# فصل ۴ – ویژگی‌های اعداد صحیح: استقرای ریاضی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
( پلی تکنیک تهران )

دانشکدۀ مهندسی کامپیوتر

## کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

**ارائه دهنده:** مرتضی دامن افشان

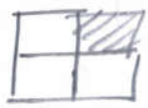
**4**

**Properties of the Integers: Mathematical Induction**

صفحه شطرنجی $2^n \times 2^n$ را در نظر بگیرید که یک خانه در گوشه آن حذف شده است. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید چنین صفحه‌های شطرنجی را می‌توان با قطعه‌هایی به شکل پوشاند.

تعریف: $P(n)$ : هر صفحه شطرنجی با ابعاد $2^n \times 2^n$ که یک گوشه آن حذف شده است را می‌توان با قطعه‌های پر کرد.

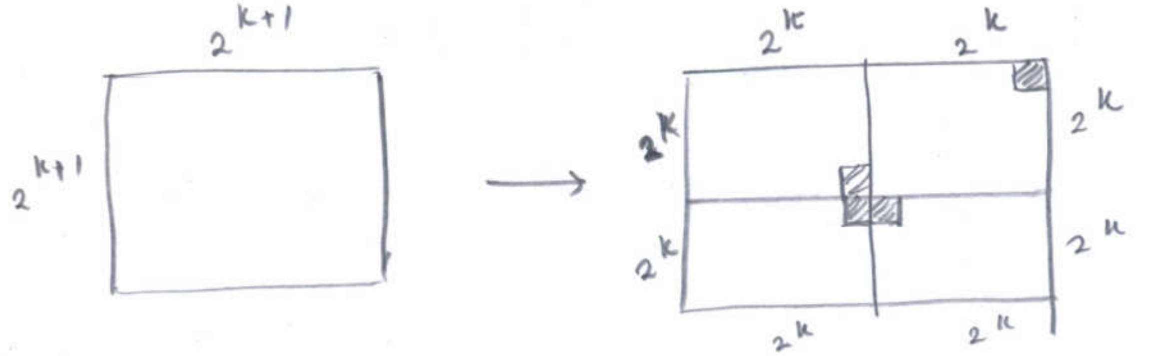
**Basis Step:**

if $n=1$ $\longrightarrow$  $\Rightarrow$ $P(1)$ is True

**Inductive Step:**

if $n=k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ $\longrightarrow$ فرض می‌کنیم $P(k)$ صحیح است.

for $n=k+1$ $\longrightarrow$ می‌توان مربع $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ را بصورت زیر در نظر گرفت:




هر کدام از مربع‌های فوق را می‌توان طبق فرض استقرا با قطعات پوشاند به طوری که یک گوشه آن مربع حذف شده باشد. با چینش مربع‌های فوق به شکل نشان داده شده مکان‌های خالی که در ۳ مربع ایجاد می‌شود را می‌توان با یک پر کرد. بنابراین تنها جایی که خالی می‌ماند گوشه بالا سمت راست است. بنابراین $P(k+1)$ نیز صحیح است. آنگاه $\forall n \in \mathbb{Z}^+ . P(n)$

ثابت کنید

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$F_n$ عدد فیبوناچی n ام است .

$P(n): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$

Basis Step: $n=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$ بر صحیح است .

Inductive Step: if $n=k \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$ یا $P(k)$ is True

if $n=k+1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix} \Rightarrow P(k+1) \text{ is True}$$

نتیجه : $\forall n \in \mathbb{Z}^+ . \; P(n)$

ثابت کنید اگر استقرای (ضعیف) ریاضی برقرار باشد، درانیصورت اصل خوش ترتیبی برقرار است.

می دانیم استقرای (ضعیف) ریاضی برقرار است.

فرض کنید مجموعه‌ای همانند S که یک زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{Z}^+$ است داشته باشیم بطوریکه خوش ترتیب نباشد، درانیصورت S فاقد کوچکترین عضو است.

حال گزاره باز $\underbrace{P(n) : i \notin S \text{ for all } i \leq n}$ را تعریف می کنیم.

$P(1)$ درست است چراکه $1 \notin S$ برقرار است (اگر نباشد درانیصورت S کوچکترین عضو دارد)

فرض کنید $P(K)$ برقرار باشد، درانیصورت تمامی اعداد $i \leq K$ در S عضو نخواهند داشت.
حال ثابت می کنیم $P(K+1)$ نیز برقرار است.

$P(K+1)$ برقرار است، اگر برقرار نباشد درانیصورت $K+1 \in S$ خواهد بود، درانیصورت $K+1$ کوچکترین عضو S خواهد شد. بنابراین $P(K+1)$ نیز برقرار است.

پس داریم:

$$\begin{cases} P(1) \text{ is true,} \\ \forall K \geq 1 \,.\, (P(K) \rightarrow P(K+1)) \end{cases}$$

ازآنجاییکه می دانیم استقرا برقرار است، بنابراین می توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \,.\, P(n)$$

و این یعنی به ازای تمامی اعداد $\mathbb{Z}^+$، هیچ یک در S عضو نیستند. پس $S = \emptyset$.

بنابراین مجموعه ناتهی همانند S وجود ندارد که فاقد کوچکترین عضو باشد.
یعنی هر مجموعه ناتهی از $\mathbb{Z}^+$ انتخاب کنیم تنها کوچکترین عضو دارد و این یعنی اصل خوش ترتیبی برقرار است.

ثابت کنید اگر استقرای قوی ریاضی برقرار باشد دراینصورت استقرای ضعیف نیز برقرار است.

فرض کنید $P(n)$ یک گزاره باز باشد

دراینصورت چون میدانیم استقرای قوی ریاضی برقرار است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} P(1) \text{ is true} \\ \forall k \in \mathbb{Z}^+.\ P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k) \longrightarrow P(k+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+.\ P(n)$$

حال تعریف می‌کنیم: $Q(n) = P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n)$

بدیهی است که $\underbrace{\forall n.\ P(n)}_{\mathrm{I}} \Leftrightarrow \underbrace{\forall n.\ Q(n)}_{\mathrm{II}}$ یعنی بجای اثبات طرف I با

استقرای قوی، سعی می‌کنیم II را با استقرای ضعیف اثبات کنیم. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} Q(1) \text{ is true} \\ \forall k \in \mathbb{Z}^+.\ Q(k) \longrightarrow P(k+1) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Q(1) \text{ is true} \\ \forall k \in \mathbb{Z}^+.\ Q(k) \rightarrow Q(k) \wedge P(k+1) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Q(1) \text{ is true} \\ \forall k \in \mathbb{Z}^+.\ Q(k) \rightarrow Q(k+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+.\ Q(n)$$

تمرین ۱۷ - بخش ۲.۴ - ص ۲۳۵

ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت $n$ ، داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$$

Basis Step: $n=1$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{1} \frac{F_{i-1}}{2^i} = \frac{F_0}{2^1} = 0 \\ &1 - \frac{F_3}{2^1} = 1 - \frac{2}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

تساوی بالا برای $n=1$ برقرار است.

Inductive Step: for $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{F_{k+2}}{2^k}$$

فرض می‌کنیم برقرار است.

for $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{F_{i-1}}{2^i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{F_{i-1}}{2^i}\right) + \frac{F_k}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{F_{k+2}}{2^k} + \frac{F_k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{2F_{k+2} - F_k}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{F_{k+2} + F_{k+2} - F_k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{F_{k+2} + F_{k+1}}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{F_{k+3}}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{F_{(k+1)+2}}{2^{k+1}}$$

بنابراین :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+.\ \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$$

تمرین ۱۹ - بخش ۲.۴ - صفحه ۲۳۵

اگر $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید که $5F_{n+2} = L_{n+4} - L_n$

نکته:

Fibonacci Numbers

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

Lucas Numbers

$$\begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} & n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

Basis Step:
$$\begin{cases} n=0 & 5F_2 = L_4 - L_0 = 5 \\ n=1 & 5F_3 = L_5 - L_1 = 10 \end{cases}$$
حالت‌های برقرار است.

Inductive Step: for $n \leq k$ $\quad 5F_{k+2} = L_{k+4} - L_k$ فرض می‌کنیم برقرار است.

for $n = k+1$
$$\begin{aligned} 5F_{(k+1)+2} &= 5\left(F_{k+2} + F_{k+1}\right) \\ &= 5\left(F_{k+2}\right) + 5\left(F_{k+1}\right) \\ &= \left(L_{k+4} - L_k\right) + \left(L_{k+3} - L_{k-1}\right) \\ &= \left(L_{k+3} + L_{k+4}\right) - \left(L_{k-1} + L_k\right) \\ &= L_{k+5} - L_{k+1} \\ &= L_{(k+1)+4} - L_{(k+1)} \end{aligned}$$

بنابراین:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5F_{n+2} = L_{n+4} - L_n$$

- اگر $f: A \to A$ تابعی دلخواه باشد ثابت کنید برای هر $m, n \in \mathbb{Z}^+$ داریم ($f^m \circ f^n = f^n \circ f^m$)

Double Induction (استقرای دوگانه)

- ابتدا $m=1$، استقرا روی $n$ می‌زنیم. و سپس استقرا روی $m$ می‌زنیم.

$m=1$ $\Rightarrow$ For $n=1$ the result is true.

$$f^1 \circ f^1 = f^1 \circ f^1$$

$\Rightarrow$ for $n=k$ $\quad f \circ f^k = f^k \circ f$ فرض می‌کنیم برای $n=k$ درست باشد

حال $f \circ f^{k+1}$ را در نظر بگیرید:

$$f \circ f^{k+1} = f \circ (f \circ f^k) = f(f^k \circ f) = (f \circ f^k) \circ f = f^{k+1} \circ f$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f \circ f^n = f^n \circ f \Leftarrow$ نتیجه

حال فرض کنید برای $t \geq 1$ این عبارت برقرار باشد

$$t \geq 1 \quad f^t \circ f^n = f^n \circ f^t$$

حال در مورد $f^{t+1} \circ f^n$ بحث می‌کنیم:

$$f^{t+1} \circ f^n = (f \circ f^t) \circ f^n = f \circ (f^t \circ f^n) = f \circ (f^n \circ f^t)$$
$$= (f \circ f^n) \circ f^t = (f^n \circ f) \circ f^t = f^n \circ (f \circ f^t)$$
$$= f^n \circ f^{t+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall m, n \in \mathbb{Z}^+ \quad f^m \circ f^n = f^n \circ f^m}$$

تمرین ۱۸- (تمرینات ۱.۴) - ص ۲۲۱

به ازای $m, r \in \mathbb{Z}^+$ فرض کنیم $S_1, S_2$ دو مجموعه باشند بطوریکه $|S_1| = m$ و $|S_2| = r$ باشد. وهمچنین فرض می‌کنیم $S_1, S_2$ بصورت صعودی مرتب شده باشند. می‌توان اثبات کرد که می‌توان عناصر $S_1, S_2$ را با انجام حداکثر $m+r-1$ مقایسه یکجا به ترتیب افزایش نوشت.

حال فرض کنید مجموعه‌ای مانند $S$ داریم بطوریکه $|S| = 2^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$.

ثابت کنید تعداد مقایسه‌ی لازم برای قراردادن عناصر $S$ به ترتیب افزایشی از $n \cdot 2^n$ تجاوز نمی‌کند.

$P(n)$ : در مجموعه‌ای با اندازه‌ی $2^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$، تعداد مقایسه‌ی لازم برای مرتب‌سازی افزایشی آن، از $n \cdot 2^n$ بیشتر نیست.

$\boxed{\text{Basis Step}}$ : $n = 1 \Rightarrow$ $2^1$ : تعداد اعضا $\Rightarrow$ تعداد مقایسه‌ی لازم : $1 < 1 \times 2^1$
$\Rightarrow P(1)$ is True

$\boxed{\text{Inductive Step}}$ : if $n = k \Rightarrow P(k)$ is True فرض می‌کنیم.

for $n = k+1 \Rightarrow S = S_1 \cup S_2$

$S_1$ : حاوی $2^k$ عضو — $S_2$ : حاوی $2^k$ عضو

$$\underbrace{k \cdot 2^k}_{\text{برای مرتب‌سازی این عناصر}} + \underbrace{k \cdot 2^k}_{\text{برای مرتب‌سازی این عناصر}} + \underbrace{(2^k + 2^k - 1)}_{\text{تعداد مقایسه برای ادغام}}$$

$$= 2 \cdot k \cdot 2^k + (2^{k+1} - 1) = 2^{k+1} \times k + 2^{k+1} - 1 = (k+1)\, 2^{k+1} - 1 < (k+1)\, 2^{k+1}$$

بنابراین $P(k+1)$ نیز درست است پس : $\forall n \in \mathbb{Z}^+ .\ P(n)$

# مثال

ثابت کنید تعداد *composition*های هر عدد $n \in \mathbb{Z}^+$ برابر است با $2^{n-1}$.

اثبات به‌وسیله استقرای ریاضی انجام می‌شود.

$S(n)$: تعداد *composition*های عدد $n$ برابر است با: $2^{n-1}$

- *Basis Step*: تعداد *composition*های عدد ۱ برابر با $1 = 2^{1-1}$ است، بنابراین گزاره $S(1)$ برقرار است.

- *Inductive Step*: فرض کنید برای هر عدد $k \in \mathbb{Z}^+$، گزاره $S(k)$ برقرار باشد، و تعداد *composition*های عدد $k$ برابر با $2^{k-1}$ باشد.

حال باید ثابت کنیم $S(k+1)$ نیز برقرار است. به عبارتی دیگر باید نشان دهیم، تعداد *composition*های عدد $k+1$ برابر است با: $2^k$

# مثال - ادامه

- ادامهٔ *Inductive Step*: حال می‌توان *composition*های عدد $k+1$ را به دو مجموعه افراز نمود:
- *composition*هایی که به جمع‌وندی بزرگتر از یک ختم می‌شوند. با کم کردن یک واحدی آخرین جمع‌وند به یک *composition* عدد $k$ به‌دست می‌آید.
- *composition*هایی که به جمع‌وندی برابر با یک ختم می‌شوند. با حذف آخرین جمع‌وند به یک *composition* عدد $k$ به‌دست می‌آید.

با در نظر گرفتن دو مورد بالا، به این نتیجه می‌رسیم که در صورتی‌که *composition*های عدد $k$ را داشته باشیم، می‌توانیم یک جمع‌وند ۱ را به انتهای هر یک از این *composition*ها ضمیمه نماییم؛ و یا این‌که عدد ۱ را با آخرین جمع‌وند مربوط به *composition* عدد $k$ جمع کنیم. این بدین مفهوم است که تعداد *composition*های عدد $k+1$ دو برابر تعداد *composition*های عدد $k$ است.

درنتیجه از درستی $S(k)$ به درستی $S(k+1)$ رسیدیم.

بنابراین $S(n)$ برای $n \in \mathbb{Z}^+$، برقرار است.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(n=1)$ | $1$ | | $(n=4)$ | $(1')$ | $4$ |
| | | | | $(2')$ | $1+3$ |
| $(n=2)$ | $2$ | | | $(3')$ | $2+2$ |
| | $1+1$ | | | $(4')$ | $1+1+2$ |
| $(n=3)$ | $(1)$ | $3$ | | $(1'')$ | $3+1$ |
| | $(2)$ | $1+2$ | | $(2'')$ | $1+2+1$ |
| | $(3)$ | $2+1$ | | $(3'')$ | $2+1+1$ |
| | $(4)$ | $1+1+1$ | | $(4'')$ | $1+1+1+1$ |