تمرینات سری چهارم: انتگرال دوگانه و سه گانه و کاربردها

۱۰ اردیبهشت ۱۴۰۳

سوال۱

در هر یک از انتگرال های زیر قلمرو انتگرالگیری را رسم کنید و انتگرال مکرر مفروض را محاسبه کنید.

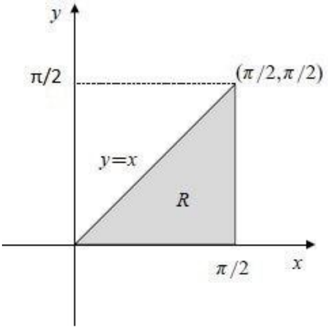
1. $$I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{y}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x}{x} \, dx \, dy$$

2. $$I = \int_{۰}^{۱} \int_{x}^{۱} \frac{y^{\lambda}}{x^{۲} + y^{۲}} \, dy \, dx \quad (\lambda > ۰)$$

در این تکرار نمی‌توان برای محاسبه انتگرال داخلی از $\frac{\sin x}{x}$ پادمشتق گرفت. بنابراین I را به عنوان یک انتگرال مضاعف بیان نموده و ناحیه انتگرال را شناسایی می‌کنیم:

$$I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{y}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x}{x} \, dx \, dy = \int\int_{R} \frac{\sin x}{x} dA$$

که ناحیه R در شکل زیر رسم شده است.



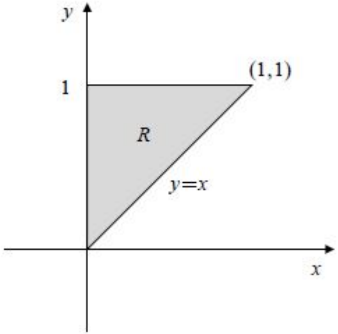
پاسخ سوال ۱ قسمت الف

اگر ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر دهیم، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{y}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x}{x} \, dx \, dy = \int\int_{R} \frac{\sin x}{x} \, dA \\
&= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x}{x} \int_{۰}^{x} dy \, dx \\
&= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x \, dx \quad = ۱
\end{aligned}
$$

در این تکرار نمی‌توان برای محاسبه انتگرال داخلی از $\frac{y^8}{x^2+y^2}$ پادمشتق گرفت. بنابراین I را به عنوان یک انتگرال مضاعف بیان نموده و ناحیه انتگرال را شناسایی می‌کنیم:

$$I = \int_0^1 \int_x^1 \frac{y^8}{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int\int_R \frac{y^8}{x^2+y^2}\, dA$$



پاسخ سوال ۱ قسمت ب

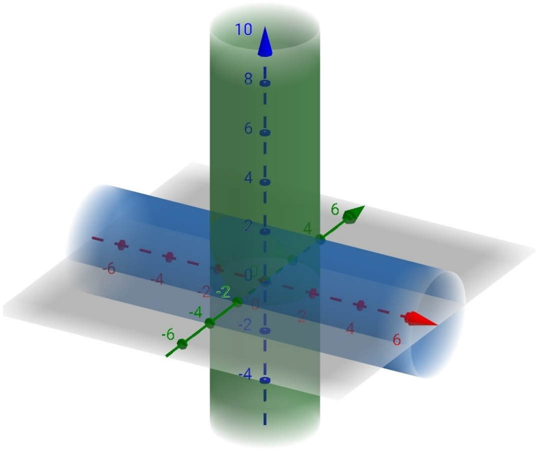
اگر ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر دهیم، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\circ}^{۱} \int_{x}^{۱} \frac{y^{\lambda}}{x^{۲}+y^{۲}}\, dy\, dx = \int\int_{R} \frac{y^{\lambda}}{x^{۲}+y^{۲}}\, dA \\
&= \int_{\circ}^{۱} y^{\lambda} \int_{\circ}^{y} \frac{dx}{x^{۲}+y^{۲}}\, dy \\
&= \int_{\circ}^{۱} y^{\lambda} \int_{\circ}^{y} \frac{۱}{y^{۲}} \Big(\frac{۱}{\left(\frac{x}{y}\right)^{۲}+۱} \Big)\, dx\, dy \\
&= \int_{\circ}^{۱} y^{\lambda}\, \frac{۱}{y} \left(\tan^{-۱} \frac{x}{y} \right) \Bigg|_{x=\circ}^{x=y} dy \\
&= \frac{\pi}{۴} \int_{\circ}^{۱} y^{\lambda-۱}\, dy = \frac{\pi y^{\lambda}}{۴\lambda} \Bigg|_{\circ}^{۱} = \frac{\pi}{۴\lambda}
\end{aligned}
$$

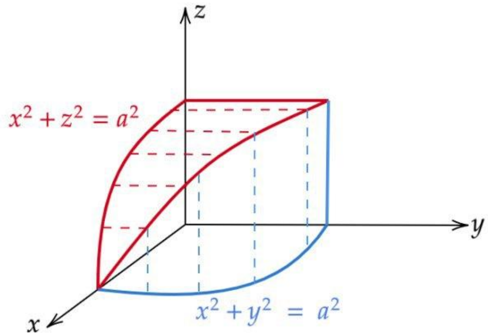
سوال۲

با استفاده از انتگرال دوگانه حجم محصور به دو استوانه $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و $x^۲ + z^۲ = a^۲$ را بیابید.

با رسم دو استوانه می‌توان دید که ناحیه انتگرال‌گیری تقاطع دو استوانه زیر است.



با توجه به شکل دو تابع، تقاطعشان در 8 ناحیه کاملا متقارن هستند، بنابراین ناحیه انتگرال‌گیری را در یک هشتم (مانند شکل زیر) محاسبه و حاصل را 8 برابر می‌کنیم.



پاسخ سوال ۲

$$
\begin{aligned}
Vol &= ۸\int_{\circ}^{a}\int_{\circ}^{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}} \sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dy\,dx \\
&= ۸\int_{\circ}^{a} (a^{۲}-x^{۲})\,dx \\
&= ۸\left(a^{۲}x-\frac{x^{۳}}{۳}\right)\Bigg|_{\circ}^{a} = \frac{۱۶}{۳}a^{۳}
\end{aligned}
$$

سوال۳

تعیین کنید انتگرال های زیر همگراست یا واگرا و مقدار انتگرال های همگرا را محاسبه کنید.

الف. $\iint e^{-(|x|+|y|)}dA$ روی ناحیه $\mathbb{R}^۲$

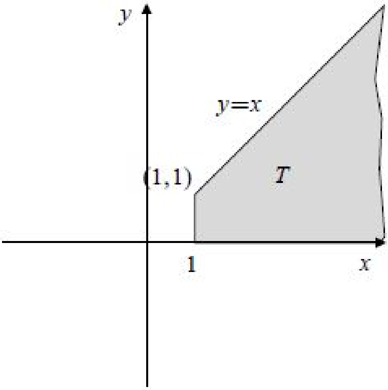
ب. $\iint \frac{۱}{x^۳}e^{-\frac{y}{x}}dA$ روی ناحیه ای که در رابطه های $x \geq ۱$ و $x \leq y \leq ۰$ صدق کند.

انتگرال همگراست، زیرا

$$\iint_{\mathbb{R}^۲} e^{-(|x|+|y|)} dA = ۴ \iint_{\substack{x\geq ۰\\ y\geq ۰}} e^{-(x+y)}\, dA =$$

$$۴ \int_۰^\infty e^{-x}\, dx \int_۰^\infty e^{-y}\, dy = ۴\left(\lim_{R\to\infty} -e^{-x}\Big|_۰^R\right)^۲ = ۴$$

با رسم ناحیه داده شده، انتگرال را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:



پاسخ سوال ۳ قسمت ب

$$\begin{aligned}\iint_T \frac{۱}{x^۳} e^{-\frac{y}{x}} dA &= \int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳} \int_۰^x e^{-\frac{y}{x}} \, dy dx \\ &= \int_۱^\infty \frac{۱}{x^۳} \left(-xe^{-\frac{y}{x}} \Big|_{y=۰}^{y=x} \right) dx \\ &= (۱ - \frac{۱}{e}) \int_۱^\infty \frac{dx}{x^۲} \\ &= (۱ - \frac{۱}{e}) \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{۱}{x} \Big|_۱^R \right) = ۱ - \frac{۱}{e}\end{aligned}$$

بنابراین انتگرال همگراست.

سوال۴

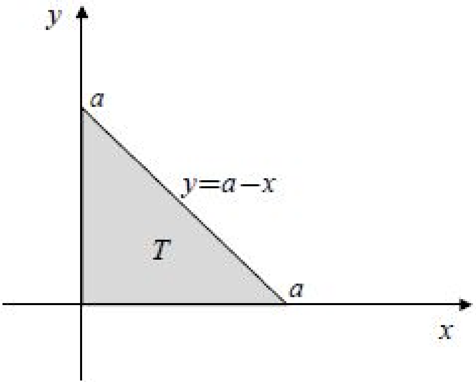
مقدار متوسط تابع $x^۲ + y^۲$ بر مثلث $a \leq x \leq ۰$ و $a - x \leq y \leq ۰$ را بیابید.

مقدار متوسط تابع

مقدار متوسط تابع انتگرال‌پذیر $f(x, y)$ روی مجموعه D با $\bar{f}$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\bar{f} = \frac{۱}{\text{مساحت } D} \iint_D f(x, y)\, dA$$

ابتدا ناحیه موردنظر را رسم می‌کنیم:



بنابراین مساحت $\frac{a^{۲}}{۲}$ است. با توجه به رابطه بالا داریم:

$$\bar{f} = \frac{۲}{a^{۲}} \iint_T (x^{۲} + y^{۲})\, dA$$
$$= \frac{۲}{a^{۲}} \int_{۰}^{a} \int_{۰}^{a-x} (x^{۲} + y^{۲})\, dy\, dx$$
$$= \frac{۲}{a^{۲}} \int_{۰}^{a} \left(x^{۲}y + \frac{۱}{۳}y^{۳}\right)\Bigg|_{y=۰}^{y=a-x} dx =$$
$$\frac{۲}{۳a^{۲}} \int_{۰}^{a} \left[۳x^{۲}(a-x) + (a-x)^{۳}\right] dx =$$
$$\frac{۲}{۳a^{۲}} \left[۳\left(\frac{ax^{۳}}{۳} - \frac{x^{۴}}{۴}\right) - \frac{(a-x)^{۴}}{۴}\right]\Bigg|_{۰}^{a}$$
$$= \frac{a^{۲}}{۳}$$

سوال۵

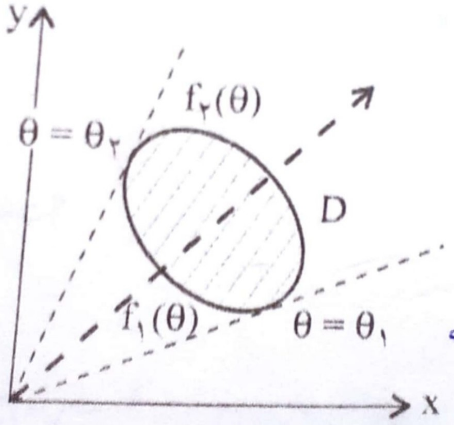
(آدامز بخش ۴ $-$ ۱۴ سوال ۱۱) مطلوبست محاسبه $\iint (x+y)dA$ روی ناحیه S که در ربع اول، درون قرص $x^۲ + y^۲ \leq a^۲$ و زیر خط $y = \sqrt{۳}x$ قرار گرفته است.

یادآوری:

تبدیل قطبی $y = r\sin\theta$ و $x = r\cos\theta$ را وقتی به کار می بریم که محاسبه انتگرال در این دستگاه مختصات ساده تر باشد. مثلا زمانی که تابع زیر انتگرال در این دستگاه مختصات به شکل ساده تر بیان گردد و یا بخشی از مرزهای ناحیه به شکل دایره باشد، از این تبدیل استفاده می کنیم. ژاکوبی در این دستگاه مختصات برابر است با:

$j = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = r$ برای تعیین حدود انتگرال در مختصات قطبی نیم خطی از مبدا چنان رسم می کنیم که شکل ناحیه را در روی منحنی های $r = f_۱(\theta)$ و $r = f_۲(\theta)$ قطع کند، اگر $\theta_۱ \leq \theta \leq \theta_۲$ آن گاه برای انتگرال روی ناحیه D داریم:

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} F(r,\theta)r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$$

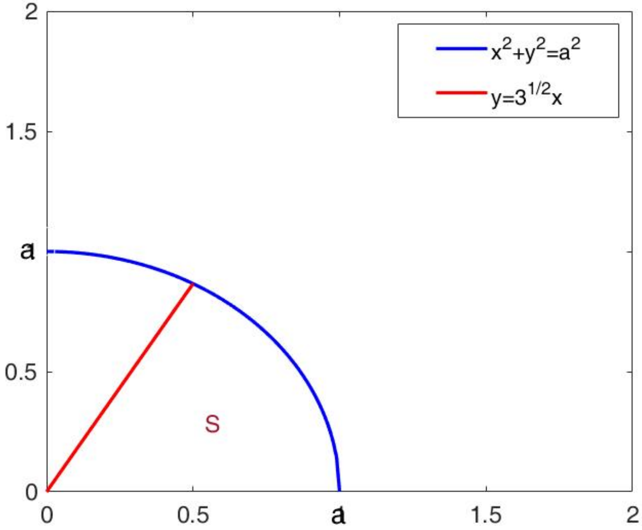


حال سراغ حل مساله می رویم:
چون تانژنت وارون زاویه مساوی شیب خط است. خط $y = ۰$ شیب آن ۰ است. و خط $y = \sqrt{۳}x$ شیب آن $\sqrt{۳}$ است. بنابراین $۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۳}$ است.

$$\iint\limits_S (x+y)dA = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}} \int_{۰}^{a} (r\cos\theta + r\sin\theta) r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}} (\cos\theta + \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta \int_{۰}^{a} r^{۲} \, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{a^{۳}}{۳}(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۳}} = [(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲}) - (-۱)]\frac{a^{۳}}{۳} = \frac{(\sqrt{۳}+۱)a^{۳}}{۶}$$



2
1.5
a
0.5
0
0
0.5
a
1.5
2
$x^2+y^2=a^2$
$y=3^{1/2}x$
S

سوال۶

(آدامز بخش ۴ − ۱۴ سوال ۲۲) حجم ناحیه ای را که درون کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ و استوانه $x^۲ + y^۲ = ax$ قرار گرفته است بیابید.

با استاندارد کردن معادله استوانه به صورت $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$ مرکز آن $(\frac{a}{2},0)$ است. یک چهارم حجم مورد نظر در یک هشتم اول قرار می گیرد. مختصات قطبی معادله استوانه $x^2+y^2=ax$ به صورت $r=a\cos\theta$ تبدیل می شود. بنابراین حجم برابر است با:

$$V=4\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}dA=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}(\sqrt{a^2-r^2})r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

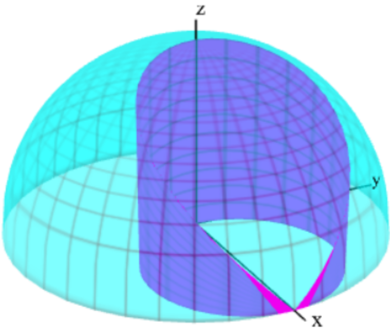
فرض کنید $u=a^2-r^2$ و $du=-2rdr$ در این صورت:

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a^2\sin^2\theta}^{a^2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(u^{\frac{3}{2}}\Big|_{a^2\sin^2\theta}^{a^2})d\theta$$

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta)$$

با فرض $v=\cos\theta$ و $dv=-\sin\theta d\theta$ در این صورت:

$$V=\frac{2\pi a^3}{3}-\frac{4a^3}{3}\int_0^1(1-v^2)\,\mathrm{d}v=\frac{2\pi a^3}{3}-\frac{4a^3}{3}(v-\frac{v^3}{3})\Big|_0^1=\frac{2}{9}a^3(3\pi-4)$$


z
y
x

سوال۷

مساحت خارج دایره به معادله $r = ۲acos(\theta)$ و داخل کاردیوئید $r = a(۱ + cos(\theta))$ را با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

$$A = ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۲a\cos\theta}^{a(۱+\cos\theta)} r\, dr\, d\theta + ۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \int_{۰}^{a(۱+\cos\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{r^{۲}}{۲})\Big|_{۲a\cos\theta}^{a(۱+\cos\theta)} d\theta + ۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} (\frac{r^{۲}}{۲})\Big|_{۰}^{a(۱+\cos\theta)} d\theta$$

$$= a^{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۱ + \cos^{۲}\theta + ۲\cos\theta - ۴\cos^{۲}\theta)\, d\theta$$

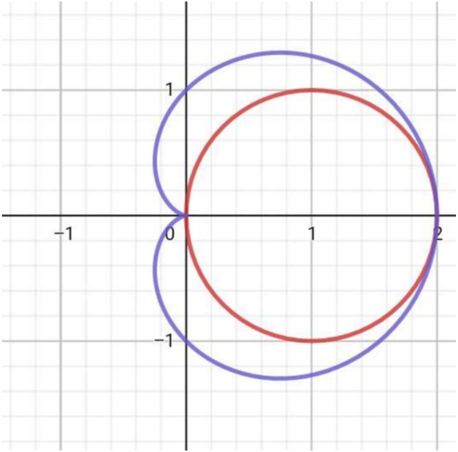
$$+ a^{۲}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} (۱ + \cos^{۲}\theta + ۲\cos\theta)\, d\theta$$

$$= [(a^{۲}\theta) - ۳(a^{۲}(\frac{\theta}{۲} + \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta)) + ۲a^{۲}(\sin\theta)]\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$+ [(a^{۲}\theta) + (a^{۲}(\frac{\theta}{۲} + \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta)) + ۲a^{۲}(\sin\theta)]\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}$$

$$= a^{۲}\frac{\pi}{۲} - ۳a^{۲}\frac{\pi}{۴} + ۲a^{۲} + a^{۲}\pi - a^{۲}\frac{\pi}{۲} + a^{۲}\frac{\pi}{۲} - a^{۲}\frac{\pi}{۴} - ۲a^{۲} = \frac{\pi a^{۲}}{۲}$$

پاسخ سوال ۷



$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}(2\pi+2(\sin\theta))\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}[2\pi+\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\sin 2\theta)\Big|_0^{2\pi}]=\frac{a^2}{2}[2\pi+\pi]=\frac{3}{2}\pi a^2$$

پاسخ سوال ۷ روش دوم ادامه

مساحت دایره برابر است با $\pi a^{۲}$ بنابراین مساحت خارج دایره و درون دلگون برابر است با

$$\frac{۳}{۲}\pi a^{۲} - \pi a^{۲} = \frac{۱}{۲}\pi a^{۲}$$

سوال۸

مطلوب است محاسبه $\iint e^{x+y}\, dA$ روی ناحیه $|x| + |y| \leq a$.

یادآوری(جانشینی در انتگرال های دوگانه): در برخی انتگرال ها با توجه به شکل ناحیه D یا شکل تابع $f(x,y)$ در زیر انتگرال، ترجیح می دهیم که از یک تبدیل یک به یک:

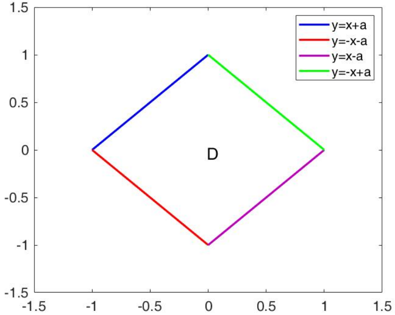
$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

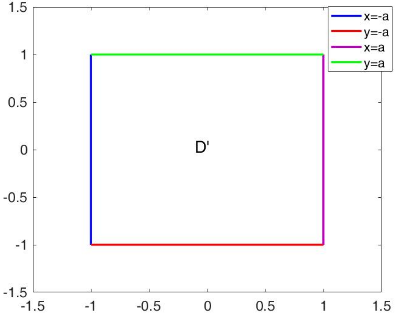
استفاده کنیم. درنتیجه تحت این تبدیل ناحیه D در صفحه xy به ناحیه D' در صفحه ی uv نقش می شود. اگر dA یک عنصر مساحت در صفحه xy و dA' یک عنصر مساحت در صفحه uv باشد، آن گاه:

$$dA = |j|dA' = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dA'$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = \iint\limits_{D'} F(u,v)dA'$$


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
y=x+a
y=-x-a
y=x-a
y=-x+a
D


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
x=-a
y=-a
x=a
y=a
D'

شکل:

حال سراغ حل مساله می رویم:

فرض کنید $x=\frac{u+v}{2}$ و $y=\frac{u-v}{2}$ در این صورت داریم $x+y=u$ و $x-y=v$

بنابراین خواهیم داشت:

$$dxdy = \left| \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \right| dudv = \frac{1}{2} dudv$$

بنابراین با تبدیل بالا، مربع a $|x|+|y|\leq a$ متناظر با مربع a $-a\leq u\leq a$ و $-a\leq v\leq a$ می باشد. بنابراین

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leq a} e^{x+y}dA = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} e^{u}\, dv$$

$$du = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} e^{u}\, du \int_{-a}^{a} dv = a(e^{a}-e^{-a}) = 2a\sinh a$$

سوال۹

مطلوبست محاسبه $\iint x^۲ + y^۲ \, dA$ روی ناحیه متوازی الاضلاع محصور به خط های $x + y = ۱, x + y = ۲, ۳x + ۴y = ۵, ۳x + ۴y = ۶$.

جواب: برای این‌گونه مسائل ابتدا ناحیه چهارضلعی کلی را با استفاده از تغییر متغیر مناسب به چهارضلعی منظم مانند مستطیل یا مربع واحد تبدیل نموده و سپس به محاسبه انتگرال می‌پردازیم. ابتدا تعریف می‌کنیم

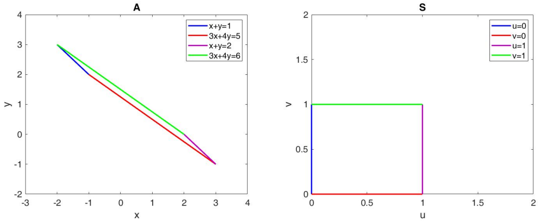
$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^۲ \;\middle|\; ۱ \leq x + y \leq ۲,\;\; ۵ \leq ۳x + ۴y \leq ۶ \right\},$$

$$S = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^۲ \;\middle|\; ۰ \leq u \leq ۱,\;\; ۰ \leq v \leq ۱ \right\}.$$

در اینجا نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} u = x + y - ۱, \\ v = ۳x + ۴y - ۵, \end{cases} \quad \text{یا معادلات} \quad \begin{cases} x = ۴u - v - ۱, \\ y = v - ۳u + ۲. \end{cases}$$

تحت نگاشت فوق متوازی‌الاضلاع A به مربع واحد S تبدیل می‌شود.



شکل:

بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dy = du\,dv, \quad (1)$$

و

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (4u - v - 1)^2 + (v + 2 - 3u)^2 \\ &= \left((4u)^2 - 2(4u)(v+1) + v^2 + 2v + 1\right) \\ &+ \left(v^2 + 4v + 4 - 2(v+2)(3u) + (3u)^2\right) \\ &= 25u^2 + 2v^2 - 14uv - 20u + 6v + 5. \end{aligned} \quad (2)$$

با استفاده از روابط (1) و (2) داریم

$$\begin{aligned}
\iint_A (x^2+y^2)\ dx\,dy &= \iint_S (25u^2+2v^2-14uv-20u+6v+5)\ du\,dv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (25u^2+2v^2-14uv-20u+6v+5)\ du\,dv \\
&= \int_0^1 \left(\frac{25}{3}u^3+2v^2u-7u^2v-10u^2+6vu+5u\right)\Big|_{u=0}^{u=1} dv \\
&= \left(\frac{25}{3}v+\frac{2}{3}v^3-\frac{14}{4}v^2-\frac{20}{2}v+\frac{6}{2}v^2+5v\right)\Big|_{v=0}^{v=1} \\
&= \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

سوال ۱۰

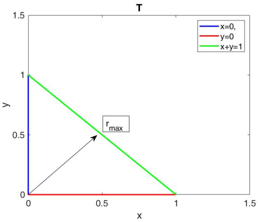
فرض کنیم T مثلث دارای راس های $(۰,۱), (۱,۰), (۰,۰)$ باشد. انتگرال

$\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA$ را

1. با تبدیل به مختصات قطبی و
2. با تغییر متغیرهای $u = y - x$ و $v = y + x$ محاسبه کنید.

جواب: (آ). به‌خوبی می‌دانیم که وتر مثلث T بخشی از خط زیر واقع در ربع اول دستگاه مختصات است

$$x + y = ۱$$



شکل:

حال با درنظر گرفتن مختصات قطبی به صورت $x = r\cos(\theta)$ و $y = r\sin(\theta)$ در رابطه فوق بدست می‌آوریم

$$r_{\max} = \frac{۱}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \tag{3}$$

از طرفی چون این مثلث در ربع اول واقع شده است لذا

$$۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}. \tag{4}$$

اکنون با استفاده از روابط (3) و (4) داریم

$$\begin{aligned} \iint_T e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)} dA &= \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} e^{\left(\frac{\sin(\theta)-\cos(\theta)}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}\right)} \int_۰^{۱/(\cos(\theta)+\sin(\theta))} r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} e^{\left(\frac{\sin(\theta)-\cos(\theta)}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}\right)} \frac{۱}{(\cos(\theta)+\sin(\theta))^۲} d\theta, \quad (5) \end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال (5) تغییر متغیر زیر بکار می‌گیریم

$$u = \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} du = \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^۲ - (\cos\theta - \sin\theta)^۲}{(\sin\theta+\cos\theta)^۲} d\theta \\ = \frac{۲d\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^۲}, \\ -۱ \leq u \leq ۱, \end{cases}$$

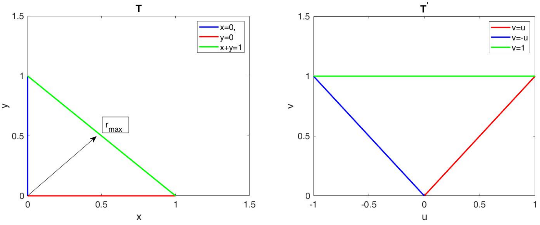
پس رابطه (5) به‌صورت زیر قابل بازنویسی است

$$\iint_T e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)} dA = \frac{۱}{۴} \int_{-۱}^{۱} e^u \, du = \frac{e - e^{-۱}}{۴}.$$

(ب). مثلث واحد T در صورت مسئله محصور به خطوط $x=0$، $y=0$ و $x+y=1$ می‌باشد که با انتقال تحت نگاشت معرفی شده یعنی

$$\begin{cases} u = y - x, \\ v = y + x, \end{cases} \qquad \text{یا معادلات} \qquad \begin{cases} x = \frac{v-u}{2}, \\ y = \frac{u+v}{2}. \end{cases}$$

به مثلث T' محصور به خطوط $u=v$، $u=-v$ و $v=1$ نگاشته می‌شود.



شکل:

پس داریم

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -۱/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{vmatrix} = -\frac{۱}{۲}, \qquad dx\,dy = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|du\,dy = \frac{۱}{۲}\,du\,dv,$$

و

$$\iint_T e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)} dA = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ \int_{-v}^{v} e^{\left(\frac{u}{v}\right)} du\,dv = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ \left(ve^{\left(\frac{u}{v}\right)}\right)\Big|_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(e - e^{-۱}\right)\int_۰^۱ v\,dv = \frac{e-e^{-۱}}{۴}.$$

سوال۱۱

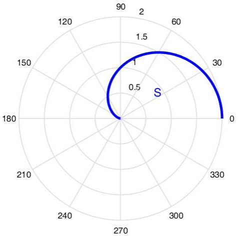
انتگرال $\iint_S \frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dxdy$ که در آن S ناحیه بالای محور x و زیر منحنی قطبی $r = ۱ + \cos\theta$ است را بصورت انتگرال مکرر در مختصات قطبی بنویسید و حدود انتگرال را بطور دقیق در مختصات قطبی تعیین کنید. (محاسبه انتگرال لازم نیست.)

جواب: ابتدا حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنیم. با توجه به نامنفی بودن r داریم

$$۰ \leq r \leq ۱ + \cos\theta,$$

و از طرفی چون ناحیه محصور بالای محور x است لذا

$$۰ \leq \theta \leq \pi.$$



شکل:

حال با جایگذاری $x = r\cos(\theta)$ ، $y = r\sin(\theta)$ و $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ به‌دست می‌آوریم

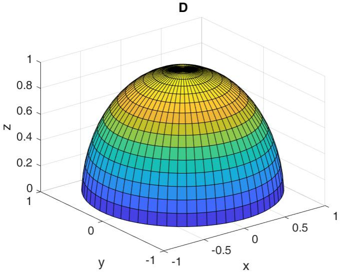
$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} dx\,dy &= \int_۰^{\pi} \int_۰^{۱+\cos\theta} \frac{r\sin(\theta)}{\sqrt{r^۲}} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_۰^{\pi} \int_۰^{۱+\cos\theta} \sin(\theta) r\,dr\,d\theta.
\end{aligned}$$

سوال۱۲

مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint_D (۳ + ۲xy) dV$ بر حجم محصور به نیمکره $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴$ و $z \geq ۰$.

جواب: ابتدا تعریف می‌کنیم

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^۳ \;\middle|\; x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴, \quad z \geq ۰ \right\}. \tag{6}$$



شکل:

داریم

$$\iiint_D (۳+۲xy)dV = ۳\iiint_D dV + ۲\iiint_D xydV = I + II.$$

راه 1: توجه داریم که حجم نیمکره به صورت $\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}$ بدست می‌آید که r شعاع نیمکره می‌باشد. پس

$$I = ۳(\frac{۲}{۳}\pi ۲^{۳}) = ۱۶\pi$$

از طرفی چون این نیمکره بر صفحات $x=\circ$ و $y=\circ$ متقارن است لذا

$$II = \circ$$

راه 2: با استفاده از مختصات کروی داریم

$$\rho^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲, \tag{7}$$

$$x = \rho \sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = \rho \cos(\phi). \tag{8}$$

با توجه به اینکه $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴$ لذا از رابطه (7) بدست می‌آوریم.

$$۰ \leq \rho \leq ۲ \tag{9}$$

همچنین شرط $z \geq ۰$ در (6) ایجاب می‌کند $\rho \cos(\phi) \geq ۰$ که با توجه به نامنفی بودن ρ نتیجه می‌شود که باید $\cos(\phi) \geq ۰$ برقرار باشد و از آنجایی که بخوبی می‌دانیم تابع cos در بازه $[۰, \pi]$ تنها در ربع اول مثبت است پس داریم

$$۰ \leq \phi \leq \pi/۲. \tag{10}$$

بعلاوه چون در (6) هیچ محدودیتی روی متغیرهای x و y نداریم لذا داریم

$$\circ \leq \theta \leq ۲\pi \tag{11}$$

اکنون با بکارگیری روابط (8)ـ(11) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\iiint_D (۳ + ۲xy)dV &= ۳\int_\circ^۲ \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \int_\circ^{۲\pi} \rho^۲ \sin(\phi)d\theta\, d\phi\, d\rho \\ &+ ۲\int_\circ^۲ \int_\circ^{\pi/۲} \int_\circ^{۲\pi} \rho^۴ \sin^۳(\phi)\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta d\phi d\rho, \\ &:= I + II\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} I &= ۳\int_\circ^۲ \rho^۲ d\rho \int_\circ^{\pi/۲} \sin(\phi)d\phi \int_\circ^{۲\pi} d\theta \\ &= ۳(\frac{\rho^۳}{۳})\Big|_{\rho=\circ}^{\rho=۲}[-\cos(\phi)]\Big|_{\phi=\circ}^{\phi=\pi/۲}(\theta)\Big|_{\theta=\circ}^{۲\pi} \\ &= ۲\pi(۸) = ۱۶\pi \end{aligned}$$

و

$$
\begin{aligned}
II &= ۲\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۲\pi}\rho^{۴}\sin(\phi)^{۳}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta\, d\phi\, d\rho,\\
&= ۲\int_{۰}^{۲}\rho^{۴}d\rho\int_{۰}^{\pi/۲}\sin^{۳}(\phi)d\phi\int_{۰}^{۲\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta\\
&= ۰
\end{aligned}
$$

چون

$$
\int_{۰}^{۲\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}\sin(۲\theta)d\theta=-\frac{۱}{۴}\cos(۲\theta)\Big|_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}=۰.
$$

سوال۱۳

مطلوبست محاسبه $\iiint e^{-x^2-2y^2-3z^2}\,dV$ روی $\mathbb{R}^3$.

حل: ابتدا باید از قبل بدانیم (طبق مثال 4.5 کتاب آدامز)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^{۲}} du = \sqrt{\pi}$$

به کمک روش تغییر متغیر و با فرض $k > ۰$ قرار می دهیم $u = \sqrt{k}t$, $du = \sqrt{k}dt$
بنابراین داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kt^{۲}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

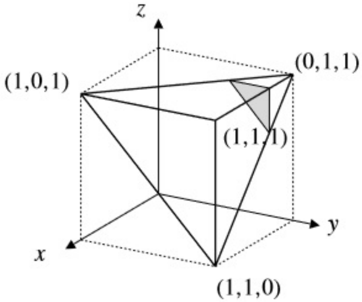
می دانیم طبق قضیه ی کتاب آدامز، اگر تابع مفروض بر دامنه اش پیوسته باشد، می توانیم انتگرال چندگانه را به فرم انتگرال مکرر بنویسیم. حال با دانستن این قضیه و به کمک رابطه فوق داریم:

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^۳} e^{-x^۲-۲y^۲-۳z^۲} dV = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^۲} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-۲y^۲} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-۳z^۲} dz$$

$$= \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\frac{\pi}{۳}} = \frac{\pi^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{۶}}$$

سوال ۱۴

مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint xdV$ روی چهاروجهی محصور به صفحات $x = ۱, y = ۱, z = ۱, x + y + z = ۲$.


z
(1,0,1)
(0,1,1)
(1,1,1)
y
x
(1,1,0)

حل: اگر دامنه ی انتگرال گیری را T بنامیم. (چنانکه می دانیم در واقع تعبیر انتگرال مفروض معادل است با یافتن حجم یک شی چهار بعدی که T قاعده ی آن در فضای سه بعدی است).

$$\iiint_T x\,dV = \int_{0}^{1}\int_{1-x}^{1}\int_{2-x-y}^{1} x\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{1-x}^{1} (x^{2} + xy - x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} x \int_{1-x}^{1} (x + y - 1)\,dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} x\left[(x-1)y + \frac{y^{2}}{2}\right]\Big|_{1-x}^{1}$$

$$= \int_{0}^{1} x\left[\frac{(x-1)^{2}}{2} + x - \frac{1}{2}\right]dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{x^{2}}{2}\,dx = \frac{1}{\;}$$

سوال۱۵

در هر یک از انتگرال های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرالگیری، محاسبه کنید.

1. $$\int_{۰}^{۱}\int_{z}^{۱}\int_{۰}^{x} e^{x^{۳}}\,dydxdz$$
2. $$\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}\int_{y}^{۱} \frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\,dzdydx$$

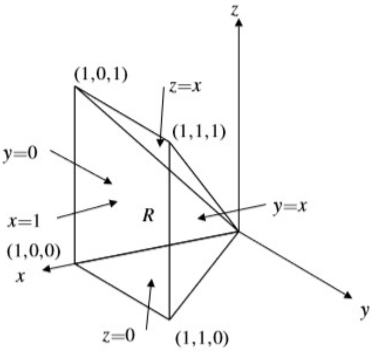
پاسخ سوال ۱۵

حل قسمت الف: ناحیه انتگرال گیری را R می نامیم. توجه کنید که R در واقع حجم سه بعدی حاصل از تقاطع صفحاتی است که در حدود هر یک از انتگرال های صورت مساله ظاهر شده اند.

$$\int_{۰}^{۱}\int_{z}^{۱}\int_{۰}^{x} e^{x^{۳}}\,dydxdz = \iiint_{R} e^{x^{۳}}\,dV = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x}\int_{۰}^{x} e^{x^{۳}}\,dzdydx$$

$$= \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x} xe^{x^{۳}}\,dydx = \int_{۰}^{۱} x^{۲}e^{x^{۳}}\,dx = \frac{۱}{۳}e^{x^{۳}}\Big|_{۰}^{۱} = \frac{e-۱}{۳}$$

شکل سوال ۱۵ الف



حل قسمت ب:

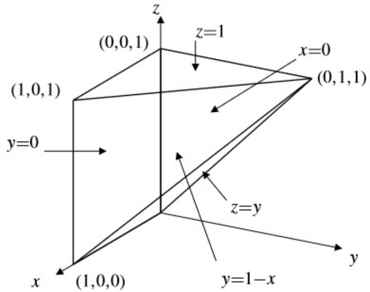
$$\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۱-x}\int_{y}^{۱}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}dzdydx=\int\int\int_{R}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}dV=$$

$$\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{z}\int_{\circ}^{۱-y}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}dxdydz=\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{z}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}(۱-y)dydz$$

قبل از انتگرال گیری نسبت به y برای راحتی بهتر است عبارت کسری را از انتگرال خارج کنید. بنابراین

$$\int_{\circ}^{۱}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\int_{\circ}^{z}(۱-y)dydz=\int_{\circ}^{۱}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}(y-\frac{y^{۲}}{۲})\Big|_{\circ}^{z}dz=$$

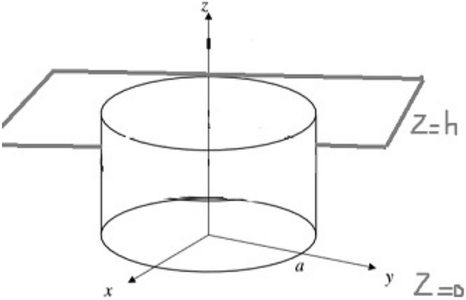
$$\int_{\circ}^{۱}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}(z-\frac{z^{۲}}{۲})dz=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۱}\sin(\pi z)dz=\frac{۱}{\pi}$$


z
(0,0,1)
z=1
x=0
(1,0,1)
(0,1,1)
y=0
z=y
y
x
(1,0,0)
y=1−x

سوال۱۶

مطلوبست محاسبه $\int\int\int_R (x^۲+y^۲+z^۲)dV$ که در آن، R عبارتست از استوانه $a^۲ \leq x^۲+y^۲ \leq ∘$ و $h \leq z \leq ∘$.

حل: دامنه ی انتگرال گیری R ، در واقع حجمی است که بوسیله ی استوانه و صفحات $z=h$ و $z=\circ$ محصور شده است. با انتخاب مختصات استوانه ای داریم :

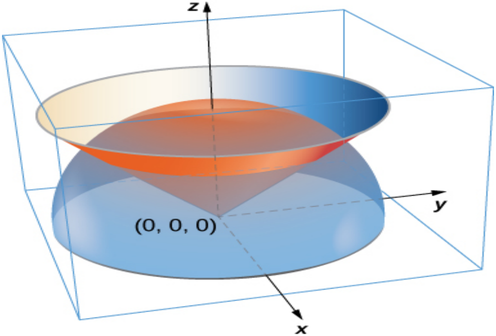


$$\int\int\int_R (x^۲+y^۲+z^۲)dV = \int_۰^a \int_۰^h \int_۰^{۲\pi} r(x^۲+y^۲+z^۲)d\theta dz dr$$
$$= ۲\pi \int_۰^a \int_۰^h r(r^۲+z^۲)dzdr$$
$$= ۲\pi \int_۰^a r(r^۲ z+\frac{z^۳}{۳})\Big|_۰^h dr$$
$$= ۲\pi \int_۰^a (r^۳ h+\frac{۱}{۳} r h^۳)dr$$
$$= ۲\pi (\frac{r^۴}{۴}h+\frac{۱}{۳}\frac{r^۲}{۲}h^۳)\Big|_۰^a$$
$$= ۲\pi (\frac{a^۴ h}{۴}+\frac{a^۲ h^۳}{۶}) = \pi(\frac{a^۴ h}{۲}+\frac{a^۲ h^۳}{۳})$$

سوال۱۷

مطلوب است محاسبه‌ی $\iiint_R (x^۲ + y^۲ + z^۲) dV$ که در آن، R ناحیه‌ای است که بالای مخروط $z = c\sqrt{x^۲ + y^۲}$ و درون کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ قرار دارد.

پاسخ سوال ۱۷



مختصات کروی

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = \rho \cos\varphi \qquad \varphi = \arccos \frac{z}{\rho}$$

$$۰ \leq \theta \leq ۲\pi \qquad ۰ \leq \varphi \leq \pi$$

$$dxdydz = \rho^۲ \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$x^۲+y^۲+z^۲=a^۲ \implies ۰\le\rho\le a$$

$$z=c\sqrt{x^۲+y^۲} \implies \rho\cos\varphi=c\sqrt{\rho^۲\sin^۲\varphi} \implies \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{۱}{c}$$

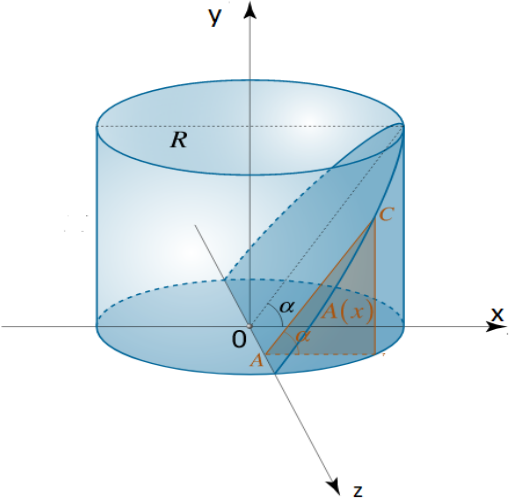
$$\implies ۰\le\varphi\le\arctan\frac{۱}{c}$$

$$I=\iiint_R(x^۲+y^۲+z^۲)dV=\int_۰^{۲\pi}d\theta\int_۰^{\arctan\frac{۱}{c}}\sin\varphi d\varphi\int_۰^a\rho^۴d\rho$$

$$=\frac{۲\pi a^۵}{۵}\left(۱-\cos\left(\arctan\frac{۱}{c}\right)\right)=\frac{۲\pi a^۵}{۵}\left(۱-\frac{c}{\sqrt{۱+c^۲}}\right)$$

سوال۱۸

با استفاده از انتگرال دوگانه، مساحت آن قسمت از رویه‌ی استوانه‌ای $x^۲ + z^۲ = ۴$ که بالای ناحیه‌ی $۰ \leq x \leq ۲$ و $۰ \leq y \leq x$ قرار دارد را بیابید.



y
R
C
α
A(x)
x
0
α
A
z

با توجه به معادله‌ی استوانه داریم؛ $z^۲ = ۴ - x^۲$. از دو طرف این معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم؛ $۲z\frac{\partial z}{\partial x} = -۲x \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$. برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی محصور، با توجه به رابطه‌ی $dS = \sqrt{۱ + (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲}dA$ داریم:

$$dS = \sqrt{۱ + (\frac{x}{z})^۲}dA = \sqrt{۱ + \frac{x^۲}{۴ - x^۲}}dA = \frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲}}dA$$

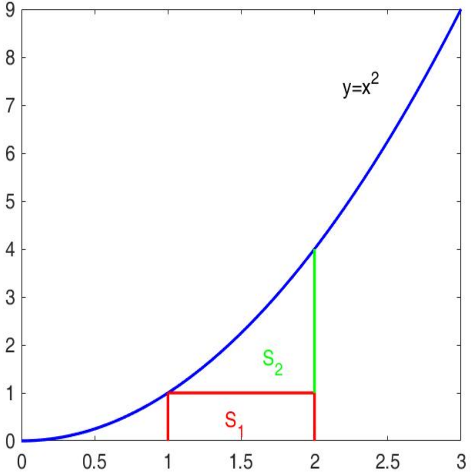
$$S = \int_۰^۲ \int_۰^x \frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲}}dydx = \int_۰^۲ \frac{۲x}{\sqrt{۴ - x^۲}}dx = -۲\sqrt{۴ - x^۲}\Big|_۰^۲ = ۴$$

سوال۱۹

انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{۰}^{۱}\int_{۱}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)dxdy+\int_{۱}^{۴}\int_{\sqrt{y}}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)dxdy$$

پاسخ سوال ۱۹

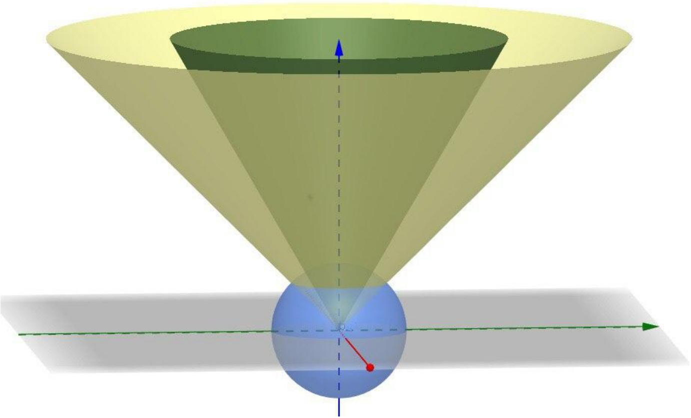


$$I=\int_{۱}^{۲}\int_{۰}^{x^{۲}}\frac{\sin(\pi x/۲)}{x^{۴}}ydydx=\int_{۱}^{۲}\frac{\sin(\pi x/۲)}{x^{۴}}\Big(\frac{y^{۲}}{۲}\Big|_{۰}^{x^{۲}}\Big)dx$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}\sin\Big(\frac{\pi x}{۲}\Big)dx=\frac{-۱}{\pi}\cos\Big(\frac{\pi x}{۲}\Big)\Big|_{۱}^{۲}=\frac{۱}{\pi}$$

سوال ۲۰

حجم ناحیه محصور به مخروط های $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و $z=\sqrt{۳(x^۲+y^۲)}$ و کره های $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ را محاسبه کنید.



حل: با استفاده از دستگاه مختصات کروی می دانیم $\rho = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$. بنابراین،
با توجه به کره های ذکر شده در صورت سوال داریم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱ \Longrightarrow \rho = ۱ \quad \& \quad x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳ \Longrightarrow \rho = \sqrt{۳}$$

$$\Longrightarrow$$

$$۱ \leq \rho \leq \sqrt{۳}$$

بعلاوه، در دستگاه مختصات کروی داریم:

$$z = \rho \cos\phi, \quad x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

بنابراین، با استفاده از معادله ذکر شده برای مخروط اول در سوال، داریم:

$$\rho \cos\phi = z = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{\rho^۲ \sin^۲\phi \cos^۲\theta + \rho^۲ \sin^۲\phi \sin^۲\theta}$$

$$= \rho \sin\phi \Longrightarrow \cos\phi = \sin\phi \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{۴}$$

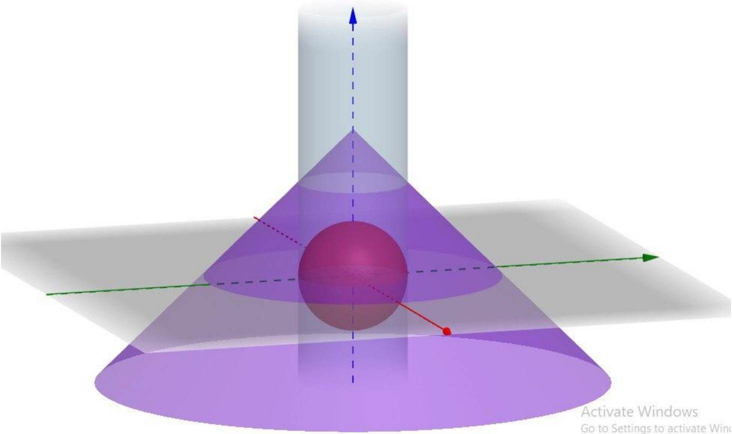
به صورت مشابه با استفاده از مخروط دوم خواهیم داشت:

$$\rho\cos\phi = z = \sqrt{3(x^2+y^2)} = \sqrt{3(\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta)}$$
$$= \sqrt{3}\rho\sin\phi \implies \phi = \frac{\pi}{6} \implies \frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{\pi}{4}$$

$$V = \iiint_D dV = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{\sqrt{3}} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{3}} \sin\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$= -\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)\int_0^{2\pi} \cos\phi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = -\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

سوال۲۱

اگر D ناحیه خارج $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و داخل استوانه $x^۲ + y^۲ = ۱$ و زیر مخروط $z = (\sqrt{۳} + ۱) - \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و بالای صفحه $z = ۰$ باشد، کران های $\iiint_V dV$ را در مختصات کروی بنویسید. (محاسبه انتگرال لازم نیست.)



با استفاده از معادله های استوانه و مخروط ذکر شده در سوال خواهیم داشت:

$$x^۲ + y^۲ = ۱$$

$$z = (\sqrt{۳} + ۱) - \sqrt{x^۲ + y^۲} \Longrightarrow \quad z = (\sqrt{۳} + ۱) - \sqrt{۱} = \sqrt{۳}$$

بعلاوه، در دستگاه مختصات کروی داریم:

$$z = \rho \cos\phi, \qquad x = \rho \sin\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\rho \cos\phi = z = \sqrt{۳}$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Longrightarrow \rho \sin\phi = ۱$$

در نتیجه:

$$\tan\phi = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Longrightarrow \quad \phi_۰ = \frac{\pi}{۶}$$

با استفاده از دستگاه مختصات کروی می دانیم:

$$\rho = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}, \quad x = \rho \sin\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

بنابراین، با توجه به کره، استوانه و مخروط ذکر شده در سوال داریم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱ \Longrightarrow \quad \rho = ۱$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Longrightarrow \quad \rho^۲ \sin^۲\phi = ۱ \Longrightarrow \quad \rho = \frac{۱}{\sin\phi}$$

$$\rho \cos\phi = z = (\sqrt{۳} + ۱) - \sqrt{x^۲ + y^۲} = (\sqrt{۳} + ۱) - (\rho \sin\phi)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\rho = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\cos\phi + \sin\phi}$$

بنابراین داریم:

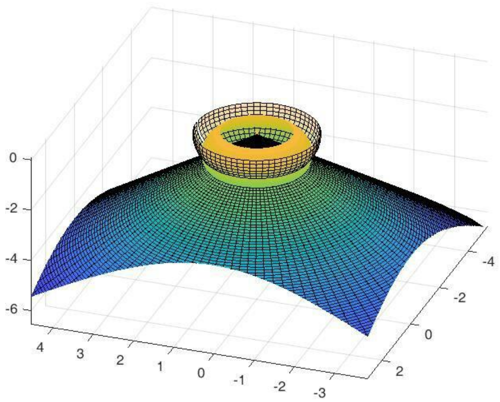
$$V=\iiint_D dV=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\int_{۱}^{\frac{\sqrt{۳}+۱}{\cos\phi+\sin\phi}}\rho^{۲}\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta+$$

$$\int_{۰}^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۱}^{\frac{۱}{\sin\phi}}\rho^{۲}\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

سوال۲۲

فرض کنید V درون مخروط $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ و رویه $\rho = 1 - \cos\varphi$ و خارج کره $\rho = \frac{3}{2}$ باشد. مطلوبست محاسبه انتگرال زیر $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$.

پاسخ سوال ۲۲



می دانیم در دستگاه مختصات کروی داریم:

$$\rho = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}, \qquad dV = \rho^۲ \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$\Rightarrow$$

$$\iiint_V \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} dV = \iiint_V \rho\rho^۲ \sin\phi d\rho d\theta d\phi =$$

$$\iiint_V \rho^۳ \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

دقت می کنیم در صورت سوال ذکر شده است که حجم درون مخروط، درون رویه و خارج از کره مد نظر است. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$۰ \leq \theta \leq ۲\pi, \qquad \frac{۲\pi}{۳} \leq \phi \leq \pi, \qquad \frac{۳}{۲} \leq \rho \leq ۱ - \cos\phi$$

$$V=\iiint_V \sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}dV=\iiint_V \rho^{۳}\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\pi}\int_{\frac{۳}{۲}}^{۱-\cos\phi}\rho^{۳}\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\pi}\frac{\rho^{۴}}{۴}\,\Big|_{\frac{۳}{۲}}^{۱-\cos\phi}\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\pi}[(۱-\cos\phi)^{۴}\sin\phi-(\frac{۳}{۲})^{۴}\sin\phi]\, d\phi\, d\theta$$

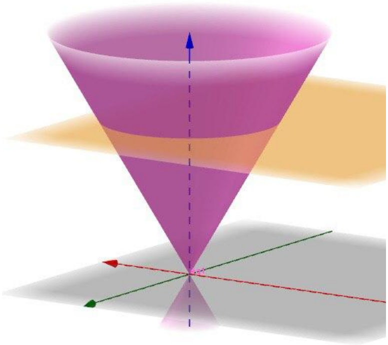
$$=\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۲\pi}[\frac{۱}{۵}(۱-\cos\phi)^{۵}+(\frac{۳}{۲})^{۴}\cos\phi]\,\Big|_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\pi}\, d\theta$$

$$=\frac{۲\pi}{۴}[\frac{۱}{۵}(۱-\cos\phi)^{۵}+(\frac{۳}{۲})^{۴}\cos\phi]\,\Big|_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\pi}=\frac{\pi}{۲}[\frac{۳۲}{۵}-\frac{۸۱}{۱۶}-\frac{۲۴۳}{۱۶۰}+\frac{۸۱}{۳۲}]=$$

سوال۲۳

مطلوبست محاسبه حجم محصور به صفحه $z = \cos\alpha$ و مخروط $x^{۲} + y^{۲} = z^{۲}\tan^{۲}\alpha$ با استفاده از دستگاه مختصات کروی.

پاسخ سوال ۲۳



با استفاده از دستگاه مختصات کروی می دانیم:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\phi$$

$$\cos\alpha = z = \rho\cos\phi \;\Rightarrow\; \rho = \frac{\cos\alpha}{\cos\phi} \;\Rightarrow\; ۰ \leq \rho \leq \frac{\cos\alpha}{\cos\phi}$$

همچنین داریم:

$$\rho^۲ \sin^۲\phi = x^۲ + y^۲ = z^۲ \tan^۲\alpha = \rho^۲\cos^۲\phi \tan^۲\alpha \;\Rightarrow\; \tan^۲\phi = \tan^۲\alpha \;\Rightarrow$$

$$\tan\phi = \pm\tan\alpha \;\Rightarrow\; \phi \in \{\alpha, -\alpha, \pi-\alpha, \pi+\alpha\}$$

دقت می کنیم اگر $۰ \leq \alpha \leq \pi$ آنگاه $\phi = \alpha$ یا $\phi = \pi - \alpha$.
همچنین، اگر $\pi \leq \alpha \leq ۲\pi$ آنگاه $\phi = ۲\pi - \alpha$ یا $\phi = \alpha - \pi$.

$$V=\iiint_D dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{\frac{\cos\alpha}{\cos\phi}}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\frac{\cos\alpha}{\cos\phi}}\sin\phi\,d\phi\,d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\phi}\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=\frac{\cos^3\alpha}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}d\phi\,d\theta=\frac{\cos^3\alpha}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\frac{1}{\cos^2\phi}d\phi\,d\theta$$

$$=\frac{\cos^3\alpha}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\tan\phi(1+\tan^2\phi)d\phi\,d\theta$$

$$=\frac{\cos^3\alpha}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\tan^2\phi\Big|_0^{\alpha}d\theta=\frac{\cos^3\alpha}{6}\tan^2\alpha\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=2\pi\frac{\cos^3\alpha}{6}\tan^2\alpha=\frac{\pi}{3}\cos^3\alpha\,\tan^2\alpha.$$

اگر سایر مقادیر ممکن را برای کران بالای ϕ در نظر بگیریم، استدلال‌های مشابهی خواهیم داشت و دقیقاً به همین مقدار می‌رسیم.

متشکر از توجه شما