مشتق و کاربردها

تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

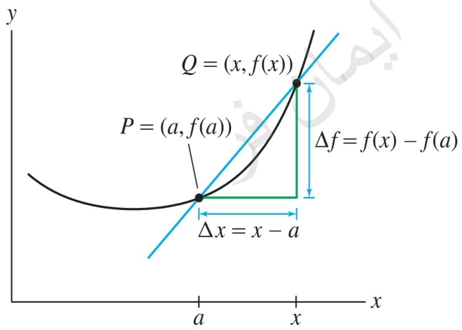
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

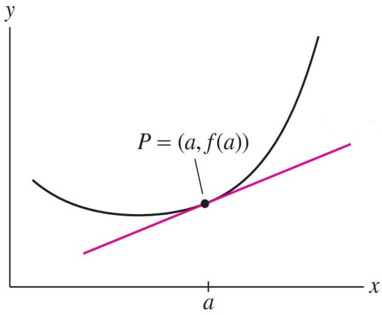
پاییز ۱۴۰۲

فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه‌ی بازی شامل a تعریف شده باشد. به‌ازای $x \neq a$ مقدار

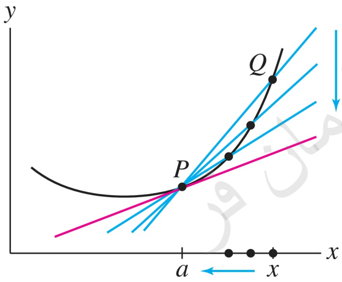
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شیب خطی است که از نقاط $P = (a, f(a))$ و $Q = (x, f(x))$ می‌گذرد.





با توجه به شکل، وقتی نقطه‌ی Q روی نمودار تابع $y = f(x)$ به نقطه‌ی P نزدیک شود، یا به‌طور معادل وقتی x به a میل کند، خط‌های قاطع PQ به خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی P میل می‌کنند.



به این دلیل ظاهرا طبیعی است که شیب منحنی در نقطه‌ی P، که همان شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ است، را برابر با مقدار

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریف کنیم، وقتی حد وجود داشته باشد.

تعریف مشتق

فرض کنید تابع $f(x)$ روی بازه‌ی بازی شامل a تعریف شده باشد. مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ را با $f'(a)$ نمایش داده و به‌صورت

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف می‌کنیم، با این شرط که حد موجود و متناهی باشد. در صورتی که قرار دهیم $h = x - a$، تعریف مشتق را به‌صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$f'(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

برای تابع $y = f(x)$ می‌دانیم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

اگر در حد بالا به جای $f(x+\Delta x) - f(x)$ از Δy استفاده کنیم، آن‌گاه می‌توانیم بنویسیم $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. برای نمایش مشتق $f'(x)$ از نماد لایب‌نیتز $\frac{dy}{dx}$ نیز استفاده می‌شود.
بنابراین

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

در حالت کلی‌تر، $f'(a)$ با نمادهای زیر نیز نمایش داده می‌شود:

$$y'(a) = \frac{dy}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(a) = Df(a) = D_x f(a).$$

توجه

◄ مقدار $f'(x)$ همان *شیب خط مماس* بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$ است. معادله‌ی این خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

◄ اگر $f'(a) \neq ۰$، آن‌گاه شیب خط قائم بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$، برابر است با $\dfrac{-۱}{f'(a)}$.

مشتق تابع ثابت و تابع خطی

◄ تابع ثابت: فرض کنید $f(x) = c$ که در آن c یک ثابت است. در این صورت به‌ازای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x\to a} ۰ = ۰.$$

بنابراین یک تابع ثابت همه جا مشتق صفر دارد.

◄ تابع خطی: فرض کنید $f(x) = mx + b$ که در آن m و b ثابت می‌باشند. داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{m(x+h)+b-mx-b}{h} = m$$

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار $f(x) = mx + b$ در هر نقطه برابر با m است.

مشتق تابع توانی با توان مثبت

فرض کنید $f(x) = x^n$. با توجه به رابطه‌ی

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\right) = a^n - b^n,$$

داریم:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1}(x+h)^k x^{n-1-k}.$$

در این مجموع n جمله وجود دارد. وقتی $h \to 0$، $(x+h)^k \to x^k$ و در نتیجه جمله‌ی kـام به $x^k x^{n-1-k} = x^{n-1}$ میل می‌کند. بنابراین مجموع تمام n جمله به nx^{n-1} نزدیک خواهد شد. یعنی به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f'(x) = nx^{n-1}$.

تعریف

◄ مشتق راست (چپ) تابع $f(x)$ در $x = a$ را با $f'_+(a)$ $(f'_-(a))$ نمایش داده و به‌صورت

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \left(f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right)$$

تعریف می‌کنیم، با این شرط که حد موجود و متناهی باشد.

◄ تابع $f(x)$ را روی بازه‌ی بسته $[a,b]$ مشتق‌پذیر گوییم، هرگاه $f'_+(a)$، $f'_-(b)$ و $f'(x)$ به‌ازای هر $x \in (a,b)$ موجود باشند.

قضیه

$f'(x)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_-(x)$ و $f'_+(x)$ موجود و برابر باشند.

قضیه

اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ *مشتق‌پذیر* باشد، آن‌گاه $f(x)$ در $x=a$ *پیوسته* است.

اثبات:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right] &= \lim_{x\to a}\left[(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\\ &= \left[\lim_{x\to a}(x-a)\right]\left[\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\\ &= 0\times f'(a)=0.\end{aligned}$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$، پس $f(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

تذکر

عکس قضیه‌ی قبل الزاما برقرار نیست. برای مثال تابع $f(x) = |x|$ در $x = ۰$ پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست، زیرا

$$f'_+(۰) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{x} = ۱,$$
$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-x}{x} = -۱.$$

بنابراین $f'_+(۰) \neq f'_-(۰)$ و در نتیجه تابع $f(x) = |x|$ در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.
توجه می‌کنیم که تابع $f(x) = |x|$ در سایر نقاط مشتق‌پذیر است.

قضیه

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی مشتق‌پذیر در $x=a$ باشند. در این صورت توابع $(f\pm g)(x)$، $(fg)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ با شرط $g(a)\neq 0$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و

۱) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a).$

۲) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a).$

۳) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{\big(g(a)\big)^2}.$

مشتق توابع چندجمله‌ای

فرض کنید $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. با استفاده از قضیه‌ی قبل می‌توان نشان داد:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1}.$$

مشتق توابع مثلثاتی

در ادامه نشان می‌دهیم توابع مثلثاتی بر دامنه‌شان مشتق‌پذیر هستند و داریم:

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x = -\left(1 + \cot^2 x\right)$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

می‌دانیم $\sin y - \sin x = ۲\sin\frac{y-x}{۲}\cos\frac{y+x}{۲}$. بنابراین

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(\frac{h}{۲})}{\frac{h}{۲}}\cos(x+\frac{h}{۲}).$$

از آنجایی‌که تابع $\cos x$ پیوسته است، داریم $\lim_{h\to ۰}\cos(x+\frac{h}{۲}) = \cos x$. چون $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(x)}{x} = ۱$، پس $\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(\frac{h}{۲})}{\frac{h}{۲}} = ۱$. در نتیجه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x) \implies (\sin x)' = \cos x.$$

با استفاده از دستور $\cos y - \cos x = -۲\sin\frac{y-x}{۲}\sin\frac{y+x}{۲}$ می‌توان نشان داد $(\cos x)' = -\sin x$. سایر موارد نیز با استفاده از قضیه‌ی قبل به‌دست می‌آیند.

قضیه

اگر تابع g در x و تابع f در $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع $f \circ g$ نیز در x مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'\big(g(x)\big), \qquad \Big[\big(f(u)\big)' = u' f'(u)\Big].$$

مثال

فرض کنید $x \neq 0$. مطلوب است محاسبه‌ی مشتق تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

پاسخ:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}.$$

مثال

پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

پاسخ: اگر $x \neq 0$، آن‌گاه

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \implies 0 \leq |\sin\frac{1}{x}| \leq 1 \overset{\times|x|}{\implies} 0 \leq |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$$

$$\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0}|x| = 0 \implies \lim_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}| = 0 \implies \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

پس $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$، در نتیجه تابع $f(x)$ در $x = 0$ پیوسته است. تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} \implies \text{حد موجود نیست}$$

مثال

پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۲} \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = ۰$ بررسی کنید.

پاسخ: برای بررسی مشتق‌پذیری طبق تعریف داریم:

$$f'(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{x^{۲} \sin \frac{۱}{x}}{x} = \lim_{x \to ۰} x \sin \frac{۱}{x} = ۰.$$

درنتیجه $f(x)$ در $x = ۰$ مشتق‌پذیر است، و از این‌رو پیوسته است.

مثال

مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x^{۲}[x]$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

پاسخ: مشتق راست و چپ تابع را در $x=۱$ محاسبه می‌کنیم؛

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}[x]-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}x+۱=۲,$$

$$f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{x^{۲}[x]-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{-۱}{x-۱}=+\infty.$$

چون $f'_{+}(۱)\neq f'_{-}(۱)$، نتیجه می‌گیریم که تابع $f(x)=x^{۲}[x]$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال

مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ -x & x\in\mathbb{Q}^c \end{cases}$ را در $x=\circ$ بررسی کنید.

پاسخ: نشان می‌دهیم تابع $f(x)$ در $x=\circ$ مشتق‌پذیر نیست؛

$$\lim_{x\to\circ}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{f(x)}{x}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} a_n=\frac{۱}{n}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(\frac{۱}{n})}{\frac{۱}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{n}}=۱ \\ b_n=\frac{\sqrt{۲}}{n}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(\frac{\sqrt{۲}}{n})}{\frac{\sqrt{۲}}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{n}}{\frac{\sqrt{۲}}{n}}=-۱ \end{cases}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{f(x)}{x}$ وجود ندارد، در نتیجه $f(x)$ در $x=\circ$ مشتق ندارد.

مشتق تابع ریشه n–ام

فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به‌ازای $x > ۰$ تعریف می‌کنیم $f(x) = x^{\frac{۱}{n}}$. در این صورت

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{\frac{۱}{n}} - x^{\frac{۱}{n}}}{h}.$$

اگر قرار دهیم $u = (x+h)^{\frac{۱}{n}}$ و $v = x^{\frac{۱}{n}}$، آنگاه $u^n = x + h$ و $v^n = x$. پس $h = u^n - v^n$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{۱}{u^{n-۱} + u^{n-۲}v + \cdots + uv^{n-۲} + v^{n-۱}}.$$

پیوستگی تابع ریشه nـام نشان می‌دهد که وقتی $h \to ۰$، آنگاه $u \to v$. بنابراین

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{۱}{nv^{n-۱}} = \frac{۱}{n} \frac{۱}{(x^{\frac{۱}{n}})^{n-۱}} = \frac{۱}{n} \frac{۱}{x^{(۱-\frac{۱}{n})}} = \frac{۱}{n} x^{\frac{۱}{n}-۱}.$$

اگر $f(x) = x^{-\frac{۱}{n}}$، آنگاه با استفاده از مشتق بالا و مشتق ترکیب دو تابع می‌توان نتیجه

گرفت $f'(x) = -\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}$. بنابراین، به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ که $n \neq 0$ داریم:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}, \qquad (x > 0) \implies f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

مشتق توان‌های گویا

فرض کنید $x > 0$ و $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. تعریف می‌کنیم $f(x) = x^r = x^{\frac{m}{n}}$. قرار می‌دهیم $u(x) = x^m$ و $v(x) = x^{\frac{1}{n}}$. بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) = u\big(v(x)\big) \Rightarrow f'(x) = v'(x)u'\big(v(x)\big) &= \frac{1}{n}(x^{\frac{1}{n}-1})\left(m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\right) \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \times x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}. \end{aligned}$$

$$f(x) = x^r, \qquad (r \in \mathbb{Q}) \implies f'(x) = rx^{r-1}.$$

به‌طور کلی عمل حدی که f' را از f می‌سازد طریقه‌ی به‌دست آوردن تابع جدید f' را از تابع معلوم f در اختیار ما می‌گذارد. این فرآیند را مشتق‌گیری و f' را مشتق اول f می‌نامند. چنان‌چه f' بر بازه‌ی بازی تعریف شده باشد، می‌توانیم برای محاسبه‌ی مشتق آن که با f'' نمایش داده می‌شود و مشتق دوم f نام دارد، اقدام کنیم. به همین ترتیب، مشتق nـام f که با $f^{(n)}$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to ۰} \frac{f^{(n-۱)}(x+h) - f^{(n-۱)}(x)}{h}.$$

نماد گذاری

مشتق دوم تابع $y = f(x)$ را (در صورت وجود) با نمادهای زیر نمایش می‌دهیم:

$$y'' = f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) = D_x^2 f(x) = D_x^2 y.$$

به‌طور مشابه، مشتق nـام تابع $y = f(x)$ را (در صورت وجود) با نمادهای زیر نمایش می‌دهیم:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = D_x^n f(x) = D_x^n y.$$

مثال

مقادیر a، b و c را طوری بیابید که $f''(\circ)$ برای تابع زیر موجود باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx+c & x<\circ \\ ۳x^{۲}+۱ & x\geq \circ \end{cases}$$

پاسخ: تابع $f(x)$ باید در $x=\circ$ پیوسته باشد، یعنی $\lim_{x\to\circ} f(x)=f(\circ)$. بنابراین

$$\lim_{x\to\circ^-} f(x)=f(\circ)=\lim_{x\to\circ^+} f(x) \Longrightarrow \boxed{c=۱}$$

از آنجایی‌که $f(x)$ در $x=\circ$ مشتق‌پذیر است، داریم $f'_+(\circ)=f'_-(\circ)$.

$$f'_+(\circ)=\lim_{x\to\circ^+}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ^+}\frac{(۳x^{۲}+۱)-۱}{x}=\circ,$$

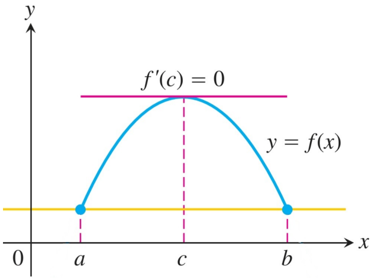
$$f'_-(\circ)=\lim_{x\to\circ^-}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ^-}\frac{(ax^{۲}+bx+۱)-۱}{x}=b.$$

در نتیجه $\boxed{b = ۰}$ و $f'(۰) = ۰$، از این‌رو

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ ۶x & x > ۰ \end{cases}$$

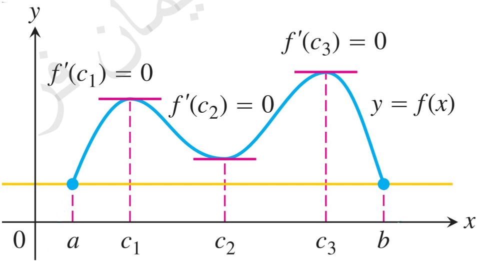
چون $f''(۰)$ موجود است داریم $f''_+(۰) = f''_-(۰)$.

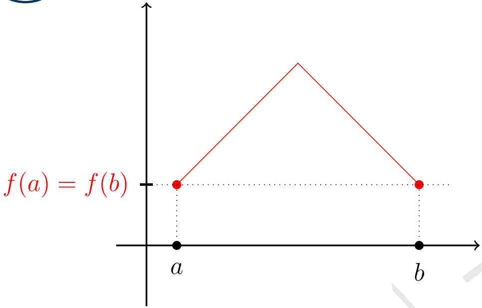
$$\left.\begin{aligned} f''_+(۰) &= \lim_{x\to ۰^+} \frac{f'(x) - f'(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۶x}{x} = ۶ \\ f''_-(۰) &= \lim_{x\to ۰^-} \frac{f'(x) - f'(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲ax}{x} = ۲a \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{a = ۳}$$



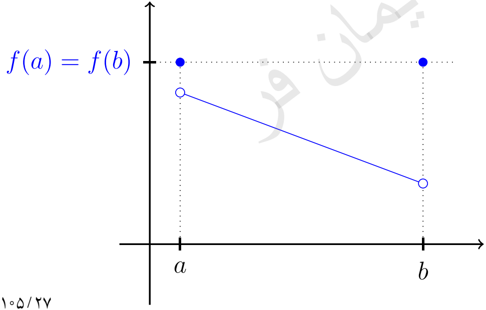
قضیه رُل

فرض کنید تابع $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر است. اگر $f(a) = f(b)$، آن‌گاه حداقل یک نقطه مانند c در (a, b) وجود دارد به‌طوری که $f'(c) = ۰$.





مشتق‌پذیری در بازه‌ی باز (a, b)، شرطی لازم در قضیه رُل می‌باشد. تابع مقابل بر بازه‌ی بسته $[a, b]$ پیوسته می‌باشد و $f(a) = f(b)$، اما در هیچ نقطه‌ای از بازه‌ی (a, b) مقدار $f'(x)$ برابر با صفر نمی‌شود.



پیوستگی بر بازه‌ی بسته $[a, b]$، شرطی لازم در قضیه رُل می‌باشد. تابع مقابل در بازه‌ی باز (a, b) مشتق‌پذیر می‌باشد و $f(a) = f(b)$، اما در هیچ نقطه‌ای از (a, b) مقدار $f'(x)$ برابر با صفر نمی‌شود.

مثال

فرض کنید $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است. اگر $af(a)=bf(b)$، ثابت کنید $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)+cf'(c)=0$.

پاسخ: تعریف می‌کنیم $g(x)=xf(x)$. تابع $g(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است. به‌علاوه $g(a)=af(a)=bf(b)=g(b)$. بنابر قضیه‌ی رل حداقل یک نقطه مانند c در (a,b) وجود دارد که

$$g'(c)=0 \implies f(c)+cf'(c)=0.$$

مثال

نشان دهید تابع $f(x) = x^{۲} - \sin x - ۱$ دقیقا دو ریشه دارد.

پاسخ: واضح است که f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. داریم:

$$\begin{cases} f(۰)f(\pi) < ۰ \xrightarrow{\text{قضیه مقدار میانی}} f \text{ یک ریشه در } (۰, \pi) \text{ دارد.} \\ f(-\pi)f(۰) < ۰ \xrightarrow{\text{قضیه مقدار میانی}} f \text{ یک ریشه در } (-\pi, ۰) \text{ دارد.} \end{cases}$$

اکنون فرض کنیم f بیش از دو ریشه داشته باشد. به‌عنوان مثال ۳ ریشه داشته باشد. بنابر قضیه‌ی رل، f' حداقل ۲ ریشه دارد. با استفاده مجدد از قضیه‌ی رل برای f'، نتیجه می‌گیریم f'' حداقل یک ریشه دارد که در تناقض با نامساوی زیر است:

$$f''(x) = ۲ + \sin x \geq ۱.$$

مثال

فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای روی بازه‌ی $[a,b]$ باشد. اگر

$$f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0,$$

ثابت کنید $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $f'''(c)=0$.

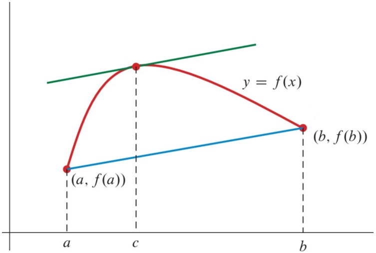
پاسخ: چون f چندجمله‌ای است، f، f' و f'' همه جا مشتق‌پذیر و در نتیجه پیوسته هستند. داریم:

$$f(a)=f(b)=0 \xRightarrow{\text{قضیه رل}} \exists\, c_1\in(a,b)\ :\ f'(c_1)=0$$

$$f'(a)=f'(c_1)=0 \xRightarrow{\text{قضیه رل}} \exists\, c_2\in(a,c_1)\ :\ f''(c_2)=0 \qquad (*)$$

$$f'(c_1)=f'(b)=0 \xRightarrow{\text{قضیه رل}} \exists\, c_3\in(c_1,b)\ :\ f''(c_3)=0 \qquad (**)$$

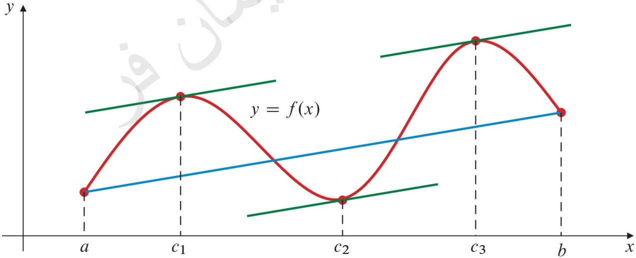
$$(*)\ \&\ (**) \xRightarrow{\text{قضیه رل}} \exists\, c\in(c_1,c_2)\ :\ f'''(c)=0$$



قضیه مقدار میانگین

فرض کنید تابع $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت حداقل یک نقطه مانند c در (a, b) وجود دارد به‌طوری که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



اثبات: قضیه‌ی مقدار میانگین را می‌توان از قضیه‌ی رل نتیجه گرفت. برای این منظور، تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = f(x)(b-a) - x\left(f(b) - f(a)\right).$$

تابع $h(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است. همچنین، داریم:

$$h(a) = h(b) = bf(a) - af(b).$$

طبق قضیه‌ی رل $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$h'(c) = ۰ \implies f'(c)(b-a) - (f(b) - f(a)) = ۰$$
$$\implies f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

نتیجه

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشند.

(۱) اگر به‌ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) = ۰$، آن‌گاه $f(x)$ یک تابع ثابت است.

(۲) اگر به‌ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) = g'(x)$، آن‌گاه ثابت c وجود دارد به‌طوری که $f(x) = g(x) + c$.

اثبات: برای اثبات (۱) فرض کنیم $f(x)$ ثابت نباشد، یعنی $x_۱, x_۲ \in [a,b]$ وجود داشته باشند که $f(x_۱) \neq f(x_۲)$. بدون کم شدن از کلیت، می‌توانیم فرض کنیم $x_۱ < x_۲$. بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\exists\, c \in (x_۱, x_۲):\ f'(c) = \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱} \neq ۰,$$

که در تناقض با فرض است. برای اثبات (۲) کافی است قرار دهیم $h(x) = f(x) - g(x)$ و از (۱) استفاده کنیم.

قضیه (دستور مقدار میانگین کوشی)

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع پیوسته بر $[a,b]$ و مشتق‌پذیر در (a,b) باشند. در این صورت حداقل یک نقطه مانند c در (a,b) وجود دارد به‌طوری که

$$f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]=g'(c)\left[f(b)-f(a)\right].$$

اگر مخرج‌ها ناصفر باشند، می‌توان نوشت:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

اثبات: تعریف می‌کنیم $h(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]$. تابع h بر $[a,b]$ پیوسته، در (a,b) مشتق‌پذیر است و $h(a)=h(b)=f(a)g(b)-g(a)f(b)$. بنابر قضیه‌ی رل $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $h'(c)=۰$. در نتیجه

$$f'(c)[g(b)-g(a)]-g'(c)[f(b)-f(a)]=۰.$$

مثال

فرض کنید $\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$. برای بعضی مقادیر x در $[0,1]$ نشان دهید

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0.$$

پاسخ: به‌ازای هر $x\in[0,1]$ تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\cdots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$$

$$\xrightarrow[\text{و در } (0,1) \text{ مشتق‌پذیر است.}]{f \text{ بر } [0,1] \text{ پیوسته}} \begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{قضیه رل}} \exists\, x_0\in(0,1):\ f'(x_0)=0 \Rightarrow a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=0.$$

مثال

فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه‌ی باز I دو بار مشتق‌پذیر باشد و $I \supset [۰, ۲]$. همچنین، فرض کنید $f(۰) = f(۱)$ و $f(۲) = ۱$. ثابت کنید $c \in I$ وجود دارد به‌طوری که $f''(c) > \frac{۱}{۲}$.

پاسخ: چون f بر I دوبار مشتق‌پذیر است و $[۰, ۲] \subset I$، پس f و f' بر $[۰, ۲]$ پیوسته می‌باشند. از آنجا که $f(۰) = f(۱)$، بنابر قضیه‌ی رل $c_۱ \in (۰, ۱)$ وجود دارد که $f'(c_۱) = ۰$. همچنین، داریم:

$$\xrightarrow{\text{قضیه مقدار میانگین}} \exists\, c_۲ \in (۱, ۲):\ f'(c_۲) = \frac{f(۲) - f(۱)}{۲ - ۱} = ۱,$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه مقدار میانگین}} \exists\, c \in (c_۱, c_۲):\ f''(c) = \frac{f'(c_۲) - f'(c_۱)}{c_۲ - c_۱}$$

$$(c_۱ < c_۲ \in (۰, ۲) \ \Rightarrow\ c_۲ - c_۱ < ۲) \qquad = \frac{۱}{c_۲ - c_۱} > \frac{۱}{۲}.$$

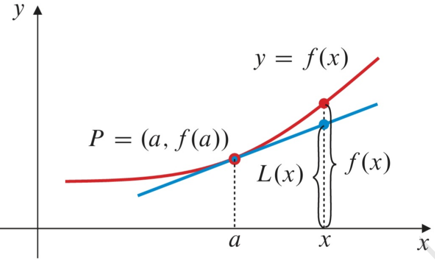
مثال

فرض کنید به‌ازای هر x داشته باشیم $f'(x) = f(\frac{x}{2})$ و $f(0) = 1$. نشان دهید اگر برای یک $x_0 > 0$ داشته باشیم $f(x_0) = 0$، آن‌گاه $x_1 \in (0, x_0)$ وجود دارد به‌طوری که $f(x_1) = 0$.

پاسخ: فرض کنید $x_0 > 0$ وجود داشته باشد که $f(x_0) = 0$. از مشتق‌پذیری f، پیوستگی آن نتیجه می‌شود. با به‌کارگیری قضیه‌ی مقدار میانگین برای f بر بازه‌ی $[0, x_0]$ نتیجه می‌گیریم $c \in (0, x_0)$ وجود دارد که

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = -\frac{1}{x_0} < 0 \xrightarrow{f'(x)=f(\frac{x}{2})} f(\frac{c}{2}) = f'(c) < 0.$$

بنابراین $f(\frac{c}{2})f(0) < 0$. طبق قضیه‌ی مقدار میانی $x_1 \in (0, \frac{c}{2})$ وجود دارد به‌طوری که $f(x_1) = 0$. با توجه به این‌که $x_0 > c > \frac{c}{2} > x_1 > 0$، حل کامل می‌شود.



فرض کنید تابع $f(x)$ در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد. در بسیاری از توابع، خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $P = (a, f(a))$، رفتار تابع را در یک همسایگی نقطه‌ی P، بهتر از هر خط راست دیگری توصیف می‌کند. فرض کنیم این خط با معادله $y = L(x)$ نمایش داده شود. از آنجایی‌که شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی P برابر است با $f'(a)$، داریم:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a) \implies y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$L(x)$ را **خطی‌سازی** f حول a می‌نامیم و می‌گوییم $L(x)$ **تقریب خطی** مقادیر f در نزدیکی a است. بنابراین با کمک این رابطه می‌توان مقدار $f(x)$ را با خطایی قابل قبول تقریب زد؛ یعنی به‌ازای نقاط x نزدیک a داریم:

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

مثال

با استفاده از خطی‌سازی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ حول ۲۵، مقدار تقریبی $\sqrt{۲۶}$ را بیابید.

پاسخ: با جایگذاری

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad a = ۲۵, \qquad x = ۲۶,$$

در فرمول تقریب خطی، داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt{۲۶} = f(۲۶) \approx L(۲۶) &= f(۲۵) + f'(۲۵)(۲۶ - ۲۵) \\ &= ۵ + \frac{۱}{۲\sqrt{۲۵}} = ۵ + \frac{۱}{۱۰} = ۵/۱.\end{aligned}$$

مثال

یک مقدار تقریبی برای $(۱/۹۹۹)^۵$ بیابید.

پاسخ: برای حل این مسئله، می‌توان تقریب خطی را برای تابع $f(x) = x^۵$ حول $a = ۲$ به‌کار برد؛

$$\begin{aligned}(۱/۹۹۹)^۵ = f(۱/۹۹۹) \approx L(۱/۹۹۹) &= f(۲) + f'(۲)(۱/۹۹۹ - ۲)\\ &= ۳۲ + ۵ \times ۲^۴ \times \frac{-۱}{۱۰۰۰}\\ &= ۳۲ - \frac{۸}{۱۰۰} = \boxed{۳۱/۹۲}.\end{aligned}$$

مثال

یک مقدار تقریبی برای $\sin(۳۳^\circ)$ بیابید.

پاسخ: قرار می‌دهیم

$$f(x) = \sin x, \qquad a = \frac{\pi}{۶}, \qquad x = \frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۶۰}.$$

با توجه به فرمول تقریب خطی، داریم:

$$\begin{aligned} \sin(۳۳^\circ) &= f\left(\frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۶۰}\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) + \frac{\pi}{۶۰}\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) \\ &= \frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(\frac{\pi}{۶۰}\right) + \frac{۱}{۲} \approx ۰/۵۴. \end{aligned}$$

مثال

مقدار $\sqrt[۳]{۲۷/۲}$ را به کمک تقریب خطی محاسبه کنید.

پاسخ: فرض کنید $f(x) = \sqrt[۳]{x}$. در این صورت $f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$. با نوشتن تقریب خطی f حول $a = ۲۷$ خواهیم داشت:

$$\sqrt[۳]{۲۷/۲} = f(۲۷/۲) \approx f(۲۷) + f'(۲۷)(۲۷/۲ - ۲۷) = ۳ + ۰/۲\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۲۷^۲}}$$
$$= ۳ + ۰/۲(\frac{۱}{۲۷}).$$

تعریف

- تابع $f(x)$ را صعودی (اکیدا صعودی) گوییم، اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in D_f$ که $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) \leq f(x_۲)$ $\big(f(x_۱) < f(x_۲)\big)$.
- تابع $f(x)$ را نزولی (اکیدا نزولی) گوییم، اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in D_f$ که $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) \geq f(x_۲)$ $\big(f(x_۱) > f(x_۲)\big)$.
- توابع صعودی و توابع نزولی، توابع یکنوا نیز نامیده می‌شوند.
- توابع اکیدا صعودی و توابع اکیدا نزولی، توابع اکیدا یکنوا نیز نامیده می‌شوند.

قضیه

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته بر بازه‌ی بسته $[a,b]$ بوده و در بازه‌ی باز (a,b) مشتق داشته باشد. در این صورت

(۱) اگر به‌ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) \geq ۰$ $\left(f'(x) > ۰ \right)$، آن‌گاه $f(x)$ بر $[a,b]$ صعودی (اکیدا صعودی) است.

(۲) اگر به‌ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) \leq ۰$ $\left(f'(x) < ۰ \right)$، آن‌گاه $f(x)$ بر $[a,b]$ نزولی (اکیدا نزولی) است.

اثبات: فرض کنید $x, y \in [a,b]$ و $x < y$. با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین برای f روی بازه‌ی بسته $[x,y]$ داریم:

$$\exists\, c \in (x,y):\ f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \geq ۰ \implies f(y) \geq f(x).$$

اثبات بقیه موارد مشابه است.

مثال

الف) به‌ازای $\circ < x \leq \frac{\pi}{۲}$ نشان دهید $۱ \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{۲}{\pi}$.

ب) به‌ازای $\circ \leq x < \frac{\pi}{۲}$ نشان دهید $\tan x \geq x + \frac{x^۳}{۳}$.

پاسخ: الف) ابتدا برای $x > \circ$ نشان می‌دهیم $\frac{\sin x}{x} \leq ۱$. تابع $f(x) = \sin x - x$ را درنظر بگیرید. اگر $x > \circ$، آن‌گاه

$$f'(x) = \cos x - ۱ \leq \circ \ \Rightarrow \ \text{نزولی است } f \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(\circ) = \circ$$

$$\Rightarrow \ \sin x \leq x \ \Rightarrow \ \frac{\sin x}{x} \leq ۱.$$

حال، به‌ازای $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ ثابت می‌کنیم $\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x}$، که به‌وضوح برای $x = \frac{\pi}{2}$ برقرار است. قرار می‌دهیم $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. اگر $x \in (0, \frac{\pi}{2})$، آن‌گاه طبق قضیه‌ی مقدار میانگین $c \in (x, \frac{\pi}{2})$ وجود دارد به‌طوری که

$$g'(c) = \frac{g(\frac{\pi}{2}) - g(x)}{\frac{\pi}{2} - x} \Longrightarrow \frac{c\cos c - \sin c}{\underbrace{c^2}_{>0}} = \frac{\frac{2}{\pi} - \frac{\sin x}{x}}{\underbrace{\frac{\pi}{2} - x}_{>0}}.$$

برای این‌که ثابت کنیم $0 \le \frac{2}{\pi} - \frac{\sin x}{x}$، کافی است نشان دهیم $c\cos c - \sin c \le 0$.

برای این منظور ثابت می‌کنیم تابع $h(x) = x\cos x - \sin x$ بر بازه $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ نزولی است.

$$h'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x \xRightarrow{x\in[\circ,\frac{\pi}{۲}]} h'(x) \leq \circ.$$

بنابراین h روی $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ نزولی است. چون $c \in (x, \frac{\pi}{۲})$ و $x > \circ$، پس $c > \circ$. در نتیجه

$$h(c) \leq h(\circ) = \circ \Rightarrow c\cos c - \sin c \leq \circ \Rightarrow \frac{۲}{\pi} - \frac{\sin x}{x} \leq \circ.$$

ب) به‌ازای $x \in [\circ, \frac{\pi}{۲}]$ تعریف می‌کنیم $f(x) = \tan x - x - \frac{x^۳}{۳}$. در این صورت

به‌ازای هر $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ داریم:

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$$
$$= \underbrace{(\tan x - x)}_{(*) \quad \geq 0}\underbrace{(\tan x + x)}_{\geq 0} \geq 0.$$

پس f بر بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ صعودی است. بنابراین برای هر $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ داریم:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \;\Rightarrow\; \tan x - x - \frac{x^3}{3} \geq 0.$$

دلیل $(*)$: روی بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ تعریف می‌کنیم $g(x) = \tan x - x$. در این صورت به‌ازای هر $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ داریم $g'(x) = \tan^2 x \geq 0$. پس g بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ صعودی است. بنابراین به‌ازای هر $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ داریم $g(x) \geq g(0) = 0$، که نتیجه می‌دهد $\tan x - x \geq 0$.

تعریف

فرض کنید $f(x)$ تابعی با دامنه D_f باشد. نقطه‌ی $x_0 \in D_f$ را

- یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی یا موضعی می‌گوییم، هرگاه بازه بازی چون I حاوی x_0 موجود باشد که به‌ازای هر $x \in I \cap D_f$ داشته باشیم $f(x) \leq f(x_0)$.
- یک نقطه‌ی مینیمم نسبی یا موضعی می‌گوییم، هرگاه بازه بازی چون I حاوی x_0 موجود باشد که به‌ازای هر $x \in I \cap D_f$ داشته باشیم $f(x_0) \leq f(x)$.
- یک نقطه‌ی ماکسیمم مطلق گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x \in D_f$، $f(x) \leq f(x_0)$.
- یک نقطه‌ی مینیمم مطلق گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x \in D_f$، $f(x_0) \leq f(x)$.

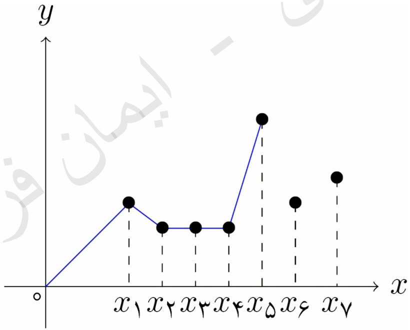
تعریف

نقطه‌ی $x_0 \in D_f$ را

- یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی یا موضعی می‌گوییم، هرگاه ماکسیمم یا مینیمم نسبی باشد.
- یک نقطه‌ی اکسترمم مطلق گوییم، هرگاه ماکسیمم یا مینیمم مطلق باشد.
- یک نقطه مرزی گوییم، هرگاه هیچ همسایگی حول x_0 موجود نباشد که کاملا در دامنه $f(x)$ قرار بگیرد.
- یک نقطه‌ی تکین یا منفرد می‌گوییم، هرگاه x_0 نقطه‌ی درونی D_f باشد و $f'(x_0)$ موجود نباشد.
- یک نقطه‌ی بحرانی گوییم، هرگاه x_0 نقطه‌ی درونی D_f باشد و $f'(x_0) = 0$.

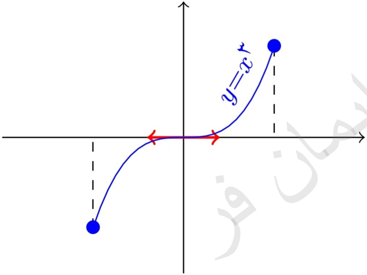
$$\text{ماکسیمم مطلق} = \{x_5\} \qquad \text{مینیمم نسبی} = \{0, x_6, x_7\} \cup [x_2, x_4]$$

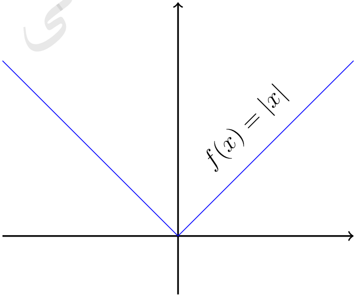
$$\text{مینیمم مطلق} = \{0\} \qquad \text{ماکسیمم نسبی} = \{x_1, x_5, x_6, x_7\} \cup (x_2, x_4)$$



قضیه

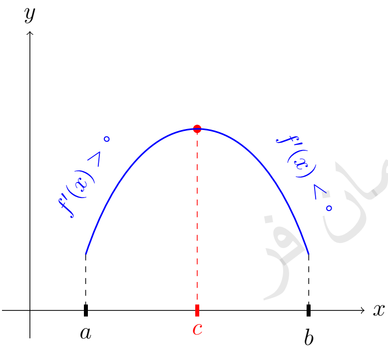
فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و $c \in I$. اگر c یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c) = ۰$.





$f'(۰) = ۰$ اما صفر یک نقطه اکسترمم نسبی نمی‌باشد.

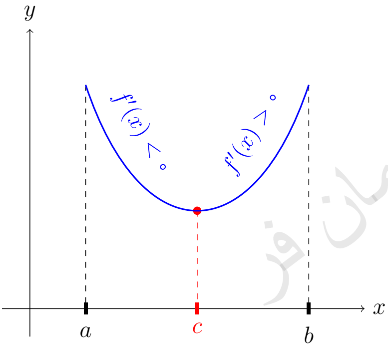
$x = ۰$ نقطه مینیمم مطلق است اما $f'(۰)$ موجود نیست.



قضیه (آزمون مشتق اول)

فرض کنید دامنه‌ی تابع $f(x)$ شامل بازه‌ی باز (a,b) باشد و $c \in (a,b)$. همچنین، فرض کنید $f(x)$ در $x=c$ پیوسته باشد و $f'(x)$ همه جا در بازه‌ی (a,b) به جز احتمالا در $x=c$ موجود باشد.

(۱) هرگاه $f'(x)$ به‌ازای هر $x \in (a,c)$ مثبت، و به‌ازای هر $x \in (c,b)$ منفی باشد، آن‌گاه $f(x)$ در $x=c$ یک ماکسیمم نسبی دارد. همچنین، $x=c$ یک نقطه‌ی ماکسیمم مطلق برای $f(x)$ روی (a,b) است.



آزمون مشتق اول

(۲) هرگاه $f'(x)$ به‌ازای هر $x \in (a, c)$ منفی، و به‌ازای هر $x \in (c, b)$ مثبت باشد، آن‌گاه $f(x)$ در $x = c$ یک **مینیمم نسبی** دارد. همچنین، $x = c$ یک نقطه‌ی مینیمم مطلق برای $f(x)$ روی (a, b) است.

قضیه (آزمون مشتق اول برای نقاط ابتدا و انتهای بازه)

الف) فرض کنید تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است.

(۱) اگر به‌ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) > 0$، آن‌گاه $x = a$ یک نقطه‌ی مینیمم مطلق برای $f(x)$ روی $[a,b)$ است.

(۲) اگر به‌ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) < 0$، آن‌گاه $x = a$ یک نقطه‌ی ماکسیمم مطلق برای $f(x)$ روی $[a,b)$ است.

ب) فرض کنید تابع $f(x)$ بر $(a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است.

(۱) اگر به‌ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) > 0$، آن‌گاه $x = b$ یک نقطه‌ی ماکسیمم مطلق برای $f(x)$ روی $(a,b]$ است.

(۲) اگر به‌ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) < 0$، آن‌گاه $x = b$ یک نقطه‌ی مینیمم مطلق برای $f(x)$ روی $(a,b]$ است.

تذکر

تابع f با دامنه‌ی D_f را در نظر بگیرید. اکسترمم‌ها فقط در نقاط زیر روی می‌دهند:

(۱) در آن نقاط درونی x که $f'(x) = 0$. (نقاط بحرانی)

(۲) در آن نقاط درونی که تابع مشتق ندارد. (نقاط تکین)

(۳) در نقاط مرزی (x_0 را یک نقطه‌ی مرزی گوییم هرگاه نتوان هیچ همسایگی حول x_0 یافت که کاملا در D_f باشد.)

مثال

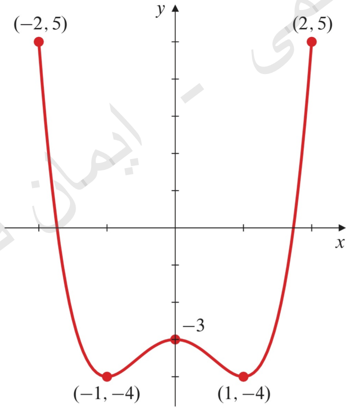
اکسترمم‌های تابع $f(x) = x^{۴} - ۲x^{۲} - ۳$ را بر بازه‌ی $[-۲, ۲]$ بیابید.

پاسخ:

$$f'(x) = ۴x^{۳} - ۴x = ۴x(x^{۲} - ۱) = ۰ \implies \begin{cases} x = -۱, ۰, ۱ & \text{نقاط بحرانی} \\ x = -۲, ۲ & \text{نقاط مرزی} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-۲) = ۵ \to \text{ماکسیمم مطلق} \\ f(-۱) = -۴ \to \text{مینیمم مطلق} \\ f(۰) = -۳ \to \text{ماکسیمم موضعی} \\ f(۱) = -۴ \to \text{مینیمم مطلق} \\ f(۲) = ۵ \to \text{ماکسیمم مطلق} \end{cases}$$

	-۲		-۱		۰		۱		۲
f'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max



قضیه

فرض کنید تابع $f(x)$ بر (a,b) پیوسته باشد، $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ و $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = M$.

(۱) اگر به‌ازای $x_\circ \in (a,b)$ داشته باشیم $f(x_\circ) > L$ و $f(x_\circ) > M$، آن‌گاه f بر (a,b) ماکسیمم مطلق دارد.

(۲) اگر به‌ازای $x_\circ \in (a,b)$ داشته باشیم $f(x_\circ) < L$ و $f(x_\circ) < M$، آن‌گاه f بر (a,b) مینیمم مطلق دارد.

تذکر

در قضیه بالا، a می‌تواند $-\infty$ و b می‌تواند $+\infty$ باشند. همچنین، یکی از دو حد L و M، یا هر دوی آن‌ها می‌توانند $+\infty$ یا $-\infty$ باشند.

مثال

نشان دهید تابع $f(x) = x + \frac{۴}{x}$ بر بازه‌ی $(۰, +\infty)$ مینیمم مطلق دارد و مقدار آن را بیابید.

پاسخ: f بر $(۰, +\infty)$ پیوسته است و

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \quad f(۱) = ۵ < +\infty.$$

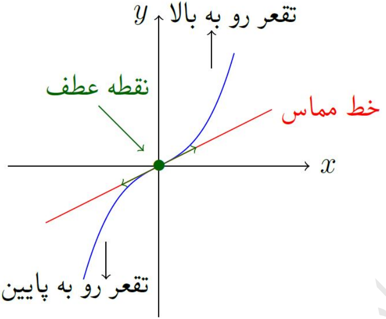
طبق قضیه‌ی قبل، f در نقطه‌ای از $(۰, +\infty)$ مینیمم مطلق دارد. چون f در $(۰, +\infty)$ مشتق‌پذیر است، پس مینیمم مطلق در نقطه‌ای بحرانی رخ می‌دهد. داریم:

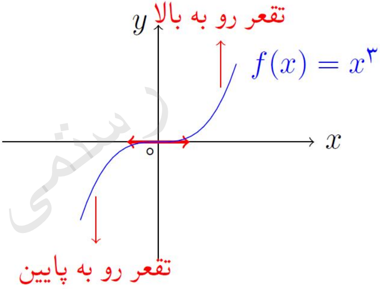
$$f'(x) = ۱ - \frac{۴}{x^۲} = \frac{x^۲ - ۴}{x^۲} = \frac{(x-۲)(x+۲)}{x^۲} = ۰ \implies x = ۲.$$

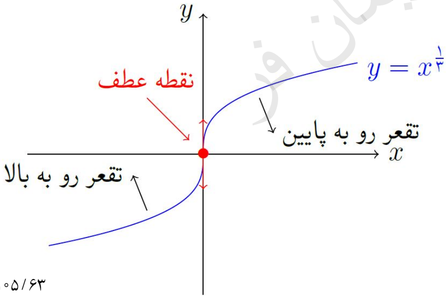
در نتیجه مقدار مینیمم مطلق برابر $f(۲) = ۴$ است.

تعریف

- می‌گوییم تابع $f(x)$ بر بازه باز I به طرف بالا مقعر است (جهت تقعر رو به بالا دارد)، هرگاه $f'(x)$ بر I موجود و اکیدا صعودی باشد. به همین ترتیب، می‌گوییم تابع $f(x)$ بر بازه باز I به طرف پایین مقعر است (جهت تقعر رو به پایین دارد)، هرگاه $f'(x)$ بر I موجود و اکیدا نزولی باشد.
- نقطه‌ی $x = x_\circ$ را یک نقطه‌ی عطف برای تابع $y = f(x)$ می‌گوییم، هرگاه نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = x_\circ$ خط مماس داشته باشد و جهت تقعر تابع $f(x)$ در دو طرف $x = x_\circ$ متفاوت باشد.







تذکر

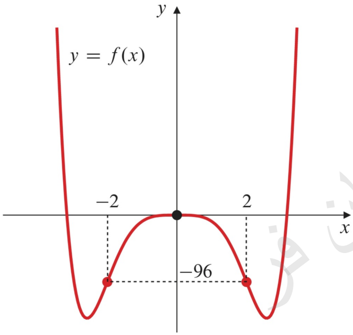
همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینیم $x = 0$ یک نقطه‌ی عطف است، اما تابع $y = x^{\frac{1}{3}}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

قضیه

- اگر بر بازه‌ی باز I داشته باشیم $f''(x) > \circ$، آن‌گاه $f(x)$ بر I به طرف بالا مقعر است.
- اگر بر بازه‌ی باز I داشته باشیم $f''(x) < \circ$، آن‌گاه $f(x)$ بر I به طرف پایین مقعر است.
- اگر $x_\circ \in I$ یک نقطه عطف برای $f(x)$ باشد و $f''(x_\circ)$ موجود باشد، آن‌گاه $f''(x_\circ) = \circ$.

مثال

بازه‌های متناظر با تقعر و نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = x^{۶} - ۱۰x^{۴}$ را بیابید.



پاسخ:

$$g(x) = x^{۶} - ۱۰x^{۴} \Rightarrow g'(x) = ۶x^{۵} - ۴۰x^{۳}$$
$$\Rightarrow g''(x) = ۳۰x^{۴} - ۱۲۰x^{۲}$$
$$= ۳۰x^{۲}(x-۲)(x+۲)$$
$$g''(x) = ۰ \Rightarrow x = -۲, ۰, ۲$$

		-۲		۰		۲	
g''	$+$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$
g	$\smile$	عطف	$\frown$		$\frown$	عطف	$\smile$

قضیه (آزمون مشتق دوم)

- اگر $f'(c) = ۰$ و $f''(c) < ۰$، آن‌گاه $x = c$ یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع $f(x)$ است.
- اگر $f'(c) = ۰$ و $f''(c) > ۰$، آن‌گاه $x = c$ یک نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است.
- اگر $f'(c) = f''(c) = ۰$، آن‌گاه نتیجه‌ی دقیقی نمی‌توان گرفت.

مثال

نقطه‌ی $x = -۳$ برای تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۶x^۲ - ۱۸x + ۱۵$ چه نوع نقطه‌ای است؟

پاسخ:

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۱۲x - ۱۸ \Rightarrow f''(x) = ۱۲x + ۱۲$$

$$f'(-۳) = ۰, \quad f''(-۳) = -۲۴ < ۰.$$

بنابراین f در $x = -۳$ ماکسیمم نسبی دارد.

مثال

آهنگ تغییرات حجم یک کره نسبت به شعاع را وقتی که شعاع ۲ متر است، بیابید.

پاسخ: اگر شعاع کره را با r و حجم آن را با V نمایش دهیم، آن‌گاه

$$V = V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}.$$

هدف محاسبه‌ی مقدار $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ در $r = ۲$ است. داریم:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = ۴\pi r^{۲} \implies \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=۲} = ۱۶\pi \frac{m^{۳}}{m}.$$

به عبارت دیگر وقتی شعاع برابر ۲ متر است، هر تغییر کوچکی به اندازه‌ی Δr متر که در مقدار شعاع روی می‌دهد، تغییری در حدود $۱۶\pi\Delta r$ متر مکعب در حجم کره پدید می‌آورد، یعنی $\Delta V \approx ۱۶\pi\Delta r$.

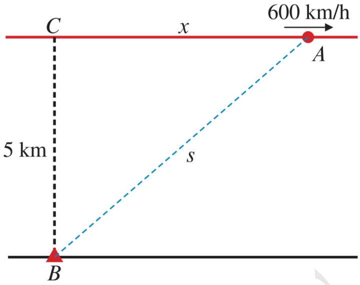
مثال

فرض کنید دمای هوا در محل و روز معینی و در ساعت t بعدازظهرعبارت باشد از T درجه سانتی‌گراد که در آن $T = T(t) = \frac{۱}{۳}t^۳ - ۳t^۲ + ۸t + ۱۰$ و $۰ \leq t \leq ۵$. دمای هوا در ساعت ۱ بعدازظهر با چه آهنگی کم یا زیاد می‌شود؟ در ساعت ۳ بعدازظهر چطور؟ در چه ساعاتی دما ایستا است؟

پاسخ: آهنگ تغییر دما عبارت است از:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = t^۲ - ۶t + ۸ = (t - ۲)(t - ۴).$$

آهنگ تغییر دما در ساعت ۱ بعدازظهر به‌ازای $t = ۱$ به‌دست می‌آید. داریم $\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right|_{t=۱} = ۳$ که نشان می‌دهد دمای هوا در ساعت ۱ بعدازظهر با آهنگ $۳\frac{°C}{h}$ افزایش می‌یابد. همچنین، $\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right|_{t=۳} = -۱$ که نشان می‌دهد دمای هوا در ساعت ۳ بعدازظهر با آهنگ $۱\frac{°C}{h}$ کاهش می‌یابد. دما وقتی ایستاست که $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = ۰$، یعنی در ساعت‌های ۲ و ۴ بعدازظهر.



مثال

هواپیمایی با سرعت $۶۰۰\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ به‌طور افقی در حال پرواز است. یک دقیقه بعد از عبور هواپیما از نقطه‌ای که به ارتفاع ۵ کیلومتری بالای برج مراقبت قرار گرفته است، فاصله‌ی بین هواپیما و این برج با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

پاسخ: فرض کنیم C نقطه‌ای از مسیر هواپیما باشد که به فاصله‌ی ۵ کیلومتری بالای برج مراقبت B قرار گرفته است و A مکان هواپیما t دقیقه بعد از عبور از نقطه‌ی C باشد. فاصله‌ی نقاط A و C را با x و فاصله‌ی نقاط A و B را با s نمایش می‌دهیم. توجه می‌کنیم که x و s وابسته به متغیر t یا زمان می‌باشند، یعنی $x = x(t)$ و $s = s(t)$.

خواسته‌ی مسئله محاسبه مقدار $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=۱}$ است. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه در شکل بالا

می‌توان نوشت $\left(x(t)\right)^۲+۵^۲ = \left(s(t)\right)^۲$، یا به‌طور خلاصه‌تر داریم:

$$s^۲ = x^۲ + ۵^۲ \xrightarrow{t \text{ مشتق‌گیری برحسب }} ۲s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = ۲x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

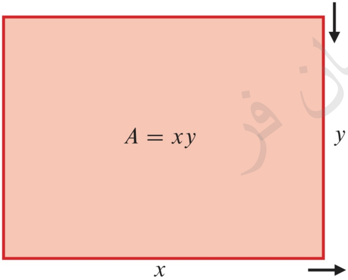
از آنجا که $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=۱} = ۶۰۰$، در $t = ۱\,\mathrm{min}$ داریم $x = ۱۰\,\mathrm{km}$ یا به‌طور معادل $x(۱) = ۱۰$. از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود $s(۱) = ۵\sqrt{۵}$. با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده، داریم:

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=۱} = \frac{x(۱)}{s(۱)}\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=۱} = \frac{۱۰}{۵\sqrt{۵}} \times ۶۰۰ = \frac{۱۲۰۰}{\sqrt{۵}}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = ۲۴۰\sqrt{۵}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

بنابراین در $t = ۱\,\mathrm{min}$ فاصله‌ی بین هواپیما و برج مراقبت با سرعت $۲۴۰\sqrt{۵}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ افزایش می‌یابد.

مثال

در یک مستطیل، یکی از اضلاع ۱۰cm طول دارد و طول آن با آهنگ $۲\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ افزایش می‌یابد و طول ضلع دیگر که ۸cm است، با آهنگ $۳\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ کاهش می‌یابد. مساحت این مستطیل با چه سرعتی تغییر می‌کند.



پاسخ: فرض کنیم طول‌های اضلاع مستطیل در لحظه‌ی t برابر با $x = x(t)$ و $y = y(t)$ باشند. همچنین، فرض کنیم x افزایشی، y کاهشی، $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ۲$ و $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -۳$. اگر مساحت را با A نشان دهیم، آنگاه داریم $A(t) = x(t)y(t)$. می‌خواهیم مقدار $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$

را در $x = ۱۰$ و $y = ۸$ محاسبه کنیم. برای این منظور، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A = xy \xRightarrow{\text{مشتق‌گیری برحسب } t} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}x$$

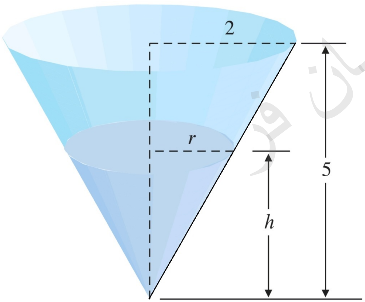
$$\left(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ۲,\ x = ۱۰,\ \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -۳,\ y = ۸\right) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = (۲)(۸) + (-۳)(۱۰)$$

$$= -۱۴\frac{\mathrm{cm}^{۲}}{\mathrm{s}}.$$

درنتیجه مساحت مستطیل با سرعت $-۱۴\frac{\mathrm{cm}^{۲}}{\mathrm{s}}$ تغییر می‌کند.

مثال

منبع آبی داریم که به شکل یک مخروط وارونه است. ارتفاع این منبع $5\mathrm{m}$ و شعاع قاعده‌ی آن $2\mathrm{m}$ است. وقتی عمق آب موجود در منبع ۴ متر است، آب با آهنگ $\frac{1}{12}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$ از منبع خارج می‌شود. در این لحظه، سطح آب با چه سرعتی پایین می‌آید؟



پاسخ: عمق و شعاع سطح آب را در لحظه t به‌ترتیب با $r = r(t)$ و $h = h(t)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت، حجم آب در لحظه‌ی t برابر است با $V(t) = \frac{1}{3}\pi\big(r(t)\big)^2 h(t)$.
باید مقدار $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ در لحظه‌ای که عمق آب موجود در منبع ۴ متر است را محاسبه کنیم. برای این

منظور، رابطه‌ی بین r و h را به‌دست می‌آوریم. با توجه به تشابه مثلث‌ها در شکل، می‌نویسیم:

$$\frac{r}{۲} = \frac{h}{۵} \Rightarrow r = \frac{۲}{۵}h \Rightarrow V(t) = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۲}{۵}h(t)\right)^۲ h(t) = \frac{۴}{۷۵}\pi\left(h(t)\right)^۳.$$

به‌طور خلاصه‌تر می‌توان نوشت $V = \frac{۴}{۷۵}\pi h^۳$. با مشتق‌گیری برحسب t از طرفین، داریم:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{۴\pi}{۲۵}h^۲\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{h=۴,\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{۱}{۱۲}} -\frac{۱}{۱۲} = \left(\frac{۴\pi}{۲۵}\times ۱۶\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{۱}{۱۲}\right)\frac{۲۵}{۴\pi\times ۱۶}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}.$$

پس سطح آب با سرعت $\frac{۲۵}{۷۶۸\pi}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$ پایین می‌آید.

مثال

مجموع دو عدد نامنفی برابر ۶۰ است. اگر حاصل‌ضرب یکی از آن‌ها در مجذور دیگری بیشترین مقدار ممکن باشد، این دو عدد کدام‌اند؟

پاسخ: فرض کنیم دو عدد مسئله x و $۶۰ - x$ باشند. واضح است که $۰ \leq x \leq ۶۰$. می‌خواهیم حاصل‌ضرب $x^۲(۶۰ - x)$ بیشترین مقدار ممکن شود. برای این منظور، تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = x^۲(۶۰ - x) = ۶۰x^۲ - x^۳, \qquad x \in [۰, ۶۰]$$

باید مقدار ماکسیمم مطلق $f(x)$ را بر بازه‌ی $[۰, ۶۰]$ بیابیم. ماکسیمم مطلق در یکی از نقاط تکین، بحرانی یا مرزی رخ می‌دهد. تابع f بر بازه‌ی $(۰, ۶۰)$ مشتق‌پذیر است، پس

نقطه‌ی تکین ندارد. برای تعیین نقاط بحرانی، به‌صورت زیر داریم:

$$f'(x) = ۰ \implies ۱۲۰x - ۳x^۲ = ۰ \implies x(۴۰ - x) = ۰ \implies x = ۴۰.$$

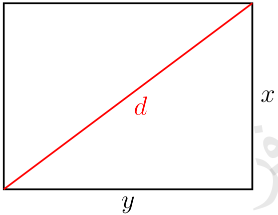
حال، مقادیر f را در نقاط مرزی و بحرانی مقایسه می‌کنیم.

$$f(۰) = ۰, \quad f(۶۰) = ۰, \quad f(۴۰) > ۰.$$

بنابراین $f(۴۰)$ ماکسیمم مطلق است. در نتیجه جواب مسئله اعداد ۲۰ و ۴۰ می‌باشند.

مثال

مجموعه‌ی همه مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها ۱۶ است را درنظر بگیرید. مینیمم مجموعه‌ی طول قطرهای این مستطیل‌ها را به‌دست آورید.



پاسخ: طول‌های اضلاع و قطر این مستطیل‌ها را به‌ترتیب با x، y و d نمایش می‌دهیم. با توجه به اینکه محیط همه مستطیل‌ها ۱۶ است، باید داشته باشیم $x+y=۸$ یا $y=۸-x$. پس x فقط می‌تواند مقادیری در بازه‌ی $(۰,۸)$ اختیار کند. با توجه به شکل، داریم:

$$d=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(۸-x)^۲}=\sqrt{۲x^۲-۱۶x+۶۴}.$$

بنابراین باید مینیمم مقادیر $\sqrt{2x^2 - 16x + 64}$ را به‌ازای $8 > x > 0$ به‌دست آوریم. به منظور ساده‌تر شدن محاسبات، مینیمم مقادیر زیر رادیکال را محاسبه می‌کنیم. به‌ازای $x \in (0, 8)$ تعریف می‌کنیم $f(x) = 2x^2 - 16x + 64$. داریم:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 64, \quad \lim_{x \to 8^-} f(x) = 64, \quad f(1) = 50 < 64.$$

بنابر قضیه‌ای که قبلا دیدیم، f بر $(0, 8)$ دارای مینیمم مطلق است. چون f نقطه‌ی تکین ندارد، پس مینیمم مطلق در نقطه‌ای بحرانی رخ می‌دهد.

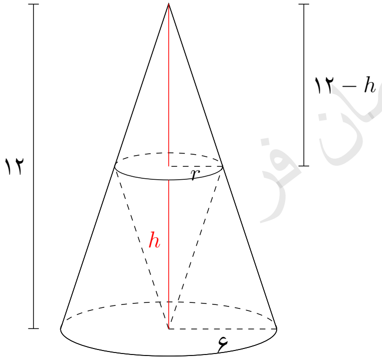
$$f'(x) = 4x - 16 = 0 \implies x = 4 \implies y = 4.$$

بنابراین مستطیلی که در آن $x = y = 4$ می‌باشد، دارای کمترین طول قطر با مقدار $d = 4\sqrt{2}$ است.

مثال

ارتفاع مخروط مستدیر قائمی ۱۲ و شعاعش ۶ می‌باشد. مخروط دیگری را در این مخروط چنان محاط می‌کنیم که راس آن در مرکز قاعده‌ی مخروط اول قرار گیرد و قاعده‌اش موازی با قاعده‌ی آن باشد. مطلوب است ابعاد چنین مخروط محاطی که بیشترین حجم را دارد.

پاسخ: شعاع قاعده و ارتفاع مخروط داخلی را به‌ترتیب با r و h نشان می‌دهیم. بنابراین، حجم این مخروط عبارت است از $V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$. باید بیشترین مقدار V را با در نظر گرفتن شرایط مسئله، محاسبه کنیم. ابتدا رابطه بین r و h را با استفاده از تشابه دو مثلث موجود در شکل به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{r}{۶} = \frac{۱۲-h}{۱۲} \implies r = \frac{۱۲-h}{۲}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۱۲-h}{۲}\right)^۲ h = \frac{\pi}{۱۲}(h^۳ - ۲۴h^۲ + ۱۴۴h)$$

می‌دانیم ارتفاع مخروط بیرونی برابر ۱۲ است، از این‌رو داریم $۰ < h < ۱۲$. خواسته‌ی مسئله یافتن ماکسیمم مطلق تابع $V(h) = \frac{\pi}{۱۲}(h^۳ - ۲۴h^۲ + ۱۴۴h)$ بر بازه $(۰, ۱۲)$ است. داریم:

$$\lim_{h\to ۰^+} V(h) = ۰, \quad \lim_{h\to ۱۲^-} V(h) = ۰, \quad V(۱) > ۰.$$

بنابراین تابع V بر بازه‌ی $(۰, ۱۲)$ ماکسیمم مطلق دارد. از آنجا که V بر این بازه مشتق‌پذیر است، پس ماکسیمم مطلق در نقطه‌ای بحرانی حاصل می‌شود.

$$V'(h) = ۰ \implies \frac{\pi}{۱۲}(۳h^۲ - ۴۸h + ۱۴۴) = ۰ \implies h^۲ - ۱۶h + ۴۸ = ۰$$

$$\implies (h-۴)(h-۱۲) = ۰ \implies \begin{cases} h = ۱۲ & \text{غ ق ق} \\ h = ۴ \implies r = ۴ \end{cases}$$

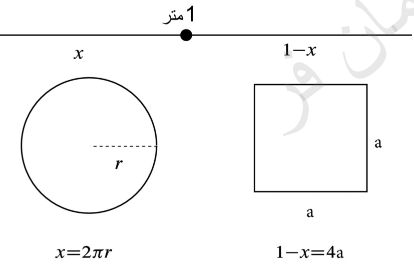
مخروطی که شعاع قاعده و ارتفاع آن برابر ۴ است، بیشترین حجم را دارد.

مثال

یک قطعه سیم به طول ۱ متر را دو قطعه می‌کنیم، با یکی از قطعات یک دایره و با قطعه دیگر یک مربع می‌سازیم. حالتی که با کل قطعه سیم فقط یک دایره یا فقط یک مربع تشکیل دهیم، را نیز در نظر می‌گیریم.

الف) در چه حالتی مجموع مساحت‌های دایره و مربع کمترین مقدار ممکن می‌شود؟

ب) در چه حالتی مجموع مساحت‌های دایره و مربع بیشترین مقدار ممکن می‌شود؟



پاسخ: شعاع دایره را با r و طول ضلع مربع را با a نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم محیط دایره برابر با x باشد. در این صورت، محیط مربع برابر با $1 - x$ است. همچنین، داریم:

$$۴a = ۱ - x \Rightarrow a = \frac{۱ - x}{۴}$$

$$۲\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{۲\pi}$$

اگر مجموع مساحت‌های دایره و مربع را با S نشان دهیم، آنگاه داریم:

$$S = \pi r^۲ + a^۲ = \frac{x^۲}{۴\pi} + \frac{(۱-x)^۲}{۱۶}.$$

بنابراین S را می‌توان به صورت تابعی از x نوشت، یعنی $S = S(x)$ و با توجه به فرض سوال داریم $۰ \leq x \leq ۱$. می‌خواهیم ماکسیمم و مینیمم مطلق $S(x)$ را بر بازه $[۰, ۱]$ بیابیم. بنابراین باید نقاط مرزی، تکین و بحرانی را بررسی کنیم. روشن است که $S(x)$ نقطه‌ی تکین ندارد. برای تعیین نقاط بحرانی، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S'(x) = ۰ \implies \frac{x}{۲\pi} - \frac{۱-x}{۸} = ۰ \implies \frac{۴x + \pi x - \pi}{۸\pi} = ۰$$
$$\implies x = \frac{\pi}{۴+\pi}.$$

می‌دانیم $S(x)$ مقادیر اکسترمم مطلق خود را درنقاط مرزی یا نقطه‌ی بحرانی $x = \frac{\pi}{۴+\pi}$ اخذ می‌کند. برای اینکه درگیر محاسبه‌ی $S\left(\frac{\pi}{۴+\pi}\right)$ نشویم، از آزمون مشتق دوم استفاده

می‌کنیم. داریم:

$$S''(x) = \frac{۱}{۲\pi} + \frac{۱}{۸} \implies S''\left(\frac{\pi}{۴+\pi}\right) > ۰.$$

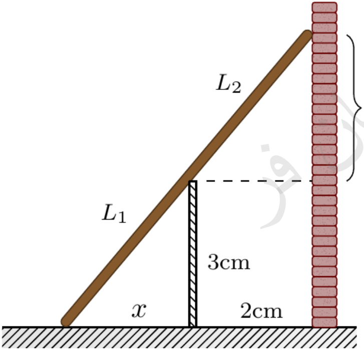
بنابر آزمون مشتق دوم، $S\left(\frac{\pi}{۴+\pi}\right)$ مینیمم نسبی است. توجه می‌کنیم که تابع $S(x)$ در نقاط ابتدا و انتهای بازه $[۰, ۱]$ پیوسته است. از آنجایی‌که $S'' > ۰$، تقعر تابع S همواره رو به بالا می‌باشد، پس $S\left(\frac{\pi}{۴+\pi}\right)$ مینیمم مطلق است. در نقاط مرزی داریم:

$$S(۰) = \frac{۱}{۱۶}, \qquad S(۱) = \frac{۱}{۴\pi}.$$

در نتیجه $S(۰) > S(۱)$، یعنی $S(۱)$ ماکسیمم مطلق است. برای قسمت (الف) باید محیط دایره برابر $x = \frac{\pi}{۴+\pi}$ و محیط مربع برابر $۱ - x = \frac{۴}{۴+\pi}$ انتخاب شود. برای قسمت (ب)، توجه می‌کنیم در حالتی که سیم بریده نشود و با آن یک دایره تشکیل دهیم، بیشترین مساحت ممکن را خواهیم داشت.

مثال

طول کوچکترین نردبانی را بیابید که بتوان از روی یک دیوار قائم به ارتفاع ۳ متر پیش رفته و روی حصاری که در ۲ متری پای دیوار قرار گرفته است، تکیه داده شود.



پاسخ: فرض کنیم L طول نردبان باشد. مطابق شکل داریم:

$$L = L_۱ + L_۲ = \sqrt{x^۲ + ۹} + \sqrt{y^۲ + ۴}$$

اگر بتوان رابطه‌ای بین x و y پیدا کرد، آن‌گاه طول نردبان به‌صورت تابعی از x نوشته می‌شود، یعنی $L = L(x)$. با توجه به تشابه مثلث‌هایی که اندازه‌ی یکی از اضلاع آن‌ها به‌وسیله‌ی x و

y مشخص شده است، می‌توان نوشت:

$$\frac{y}{۳} = \frac{۲}{x} \implies y = \frac{۶}{x} \implies L(x) = \sqrt{x^۲ + ۹} + \sqrt{\frac{۳۶}{x^۲} + ۴}.$$

مطابق شکل، x می‌تواند در بازه‌ی $(۰, +\infty)$ تغییر کند، پس این بازه دامنه تابع $L(x)$ است. طول کوچکترین نردبان خواسته شده در مسئله، همان مینیمم مطلق تابع $L(x)$ می‌باشد. داریم:

$$\lim_{x \to ۰^+} L(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} L(x) = +\infty, \quad L(۱۴۰۲) < \infty.$$

طبق قضیه‌ای، تابع $L(x)$ در بازه $(۰, +\infty)$ مینیمم مطلق خود را اخذ می‌کند. در این بازه

تابع $L(x)$ نقطه تکین ندارد، از این‌رو مینیمم مطلق در نقطه‌ای بحرانی رخ می‌دهد.

$$L'(x) = ۰ \implies \frac{x}{\sqrt{x^۲+۹}} + \frac{\frac{-۷۲}{x^۳}}{۲\sqrt{۴+\frac{۳۶}{x^۲}}} = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۹}} - \frac{۱۸}{x^۲\sqrt{x^۲+۹}}$$

$$= \frac{x^۳-۱۸}{x^۲\sqrt{x^۲+۹}} = ۰.$$

بنابراین $x = ۱۸^{\frac{۱}{۳}}$ و درنتیجه طول کوتاه‌ترین نردبان برابر است با

$$L(۱۸^{\frac{۱}{۳}}) = \sqrt{۱۸^{\frac{۲}{۳}}+۹} + \sqrt{۴+\frac{۳۶}{۱۸^{\frac{۲}{۳}}}}.$$

مثال

از یک صفحه‌ی فلزی به مساحت 150π یک قوطی استوانه‌ای با حداکثر حجم ممکن می‌سازیم. مقدار این حجم چقدر خواهد بود؟

پاسخ: شعاع قاعده، ارتفاع و حجم قوطی استوانه‌ای را به‌ترتیب با r، h و V نمایش می‌دهیم. می‌دانیم $V = \pi r^2 h$. در ادامه با پیدا کردن رابطه‌ای بین r و h، V را به‌صورت تابعی بر حسب r می‌نویسیم و ماکسیمم مطلق آن‌را به‌دست می‌آوریم. طبق فرض مسئله، مساحت کل قوطی استوانه‌ای برابر 150π است. بنابراین

$$2\pi rh + 2\pi r^2 = 150\pi \Rightarrow rh + r^2 = 75$$

$$rh = 75 - r^2 \Rightarrow h = \frac{75 - r^2}{r}.$$

از آنجا که r و h مثبت می‌باشند، نتیجه می‌گیریم $75 - r^2 > 0$. پس $0 < r < 5\sqrt{3}$.

همچنین، داریم:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{75 - r^2}{r} = 75\pi r - \pi r^3, \qquad r \in (0, 5\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \lim_{r \to 0^+} V(r) = 0, \quad \lim_{r \to (5\sqrt{3})^-} V(r) = 0, \quad V(1) > 0.$$

بنابراین $V(r)$ در بازه‌ی $(0, 5\sqrt{3})$ ماکسیمم مطلق دارد. چون در این بازه مشتق‌پذیر است، پس در نقطه‌ای که مقدار $V(r)$ ماکسیمم مطلق است باید داشته باشیم $V'(r) = 0$.

$$V'(r) = 75\pi - 3\pi r^2 = 0 \implies 75 - 3r^2 = 0 \implies r^2 = 25$$

$$\implies \begin{cases} r = -5 & \text{غ ق ق} \\ r = +5 & \Rightarrow h = \dfrac{75 - r^2}{r} = \dfrac{75 - 25}{5} = 10 \Rightarrow \boxed{V = 250\pi}. \end{cases}$$

قضیه (قاعده‌ی اول هوپیتال)

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشند، $c \in (a,b)$ و به ازای هر $x \in (a,b)$ که $x \neq c$ داشته باشیم $g'(x) \neq 0$. اگر

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

(L می‌تواند متناهی، $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.) آن‌گاه

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

تذکر

قضیه‌ی فوق برای حد راست، حد چپ، حد در بینهایت نیز قابل استفاده است. یعنی c می‌تواند a^+، b^-، یا $\pm\infty$ باشد.

قضیه (قاعده‌ی دوم هوپیتال)

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشند، $c \in (a,b)$ و به ازای هر $x \in (a,b)$ که $x \neq c$ داشته باشیم $g'(x) \neq 0$. اگر

$$\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

(L می‌تواند متناهی، $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.) آن‌گاه

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

تذکر

قضیه‌ی فوق برای حد راست، حد چپ، حد در بینهایت نیز قابل استفاده است. یعنی c می‌تواند a^+، b^-، یا $\pm\infty$ باشد.

مثال

حد زیر را محاسبه کنید؛

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۰} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} &\overset{\text{Hop}}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{(x - \tan x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \sec^۲ x}{۱ - \cos x} \\ &= \lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \frac{۱}{\cos^۲ x}}{۱ - \cos x} \\ &= -\lim_{x\to ۰} \frac{۱ + \cos x}{\cos^۲ x} \\ &= -۲.\end{aligned}$$

مثال

فرض کنید تابع f بر بازه‌ی I دو بار مشتق‌پذیر بوده و $a \in I$. نشان دهید:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h) - ۲f(a) + f(a-h)}{h^۲} = f''(a).$$

پاسخ:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h) - ۲f(a) + f(a-h)}{h^۲} \overset{\text{Hop}}{=} \lim_{h\to ۰} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{۲h}$$

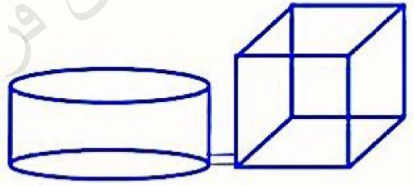
$$= \frac{۱}{۲} \lim_{h\to ۰} \left[\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} - \frac{f'(a-h) - f'(a)}{h} \right]$$

$$= \frac{۱}{۲} \lim_{h\to ۰} \left[\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} + \frac{f'\big(a+(-h)\big) - f'(a)}{-h} \right]$$

$$= \frac{۱}{۲} \left[f''(a) + f''(a) \right] = f''(a).$$

مثال

دو ظرف آب (با دربهای باز)، یکی استوانه‌ای و دیگری مکعبی، مطابق شکل زیر به یکدیگر متصل شده‌اند و بین آن‌ها شیر آبی وجود دارد. فرض کنید طول ضلع مکعب ۱۰۰ سانتی‌متر، شعاع استوانه ۵۰ سانتی‌متر و ارتفاع استوانه نیز ۶۰ سانتی‌متر باشد. در ابتدا مکعب پر از آب و استوانه تخلیه است. شیر آب را باز می‌کنیم و آب وارد استوانه می‌شود. در لحظه‌ای که ارتفاع سطح آب در مکعب با سرعت ۲ سانتی‌متر بر دقیقه پایین می‌آید، سرعت افزایش ارتفاع سطح آب را در استوانه بیابید.



پاسخ:

$$\left.\begin{aligned} \text{حجم آب داخل مکعب در لحظه‌ی } t &:= V_۱(t) \\ \text{حجم آب داخل استوانه در لحظه‌ی } t &:= V_۲(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V_۱}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V_۲}{\mathrm{d}t} \qquad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{ارتفاع سطح آب داخل مکعب در لحظه‌ی } t &:= h_۱(t) \\ \text{ارتفاع سطح آب داخل استوانه در لحظه‌ی } t &:= h_۲(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} V_۱(t) &= ۱۰۰^۲ h_۱(t) \\ V_۲(t) &= \pi \times ۵۰^۲ \times h_۲(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_۱}{\mathrm{d}t} &= ۱۰۰^۲ \frac{\mathrm{d}h_۱}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}V_۲}{\mathrm{d}t} &= \pi \times ۵۰^۲ \times \frac{\mathrm{d}h_۲}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(*)} ۱۰۰^۲ \frac{\mathrm{d}h_۱}{\mathrm{d}t} = -\pi \times ۵۰^۲ \times \frac{\mathrm{d}h_۲}{\mathrm{d}t}$$

$$\xRightarrow{\frac{\mathrm{d}h_۱}{\mathrm{d}t} = -۲\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}} ۱۰۰^۲ \times (-۲) = -\pi \times ۵۰^۲ \times \frac{\mathrm{d}h_۲}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}h_۲}{\mathrm{d}t} = \frac{۸}{\pi}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}.$$

مثال

فرض کنید تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $a>0$ و $\frac{f(a)}{b^{1402}}=\frac{f(b)}{a^{1402}}$، نشان دهید عددی مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد که

$$f'(c)=\frac{-1402f(c)}{c}.$$

پاسخ: به‌ازای $x\in(a,b)$ تعریف می‌کنیم $g(x)=x^{1402}f(x)$. تابع g بر $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است. همچنین $g(a)=a^{1402}f(a)=b^{1402}f(b)=g(b)$. طبق قضیه‌ی رل $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $g'(c)=0$. بنابراین

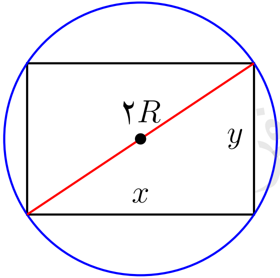
$$1402c^{1401}f(c)+c^{1402}f'(c)=0 \implies c^{1401}\left[1402f(c)+cf'(c)\right]=0$$

$$\xRightarrow{c\neq 0} 1402f(c)+cf'(c)=0 \implies f'(c)=\frac{-1402f(c)}{c}.$$

مثال

ثابت کنید که بین همه‌ی مستطیل‌های قابل محاط در یک دایره به شعاع R، مربع بیشترین مساحت را دارد.

پاسخ: توجه می‌کنیم که در این حالت، قطر مستطیل و قطر دایره بر هم منطبق می‌شوند. (چرا؟) فرض کنیم S مساحت مستطیل باشد. مطابق شکل، داریم $S = xy$. همچنین



$$x^۲ + y^۲ = ۴R^۲ \Rightarrow y = \sqrt{۴R^۲ - x^۲}.$$

بنابراین $۰ < x < ۲R$ و

$$S = S(x) = x\sqrt{۴R^۲ - x^۲}.$$

در ادامه، نقطه‌ی ماکسیمم مطلق $S(x)$ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+} S(x) = ۰, \quad \lim_{x\to (۲R)^-} S(x) = ۰, \quad S(R) > ۰.$$

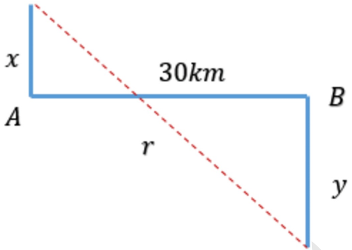
بنابراین تابع $S(x)$ در بازه‌ی $(۰, ۲R)$ ماکسیمم مطلق خود را اخذ می‌کند. چون در این بازه $S(x)$ نقطه‌ی تکین ندارد، پس ماکسیمم مطلق در نقطه‌ای بحرانی رخ می‌دهد.

$$S'(x) = \sqrt{۴R^۲ - x^۲} + \frac{-۲x^۲}{۲\sqrt{۴R^۲ - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{۴R^۲ - x^۲} = \frac{x^۲}{\sqrt{۴R^۲ - x^۲}} \Rightarrow \ ۴R^۲ - x^۲ = x^۲ \Rightarrow \ x^۲ = ۲R^۲$$

$$\Rightarrow \ x = R\sqrt{۲} \Rightarrow \ y = \sqrt{۴R^۲ - ۲R^۲} = \sqrt{۲R^۲} = R\sqrt{۲} \Rightarrow \ x = y.$$

در نتیجه مربع دارای بیشترین مساحت است.

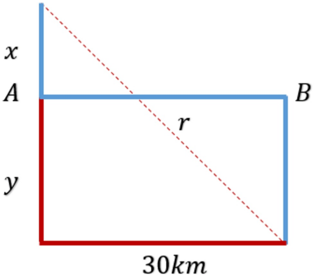


مثال

شخص A در ساعت ۹ صبح در ۳۰ کیلومتری غربی شخص B قرار دارد. شخص A با سرعت ۱۰ $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ به سمت شمال و شخص B با سرعت ۳۰ $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ به سمت جنوب حرکت می‌کند. فاصله‌ی این دو نفر در ساعت ۱۰ صبح با چه آهنگی زیاد می‌شود؟

پاسخ: فرض کنید x فاصله‌ی طی شده توسط A و y فاصله‌ی طی شده توسط B از مکان خود در ساعت نه صبح باشند. بنابر فرض

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ۱۰\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ۳۰\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$



هدف مسئله محاسبه مقدار $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ در ساعت ۱۰ صبح است. طبق شکل، داریم:

$$r^{۲} = (x+y)^{۲} + ۳۰^{۲}$$

$$\xRightarrow{\frac{d}{dt}} ۲r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = ۲\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)(x+y) \quad (*)$$

در ساعت ۱۰ صبح داریم:

$$x = ۱۰, \quad y = ۳۰, \quad r = \sqrt{۴۰^{۲} + ۳۰^{۲}} = ۵۰$$

در آخر، از رابطه $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$۲ \times ۵۰\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = ۲(۱۰+۳۰)(۱۰+۳۰) \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = ۳۲\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$$

مثال

با استدلال دقیق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x = ۱۴۰۲$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} (x-۱۴۰۲)^{۲}\sin(\frac{۱}{x})\cos(\frac{۱}{x}) & x > ۱۴۰۲ \\ ۰ & x = ۱۴۰۲ \\ (x-۱۴۰۲)^{۱۴۰۳}\sin\left(\frac{۱}{x-۱۴۰۲}\right) & x < ۱۴۰۲ \end{cases}$$

پاسخ: با استفاده از تعریف، مشتقات راست و چپ $f(x)$ را در نقطه‌ی $x = ۱۴۰۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$f'_+(۱۴۰۲) = \lim_{x\to ۱۴۰۲^+} \frac{(x-۱۴۰۲)^{۲}\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\cos\left(\frac{۱}{x}\right) - ۰}{x-۱۴۰۲}$$
$$= \lim_{x\to ۱۴۰۲^+} (x-۱۴۰۲)\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\cos\left(\frac{۱}{x}\right) = ۰$$

$$f'_-(۱۴۰۲) = \lim_{x\to ۱۴۰۲^-} \frac{(x-۱۴۰۲)^{۱۴۰۳}\sin\left(\frac{۱}{x-۱۴۰۲}\right) - ۰}{x-۱۴۰۲}$$
$$= \lim_{x\to ۱۴۰۲^-} (x-۱۴۰۲)^{۱۴۰۲}\sin\left(\frac{۱}{x-۱۴۰۲}\right) = ۰$$

چون مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x)$ در $x = ۱۴۰۲$ موجود و برابر هستند، پس تابع در این نقطه، مشتق‌پذیر است.

تمرین

در بین همه‌ی مثلث‌های قائم‌الزاویه با طول وتر ۱، طول اضلاع مثلثی را بیابید که بیشترین مساحت را دارد.

جواب: مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین در بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با طول وتر ۱، بیشترین مساحت را دارد.

تمرین

فرض کنید تابع $f(x)$ بر $[a, a+۱]$ پیوسته و در $(a, a+۱)$ مشتق‌پذیر باشد. همچنین، فرض کنید عدد حقیقی t موجود باشد به‌طوری که $f(a) = -t + ۱$ و $f'(x) \leq t$ برای هر $x \in (a, a+۱)$. نشان دهید $f(a+۱) \leq ۱$.

راهنمایی: تابع $f(x)$ را روی $[a, a+۱]$ در نظر بگیرید و از قضیه‌ی مقدار میانگین استفاده کنید.

تمرین

مخزنی به شکل مخروط با شعاع قاعده ۲ متر و ارتفاع ۵ متر را در نظر بگیرید که شیر آبی در بخش پایینی آن قرار دارد و مخزن پر از آب است. شیر تخلیه را باز می کنیم. زمانی که ارتفاع سطح آب در داخل ظرف ۲ متر است، آب با سرعت $\frac{۱}{۲۵}\frac{\mathrm{m}^۳}{\mathrm{s}}$ تخلیه می شود. سرعت کاهش ارتفاع سطح آب را در این لحظه بیابید.

جواب: $-\frac{۱}{۳۶\pi}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

تمرین

فرض کنید $f(x)$ تابعی است که بر $[۰,\pi]$ پیوسته و در $(۰,\pi)$ مشتق‌پذیر است. ثابت کنید $c\in(۰,\pi)$ وجود دارد به‌نحوی که

$$f'(c) = -\frac{\cos(c)}{\sin(c)}f(c).$$

تمرین

فرض کنید $f(x)$ تابعی ناصفر و پیوسته بر $[0,1]$ و مشتق‌پذیر در $(0,1)$ باشد. اگر $f(0)=1$ و $f(1)=2$، نشان دهید که معادله $\left(f(x)\right)^2 - 2f'(x) = 0$ در $(0,1)$ دارای یک جواب است.