دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

فصل ۱ - اصول بنیادی شمارش
بخش دوم

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

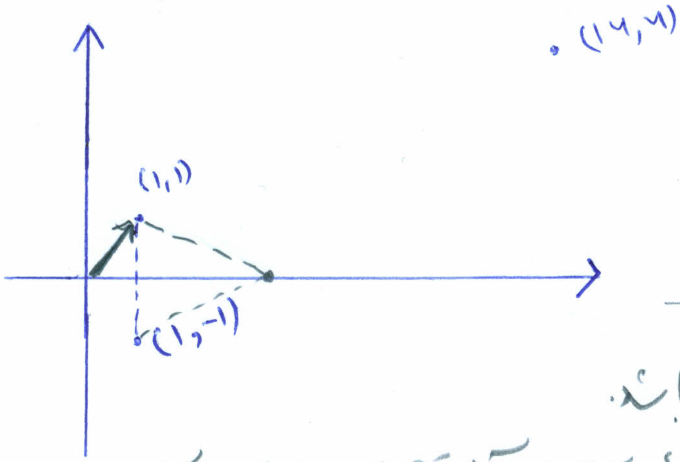
1

Fundamental Principles of Counting

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

تمرین ۳۴ ـ قسمت ث (صفحهٔ ۵۳ ـ تمرینات تکمیلی فصل اول)

دو دانشجو به سبب امتیازات تحصیلی برجسته برای تعیین دانشجوی برجستهٔ فرهنگ انتخاب شده‌اند شورای مرکب از ۱۴ عضو دانشکده تشکیل شده است و هر عضو یکی از ۲ نامزد را انتخاب می‌کند و نام او را در صندوق رای‌گیری می‌اندازد. فرض کنیم دانشجوی اول ۹ رای و دانشجوی دوم ۵ رای بیاورند به شرط آنکه هر بار یک رای از صندوق استخراج شود، به چند طریق می‌توان ورقه‌های رای‌گیری را استخراج نمود به طوری که همواره از بین آرای استخراج شده آرای بیشتر به نفع دانشجوی اول باشد؟



$(x,y) \longrightarrow (x+1, y+1)$

(u) ↗ شمردن هر رای دانشجوی اول

(d) ↘ شمردن هر رای دانشجوی دوم

$(x,y) \longrightarrow (x+1, y-1)$

- حتماً در شمردن، نخستین رای باید از آن نفر اول باشد.
- بین راههایی از (1,1) به (14,4) که بر محور xها مماس یا با آن متقاطع هستند و کل راههای از (1,-1) به (14,4) تناظر یک به یک وجود دارد.

تعداد راههای مطلوب = تعداد کل راههای از (1,1) به (14,4) − تعداد کل راههای از (1,-1) به (14,4)

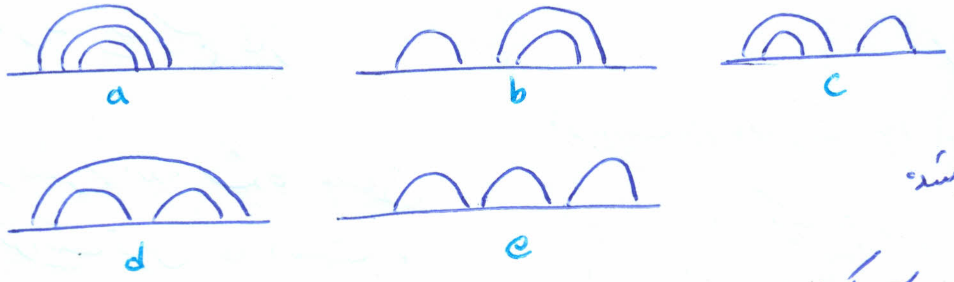
$$\begin{cases} u+d=13 \\ u-d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=8 \\ d=5 \end{matrix} \qquad \begin{cases} u+d=13 \\ u-d=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=9 \\ d=4 \end{matrix}$$

$$= \frac{13!}{8!\,5!} - \frac{13!}{9!\,4!}$$

$$= \binom{13}{8} - \binom{13}{9} = 572$$

به چند طریق می‌توان n نیم دایره را بر رو و بالای یک خط افقی چنان رسم کرد که دو انتهای کمان نیم دایره‌ها بر روی خط افقی بوده و هیچ ۲ نیم دایره‌ای یکدیگر را قطع نکنند.

مثال: اگر سه نیم دایره داشته باشیم، حالات خواسته شده در مسأله بصورت زیر خواهد بود:



یعنی ۳ نیم دایره را با شرایط ذکر شده در مسئله، می‌توان به ۵ طریق رسم کرد.

- به عنوان نمونه شکل d را در نظر بگیرید. اگر از سمت چپ شکل d به راست حرکت کنیم و در هنگام مشاهدهٔ یک نیم دایره (محل شروع آن نیم دایره) عدد ① را بنویسیم و موقع مشاهدهٔ مجدد همان نیم دایره عدد ⓪ را بنویسیم در اینصورت به رشتهٔ 110100 می‌رسیم:

- ویژگی رشته‌های متناظر با نیم دایره‌های رسم شده این است که این رشته‌ها:
حاوی تعداد مساوی از یک‌ها و صفرها هستند و اگر این رشته‌ها را از چپ به راست بخوانیم، هیچ گاه تعداد صفرها بیشتر از تعداد یک‌ها نخواهد بود.

* همچنین بین رسم‌های مجاز از نیم دایره‌ها و رشته‌های از صفرها و یک‌ها با ویژگی بالا تناظر یک به یک برقرار است.

- بنابراین به جای شمارش رسم‌های مجاز نیم دایره‌ها می‌توان رشته‌هایی با ویژگی فوق را شمرد که آن هم برابر با عدد n ام کاتالان است.

پاسخ مسئله $= C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

$n \geq 1$ (n: تعداد نیم دایره‌ها)

هر رسم مجاز از نیم دایره ها با شرایط ذکر شده معادل با رشته ای مجاز از صفرها و یک ها با شرایط بیان شده است.

- نحوهٔ تبدیل یک رشته مجاز به یک رسم مجاز

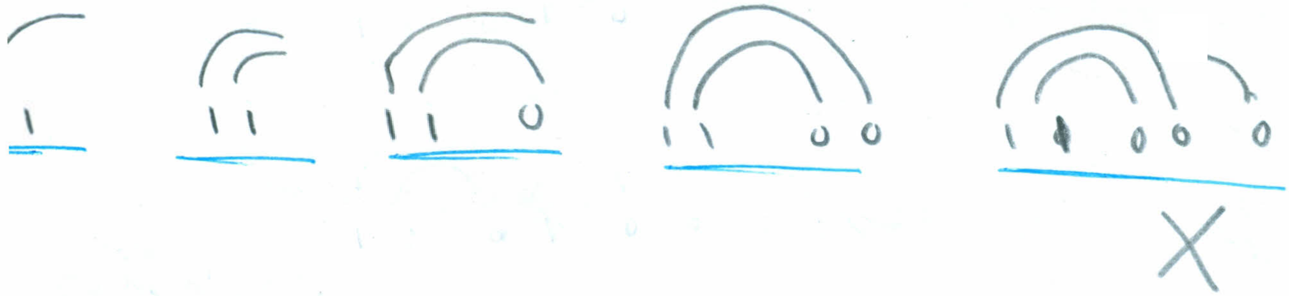
- هر صفر خوانده شده متعلق به نزدیک‌ترین 1 است.

1 1 0 1 0 0

در صورت خواندن رشته بالا از چپ به راست
با دیدن هر 1 یک نیم دایره شروع می‌شود
با دیدن هر 0 نزدیک‌ترین نیم دایره بسته می‌شود.

یک رشتهٔ غیرمجاز و یک رسم غیرمجاز

1 1 0 0 0 1



فرض کنید a_n تعداد راههای قراردادن اعداد $1, 2, \ldots, 2n$ در جدولی $2 \times n$ باشد. به طوری که اعداد واقع در هر سطر و هر ستون به صورت صعودی باشند. a_n را بیابید.

مثال: اگر $n=3$ باشد داریم:

1	2	4
3	5	6

یک چینش مجاز

اعداد 1 تا 6 را به ترتیب از چپ به راست می‌نویسیم: 1 2 3 4 5 6

حال شروع به خواندن این اعداد می‌نماییم و اگر هر عددی که می‌خوانیم در سطر بالای جدول باشد عدد ① و اگر در سطر پایین جدول باشد عدد ⓪ را قرار می‌دهیم. یعنی برای جدول مثال فوق داریم:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

ویژگی‌های رشته‌های ⓪، ① بدست آمده عبارتند از:

① هر رشته حاوی تعدادی مساوی از صفرها و یک‌ها هستند و اگر هر رشته را از چپ به راست بخوانیم هیچ‌گاه تعداد صفرها بیشتر از تعداد یک‌ها نخواهد بود.

② بین جدول‌های مجاز (با شرایط ذکر شده در صورت سوال) و رشته‌های با ویژگی فوق تناظر یک به یک وجود دارد.

- بنابراین به جای شمارش جدول‌های مجاز، می‌توان رشته‌های با ویژگی فوق را شمرد که آن هم برابر با عدد nام کاتالان است.

پاسخ مسئله $= C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (n: تعداد اعداد موجود در هر سطر)

$n \geq 1$

حاصل مجموع زیر را بیابید:

$$\sum_{n_{60}=0}^{2}\ \sum_{n_{59}=0}^{n_{60}}\ \sum_{n_{58}=0}^{n_{59}}\ \cdots\ \sum_{n_1=0}^{n_2}\ \sum_{n_0=0}^{n_1} 1$$

- مجموع عبارت بالا معادل با مقدار نهایی sum در قطعه برنامه زیر است:

```
sum=0;
for n60=0 to 2 do
    for n59=0 to n60 do
        :
            for n1=0 to n2 do
                for n0=0 to n1 do
                    sum=sum+1;
```

- هربار اجرای برنامه که به جمله‌ی $sum = sum+1$ می‌رسد معادل با یک جواب معادله‌ی زیر است، و تناظر یک به یک وجود دارد (بین اجرای خط برنامه و جواب معادله)

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 + x_1 + x_2 = 61 \\ 0 \leq x_i \\ 0 \leq i \leq 2 \end{array}}$$

x_i: بیانگر تعداد iهای استفاده شده.

$$0 \leq n_0 \leq n_1 \leq n_2 \cdots \leq n_{59} \leq n_{60} \leq 2$$

آن دسته از n_iهایی که مقدارشان صفر است:
⇓
x_0 تعداد این نوع از n_iها را نگه می‌دارد.

آن دسته از n_iهایی که مقدارشان یک است:
⇓
x_1 تعداد این نوع از n_iها را نگه می‌دارد.

آن دسته از n_iهایی که مقدارشان دو است:
⇓
x_2 تعداد این نوع از n_iها را نگه می‌دارد.

$\Longrightarrow$ جواب نهایی: تعداد پاسخ‌های معادله‌ی بالا: $\binom{61+3-1}{61} = \binom{63}{61}$

یک اثبات ترکیباتی برای اتحاد وندرموند (Vandermonde's Identity) ارائه دهید.

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \dots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

$$= \binom{m+n}{r} \qquad m,n,r \in \mathbb{N}$$

مجموعه $X = \{o_1, o_2, \dots, o_m, o'_1, \dots, o'_n\}$ از اشیا را در نظر بگیرید:

حال می‌خواهیم زیرمجموعه‌های r تایی از این مجموعه X (که دارای $m+n$ عضو است) را بشماریم:

راه نخست ← $\binom{m+n}{r}$

راه دوم ← مجموعه X را در نظر بگیرید:

$X = \{o_1, o_2, \dots, o_m, o'_1, \dots, o'_n\}$

راه‌های دستیابی به زیرمجموعه‌های r تایی را افراز می‌کنیم به اینکه چه تعداد از m شیء اول برداریم

و چه تعدادی از n عضو بعدی. بنابراین داریم:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \dots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

بنابر اصل شمارش مضاعف (Double Counting) باید دو راه نخست و دوم

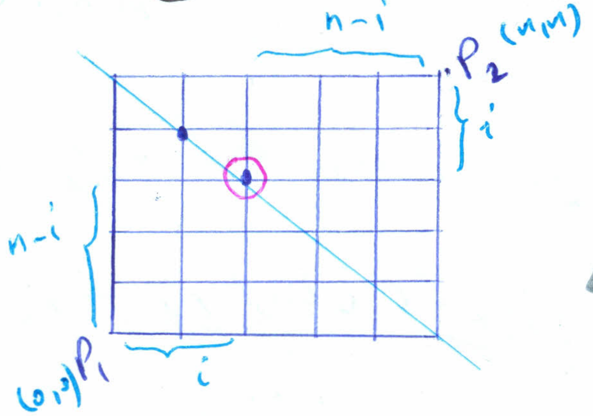
با یکدیگر برابر باشند:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \dots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

فرض کنید در یک صفحهٔ مشبک شخص P_1 در $(0,0)$ و شخص P_2 در (n,n) قرار دارند.

در هر نقطه از صفحه، هر یک از P_1 و P_2 با پرتاب یک سکه حرکت بعدی خود را تعیین می‌کنند.

حرکت P_1 بصورت $\uparrow$ یا $\rightarrow$ است و حرکت P_2 بصورت $\leftarrow$ یا $\downarrow$



احتمال ملاقات این ۲ با یکدیگر چقدر است؟

- هر ملاقات قطعاً بر روی یکی از نقاط قطر اصلی صورت می‌گیرد.

- تعداد راه‌های P_1 از $(0,0)$ به $(i, n-i)$:
$$\frac{(i+n-i)!}{i!\,(n-i)!} = \binom{n}{i}$$

- تعداد راه‌های P_2 از (n,n) به $(i, n-i)$:
$$\frac{(n-i+i)!}{(n-i)!\,i!} = \binom{n}{i}$$

$$\text{احتمال ملاقات} = \frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i}}{2^n \times 2^n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

نکته: در راه حل بالا از اتحاد وندرموند و اتحاد تقارن استفاده شده است.

در اتحاد وندرموند حالت خاص $m=n=r$ را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i} = \binom{2n}{n}$$

در یک تورنمنت ورزشی، ۸ تیم شرکت دارند. هر برد $+1$ ، تساوی 0 و باخت -1 امتیاز محسوب می‌گردد.

الف) در صورت نبود حالت تساوی، احتمال اینکه یک تیم مشخص در پایان مجموع امتیاز $+1$ کسب کند و در طول مسابقات هرگز مجموع امتیاز منفی نداشته باشد، چقدر است؟

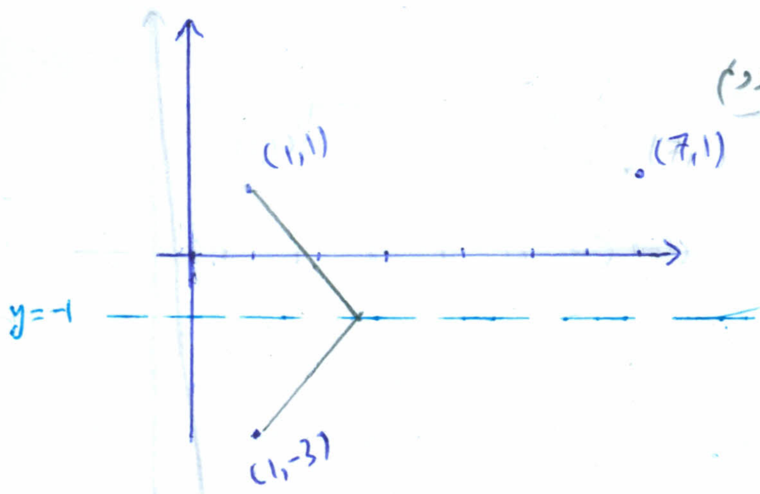
ب) در صورت وجود حالت تساوی، در کارنامهٔ این تیم مشخص، احتمال اینکه این تیم مجموع امتیاز صفر کسب کرده باشد، چقدر است؟

$\nearrow$	برد	u	نمادهای استفاده شده
$\searrow$	باخت	d	
$\rightarrow$	تساوی	t	

الف) _ تعداد بازی‌های این تیم مشخص: ۷ بازی

- بازی اول حتماً برد است.

- می‌خواهیم از نقطهٔ $(1,1)$ به $(7,1)$ برویم (با شرایط ذکر شده در الف)



$$\begin{cases} u+d=6 \\ u-d=0 \end{cases} \Rightarrow u=d=3 \Rightarrow \boxed{\text{کل راه‌ها} : \frac{6!}{3!\,3!} \quad ((7,1) \text{ به } (1,1) \text{ از})}$$

راههایی که خط $y=-1$ را قطع یا بر آن مماس هستند

$$\begin{cases} u+d=6 \\ u-d=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=5 \\ d=1 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\text{راههای غیرمجاز} \ ((7,1) \text{ به } (1,-3) \text{ از}) = \frac{6!}{5!\,1!}}$$

$$\text{راههای مجاز دیگر} = \frac{6!}{3!\,3!} - \frac{6!}{5!\,1!} = 14 \Rightarrow \boxed{\text{احتمال} = \frac{14}{2^7}}$$

ب) چون مجموع امتیاز کسب شده برای تیم صفر است پس جابجایی بصورت زیر خواهد بود:

$$(0,0) \longrightarrow (7,0)$$

$$\begin{cases} u+d+t=7 \\ u-d=0 \end{cases} \Longrightarrow u=\frac{7-t}{2} \qquad d=\frac{7-t}{2}$$

if $t=0 \Rightarrow$ غ ق ق

if $t=1 \Rightarrow u=d=3 \Rightarrow$ کل حالات $: \dfrac{7!}{1!\,3!\,3!}=140$

if $t=2 \Rightarrow$ غ ق ق

if $t=3 \Rightarrow u=d=2 \Rightarrow$ کل حالات $= \dfrac{7!}{3!\,2!\,2!}=210$

if $t=4 \Rightarrow$ غ ق ق

if $t=5 \Rightarrow u=d=1 \Rightarrow$ کل حالات $= \dfrac{7!}{1!\,1!\,5!}=42$

if $t=6 \Rightarrow$ غ ق ق

if $t=7 \Rightarrow u=d=0 \Rightarrow$ کل حالات $= \dfrac{7!}{7!\,0!\,0!}=1$

$$\boxed{\text{احتمال} = \frac{1+42+210+140}{3^7} = \frac{393}{3^7}}$$

۲