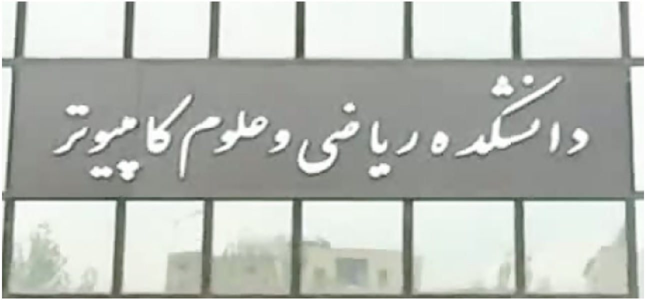
ریاضی عمومی ۲

ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



قضایای دیورژانس و استوکس

آنالیز برداری

ابتدا، چند عملگر مهم را که برای بیان قضایای استوکس و دیورژانس اهمیت دارند، معرفی می‌کنیم.

تعریف

عملگر دیفرانسیل، یک بردار نمادین به‌صورت زیر است:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

این عملگر، عملگر نابلا نیز نامیده می‌شود.

دیورژانس یک میدان برداری

فرض کنید $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری باشد که $F = (P, Q, R)$. در این صورت، دیورژانس F به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}(F) : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

که در آن Ω درون U است.

تعبیر دیورژانس یک میدان برداری

به بیان نادقیق، مقدار دیورژانس میدان برداری $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ در نقطه‌ای مانند $P \in U$، میزان واگرایی یا پخش F از P را می‌سنجد.

کرل یک میدان برداری

فرض کنید $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری باشد که $F = (P, Q, R)$. در این صورت، کرل F به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{curl}(F) = \nabla \times F = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

تعبیر کرل یک میدان برداری

به بیان نادقیق، مقدار کرل میدان برداری هموار $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ در نقطه‌ای مانند $P \in U$، وسعت گردش F حول P را می‌سنجد.

ارتباط بین پایستاری میدان برداری F و $\mathrm{curl}(F)$

فرض کنید $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری هموار باشد که $F = (P, Q, R)$. می‌دانیم که شرط لازم برای پایستاری F به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

این شرط لازم، به وضوح معادل است با $\mathrm{curl}(F) = (0, 0, 0)$. بنابراین، داریم:

گزاره

فرض کنید $U \subseteq \mathbb{R}^3$ باز، همبند و فاقد حفره باشد. در این صورت، میدان برداری $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ پایستار است، اگر و تنها اگر $\mathrm{curl}(F) = 0$.

دیورژانسِ کرل یک میدان برداری

فرض کنید $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری باشد که $F = (P, Q, R)$. همچنین، فرض کنید که P، Q و R دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته هستند. در این صورت، داریم $\operatorname{div}(\operatorname{curl}(F)) = 0$ ؛ زیرا:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{curl}(F)) &= \operatorname{div}(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \\
&= (R_{yx} - Q_{zx}) + (P_{zy} - R_{xy}) + (Q_{xz} - P_{yz}) \\
&= (R_{yx} - R_{xy}) + (Q_{xz} - Q_{zx}) + (P_{zy} - P_{yz}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

تذکر

مطلب بالا را می‌توان به طور نادقیق به‌صورت $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ بیان کرد.

قضیهٔ دیورژانس

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^3$ و مرز D یک رویهٔ بسته و قطعه‌به‌قطعه هموار جهت‌دار مثل S با بردار قائم یکهٔ N باشد، که رو به خارج D است. همچنین، فرض کنید که F یک میدان برداری هموار روی D باشد. در این صورت، داریم:

$$\oiint_S F \cdot N \, dS = \oiint_S F \cdot d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z}$$

تذکر

- به بیان نادقیق، $\iiint_D \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z}$ مجموع میزان پخش F از D را می‌سنجد. پس، بنابر قضیهٔ دیورژانس، این مجموع برابر با شار میدان برداری F عبوری از S است.
- بنابر قضیهٔ دیورژانس، اگر $\operatorname{div}(F) = 0$، آنگاه شار میدان برداری F عبوری از S برابر با 0 است.

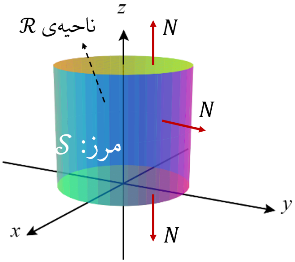
مثال

فرض کنید $\mathcal{R}$ استوانهٔ توپر $x^2+y^2 \leq a^2$ به‌ازای $0 \leq z \leq b$ باشد. همچنین، فرض کنید رویهٔ S مرز $\mathcal{R}$ باشد، N بردار قائم یکهٔ رو به خارج $\mathcal{R}$باشد و میدان برداری $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ به‌صورت زیر باشد:

$$F = (bxy^2, bx^2y, (x^2+y^2)z^2)$$

حاصل $\oiint_S F.N \, dS$ را بیابید.

پاسخ:



از آنجا که S متشکل از یک رویهٔ استوانه‌ای و دو دیسک بسته است، استفاده از قضیهٔ دیورژانس مناسب‌تر از محاسبهٔ مستقیم $\oiint_S F \cdot N \, dS$ است.

بنابر قضیهٔ دیورژانس داریم:

$$I = \oiint_{\mathcal{S}} F \cdot N \, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z}$$

توجه کنید که:

$$\operatorname{div}(F) = P_x + Q_y + R_z = by^2 + bx^2 + 2z(x^2 + y^2) = (b + 2z)(x^2 + y^2)$$

در مختصات استوانه‌ای، ناحیهٔ $\mathcal{R}$ دارای کران‌های زیر است:

$$0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le r \le a, \qquad 0 \le z \le b$$

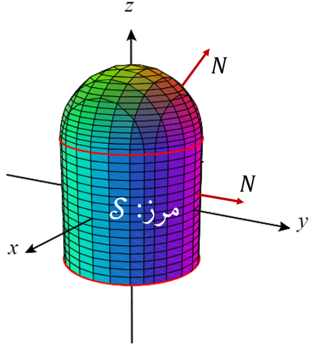
بنابراین، داریم:

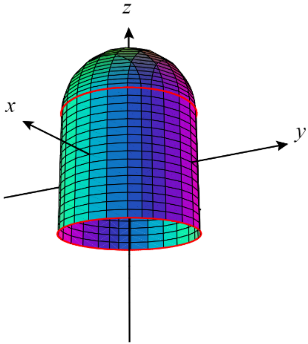
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b (b + 2z) r^2 \, r dz dr d\theta = 2\pi \left(\frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=a} \left(bz + z^2 \right) \Bigg|_{z=0}^{z=b}$$
$$= \pi a^4 b^2$$

مثال

فرض کنید S_1 سطح جانبی استوانهٔ $x^2+y^2 \le 4$ به‌ازای $-3 \le z \le 3$ و S_2 کرهٔ $x^2+y^2+(z-3)^2 = 4$ باشد. همچنین، فرض کنید $S = S_1 \cup S_2$ و N بردار قائم یکهٔ رو به خارج S باشد. مقدار $\iint_S (0, 2yz, -z^2) \cdot N \, dS$ را بیابید.

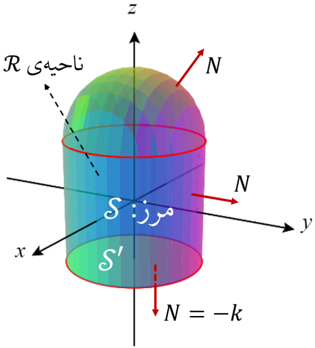
پاسخ:





با اضافه کردن دیسک $\mathcal{S}'$ به $\mathcal{S}$، به‌صورت $x^2+y^2 \leq 4$ به‌ازای $z=-3$، یک سطح بسته خواهیم داشت. حال، فرض کنید که $\mathcal{R}$ ناحیهٔ محصور به $\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'$ باشد. با فرض $F=(0,2yz,-z^2)$، بنابر قضیهٔ دیورژانس داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'} F\cdot N\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \mathrm{div}(F)\, dV_{x,y,z}$$



توجه کنید که:

$$\operatorname{div}(F) = P_x + Q_y + R_z = 0 + 2z - 2z = 0$$

بنابراین، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'} F\cdot N\,dS = \iint_{\mathcal{S}} F\cdot N\,dS + \iint_{\mathcal{S}'} F\cdot N\,dS = 0$$

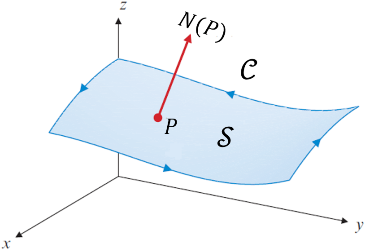
که نتیجه می‌دهد:

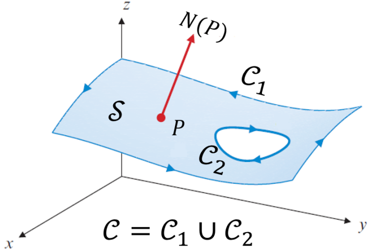
$$I = \iint_{\mathcal{S}} F\cdot N\,dS = -\iint_{\mathcal{S}'} F\cdot N\,dS = -\iint_{\mathcal{S}'} (0, 2yz, -z^2)\cdot(-k)\,dS$$

$$= -\iint_{\mathcal{S}'} z^2\,dS \overset{z=-3}{=\!=\!=} -9\iint_{\mathcal{S}'} dS = -9\times(\text{مساحت } \mathcal{S}') = -36\pi$$

جهت القایی مرز یک رویهٔ جهت‌دار

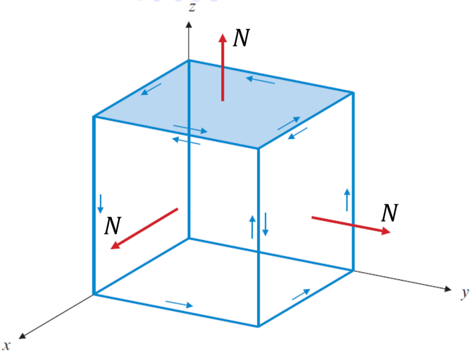
فرض کنید S یک رویهٔ جهت‌دار در $\mathbb{R}^3$ باشد. در این صورت، S بر هر یک از خم‌های مرزی خود یک جهت القا می‌کند، به‌طوری که اگر جهت انگشت شست دست راست را در جهت خم مرزی قرار دهیم، آنگاه نوک چهار انگشت دیگر در اولین برخورد با S، جهت N را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر، اگر در طرف مثبت S ایستاده باشیم و روی خم مرزی و در جهت خم حرکت کنیم، لازم است که S در سمت چپ ما قرار گیرد.





رویه‌های قطعه‌به‌قطعه هموار جهت‌پذیر

فرض کنید $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ یک رویهٔ قطعه‌به‌قطعه هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد. در این صورت، S را جهت‌پذیر گوییم، هرگاه به‌ازای هر $1 \leq i, j \leq n$، دو رویهٔ هموار S_i و S_j به خم فصل مشترک‌شان جهت‌های مخالف هم القا کنند.



قضیهٔ استوکس

فرض کنید S یک رویهٔ قطعه‌به‌قطعه هموار جهت‌دار با بردار قائم یکهٔ N باشد. همچنین، فرض کنید C مرز S، متشکل از یک یا چند خم قطعه‌به‌قطعه هموار بسته با جهت القایی از S باشد. اگر $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری هموار باشد، به‌طوری که U باز است و $S \subseteq U$، آنگاه داریم:

$$\oint_C F \cdot T\, ds = \oint_C F \cdot dr = \iint_S \operatorname{curl}(F) \cdot N\, dS = \iint_S \operatorname{curl}(F) \cdot d\sigma$$

به عبارتی دیگر، داریم:

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint_S (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \cdot \underbrace{N\, dS}_{d\sigma}$$

نکاتی دربارهٔ قضیهٔ استوکس

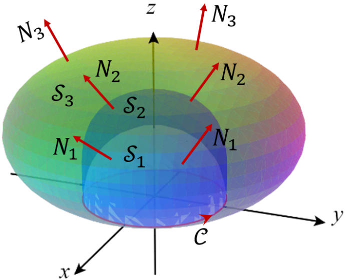
- بنابر قضیهٔ استوکس، کاری که میدان برداری F در امتداد $\mathcal{C}$ انجام می‌دهد، برابر است با شار $\operatorname{curl}(F)$ عبوری از $\mathcal{S}$، که در آن $\mathcal{C}$ مرز $\mathcal{S}$ با جهت القایی از $\mathcal{S}$ است و F روی یک مجموعهٔ باز شامل $\mathcal{S}$ تعریف شده است.
- قضیهٔ گرین را می‌توان از قضیهٔ استوکس، نتیجه گرفت؛ زیرا اگر $F = (P, Q, 0)$ یک میدان برداری تعریف شده روی ناحیهٔ بستهٔ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ باشد و $\mathcal{C}$ مرز قطعه‌به‌قطعه هموار D با جهت‌گذاری مثبت نسبت به D باشد، آنگاه جهت $\mathcal{C}$ نسبت به D القایی است و لذا با توجه به اینکه $N = k$، بنابر قضیهٔ استوکس، داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \oint_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \operatorname{curl}(F) \cdot N\,dS$$

$$= \iint_D \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot N\,dS = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA_{x,y}$$

■ اگر چند رویه با مرز مشترک داشته باشیم که جهت یکسانی روی مرز القا می‌کنند، آنگاه در قضیهٔ استوکس، هر یک از این رویه‌ها را می‌توان استفاده کرد. برای مثال، در شکل زیر هر سه رویه دارای مرز مشترک $\mathcal{C}$ و با جهت القایی یکسانی روی $\mathcal{C}$ هستند. پس:

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot T\, ds = \iint_{\mathcal{S}_1} \operatorname{curl}(F) \cdot N_1\, dS = \iint_{\mathcal{S}_2} \operatorname{curl}(F) \cdot N_2\, dS$$
$$= \iint_{\mathcal{S}_3} \operatorname{curl}(F) \cdot N_3\, dS$$



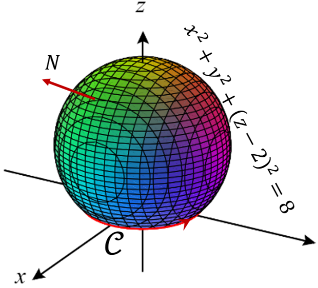
مثال

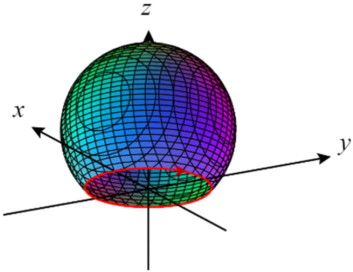
فرض کنید S بخشی از کرهٔ $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ باشد که بالای صفحهٔ xy قرار می‌گیرد. همچنین، فرض کنید N بردار قائم یکهٔ رو به خارج S باشد. میدان برداری F به‌صورت زیر مفروض است:

$$F(x,y,z)=(y^2\cos(xz), x^3e^{yz}, -e^{-xyz})$$

مقدار $\iint_S \operatorname{curl}(F)\cdot N\, dS$ را بیابید.

پاسخ:

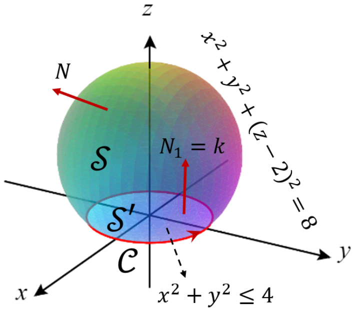




فضای محصور به خم $\mathcal{C}$ در صفحهٔ xy را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا با قراردادن $z=0$ در معادلهٔ کرهٔ داده‌شده، معادلهٔ $\mathcal{C}$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+y^2+(z-2)^2=8, \quad z=0 \implies x^2+y^2=4$$

بنابراین، S'، فضای محصور به $\mathcal{C}$ در صفحهٔ xy، مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ است که $x^2+y^2\leq 4$.



بردار قائم یکهٔ $N_1 = k$ بر S' را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $\mathcal{C}$ مرز مشترک دو رویهٔ S و S' است و جهت‌های القایی این دو رویه بر $\mathcal{C}$ هر دو یکسان و مثلثاتی است. پس، بنابر قضیهٔ استوکس، داریم:

$$I = \iint_S \operatorname{curl}(F) \cdot N \, dS = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot T \, ds = \iint_{S'} \operatorname{curl}(F) \cdot N_1 \, dS$$

با توجه به اینکه $N_1 = k$، کافی است که مؤلفهٔ سوم $\operatorname{curl}(F)$ را بیابیم. این مؤلفه برابر است با:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 e^{yz} - 2y\cos(xz)$$

پس، داریم:

$$I = \iint_{S'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS = \iint_{S'} \left(3x^2 e^{yz} - 2y\cos(xz) \right) dS$$

حال، با توجه به اینکه روی S' داریم $z = 0$، می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{S'} \left(3x^2 - 2y\right) \, dA_{x,y} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(3(r\cos(\theta))^2 - 2(r\sin(\theta)\right) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3r^4}{4}\cos^2(\theta) - \frac{2r^3}{3}\sin(\theta)\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(12\cos^2(\theta) - \frac{16}{3}\sin(\theta)\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(6(\cos(2\theta)+1) - \frac{16}{3}\sin(\theta)\right) d\theta \\
&= \left(3\sin(2\theta) + 6\theta + \frac{16}{3}\cos(\theta)\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= 12\pi
\end{aligned}
$$

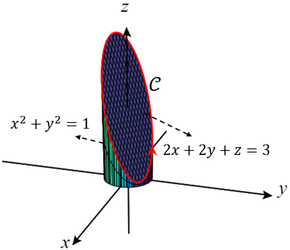
مثال

فرض کنید C خم فصل مشترک استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و صفحهٔ $2x + 2y + z = 3$ باشد. همچنین، فرض کنید جهت C به‌گونه‌ای باشد که تصویر آن روی صفحهٔ xy در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. میدان برداری F به‌صورت زیر مفروض است:

$$F(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$$

مقدار $\oint_C F \cdot dr$ را بیابید.

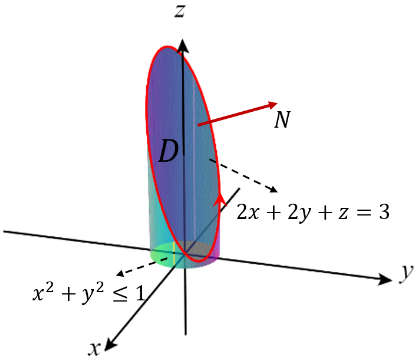
پاسخ:



بنابر قضیهٔ استوکس، داریم:

$$I = \oint_C F \cdot dr = \iint_D \operatorname{curl}(F) \cdot d\sigma, \qquad d\sigma = N\, dS$$

که در آن N بردار قائم یکهٔ D مطابق شکل است.



قرار می‌دهیم $G(x,y,z) = 2x + 2y + z - 3$. در این صورت، D بخشی از صفحهٔ $G(x,y,z) = 0$ است. بنابراین، داریم:

$$d\sigma = \pm\,(\nabla G)\,dA_{x,y} = \pm(2,2,1)\,dA_{x,y}$$

با توجه به شکل، علامت $+$ قابل قبول است. از طرفی، داریم:

$$\operatorname{curl}(F) = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{bmatrix} = (0, 0, 3(x^2+y^2))$$

بنابراین، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \big(0,0,3(x^2+y^2)\big)\cdot(2,2,1)\,dA_{x,y} \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} 3(x^2+y^2)\,dA_{x,y} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\,rdrd\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{3r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

مثال‌های تکمیلی

تاکنون مثال‌های **مفهومی** و **کاربردی** مختلفی را از این مبحث دیدیم. در ادامه، به مثال‌های بیشتری از این مبحث توجه فرمایید. برای درک بهتر، ابتدا به مسائل فکر کنید و سعی کنید که آن‌ها را حل بفرمایید. سپس پاسخ‌ها را با دقت مطالعه و بررسی نمایید.

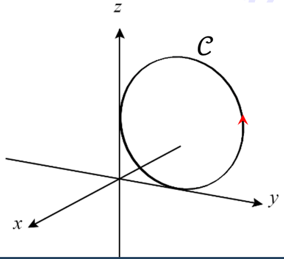
فرض کنید خم C دارای نمایش پارامتری زیر باشد:

$$r(t) = (0, 2 + 2\cos(t), 2 + 2\sin(t)), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$\oint_C e^{5z}\, dx + \cos(y^3)\, dy + 3y\, dz$$

پاسخ:



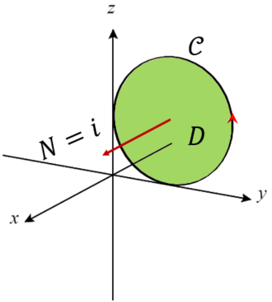
قرار می‌دهیم:

$$F(x,y,z) = (P,Q,R) = \left(e^{5z}, \cos(y^3), 3y\right)$$

فرض کنید D ناحیهٔ محصور توسط $\mathcal{C}$ در صفحهٔ yz باشد. بنابر قضیهٔ استوکس، داریم:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_D \operatorname{curl}(F) \cdot d\sigma$$

که در آن $\mathcal{C}$ دارای جهت القایی از D است. بنابراین، مطابق شکل، داریم $N = i$.



ازاین‌رو، داریم:

$$d\sigma = N\,dA_{y,z} = i\,dA_{y,z}$$

که با فرض اینکه L مؤلفهٔ اول $\operatorname{curl}(F)$ است، نتیجه می‌دهد:

$$I = \iint_D L\,dA_{y,z}$$

حال، داریم:

$$L = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 3 - 0 = 3$$

در نتیجه، داریم:

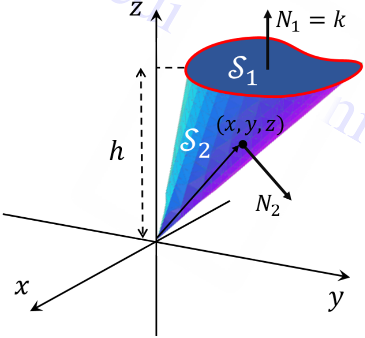
$$I = 3\iint_D dA_{y,z} = 3 \times (\text{مساحت } D) = 12\pi$$

زیرا واضح است که D دیسک $(y-2)^2 + (z-2)^2 \leq 4$ در صفحهٔ yz است.

مثال

با استفاده از قضیهٔ دیورژانس و میدان برداری $F(x,y,z) = (x,y,z)$، حجم یک مخروط با ارتفاع h و مساحت قاعدهٔ A را بیابید.

پاسخ:



فرض کنید D فضای داخل مخروط باشد. مطابق شکل و قضیهٔ دیورژانس، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} F \cdot d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV_{x,y,z}$$

توجه کنید که $\operatorname{div}(F) = 1 + 1 + 1 = 3$. بنابراین، داریم:

$$\iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV_{x,y,z} = 3 \times (\text{حجم مخروط})$$

از طرفی، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} F \cdot d\sigma = \iint_{\mathcal{S}_1} F \cdot N_1\, dS + \iint_{\mathcal{S}_2} F \cdot N_2\, dS$$

توجه کنید که $F \cdot N_2 = 0$؛ زیرا N_2 بر $\mathcal{S}_2$ عمود است و لذا به‌ازای هر $(x, y, z) \in \mathcal{S}_2$، داریم $(x, y, z) \cdot N_2 = 0$، در حالی‌که $F = (x, y, z)$. پس، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} F \cdot d\sigma = \iint_{\mathcal{S}_1} F \cdot \underbrace{N_1}_{k}\, dS = \iint_{\mathcal{S}_1} z\, dS = h \iint_{\mathcal{S}_1} dS = hA$$

در نهایت، نشان دادیم که:

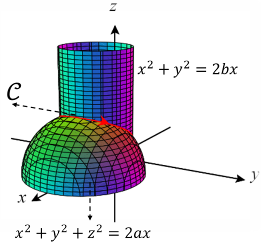
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} hA$$

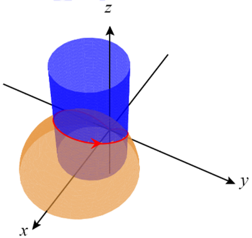
مثال

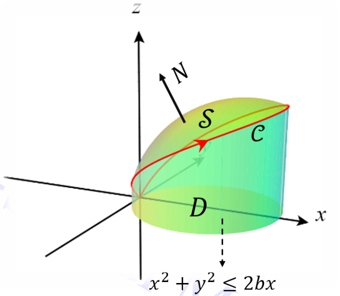
فرض کنید a و $0 < b < a$ و $\mathcal{C}$ خم فصل مشترک نیم‌کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ که در آن $z \geq 0$، و استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2bx$ باشد. همچنین، فرض کنید جهت $\mathcal{C}$ به گونه‌ای باشد که تصویر این خم بر صفحهٔ xy دارای جهت پادساعتگرد است. نشان دهید که:

$$\oint_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz = 2\pi a b^2$$

پاسخ:







فرض کنید $\mathcal{S}$ بخشی از کره باشد که $\mathcal{C}$ مرز آن است. اگر N بردار یکهٔ قائم رو به خارج کره باشد، آنگاه جهت $\mathcal{C}$ القایی از $\mathcal{S}$ خواهد بود. قرار دهید:

$$F = (P, Q, R) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$$

در این صورت، بنابر قضیهٔ استوکس، داریم:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(F) \cdot d\sigma$$

داریم:

$$\mathrm{curl}(F) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)$$

حال، برای به‌دست آوردن $d\sigma$ قرار می‌دهیم:

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax$$

در این صورت، نقاط رویهٔ S در معادلهٔ $G(x, y, z) = 0$ صدق می‌کنند. پس، داریم:

$$d\sigma = \pm \frac{\nabla G}{|G_z|} \, dA_{x,y}$$

در حالی‌که روی S داریم:

$$\nabla G = (2x - 2a, 2y, 2z), \qquad G_z = 2z > 0 \quad (\text{مگر در مرز } S)$$

از آنجا که N رو به خارج کره است، علامت $+$ را انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$d\sigma = \frac{(2x - 2a, 2y, 2z)}{2z} \, dA_{x,y} = \frac{(x - a, y, z)}{z} \, dA_{x,y}$$

بنابراین، داریم:

$$I = \iint_D (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y) \cdot \frac{(x - a, y, z)}{z} \, dA_{x,y}$$

$$= \iint_D \left(2a - 2a\frac{y}{z}\right) dA_{x,y} = \iint_D \left(2a - 2a\frac{y}{\sqrt{2ax - x^2 - y^2}}\right) dA_{x,y}$$

حال، از آنجا که D نسبت به محور x متقارن است و تابع $\frac{y}{\sqrt{2ax-x^2-y^2}}$ نسبت به مؤلفهٔ y فرد است، داریم:

$$\iint_D -2a\frac{y}{\sqrt{2ax - x^2 - y^2}} \, dA_{x,y} = 0$$

و ازاین‌رو، داریم:

$$I = 2a \iint_D dA_{x,y} = 2a \times (D \text{ مساحت}) = 2a(\pi b^2) = 2\pi ab^2$$

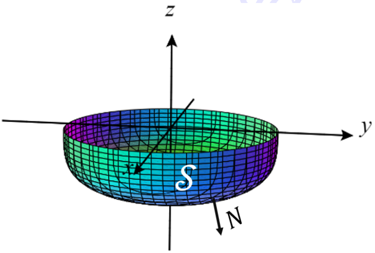
مثال

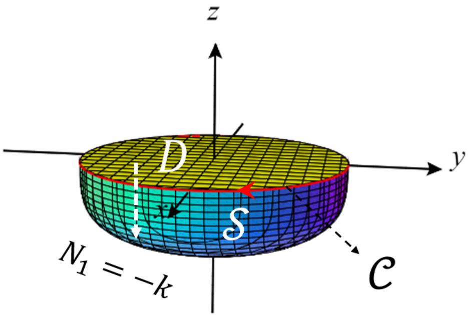
فرض کنید S رویهٔ $x^2+y^2+3z^4=1$ باشد که در آن $z \leq 0$ و N بردار قائم یکهٔ رو به خارج ناحیهٔ محصور به‌وسیلهٔ S باشد. اگر

$$F = yi - xj + zx^3y^2k,$$

آنگاه $\iint_S \operatorname{curl}(F)\cdot N\, dS$ را بیابید.

پاسخ:





فرض کنید $\mathcal{C}$ مرز S باشد. در این صورت، جهت القایی S روی $\mathcal{C}$ در جهت عقربه‌های ساعت است. توجه کنید که $\mathcal{C}$ دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ در صفحهٔ xy است. فرض کنید D ناحیهٔ محصور به $\mathcal{C}$ در صفحهٔ xy باشد. اگر $N_1 = -k$ به‌عنوان بردار قائم یکهٔ D انتخاب شود، آنگاه جهت القایی از D بر $\mathcal{C}$ همان جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود.

بنابر قضیهٔ استوکس داریم:

$$I = \iint_{S} \operatorname{curl}(F) \cdot N \, dS = \oint_{C} F \cdot dr = \iint_{D} \operatorname{curl}(F) \cdot N_1 \, dS$$
$$= \iint_{D} \operatorname{curl}(F) \cdot (0, 0, -1) \, dS = \iint_{D} -L \, dS$$

که در آن L مؤلفهٔ سوم $\operatorname{curl}(F)$ است. داریم:

$$L = Q_x - P_y = -1 - 1 = -2$$

پس، داریم:

$$I = 2 \iint_{D} dS = 2 \times (\text{مساحت } D) = 2\pi$$

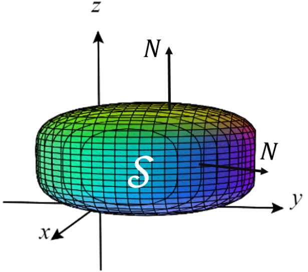
مثال

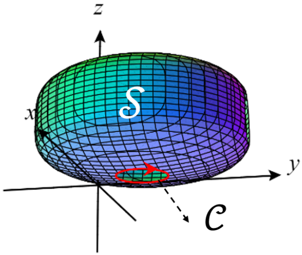
فرض کنید S رویهٔ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^4=17$ باشد که در آن $z\geq 0$ و N بردار قائم یکهٔ رو به خارج ناحیهٔ محصور به‌وسیلهٔ S باشد. اگر

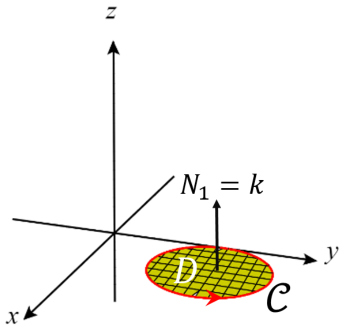
$$F = yi + 3xj + \sin(z^2)e^{\sin(x^2+y^2)}k,$$

آنگاه $\iint_S \operatorname{curl}(F)\cdot N\, dS$ را بیابید.

پاسخ:







فرض کنید $\mathcal{C}$ مرز S باشد. در این صورت، جهت القایی S روی $\mathcal{C}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. توجه کنید که $\mathcal{C}$ دایرهٔ $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ در صفحهٔ xy است. فرض کنید D ناحیهٔ محصور به $\mathcal{C}$ در صفحهٔ xy باشد. اگر $N_1=k$ به‌عنوان بردار قائم یکهٔ D انتخاب شود، آنگاه جهت القایی از D بر $\mathcal{C}$ همان جهت خلاف عقربه‌های ساعت خواهد بود.

بنابر قضیهٔ استوکس، داریم:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(F)\cdot N\, dS = \oint_{\mathcal{C}} F\cdot dr = \iint_{D} \operatorname{curl}(F)\cdot N_1\, dS \\ &= \iint_{D} \operatorname{curl}(F)\cdot (0,0,1)\, dS = \iint_{D} L\, dS \end{aligned}$$

که در آن L مؤلفهٔ سوم $\operatorname{curl}(F)$ است. داریم:

$$L = Q_x - P_y = 3 - 1 = 2$$

در نتیجه:

$$I = 2\iint_{D} dS = 2\times (\text{مساحت } D) = 2\pi$$

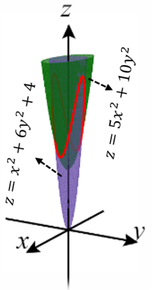
مثال

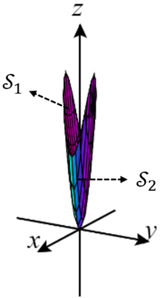
فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^3$ از پایین و بالا به‌ترتیب محصور به رویه‌های $z = 5x^2 + 10y^2$ و $z = x^2 + 6y^2 + 4$ باشد. همچنین فرض کنید رویهٔ S مرز D باشد و N میدان برداری قائم یکهٔ S و رو به خارج D باشد. اگر $F(x, y, z) = (x, y, z - x)$، آنگاه:

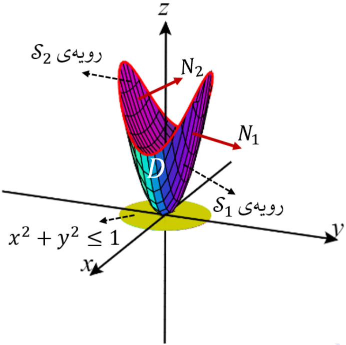
۱ $\oiint_S F \cdot N\, dS$ را از راه مستقیم بیابید.

۲ $\oiint_S F \cdot N\, dS$ را با استفاده از قضیهٔ دیورژانس بیابید.

پاسخ:







ناحیهٔ D با تغییر مقیاس واحدهای محورهای x و y

داریم $S = S_1 \cup S_2$ که در آن رویه‌های S_1 و S_2 مطابق شکل، به‌ترتیب، بخشی از رویه‌های $z = 5x^2 + 10y^2$ و $z = x^2 + 6y^2 + 4$ هستند.

پاسخ (۱): داریم:

$$I = \oiint_S F \cdot N\, dS = \underbrace{\iint_{S_1} F \cdot N_1\, dS}_{I_1} + \underbrace{\iint_{S_2} F \cdot N_2\, dS}_{I_2}$$

توجه کنید که S_1 و S_2 به‌ترتیب نمودارهای توابع $f : D_1 \to \mathbb{R}$ و $g : D_2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌های $f(x,y) = 5x^2 + 10y^2$ و $g(x,y) = x^2 + 6y^2 + 4$ هستند که در آن D_1 و D_2 به‌ترتیب تصاویر S_1 و S_2 بر صفحهٔ xy هستند. همچنین توجه کنید که $D_1 = D_2$ و برابر با ناحیهٔ محصور به‌وسیلهٔ تصویر خم فصل مشترک دو رویهٔ یادشده بر صفحهٔ xy هستند. بنابراین، تصویر خم فصل مشترک دو رویه بر صفحهٔ xy را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$z = 5x^2 + 10y^2, \quad z = x^2 + 6y^2 + 4 \implies x^2 + y^2 = 1$$

پس تصویر خم فصل مشترک دو رویه، $x^2+y^2=1$ است و ازاین‌رو، $D_1=D_2$ دیسک یکهٔ بستهٔ $x^2+y^2\leq 1$ است. پس، داریم:

$$N_1\,dS=\pm(-f_1,-f_2,1)\,dA_{x,y}=\pm(-10x,-20y,1)\,dA_{x,y}$$
$$N_2\,dS=\pm(-g_1,-g_2,1)\,dA_{x,y}=\pm(-2x,-12y,1)\,dA_{x,y}$$

حال، با توجه به اینکه N_1 و N_2 به‌ترتیب رو به پایین و رو به بالا هستند، داریم:

$$N_1\,dS=-(-10x,-20y,1)\,dA_{x,y},\quad N_2\,dS=(-2x,-12y,1)\,dA_{x,y}$$

از آنجا که روی $\mathcal{S}_1$، داریم $z=5x^2+10y^2$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}I_1&=\iint_{D_1}(x,y,z-x)\cdot(10x,20y,-1)\,dA_{x,y}\\&=\iint_{D_1}\left(10x^2+20y^2+x-z\right)\,dA_{x,y}\\&=\iint_{D_1}\left(10x^2+20y^2+x-\left(5x^2+10y^2\right)\right)\,dA_{x,y}\end{aligned}$$

پس، داریم:

$$I_1 = \iint_{D_1} \left(5x^2 + 10y^2 + x\right)\, dA_{x,y}$$

همچنین، از آنجا که روی S_2، داریم $z = x^2 + 6y^2 + 4$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_1} (x, y, z - x) \cdot (-2x, -12y, 1)\, dA_{x,y} \\ &= \iint_{D_1} \left(-2x^2 - 12y^2 + z - x\right)\, dA_{x,y} \\ &= \iint_{D_1} \left(-2x^2 - 12y^2 + \left(x^2 + 6y^2 + 4\right) - x\right)\, dA_{x,y} \\ &= \iint_{D_1} \left(-x^2 - 6y^2 + 4 - x\right)\, dA_{x,y} \end{aligned}$$

در نهایت، داریم:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= \iint_{D_1} \left(5x^2 + 10y^2 + x\right)\, dA_{x,y} + \iint_{D_1} \left(-x^2 - 6y^2 + 4 - x\right)\, dA_{x,y} \\ &= \iint_{D_1} \left(4x^2 + 4y^2 + 4\right)\, dA_{x,y} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(4r^2 + 4\right)\, r dr d\theta \\ &= 2\pi \left(r^4 + 2r^2\right)\Big|_{r=0}^{r=1} = 6\pi \end{aligned}$$

پاسخ (۲): بنابر قضیهٔ دیورژانس، داریم:

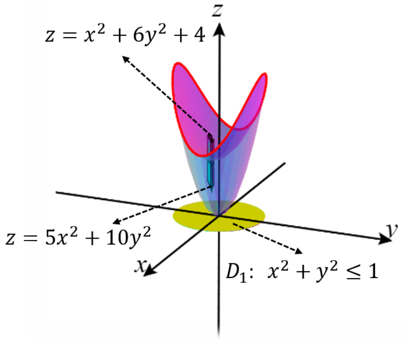
$$I = \oiint_{\mathcal{S}} F \cdot N \, dS = \iiint_D \operatorname{div}(F)\, dV_{x,y,z}$$

توجه کنید که:

$$\operatorname{div}(F) = P_x + Q_y + R_z = 1 + 1 + 1 = 3$$

پس، با توجه به شکل، داریم:

$$I = 3 \iiint_D dV_{x,y,z} = 3 \iint_{D_1} \int_{5x^2+10y^2}^{x^2+6y^2+4} dz dA_{x,y}$$



لذا، داریم:

$$I = 3 \iint_{D_1} \left(-4(x^2+y^2)+4\right)\, dA_{x,y}$$

ازاین‌رو، با استفاده از تغییر متغیر قطبی، داریم:

$$I = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(-4r^2+4\right)\, r dr d\theta = 6\pi \left(2r^2 - r^4\right)\Big|_{r=0}^{r=1} = 6\pi$$

مثال

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ناحیهٔ محصور به رویهٔ بستهٔ S باشد و $(0,0,0) \notin S$. اگر N قائم یکهٔ S و رو به خارج D باشد و $F : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ زیر باشد:

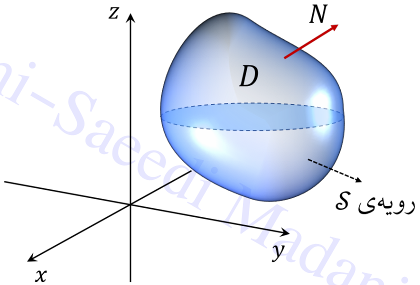
$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

آنگاه $\oiint_S F \cdot N \, dS$ را بیابید.

پاسخ: از قضیهٔ دیورژانس استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} + \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} + \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} = 0$$

حالت اول: $(0,0,0) \notin D$

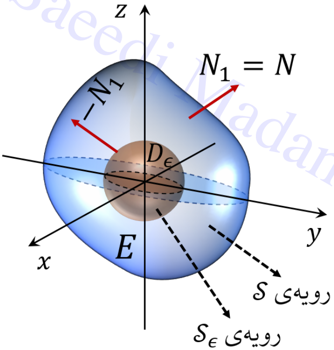


در این صورت، از آنجا که F روی D هموار است، بنابر قضیهٔ دیورژانس داریم:

$$\oiint_S F \cdot N \, dS = \iiint_D \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z} = 0$$

حالت دوم: $(0,0,0) \in D$

تابع F در مبدأ تعریف نشده است و ازاین‌رو، روی D هموار نیست. پس، نمی‌توان مستقیماً از قضیهٔ دیورژانس استفاده کرد. توجه کنید که $(0,0,0)$ یک نقطهٔ درونی D است و ازاین‌رو، $\epsilon > 0$ وجود دارد که گوی بسته با شعاع ϵ و مرکز مبدأ نیز کاملاً در D قرار می‌گیرد.



مطابق شکل، فرض کنید E ناحیهٔ محصور به رویه‌های $\mathcal{S}_\epsilon$ و $\mathcal{S}$ باشد و N_1 میدان برداری قائم یکهٔ رو به خارج E باشد. واضح است که $D = E \cup D_\epsilon$. حال، از آنجا که E شامل مبدأ نیست، F روی E هموار است و لذا بنابر قضیهٔ دیورژانس، داریم:

$$\oiint_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}_\epsilon} F \cdot N_1 \, dS = \iiint_D \operatorname{div}(F) \, dV_{x,y,z} = 0$$

بنابراین، داریم:

$$I = \oiint_{\mathcal{S}} F \cdot N \, dS = \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} F \cdot (-N_1) \, dS$$

توجه کنید که $-N_1$ قائم یکهٔ رو به خارج D_ϵ است و $\mathcal{S}_\epsilon$ مجموعهٔ نقاطی است که در معادلهٔ $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \epsilon^2 = 0$ صدق می‌کنند. بنابراین، داریم:

$$-N_1 = \pm\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \pm\frac{(2x, 2y, 2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pm\frac{1}{\epsilon}(x, y, z)$$

از آنجا که $-N_1$ رو به خارج کره است، داریم:

$$-N_1 = \frac{1}{\epsilon}(x, y, z)$$

حال، توجه کنید که روی $\mathcal{S}_\epsilon$ داریم $x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ و ازاین‌رو، داریم:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{\epsilon^3}, \frac{y}{\epsilon^3}, \frac{z}{\epsilon^3}\right)$$

در نهایت، داریم:

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} F \cdot (-N_1)\, dS = \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \left(\frac{x}{\epsilon^3}, \frac{y}{\epsilon^3}, \frac{z}{\epsilon^3}\right) \cdot \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}, \frac{z}{\epsilon}\right)\, dS \\ &= \frac{1}{\epsilon^4} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{\epsilon^2}\, dS = \frac{1}{\epsilon^2} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} dS \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \times (\text{مساحت جانبی } \mathcal{S}_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}(4\pi\epsilon^2) = 4\pi \end{aligned}$$