ریاضی عمومی ۲

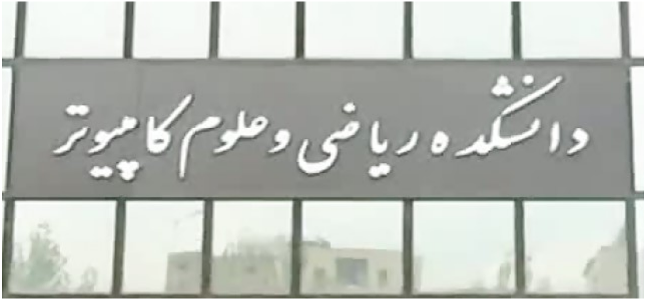
ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



انتگرال سه‌گانه

تعریف انتگرال سه‌گانه

فرض کنید که $B = [a, b] \times [a', b'] \times [a'', b''] \subseteq \mathbb{R}^3$ یک مکعب و $f : B \to \mathbb{R}$ تابعی کران‌دار باشد. افرازهای زیر را از $[a, b]$، $[a', b']$ و $[a'', b'']$ در نظر می‌گیریم:

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

$$P_2 = \{a' = y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m = b'\}$$

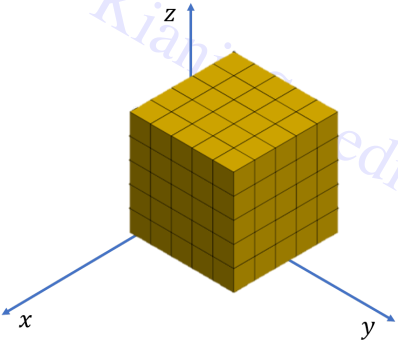
$$P_3 = \{a'' = z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}, z_p = b''\}$$

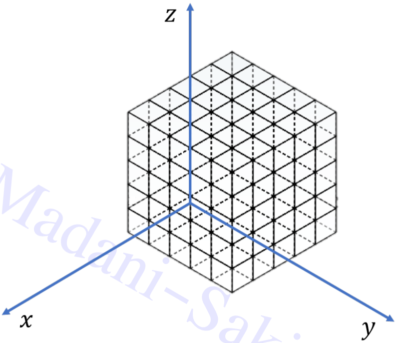
در این صورت، افراز P از مکعب B را می‌توان متشکل از mnp مکعب زیر در نظر گرفت:

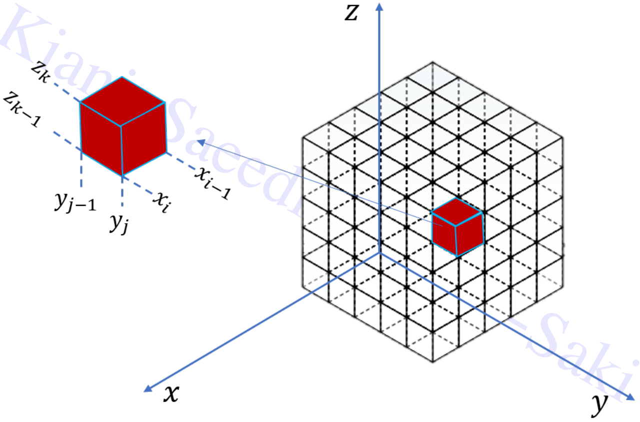
$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

که در آن:

$$i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, p$$


z
x
y


z
x
y


z_k
z_{k-1}
y_{j-1}
y_j
x_i
x_{i-1}
z
x
y

حال، فرض کنید که به‌ازای هر $1 \le i \le n$، $1 \le j \le m$ و $1 \le k \le p$،

$$(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

قرار می‌دهیم:

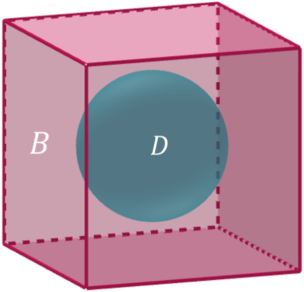
$$R(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) V_{ijk}$$

که در آن، به‌ازای هر i، j و k، V_{ijk} حجم مکعب B_{ijk} است. حال، فرض کنید که $\|P\|$ ماکسیمم قطرهای اصلی همهٔ مکعب‌های B_{ijk} است؛ یعنی:

$$\|P\| = \max\left\{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2 + \Delta z_k^2} : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le p\right\}$$

چنانچه $\lim_{\|P\| \to 0} R(P, f)$ وجود داشته باشد، گوییم f انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال f روی B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\iiint_B f\, dV := \lim_{\|P\| \to 0} R(P, f)$$



در حالت کلی، فرض کنید که $D \subseteq \mathbb{R}^3$ یک ناحیهٔ بسته و کران‌دار باشد. اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی کران‌دار باشد، آنگاه مکعب $B \subseteq \mathbb{R}^3$ وجود دارد که D را در بر می‌گیرد.

حال، تعریف می‌کنیم:

$$\widehat{f} : B \to \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & ,(x,y,z) \in D \\ 0 & ,(x,y,z) \in B \backslash D \end{cases}$$

در این صورت، انتگرال f روی D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iiint_D f \, dV := \iiint_B \widehat{f} \, dV$$

تعبیری از انتگرال سه‌گانه

فرض کنید که $D \subseteq \mathbb{R}^3$ یک جسم بسته و کران‌دار باشد. اگر $\rho : D \to \mathbb{R}$ تابع **چگالی** D باشد؛ یعنی به‌ازای هر $(x, y, z) \in D$، عدد $\rho(x, y, z)$ برابر با چگالی D در نقطهٔ (x, y, z) باشد، آنگاه داریم:

$$D \text{ جرم } = m = \iiint_D \rho \, dV$$

در واقع، اگر توزیع جرم در جسم D یکنواخت باشد، آنگاه نسبت جرم به حجم D برابر با چگالی D تعریف می‌شود. در حالت کلی، اگر توزیع جرم در D لزوماً یکنواخت نباشد، آنگاه المان‌های کوچکی از D در نظر گرفته می‌شود که در آن‌ها توزیع جرم تقریباً یکسان است. بنابراین، در نزدیکی یک نقطهٔ (x, y, z) داریم:

$$dm = \rho(x, y, z) dV \implies m = \iiint_D dm = \iiint_D \rho \, dV$$

قضیه

فرض کنید که D یک زیرمجموعهٔ بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}^3$ باشد، $f, g : D \to \mathbb{R}$ توابعی انتگرال‌پذیر باشند و $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. در این صورت:

۱ اگر حجم D صفر باشد، آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\, dV = 0$$

۲ اگر به‌ازای هر $(x, y, z) \in D$، داشته باشیم $f(x, y, z) = 1$، آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\, dV = \text{حجم}\ D$$

۳ اگر به‌ازای هر $(x, y, z) \in D$ داشته باشیم $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$، آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\, dV \leq \iiint_D g\, dV$$

۴ تابع $c_1 f + c_2 g$ انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\iiint_D (c_1 f + c_2 g)\, dV = c_1 \iiint_D f\, dV + c_2 \iiint_D g\, dV$$

۵ داریم:

$$\left| \iiint_D f\, dV \right| \leq \iiint_D |f|\, dV$$

۶ اگر $D_1, \ldots, D_n$ ناحیه‌هایی در $\mathbb{R}^3$ باشند که حداکثر در مرزهایشان اشتراک دارند، آنگاه داریم:

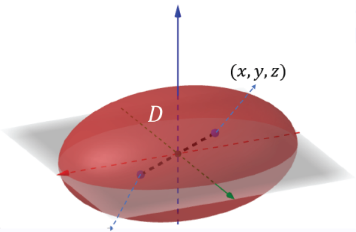
$$\iiint_{\bigcup_{i=1}^n D_i} f\, dV = \sum_{i=1}^{n} \iiint_{D_i} f\, dV$$

۷ اگر D نسبت به مبدأ متقارن باشد و

$$\forall\ (x,y,z)\in D \qquad f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z),$$

آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\,dV = 0$$



۸ اگر D نسبت به صفحهٔ xy متقارن باشد و

$$\forall\, (x, y, z) \in D \qquad f(x, y, -z) = -f(x, y, z),$$

آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\, dV = 0$$

۹ اگر D نسبت به صفحهٔ xz متقارن باشد و

$$\forall\, (x, y, z) \in D \qquad f(x, -y, z) = -f(x, y, z),$$

آنگاه داریم:

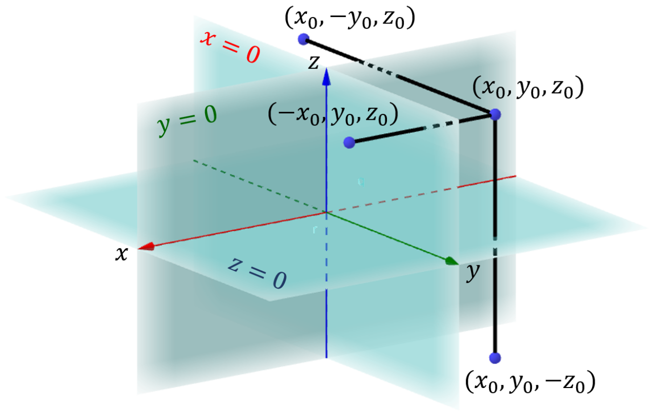
$$\iiint_D f\, dV = 0$$

۱۰ اگر D نسبت به صفحهٔ yz متقارن باشد و

$$\forall\ (x,y,z) \in D \qquad f(-x,y,z) = -f(x,y,z),$$

آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\,dV = 0$$



قرینهٔ نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) نسبت به صفحه‌های xy، xz و yz

قضیه

اگر $D \subseteq \mathbb{R}^3$ بسته و کران‌دار و $f : D \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه $\iiint_D f \, dV$ موجود است.

مثال

مقدار انتگرال زیر را بیابید:

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} (x^3 + x^2y^2 \sin(z^5) + 3)\, dV$$

پاسخ: فرض کنید که D گوی (کرهٔ توپر) به مرکز مبدأ و شعاع r باشد. داریم:

$$I = \iiint_D x^3\, dV + \iiint_D x^2y^2 \sin(z^5)\, dV + 3 \iiint_D dV$$

زیرا D بسته و کران‌دار است و توابع $f(x,y,z) = x^3$ و $g(x,y,z) = x^2y^2\sin(z^5)$ پیوسته هستند. توجه کنید که D نسبت به مبدأ متقارن است و f و g توابعی فرد هستند. پس، داریم:

$$\iiint_D x^3\, dV = 0 = \iiint_D x^2y^2 \sin(z^5)\, dV = 0$$

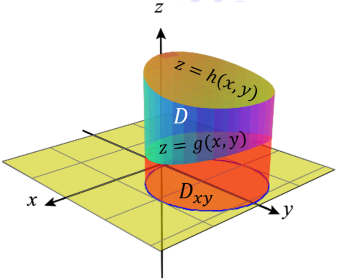
حال، با توجه به اینکه $\iiint_D dV$ برابر با حجم D است، داریم:

$$I = 3 \times (D \text{ حجم}) = 4\pi r^3$$

مشخص کردن یک ناحیه از فضا، مناسب برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه

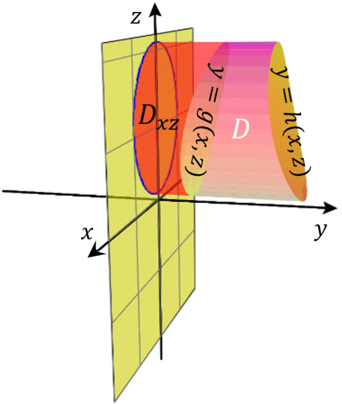
فرض کنید که $D \subseteq \mathbb{R}^3$ و D_{xy} تصویر D بر صفحهٔ xy باشد. همچنین، مطابق شکل توابع $g, h : D_{xy} \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. در این صورت، ناحیهٔ D برابر است با مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ که:

$$(x, y) \in D_{xy}, \quad g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$$



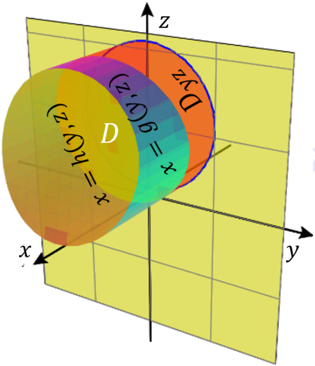
مشخص کردن یک ناحیه از فضا، مناسب برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D_{xz}, \quad g(x,z) \le y \le h(x,z)\}$$



مشخص کردن یک ناحیه از فضا، مناسب برای محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_{yz}, \quad g(y, z) \leq x \leq h(y, z)\}$$



قضیهٔ فوبینی برای انتگرال‌های سه‌گانه

فرض کنید که $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ناحیه‌ای بسته و کران‌دار و $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. اگر

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x),\ g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

که در آن $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ و $g, h : D_{xy} \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته هستند، آنگاه داریم:

$$\iiint_D f\, dV = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx$$

تذکر

توجه کنید که قضیهٔ فوبینی دارای ۵ حالت دیگر هم هست (زیرا dx، dy و dz به ۶ طریق قابل مرتب کردن هستند).

مثال

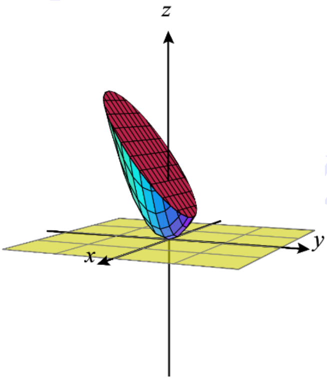
حجم ناحیهٔ D واقع در زیر صفحهٔ $z = 3 - 2y$ و بالای سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ را بیابید.

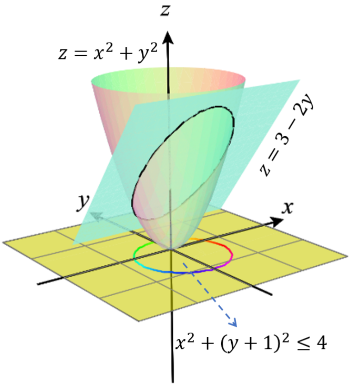
پاسخ:

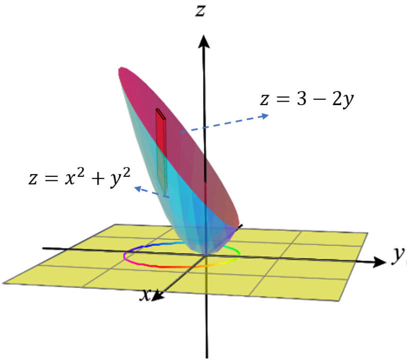
ابتدا D_{xy} را می‌یابیم. برای این منظور، داریم:

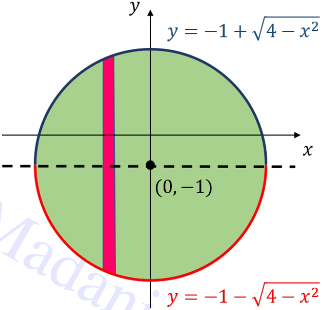
$$z = x^2 + y^2,\ z = 3 - 2y \implies 3 - 2y = x^2 + y^2 \implies x^2 + (y+1)^2 = 4$$

معادلهٔ بالا، معادلهٔ تصویر خم فصل مشترک صفحه و سهمی‌گون داده‌شده بر صفحهٔ xy است.
از این‌رو، D_{xy} (یعنی تصویر D بر صفحهٔ xy) مجموعهٔ همهٔ نقاط $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ است که $x^2 + (y+1)^2 \leq 4$.


z
y
x


z
$z = x^2 + y^2$
$z = 3 - 2y$
y
x
$x^2 + (y+1)^2 \leq 4$





داریم:

$$\text{حجم ناحیهٔ } D = V = \iiint_D dV = \int_{-2}^{2} \int_{-1-\sqrt{4-x^2}}^{-1+\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz\,dy\,dx$$

بنابراین، داریم:

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-1-\sqrt{4-x^2}}^{-1+\sqrt{4-x^2}}\left((3-2y)-(x^2+y^2)\right)\,dydx$$

حال، انتگرال دوگانهٔ بالا را به دو طریق حل می‌کنیم. راه اول –که دشوارتر است– بر اساس اطلاعات انتگرال یگانه است؛ در حالی که راه دوم بر اساس تغییر متغیر قطبی است.

راه اول:

$$\begin{aligned}V&=\int_{-2}^{2}\left(3y-y^2-x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-1-\sqrt{4-x^2}}^{y=-1+\sqrt{4-x^2}}dx\\&=\int_{-2}^{2}\left(8\sqrt{4-x^2}-2x^2\sqrt{4-x^2}-\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)dx\\&=\underbrace{8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx}_{I_1}-\underbrace{2\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\,dx}_{I_2}-\underbrace{\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx}_{I_3}\end{aligned}$$

حال، با تغییر متغیر $x = 2\cos(\theta)$، داریم:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\pi}^{2\pi} -4\sin(\theta)|\sin(\theta)|\,d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} 4\sin^2(\theta)\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 2(1-\cos(2\theta))\,d\theta = (2\theta - \sin(2\theta))\Big|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} = 2\pi \\
I_2 &= \int_{\pi}^{2\pi} -16\sin(\theta)\cos^2(\theta)|\sin(\theta)|\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 16\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} 4\sin^2(2\theta)\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 2(1-\cos(4\theta))\,d\theta = \left(2\theta - \frac{\sin(4\theta)}{2}\right)\Big|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} = 2\pi
\end{aligned}
$$

مجدداً با تغییر متغیر $x = 2\cos(\theta)$، داریم:

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\pi}^{2\pi} -16\sin(\theta)|\sin^3(\theta)|\,d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} 16\sin^4(\theta)\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} 16\sin^2(\theta)(1-\cos^2(\theta))\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \big(8(1-\cos(2\theta)) - 4\sin^2(2\theta)\big)\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} (8(1-\cos(2\theta)) - 2(1-\cos(4\theta)))\,d\theta \\
&= \left((8\theta - 4\sin(2\theta)) - \left(2\theta - \frac{\sin(4\theta)}{2}\right)\right)\Bigg|_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} = 6\pi
\end{aligned}
$$

در نهایت، داریم:

$$V = 8(2\pi) - 2(2\pi) - \frac{2}{3}(6\pi) = 8\pi$$

راه دوم:

$$V = \iint_{x^2+(y+1)^2\leq 4} \left(4-(x^2+(y+1)^2)\right)\, dxdy$$

حال، تغییر متغیر $u = x$ و $v = y+1$ را اعمال می‌کنیم. در این صورت، داریم:

$$V = \iint_{u^2+v^2\leq 4} (4-(u^2+v^2)) \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{1} dudv$$

در ادامه، با تغییر متغیر قطبی، داریم:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)\, rdrd\theta = 2\pi\int_0^2 (4r-r^3)\, dr$$

$$= 2\pi\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} = 8\pi$$

قضیهٔ تغییر متغیر برای انتگرال‌های سه‌گانه

فرض کنید که $S, D \subseteq \mathbb{R}^3$. همچنین، فرض کنید که $\Phi : S \to D$ یک تبدیل یک‌به‌یک به صورت

$$\Phi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

باشد و مشتقات جزئی اول توابع $x(u,v,w)$، $y(u,v,w)$ و $z(u,v,w)$ موجود و پیوسته باشند. اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد و $g : S \to \mathbb{R}$ به صورت

$$g(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

تعریف شود، آنگاه g نیز تابعی انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_S g(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

حجم بیضی‌گون زیر را بیابید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0$$

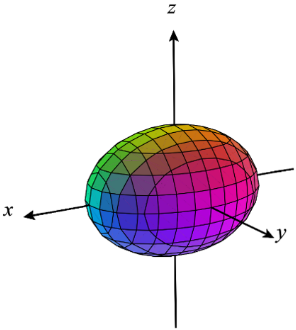
پاسخ:

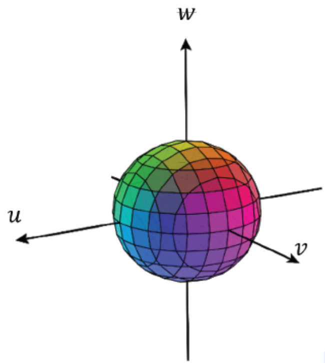
تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u=\frac{x}{a}, \quad v=\frac{y}{b}, \quad w=\frac{z}{c}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$x=au, \quad y=bv, \quad z=cw$$





فرض کنید که D ناحیهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ و S ناحیهٔ $u^2+v^2+w^2\leq 1$ باشد. بنابراین، داریم:

$$\text{حجم ناحیهٔ } D = \iiint_D dV_{x,y,z} = \iiint_S \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dV_{u,v,w}$$

توجه کنید که

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc$$

در نهایت، داریم:

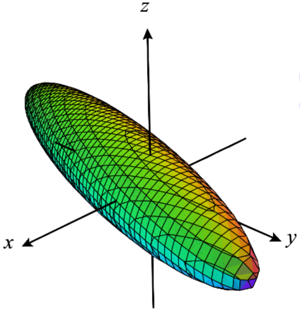
$$\text{حجم ناحیهٔ } D = abc \iiint_S dV_{u,v,w} = abc \times (\text{حجم ناحیهٔ } S) = \frac{4}{3}abc\pi$$

مثال

حجم ناحیهٔ محصور به رویهٔ $(-5x-2y+z)^2+(y-3z+2)^2+(3+5z)^2=64$ را بیابید.

پاسخ: تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u=-5x-2y+z,\quad v=y-3z+2,\quad w=3+5z$$



فرض کنید که D ناحیهٔ محصور به رویهٔ داده شده باشد. در این صورت، تحت تغییر متغیر یادشده، D به ناحیهٔ S به صورت $u^2+v^2+w^2 \leq 64$ تبدیل می‌شود. پس، بنابر قضیهٔ تغییر متغیر، داریم:

$$\text{حجم ناحیهٔ } D = V = \iiint_D dxdydz = \iiint_S \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

توجه کنید که

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = -25$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = -\frac{1}{25}$$

از این‌رو، داریم:

$$
\begin{aligned}
V = \frac{1}{25}\iiint_{S} {\color{red} dV_{u,v,w}} &= \frac{1}{25} \times (\text{حجم کرهٔ با شعاع } 8)\\
&= \frac{1}{25}\left(\frac{4}{3}(8^3)\pi\right)\\
&= \frac{2048}{75}\pi
\end{aligned}
$$

المان حجم در مختصات استوانه‌ای

در مختصات استوانه‌ای، داریم:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = z$$

بنابراین، اگر dV عنصر حجم در مختصات استوانه‌ای باشد، آنگاه داریم:

$$dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dzdrd\theta = \left|\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix}\right| dzdrd\theta$$

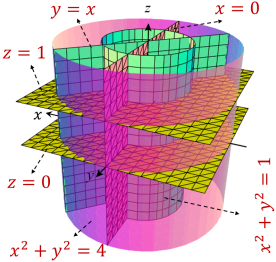
$$= \left|\det\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| dzdrd\theta = rdzdrd\theta$$

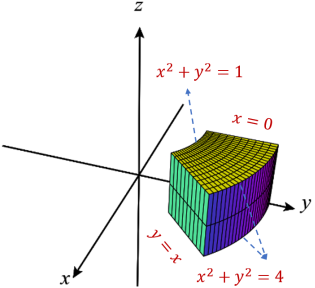
مثال

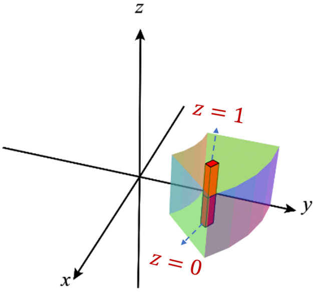
فرض کنید که D ناحیهٔ محدود به استوانه‌های $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=1$ و صفحات $z=0$، $z=1$، $x=0$ و $x=y$ در یک‌هشتم اول دستگاه مختصات باشد. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I=\iiint_D (x^2+y^2)\,dV$$

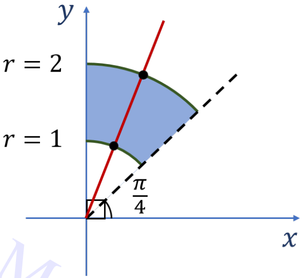
پاسخ:







(ب) المان انتگرال‌گیری نسبت به z

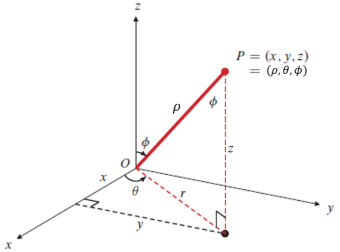


(آ) تصویر ناحیهٔ D بر صفحهٔ xy

با استفاده از تغییر متغیر استوانه‌ای، داریم:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{1}^{2} \int_{0}^{1} r^2 \, r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4} \int_{1}^{2} r^3 \, dr = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=1}^{r=2} = \frac{15\pi}{16}$$

المان حجم در مختصات کروی



در مختصات کروی داریم:

$$x = x(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin(\phi) \cos(\theta)$$

$$y = y(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin(\phi) \sin(\theta)$$

$$z = z(\rho, \phi, \theta) = \rho \cos(\phi)$$

$$r = \rho \sin(\phi)$$

$$\tan(\phi) = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

بنابراین، اگر dV عنصر حجم در مختصات کروی باشد، آنگاه داریم:

$$dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right| d\rho d\phi d\theta = \left|\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix}\right| d\rho d\phi d\theta$$

پس، داریم:

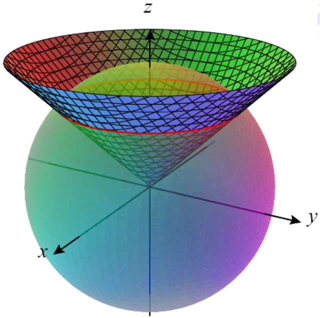
$$dV = \left|\det\begin{bmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) & \rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\rho\sin(\phi) & 0 \end{bmatrix}\right| d\rho d\phi d\theta$$

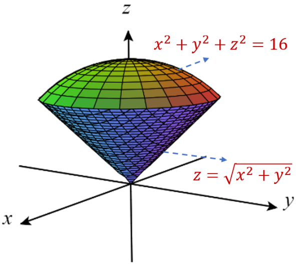
$$= \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho d\phi d\theta$$

مثال

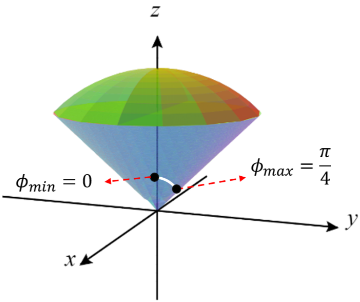
حجم ناحیهٔ D محصور به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=16$ و مخروط $\phi=\frac{\pi}{4}$ را بیابید.

پاسخ: از تغییر متغیر کروی استفاده می‌کنیم. از رابطهٔ $\tan(\phi)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$، نتیجه می‌گیریم که $z=\sqrt{x^2+y^2}$ معادلهٔ مخروط $\phi=\frac{\pi}{4}$ در مختصات دکارتی است.

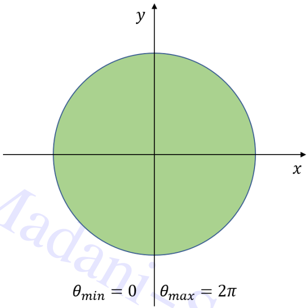




مطابق شکل‌هایی که در ادامه می‌آیند، کران‌های ρ، ϕ و θ را می‌یابیم.

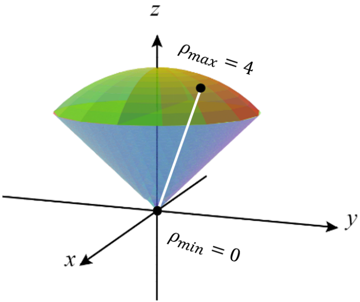


(ب) $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$



(آ) تصویر ناحیهٔ D بر صفحهٔ xy،

$0 \leq \theta \leq 2\pi$



$$0 \leq \rho \leq 4$$

بنابراین، حجم ناحیهٔ D برابر است با:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta = 2\pi \left(-\cos(\phi)\right)\Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=4}$$

$$= \frac{64(2-\sqrt{2})\pi}{3}$$

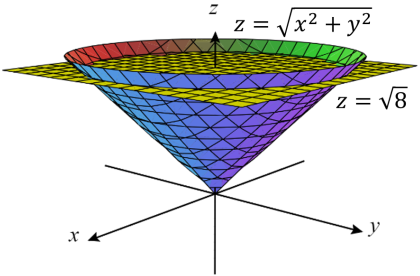
مثال‌های تکمیلی

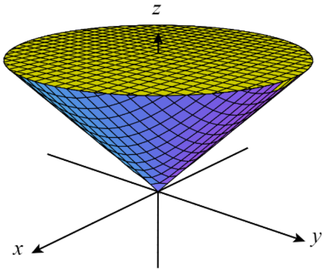
تاکنون مثال‌های **مفهومی** و **کاربردی** مختلفی را از این مبحث دیدیم. در ادامه، به مثال‌های بیشتری از این مبحث توجه فرمایید. برای درک بهتر، ابتدا به مسائل فکر کنید و سعی کنید که آن‌ها را حل بفرمایید. سپس پاسخ‌ها را با دقت مطالعه و بررسی نمایید.

مثال

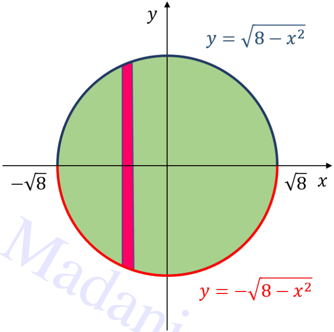
فرض کنید که D ناحیهٔ محصور به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و صفحهٔ $z = \sqrt{8}$ باشد. در این صورت، کران‌های انتگرال $I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$ را در هر سه مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی بنویسید.

پاسخ:

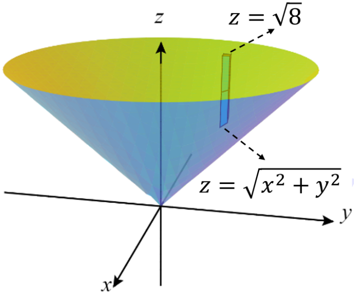




مختصات دکارتی:



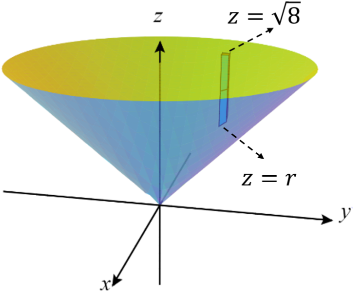
(آ) تصویر ناحیهٔ D بر صفحهٔ xy



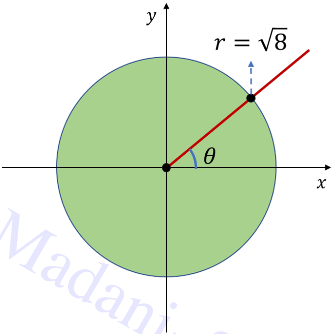
(ب) المان انتگرال‌گیری نسبت به z

$$I=\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$$

مختصات استوانه‌ای:



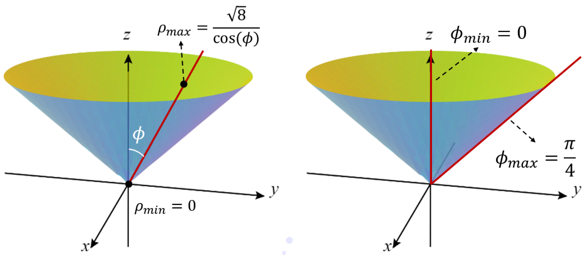
(ب) المان انتگرال‌گیری نسبت به z



(آ) تصویر ناحیهٔ D بر صفحهٔ xy

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\int_r^{\sqrt{8}}\sqrt{r^2+z^2}\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

مختصات کروی:



(آ) کران‌های ϕ

(ب) کران‌های ρ

واضح است که تصویر D بر صفحهٔ xy یک دیسک است و از این‌رو $0 \leq \theta \leq 2\pi$. حال، کران‌های ρ را بر حسب ϕ به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\rho_{\min} = 0$. همچنین، $\rho_{\max}$ به‌ازای صفحهٔ $z = \sqrt{8}$ به‌دست می‌آید. پس، داریم:

$$z = \sqrt{8} \implies \rho_{\max}\cos(\phi) = \sqrt{8} \implies \rho_{\max} = \frac{\sqrt{8}}{\cos(\phi)}$$

به‌علاوه، واضح است که $\phi_{\min} = 0$. همچنین، $\phi_{\max}$ به‌ازای رویهٔ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ به‌دست می‌آید. روی این رویه، داریم:

$$\tan(\phi_{\max}) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = 1 \implies \phi_{\max} = \frac{\pi}{4}$$

پس، در ناحیهٔ D داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{8}}{\cos\phi} \end{cases}$$

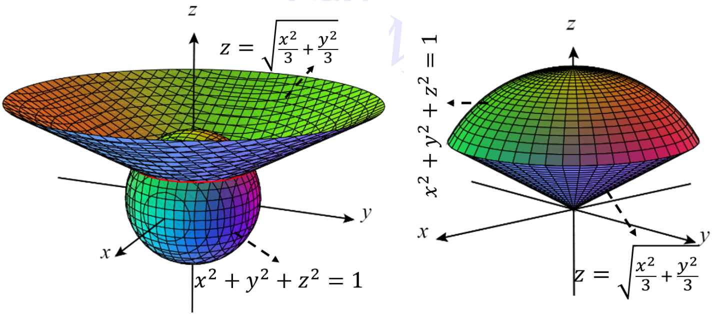
بنابراین، داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{8}}{\cos(\phi)}} \rho \, \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta$$

مثال

فرض کنید D داخل کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ و بالای مخروط $z=\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}}$ باشد. در این صورت، کران‌های انتگرال $I=\iiint_D f(x,y,z)\,dV$ را در مختصات استوانه‌ای و کروی بیابید.

پاسخ:

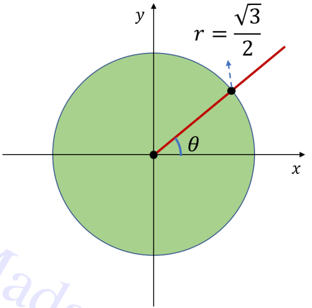


مختصات استوانه‌ای:

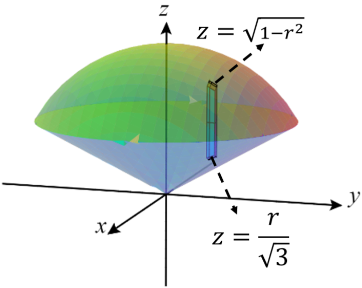
خم فصل مشترک مخروط و کرهٔ داده‌شده را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} z = \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$$

از این‌رو، D_{xy} برابر است با مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ که $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$.



(آ) تصویر ناحیهٔ D بر صفحهٔ xy



(ب) المان انتگرال‌گیری نسبت به z

بنابراین، داریم:

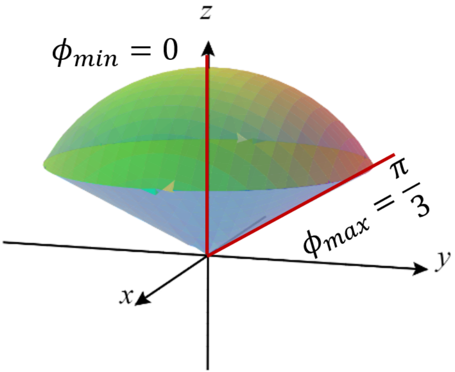
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{1-r^2}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r dz dr d\theta$$

مختصات کروی:

تصویر ناحیهٔ D بر صفحهٔ xy یک دیسک است و از این رو در ناحیهٔ D داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
حال، کران‌های ϕ را در ناحیهٔ D به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{\min} = 0$. توجه کنید که $\phi_{\max}$ روی مخروط $z = \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}}$ حاصل می‌شود. بنابراین، داریم:

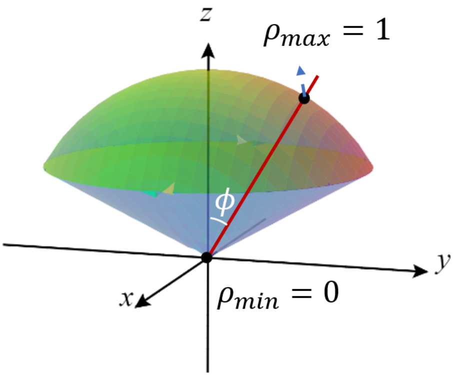
$$\tan(\phi_{\max}) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \sqrt{3}$$

که نتیجه می‌دهد $\phi_{\max} = \frac{\pi}{3}$.



$$\phi_{\max} = \frac{\pi}{3} \text{ و } \phi_{\min} = 0$$

همچنین، واضح است که $0 \leq \rho \leq 1$.



$\rho_{\max} = 1$ و $\rho_{\min} = 0$

پس، در ناحیهٔ D داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

در نهایت، داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{1} g(\rho, \phi, \theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta$$

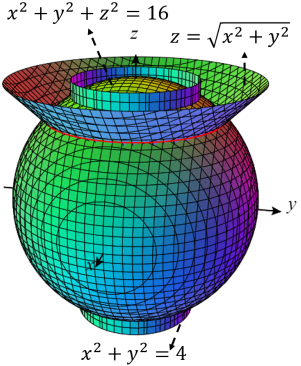
که در آن:

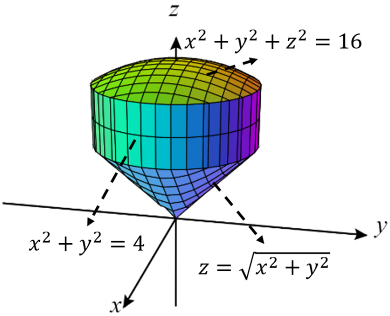
$$g(\rho, \phi, \theta) = f(\rho \sin(\phi)\cos(\theta), \rho \sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$$

مثال

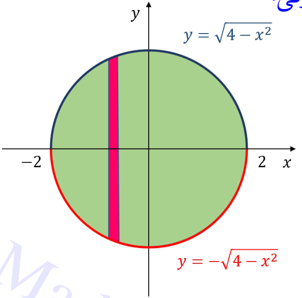
فرض کنید که D ناحیهٔ محصور به مخروط $\phi = \frac{\pi}{4}$، کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4$ است. کران‌های انتگرال $\iiint_D f(x,y,z)\, dV$ را در مختصات‌های دکارتی، استوانه‌ای و کروی بیابید.

پاسخ:

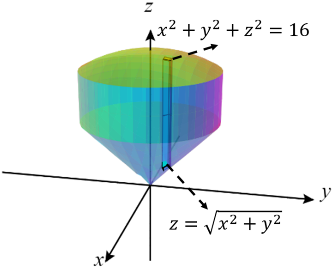




مختصات دکارتی:



(آ) تصویر ناحیهٔ D بر صفحهٔ xy

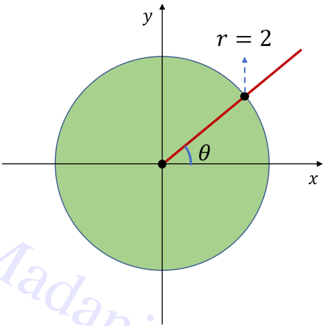


(ب) المان انتگرال‌گیری نسبت به z

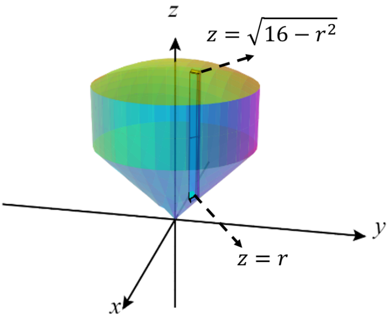
توجه کنید که D_{xy} مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است که $x^2 + y^2 \leq 4$. پس، داریم:

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dzdydx$$

مختصات استوانه‌ای:



(آ) تصویر ناحیهٔ D بر صفحهٔ xy

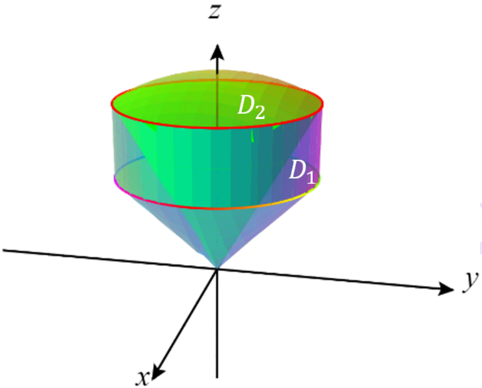


(ب) المان انتگرال‌گیری نسبت به z

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^{\sqrt{16-r^2}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

مختصات کروی:

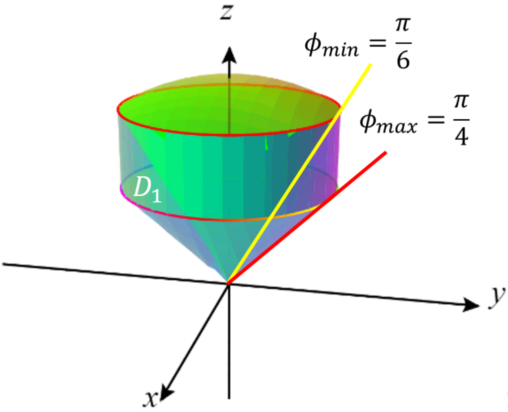
بنابر توضیحاتی که در ادامه می‌آیند، ناحیهٔ D را به دو ناحیهٔ D_1 و D_2 تقسیم می‌کنیم. ناحیه‌های D_1 و D_2 به‌ترتیب نقاطی از D را مشخص می‌کنند که بیرون و درون مخروط ترسیم‌شده قرار می‌گیرند.



ابتدا کران‌های انتگرال داده‌شده در مختصات کروی را در ناحیهٔ D_1 مشخص می‌کنیم.
تصویر ناحیهٔ D_1 بر صفحهٔ xy یک دیسک است و از این رو در ناحیهٔ D_1 داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
حال، کران‌های ϕ را در ناحیهٔ D_1 به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{\max} = \frac{\pi}{4}$. توجه کنید که $\phi_0 = \phi_{\min}$ در تقاطع استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ حاصل می‌شود.
بنابراین، داریم:

$$x^2 + y^2 = 4 \implies \rho^2 \sin^2(\phi_0) = r^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \implies \rho^2 = 16$$

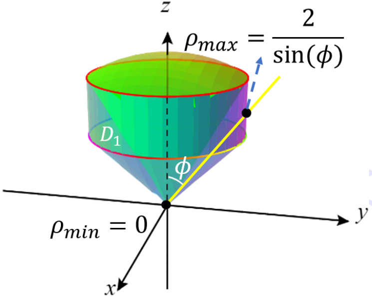
بنابراین، داریم $\sin^2(\phi_0) = \frac{1}{4}$ و از این‌رو $\sin(\phi_0) = \pm\frac{1}{2}$. اما داریم $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$، که نتیجه می‌دهد $\sin(\phi_0) = \frac{1}{2}$. پس، $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$.



$\phi_{\max} = \frac{\pi}{4}$ و $\phi_{\min} = \frac{\pi}{6}$

در ناحیهٔ D_1، داریم $\rho_{\min} = 0$؛ در حالی که بیشترین مقدار برای ρ به‌ازای رویهٔ $x^2 + y^2 = 4$ به‌دست می‌آید. حال، $\rho_{\max}$ را در ناحیهٔ D_1، به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 = 4 \implies \rho^2_{\max} \sin^2(\phi) = r^2 = 4 \implies \rho_{\max} = \frac{2}{\sin(\phi)}$$

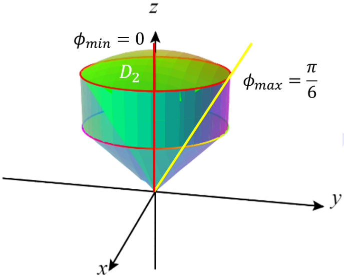


$$\rho_{\max} = \frac{2}{\sin(\phi)} \text{ و } \rho_{\min} = 0$$

پس، در ناحیهٔ D_1 داریم:

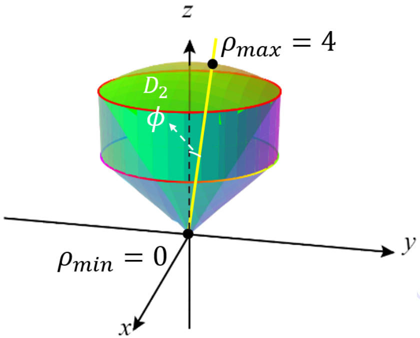
$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sin\phi} \end{cases}$$

حال، کران‌های انتگرال داده‌شده در مختصات کروی را در ناحیهٔ D_2 مشخص می‌کنیم.
تصویر ناحیهٔ D_2 بر صفحهٔ xy یک دیسک است و از این رو در ناحیهٔ D_2 داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
حال، کران‌های ϕ را در ناحیهٔ D_2 به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{\min} = 0$. توجه کنید که $\phi_{\max}$ در تقاطع استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4$ و کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ حاصل می‌شود. قبلاً دیدیم که $\phi_{\max} = \frac{\pi}{6}$.



$\phi_{\min} = 0$ و $\phi_{\max} = \frac{\pi}{6}$

در ناحیهٔ D_2، واضح است که $\rho_{\min} = 0$؛ در حالی که بیشترین مقدار ρ به‌ازای کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ به‌دست می‌آید. بنابراین، داریم $0 \le \rho \le 4$.



$\rho_{\min} = 0$ و $\rho_{\max} = 4$

پس، در ناحیهٔ D_2 داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leq \rho \leq 4 \end{cases}$$

در نهایت، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{D_1} f(x,y,z)\, dV_{x,y,z} + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\, dV_{x,y,z} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\sin(\phi)}} g(\rho,\phi,\theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{4} g(\rho,\phi,\theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

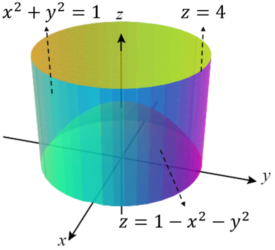
که در آن:

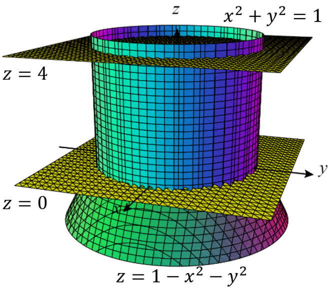
$$
g(\rho,\phi,\theta) = f(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))
$$

مثال

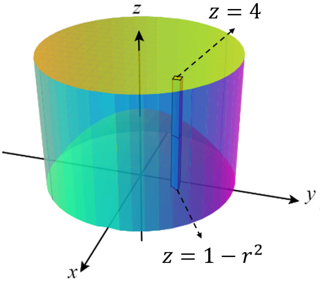
فرض کنید که D ناحیهٔ محصور به استوانهٔ $x^2+y^2=1$، صفحهٔ $z=0$ و صفحهٔ $z=4$ باشد که بالای سهمی‌گون $z=1-x^2-y^2$ قرار می‌گیرد. کران‌های انتگرال $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$ را در مختصات استوانه‌ای و کروی بیابید.

پاسخ:

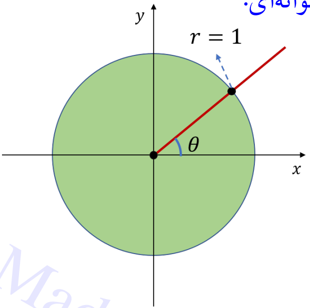




مختصات استوانه‌ای:



(ب) المان انتگرال‌گیری نسبت به z



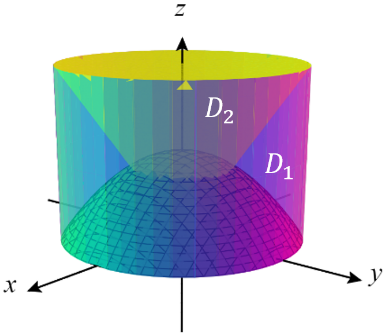
(آ) تصویر ناحیهٔ D بر صفحهٔ xy

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \int_{z=1-x^2-y^2}^{4} f(x,y,z)\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^{4} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r dz dr d\theta$$

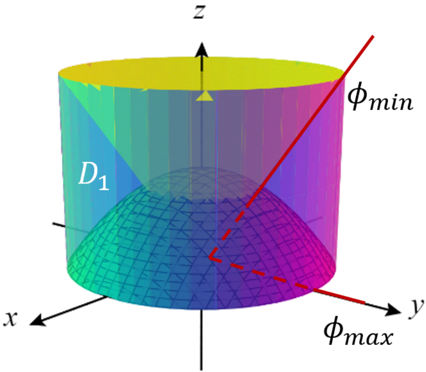
مختصات کروی:

بنابر توضیحاتی که در ادامه می‌آیند، ناحیهٔ D را به دو ناحیهٔ D_1 و D_2 تقسیم می‌کنیم. ناحیه‌های D_1 و D_2 به‌ترتیب نقاطی از D را مشخص می‌کنند که بیرون و درون مخروط ترسیم‌شده قرار می‌گیرند.



ابتدا کران‌های انتگرال داده‌شده در مختصات کروی را در ناحیهٔ D_1 مشخص می‌کنیم.
توجه کنید که در ناحیهٔ D_1 داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$. حال، کران‌های ϕ را در ناحیهٔ D_1 به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{\max} = \frac{\pi}{2}$. توجه کنید که $\phi_{\min}$ در تقاطع صفحهٔ $z = 4$ و استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ حاصل می‌شود. بنابراین، داریم:

$$\tan(\phi_{\min}) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{1}{4} \implies \phi_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$



$$\phi_{\max} = \frac{\pi}{2} \text{ و } \phi_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

توجه کنید که در ناحیهٔ D_1، کم‌ترین مقدار ρ به‌ازای رویهٔ $z = 1 - x^2 - y^2$ به‌دست می‌آید؛ در حالی که بیشترین مقدار ρ به‌ازای رویهٔ $x^2 + y^2 = 1$ به‌دست می‌آید. به منظور به‌دست آوردن $\rho_0 = \rho_{\min}$ در ناحیهٔ D_1، داریم:

$$z = 1 - x^2 - y^2 \implies \rho_0 \cos(\phi) = 1 - r^2 = 1 - \rho_0^2 \sin^2(\phi)$$

بنابراین، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر با متغیر ρ_0 به‌دست می‌آید:

$$\sin^2(\phi)\rho_0^2 + \cos(\phi)\rho_0 - 1 = 0$$

که نتیجه می‌دهد:

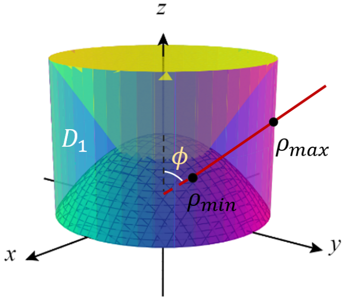
$$\rho_0 = \frac{-\cos(\phi) \pm \sqrt{1 + 3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$$

اما با توجه به نامنفی بودن ρ_0، فقط مقدار زیر مورد قبول است:

$$\rho_0 = \frac{-\cos(\phi) + \sqrt{1 + 3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$$

حال، $\rho_{\max}$ را در ناحیهٔ D_1 بر حسب ϕ به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 = 1 \implies \rho_{\max}^2 \sin^2(\phi) = r^2 = 1 \implies \rho_{\max} = \frac{1}{\sin(\phi)}$$



$\rho_{\max} = \frac{1}{\sin(\phi)}$ و $\rho_{\min} = \frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$

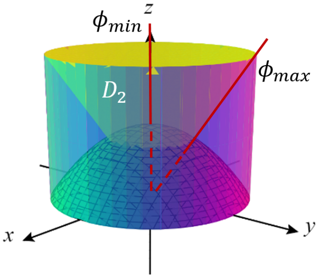
بنابراین، در ناحیهٔ D_1 داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)} \leq \rho \leq \frac{1}{\sin\phi} \end{cases}$$

حال، کران‌های انتگرال داده‌شده در مختصات کروی را در ناحیهٔ D_2 مشخص می‌کنیم.

تصویر ناحیهٔ D_2 بر صفحهٔ xy یک دیسک است و از این رو در ناحیهٔ D_2 داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

حال، کران‌های ϕ را در ناحیهٔ D_2 به‌دست می‌آوریم. واضح است که $\phi_{\min} = 0$. توجه کنید که $\phi_{\max}$ در تقاطع صفحهٔ $z = 4$ و استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ حاصل می‌شود. بنابراین، $\phi_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$.



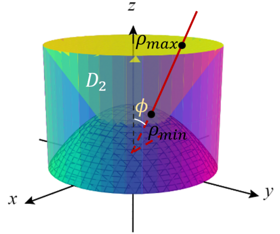
$$\phi_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \text{ و } \phi_{\min} = 0$$

در ناحیهٔ D_2، کم‌ترین مقدار ρ به‌ازای رویهٔ $z = 1 - x^2 - y^2$ به‌دست می‌آید؛ در حالی که بیشترین مقدار ρ به‌ازای رویهٔ $z = 4$ به‌دست می‌آید. قبلاً دیدیم که

$$\rho_{\min} = \frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$$

حال، ρ_{max} را در ناحیهٔ D_2 بر حسب ϕ به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$z = 4 \implies \rho_{\max}\cos(\phi) = 4 \implies \rho_{\max} = \frac{4}{\cos(\phi)}$$



$$\rho_{\max} = \frac{4}{\cos(\phi)} \text{ و } \rho_{\min} = \frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}$$

بنابراین، در ناحیهٔ D_2 داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \\ \frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)} \leq \rho \leq \frac{4}{\cos\phi} \end{cases}$$

در نهایت، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{D_1} f(x,y,z)\, dV_{x,y,z} + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\, dV_{x,y,z} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}}^{\frac{4}{\cos(\phi)}} g(\rho,\phi,\theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)} \int_{\frac{-\cos(\phi)+\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}}^{\frac{1}{\sin(\phi)}} g(\rho,\phi,\theta)\ \left(\rho^2 \sin(\phi)\right) d\rho d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

که در آن:

$$g(\rho,\phi,\theta) = f(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$$