Date: .... Subject: ....

تدریس یار سته : ۰۳،۰۲،۳۰

حل با برهان خلف :

$$\begin{array}{l} \neg p \longleftrightarrow q \\ q \longrightarrow r \\ \neg r \\ \hline \therefore p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg p \longleftrightarrow q \\ q \longrightarrow r \\ \neg r \\ \neg p \\ \hline \therefore F_0 \end{array}$$

	steps	reasons
1	$\neg p \leftrightarrow q$	فرض
2	$(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)$	1
3	$\neg p \to q$	2 & Rule of conjuctive simplification
4	$q \to r$	فرض
5	$\neg p \to r$	3 & law of syllogism
6	$\neg p$	premise (The one assumed
7	r	5 & 6 Modus Ponens
8	$\neg r$	premise
9	$r \wedge \neg r \ (\Leftrightarrow F_0)$	7 & 8 Rule of conjunction
10	$\therefore p$	6 & 9 Methed of proof by contrdiction

Date: .... Subject: ....

پیدا کردن مثال نقض : مثال نقض

p

$p \vee q$

$q \to (r \to s)$

$t \to r$

$\therefore \underbrace{\neg s}_{1} \to \underbrace{\neg t}_{0}$

$s = 0 \quad t = 1$

$p = 1$

$q = 0$

$r = 1$

$s = 0$

$t = 1$

مجموعه گزاره های اتمی

$V : \Omega \to \{0, 1\}$

basic valuation function

---

valuation function $V^* : \Omega^* \to \{0, 1\}$

مجموعه های فرمول های ممکن با گزاره های اتمی

توان v^*

① $v^*(p)=v(p)$

② $v^*(\neg\varphi)=1-v^*(\varphi)$

③ $v^*(\varphi\wedge\psi)=v^*(\varphi)\cdot v^*(\psi)$

④ $v^*(\varphi\vee\psi)=v^*(\varphi)+v^*(\psi)-v^*(\varphi)\cdot v^*(\psi)$

⑤ $v^*(\varphi\rightarrow\psi)=1-v^*(\varphi)\cdot(1-v^*(\psi))$

مثال : ارزش گزاره زیر را برحسب ارزش اتم‌های آن بیابید.

$$v^*(p\rightarrow(q\wedge r))=1-v^*(p)\cdot(1-v^*(q\wedge r))$$

$$=1-v(p)\cdot(1-v^*(q)\,v^*(r))$$

$$=1-v(p)\cdot(1-v(q)\,v(r))$$

$$=1-v(p)+v(p)\,v(q)\,v(r)$$

Date: .... Subject: ....

تمرین ۱۹ - تمرینات ۱.۲ ص ۶۲

چهار بچه‌ها :

پسر بزرگتر : خواهر بزرگترم کیک را خورد.

پسر کوچک‌تر : من کیک را نخوردم.

دختر بزرگتر : خواهر کوچکم کیک را خورد

دختر کوچکتر : خواهرم دروغ گفت که من کیک را خوردم.

~~دقیقا~~ وقطعاً و دقیقاً یک نفر کیک را خورده است

و دقیقاً هم یک نفر درست می‌گوید.

Uniqness Quantification

① $\underbrace{(\exists_x \, p(x))}_{\text{وجود چنین المانی}} \wedge \underbrace{(\forall y . \forall z \, (p(y) \wedge p(z) \longrightarrow y = z))}_{\text{یگانگی المان موجود}}$

تعداد > 0 $\quad\quad$ $1 \geq$

vacuously true $\quad$ $F_{\circ} \longrightarrow T \Leftrightarrow T$

$F_{\circ} \rightarrow T \Leftrightarrow T$

(2) $\exists x . (P(x) \wedge \forall y . (p(y) \longrightarrow x = y))$

(4)(3) $\exists x . (p(x) \wedge \neg \exists y (p(y) \wedge (y \neq x))$

Quatification with restricted domains

- For every $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $x^2 > 0$

$\forall x . [(x \in \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow (x^2 > 0)]$

- There exists some $x < 0$ suchthat $x^2 < 0$.

$\exists [(x \in \mathbb{R}^-) \wedge (x^2 < 0)]$

Every A is B $\forall x . (A(x) \longrightarrow B(x))$

some A is B $\exists x , (A(x) \wedge B(x))$

مثال : عبارت های زیر را با منطق مرتبه اول بیان کنید.

اگر عددی از یک عدد دیگر کوچکتر باشد در این صورت عددی وجود دارد که بین این دو عدد قرار دارد و متفاوت با آن ها است.

$$\forall x.\forall y.\left((x<y) \rightarrow \exists z.(x<z \wedge z<y)\right)$$

$$\forall x.\ \forall y.\left((x\in \mathbb{N}) \rightarrow \left((y\in \mathbb{N}) \rightarrow \left(x<y \rightarrow \exists z.(z\in \mathbb{N} \wedge x<z \wedge z<y)\right)\right)\right)$$

فیزیک ۲   ۳۱، ۵۲، ۵۳

یک قرص پلاستیکی نازک به شعاع R و بار کل q با توزیع یکنواخت مفروض است. هرگاه این قرص با بسامد زاویه ای ω حول محورش (محور عمود بر صفحه قرص) بچرخد، الف) میدان مغناطیسی در مرکز قرص و ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی قرص را برحسب ω، q و R حساب کنید.

Date: .... Subject: ....

تمرین یار گسسته : (۱۴۰۳/۰۳/۰۶)

فرض کنید برای بیان جملهٔ " دقیقاً یک عنصر در مجموعهٔ A وجود دارد که خاصیت P را برآورده می کند " از عبارت q به شکل مقابل $\exists x . \forall y . [y \neq x \rightarrow (P(x) \wedge \neg P(y))]$ استفاده کنیم کدام گزینه درست است؟

الف) q همواره معادل منطقی جملهٔ داده شده است.

ب) فقط در صورتی q معادل جملهٔ داده شده است که A ناتهی باشد.

ج) هیچ گاه q معادل منطقی جمله نیست.

د) در صورتی که A بیش از یک عضو داشته باشد، q معادل منطقی جمله است.

الف) فرض کنیم A یک عضو داشته باشد و P را برآورده نکند $A=\{a\}, P(A)=F$

ب) $A=\{a,b\}$, $P(a)=T$, $P(b)=F$

ج) استدلال ب

د)

premature optimization is the root of evils.

Date: .... Subject: ....

①

$A = \{a, b, \dots\}$

$P(A) = T$ $\qquad$ $P(b) = F$

	الف	پ	ب	د۲	د۱	د۳
جمله فارسی	✗	✓	✓	✗	✓	✗
عبارت منطق مرتبه اول	✓	✓	✓	✗	✓	✗

② $A = \{a, b, \dots\}$

$P(a) = F$ $\qquad$ $P(b) = F, \dots$

هیچ عضو A ، p را برآورده نکند

قسمت ب) به این خاطر پاسخ نیست که اشاره‌ای به ناتناهی بودن A نداریم.

③ $A = \{a, b, \dots\}$

$P(a) = T, P(b) = T$

لااقل دو عضو از A ، P را برآورده کند.

مثال: در بین هر سه عدد صحیح متوالی فقط و فقط یک عدد بر ۳ بخش‌پذیر است:

$$\forall m.\,(m \in \mathbb{Z} \rightarrow$$
$$\exists k.\,(k \in \{0,1,2\} \land 3 \mid m+k$$
$$\land$$
$$\forall k'.\,(k' \in \{0,1,2\} \rightarrow (\forall k''.\,k'' \in \{0,1,2\} \rightarrow$$
$$(3 \mid m+k' \land 3 \mid m+k'' \rightarrow k' = k'')$$
$$)$$

$$\forall m.\,(m \in \mathbb{Z} \rightarrow (3 \mid m \land 3 \nmid m+1 \land 3 \nmid m+2)$$
$$\lor$$
$$(3 \nmid m \land 3 \mid m+1 \land 3 \nmid m+2)$$
$$\lor$$
$$(3 \nmid m \land 3 \nmid m+1 \land 3 \mid m+2))$$

- برای هر عدد، عددی بزرگتر از آن وجود دارد. $(U = N)$

$$\forall x . (x \in N \rightarrow \exists y . (y \in N \wedge y))$$

- عددی وجود دارد که از هر عدد دیگری بزرگتر است. $(U = N)$

$$\forall x . (x \in N \rightarrow \forall y . (y \in N \rightarrow (y \neq x \rightarrow x > y))$$

- حداکثر یک عدد وجود دارد که تابع $f(x)$ مقدار True برای آن برمی‌گرداند.

$$\forall x . \forall y . ((f(x) \wedge f(y)) \rightarrow x = y)$$

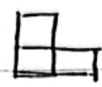
- بی‌شمار عدد وجود دارد که به ازای آن تابع $f(x)$ مقدار True برمی‌گرداند.

$$\forall x . \exists y . (x < y \wedge f(y))$$

مثال: صفحه شطرنجی $2^n \times 2^n$ را در نظر بگیرید که یک گوشه آن حذف شده است. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید چنین صفحه شطرنجی را دقیقاً با قطعه‌هایی به شکل  می‌توان پوشاند.

$P(n)$: هر صفحه شطرنجی با ابعاد $2^n \times 2^n$ که یک گوشه آن حذف شده را می‌توان  بپوشاند .

Basis Step

if $n=1$  $P(1)=T$

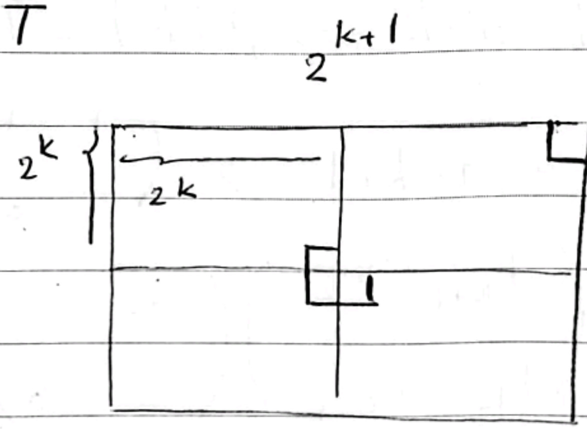
ابعاد $= 2\times 2$

Inductive Step

if $n=k \Rightarrow p(k)=T$

$k\in \mathbb{Z}^+$

for $n=k+1$



$p(k+1)=T$ $\quad \forall n . (n\in \mathbb{Z}^+ \rightarrow p(n))$

مثال : ثابت کنید $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}$

$p(n)$: $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}$

Basis STep

$n=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$

$p(1) = T$

Inductive Step

if $n=k \Rightarrow p(k) = T$

for $n=k+1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$P(k+1) = T$

$\Rightarrow \forall n. (n \in \mathbb{N} \rightarrow p(n))$

Date: .... Subject: ....

تمرین ۱۸ تمرینات ۱.۴ ص ۲۲۱

به ازای $m,r \in \mathbb{Z}^+$ فرض می کنیم S_1 و S_2 دو مجموعه باشند به طوری که $|S_1| = m$ و $|S_2| = r$ باشند. و همچنین S_1 و S_2 به صورت صعودی مرتب شده باشند. می دانیم حداکثر $m+r-1$ مقایسه S_1 و S_2 را به صورت افزایشی ادغام کرد. فرض کنید $|S| = 2^n$ ثابت کنید تعداد مقایسه های لازم برای مرتب سازی S به صورت افزایشی بیش از $n.2^n$ نیست.

$P(n)$: در مجموعه ای با اندازه 2^n تعداد مقایسه های لازم برای مرتب سازی افزایشی بیش از $n.2^n$ نیست.

Basis Step

$n=1 \Rightarrow$ دو عضو داریم $\Rightarrow$ یک مقایسه کافی است ① < ② $\Rightarrow P(1)=T$

$1 . 2^1 = 2$

Inductive Step

if $n=k \Rightarrow P(k)=T$

for $n=k+1 \Rightarrow \underbrace{S}_{2^{k+1}\text{ عضو}} = \overbrace{S_1}^{2^k\text{ عضو}} \cup \overbrace{S_2}^{2^k\text{ عضو}}$

Date: ....

Subject: ....

$$\Rightarrow k \cdot 2^k + k \cdot 2^k + (2^k + 2^k - 1) = (k+1)\, 2^{k+1} - 1$$

$$\leq (k+1)\, 2^{k+1}$$

$$p(k+1) = T$$

$$\Rightarrow \forall n. (n \in N \longrightarrow P(n))$$