دنباله‌ها و سری‌ها

تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
پاییز ۱۴۰۲

تعریف

تابع $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ را یک *دنباله‌ی نامتناهی* از اعداد می‌نامند. مقدار تابع $a(n)$ را جمله‌ی nـام دنباله می‌نامیم و با a_n نمایش می‌دهیم. معمولا دنباله را با نوشتن برد تابع (با حفظ ترتیب) مشخص می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} a(1), & a(2), & a(3), & \ldots, & a(n-1), & a(n), & a(n+1), & \ldots \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n, & a_{n+1}, & \ldots \end{array}$$

به جای a_n می‌توان نوشت: s_n، x_n، y_n و . . . . برای اختصار نماد $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را جهت نمایش یک دنباله به کار می‌بریم.

مثال

موارد زیر مثال‌هایی از دنباله می‌باشند:

$$(۱)\quad \begin{cases} a_n = n \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \dots) \\ ۱, ۲, ۳, \dots, n-۱, n, n+۱, \dots \end{cases}$$

$$(۲)\quad \begin{cases} b_n = \dfrac{۱}{n} \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \dots) \\ ۱, \dfrac{۱}{۲}, \dfrac{۱}{۳}, \dots, \dfrac{۱}{n-۱}, \dfrac{۱}{n}, \dfrac{۱}{n+۱}, \dots \end{cases}$$

$$(۳)\quad \begin{cases} c_n = (-۱)^n \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \dots) \\ -۱, ۱, -۱, \dots, (-۱)^{n-۱}, (-۱)^n, (-۱)^{n+۱}, \dots \end{cases}$$

تعریف

دنباله‌ی $\{a_n\}$ را همگرا به a می‌گوییم و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ ، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$n \geqslant N \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

در صورتی که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ به a همگرا است و در غیر این صورت می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا است. اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty\right)$ می‌گوییم $\{a_n\}$ به $+\infty$ $(-\infty)$ واگرا است.

قضیه

حد یک دنباله، در صورت وجود، یکتا است.

مثال

فرض کنیم $c \in \mathbb{R}$ و $p > 0$. اگر $a_n = \dfrac{c}{n^p}$، آن‌گاه با استفاده از تعریف می‌توان نشان داد:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0$$

مثال

دنباله‌ی $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ به $+\infty$ واگرا است. دنباله‌ی $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا است. دنباله‌ی $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز واگرا است (ولی نه به $+\infty$ یا $-\infty$).

قضیه

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. در این صورت:

(۱) $\lim_{n\to\infty} (a_n + cb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + c \lim_{n\to\infty} b_n = a + cb \qquad (c \in \mathbb{R})$

(۲) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = ab$

(۳) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \qquad (b \neq ۰)$

مثال

$$(۱)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{۲n}{۳n+۱}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{۳+\frac{۱}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}۲}{\lim\limits_{n\to\infty}(۳+\frac{۱}{n})}$$

$$=\frac{۲}{\lim\limits_{n\to\infty}۳+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n}}=\frac{۲}{۳+۰}=\frac{۲}{۳}$$

$$(۲)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^۲+۲n}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^۲+۲n}-n)(\sqrt{n^۲+۲n}+n)}{(\sqrt{n^۲+۲n}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۲n}{(\sqrt{n^۲+۲n}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{\sqrt{۱+\frac{۲}{n}}+۱}=\frac{۲}{۱+۱}=۱$$

گزاره

فرض کنید عدد طبیعی مانند N وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $n \geq N$ داریم $a_n \leq b_n$.
اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = b$، آن‌گاه $a \leq b$.

قضیه فشردگی

فرض کنید $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ سه دنباله باشند و عدد طبیعی مانند N وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $n \geq N$ نامساوی $a_n \leq b_n \leq c_n$ برقرار باشد. در این صورت اگر $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

گزاره

برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

تذکر

گزاره‌ی قبل فقط برای حد صفر برقرار است. به‌عنوان مثال، دنباله‌ی $a_n = (-۱)^n$ واگرا است، اما $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = ۱$.

مثال

حد دنباله‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

$$(۱)\quad a_n = \frac{\sin(n)}{n} \qquad\qquad (۲)\quad a_n = \frac{n!}{n^n}$$

(۱) پاسخ:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad -۱ \leq \sin(n) \leq ۱ \implies -\frac{۱}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{۱}{n}$$

چون $\lim_{n\to\infty} \frac{-۱}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$ ، بنا بر قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = ۰$$

(۲)

$$۰ < a_n = \frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times (n-۱) \times n}{n \times n \times n \times \cdots \times n \times n}$$

$$= \frac{۱}{n} \times \left[\frac{۲}{n} \times \frac{۳}{n} \times \cdots \times \frac{n-۱}{n} \times \frac{n}{n}\right] \leq \frac{۱}{n}$$

$$\implies ۰ < a_n \leq \frac{۱}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} ۰ = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$$

$$\xRightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = ۰$$

تعریف

دنباله‌ی $\{a_n\}$ از بالا (پایین) به M (L) کران‌دار است و M (L) یک کران بالایی (پایینی) این دنباله است، هرگاه به‌ازای هر $n \in N$ داشته باشیم $a_n \leq M$ $(L \leq a_n)$.
دنباله‌ی $\{a_n\}$ را کران‌دار گوییم، هرگاه از بالا و پایین کران‌دار باشد.

قضیه (صفر ضربدر کراندار)

اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای کران‌دار باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = ۰$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ۰$.

قضیه

اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$، آن‌گاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای کران‌دار است.

تذکر

عکس قضیه‌ی بالا درست نیست. دنباله‌ی $\{(-۱)^n\}$ کران‌دار است اما همگرا نیست.

مثال

(۱) دنباله‌ی $a_n = (-۱)^n \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)$ کران‌دار است، زیرا:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad |a_n| = \left|(-۱)^n \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)\right| \leq ۱ + \frac{۱}{n} \leq ۲$$

(۲) دنباله‌ی $a_n = n^۲ - n$ از پایین کران‌دار و از بالا بی‌کران است، زیرا:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad ۰ \leq (n-۱)^۲ \leq n(n-۱) = a_n$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^۲ - n = \lim_{n\to\infty} n^۲ \left(۱ - \frac{۱}{n}\right) = +\infty$$

تعریف

دنباله‌ی $\{a_n\}$ را صعودی (نزولی) گوییم، هرگاه به‌ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_{n+1} \leq a_n$).

قضیه

اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی (نزولی) و از بالا (پایین) کران‌دار باشد، آن‌گاه $\{a_n\}$ همگرا است.

اصل استقرای ریاضی

فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد که دارای دو خاصیت زیر است:

الف) عدد ۱ در مجموعه‌ی S است.

ب) هرگاه عدد طبیعی k در S باشد، آنگاه $k+1$ نیز در S باشد.

در این صورت S برابر مجموعه‌ی اعداد طبیعی است.

فرض کنیم $P(n)$ یک گزاره‌ی ریاضی باشد و بخواهیم نشان دهیم:

«به‌ازای هر $n \geq n_1$ گزاره‌ی $P(n)$ درست است.»

طبق اصل استقرای ریاضی، اگر مراحل زیر را طی کنیم، آنگاه مسئله‌ی مورد نظر اثبات می‌شود:

الف) ثابت کنیم $P(n_1)$ درست است؛

ب) با فرض درستی $P(k)$ برای $k \geq n_1$، نشان دهیم $P(k+1)$ نیز درست است.

مثال

نشان دهید دنباله‌ی $a_n = \sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \cdots + \sqrt{۲ + ۱}}}$، که تعداد ۲ها $(n - ۱)$ تا است، همگرا است و سپس حد آن را بیابید.

پاسخ:

$$a_۱ = ۱,\ a_۲ = \sqrt{۲ + ۱} = \sqrt{۲ + a_۱},\ a_۳ = \sqrt{۲ + \sqrt{۲ + ۱}} = \sqrt{۲ + a_۲}$$
$$\Longrightarrow \quad a_۱ = ۱, \qquad a_{n+۱} = \sqrt{۲ + a_n} \quad (n \geq ۱)$$

برای اثبات همگرایی، نشان می‌دهیم $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کران‌دار است. ابتدا با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که به‌ازای هر $n \geq ۱$ داریم $a_n < a_{n+۱}$.

$$n = ۱ \implies ۱ < \sqrt{۲ + ۱} \implies a_۱ < a_۲$$

$$\text{فرض استقرا}: \quad a_k < a_{k+۱}, \qquad \text{حکم استقرا}: \quad a_{k+۱} < a_{k+۲}$$

$$a_k < a_{k+۱} \implies ۲ + a_k < ۲ + a_{k+۱} \implies \sqrt{۲ + a_k} < \sqrt{۲ + a_{k+۱}}$$
$$\implies a_{k+۱} < a_{k+۲}$$

بنا بر استقرای ریاضی، دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی است. در ادامه نشان می‌دهیم به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $a_n < ۲$.

$$n = ۱ \implies a_۱ = ۱ < ۲, \quad \text{فرض}: \quad a_k < ۲, \quad \text{حکم}: \quad a_{k+۱} < ۲$$

$$a_{k+۱} = \sqrt{۲ + a_k} < \sqrt{۲ + ۲} = \sqrt{۴} = ۲ \implies a_{k+۱} < ۲$$

$$\xRightarrow{\text{طبق استقرای ریاضی}} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n < ۲$$

دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کران‌دار است و در نتیجه همگرا می‌باشد. فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+۱} = a$، بنابراین

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+۱} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{۲ + a_n} = \sqrt{۲ + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{۲ + a}$$

$$\Longrightarrow \quad a = \sqrt{۲ + a} \quad \Longrightarrow \quad a^۲ - a - ۲ = ۰ \quad \Longrightarrow \quad (a - ۲)(a + ۱) = ۰$$

$$\Longrightarrow \quad a = ۲ \ \checkmark \qquad a = -۱ \ \times$$

چون $\{a_n\}$ دنباله‌ای مثبت است، پس فقط $a = ۲$ قابل قبول است؛ یعنی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۲$$

گزاره

فرض کنید $f\colon [۱,+\infty) \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$. اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهیم $a_n = f(n)$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

تذکر

عکس گزاره‌ی بالا درست نیست. فرض کنید

$$f(x) = \sin(\pi x), \qquad a_n = f(n) = \sin(\pi n)$$

واضح است که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۰$، اما $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$ وجود ندارد.

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{n\to\infty} n\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

پاسخ: قرار می‌دهیم $f(x) = x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ و $\lim_{x\to\infty} f(x)$ را حساب می‌کنیم؛

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{-\frac{1}{x^2}}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 1$$

پس $\lim_{n\to\infty} f(n) = 1$، یعنی $\lim_{n\to\infty} n\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

قضیه

الف) اگر $|x| < 1$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

ب) اگر $x \in \mathbb{R}$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

مثال

مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{5}{5}\right)^n \right) = 0 + 0 + 1 = 1$$

تعریف

دنباله‌ی $\{a_n\}$ یعنی a_1، a_2، a_3، $\ldots$، a_n، $\ldots$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots$$

و همه‌ی n_kها اعداد طبیعی باشند. در این صورت دنباله‌ی

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

یعنی $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌نامیم.

قضیه

دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به a است اگر و تنها اگر هر زیردنباله‌ی آن به a همگرا باشد.

نتیجه

اگر زیردنباله‌ای از $\{a_n\}$ واگرا باشد، آن‌گاه $\{a_n\}$ واگرا است. اگر دو زیردنباله از $\{a_n\}$ وجود داشته باشند که به دو مقدار مختلف همگرا باشند، نتیجه می‌گیریم که $\{a_n\}$ واگراست.

مثال

دنباله‌ی $a_n = (-1)^n$ را در نظر بگیرید. زیردنباله‌های $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{a_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ به‌ترتیب به ۱ و ۱− همگرا هستند. پس $\{a_n\}$ واگرا است.

مثال

حد دنباله‌های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

(۱) $a_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$

(۲) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(۳) $a_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$

(۴) $a_n = \frac{\pi^n}{2^{2n}+1}$

پاسخ:

$$(۱)\quad a_n = \left(\frac{n-۳}{n}\right)^n = \left(۱ - \frac{۳}{n}\right)^n, \quad f(x) := \left(۱ - \frac{۳}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(۱ - \frac{۳}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(۱ - \frac{۳}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{۳}{x^۲}\,\frac{۱}{۱-\frac{۳}{x}}}{-\frac{۱}{x^۲}} = -۳ \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{۱ - \frac{۳}{x}} = -۳$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = e^{-۳}$$

از آنجا که $a_n = f(n)$، داریم $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-۳}{n}\right)^n = e^{-۳}$.

$$(۲)\quad a_n = \frac{(n!)^۲}{(۲n)!}$$

$$= \frac{(۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times n)(۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times n)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times n \times (n+۱)(n+۲) \times \cdots \times ۲n}$$

$$= \frac{۱}{n+۱} \times \frac{۲}{n+۲} \times \frac{۳}{n+۳} \times \cdots \times \frac{n}{n+n} \leq \frac{۱}{n+۱}$$

پس $\cdot ۰ < a_n \leq \dfrac{۱}{n+۱}$ چون $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n+۱} = ۰$، بنا بر قضیه‌ی فشردگی داریم $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^۲}{(۲n)!} = ۰$.

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 2^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n(n-1)}\times\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}\times 4\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n-1)}\times\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}\times\lim_{n\to\infty}4$$
$$=1\times 0\times 4=0$$

$$(4)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^n}{2^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{4^n}}=\frac{0}{1+0}=0$$

نکته

فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی مثبت باشد. اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نزولی خواهد بود.

مثال

یکنوایی دنباله‌ی $a_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

$$= \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2n+1} < 1 \implies$$ اکیدا نزولی است $\{a_n\}$

نکته

اگر $\mathbb{R} \to (۱, +\infty]: f$ یکنوا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n = f(n)\}_{n=۱}^{\infty}$ نیز چنین است.

مثال

یکنوایی دنباله‌ی $a_n = \tan^{-۱} \frac{۱}{n}$ را بررسی کنید.

پاسخ: قرار می‌دهیم $f(x) = \tan^{-۱} \frac{۱}{x}$. در بازه‌ی $(۱, +\infty]$ داریم:

$$f'(x) = \frac{-\frac{۱}{x^۲}}{۱ + \left(\frac{۱}{x}\right)^۲} = \frac{-\frac{۱}{x^۲}}{\frac{x^۲+۱}{x^۲}} = -\frac{۱}{۱ + x^۲} < ۰$$

بنابراین $f(x)$ و در نتیجه $\{a_n\}$ اکیدا نزولی است.

تعریف

فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد. با افزودن جملات متوالی بهم، دنباله‌ی جدیدی می‌سازیم. به‌طور دقیق‌تر، می‌توانیم مجموع‌های جزیی

$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2, \qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \qquad \ldots$$

را تشکیل دهیم. مجموع جزئی S_n، مرکب از n جمله‌ی اول، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

دنباله‌ی $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ از مجموع‌های جزئی را یک **سری نامتناهی** می‌نامیم و آن را با $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

تعریف

نمایش می‌دهیم. به a_n **جمله‌ی عمومی سری** می‌گوییم. اگر دنباله‌ی $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به مقداری مانند S باشد، آن‌گاه مقدار S را مجموع سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌نامیم و می‌نویسیم $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. بنابراین، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا گوییم، هرگاه دنباله‌ی مجموع‌های جزئی آن همگرا باشد و در غیر این صورت می‌گوییم $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است. با توجه به این توضیحات می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

مثال

همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n$ را بررسی کنید.

پاسخ: دنباله‌ی مجموع‌های جزئی سری، یعنی $\{S_n\}$ را تشکیل می‌دهیم؛

$$S_۱ = S_۳ = S_۵ = \cdots = -۱, \qquad S_۲ = S_۴ = S_۶ = \cdots = ۰$$
$$\Longrightarrow \; S_n = -۱, ۰, -۱, ۰, -۱, ۰, \ldots$$

بنابراین $\{S_n\}$ شامل یک زیردنباله‌ی همگرا به -۱ و یک زیردنباله‌ی همگرا به ۰ است؛ یعنی $\{S_n\}$ واگرا است و در نتیجه $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n$ واگرا است.

سری هندسی

فرض کنید $a, r \in \mathbb{R}$ و $a \neq ۰$. هر سری به‌صورت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ar^{n-۱} = a + ar + ar^{۲} + \dots$$

را یک **سری هندسی** با **جمله‌ی اول** a و **قدر نسبت** r می‌گوییم. این سری را به‌صورت $\sum_{n=۰}^{\infty} ar^{n}$ نیز می‌توان نمایش داد. در ادامه نشان می‌دهیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ar^{n-۱} = \begin{cases} \dfrac{a}{۱-r} & |r| < ۱ \\ \text{واگرا} & |r| \geq ۱ \end{cases}$$

اگر $r = 1$، آن‌گاه، با توجه به اینکه $a \neq 0$، واضح است که سری $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ واگرا است. برای $r \neq 1$ داریم:

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = a\left(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}\right)$$

$$= \frac{a\Big(\left(1 - r\right)\left(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}\right)\Big)}{\left(1 - r\right)} = a\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$$

$$\xRightarrow{|r|<1} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(a\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) = \frac{a}{1 - r}$$

مثال

$$(۱)\quad ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \cdots = \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۲$$

$$(۲)\quad ۱ + ۲^{\frac{۱}{۲}} + ۲ + ۲^{\frac{۳}{۲}} + \cdots = \sum_{n=۱}^{\infty} (\sqrt{۲})^{n-۱}$$

$\Longrightarrow a = ۱ \neq ۰$ و $r = \sqrt{۲} > ۱$ سری هندسی با قدرنسبت $\Longrightarrow$ واگرا

$$(۳)\quad x = ۰/۳۲۳۲۳۲\cdots = ۰/\overline{۳۲} = \frac{۳۲}{۱۰۰} + \frac{۳۲}{۱۰۰^{۲}} + \frac{۳۲}{۱۰۰^{۳}} + \cdots$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳۲}{۱۰۰} \left(\frac{۱}{۱۰۰}\right)^{n-۱} = \frac{\frac{۳۲}{۱۰۰}}{۱ - \frac{۱}{۱۰۰}} = \frac{۳۲}{۹۹}$$

مثال

$$(۴)\quad \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۵)^n}{۸^{۲n}} = \frac{(-۵)^۲}{۸^۴} + \frac{(-۵)^۳}{۸^۶} + \frac{(-۵)^۴}{۸^۸} + \cdots$$

$$= \frac{۲۵}{۸^۴}\left(۱ - \frac{۵}{۶۴} + \frac{۵^۲}{۶۴^۲} - \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲۵}{۸^۴}\left(\frac{-۵}{۶۴}\right)^{n-۱} = \frac{\frac{۲۵}{۸^۴}}{۱ + \frac{۵}{۶۴}}$$

مثال

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1
$$

سری تلسکوپی

فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که به a همگرا است. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $b_n = a_{n+1} - a_n$. در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است و داریم:

$$
\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\
&= a_{n+1} - a_1
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_1) = a - a_1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a - a_1$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ را یک سری تلسکوپی می‌نامیم.

مثال

نشان دهید $\sum_{n=۱}^{\infty} \ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right)$ واگرا است.

پاسخ:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right) = \sum_{n=۱}^{\infty} \ln\left(\frac{n+۱}{n}\right) = \sum_{n=۱}^{\infty} \Big(\ln(n+۱) - \ln n\Big)$$

$$S_n = (\ln ۲ - \ln ۱) + (\ln ۳ - \ln ۲) + \cdots + \Big(\ln(n+۱) - \ln n\Big)$$

$$= \ln(n+۱) - \ln ۱ = \ln(n+۱)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+۱) = +\infty \implies \sum_{n=۱}^{\infty} \ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right) \text{ واگرا است}$$

قضیه (شرط لازم برای همگرایی سری)

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

اثبات: فرض کنیم $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. در این صورت $a_n = S_n - S_{n-1}$.
اگر $\lim_{n\to\infty} S_n = S$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0\end{aligned}$$

نتیجه

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا یا $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

مثال

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ واگرا است زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

چون $\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \neq 0$ ، پس $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \neq 0$ و در نتیجه سری واگرا است.

قضیه

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و فقط اگر به‌ازای هر عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$، سری $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.

تذکر

این قضیه بیان می‌کند که فقط رفتار نهایی دنباله‌ی $\{a_n\}$ تعیین کننده‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است. اگر تعداد متناهی جمله را از آغاز یک سری حذف کنیم، در همگرایی آن هیچ تاثیری نخواهد داشت.

قضیه

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$، آن‌گاه

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = cA$، که در آن c یک ثابت است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$.

ج) اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_n \leq b_n$، آن‌گاه $A \leq B$.

نتیجه

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ واگرا است.

مثال

مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n}$ را حساب کنید.

پاسخ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 4$$

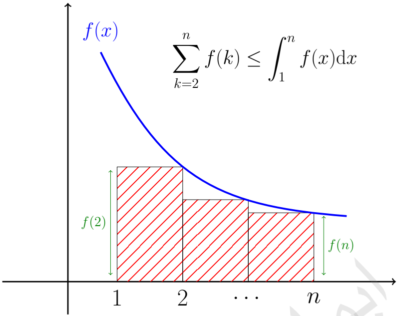
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{2^{n+1}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{9}{2}$$

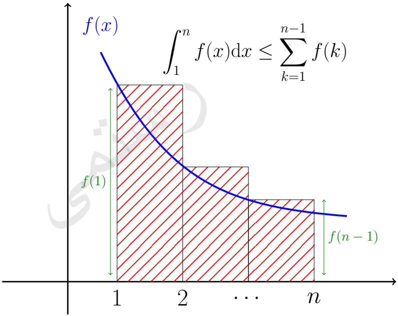
قضیه (آزمون انتگرال)

فرض کنیم a یک عدد طبیعی و $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته، نزولی و نامنفی باشد. در این صورت سری $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ و انتگرال ناسره‌ی $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ در همگرایی و واگرایی **همرفتارند**؛ یعنی

سری $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ **همگرا** است $\iff$ انتگرال ناسره‌ی $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **همگرا** است

اثبات: فرض کنیم $a=۱$. اثبات برای حالت $a>۱$ مشابه است. قرار می‌دهیم $S_n=\sum_{k=۱}^{n} f(k)$ و $T_n=\int_۱^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$. با توجه به شکل‌های زیر، داریم:





$$\sum_{k=۲}^{n} f(k) \leq \int_{۱}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=۱}^{n-۱} f(k) \implies S_n - f(۱) \leq T_n \leq S_{n-۱}$$

چون هر دو دنباله‌ی $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ صعودی هستند، این نامساوی‌ها نشان می‌دهند که هر دو از بالا کران‌دار یا هر دو بی‌کران هستند. بنابراین هر دو دنباله همگرا یا واگرا می‌باشند.

قضیه (p-سری‌ها)

سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ به‌ازای $p > 1$ همگرا و به‌ازای $p \leq 1$ واگرا است.

اثبات: تابع $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{x^p}$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $f(x)$ بر $[1, +\infty)$ پیوسته و نامنفی است. اگر $p > 0$، آن‌گاه $f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}}$ بر این بازه منفی است و در نتیجه تابع $f(x)$ نزولی می‌باشد. طبق آزمون انتگرال، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ و انتگرال ناسره‌ی $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ هم‌رفتارند. با توجه به قضیه‌ی pـانتگرال‌ها، به‌ازای $p > 1$ سری همگرا و به‌ازای $0 < p \leq 1$ سری واگرا است. در صورتی که $p \leq 0$، واضح است که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ واگرا است.

مثال

با توجه به قضیه‌ی قبل، سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ واگرا و سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ همگرا هستند.

مثال

نشان دهید $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ به‌ازای $p>1$ همگرا و به‌ازای $0<p\leq 1$ واگرا است.

پاسخ: تابع $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$ در نظر می‌گیریم.
تابع $f(x)$ روی $[2,+\infty)$ پیوسته و مثبت است. همچنین، برای هر $x\in[2,+\infty)$ داریم:

$$f'(x) = \frac{-\left((\ln x)^p + px(\ln x)^{p-1}\frac{1}{x}\right)}{\left(x(\ln x)^p\right)^2} = \frac{-\left((\ln x)^p + p(\ln x)^{p-1}\right)}{\left(x(\ln x)^p\right)^2} < 0$$

بنابراین به‌ازای $p > 0$، تابع $f(x)$ بر $[2, +\infty)$ نزولی است. طبق آزمون انتگرال، سری و انتگرال ناسره‌ی $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ هم‌رفتارند. داریم:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \lim_{R\to\infty}\int_2^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \lim_{R\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{\mathrm{d}u}{u^p} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^p}$$

بنا بر قضیه‌ی pـانتگرال‌ها و آزمون انتگرال، به‌ازای $p > 1$ سری همگرا و به‌ازای $0 < p \leq 1$ سری واگرا است.

تمرین

در همگرایی سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\left(\ln(\ln n)\right)^p}$ بحث کنید.

قضیه (آزمون مقایسه)

فرض کنید N یک عدد طبیعی و K عددی حقیقی و مثبت باشد به‌طوری که به‌ازای هر $n \geq N$ داشته باشیم $0 \leq a_n \leq Kb_n$. در این صورت

«اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.»

توجه

حاصل این قضیه را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان کرد:

«اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگرا است.»

مثال

همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$(۱)\quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+۲^n}$$

$$(۲)\quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱+\cos(n)}{n^۲}$$

$$(۳)\quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^۲+۱}{n^۳+۱}$$

پاسخ: (۱) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\frac{۱}{۲^n} > \frac{۱}{۱+۲^n} > ۰$. می‌دانیم سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n}$ یک سری هندسی به‌صورت $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}$ و با قدرنسبت $r = \frac{۱}{۲} < ۱$ می‌باشد، بنابراین همگرا است. در نتیجه، طبق آزمون مقایسه، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+۲^n}$ نیز همگرا است.

(۲) به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\frac{2}{n^2} \geq \frac{1+\cos(n)}{n^2} \geq 0$. بنا بر قضیه‌ی pـ‌سری‌ها، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ یک سری همگرا است. از آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{n^2}$ همگرا می‌باشد.

(۳) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$n^3 + n \geq n^3 + 1 \Leftarrow n(n^2+1) \geq n^3 + 1 \Leftarrow \frac{n^2+1}{n^3+1} \geq \frac{1}{n} > 0$$

بنا بر قضیه‌ی pـ‌سری‌ها، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ یک سری واگرا است و در نتیجه، بنا بر آزمون مقایسه، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ نیز واگرا است.

$\frac{1}{n}$

تمرین

همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{1+n+n^2+n^3}$ را با ذکر دلیل مشخص کنید.

قضیه (آزمون مقایسه‌ی حدی)

فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی مثبت باشند و $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$. در این صورت داریم:

(۱) اگر $\ell \neq ۰, +\infty$، آن‌گاه $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ هم‌رفتارند.

(۲) اگر $\ell = ۰$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

(۳) اگر $\ell = +\infty$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، آن‌گاه $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز واگرا است.

مثال

آیا سری‌های زیر همگرا هستند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

$$(۱)\quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+\sqrt{n}}$$

$$(۲)\quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{۲}+n+۱}$$

$$(۳)\quad \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a}-۱\right) \qquad (a>۱)$$

پاسخ: (۱) فرض کنیم $a_n = \dfrac{۱}{۱+\sqrt{n}}$ و $b_n = \dfrac{۱}{\sqrt{n}}$. واضح است که دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثبت هستند. داریم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{۱+\sqrt{n}}}{\frac{۱}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{۱+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{n}}+۱} = ۱$$

طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n}}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+\sqrt{n}}$ هم‌رفتارند. pـسری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۱}{۲}}}$ واگرا است، پس $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+\sqrt{n}}$ نیز واگرا است.

(۲) به‌ازای nهای بزرگ، جمله‌ی عمومی سری رفتاری مشابه با $\frac{\sqrt{n}}{n^۲}$ دارد. از این‌رو، سری را با pـسری همگرای $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}}$ مقایسه‌ی حدی می‌کنیم. فرض کنیم $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^۲+n+۱}$ و $b_n = \frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}}$. دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثبت هستند. داریم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^۲+n+۱}}{\frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n^۲+n+۱} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۱+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n^۲}} = ۱$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است، بنابر آزمون مقایسه‌ی حدی، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا می‌باشد.

(۳) قرار می‌دهیم $a_n = \sqrt[n]{a} - 1$ و $b_n = \frac{1}{n}$. دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثبت هستند. داریم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \ln a (a^{\frac{1}{x}})}{-\frac{1}{x^2}} = \ln a > 0$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است، طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$ نیز واگرا است.

تمرین

در مورد همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^{\frac{4}{3}}}{1 + n^{\frac{5}{3}}}$ بحث کنید.

قضیه (آزمون نسبت)

فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله باشد و $\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. در این صورت داریم:

(۱) اگر $0 \le \rho < 1$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا هستند.

(۲) اگر $\rho > 1$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

(۳) اگر $\rho = 1$، آن‌گاه نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت. یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ممکن است همگرا یا واگرا شود.

مثال

همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$(۱)\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{۴}}{n!}\qquad (۲)\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۲n)!}{(n!)^{۲}}\qquad (۳)\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n!}{n^{n}}$$

پاسخ:

$$(۱)\ \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+۱)^{۴}}{(n+۱)!}}{\frac{n^{۴}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+۱)^{۴}}{n^{۴}(n+۱)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)^{۳}}{n^{۴}}=۰\ \xRightarrow[\text{بنا بر آزمون نسبت}]{\text{چون } \rho=۰}$$ $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{۴}}{n!}$ همگرا است.

$$(۲)\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(۲n+۲)!}{((n+۱)!)^۲}}{\frac{(۲n)!}{(n!)^۲}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^۲(۲n+۲)!}{(۲n)!((n+۱)!)^۲}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(۲n+۲)(۲n+۱)}{(n+۱)^۲} = ۴$$

از آنجا که $\rho = ۴ > ۱$، طبق آزمون نسبت، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۲n)!}{n!}$ واگرا است.

$$(۳)\quad \rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+۱)!}{(n+۱)^{n+۱}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)!n^n}{n!(n+۱)^{n+۱}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+۱}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+۱}\right)^x$$

قرار می‌دهیم $y = \left(\frac{x}{۱+x}\right)^x$. در این صورت $\rho = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln y}$.

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2}\frac{x+1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

چون $1 < \frac{1}{e} = \rho = e^{-1}$، بنا بر آزمون نسبت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ همگرا است.

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!6^n}{(3n)!}$ را بررسی کنید.

قضیه (آزمون ریشه)

فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله باشد و $r = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. در این صورت داریم:

(۱) اگر $0 \leq r < 1$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا هستند.

(۲) اگر $r > 1$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

(۳) اگر $r = 1$، آن‌گاه نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

مثال

همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ (۳) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$

پاسخ:

(۱) ابتدا نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. می‌دانیم $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$. داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

بنا بر آزمون ریشه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ همگرا است.

$$(۲)\quad r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{۲^n}{n^۴}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{(\sqrt[n]{n})^۴}=\frac{۲}{۱}=۲>۱$$

بنا بر آزمون ریشه، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n}{n^۴}$ واگرا است.

$$(۳)\quad r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-۱)^{n-۱}}{(\ln n)^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\ln n}=۰<۱$$

طبق آزمون ریشه، سری $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{(\ln n)^n}$ همگرا است.

تمرین

همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(e-۱)^n}{(۱+\frac{۱}{n})^{n^۲}}$ را با ذکر دلیل مشخص کنید.

تعریف

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را **همگرای مطلق** می‌گوییم، هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد. در صورتی که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا ولی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشد، می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **همگرای مشروط** است.

گزاره

هر سری همگرای مطلق، همگرا است. یعنی اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

اثبات: به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $b_n = a_n + |a_n|$. از آنجا که b_n مساوی صفر یا $2|a_n|$ است، داریم $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$. بنا بر آزمون مقایسه، $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ همگرا است. پس $\sum_{n=1}^{\infty} \left((a_n + |a_n|) - |a_n| \right)$ نیز همگرا است. اثبات با توجه به اینکه آخرین سری برابر با $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است، کامل می‌شود.

سری متناوب

یک سری نامتناهی را **متناوب** گوییم، هرگاه جملاتش به تناوب مثبت و منفی باشند. به عبارت دیگر، فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای مثبت باشد. هر سری متناوب را می‌توان به یکی از دو شکل زیر نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

قضیه (آزمون لایب‌نیتز)

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نامنفی، نزولی و همگرا به صفر باشد، آنگاه سری‌های متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ همگرا هستند.

مثال

همگرایی مطلق یا مشروط سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$(۱)\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n} \qquad (۲)\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^{\frac{۳}{۲}}} \qquad (۳)\ \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$$

پاسخ: (۱) فرض کنید $a_n = \frac{۱}{n}$. در این صورت $\{a_n\}$ دنباله‌ای مثبت و نزولی است. همچنین، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n} = ۰$. سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n} = \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n a_n$، بنا بر آزمون لایب‌نیتز همگرا است. اما سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n} = \sum_{n=۱}^{\infty}\left|\frac{(-۱)^n}{n}\right|$ واگرا است. پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n}$ همگرای مشروط می‌باشد.

(۲) pـسری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}} = \sum_{n=۱}^{\infty}\left|\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^{\frac{۳}{۲}}}\right|$ همگرا است. پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^{\frac{۳}{۲}}}$ همگرای مطلق است.

(۳) می‌دانیم $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\ln(n)} = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$. سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{\ln(n)} = \sum_{n=۲}^{\infty} \left|\frac{(-۱)^n}{\ln(n)}\right|$ را در نظر بگیرید. به‌ازای هر $n \geq ۲$ داریم $\frac{۱}{\ln(n)} > \frac{۱}{n} > ۰$. چون $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگرا است، بنا بر آزمون مقایسه، $\sum_{n=۲}^{\infty} \left|\frac{(-۱)^n}{\ln(n)}\right|$ نیز واگرا است. پس $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$ به‌طور مطلق همگرا نیست.

به‌ازای $n \geq ۲$ دنباله‌ی $\left\{\frac{۱}{\ln(n)}\right\}$ مثبت و نزولی است و داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\ln n} = ۰$. بنابراین، طبق آزمون لایب‌نیتز $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$ همگرا است. پس سری همگرای مشروط می‌باشد.

تمرین

همگرایی مطلق یا مشروط سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+۱)\ln(n+۱)}$ را بررسی کنید.

مثال

همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(۱) $$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n^3}$$

(۲) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

(۳) $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

(۴) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln(n)}$$

(۵) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right)^n$$

(۶) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}$$

(۷) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n - n^\pi}$$

(۸) $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

پاسخ: (۱)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{۲^{n+۱}}{۳^{n+۱}-(n+۱)^۳}}{\frac{۲^n}{۳^n-n^۳}}\right|$$

$$\overset{n\geq ۴}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\frac{۲^{n+۱}\left(۳^n-n^۳\right)}{۲^n\left(۳^{n+۱}-(n+۱)^۳\right)}$$

$$= \frac{۲}{۳}\lim_{n\to\infty}\frac{۳^{n+۱}-۳n^۳}{۳^{n+۱}-(n+۱)^۳} = \frac{۲}{۳} < ۱$$

بنا بر آزمون نسبت، سری همگرا است.

(۲) تابع $f:[۳,+\infty)\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\ln x}{x^۲}$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $f(x)$ بر $[۳,+\infty)$ پیوسته و نامنفی است. همچنین، $f(x)$ بر این بازه نزولی است؛ زیرا $f'(x)=\frac{x(۱-۲\ln x)}{x^۴}<۰$. طبق آزمون انتگرال، سری $\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^۲}$ و انتگرال ناسره‌ی $\int_۳^{+\infty}\frac{\ln x}{x^۲}\,\mathrm{d}x$ هم‌رفتارند. داریم:

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{3}^{R} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\left.\frac{\ln x}{x}\right|_{3}^{R} + \int_{3}^{R} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \right)$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\left.\frac{\ln x}{x}\right|_{3}^{R} - \left.\frac{1}{x}\right|_{3}^{R} \right) = -\lim_{R\to\infty} \left(\left.\frac{\ln x + 1}{x}\right|_{3}^{R} \right)$$
$$= -\left(\lim_{R\to\infty} \frac{\ln(R)+1}{R} - \frac{\ln(3)+1}{3} \right)$$
$$\overset{\text{Hop}}{=\!=} -\lim_{R\to\infty} \frac{\frac{1}{R}}{1} + \frac{\ln(3)+1}{3} = \frac{\ln(3)+1}{3}$$

پس سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ و در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ همگرا می‌باشد. (همگرایی این سری را با مقایسه‌ی حدی با دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}$ نیز نشان دهید.)

(۳) فرض کنید $a_n = \ln(۱ + \frac{۱}{n})$ و $b_n = \frac{۱}{n}$. دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثبت هستند. داریم:

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(۱ + \frac{۱}{n})}{\frac{۱}{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(۱ + \frac{۱}{x})}{\frac{۱}{x}}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{۱}{x^۲}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}}}{-\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{x}} = ۱$$

بنا بر آزمون مقایسه‌ی حدی، چون سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگرا است، پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \ln(۱ + \frac{۱}{n})$ نیز واگرا می‌باشد.

(۴) این سری طبق آزمون نسبت همگرا می‌باشد، زیرا:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+۱}}{۳^{n+۱}\ln(n+۱)}}{\frac{\sqrt{n}}{۳^n \ln n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{۳} \times \frac{\sqrt{n+۱}}{\sqrt{n}} \times \frac{\ln(n)}{\ln(n+۱)}\right) = \frac{۱}{۳} < ۱$$

(۵)

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{e^n + e^{-n}}{e^{۲n} - ۱}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^{۲n} - ۱}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} + e^{-۳n}}{۱ - e^{-۲n}} = \frac{۰ + ۰}{۱ - ۰} = ۰ < ۱$$

طبق آزمون ریشه، سری همگرا می‌باشد.

(۶) بنا بر آزمون نسبت، سری همگرا می‌باشد؛ زیرا داریم:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+۱)!}{۱\times۳\times\cdots\times(۲n-۱)\times(۲n+۱)}}{\frac{n!}{۱\times۳\times\cdots\times(۲n-۱)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{۲n+۱}=\frac{۱}{۲}<۱$$

(۷) فرض کنیم $a_n=\dfrac{۱}{\pi^n-n^\pi}$ و $b_n=\dfrac{۱}{\pi^n}$. برای nهای بزرگ، دنباله‌ی $\{a_n\}$ مثبت است. در واقع $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\pi}{\pi^n}=۰$. همچنین، دنباله‌ی $\{b_n\}$ نیز مثبت است.

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{\pi^n-n^\pi}}{\frac{۱}{\pi^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^n}{\pi^n-n^\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۱-\frac{n^\pi}{\pi^n}}=\frac{۱}{۱-۰}=۱$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}$ یک سری هندسی همگرا است. طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n - n^\pi}$ نیز همگرا می‌باشد.

(۸) می‌دانیم به‌ازای هر $x > 0$ داریم $\ln x \leq x - 1$ (اثبات در فصل ۴). پس به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $\frac{1}{n^2} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > 0$. چون pـسری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است، طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ نیز همگرا می‌باشد.

مثال

همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(۱) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}$

(۲) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{(-2)^n}$

(۳) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1}(n)}}{n^2+n}$

(۴) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{5^n+2}$

(۵) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+4}(-1)^n}{3^n(n+2)!}$

(۶) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + n^{\frac{1}{2}}}$

پاسخ: (۱)

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^۲+۱}=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{n}{n^۲+۱}$$

فرض کنید $a_n=\frac{n}{n^۲+۱}$. در این صورت $\{a_n\}$ دنباله‌ای نامنفی است و

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^۲+۱}=\circ$$

نشان می‌دهیم $\{a_n\}$ نزولی است؛

$$\frac{(n+۱)}{(n+۱)^۲+۱}<\frac{n}{n^۲+۱}\Leftarrow n^۳+n^۲+n+۱<n^۳+۲n^۲+۲n$$

$$\Leftarrow ۱<n^۲+n$$

بنا بر آزمون لایب‌نیتز $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^۲+۱}$ همگرا است. در ادامه همگرایی مطلق این سری را بررسی می‌کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

فرض کنیم $b_n=\frac{1}{n}$. در این صورت

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است، طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}\right|$ واگرا است؛ یعنی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}$ همگرای مشروط می‌باشد.

(۲) نشان می‌دهیم سری همگرای مطلق است؛ یعنی نشان می‌دهیم سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sqrt[n]{2}}{(-2)^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{2^n}$$

همگرا است. داریم:

$$\frac{\sqrt[n]{۲}}{۲^n} = \frac{۱}{۲^{n-\frac{۱}{n}}}, \quad \forall n \geqslant ۲ : \frac{۱}{n} < \frac{n}{۲} \implies -\frac{۱}{n} > -\frac{n}{۲}$$

$$\implies n - \frac{۱}{n} > \frac{n}{۲} \implies ۰ < \frac{۱}{۲^{n-\frac{۱}{n}}} < \frac{۱}{۲^{\frac{n}{۲}}} = \frac{۱}{(\sqrt{۲})^n}$$

سری هندسی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{n-۱} = \sum_{n=۲}^{\infty} \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^n$ همگرا است، زیرا قدر نسبت آن یعنی $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ کوچک‌تر از ۱ است. طبق آزمون مقایسه، $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{۲^{n-\frac{۱}{n}}}$ و در نتیجه $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^{n-\frac{۱}{n}}}$ همگرا می‌باشد.

(۳) فرض کنیم $a_n = \frac{e^{\tan^{-۱}(n)}}{n^۲ + n}$ و $b_n = \frac{۱}{n^۲}$. دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثبت هستند.
داریم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{\tan^{-1}(n)}}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 e^{\tan^{-1}(n)}}{n^2+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\tan^{-1}(n)}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+0} = e^{\frac{\pi}{2}} \neq 0 \text{ یا } +\infty$$

چون pـسری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است، سری مورد نظر طبق آزمون مقایسه‌ی حدی همگرا می‌باشد.

(۴)

$$0 < \frac{2^n - 1}{5^n + 2} < \frac{2^n - 1}{5^n} < \frac{2^n}{5^n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ یک سری هندسی با قدر نسبت $r = \frac{2}{5} < 1$ است و لذا همگرا می‌باشد.

طبق آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{5^n+2}$ نیز همگرا است.

(۵)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۲^{n+۵}}{۳^{n+۱}(n+۳)!}}{\frac{۲^{n+۴}}{۳^n(n+۲)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{n+۳} = ۰ < ۱$$

بنا بر آزمون نسبت، سری مورد نظر همگرای مطلق است.

(۶) فرض کنید $a_n = \frac{۱}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^n + n^{\frac{۱}{۲}}}$ و $b_n = \frac{۱}{\sqrt{n}}$. دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثبت هستند. داریم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^n + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^n}{\sqrt{n}} + ۱} = \frac{۱}{۰+۱} = ۱$$

چون $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}$ واگرا است، بنا بر آزمون مقایسه‌ی حدی، سری مورد نظر واگرا است.

تمرین

همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2(n))}$

(۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n + e^n}{2^n + 4^n}$

(۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

(۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$

(۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

(۶) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n (2n)!}{(n+1)n^{2n}}$

تمرین

فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی مثبت و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد. نشان دهید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

واگرا است.

تمرین

فرض کنید سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ همگرا باشند. نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ نیز همگرا است.

تمرین

فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی مثبت باشند و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. نشان دهید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 b_n}{a_n^2+b_n^2}$$

نیز همگرا است.