انتگرال‌های ناسره (مجازی)

تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

پاییز ۱۴۰۲

همان‌طور که دیدیم، انتگرال را برای توابعی کران‌دار روی بازه‌ای کران‌دار مانند $[a,b]$ تعریف کرده‌ایم. در این قسمت می‌خواهیم شرط‌های کران‌دار بودن بازه و کران‌دار بودن تابع را حذف کرده و مفهوم انتگرال‌پذیری را گسترش دهیم.

تعریف (انتگرال‌های ناسره نوع اول)

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته بر $[a,+\infty)$ ($(-\infty,b]$) باشد. انتگرال ناسره‌ی $f(x)$ بر $[a,+\infty)$ ($(-\infty,b]$) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

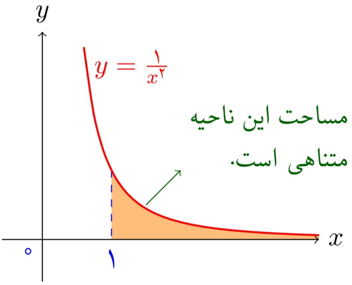
اگر حد فوق موجود و متناهی باشد، انتگرال ناسره را همگرا گوییم و در غیر این صورت آن را واگرا گوییم.

نکته

انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ را به‌صورت

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

در نظر می‌گیریم. بنابراین، چنین انتگرالی همگرا است، هرگاه هر دو انتگرال فوق همگرا باشند.



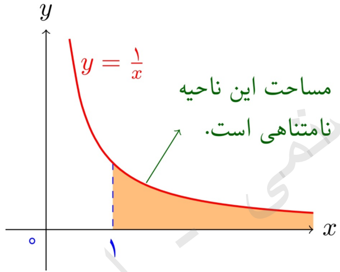
مثال

مساحت ناحیه‌های A_1 و A_2 که به‌ترتیب واقع در زیر نمودارهای $y = \frac{1}{x^2}$ و $y = \frac{1}{x}$، بالای محور x و طرف راست $x = 1$ قرار دارند را بیابید.

پاسخ:

$$\text{مساحت } A_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_1^{R} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^R \right) = \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{1}{R} + 1 \right) = 1$$



$$A_۲ \text{ مساحت } = \int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{۱}^{R} \frac{۱}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left(\ln x \Big|_{۱}^{R} \right) = \lim_{R\to+\infty} (\ln R - \ln ۱) = +\infty$$

تذکر

ممکن است در یک انتگرال ناسره، حد وجود نداشته باشد. به‌عنوان مثال:

$$\int_{0}^{+\infty} \cos x \, \mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} \cos x \, \mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \left(\sin x \Big|_{0}^{R} \right)$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \sin R \Rightarrow \text{حد وجود ندارد}$$

پس این انتگرال واگرا است.

مثال

فرض کنید $a > ۰$. نشان دهید $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\,\mathrm{d}x$ همگرا و انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ واگرا است.

پاسخ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{۰} e^{-a|x|}\,\mathrm{d}x + \int_{۰}^{\infty} e^{-a|x|}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-a|x|}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{۰}^{R} e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{۱}{a}e^{-ax}\Big|_{۰}^{R}\right)$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{۱}{ae^{aR}}+\frac{۱}{a}\right) = \frac{۱}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{۰} e^{-a|x|}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to-\infty}\int_{R}^{۰} e^{+ax}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to-\infty}\left(\frac{۱}{a}e^{ax}\Big|_{R}^{۰}\right)$$

$$= \lim_{R\to-\infty}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a}e^{aR}\right) = \frac{۱}{a}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{a} = \frac{۲}{a}$$ همگراست

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{۰} e^{-ax}\,\mathrm{d}x + \int_{۰}^{\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{۰} e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to-\infty}\int_{R}^{۰} e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{۱}{a}e^{-ax}\Big|_{R}^{۰}\right)$$

$$= \lim_{R\to-\infty}\left(-\frac{۱}{a} + \frac{۱}{ae^{aR}}\right) = +\infty \Longrightarrow$$ واگرا

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x$$ واگراست

تعریف (انتگرال ناسره نوع دوم)

فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $(a,b]$ $\big(\,[a,b)\,\big)$ پیوسته و در نزدیکی نقطه‌ی a $\big(\,b\,\big)$ بی‌کران باشد. انتگرال ناسره‌ی $f(x)$ بر بازه‌ی $(a,b]$ $\big(\,[a,b)\,\big)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

اگر حد فوق موجود و متناهی باشد، انتگرال ناسره را همگرا گوییم و در غیر این صورت، آن را واگرا گوییم.

نکته

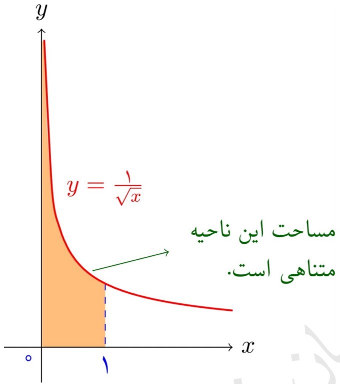
در تعریف قبل، فرض بی‌کران بودن تابع $f(x)$ در نزدیکی نقطه‌ی a (b) را می‌توان با این فرض که $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$) وجود نداشته باشد (به‌عنوان یک عدد متناهی)، نیز عوض کرد.

نکته

فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه‌های $[a,d)$ و $(d,b]$ پیوسته باشد و در نزدیکی نقطه‌ی d بی‌کران باشد. انتگرال $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ را به‌صورت

$$\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

در نظر می‌گیریم. بنابراین، چنین انتگرالی همگرا است، هرگاه هر دو انتگرال فوق همگرا باشند.



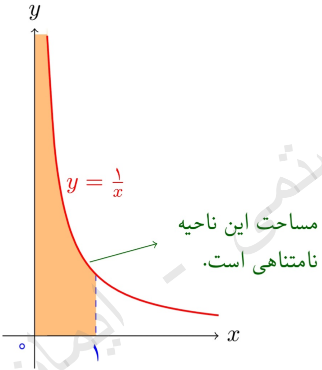
مثال

مساحت ناحیه‌های $A_۱$ و $A_۲$ که به‌ترتیب واقع در زیر نمودارهای توابع $y = \frac{۱}{\sqrt{x}}$ و $y = \frac{۱}{x}$، بالای محور x و بین خطوط $x = ۰$ و $x = ۱$ قرار دارند را بیابید.

پاسخ:

$$\text{مساحت } A_۱ = \int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to ۰^+} \int_c^۱ \frac{۱}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{c\to ۰^+} \left(۲\sqrt{x}\Big|_c^۱ \right) = \lim_{c\to ۰^+} (۲ - ۲\sqrt{c}) = ۲$$



$$\text{مساحت } A_۲ = \int_۰^۱ \frac{۱}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to ۰^+} \int_c^۱ \frac{۱}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{c\to ۰^+} \left(\ln x \Big|_c^۱ \right) = \lim_{c\to ۰^+} (\ln ۱ - \ln c) = +\infty$$

تذکر

اگر انتگرال $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ بیش از یک دلیل برای ناسره بودن داشته باشد، در مسائل آن را به‌صورت مجموع انتگرال‌های ناسره‌ای می‌نویسیم که در هر یک فقط یک دلیل برای ناسره بودن وجود داشته باشد.

مثال

هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید یا نشان دهید که واگرا است.

(۱) $\int_۰^۱ \ln x\,\mathrm{d}x$

(۲) $\int_۲^{+\infty} \frac{۱}{(x-۱)^۳}\,\mathrm{d}x$

(۳) $\int_۰^۱ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(۱-x)}}$

(۴) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{۱+x^۲}$

پاسخ:

(۱)
$$\int_{۰}^{۱} \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{c\to ۰^+} \int_{c}^{۱} \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{c\to ۰^+} (x\ln x - x)\Big|_{c}^{۱}$$
$$= \lim_{c\to ۰^+} (۰ - ۱ - c\ln c + c) = -۱ - \lim_{c\to ۰^+} \frac{\ln c}{\frac{۱}{c}}$$
$$\overset{\text{Hop}}{=} -۱ - \lim_{c\to ۰^+} \frac{\frac{۱}{c}}{-\frac{۱}{c^۲}} = -۱ - \lim_{c\to ۰^+} (-c) = -۱$$

(۲)
$$u = x - ۱ \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \qquad \begin{cases} x = ۲ \implies u = ۱ \\ x = +\infty \implies u = +\infty \end{cases}$$
$$\int_{۲}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-۱)^۳} = \int_{۱}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^۳} = \lim_{R\to+\infty} \int_{۱}^{R} \frac{\mathrm{d}u}{u^۳}$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{۱}{۲u^۲}\right)\Bigg|_{۱}^{R} = \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{۱}{۲R^۲} + \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

(۳) $u = x - \frac{1}{2} \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - u^2}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{u}{\frac{1}{2}}\right) + c = \sin^{-1}(2x-1) + c$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{c_1 \to 0^+} \int_{c_1}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} + \lim_{c_2 \to 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^{c_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \lim_{c_1 \to 0^+} \sin^{-1}(2x-1)\Big|_{c_1}^{\frac{1}{2}} + \lim_{c_2 \to 1^-} \sin^{-1}(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{c_2}$$

$$= \pi$$

$$(۴)\quad I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{۱+x^{۲}}=\int_{-\infty}^{۰}\frac{x\,\mathrm{d}x}{۱+x^{۲}}+\int_{۰}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{۱+x^{۲}}=I_{۱}+I_{۲}$$

$$\begin{aligned}I_{۱}=\int_{-\infty}^{۰}\frac{x\,\mathrm{d}x}{۱+x^{۲}}&=\lim_{R\to-\infty}\frac{۱}{۲}\int_{R}^{۰}\frac{۲x\,\mathrm{d}x}{۱+x^{۲}}\\&=\lim_{R\to-\infty}\frac{۱}{۲}\ln(۱+x^{۲})\Big|_{R}^{۰}\\&=\lim_{R\to-\infty}\frac{۱}{۲}\big(\ln ۱-\ln(۱+R^{۲})\big)=-\infty\end{aligned}$$

چون $I_{۱}$ واگرا است، پس I نیز واگرا است.

قضیه p–انتگرال‌ها

اگر $0 < a < +\infty$، آن‌گاه

$$(1) \quad \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & p > 1 \\ +\infty & p \leq 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{1-p} & p < 1 \\ +\infty & p \geq 1 \end{cases}$$

اثبات: (۱) اگر $p = ۱$، آن‌گاه

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{R\to+\infty}\left(\ln x\Big|_a^R\right) = \lim_{R\to+\infty}(\ln R - \ln a) = +\infty$$

با فرض $p \neq ۱$ خواهیم داشت:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{R\to+\infty}\int_a^R x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{x^{-p+۱}}{-p+۱}\Big|_a^R\right)$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{R^{۱-p}}{۱-p} - \frac{a^{۱-p}}{۱-p}\right) = \begin{cases} \dfrac{a^{۱-p}}{p-۱} & p > ۱ \\ +\infty & p < ۱ \end{cases}$$

اثبات (۲) مشابه است.

قضیه (آزمون مقایسه)

فرض کنید $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ و $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع پیوسته بر بازه‌ی (a, b) باشند به‌طوری که به‌ازای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $0 \leq f(x) \leq g(x)$. در این صورت، اگر $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ همگرا باشد، آن‌گاه $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ نیز همگرا است و داریم:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

بنابراین، اگر $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ واگرا باشد، آن‌گاه $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ نیز واگرا است.

قضیه

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته روی (a, b) باشد که $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. اگر $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ همگرا باشد، آن‌گاه $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ نیز همگرا است.

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را مشخص کنید.

$$(۱)\quad \int_{۰}^{+\infty} e^{-x^{۲}}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad (۲)\quad \int_{۱}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

پاسخ: (۱) تابع $e^{-x^{۲}}$ بر $[۰,۱]$ پیوسته است، پس انتگرال $\int_{۰}^{۱} e^{-x^{۲}}\,\mathrm{d}x$ موجود و برابر با عددی متناهی است. برای تعیین همگرایی $\int_{۱}^{+\infty} e^{-x^{۲}}\,\mathrm{d}x$، توجه می‌کنیم که به‌ازای هر $x \geq ۱$ داریم:

$$x^{۲} \geq x \implies -x^{۲} \leq -x \implies ۰ < e^{-x^{۲}} \leq e^{-x}$$

$$\int_{۱}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} -e^{-x}\Big|_{۱}^{R} = \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{-۱}{e^{R}} + \frac{۱}{e}\right) = \frac{۱}{e}$$

انتگرال $\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ همگرا می‌باشد و در نتیجه بنا بر آزمون مقایسه، انتگرال ناسره‌ی $\int_{1}^{+\infty} e^{-x^{2}}\,\mathrm{d}x$ نیز همگرا است. بنابراین انتگرال $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}}\,\mathrm{d}x$ همگرا است.

(۲)

$$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{1}^{R}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\xRightarrow[\mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\to v=-\cos x]{u=\frac{1}{x}\to\mathrm{d}u=-\frac{1}{x^{2}}\,\mathrm{d}x}\quad =\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{-\cos x}{x}\Big|_{1}^{R}-\int_{1}^{R}\frac{\cos x}{x^{2}}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{-\cos R}{R}+\frac{\cos(1)}{1}\right)-\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\cos(1)-\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{2}}\,\mathrm{d}x$$

اما به‌ازای هر $x \geq 1$ داریم:

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

بنا بر قضیه‌ی pـانتگرال‌ها ($p = 2$)، انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ همگرا است. پس بنا بر آزمون مقایسه، $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x$ همگرا می‌باشد و در نتیجه $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ همگرا است. بنابراین I نیز همگرا است.

قضیه (آزمون مقایسه‌ی حدی)

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ روی (a,b) پیوسته و مثبت باشند و $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
اگر $L = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$، آن‌گاه

(۱) هرگاه $L \neq \circ, +\infty$، انتگرال‌های $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ و $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ هم‌رفتارند.

(۲) اگر $L = \circ$ و $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ همگرا باشد، آن‌گاه $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ نیز همگرا است.

(۳) در صورتی که $L = +\infty$ و $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ واگرا باشد، آن‌گاه $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ نیز واگرا است.

توجه کنید که با توجه به نوع انتگرال ناسره، می‌توان $x \to a^+$ را با $x \to b^-$، $x \to +\infty$ و $x \to -\infty$ عوض کرد.

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را مشخص کنید.

(۱) $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^{۳}}}$ (۲) $\displaystyle I_\alpha=\int_{۰}^{\pi^{۲}}\frac{\mathrm{d}x}{(۱-\cos\sqrt{x})^{\alpha}}$

پاسخ:

(۱) $$I=\int_{۰}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^{۳}}}\overset{a>۰}{=\!=}\int_{۰}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^{۳}}}+\int_{a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^{۳}}}$$

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{\frac{۱}{\sqrt{x+x^{۳}}}}{\frac{۱}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to۰^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+x^{۳}}}=\lim_{x\to۰^+}\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{۱+x^{۲}}}=۱$$

طبق قضیه‌ی pـانتگرال‌ها ($p=\frac{۱}{۲}$)، انتگرال $\displaystyle\int_{۰}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ همگرا است. در نتیجه $\displaystyle\int_{۰}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^{۳}}}$ ، بنا بر آزمون مقایسه‌ی حدی، همگرا می‌باشد.

همچنین،

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x+x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$$

بنا بر قضیه‌ی pـانتگرال‌ها ($p = \frac{1}{2}$)، انتگرال $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ همگرا است. پس $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^3}}$، طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، همگرا می‌باشد و در نتیجه I همگرا است.

(۲) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{(1-\cos\sqrt{x})^{\alpha}}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha}}{\left(2\sin^{2}(\frac{\sqrt{x}}{2})\right)^{\alpha}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha}}{2^{\alpha}\left(\sin^{2}(\frac{\sqrt{x}}{2})\right)^{\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4^{\alpha}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\times\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{\alpha}}{2^{\alpha}\left(\sin(\frac{\sqrt{x}}{2})\times\sin(\frac{\sqrt{x}}{2})\right)^{\alpha}}$$

$$= 2^{\alpha}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}\times\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin(\frac{\sqrt{x}}{2})\times\sin(\frac{\sqrt{x}}{2})}\right)^{\alpha} = 2^{\alpha}$$

طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، I_α و $\int_{0}^{\pi^{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ هم‌رفتارند. بنا بر قضیه‌ی pـانتگرال‌ها، اگر $\alpha < 1$، آن‌گاه I_α همگرا و اگر $\alpha \geq 1$، آن‌گاه I_α واگرا است.

قضیه

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی پیوسته روی (a,b) باشند که $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
اگر $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ و $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ همگرا باشند، آن‌گاه

$$\int_a^b \left(Af(x) + Bg(x)\right)\mathrm{d}x$$

برای هر $A, B \in \mathbb{R}$ نیز همگرا است.

مثال

مساحت ناحیه‌ی محصور به منحنی $y = \frac{1}{1+x^2}$ و محور x را بیابید.

پاسخ:

$$\text{مساحت} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲} = \int_{-\infty}^{۰} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲} + \int_{۰}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲}$$

$$= \lim_{R_۱\to+\infty} \int_{-R_۱}^{۰} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲} + \lim_{R_۲\to+\infty} \int_{۰}^{R_۲} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲}$$

$$= \lim_{R_۱\to+\infty} \int_{۰}^{R_۱} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲} + \lim_{R_۲\to+\infty} \int_{۰}^{R_۲} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲}$$ (تابع زوج)

$$= \lim_{R\to+\infty} \int_{۰}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲} + \lim_{R\to+\infty} \int_{۰}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲}$$

$$= ۲ \lim_{R\to+\infty} \int_{۰}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲} = ۲ \lim_{R\to+\infty} \left(\arctan x \Big|_{۰}^{R} \right)$$

$$= ۲ \lim_{R\to+\infty} (\arctan R - \arctan ۰) = ۲\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \pi$$

مثال

اشکال استدلال زیر را بیابید؛

استدلال نادرست: به منظور بررسی همگرایی انتگرال ناسره‌ی $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$، توابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ و $\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ هم‌رفتارند. می‌دانیم:

$$\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

بنا بر قضیه‌ی pـانتگرال‌ها، $\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ واگرا می‌باشد، پس $\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ نیز واگرا است.

مثال

بنابراین، طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، $\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ واگرا می‌باشد.

پاسخ: توجه می‌کنیم که در استدلال بالا مقایسه‌ی حدی با تابع $g(x) = \frac{1}{x^2}$ در بازه‌ی $(0, +\infty)$ انجام شده است و می‌دانیم در این بازه، انتگرال $\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ ترکیبی از دو انتگرال ناسره است. لازم است این نکته را در نظر بگیریم که در استفاده از آزمون مقایسه یا مقایسه‌ی حدی، انتگرال‌های ناسره نباید بیش از یک دلیل برای ناسره بودن، داشته باشند. برای حل صحیح این مسئله، می‌توان مانند مثال قبل عمل کرد یا به صورت زیر نوشت:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = I + J$$

واضح است که انتگرال I مقداری متناهی دارد. با مقایسه‌ی حدی با تابع $\frac{1}{x^2}$ روی بازه‌ی $[1, +\infty)$، می‌توان نتیجه گرفت J همگرا است، پس انتگرال مسئله نیز همگرا است.

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را مشخص کنید.

$$(۱)\quad \int_۰^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{۱+\sqrt{x}} \qquad (۳)\quad \int_۲^{+\infty} \frac{\sin^۲ x}{x(\ln x)^۲}\,\mathrm{d}x$$

$$(۲)\quad \int_۰^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{۱+x^۲\sin^۲ x} \qquad (۴)\quad \int_۰^{+\infty} \frac{x\ln x}{(x^۲+۱)^۲}\,\mathrm{d}x$$

پاسخ:

$$(۱)\quad \int_۰^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{۱+\sqrt{x}} = \int_۰^۱ \frac{\mathrm{d}x}{۱+\sqrt{x}} + \int_۱^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{۱+\sqrt{x}}$$

اگر $۱ \geq x$، آنگاه $۱ \geq \sqrt{x}$ و از این‌رو $\frac{۱}{۱+\sqrt{x}} \leq \frac{۱}{۲\sqrt{x}} < ۰$. بنا بر قضیه‌ی pـانتگرال‌ها ($p = \frac{۱}{۲}$)، انتگرال $\int_۱^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \frac{۱}{۲} = \int_۱^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{۲\sqrt{x}}$ واگرا می‌باشد. پس،

طبق آزمون مقایسه، $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ واگرا است. بنابراین $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ نیز واگرا است. توجه شود که واگرایی $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ را می‌توان با استفاده از آزمون مقایسه‌ی حدی با تابع $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ نیز نشان داد.

$$(2)\quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x} = \int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x} + \int_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$$

اگر $x \geq 1$، آن‌گاه

$$x^2 \geq 1 \implies x \geq \frac{1}{x} \implies 2x \geq \frac{1}{x} + x \implies \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$

بنابراین $\dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{x+\frac{1}{x}} = \dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{x}{1+x^2\sin x}$. طبق قضیه‌ی pـ انتگرال‌ها

(۱ $= p$)، $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} \frac{1}{2} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}$ واگرا است. پس $\int_{1}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^{2}\sin^{2}x}$، طبق آزمون مقایسه، واگرا می‌باشد. بنابراین انتگرال (۲) واگرا است.

(۳) به‌ازای هر ۲ $\geq x$ داریم $\frac{1}{x(\ln x)^{2}} \geq \frac{\sin^{2}x}{x(\ln x)^{2}} \geq 0$. اگر قرار دهیم $u=\ln x$، آن‌گاه $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. همچنین، کران‌های انتگرال با متغیر جدید به‌ترتیب برابر ۲ ln و $+\infty$ است. در نتیجه

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{2}} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2}}$$

طبق قضیه‌ی pـانتگرال‌ها (۲ $= p$)، $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2}}$ همگرا می‌باشد. پس، بنا بر آزمون مقایسه، انتگرال (۳) همگرا است.

$$(۴)\quad I = \int_{۰}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\,\mathrm{d}x = \int_{۰}^{۱} \frac{x \ln x}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\,\mathrm{d}x + \int_{۱}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\,\mathrm{d}x$$
$$= I_{۱} + I_{۲}$$

توجه می‌کنیم که تابع $f(x) = \dfrac{x \ln x}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$ بر $(۰, ۱]$ پیوسته است و $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x) = ۰$.
بنابراین انتگرال $I_{۱}$ همگرا می‌باشد. اگر $x \geq ۱$، آن‌گاه داریم:

$$۰ \leq \frac{x \ln x}{(x^{۲}+۱)^{۲}} < \frac{x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}} < \frac{x^{۲}}{(x^{۲})^{۲}} = \frac{۱}{x^{۲}}$$

بنا بر قضیه‌ی pـانتگرال‌ها ($p = ۲$)، $\displaystyle\int_{۱}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}}$ همگرا است. بنابراین، طبق آزمون مقایسه، انتگرال $I_{۲}$ همگرا می‌باشد. از همگرایی انتگرال‌های $I_{۱}$ و $I_{۲}$، همگرایی انتگرال I نتیجه می‌شود.

مثال

همگرایی یا واگرایی $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2}+6x+\sin x}$ را مشخص کنید.

پاسخ: توابع مثبت و پیوسته‌ی $f(x)$ و $g(x)$ را بر بازه‌ی $[0,1)$، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{1}{x^{2}+6x+\sin x} \qquad g(x)=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^{+}} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^{+}} \frac{x}{x^{2}+6x+\sin x} \overset{\text{Hop}}{=} \lim_{x\to 0^{+}} \frac{1}{2x+6+\cos x}=\frac{1}{7}$$

بنابراین، طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، $\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ و $\int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ هم‌رفتارند. چون $\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ واگرا است (قضیه‌ی pـانتگرال‌ها)، لذا انتگرال مسئله واگرا است.

مثال

همگرایی یا واگرایی $\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x - x}$ را مشخص کنید.

پاسخ: توابع مثبت و پیوسته‌ی $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$ و $g(x) = \frac{1}{e^x}$ را بر بازه‌ی $[0, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x - x}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = 1$$

طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، $\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ و $\int_{0}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ هم‌رفتارند. از آنجا که

$$\int_{0}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \left(- e^{-x}\Big|_{0}^{R} \right) = 1$$

لذا انتگرال $\int_{0}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ همگرا است و در نتیجه $\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ همگرا است.

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر را مشخص کنید.

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

پاسخ: توابع مثبت و پیوسته‌ی $f(x)$ و $g(x)$ را بر بازه‌ی $[1, +\infty)$، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1} \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln x}{x^2+1}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\ln x+\sqrt{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{2}\ln x+1}{2\sqrt{x}}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{2x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2\sqrt{x}}=0$$

بنا بر قضیه‌ی pـانتگرال‌ها ($p=\frac{3}{2}$)، انتگرال $\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^\infty\frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ همگرا است. در نتیجه انتگرال مسئله، طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، همگرا است.

مثال

همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر را مشخص کنید.

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{x^{۲}\sqrt{x}+x^{۳}}$$

پاسخ: توابع مثبت و پیوسته‌ی $f(x)$ و $g(x)$ را بر بازه‌ی $[۰, ۱)$، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^{۲}\sqrt{x}+x^{۳}} \qquad g(x)=\frac{۱}{x\sqrt{x}}$$

در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\sin x}{x^2\sqrt{x}+x^3}}{\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}\sin x}{x^2\sqrt{x}+x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x+x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1\times 1=1$$

بنابراین، طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ و $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ هم‌رفتارند. بنا بر قضیه‌ی pـانتگرال‌ها ($p=\frac{3}{2}$)، $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ واگرا است و در نتیجه انتگرال مسئله نیز واگرا است.

مثال

همگرایی یا واگرایی $\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ را مشخص کنید.

پاسخ:

$$\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} = \int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} + \int_{2}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$$

$$= \lim_{c_1 \to 1^+} \int_{c_1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} + \lim_{c_2 \to 3^-} \int_{2}^{c_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (x-2)^2}}$$

$$= \lim_{c_1 \to 1^+} \sin^{-1}(x-2)\Big|_{c_1}^{2} + \lim_{c_2 \to 3^-} \sin^{-1}(x-2)\Big|_{2}^{c_2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

همگراست

تمرین

همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را مشخص کنید.

(۱) $$\int_{۳}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{۲ + \cos x + \ln x}$$

(۲) $$\int_{۱}^{+\infty} \frac{(\ln x)\sin^{۲} x}{x^{۲} + ۲}\,\mathrm{d}x$$

(۳) $$\int_{۰}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+۱)}$$

(۴) $$\int_{۱}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{۳} - ۱}}$$

(۵) $$\int_{۰}^{۱} \frac{e^x}{x^{۲}}\,\mathrm{d}x$$

(۶) $$\int_{۱}^{+\infty} e^{-(x+\frac{۱}{x})}\,\mathrm{d}x$$

(۷) $$\int_{۰}^{۱} \frac{\mathrm{d}x}{x^{۴} + \sqrt{x}}$$

(۸) $$\int_{۳}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} - ۱}$$

تمرین

(۹) $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(۱۰) $\int_{۱}^{+\infty} \frac{\sqrt{۱ + x^{۲}}}{x^{۳}}\,\mathrm{d}x$

(۱۱) $\int_{۱}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{۲} + x}}$

(۱۲) $\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sqrt[۴]{x}}{\sqrt{x} + x^{۳}}\,\mathrm{d}x$

(۱۳) $\int_{\circ}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{۲} + ۱)}$

(۱۴) $\int_{\circ}^{۱} \frac{e^{-x}}{\sqrt[۳]{x}}\,\mathrm{d}x$

(۱۵) $\int_{۲}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$

(۱۶) $\int_{\circ}^{۱} \frac{۱ + \sin x}{\sqrt{x}(x + ۱)^{۲}}\,\mathrm{d}x$