediante la Formulación de Lagrange-Euler

El algoritmo es de orden de complejidad computacional O(n4).

Sin embargo, conduce a unas ecuaciones finales bien estructuradas donde aparecen de manera clara los diversos pares y fuerzas que intervienen en el movimiento.

Se presenta a continuación al algoritmo a seguir para obtener el modelo dinámico del robot por el procedimiento de Lagrange-Euler (L-E).

L-E 1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de D-H.

L-E 2. Obtener las matrices de transformación $^0\mathbf{A}_i$ para cada elemento i.

L-E 3. Obtener las matrices $\mathbf{U}_{ij}$ definidas por:

$$\mathbf{U}_{ij} = \frac{\partial^0 \mathbf{A}_i}{\partial q_j} \qquad \text{(ver nota 1)} \qquad [5.\ 9]$$

L-E 4. Obtener las matrices $\mathbf{U}_{ijk}$ definidas por :

$$\mathbf{U}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} \qquad \text{(ver nota 2)} \qquad [5.\ 10]$$

L-E 5. Obtener las matrices de pseudoinercias $\mathbf{J}_i$ para cada elemento, que vienen definidas por:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 \mathrm{dm} & \int x_i y_i \mathrm{dm} & \int x_i z_i \mathrm{dm} & \int x_i \mathrm{dm} \\ \int y_i x_i \mathrm{dm} & \int y_i^2 \mathrm{dm} & \int y_i z_i \mathrm{dm} & \int y_i \mathrm{dm} \\ \int z_i x_i \mathrm{dm} & \int z_i y_i \mathrm{dm} & \int z_i^2 \mathrm{dm} & \int z_i \mathrm{dm} \\ \int x_i \mathrm{dm} & \int y_i \mathrm{dm} & \int z_i \mathrm{dm} & \int \mathrm{dm} \end{bmatrix} \quad [5.\ 11]$$

donde las integrales están extendidas al elemento i considerado, y $(x_i\ y_i\ z_i)$ son las coordenadas del diferencial de masa dm respecto al sistema de coordenadas del elemento.

L-E 6. Obtener la matriz de inercias $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ cuyos elementos vienen definidos por:

$$d_{ij} = \sum_{k=(\max i,j)}^{n} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{kj}\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{ki}^T\right) \quad [5.\ 12]$$

con $\quad$ i,j = 1,2,...,n

n: número de grados de libertad

L-E 7. Obtener los términos h_{ikm} definidos por:

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^{n} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{jkm}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{ji}^T\right) \quad [5.\ 13]$$

L-E 8. Obtener la matriz columna de fuerzas de Coriolis y centrípeta $\mathbf{H} = [h_i]^T$ cuyos elementos vienen definidos por:

$$h_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m \quad [5.\ 14]$$

L-E 9. Obtener la matriz columna de fuerzas de gravedad $\mathbf{C} = [c_i]^T$ cuyos elementos están definidos por:

$$c_i = \sum_{j=1}^{n}\left(-m_j\mathbf{g}\mathbf{U}_{ji}\,{}^j\mathbf{r}_j\right) \quad [5.\ 15]$$

con $\quad$ i = 1,2,...,n

g: es el vector de gravedad expresado en el sistema de la base $\{S_0\}$y viene expresado por $(g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}, 0)$

${}^i\mathbf{r}_j$: es el vector de coordenadas homogéneas del centro de masas del elemento j expresado en el sistema de referencia del elemento i.

L-E 10. La ecuación dinámica del sistema será:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} + \mathbf{C} \quad [5.\ 16]$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de fuerzas y pares motores efectivos aplicados sobre cada coordenada q_i.

NOTAS

1. La derivada de la matriz de D-H ${}^0\mathbf{A}_i$ respecto de la coordenada q_j puede obtenerse fácilmente de manera computacional, mediante la expresión:

$$\frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{j-1}\,\mathbf{Q}_j\,{}^{j-1}\mathbf{A}_i & \text{si } j \le i \\ [0] & \text{si } j > i \end{cases}$$

con:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si la articulación i es de rotación}$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si la articulación i es de traslación}$$

2. Análogamente:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j}\right) = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{j-1}\mathbf{Q}_j\,{}^{j-1}\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_k\,{}^{k-1}\mathbf{A}_i & \text{si } i \ge k \ge j \\ {}^0\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_k\,{}^{k-1}\mathbf{A}_{j-1}\mathbf{Q}_j\,{}^{j-1}\mathbf{A}_i & \text{si } i \ge j \ge k \\ [0] & \text{si } k > i \text{ o } j > i \end{cases}$$

3. Las matrices $\mathbf{J}_i$ y $\mathbf{D}$ son simétricas y semidefinidas positivas.

4. El término h_{ikm} representa el efecto, en cuanto a fuerza o par, generado sobre el eslabón i como consecuencia del movimiento relativo entre los eslabones k y m. Se cumple que $h_{ikm}=h_{imk}$ y que $h_{iii}=0$.

5. En la obtención de las matrices de pseudoinercia $\mathbf{J}_i$, las integrales están extendidas al elemento i, de modo que ésta se evalúa para cada punto del elemento de masa dm y coordenadas $(x_i\ y_i\ z_i)$ referidas al sistema de coordenadas del elemento.

Modelado Mediante la Formulación de LagrangeEuler – Ejemplo

Tabla 5.1. Parámetros D-H del robot polar del Ejemplo 5.1.

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	-90
2	0	d_2	0	0

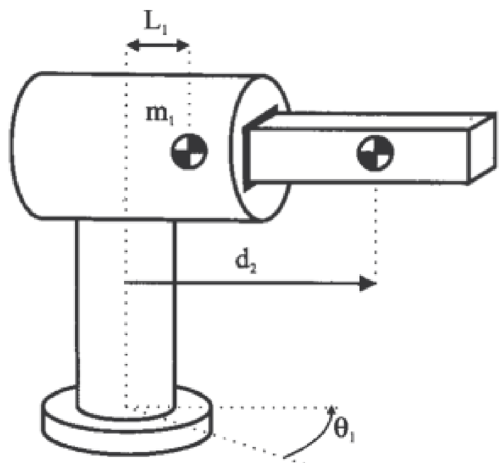

Figura 5.2. Robot polar de dos grados de libertad del Ejemplo 5.1.

Ejemplo 5.1.

Se va a aplicar el método de Lagrange-Euler para la obtención del modelo dinámico del robot de 2 grados de libertad (θ_1, d_2) con base fija de la Figura 5.2.

L-E 1. Se asignan los sistemas de referencia y parámetros de Denavit-Hartenberg según la Figura 5.3 y la Tabla 5.1.

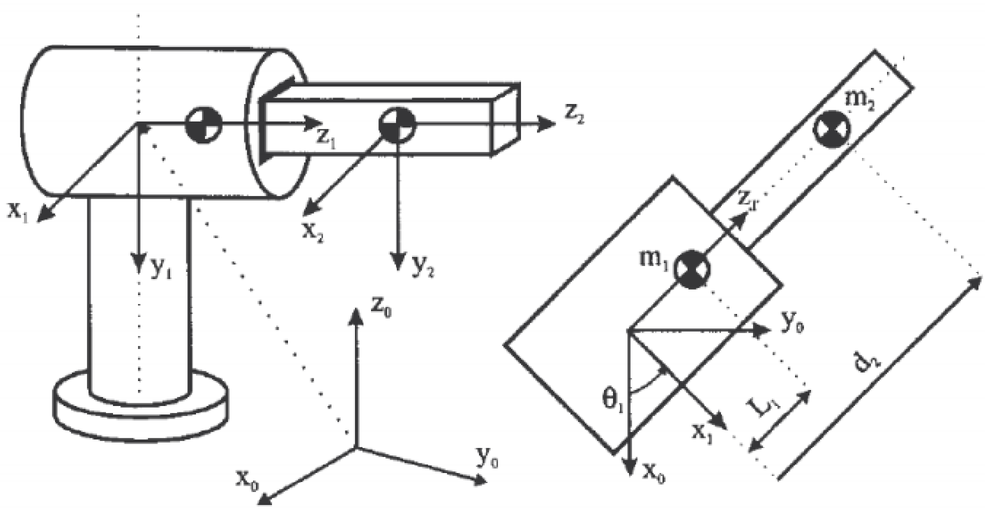

Figura 5.3. Sistemas de referencia del robot polar del Ejemplo 5.1.

L-E 2. Matrices de transformación ${}^0\mathbf{A}_i$

$$
{}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0\mathbf{A}_2 = {}^0\mathbf{A}_1\,{}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & -d_2S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & d_2C_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

L-E 3. Matrices $\mathbf{U}_{ij}$

$$
\mathbf{U}_{11} = \frac{\partial\,{}^0\mathbf{A}_1}{\partial\theta_1} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}_{12} = \frac{\partial\,{}^0\mathbf{A}_1}{\partial d_2} = [0]
$$

$$
\mathbf{U}_{21} = \frac{\partial\,{}^0\mathbf{A}_2}{\partial\theta_1} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & -d_2C_1 \\ C_1 & 0 & -S_1 & -d_2S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}_{22} = \frac{\partial\,{}^0\mathbf{A}_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

L-E 4. Matrices $\mathbf{U}_{ijk}$

$$\mathbf{U}_{111} = \frac{\partial \mathbf{U}_{11}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ -S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}_{112} = \frac{\partial \mathbf{U}_{11}}{\partial d_2} = [0]$$

$$\mathbf{U}_{121} = \frac{\partial \mathbf{U}_{12}}{\partial \theta_1} = [0] \qquad \mathbf{U}_{122} = \frac{\partial \mathbf{U}_{12}}{\partial d_2} = [0]$$

$$\mathbf{U}_{211} = \frac{\partial \mathbf{U}_{21}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & S_1 & d_2S_1 \\ -S_1 & 0 & -C_1 & -d_2C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}_{212} = \frac{\partial \mathbf{U}_{21}}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{221} = \frac{\partial \mathbf{U}_{22}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}_{222} = \frac{\partial \mathbf{U}_{22}}{\partial d_2} = [0]$$

L-E 5. Matrices de pseudoinercia $\mathbf{J}_i$

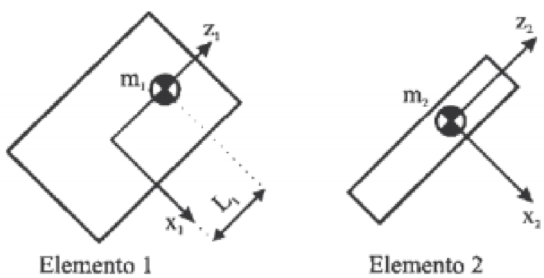

Figura 5.4. Elementos del robot polar del Ejemplo 5.1.

Elemento 1

$$\int_1 x_1^{\,2}dm = 0 \qquad \int_1 y_1 x_1 dm = \int_1 x_1 y_1 dm = 0 \qquad \int_1 z_1 x_1 dm = \int_1 x_1 z_1 dm = 0$$

$$\int_1 y_1^{\,2}dm = 0 \qquad \int_1 y_1 z_1 dm = \int_1 z_1 y_1 dm = 0$$

$$\int_1 z_1^{\,2}dm = m_1 L_1^{\,2}$$

$$\int_1 x_1 dm = 0 \qquad \int_1 y_1 dm = 0 \qquad \int_1 z_1 dm = L_1 m_1 \qquad \int_1 dm = m_1$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

Puesto que se considera la masa concentrada en el centro de masas y el origen del sistema de coordenadas del elemento 2 se toma en el mismo centro de masas, la matriz $\mathbf{J}_2$ toma la forma:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

L-E 6. Matriz de inercias $\mathbf{D} = [d_{ij}]$

$$d_{11} = \sum_{k=max(1,1)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{k1}\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{k1}^T\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{11}\mathbf{J}_1\mathbf{U}_{11}^T\right) + \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{21}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^T\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} C_1^2L_1^2m_1 & S_1C_1L_1^2m_1 & 0 & 0 \\ C_1S_1L_1^2m_1 & S_1^2L_1^2m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} C_1^2d_2^2m_2 & S_1C_1d_2^2m_2 & 0 & 0 \\ S_1C_1d_2^2m_2 & S_1^2d_2^2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(C_1^2 + S_1^2\right)m_1L_1^2 + \left(C_1^2 + S_1^2\right)d_2^2m_2 = m_1L_1^2 + m_2d_2^2$$

$$d_{12} = \sum_{k=max(1,2)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{k2}\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{k1}^T\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{22}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^T\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} S_1C_1d_2m_2 & S_1^2d_2m_2 & 0 & 0 \\ -C_1^2d_2m_2 & -S_1C_1d_2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1C_1d_2m_2 - S_1C_1d_2m_2 = 0$$

$$d_{21} = \sum_{k=max(2,1)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{k1}\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{k2}^T\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{21}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{22}^T\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} S_1C_1d_2m_2 & -C_1^2d_2m_2 & 0 & 0 \\ S_1^2d_2m_2 & -S_1C_1d_2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1C_1d_2m_2 - S_1C_1d_2m_2 = 0$$

$$d_{22} = \sum_{k=max(2,2)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{k2}\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{k2}^T\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{22}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{22}^T\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} S_1^2m_2 & -S_1C_1m_2 & 0 & 0 \\ -S_1C_1m_2 & C_1^2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1^2m_2 + C_1^2m_2 = m_2$$

luego:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1L_1^2 + m_2d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

L-E 7. Términos en h_{ikm}

$$h_{111} = \sum_{j=\max(1,1,1)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{j11}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{j1}^{T}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{111}\mathbf{J}_1\mathbf{U}_{11}^{T}\right) + \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{211}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^{T}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} -C_1S_1m_1L_1^2 & -S_1^2m_1L_1^2 & 0 & 0 \\ C_1^2m_1L_1^2 & C_1S_1m_1L_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} -S_1Cd_2^2{}_1m_2 & -S_1^2d_2^2m_2 & 0 & 0 \\ C_1^2d_2^2m_2 & S_1C_1d_2^2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -C_1S_1m_1L_1^2 + C_1S_1m_1L_1^2 - d_2^2S_1C_1m_2 + d_2^2S_1C_1m_2 = 0$$

$$h_{112} = \sum_{j=\max(1,1,2)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{j12}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{j1}^{T}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{212}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^{T}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} C_1^2d_2m_2 & S_1C_1d_2m_2 & 0 & 0 \\ S_1C_1d_2m_2 & S_1^2d_2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C_1^2d_2m_2 + S_1^2d_2m_2 = d_2m_2$$

$$h_{121} = \sum_{j=\max(1,2,1)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{j21}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{j1}^{T}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{221}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^{T}\right)$$

como $\mathbf{U}_{221} = \mathbf{U}_{212} \quad \Rightarrow \quad h_{121} = h_{112} = d_2m_2$

$$h_{122} = \sum_{j=\max(1,2,2)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{j22}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{j1}^{T}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{222}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^{T}\right) = 0$$

$$h_{211} = \sum_{j=\max(2,1,1)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{j11}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{j2}^{T}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{211}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{22}^{T}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} -S_1^2d_2m_2 & S_1C_1d_2m_2 & 0 & 0 \\ S_1C_1d_2m_2 & -C_1^2d_2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1^2d_2m_2 - C_1^2d_2m_2 = -d_2m$$

$$h_{212} = \sum_{j=\max(2,1,2)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{j12}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{j2}^{T}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{212}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{22}^{T}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} S_1C_1m_2 & -C_1^2m_2 & 0 & 0 \\ S_1^2m_2 & -S_1C_1m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1C_1m_2 - C_1S_1m_2 = 0$$

$$h_{221} = \sum_{j=\max(2,2,1)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{j21}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{j2}^{T}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{221}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{22}^{T}\right)$$

como $\mathbf{U}_{221} = \mathbf{U}_{212} \quad \Rightarrow \quad h_{221} = h_{212} = 0$

$$h_{222} = \sum_{j=\max(2,2,2)}^{2} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{j22}\mathbf{J}_j\mathbf{U}_{j2}^{T}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{222}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{22}^{T}\right) = 0$$

L-E 8. Matriz columna de fuerzas de Coriolis y centrífugas $\mathbf{H} = [h_i]^T$

$$h_1 = \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} h_{1km}\dot{q}_k\dot{q}_m = h_{111}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + h_{112}\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + h_{121}\dot{d}_2\dot{\theta}_1 + h_{122}\dot{d}_2\dot{d}_2 =$$

$$= 0\cdot\dot{\theta}_1^2 + (d_2m_2 + d_2m_2)\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + 0\cdot\dot{d}_2^2 = 2d_2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2$$

$$h_2 = \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} h_{2km}\dot{q}_k\dot{q}_m = h_{211}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + h_{212}\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + h_{221}\dot{d}_2\dot{\theta}_1 + h_{222}\dot{d}_2\dot{d}_2 =$$

$$= -d_2m_2\dot{\theta}_1^2 + (0+0)\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + 0\cdot\dot{d}_2^2 = -d_2m_2\dot{\theta}_1^2$$

luego

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2d_2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ -d_2m_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

L-E 9. Matriz columna de fuerzas de gravedad $\mathbf{C} = [c_i]^T$

$$c_i = \sum_{j=1}^{N}\left(-m_j\mathbf{g}\mathbf{U}_{ji}\,{}^j\mathbf{r}_j\right)$$

con :

$\mathbf{g}$ vector de gravedad expresado en el sistema de la base del robot $\{S_0\}$.

$$\mathbf{g} = [0,0,-g,0]$$

${}^j\mathbf{r}_j$ vector de coordenadas homogéneas de posición del centro de masas del eslabón j expresado en el sistema $\{S_j\}$.(Figura 5.4.)

$${}^1\mathbf{r}_1 = [0,0,L_1,1]^T$$
$${}^2\mathbf{r}_2 = [0,0,0,1]^T$$

luego:

$$c_1 = \sum_{j=1}^{2}\left(-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{j1}\, {}^j\mathbf{r}_j\right) = -m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{11}\, {}^1\mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{21}\, {}^2\mathbf{r}_2 =$$

$$= -m_1\begin{bmatrix}0 & 0 & -g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-S_1 & 0 & -C_1 & 0\\ C_1 & 0 & -S_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\L_1\\1\end{bmatrix} - m_2\begin{bmatrix}0 & 0 & -g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-S_1 & 0 & -C_1 & -d_2C_1\\ C_1 & 0 & -S_1 & -d_2S_1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = 0$$

$$c_2 = \sum_{j=1}^{2}\left(-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{j2}\, {}^j\mathbf{r}_j\right) = -m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{12}\, {}^1\mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{22}\, {}^2\mathbf{r}_2 =$$

$$= -m_1\begin{bmatrix}0 & 0 & -g & 0\end{bmatrix}[0]\begin{bmatrix}0\\0\\L_1\\1\end{bmatrix} - m_2\begin{bmatrix}0 & 0 & -g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -S_1\\ 0 & 0 & 0 & C_1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{C} = [c_i]^T = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

L-E 10. La ecuación dinámica del robot será :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} + \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix}T_1\\F_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}m_1L_1^2 + m_2d_2^2 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{d}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2d_2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\\ -d_2m_2\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(m_1L_1^2 + m_2d_2^2\right)\ddot{\theta}_1 + 2d_2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ F_2 &= m_2\ddot{d}_2 - d_2m_2\dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \qquad [5.\ 17]$$

Donde T_1 es el par motor efectivo (incluyendo rozamiento y otras perturbaciones) que actúa sobre la articulación 1 y F_2 es la fuerza motora efectiva que actúa sobre la articulación 2.

Bibliografía:

Fu, K.S.; González, R.C. y Lee, C.S.G. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. McGraw-Hill. 1987.