Дисципліна – «Комп'ютерна графіка»
Спеціальність – «Прикладна математика». НН ФТІ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Тема роботи: «Геометричні перетворення координат на площині».

Мета роботи: опанувати методи елементарних еперетворень на площині з використанням лінійної алгебри й афінних перетворень, навчитись перетворювати

1. ВИЗНАЧЕННЯ Й КЛАСИФІКАЦІЯАФІННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Афінне перетворення – (лат. *affinis*, «пов'язаний з») відображення $f: R^n \to R^n$, яке можна записати у вигляді:

$$f(x) = M \cdot x + v,$$

де M – оборотна (невироджена) матриця та $v \in R^n$.

Інакше кажучи, відображення називається афінним, якщо його можна отримати наступним способом:

- обрати «новий» базис простору з «новим» початком координат v;
- координатам x кожної точки простору поставити у відповідність нові координати $f(x)$, які мають те саме положення в просторі відносно «нової» системи координат, яке координати x мали в «старій».

Розрізняють наступні типи афінних перетворень:

- *власне* – афінне перетворення під час якого система координат зберігає знак;
- *невласне* – афінне перетворення під час якого система координат змінює знак;
- *еквіафінне* – афінне перетворення, що зберігає площу;
- *центроафінне* — афінне перетворення, що зберігає початок координат.

Властивості афінних перетворень:

- під час афінного перетворення пряма переходить в пряму;
- якщо розмірність простору $n \geq 2$, то будь-яке перетворення простору (тобто бієкція простору на себе), яке переводить прямі в прямі, є афінним;
- окремим випадком афінних перетворень є ізометрії та перетворення подібності;
- афінні перетворення утворюють групу відносно композиції.

2. АФІННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НА ПЛОЩИНІ

Припустимо, що на площині задана прямолінійна система координат. Тоді кожній точці M ставиться у відповідність впорядкована пара чисел $(x; y)$ – її координат. Задаючи на площині ще одну систему координат, ми ставимо у відповідність тій же точці M іншу пару чисел – (x', y'). Перехід від однієї прямолінійної координатної системи на площині до іншої описується наступними співвідношеннями:

$$x' = \alpha x + \beta y + \lambda;\ y' = \gamma x + \delta y + \mu, \quad (1)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ – довільні числа, що пов'язані нерівністю:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Формули (1) можна розглядати двояко: або зберігається точка і змінюється координатна система – в такому випадку довільна точка M залишиться тою ж, змінюються лише її координати $(x;y) \to (x';y')$; або змінюється точка і зберігається координатна система – в цьому випадку формули задають відображення, що переводить довільну точку $M(x;y)$ в точку $M'(x';y')$, координати якої визначені в тій же системі координат. У подальшому будемо розглядати перший варіант інтерпретації наведених формул.

Формули (1) описують афінне перетворення на площині довільного типу. Будь-яке афінне перетворення може бути описане як *суперпозиція* чотирьох часткових випадків афінних перетворень. Тепер розглянемо ці чотири часткових випадки афінних перетворень на площині.

1.1. Переміщення

Переміщення – найпростіше афінне перетворення, що описує зсув нової системи координат відносно старої (рис. 1).

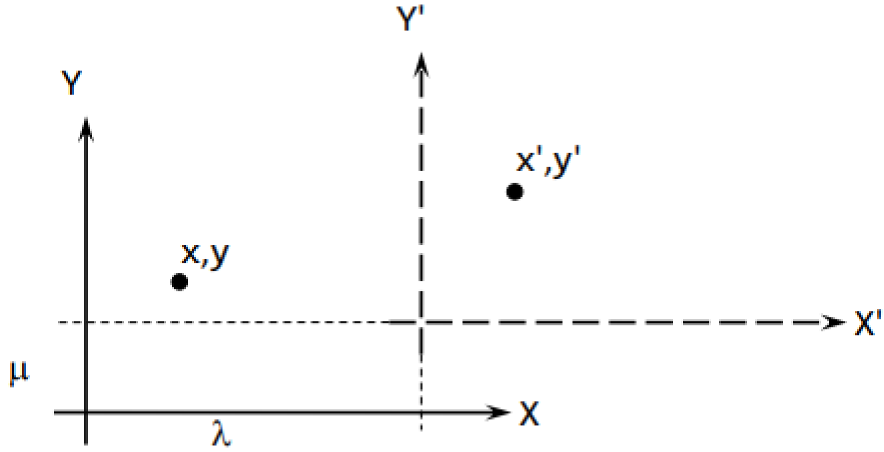


Рис. 1. Переміщення системи координат

Перетворення координат точки в старій системі координат в координати точки в новій системі координат відбувається за наступними формулами:

$$x' = x + \lambda;\ y' = y + \mu. \tag{2}$$

1.2. Масштабування

Масштабування – це афінне перетворення під час якого відбувається розтягнення або стиснення вздовж координатних осей. Описується наступними формулами:

$$x' = \alpha x;\ y' = \delta y, \tag{3}$$

де $\alpha > 0, \delta > 0$.

Розтягнення вздовж координатних осей відбувається за умови, що $\alpha > 1, \delta > 1$. а стиснення за умови – $\alpha < 1, \delta < 1$.

Формули (3) можна об'єднати і записати в матричній формі:

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

1.3. Поворот

Поворот – це афінне перетворення під час якого система координат здійснює оберт навколо нерухомої осі Z, що напрямлена до спостерігача (рис. 2).

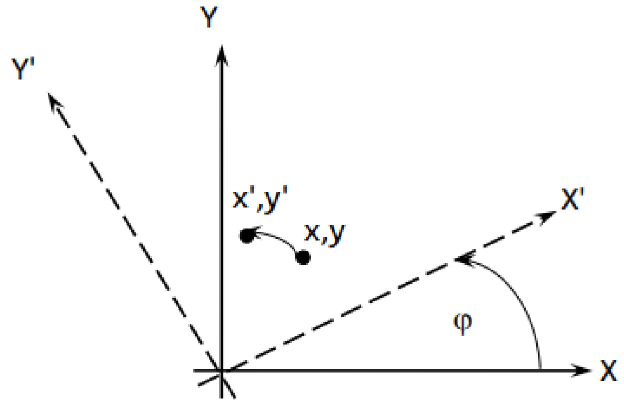


Рис. 2. Поворот системи координат

Поворот навколо початкової точки на кут φ описується наступними формулами:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi\,;\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \qquad (4)$$

Формули (4) можна об'єднати і записати в матричній формі:

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

1.4. Відображення

Відображення – невласне афінне перетворення під час якого одна з координат змінює свій знак на протилежний. На площині може бути відображення відносно осі X або відносно осі Y (рис. 3).

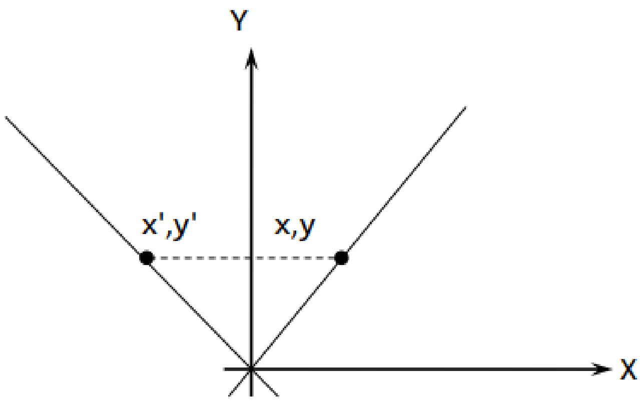


Рис. 3. Відображення відносно осі Y

Відображення відносно осі Y задається наступними формулами:

$$x' = -x;\ y' = y. \qquad (5)$$

Відповідно для відображення відносно осі X необхідно змінити знак координати y. Матрична форма запису для відображення дуже проста, тому тут не наводиться.

3. МАТРИЧНА ФОРМА АФІННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В ОДНОРІДНИХ КООРДИНАТАХ

Як вже зазначалося, будь-яке афінне перетворення можна подати у вигляді суперпозиції чотирьох найпростіших перетворень, що наведені вище. В комп'ютерній графіці використовується матрична форма запису цих перетворень. Тоді суперпозиція знаходиться як результат послідовного перемноження матриць, що описують відповідні афінні перетворення.

В розглянутих вище трьох найпростіших перетвореннях окрім формул також розглянута їх матрична форма подання. Але для найпростішого афінного перетворення *переміщення* записати матричну форму неможливо. Для усунення цього недоліку використовуються однорідні координати: замість матриць 2х2 використовуються матриці 3х3 і вектори $(x; y; 1)$.

Матриця переміщення (*Translation*) $[T]$ тоді буде мати наступний вигляд:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відповідно, переміщення точки $(x; y; 1)$ на вектор $(\lambda; \mu)$ розраховується наступним чином:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \lambda \\ y + \mu \\ 1 \end{bmatrix},$$

що повністю відповідає формулам (2).

Матриця масштабування (*Scaling*) $[S]$ буде мати наступний вигляд:

$$[S] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відповідно розтягнення (стиснення) точки $(x; y; 1)$ на коефіцієнти $(\alpha; \delta)$ розраховується наступним чином:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \delta y \\ 1 \end{bmatrix},$$

що повністю відповідає формулам (3).

Матриця повороту (*Rotation*) $[R]$ буде мати наступний вигляд:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відповідно поворот точки $(x; y; 1)$ навколо початку системи координат на кут φ розраховується наступним чином:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ 1 \end{bmatrix},$$

що повністю відповідає формулам (4).

Матриця відображення (*Reflection*) відносно осей X $[R_X]$ та Y $[R_Y]$ відповідно буде мати наступний вигляд:

$$[R_X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [R_Y] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відповідно відображення точки $(x; y; 1)$ відносно осі Y розраховується наступним чином:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

що повністю відповідає формулам (5).

Об'єднавши елементи всіх матриць в одну, можна записати *матрицю афінного перетворення*:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \lambda \\ \gamma & \delta & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді нові координати точки $(x; y; 1)$ після довільного афінного перетворення розраховуються наступним чином:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \lambda \\ \gamma & \delta & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta y + \lambda \\ \gamma x + \delta y + \mu \\ 1 \end{bmatrix},$$

що повністю відповідає загальним формулам (1).

Елементи матриці довільного афінного перетворення не несуть в собі явно вираженого геометричного змісту. Тому, щоб реалізувати те чи інше перетворення, необхідно розбити його на елементарні складові, побудувати їх матриці і перемножити їх в потрібному порядку.

В цьому підрозділі всі матриці подавалися в транспонованому вигляді і множилися на вертикальний вектор значень. Але при складному афінному перетворенні простіше їх перемножувати в нормальному вигляді, а тоді використовувати множення горизонтального вектора на результуючу матрицю. Порядок наступний – спочатку знаходимо результуючу матрицю шляхом їх послідовного перемноження між собою, а потім вектор множимо на матрицю. Надалі ми будемо використовувати нормальні матриці і горизонтальні вектори.

Приклад. Побудувати матрицю повороту навколо точки $A(a; b)$ на кут φ.

1. Спочатку переміщуємо точку A <u>в початок системи координат</u>:

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Робимо поворот на кут φ:

$$[R_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Тепер повертаємо точку А в початкове положення:

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

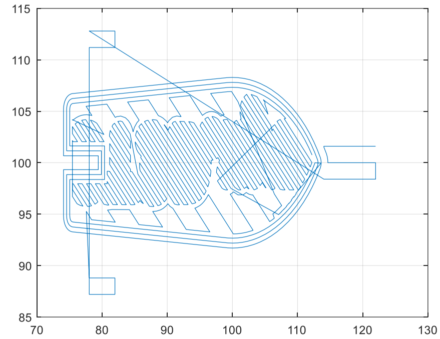
4. Множимо матриці в тому ж порядку, як вони записані: $[T_{-A}][R_\varphi][T_A]$. У результаті отримаємо таке перетворення:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

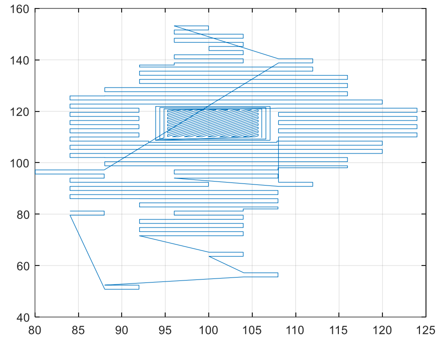
Пам’ятаємо про порядок перемноження матриць! Адже переміщення, а потім поворот дають один результат, тоді як поворот, а потім переміщення – зовсім інший.

4. ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

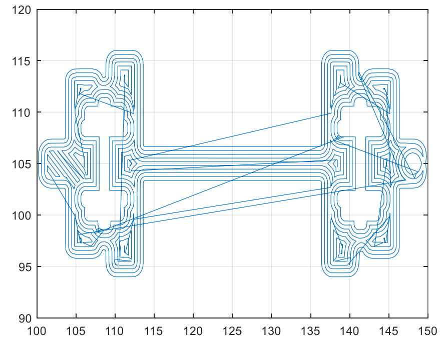
1. Ознайомитись з теоретичними відомостями до лабораторної роботи. Дослідити кожне перетворення (перетворення, масштабування, поворот, відображення тощо) та їхні комбінації на площину.
2. Задати вершини довільного опуклого 8-кутника на площині. Зменшити його в 1,5 рази.
3. Отриманий результат з попереднього пункту симетрично відобразити відносно початку координат.
4. Задати похилу пряму двома точками на площині. Симетрично відобразити 8-кутник відносно даної прямої. Вказати перетворення, які для цього необхідні.
5. Розробити програмне забезпечення (середовище розробки та мова програмування за вибором студента) для виконання пунктів 2–4. Результат виконання кожного пункту показати в окремому графічному вікні.
6. Виконати пункти 2–4 для одного будь-якого графічного об’єкту, який подано в xlsx-файлі.



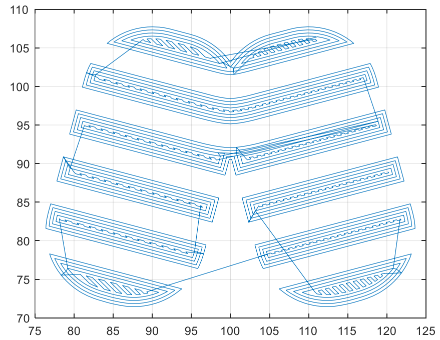
1)



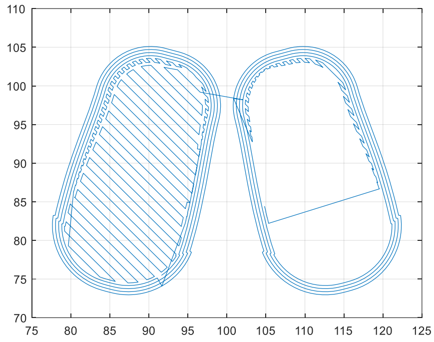
2)



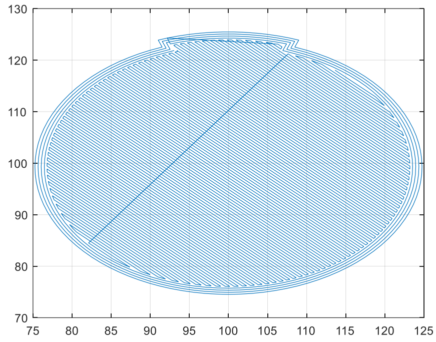
3)



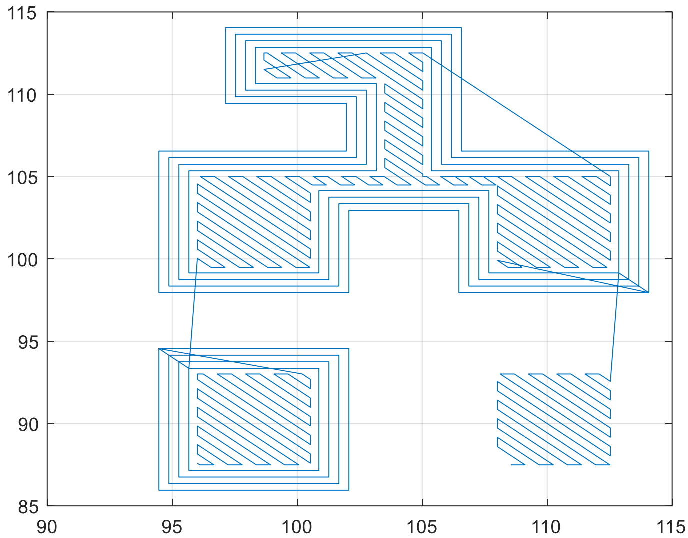
4)


110
105
100
95
90
85
80
75
70
75
80
85
90
95
100
105
110
115
120
125

5)


130
120
110
100
90
80
70
75
80
85
90
95
100
105
110
115
120
125

6)


115
110
105
100
95
90
85
90
95
100
105
110
115

7)