حد و پیوستگی

تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

پاییز ۱۴۰۲

تعریف

می‌گوییم ℓ **حد** تابع $f(x)$ است وقتی که x به a میل می‌کند و می‌نویسیم:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \ell}$$

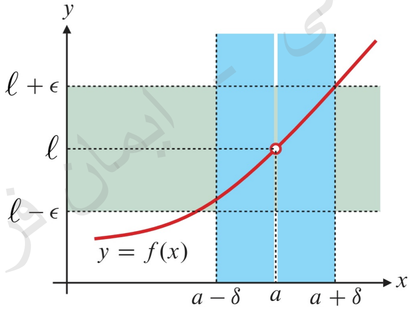
اگر

- تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی a تعریف شده باشد. (توجه می‌کنیم که $f(x)$ لازم نیست در نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد.)
- برای هر $\varepsilon > 0$ بتوانیم $\delta > 0$ را بیابیم به‌طوری که اگر $0 < |x - a| < \delta$، آن‌گاه $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

به‌طور معادل

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر، $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ هرگاه به‌ازای xهای به اندازه‌ی کافی نزدیک به نقطه‌ی a، بتوانیم مقادیر $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه نزدیک به مقدار ℓ به‌دست آوریم.



مثال

ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۲}(۳x-۲)=۴$.

پاسخ: باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon>۰$، $\delta>۰$ وجود دارد به‌طوری که اگر داشته باشیم $۰<|x-۲|<\delta$، آن‌گاه $|(۳x-۲)-۴|<\varepsilon$. از آنجایی‌که انتخاب δ وابسته به ε است، نیاز است که رابطه‌ای بین $|x-۲|$ و $|(۳x-۲)-۴|$ برقرار کنیم.

$$|(۳x-۲)-۴|=|۳x-۶|=۳|x-۲|.$$

پس، برای $\varepsilon>۰$، کافی است $\delta=\frac{\varepsilon}{۳}$ را انتخاب کنیم. بنابراین، اگر

$$۰<|x-۲|<\delta=\frac{\varepsilon}{۳}\implies |(۳x-۲)-۴|=۳|x-۲|<۳\left(\frac{\varepsilon}{۳}\right)=\varepsilon.$$

تمرین

فرض کنید $f(x)=c$ و $g(x)=x$. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to x_۰} f(x)=c,\qquad \lim_{x\to x_۰} g(x)=x_۰.$$

تعریف

- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی بازه‌ی (a, c) تعریف شده باشد. می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = a$ دارای **حدراست** برابر با ℓ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$

هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ : \ a < x < a + \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- فرض کنیم تابع $f(x)$ روی بازه‌ی (c, a) تعریف شده باشد. می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = a$ دارای **حدچپ** برابر با ℓ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$$

هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ : \ a - \delta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

قضیه (یکتایی حد)

حد یک تابع در صورت وجود یکتاست.

قضیه

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\ell$.

نتیجه

اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ یا $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ وجود نداشته باشد یا $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد.

مثال

نشان دهید تابع $f(x)=\dfrac{|x-۲|}{x-۲}$ در $x=۲$ حد ندارد.

پاسخ: نشان می‌دهیم حدهای چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=۲$ با هم برابر نیستند.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x-۲|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+} ۱=۱,$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-} -۱=-۱.$$

چون $\lim_{x\to ۲^-} f(x)\neq \lim_{x\to ۲^+} f(x)$، پس $f(x)$ در $x=۲$ حد ندارد.

قضیه

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ حد داشته باشند. در این صورت

- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell > 0 \implies \lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell} \qquad (n \in \mathbb{N})$

مثال

نشان دهید

$$\lim_{x\to x_0}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n$$

پاسخ: می‌دانیم $\lim_{x\to x_0} a = a$ و $\lim_{x\to x_0} x = x_0$. با استفاده از رابطه‌ی دوم در قضیه‌ی قبل، داریم:

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = (\lim_{x\to x_0} x)(\lim_{x\to x_0} x) = x_0^2$$

$$\lim_{x\to x_0} x^3 = (\lim_{x\to x_0} x)(\lim_{x\to x_0} x^2) = x_0^3$$

با ادامه‌ی این فرآیند می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{x\to x_0} x^n = (\lim_{x\to x_0} x)(\lim_{x\to x_0} x^{n-1}) = x_0^n$$

همچنین، داریم $\lim_{x\to x_0} a_ix^i = (\lim_{x\to x_0} a_i)(\lim_{x\to x_0} x^i) = a_ix_0^i$ که $0 \le i \le n$. با استفاده از رابطه‌ی اول در قضیه‌ی قبل حل کامل می‌شود.

نکته

فرض کنید f تابعی باشد که در $x = a$ حد ندارد. قرار دهید $g = -f$. در این صورت $f + g = f - f = 0$ در $x = a$ حد دارد. یعنی اگر $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه نمی‌توان وجود $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ یا $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ را نتیجه گرفت. به‌طور مشابه، این نکته برای $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x)$ و $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ نیز برقرار می‌باشد.

گزاره

- اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell > 0$، آنگاه بازه‌ای حول a موجود است که به‌ازای هر x در این بازه (صرف نظر از خود a) داریم $f(x) > 0$.
- اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell < 0$، آنگاه بازه‌ای حول a موجود است که به‌ازای هر x در این بازه (صرف نظر از خود a) داریم $f(x) < 0$.

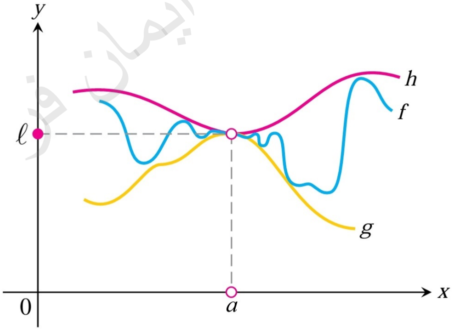
قضیه فشردگی

فرض کنید به‌ازای هر x در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی a داشته باشیم:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

اگر $\lim_{x\to a} h(x) = \ell = \lim_{x\to a} g(x)$، آن‌گاه $f(x)$ هم در $x = a$ دارای حد است و

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$



مثال

مطلوب است محاسبه‌ی

$$\lim_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right].$$

پاسخ: برای هر عدد حقیقی t داریم $t-۱<[t]\le t$. پس به‌ازای هر $x\neq ۰$ می‌توان نوشت $\frac{۱}{x}-۱<[\frac{۱}{x}]\le\frac{۱}{x}$. داریم:

$$x>۰ \implies x\left(\frac{۱}{x}-۱\right)<x\left[\frac{۱}{x}\right]\le x\frac{۱}{x} \implies ۱-x<x\left[\frac{۱}{x}\right]\le ۱$$

چون $\lim\limits_{x\to ۰^+}(۱-x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}۱=۱$ ، بنابر قضیه‌ی فشردگی داریم $\lim\limits_{x\to ۰^+}x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$.

$$x < ۰ \implies x\left(\frac{۱}{x} - ۱\right) > x\left[\frac{۱}{x}\right] \geq x\frac{۱}{x} \implies ۱ - x > x\left[\frac{۱}{x}\right] \geq ۱$$

مانند حالت قبل، از قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌شود ۱ $= \lim\limits_{x\to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right]$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right] = \lim_{x\to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right] = \lim_{x\to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$$

توجه

- فرض کنید $f(x)$ یک تابع باشد. داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$$

- اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$، آن‌گاه با استفاده از تعریف حد می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.

توجه کنید که اگر $\lim_{x\to a} |f(x)| = \ell \neq 0$، آن‌گاه در مورد حد تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت (این مطلب را با ارائه‌ی یک مثال تایید کنید).

تعریف

تابع $f(x)$ که دامنه‌اش مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\{۱, ۲, ۳ \ldots\}$ باشد را یک دنباله‌ی نامتناهی می‌نامند. مقدار تابع $f(n)$ را جمله nـام دنباله می‌نامند. معمولا دنباله را با به‌ترتیب نوشتن برد تابع نمایش می‌دهند:

$$f(۱), f(۲), \ldots, f(n), f(n+۱), \ldots$$

می‌توانیم به جای $f(n)$ بنویسیم f_n، a_n، s_n، x_n و ... . همچنین، نماد $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را جهت نمایش یک دنباله به‌کار می‌بریم.

تعریف

دنباله $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دارای حد a است (و می‌نویسیم $a_n \to a$) هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که اگر $n \geq N$، آنگاه $|a_n - a| < \varepsilon$.

اگر با میل کردن n به بی‌نهایت، مقادیر a_n به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کنند، می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا است و می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \text{ یا } -\infty.$$

همچنین، اگر مقادیر a_n به مقدار مشخصی میل نکنند، باز هم می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا است.

مثال

- دنباله‌های $\{\frac{1}{n}\}$، $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ و $\{\frac{\sin n}{n^2}\}$ همگرا به صفر هستند.
- دنباله‌ی $\{n+1\}$ واگرا به $+\infty$ است.
- دنباله‌ی $\{(-1)^n\}$ وگراست. در واقع این دنباله به یک مقدار مشخص میل نمی‌کند.

قضیه (ارتباط بین حد تابع و حد دنباله)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔی $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ که $a \to a_n$، $a_n \to a$ داشته باشیم $f(a_n) \to \ell$.

نتیجه (برای اثبات عدم وجود حد)

با توجه به قضیهٔی بالا، اگر بتوانیم دو دنباله مانند $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا به a بیابیم به‌طوری که دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به یک مقدار همگرا نباشند، آن‌گاه می‌توانیم نتیجه بگیریم که تابع $f(x)$ در $x = a$ حد ندارد.

به عبارت دیگر، اگر $a_n \to a$، $b_n \to a$ و $f(a_n) \to \ell_۱$، $f(b_n) \to \ell_۲$ که $\ell_۱ \neq \ell_۲$، آن‌گاه تابع $f(x)$ در $x = a$ حد ندارد.

مثال

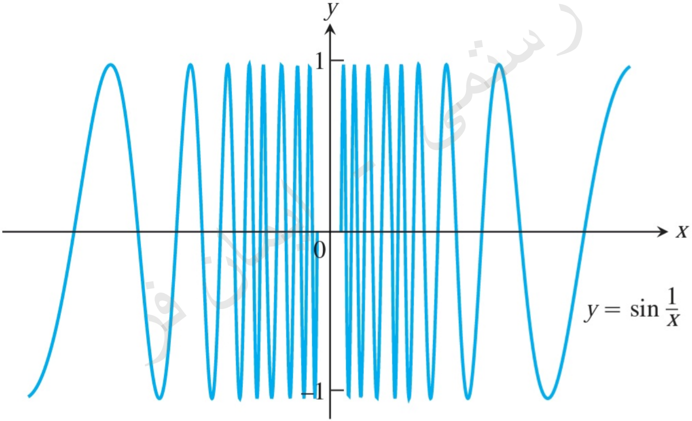
نشان دهید تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ در صفر حد ندارد.

پاسخ: دنباله‌های $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ و $b_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $a_n, b_n \to 0$. داریم:

$$f(a_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \implies f(a_n) \to 0.$$

$$f(b_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}}\right) = \sin\left((2n + \frac{1}{2})\pi\right) = 1 \implies f(b_n) \to 1.$$

بنابراین تابع $f(x)$ در $x = 0$ حد ندارد.


y
1
x
0
−1
$y = \sin \frac{1}{x}$

تذکر

اگر $a \in \mathbb{R}$، آن‌گاه دنباله‌ای از اعداد گویا و دنباله‌ای از اعداد گنگ وجود دارند که به a میل می‌کنند. برای این منظور، قرار می‌دهیم $a_n = \frac{[na]}{n}$. واضح است که $a_n \in \mathbb{Q}$. نشان می‌دهیم $a_n \to a$.

$$na - ۱ < [na] \leq na \implies -۱ < [na] - na \leq ۰$$

$$\implies -\frac{۱}{n} < a_n - a \leq ۰ < \frac{۱}{n} \implies |a_n - a| < \frac{۱}{n} \implies (a_n - a) \to ۰$$

در نتیجه $a_n \to a$.

اگر قرار دهیم $b_n = \frac{[na]}{n} + \frac{\sqrt{۲}}{n} = a_n + \frac{\sqrt{۲}}{n}$، آن‌گاه $b_n \in \mathbb{Q}^c$ و $b_n \to a$ زیرا $\frac{\sqrt{۲}}{n} \to ۰$.

مثال

نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

پاسخ: فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌ترتیب دنباله‌هایی از اعداد گویا و گنگ باشند که به a میل می‌کنند. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} f(a_n) = ۱ \to ۱ \\ f(b_n) = ۰ \to ۰ \end{cases} \implies \lim_{x\to a} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

تعریف

فرض کنید $g : D \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد و $S \subseteq D$. تابع $g(x)$ را بر مجموعه‌ی S کران‌دار می‌گوییم، هرگاه عدد حقیقی M وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\forall x \in S, \qquad |g(x)| \leq M.$$

قضیه (قاعده صفر × کراندار)

اگر $\lim_{x \to a} f(x) = ۰$ و تابع $g(x)$ بر یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = a$ تابعی کران‌دار باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = ۰.$$

مثال

حاصل حد زیر را درصورت وجود به‌دست آورید:

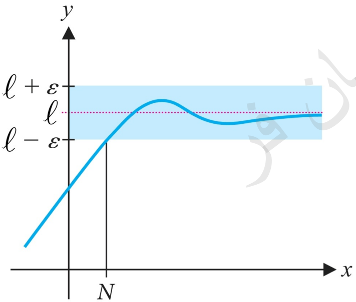
$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos \frac{1}{x^3}$$

پاسخ: تابع $g(x) = \cos \frac{1}{x^3}$ را به ازای $x \neq 0$ درنظر می‌گیریم. می‌دانیم $g(x)$ بر هر همسایگی محذوف نقطه‌ی $x = 0$ کران‌دار است. همچنین، $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. پس طبق قضیه‌ی قبل، حاصل حد داده شده برابر با صفر است.

تعریف

تابع $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که در آن $a\in\mathbb{R}$. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند برابر با ℓ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ، هرگاه

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0\ :\ \forall x>N,\ |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

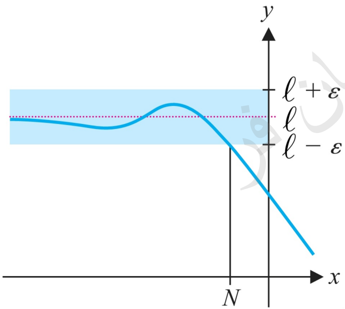


به عبارت دیگر، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ هرگاه با انتخاب نقاط x به اندازه‌ی کافی بزرگ، بتوانیم مقادیر $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه نزدیک به مقدار ℓ به‌دست آوریم.

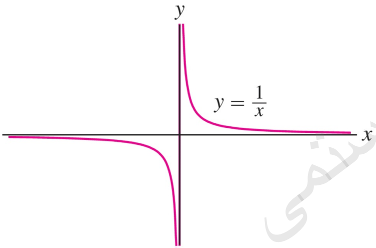
تعریف

تابع $f:(-\infty,a)\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که در آن $a\in\mathbb{R}$. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به $-\infty$ میل می‌کند برابر با ℓ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ ، هرگاه

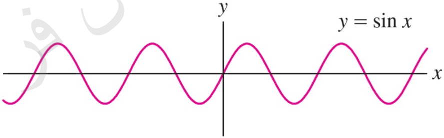
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N < 0\ :\ \forall x < N,\ |f(x)-\ell| < \varepsilon$$



به عبارت دیگر، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ هرگاه با انتخاب نقاط x به اندازه‌ی کافی کوچک، بتوانیم مقادیر $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه نزدیک به مقدار ℓ به‌دست آوریم.



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$



$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$ وجود ندارد.

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی حد زیر:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5 - 7x^4 - 12x^2 + 6}{5x^5 - x^3 + 8x}$$

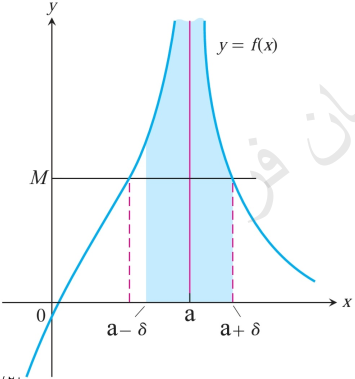
پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5 - 7x^4 - 12x^2 + 6}{5x^5 - x^3 + 8x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^5}(3 - \frac{7}{x} - \frac{12}{x^3} + \frac{6}{x^5})}{\cancel{x^5}(5 - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^4})} = \frac{3}{5}$$

تعریف

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ در $x=a$ برابر با $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$، هرگاه

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \ :\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > M$$

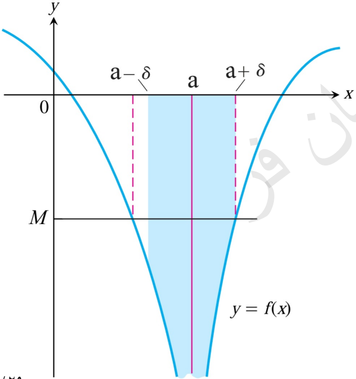


به عبارت دیگر، $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$، هرگاه با انتخاب نقاط x به اندازه‌ی کافی نزدیک به نقطه‌ی $x=a$، بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه بزرگ به‌دست آورد.

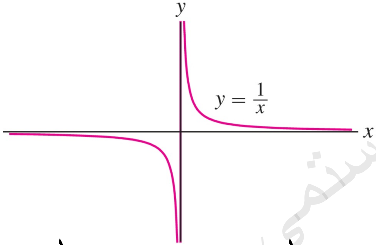
تعریف

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی a $x=a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ در $x=a$ برابر با $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$، هرگاه

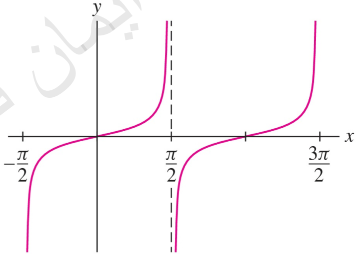
$$\forall M < 0,\ \exists \delta > 0 \ : \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < M$$



به عبارت دیگر، $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$، هرگاه با انتخاب نقاط x به اندازه‌ی کافی نزدیک به نقطه‌ی a $x=a$، بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه کوچک به‌دست آورد.



$$\lim_{x \to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$$



$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۲})^-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x \to (\frac{\pi}{۲})^+} \tan x = -\infty$$

مثال

نشان دهید حدهای زیر وجود ندارند.

$$(1)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0} \frac{|x-[x]|}{x}$$

پاسخ:

$$1)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ حد وجود ندارد

$$2)\quad \lim_{x\to 0} \frac{|x-[x]|}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x-[x]|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x-[0^-]|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x+1|}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x-[x]|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x-[0^+]|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \end{cases}$$

بنابراین حد وجود ندارد.

تعریف

- هرگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\forall M>0,\ \exists N>0\ :\ \forall x>N \Rightarrow f(x)>M$$

- هرگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$$\forall M<0,\ \exists N>0\ :\ \forall x>N \Rightarrow f(x)<M$$

- هرگاه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$$\forall M>0,\ \exists N<0\ :\ \forall x<N \Rightarrow f(x)>M$$

- هرگاه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$\forall M<0,\ \exists N<0\ :\ \forall x<N \Rightarrow f(x)<M$$

تعریف (پیوستگی تابع در یک نقطه)

تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x = a$ **پیوسته** گوییم، هرگاه $f(x)$ در $x = a$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

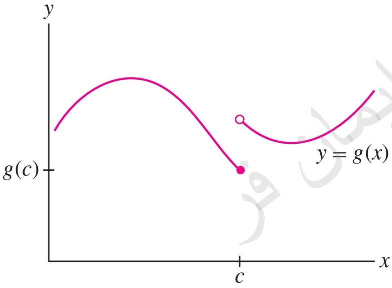
تعریف (پیوستگی راست (چپ))

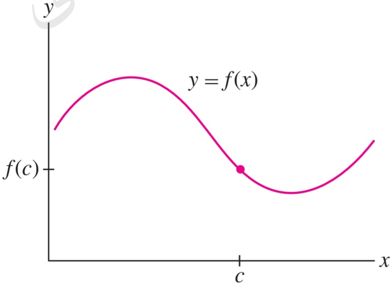
تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته‌ی راست (چپ) گوییم، هرگاه

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \left(\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right)$$

بنابراین، تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته است اگر و تنها اگر در نقطه‌ی $x = a$ از راست و چپ پیوسته باشد.

مطابق شکل‌های زیر، تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = c$ پیوسته و تابع $g(x)$ در این نقطه ناپیوسته است. در واقع، تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x = c$ از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته است.





قضیه

اگر توابع f و g در نقطه‌ی a پیوسته باشند، آن‌گاه $f \pm g$، $f \cdot g$ و $\dfrac{f}{g}$ (در صورتی که $g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ پیوسته می‌باشند.

قضیه

تابع $f \circ g(x)$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ و $f(t)$ در $t = \ell$ پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x \to a} f \circ g(x) = f(\ell).$$

به عبارت دیگر

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

به‌علاوه، اگر $g(x)$ در $x = a$ و $f(t)$ در $t = g(a)$ پیوسته باشند، آن‌گاه $f \circ g(x)$ در $x = a$ پیوسته است و داریم:

$$\lim_{x \to a} f \circ g(x) = f \circ g(a).$$

تذکر

- می‌گوییم تابع $f(x)$ روی بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته است، اگر در هر نقطه‌ی بازه باز (a,b) پیوسته باشد و

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

- توابع

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = |x|, \quad y = a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_n x^n$$

در همه‌ی نقاط پیوسته هستند.

- توجه کنید که برای تابع $f(x)$ داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{h\to ۰} f(a+h) = \ell.$$

درنتیجه، تابع $f(x)$ در $x = a$ پیوسته است، اگر و تنها اگر

$$\lim_{h\to ۰} f(a+h) = f(a).$$

مثال

ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ ۱-x & x\in\mathbb{Q}^c \end{cases}$ فقط در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته است.

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم برای هر $\varepsilon>۰$، $\delta>۰$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $|x-\frac{۱}{۲}|<\delta$ آن‌گاه $|f(x)-\frac{۱}{۲}|<\varepsilon$. داریم:

$$\begin{cases} x\in\mathbb{Q} \implies |f(x)-\frac{۱}{۲}|=|x-\frac{۱}{۲}|<\delta \\ x\in\mathbb{Q}^c \implies |f(x)-\frac{۱}{۲}|=|\frac{۱}{۲}-x|<\delta \end{cases} \implies$$

کافی است $\delta\leq\varepsilon$ را انتخاب کنیم

فرض کنید $a\neq\frac{۱}{۲}$ و $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌ترتیب دنباله‌هایی از اعداد گویا و گنگ باشند که به a میل می‌کنند. دراین‌صورت $f(a_n)=a_n\to a$ و $f(b_n)=۱-b_n\to ۱-a$. چون $a\neq\frac{۱}{۲}$، پس $a\neq ۱-a$. بنابراین f در a حد ندارد و در نتیجه ناپیوسته است.

مثال

نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & |x|\leq 2\\ \frac{1}{2}x-1 & |x|>2\end{cases}$ را بیابید.

پاسخ: به‌وضوح تابع $f(x)$ بر $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$ پیوسته است. در نقاط $x=\pm 2$ داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{2}x-1=0\end{cases}\Longrightarrow$$

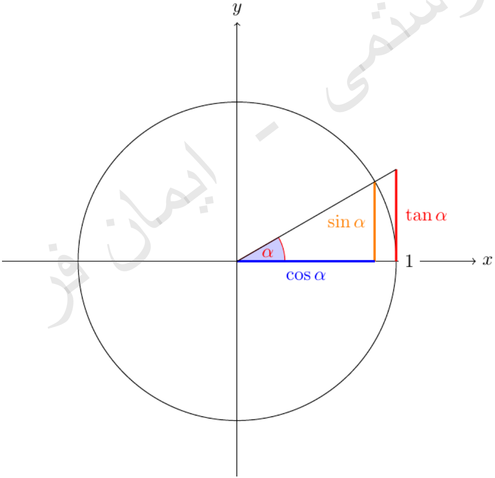
در $x=2$ پیوسته است

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{1}{2}x-1=-2\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}=0\end{cases}\Longrightarrow$$

در $x=-2$ پیوسته نیست

مثال

ثابت کنید $\lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$.



پاسخ: مطابق شکل قبل، اگر $x \in (0, \pi/2)$ آن‌گاه

$$\sin x \leq x \leq \tan x \implies 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \implies \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

از آنجا که $\lim_{x\to 0^+} 1 = 1 = \lim_{x\to 0^+} \cos x$ ، بنابر قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

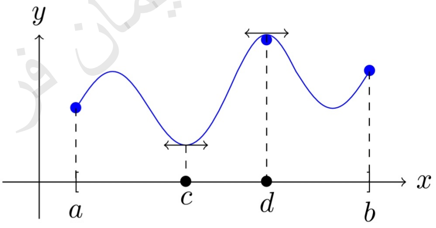
به‌طور مشابه می‌توان نشان داد $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$. بنابراین

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

قضیه مقدار اکسترمم

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته بر بازه بسته $[a,b]$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ مینیمم و ماکسیمم خود را در این بازه اخذ می‌کند؛ یعنی

$$\exists\, c,d \in [a,b] \;:\; f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \forall x \in [a,b]$$



نتیجه

اگر تابع $f(x)$ بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f(x)$ بر $[a,b]$ کران‌دار است.

نکته

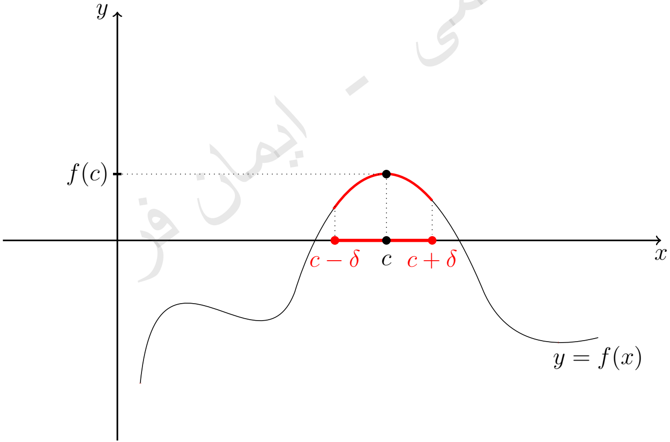
- با در نظر گرفتن تابع $f(x)=x$ روی بازه باز $(۰,۱)$، مشخص می‌شود که بسته بودن بازه شرطی لازم در قضیه‌ی مقدار اکسترمم است.
- همچنین، تابع

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{x} & x\in(۰,۱] \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

نشان می‌دهد که پیوستگی نیز شرطی لازم در قضیه‌ی مقدار اکسترمم است.

قضیه (خاصیت محفوظ ماندن علامت توابع پیوسته)

فرض کنیم $f(x)$ در نقطه‌ی $x = c$ پیوسته بوده و $f(c) \neq 0$. در این صورت بازه‌ای چون $(c-\delta, c+\delta)$ حول c وجود دارد که در آن $f(x)$ همان علامت $f(c)$ را دارد.



اثبات: فرض کنیم $f(c) > 0$. با توجه به تعریف پیوستگی $f(x)$ در $x = c$، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری که

$$c - \delta < x < c + \delta \implies f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

چنان‌چه δی متناظر با $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$ (با توجه به فرض، ε مثبت است) را اختیار کنیم، داریم:

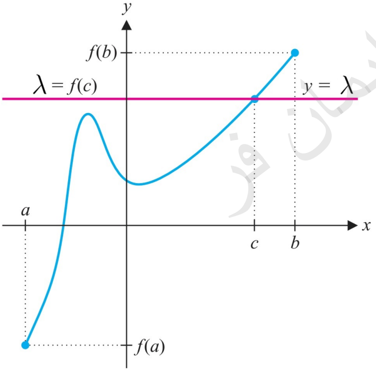
$$c - \delta < x < c + \delta \implies \frac{1}{2} f(c) < f(x) < \frac{3}{2} f(c)$$

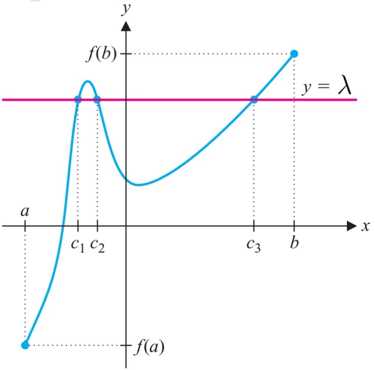
بنابراین در بازه‌ی $(c - \delta, c + \delta)$ داریم $f(x) > 0$ و درنتیجه $f(x)$ و $f(c)$ در این بازه هم‌علامت خواهند بود.
اگر $f(c) < 0$، δی متناظر با $\varepsilon = -\frac{f(c)}{2}$ را اختیار می‌کنیم و به همان نتیجه می‌رسیم.

قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته

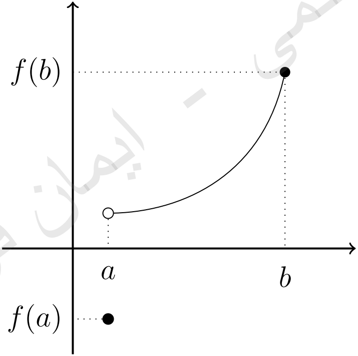
فرض کنیم $f(x)$ تابعی پیوسته بر بازه بسته $[a,b]$ باشد. دراین‌صورت $f(x)$ هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را می‌گیرد؛ یعنی به‌ازای هر مقدار λ بین $f(a)$ و $f(b)$، عددی مانند $c\in[a,b]$ موجود است که $f(c)=\lambda$.

به خاصیت مذکور، اصطلاحا خاصیت مقدار میانی می‌گوییم.





واضح است که برای تابع زیر قضیه‌ی مقدار میانی را نمی‌توان به‌کار برد. بنابراین، پیوستگی شرطی لازم در قضیه‌ی مقدار میانی است.



نتیجه

اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) \leq 0$، آن‌گاه $c \in [a,b]$ وجود دارد که $f(c) = 0$.

اثبات: اگر $f(a)f(b) = 0$، آن‌گاه یا $f(a) = 0$ یا $f(b) = 0$، یعنی در این حالت حکم به‌وضوح برقرار است. بنابراین، فرض کنیم $f(a)f(b) < 0$. در این صورت $f(a)$ و $f(b)$ علامت‌های مختلف دارند و در نتیجه عدد صفر بین $f(a)$ و $f(b)$ قرار دارد. چون $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته است، از قضیه‌ی مقدار میانی داریم:

$$\exists\, c \in [a,b] \ : \ f(c) = 0.$$

مثال

فرض کنید $f : [0, 1] \to [0, 1]$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید نمودار تابع $f(x)$ خط $y = x$ را قطع می‌کند.

پاسخ: تعریف می‌کنیم:

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = f(x) - x.$$

واضح است که تابع $g(x)$ بر $[0, 1]$ پیوسته است. چون به‌ازای هر $x \in [0, 1]$ داریم $0 \leq f(x) \leq 1$، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} g(0) = f(0) - 0 \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow g(1) \leq 0 \leq g(0).$$

از این‌رو، طبق قضیه‌ی مقدار میانی داریم:

$$\exists c \in [0, 1] \ : \ g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = c.$$

مثال

فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه بسته $[0, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته باشد و $0 \leq f(x) \leq 1$. نشان دهید حداقل یک $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ وجود دارد به‌طوری که $f(x_0) = \sin x_0$.

پاسخ: به‌ازای هر $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) - \sin x.$$

چون $f(x)$ و $\sin x$ بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته می‌باشند، پس $g(x)$ نیز بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته است.

$$\begin{cases} g(0) = f(0) - \sin 0 \geq 0 \\ g(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2}) \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow g(\frac{\pi}{2}) \leq 0 \leq g(0).$$

طبق قضیه‌ی مقدار میانی $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ وجود دارد به‌طوری که $g(x_0) = 0$. در نتیجه $f(x_0) = \sin x_0$.

مثال

فرض کنید $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0)=f(2\pi)$. نشان دهید حداقل یک $c\in[0,\pi]$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=f(c+\pi)$.

پاسخ: به‌ازای هر $x\in[0,\pi]$ تابع پیوسته $g(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=f(x)-f(x+\pi).$$

در این صورت داریم:

$$\begin{cases} g(0)=f(0)-f(0+\pi)=f(0)-f(\pi) \\ g(\pi)=f(\pi)-f(\pi+\pi)=f(\pi)-f(0)=-g(0) \end{cases}$$

$$g(0)g(\pi)=-(g(0))^2\leq 0 \quad \xRightarrow{\text{قضیه مقدار میانی}} \quad \exists c\in[0,\pi]\ :\ g(c)=0$$

$$\Longrightarrow\ f(c)-f(c+\pi)=0\ \Longrightarrow\ f(c)=f(c+\pi).$$

مثال

فرض کنید $f:[0,2]\to[\frac{1}{2},1]$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید حداقل یک $c\in[1,2]$ وجود دارد به‌طوری که $cf(c)=1$.

پاسخ: تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=xf(x)-1,\qquad \forall x\in[1,2].$$

واضح است که $g(x)$ بر $[1,2]$ پیوسته است. داریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\leq f(1)\leq 1\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq g(1)=f(1)-1\leq 0\Rightarrow g(1)\leq 0\\ \frac{1}{2}\leq f(2)\leq 1\Rightarrow 0\leq g(2)=2\times f(2)-1\leq 1\Rightarrow g(2)\geq 0\end{cases}$$

طبق قضیه‌ی مقدار میانی $c\in[1,2]$ وجود دارد به‌طوری که $g(c)=0$. در نتیجه $cf(c)=1$.

مثال

نشان دهید معادله $x^3 - 15x + 1$ دارای حداقل سه ریشه متمایز در بازه $[-4, 4]$ است.

پاسخ: می‌دانیم تابع $f(x) = x^3 - 15x + 1$ پیوسته است. داریم:

$$\begin{cases} f(-4) = -3 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -13 < 0 \\ f(4) = 5 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-4)f(0) < 0 \xRightarrow{\text{قضیه مقدار میانی}} \exists c_1 \in (-4, 0) \ : \ f(c_1) = 0 \\ f(0)f(1) < 0 \xRightarrow{\text{قضیه مقدار میانی}} \exists c_2 \in (0, 1) \ : \ f(c_2) = 0 \\ f(1)f(4) < 0 \xRightarrow{\text{قضیه مقدار میانی}} \exists c_3 \in (1, 4) \ : \ f(c_3) = 0 \end{cases}$$

مثال

اگر تابع پیوسته‌ی $f(x)$ فقط مقادیر گویا را بگیرد، یعنی به‌ازای هر x از دامنه‌اش داشته باشیم $f(x) \in \mathbb{Q}$، آن‌گاه نشان دهید که $f(x)$ یک تابع ثابت است.

پاسخ: با برهان خلف، فرض کنیم $f(x)$ یک تابع ثابت نباشد. بنابراین $t_۱, t_۲ \in \mathbb{R}$ وجود دارند به‌طوری که $t_۱ < t_۲$ و $f(t_۱) \neq f(t_۲)$. بین $f(t_۱)$ و $f(t_۲)$ عددی گنگ مانند s را در نظر می‌گیریم. قضیه‌ی مقدار میانی نتیجه می‌دهد که $c \in [t_۱, t_۲]$ موجود است به‌طوری که $f(c) = s$؛ یعنی s مقداری گنگ در برد تابع f است که با فرض در تناقض است.

مثال

فرض کنید $f(x) = \frac{\sin x}{1400} + \frac{x}{2} - \frac{1}{x^3}$. نشان دهید که تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[-2, 2]$ حداقل دو ریشه دارد.

پاسخ: $f(x)$ دربازه‌های $[-2, -1]$ و $[1, 2]$ پیوسته است. همچنین، داریم:

$$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(-1) < 0 \\ \\ f(1) > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(-2)f(-1) < 0 \\ \\ f(1)f(2) < 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{قضیه مقدار میانی}} \begin{cases} \exists c_1 \in (-2, -1) \ : \ f(c_1) = 0 \\ \exists c_2 \in (1, 2) \ : \ f(c_2) = 0 \end{cases}$$

تمرین

تابع $f(x)=\frac{x^3}{4}-\sin(\pi x)+3$ مفروض است. آیا نقطه‌ای در بازه‌ی $[-2,2]$ وجود دارد که به‌ازای آن مقدار تابع $\frac{7}{3}$ شود؟

تمرین

نشان دهید که عددی حقیقی مانند $c\in(0,1)$ وجود دارد به‌نحوی که

$$-4c^2+2=\cos(c)-c$$

تمرین

نشان دهید که تابع $f(x)=x^2-8x+\frac{10}{x}$ در بازه‌ی $[-2,2]$ حداقل دو ریشه دارد.

تمرین

نشان دهید که تابع زیر در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ + ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ -x^۴ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

تمرین

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی پیوسته از $[a, b]$ به $[۱, ۲]$ باشند، به‌طوری‌که $a \leq \frac{f(a)}{g(a)}$ و $\frac{f(b)}{g(b)} \leq b$. نشان دهید حداقل یک $c \in [a, b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(c) = cg(c).$$