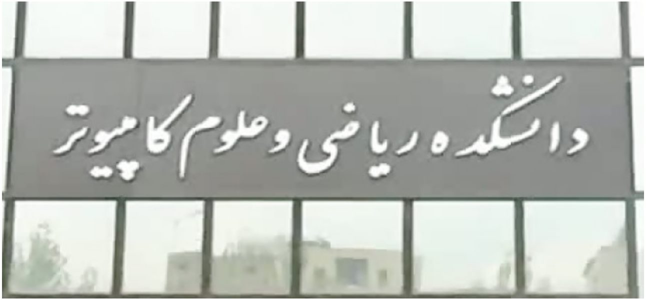
ریاضی عمومی ۲

ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



انتگرال روی خم (یا انتگرال خط)

انتگرال روی خم

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار و $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری قطعه‌به‌قطعه هموار از خم $\mathcal{C}$ باشد و $\operatorname{Im}(\gamma) = \mathcal{C} \subseteq D$. افراز P از $[a, b]$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، طول قطعه‌ای از تصویر γ را که بین $\gamma(t_{i-1})$ و $\gamma(t_i)$ قرار می‌گیرد، با Δs_i نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم که $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. حال، مجموع زیر را در نظر می‌گیریم:

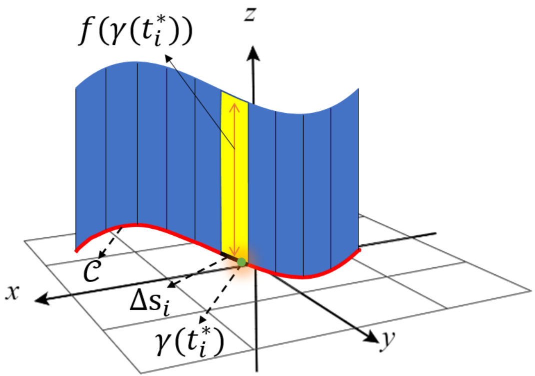
$$R(P, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^*))\Delta s_i$$

فرض کنید

$$\|P\| = \max\{\Delta s_i : 1 \le i \le n\}$$

اگر $\lim_{\|P\|\to 0} R(P, f)$ موجود باشد، آنگاه مقدار این حد را با $\int_C f\, ds$ نمایش می‌دهیم و به آن انتگرال تابع f روی خم C گوییم.

شهود انتگرال روی خم



مطابق با شکل، اگر خم C به موازات صفحهٔ xy باشد، آنگاه $\int_C f\,ds$ برابر است با مساحت دیوارهٔ ایجادشده روی خم C.

تذکر

انتگرال یک تابع دو متغیره روی یک خم در صفحه، به طور مشابه تعریف می‌شود.

نمادگذاری

انتگرال روی خم $\int_C f\ ds$ را در صورتی که خم C بسته باشد، با نماد $\oint_C f\ ds$ نیز نمایش می‌دهیم.

کاربردی از انتگرال روی خم

فرض کنید که تصویر منحنی $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ یک سیم به نام $\mathcal{C}$ و $\rho : \mathrm{Im}(\gamma) \to \mathbb{R}$ تابع چگالی این سیم باشد؛ یعنی به‌ازای هر $(x,y,z) \in \mathrm{Im}(\gamma)$، عدد $\rho(x,y,z)$ برابر است با چگالی سیم در نقطهٔ (x,y,z) از سیم. در این صورت، داریم:

$$\text{جرم سیم} = m = \int_{\mathcal{C}} \rho \, ds$$

در واقع، چنانچه توزیع جرم در سیم یکنواخت باشد، آنگاه نسبت جرم به طول سیم برابر با چگالی سیم تعریف می‌شود. در حالت کلی، اگر توزیع جرم در سیم لزوماً یکنواخت نباشد، المان‌های کوچکی از سیم در نظر گرفته می‌شود که در آن‌ها توزیع جرم تقریباً یکسان است. بنابراین، در نزدیکی یک نقطهٔ $\gamma(t^*) = (x,y,z)$ از سیم، داریم:

$$dm = \rho(\gamma(t^*))ds \Longrightarrow m = \int_{\mathcal{C}} dm = \int_{\mathcal{C}} \rho \, ds$$

قرارداد

از این پس، وقتی می‌گوییم خم $\mathcal{C}$ قطعه‌به‌قطعه هموار است، یعنی یک نمایش پارامتری قطعه‌به‌قطعه هموار دارد. همچنین، در ادامه همهٔ نمایش‌های پارامتری که برای یک خم قطعه‌به‌قطعه هموار در نظر گرفته می‌شوند، قطعه‌به‌قطعه هموار هستند (بدون اینکه لزوماً این لفظ آورده شود).

قضیه

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار و $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری از خم $\mathcal{C}$ باشد، به‌طوری که $\mathcal{C} \subseteq D$. اگر $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$ موجود باشد، آنگاه داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)| \, dt$$

تذکر

قضیهٔ بالا برای $\mathbb{R}^2$ نیز برقرار است؛ یعنی حالتی که $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار و γ یک خم در صفحه است.

قضیه

فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک خم باشد و $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ توابعی باشند که انتگرال هر یک از آن‌ها روی خم $\mathcal{C}$ موجود است.

۱ انتگرال $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ به نمایش پارامتری در نظر گرفته‌شده برای خم $\mathcal{C}$ بستگی ندارد؛ یعنی اگر $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ و $\eta : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ دو نمایش پارامتری از $\mathcal{C}$ باشند، آنگاه داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt = \int_c^d f(\eta(t))|\eta'(t)|\, dt$$

۲ داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \text{طول } \mathcal{C}$$

۳ به‌ازای هر $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$، انتگرال $c_1 f + c_2 g$ روی خم $\mathcal{C}$ وجود دارد و داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} (c_1 f + c_2 g)\, ds = c_1 \int_{\mathcal{C}} f\, ds + c_2 \int_{\mathcal{C}} g\, ds$$

۴ داریم:

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f\, ds \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f|\, ds$$

۵ اگر به‌ازای هر $\mathcal{C} \ni (x, y, z)$، داشته باشیم $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$، آنگاه داریم:

$$\int_C f\,ds \leq \int_C g\,ds$$

۶ اگر $M = \max\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathcal{C}\}$، آنگاه داریم:

$$\int_C f\,ds \leq M \times (\text{طول } \mathcal{C})$$

۷ فرض کنید $\mathcal{C}$ یک خم با نمایش پارامتری $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ باشد و افراز P از $[a,b]$ به‌صورت زیر وجود داشته باشد:

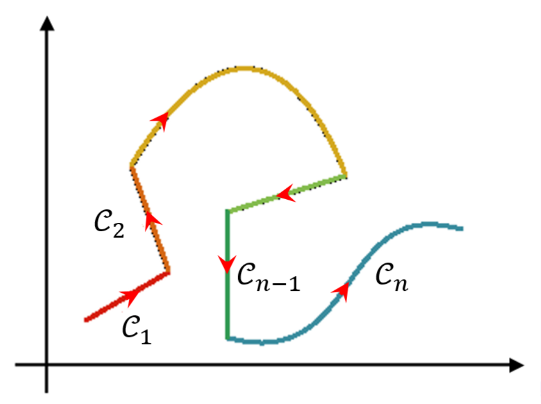
$$P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$$

که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، منحنی $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^3$ چنان موجود باشد که

$$\mathcal{C}_i := \operatorname{Im}(\gamma_i) = \operatorname{Im}\left(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\right)$$

حال، فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد به‌طوری که $\mathcal{C} \subseteq D$. در این صورت، انتگرال f روی $\mathcal{C}$ موجود است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، انتگرال f روی $\mathcal{C}_i$ موجود باشد و در این صورت، داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_i} f\, ds$$



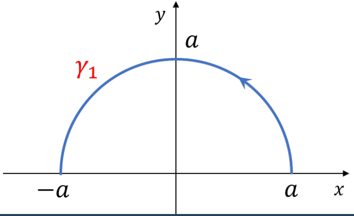
$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i$$

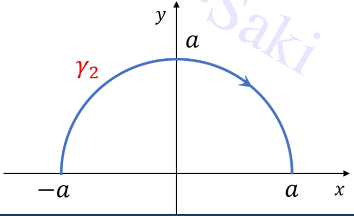
مثال

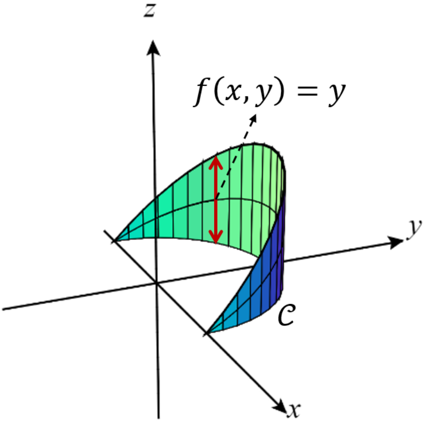
فرض کنید $a > 0$ و $\mathcal{C}$ نیم‌دایرهٔ بالایی $x^2 + y^2 = a^2$ باشد. دو نمایش پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}$ در نظر بگیرید و سپس با استفاده از هر دوی این نمایش‌ها، مساحت دیوارهٔ ساخته‌شده روی خم $\mathcal{C}$ به‌وسیلهٔ تابع $f(x,y) = y$ را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (a\cos(t), a\sin(t)), & 0 \le t \le \pi \\ \gamma_2(t) = (t, \sqrt{a^2 - t^2}), & -a \le t \le a \end{cases}$$

پاسخ:







دیوارهٔ بناشده روی خم C به‌وسیلهٔ تابع $f(x,y) = y$

داریم:

$$\gamma_1'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t)) \implies |\gamma_1'(t)| = a$$

$$\gamma_2'(t) = \left(1, \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\right) \implies |\gamma_2'(t)| = \sqrt{1+\frac{t^2}{a^2-t^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

بنابراین، داریم:

$$\int_0^\pi f(\gamma_1(t))|\gamma_1'(t)|\,dt = \int_0^\pi a f(a\cos(t), a\sin(t))\,dt$$

$$= \int_0^\pi a^2\sin(t)\,dt = a^2\left(-\cos(t)\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi} = 2a^2$$

از طرفی، داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(\gamma_2(t))|\gamma_2'(t)|\,dt = \int_{-a}^{a} f\left(t, \sqrt{a^2-t^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt$$

$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-t^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt = a\int_{-a}^{a} dt = 2a^2$$

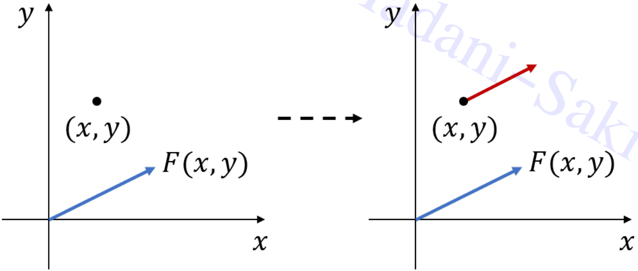
میدان‌های برداری

هر تابع به‌صورت $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری نامیده می‌شود. بنابراین، یک تابع برداری F روی $\mathbb{R}^n$، به هر بردار $(x_1, \dots, x_n)$ از دامنه‌اش، برداری به‌صورت زیر نسبت می‌دهد:

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_{(1)}(x_1, \dots, x_n), \dots, F_{(n)}(x_1, \dots, x_n))$$

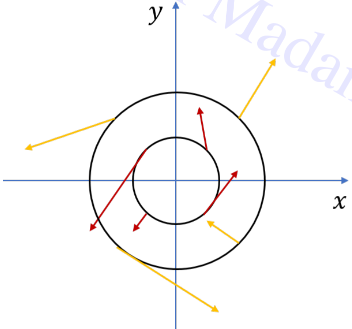
ترسیم میدان‌های برداری

میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را می‌توان به‌ترتیب در صفحه و فضا نمایش داد.
فرض کنید $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک میدان برداری باشد. در این صورت، منظور از ترسیم میدان برداری F، نمایش بردارهایی در صفحه است که از بعضی نقاط (x, y) از دامنهٔ F، به موازات بردار مکان $F(x, y)$ ترسیم می‌شوند. نمایش میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^3$ نیز مشابه است.



استفاده از دایره‌های هم‌مرکز برای نمایش میدان‌های برداری در $\mathbb{R}^2$

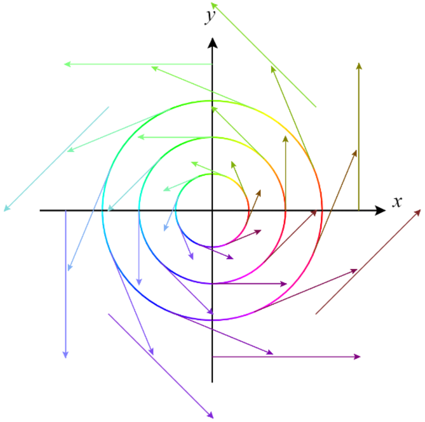
فرض کنید که $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک میدان برداری باشد. در این صورت، به منظور ترسیم F، می‌توانیم چند دایرهٔ هم‌مرکز با مرکز مبدأ را در صفحه مشخص کنیم و بردار F را به‌ازای تعدادی نقطه روی هر یک از این دایره‌ها مشخص کنیم. در چند مثالی که در ادامه می‌بینیم، بردارهایی که به موازات بردار مکان F رسم می‌کنیم، دقیقاً هم‌اندازه با F هستند.



مثال

میدان برداری $F(x,y) = (-y, x)$ را رسم کنید.

پاسخ:



توجه

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع اسکالر باشد. در این صورت، ∇f یک میدان برداری است. در واقع، داریم:

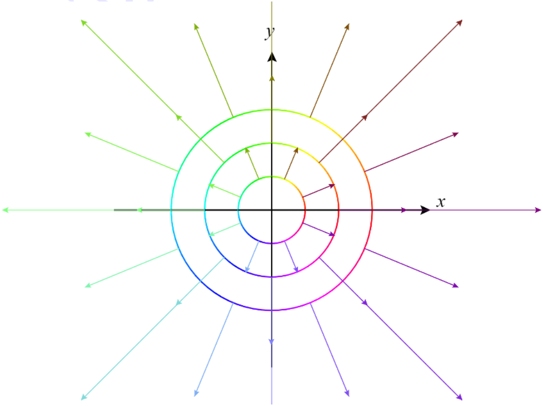
$$\nabla f : E \to E, \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

که در آن E درون D است.

مثال

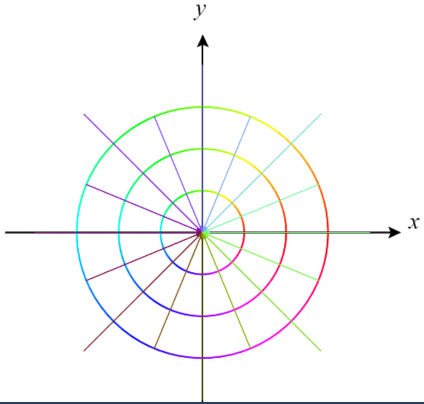
فرض کنید $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}$. میدان برداری ∇f را ترسیم کنید.

پاسخ: داریم $\nabla f(x,y)=(x,y)$. بنابراین، شکل زیر را داریم:



فرض کنید $f(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{2}$. میدان برداری ∇f را ترسیم کنید.

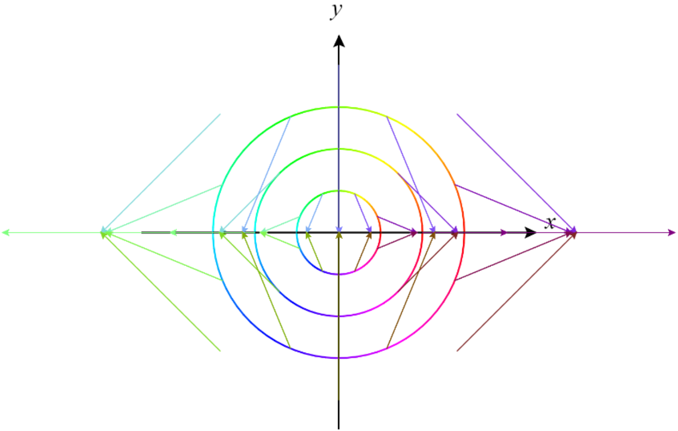
پاسخ: داریم $\nabla f(x,y) = (-x,-y)$. بنابراین، شکل زیر را داریم (انتهای همهٔ بردارها مبدأ است):



مثال

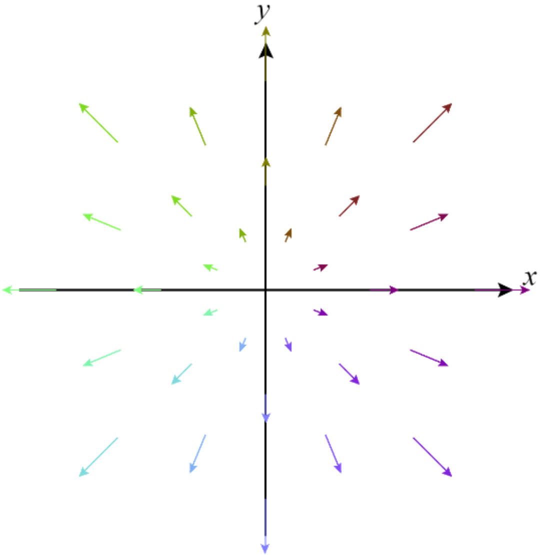
فرض کنید $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{2}$. میدان برداری ∇f را ترسیم کنید.

پاسخ: داریم $\nabla f(x,y)=(x,-y)$. بنابراین، شکل زیر را داریم:

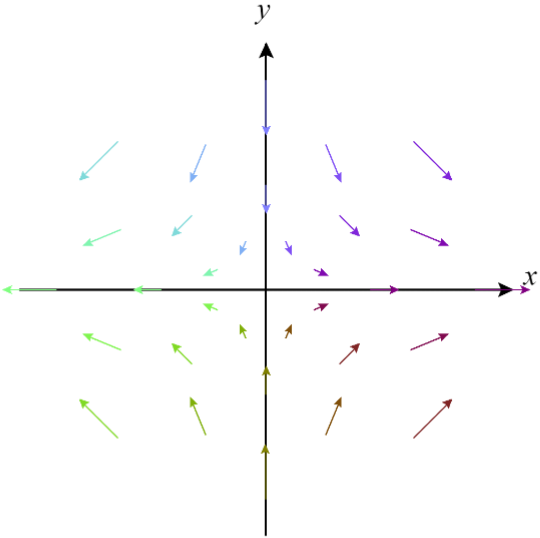


توجه

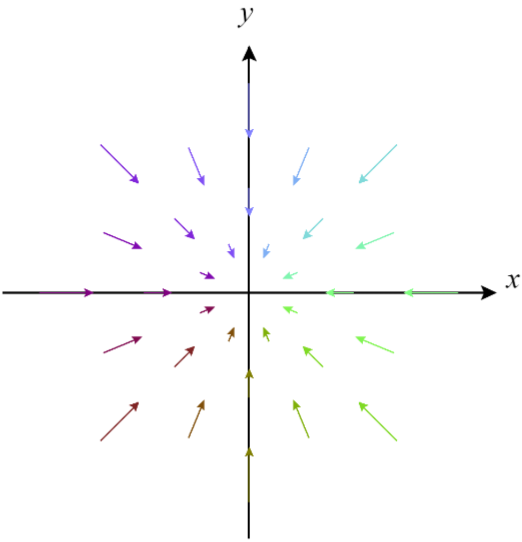
گاهی برای نمایش بهتر تغییرات بردارهای ترسیم‌شدهٔ یک میدان برداری، یک مقیاس در نظر گرفته می‌شود و طول همهٔ بردارهای ترسیم‌شده در آن مقیاس ضرب و سپس بردار رسم می‌شود. در ادامه، میدان‌های برداری مثال‌های قبل با مقیاس 0.25 ترسیم شده‌اند.



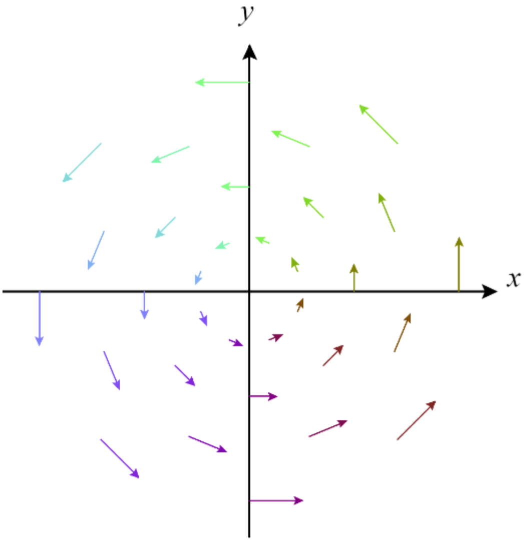
میدان برداری $F(x,y) = (x,y)$ بامقیاس 0.25



میدان برداری $F(x,y)=(x,-y)$ بامقیاس 0.25



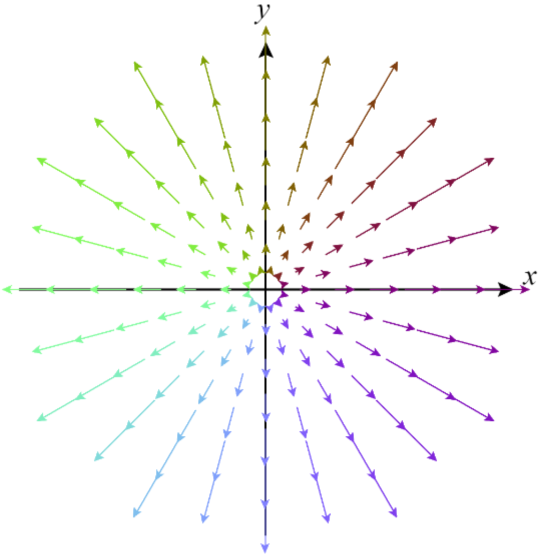
میدان برداری $F(x,y)=(-x,-y)$ بامقیاس 0.25



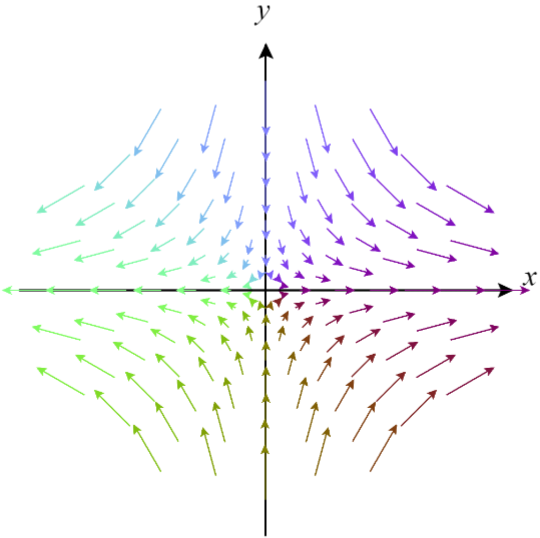
میدان برداری $F(x,y) = (-y, x)$ بامقیاس 0.25

توجه

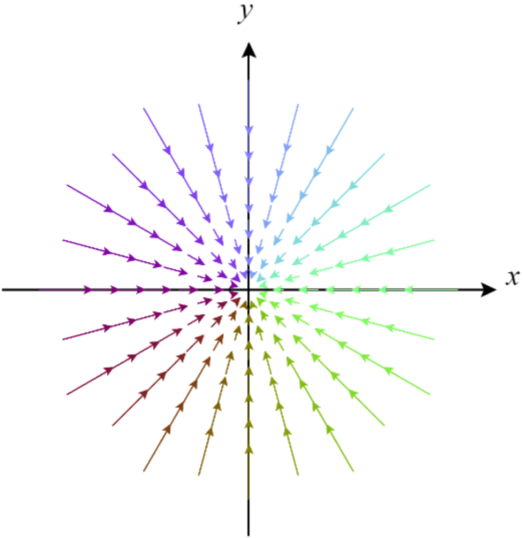
علاوه بر در نظر گرفتن یک مقیاس برای ترسیم یک میدان برداری، می‌توان تعداد دایره‌های هم‌مرکز و تعداد بردارهای نمایش داده‌شده روی هر دایره را افزایش داد تا تغییرات میدان برداری بهتر دیده شود. در ادامه، مثال‌هایی از میدان برداری که قبل‌تر ترسیم شدند، این‌بار با در نظر گرفتن تعداد دایره‌های هم‌مرکز بیش‌تری و تعداد بردارهای بیش‌تری روی هر دایره، ترسیم می‌شوند.



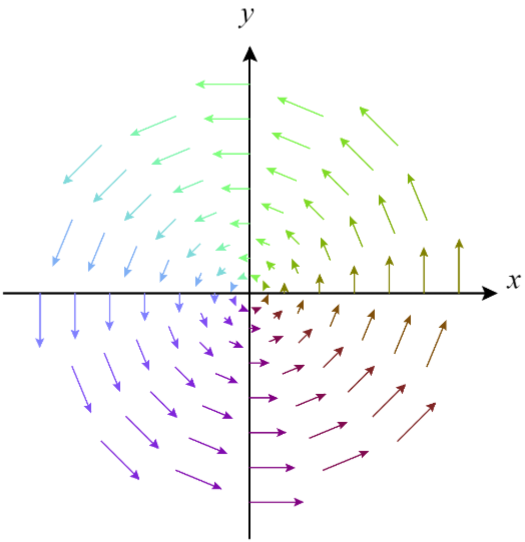
میدان برداری $F(x,y)=(x,y)$ بامقیاس 0.25



میدان برداری $F(x, y) = (x, -y)$ بامقیاس 0.25



میدان برداری $F(x,y) = (-x,-y)$ بامقیاس 0.25



میدان برداری $F(x,y) = (-y, x)$ بامقیاس 0.25

میدان‌های برداری پایستار

فرض کنید $U \subseteq \mathbb{R}^n$ باز باشد. در این صورت، میدان برداری $F : U \to \mathbb{R}^n$ را پایستار گوییم، هرگاه تابع اسکالر $\phi : U \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\nabla\phi = F$. در این صورت، تابع ϕ را تابع پتانسیل F می‌گوییم.

مثال

میدان‌های برداری

$$F(x,y) = (x,y), \quad G(x,y) = (-x,-y), \quad H(x,y) = (x,-y)$$

همان‌طور که در مثال‌های قبل دیدیم، همگی پایستار هستند.

قضیه (شرط لازم پایستاری)

فرض کنید $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری پایستار باشد، به‌طوری که $F = (F_{(1)}, \ldots, F_{(n)})$ و به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $F_{(i)}$ مشتقات جزئی اول پیوسته دارد. در این صورت، داریم:

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq n \qquad \frac{\partial F_{(i)}}{\partial x_j} = \frac{\partial F_{(j)}}{\partial x_i}$$

حالت خاص قضیه در حالت دوبعدی

فرض کنید $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک میدان برداری پایستار باشد، به‌طوری که $F = (P, Q)$ و توابع اسکالر P و Q مشتقات جزئی اول پیوسته دارند. در این صورت، داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

حالت خاص قضیه در حالت سه‌بعدی

فرض کنید $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \supseteq U : F$ یک میدان برداری پایستار باشد، به‌طوری که $F = (P, Q, R)$ و توابع اسکالر P، Q و R مشتقات جزئی اول پیوسته دارند. در این صورت، داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

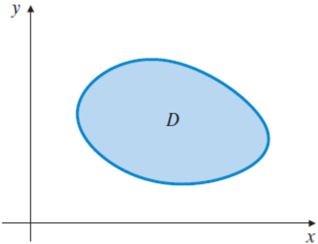
مثال

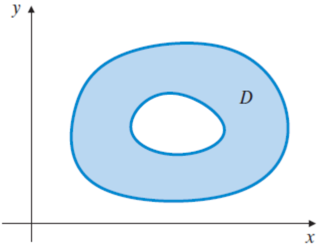
تابع $F(x, y) = (-y, x)$ پایستار نیست؛ زیرا داریم:

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x \implies \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

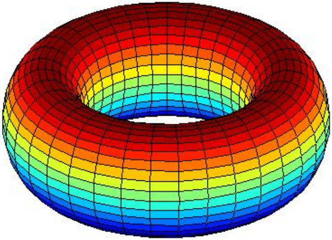
توجه

شرط لازم یادشده در قضیهٔ اخیر دربارهٔ پایستاری میدان‌های برداری، شرط کافی نیست؛ اما اگر دامنهٔ میدان برداری مورد بحث همبند باشد و حفره نداشته باشد، آنگاه شرط لازم یادشده شرط کافی نیز خواهد بود.





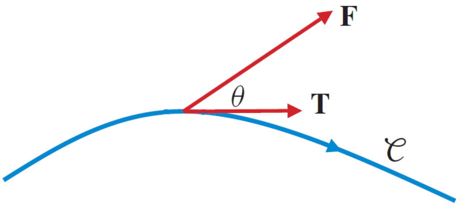
نمونه‌هایی از یک ناحیهٔ همبند فاقد حفره و یک ناحیهٔ همبند دارای حفره



چنبره، به عنوان یک ناحیهٔ دارای حفره در $\mathbb{R}^3$

انتگرال میدان‌های برداری در امتداد خم‌ها

فرض کنید $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری و $\mathcal{C}$ یک خم باشد و $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ یک نمایش پارامتری از $\mathcal{C}$ باشد و $D \subseteq \mathcal{C} = \mathrm{Im}(r)$. همچنین، فرض کنید که به‌ازای هر $t \in [a,b]$، $T(t)$ بردار یکهٔ مماس بر $\mathcal{C}$ در نقطهٔ $r(t)$ باشد. در این صورت، انتگرال F در امتداد خم $\mathcal{C}$ برابر با انتگرال روی خم $\mathcal{C}$ به‌ازای تابع تصویر F روی T تعریف می‌شود؛ یعنی انتگرال $\int_{\mathcal{C}} F \cdot T \, ds$ را داریم.



فرض کنید که به یک ذره نیروی ثابتی وارد شود و بر اثر این نیروی ثابت، ذره مسافتی را روی خط راست بپیماید. در این صورت، داریم:

کار انجام‌شده به‌وسیلهٔ نیروی واردشده $=$ (نیروی واردشده) $\cdot$ (بردار تغییر مکان ذره)

حال، فرض کنید که نیروی وارد بر ذره در هر نقطهٔ (x, y, z) از فضای $\mathbb{R}^3$ تابعی از (x, y, z) باشد و همچنین مسیر حرکت ذره روی یک خم باشد. بنابراین، می‌توان فرض کرد که نیروی وارد بر ذره یک میدان برداری $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ است و بر اثر این نیرو، ذره روی خمی مثل $\mathcal{C}$ حرکت می‌کند. فرض کنید $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای خم $\mathcal{C}$ با متغیر زمان باشد. در این صورت، وقتی که ذره تغییر مکان کوچک dr را می‌دهد، می‌توان فرض کرد که حرکت ذره روی خط راست است. بنابراین، اگر dw کار انجام‌شده به‌وسیلهٔ نیروی F در این تغییر مکان باشد، آنگاه داریم:

$$dw = F \cdot dr$$

توجه کنید که $dr = r'dt$. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} dw &= F\cdot(r'dt) = F\cdot(|r'|Tdt) \\ &= F\cdot\left(\frac{ds}{dt}Tdt\right) = (F\cdot T)ds \\ &= |F|\underbrace{|T|}_{1}\cos(\theta)ds = |F|\cos(\theta)ds \end{aligned}$$

که در آن، θ زاویهٔ بین F و T است. بنابراین، داریم:

$$w = \int_C dw = \int_C F\cdot dr = \int_C F\cdot T\,ds = \int_C |F|\cos(\theta)\,ds$$

فرض کنید که $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. پس، داریم $dr = (dx, dy, dz)$. حال، اگر $F = (P, Q, R)$، آنگاه داریم:

$$\int_C F\cdot T\,ds = \int_C F\cdot dr = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

مثال

فرض کنید $F = (y^2, 2xy)$ و $\mathcal{C}$ خمی با نقطهٔ ابتدایی $(0,0)$ و نقطهٔ انتهایی $(1,1)$ باشد. در این صورت، $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ را در هر یک از حالت‌های زیر بیابید:

۱ خم $\mathcal{C}$ در امتداد $y = x$ است.

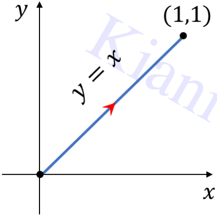
۲ خم $\mathcal{C}$ در امتداد $y = x^2$ است.

۳ خم $\mathcal{C}$ متشکل از پاره‌خط واصل $(0,0)$ به $(0,1)$ و پاره‌خط واصل $(0,1)$ به $(1,1)$ است.

به‌علاوه، اگر $\mathcal{C}'$ خمی از $(1,1)$ به $(0,0)$ و در امتداد $y = x$ باشد، آنگاه $\int_{\mathcal{C}'} F \cdot dr$ را بیابید.

پاسخ ۱:

نمایش پارامتری زیر را برای C در نظر می‌گیریم:

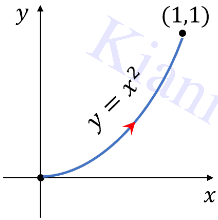


$$r(t) = (x(t), y(t)) = (t, t),$$
$$0 \le t \le 1$$

پس، داریم:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy = \int_C y^2\,dx + \int_C 2xy\,dy$$
$$= \int_0^1 y(t)^2 x'(t)\,dt + \int_0^1 2x(t)y(t)y'(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 (t^2 + 2t^2)\,dt = \int_0^1 (3t^2)\,dt = (t^3)\Big|_{t=0}^{t=1} = 1$$

پاسخ ۲:



نمایش پارامتری زیر را برای C در نظر می‌گیریم:

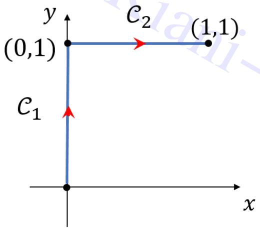
$$r(t) = (t, t^2), \quad 0 \le t \le 1$$

پس، داریم:

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy = \int_C y^2\,dx + \int_C 2xy\,dy \\
&= \int_0^1 y(t)^2 x'(t)\,dt + \int_0^1 2x(t)y(t)y'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (t^4 + 2t^3(2t))\,dt = \int_0^1 5t^4\,dt = \left(t^5\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = 1
\end{aligned}$$

پاسخ ۳:

داریم $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. نمایش‌های پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ در نظر می‌گیریم:



$$\mathcal{C}_1 : \quad r_1(t) = (0, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$\mathcal{C}_2 : \quad r_2(t) = (t, 1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

پس، داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr$$

حال، داریم:

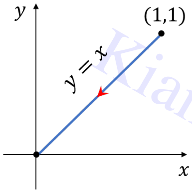
$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} P\,dx + \int_{\mathcal{C}_1} Q\,dy$$
$$= \int_{\mathcal{C}_1} y^2 \underbrace{dx}_{0} + \int_{\mathcal{C}_1} 2\underbrace{x}_{0} y\,dy = 0 + 0 = 0$$

همچنین، داریم:

$$\int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}_2} P\,dx + \int_{\mathcal{C}_2} Q\,dy$$
$$= \int_{\mathcal{C}_2} y^2\,dx + \int_{\mathcal{C}_2} 2xy\underbrace{dy}_{0} = \int_0^1 y(t)^2 x'(t)\,dt = \int_0^1 dt = 1$$

پس، در این حالت نیز داریم $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = 1$.

پاسخ «به‌علاوه ...»:



نمایش پارامتری زیر را برای C' در نظر می‌گیریم:

$$r(t) = (1-t, 1-t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

پس، داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{C'} F \cdot dr &= \int_{C'} P\,dx + \int_{C'} Q\,dy = \int_{C'} y^2\,dx + \int_{C'} 2xy\,dy \\
&= \int_0^1 y(t)^2 x'(t)\,dt + \int_0^1 2x(t)y(t)y'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(-(1-t)^2 - 2(1-t)^2\right)\,dt \\
&= \int_0^1 -3(1-t)^2\,dt = \left((1-t)^3\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = -1
\end{aligned}$$

توجه

- در مثال قبل، خم $\mathcal{C}$ در قسمت (۱) و خم $\mathcal{C}'$ هر دو در امتداد $y = x$ اما در خلاف جهت هم بودند و دیدیم که انتگرال‌های $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$ و $\int_{\mathcal{C}'} F \cdot dr$ قرینه شدند.
- در حالت کلی، اگر $\mathcal{C}$ یک خم در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ باشد و $-\mathcal{C}$ همان $\mathcal{C}$ باشد اما در خلاف جهت آن، آنگاه داریم:

$$\int_{-\mathcal{C}} F \cdot dr = -\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr$$

توابع اسکالر هموار و میدان‌های برداری هموار

- تابع اسکالر $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را هموار گوییم، هرگاه مشتقات جزئی اول f موجود و پیوسته باشند.
- میدان برداری $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را هموار گوییم، هرگاه با فرض

$$F = (F_{(1)}, \ldots, F_{(n)})$$

به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، تابع اسکالر $F_{(i)} : D \to \mathbb{R}$ هموار باشد.

قضیه

فرض کنید U یک ناحیهٔ هم‌بند و باز در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ باشد و F یک میدان برداری هموار بر U باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. F روی U پایستار است.
۲. به‌ازای هر خم بستهٔ C در U، داریم $\oint_C F \cdot dr = 0$.
۳. به‌ازای هر دو نقطهٔ P_0 و P_1 در U، انتگرال $\int_C F \cdot dr$ به‌ازای همهٔ خم‌های C در U از P_0 به P_1، مقدار یکسانی دارد (یعنی این انتگرال فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی C بستگی دارد).

تعمیم قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

با شرایط قضیهٔ قبل، اگر F پایستار باشد، یعنی تابع اسکالر ϕ وجود داشته باشد که $\nabla\phi = F$، آنگاه داریم:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla\phi \cdot dr = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

که در آن $\mathcal{C}$ یک خم از P_0 به P_1 است. به‌خصوص، اگر $\mathcal{C}$ بسته باشد (یعنی $P_0 = P_1$)، آنگاه داریم:

$$\oint_C F \cdot dr = 0$$

مثال

فرض کنید

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$$

و میدان برداری $F : D \to \mathbb{R}^3$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$F(x, y, z) = \left(xy - \sin(z), \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x\cos(z)\right)$$

همچنین، فرض کنید C خمی با نمایش پارامتری زیر باشد:

$$r(t) = \left(e^{\sin(t)+\cos(t)}, 2^{\sin(t)\cos^2(t)}, 1 + t\right), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

مقدار $\int_C F \cdot dr$ را بیابید.

پاسخ: توجه کنید که C کاملاً بالای صفحهٔ xy قرار دارد. بنابراین، می‌توانیم دامنهٔ F را به ناحیهٔ زیر محدود کنیم:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$$

نشان می‌دهیم که F پایستار است. واضح است که U یک ناحیهٔ باز و همبند است و شامل هیچ حفره‌ای نیست. به‌علاوه، F تابعی هموار روی D است. همچنین، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = x \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = -\cos(z) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{e^y}{z^2} \end{cases}$$

بنابراین، F پایستار است. پس، تابع اسکالر $\phi : U \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $\nabla\phi = F$. داریم:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = (P, Q, R)$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = xy - \sin(z) & (1) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{e^y}{z} & (2) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = \dfrac{e^y}{z^2} - x\cos(z) & (3) \end{cases}$$

حال، از دو طرف رابطهٔ (1) به‌صورت زیر برحسب x انتگرال می‌گیریم:

$$\phi = \int (xy - \sin(z))\, dx = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) + g(y, z)$$

سپس، از دو طرف رابطهٔ بالا به‌صورت زیر نسبت به y مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

از مقایسهٔ رابطهٔ بالا و رابطهٔ (2)، داریم:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{e^y}{z}$$

از دو طرف رابطهٔ بالا به‌صورت زیر نسبت به y انتگرال می‌گیریم:

$$g(y,z) = \int -\frac{e^y}{z}\,dy = -\frac{e^y}{z} + h(z)$$

بنابراین، داریم:

$$\phi = \frac{x^2 y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + h(z)$$

سپس، از دو طرف رابطهٔ بالا به‌صورت زیر نسبت به z مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -x\cos(z) + \frac{e^y}{z^2} + h'(z)$$

از مقایسهٔ رابطهٔ بالا و رابطهٔ (3)، داریم:

$$-x\cos(z) + \frac{e^y}{z^2} + h'(z) = \frac{e^y}{z^2} - x\cos(z)$$

بنابراین، داریم $h'(z) = 0$. پس عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $h(z) = c$. در نهایت، نشان دادیم که F پایستار است و داریم:

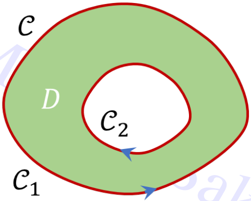
$$F = \nabla\phi, \qquad \phi(x,y,z) = \frac{x^2y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + c$$

در نهایت، بنابر تعمیم قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، داریم:

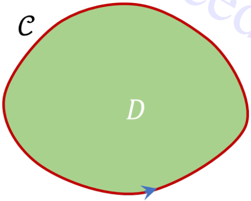
$$\int_C F \cdot dr = \phi(r(\pi)) - \phi(r(0)) = \phi(e^{-1}, 1, 1+\pi) - \phi(e, 1, 1)$$

جهت‌گذاری مثبت مرز یک ناحیه در صفحه، نسبت به آن ناحیه

فرض کنید که D ناحیه‌ای در صفحه و $\mathcal{C}$ مرز آن باشد. می‌گوییم $\mathcal{C}$ دارای جهت‌گذاری مثبت نسبت به D است، هرگاه وقتی روی $\mathcal{C}$ و در جهت $\mathcal{C}$ حرکت می‌کنیم، ناحیهٔ D در سمت چپ ما قرار بگیرد.



(آ) خم $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ با جهت‌گذاری مثبت نسبت به D



(ب) خم $\mathcal{C}$ با جهت‌گذاری مثبت نسبت به D

قضیهٔ گرین

فرض کنید D ناحیه‌ای بسته و منتظم در $\mathbb{R}^2$، با مرز $\mathcal{C}$ متشکل از یک یا چند خم قطعه‌به‌قطعه هموار که خودشان را قطع نمی‌کنند، باشد. اگر جهت‌گذاری $\mathcal{C}$ نسبت به D مثبت باشد و $F = (P, Q)$ یک میدان برداری هموار روی D باشد، آنگاه داریم:

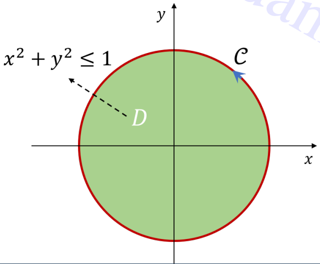
$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \oint_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA_{x,y}$$

مثال

فرض کنید $\mathcal{C}$ دایرهٔ یکه با جهت مثلثاتی باشد. انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\oint_{\mathcal{C}} (7y + \sin(x^{100}))\, dx + \left(4x - \sqrt[100]{27 + y^2}\right) dy$$

پاسخ: فرض کنید D دیسک یکهٔ بسته باشد. در این صورت، $\mathcal{C}$ مرز D است و جهت مثلثاتی برای $\mathcal{C}$ نسبت به D جهت‌گذاری مثبت است.



قرار می‌دهیم:

$$F = (P, Q) = (7y + \sin(x^{100}), 4x - \sqrt[100]{27 + y^2})$$

در این صورت، F یک میدان برداری هموار روی D است. پس، بنابر قضیهٔ گرین داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}} (7y + \sin(x^{100}))dx + \left(4x - \sqrt[100]{27 + y^2}\right) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA_{x,y}$$

داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 7$$

بنابراین، داریم:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA_{x,y} = \iint_D (4-7) dA_{x,y} = -3 \times (D \text{ مساحت})$$

بنابراین، انتگرال داده‌شده برابر است با -3π.

کاربرد قضیهٔ گرین در محاسبهٔ مساحت

فرض کنید D ناحیه‌ای بسته و منتظم در صفحه، با مرز $\mathcal{C}$ است که به‌طور مثبت نسبت به Dجهت‌گذاری شده است. در این صورت، اگر میدان برداری $F=(P,Q)$ را روی D چنان در نظر بگیریم که

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$$

آنگاه بنابر قضیهٔ گرین، داریم:

$$D \text{ مساحت} = \iint_D dA_{x,y} = \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy$$

برای مثال، میدان‌های برداری زیر در شرط بالا صدق می‌کنند:

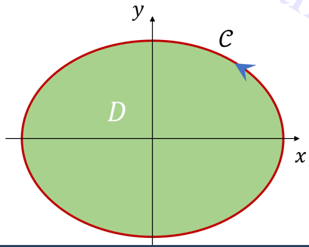
$$F(x,y)=(0,x),\quad F(x,y)=(-y,0),\quad F(x,y)=\left(-\frac{y}{2},\frac{x}{2}\right)$$

مثال

مساحت محدود به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بیابید.

پاسخ: فرض کنید $\mathcal{C}$ بیضی داده‌شده و D ناحیهٔ محدودشده به $\mathcal{C}$ باشد. خم $\mathcal{C}$ را با جهت‌گذاری مثبت نسبت به D در نظر بگیرید. اگر $F(x,y)=(P,Q)=(0,x)$، آنگاه بنابر کاربرد قضیهٔ گرین در محاسبهٔ مساحت، داریم:

$$\text{مساحت } D=\oint_{\mathcal{C}} Pdx+Qdy=\oint_{\mathcal{C}} xdy$$



نمایش پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}$ در نظر بگیرید:

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (a\cos(t), b\sin(t)), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} D \text{ مساحت} &= \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (a\cos(t))(b\cos(t))\,dt \\ &= ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = ab\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} = \pi ab \end{aligned}$$

مثال‌های تکمیلی

تاکنون مثال‌های **مفهومی** و **کاربردی** مختلفی را از این مبحث دیدیم. در ادامه، به مثال‌های بیشتری از این مبحث توجه فرمایید. برای درک بهتر، ابتدا به مسائل فکر کنید و سعی کنید که آن‌ها را حل بفرمایید. سپس پاسخ‌ها را با دقت مطالعه و بررسی نمایید.

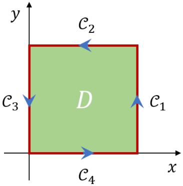
مثال

فرض کنید $\mathcal{C}$ مربعی با رئوس $(0,0)$، $(2,0)$، $(0,2)$ و $(2,2)$ و در جهت مثلثاتی باشد. انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(2xy + e^{\cos(x^2)}\right) dx + \left(4x^2 + e^{\sin(y^2)}\right) dy$$

پاسخ: فرض کنید D ناحیهٔ مربعی بسته با رئوس بالا باشد. در این صورت، $\mathcal{C}$ مرز D است و جهت مثلثاتی برای $\mathcal{C}$ نسبت به D جهت‌گذاری مثبت است.

مطابق با شکل، $\mathcal{C}$ اجتماع چهار پاره‌خط است.



قرار می‌دهیم:

$$F=(P,Q)=\left(2xy+e^{\cos(x^2)},4x^2+e^{\sin(y^2)}\right)$$

در این صورت، F یک میدان برداری هموار روی D است. پس، بنابر قضیهٔ گرین، داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}}\left(2xy+e^{\cos(x^2)}\right)dx+\left(4x^2+e^{\sin(y^2)}\right)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA_{x,y}$$

داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=8x,\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=2x$$

بنابراین، داریم:

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA_{x,y}=\iint_D(8x-2x)dA_{x,y}=\int_0^2\int_0^2 6x\,dxdy$$

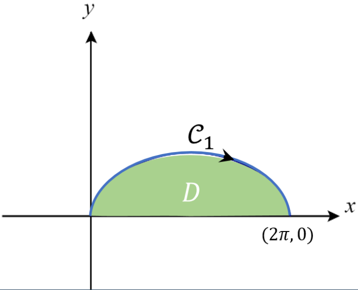
$$=2\left(3x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=24$$

مثال

مساحت محدود به خم r به معادلهٔ زیر و محور x را بیابید.

$$r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

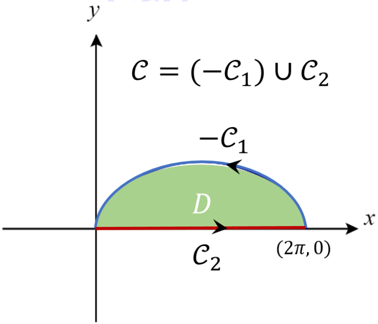
پاسخ: فرض کنید $\mathcal{C}_1$ تصویر r و D ناحیهٔ محدودشده به $\mathcal{C}_1$ و محور x است.



اگر $F(x,y)=(P,Q)=(-y,0)$، آنگاه بنابر کاربرد قضیهٔ گرین در محاسبهٔ مساحت، داریم:

$$\text{مساحت } D = \oint_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = -\oint_{\mathcal{C}} y\,dx$$

که در آن $\mathcal{C}$ خمی است که با اضافه‌کردن پاره‌خط واصل $(0,0)$ به $(2\pi,0)$ به دنبال $-\mathcal{C}_1$، به‌دست می‌آید.



به منظور استفاده از قضیهٔ گرین، باید خمی که روی آن انتگرال می‌گیریم، بسته باشد. از این‌رو خم $\mathcal{C}_2$ را به دنبال $-\mathcal{C}_1$ اضافه کردیم تا خم بستهٔ $\mathcal{C}$ به‌دست آید. توجه کنید که خم $\mathcal{C}$ نسبت به D جهت‌گذاری مثبت دارد. نمایش پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}_2$ در نظر می‌گیریم:

$$r_2(t) = (t, 0), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

در این صورت، داریم:

$$D \text{ مساحت} = -\int_{-\mathcal{C}_1} y\,dx - \int_{\mathcal{C}_2} \underbrace{y}_{0}\,dx = \int_{\mathcal{C}_1} y\,dx$$

حال، داریم:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} y\,dx &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos(t))^2\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos(t) + \frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\,dt\end{aligned}$$

بنابراین، داریم:

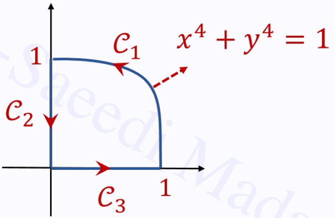
$$\int_{C_1} y\,dx = \left(t - 2\sin(t) + \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} = 3\pi$$

در نهایت، داریم:

$$D \text{ مساحت} = 3\pi$$

مثال

فرض کنید که $\mathcal{C}$ خم بستهٔ زیر باشد.



$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

مقدار انتگرال زیر را بیابید:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{3}y^3 + e^{\cos(x^2)}\right) dx + (x^4 + y^2 x + 3y)dy$$

پاسخ: فرض کنید که D ناحیهٔ محصورشده به‌وسیلهٔ خم $\mathcal{C}$ باشد. واضح است که $\mathcal{C}$ نسبت به D دارای جهت‌گذاری مثبت است. اگر

$$F = (P, Q) = (\frac{1}{3}y^3 + e^{\cos(x^2)}, x^4 + y^2x + 3y)$$

آنگاه F تابعی هموار روی D است. پس، بنابر قضیهٔ گرین داریم:

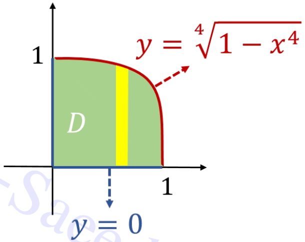
$$I = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA_{x,y}$$

اما داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^3 + y^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = y^2$$

پس، داریم:

$$I = \iint_D (4x^3 + y^2 - y^2) \, dA_{x,y} = \iint_D 4x^3 \, dA_{x,y}$$



مطابق با شکل، D مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است که:

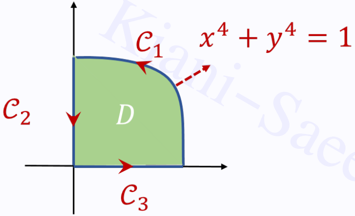
$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq \sqrt[4]{1-x^4}$$

بنابراین، داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[4]{1-x^4}} 4x^3 \, dy dx = \int_0^1 4x^3 \sqrt[4]{1-x^4} \, dx$$

$$= \left(-\frac{4}{5} \sqrt[4]{(1-x^4)^5} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{5}$$

در ادامه، یک سؤال تستی آورده می‌شود که از مثال قبل استخراج شده است.



$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$

فرض کنید که D ناحیهٔ محصور به خم C مطابق شکل مقابل است. کدام گزینه توصیف ناحیهٔ D است؟

۱ $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$

۲ $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ و $0 \leq y \leq \sqrt[4]{1-x^4}$

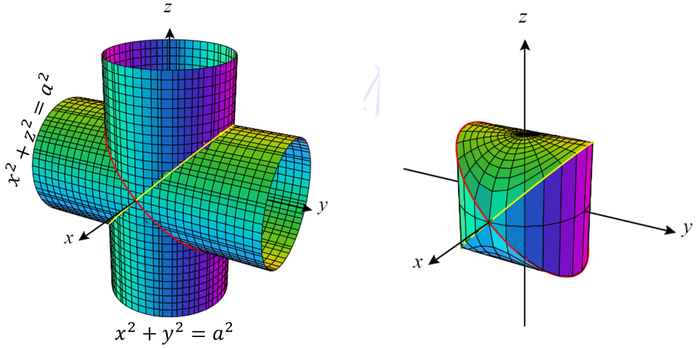
۳ $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq \sqrt[4]{1-x^4}$

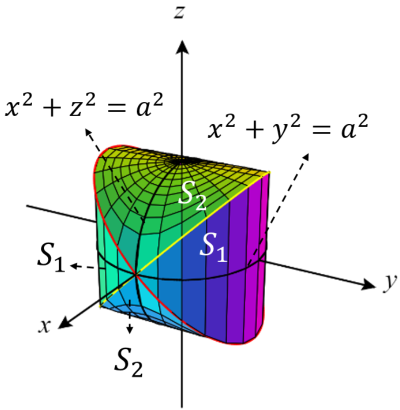
۴ $0 \leq x \leq \sqrt[4]{1-y^4}$ و $0 \leq y \leq \sqrt[4]{1-x^4}$

مثال

فرض کنید $a > 0$. مساحت جانبی ناحیهٔ محصور به دو استوانهٔ $x^2+y^2 = a^2$ و $x^2+z^2 = a^2$ را بیابید.

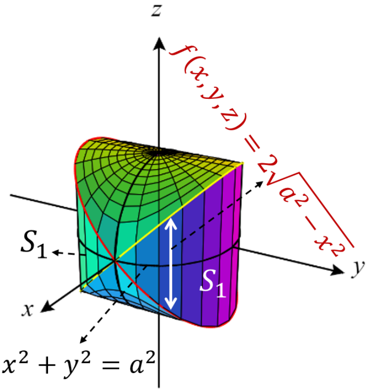
پاسخ:





فرض کنید که S سطح جانبی ناحیهٔ محصور به دو استوانهٔ داده‌شده است. مطابق با شکل، می‌توان S را به دو ناحیهٔ S_1 و S_2 تقسیم کرد، به‌طوری که S_1 و S_2 دیواره‌هایی بناشده بر خم‌های به‌ترتیب $x^2+y^2=a^2$ (در صفحهٔ xy) و $x^2+z^2=a^2$ (در صفحهٔ xz) هستند.

ابتدا مساحت S_1 را محاسبه می‌کنیم. مطابق با شکل، طولی که در نقطهٔ (x,y,z) بر دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ بناشده است، برابر است با:



$$f(x,y,z)=2\sqrt{a^2-x^2}$$

زیرا این طول فاصلهٔ بین دو نقطهٔ برخورد دو استوانهٔ داده‌شده است و با توجه به اینکه این فاصله قائم است، برابر است با تفاضل مقادیر z در نقاط برخورد. بنابراین، داریم:

$$f(x,y,z)=\sqrt{a^2-x^2}-\left(-\sqrt{a^2-x^2}\right)=2\sqrt{a^2-x^2}$$

بنابراین، داریم:

$$S_1 \text{ مساحت} = \int_{x^2+y^2=a^2} f(x,y,z)\, ds$$

حال، نمایش پارامتری زیر را از دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ در نظر می‌گیریم:

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

در این صورت، داریم:

$$\gamma'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), 0) \implies |\gamma'(t)| = a$$

که نتیجه می‌دهد:

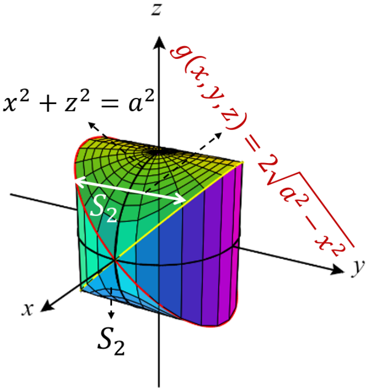
$$\begin{aligned} S_1 \text{ مساحت} &= \int_0^{2\pi} f(a\cos(t), a\sin(t), 0)|\gamma'(t)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2a\sqrt{a^2 - a^2\cos^2(t)}\, dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} |\sin(t)|\, dt \end{aligned}$$

توجه کنید که:

$$\int_0^{2\pi} |\sin(t)|\,dt = \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(t)\,dt$$
$$= (-\cos(t))\Big|_{t=0}^{t=\pi} + (\cos(t))\Big|_{t=\pi}^{t=2\pi}$$
$$= 2 + 2 = 4$$

در نتیجه، داریم:

$$S_1 \text{ مساحت} = 8a^2$$



حال، مساحت S_2 را محاسبه می‌کنیم. مطابق با شکل، طولی که در نقطهٔ (x, y, z) بر دایرهٔ $x^2 + z^2 = a^2$ بناشده است، برابر است با:

$$g(x, y, z) = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

زیرا این طول، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ برخورد دو استوانهٔ داده‌شده است و با توجه به اینکه این فاصله صرفاً در راستای محور y است، برابر است با تفاضل مقادیر y در نقاط برخورد.

بنابراین، داریم:

$$g(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2} - \left(-\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

بنابراین، داریم:

$$S_2 \text{ مساحت } = \int_{x^2+z^2=a^2} g(x,y,z)\, ds$$

حال، نمایش پارامتری زیر را از دایرهٔ $x^2+z^2=a^2$ در نظر می‌گیریم:

$$\eta(t) = (a\cos(t), 0, a\sin(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

در این صورت، داریم:

$$\eta'(t) = (-a\sin(t), 0, a\cos(t)) \implies |\eta'(t)| = a$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} S_2 \text{ مساحت } &= \int_0^{2\pi} g(a\cos(t), 0, a\sin(t), 0)|\eta'(t)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2a\sqrt{a^2 - a^2\cos^2(t)}\, dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} |\sin(t)|\, dt = 8a^2 \end{aligned}$$

در نهایت، داریم:

$$\text{مساحت } S = \text{مساحت } S_1 + \text{مساحت } S_2 = 8a^2 + 8a^2 = 16a^2$$

مثال

فرض کنید که C یک خم با یک نمایش پارامتری به‌صورت زیر باشد:

$$r(t) = (e^{t^2+\sin(t)}, \pi(1-t)e^{\sin(t)}, (1-t)e^{\sin(t^2)}), \quad 0 \leq t \leq 1$$

همچنین، فرض کنید که میدان برداری F به‌صورت زیر روی $\mathbb{R}^3$ تعریف شود:

$$F(x, y, z) = (yz, xz - z\sin(yz), xy - y\sin(yz))$$

مقدار $\int_C F \cdot T\, ds$ را بیابید.

پاسخ: نشان می‌دهیم که F پایستار است. واضح است که F تابعی هموار روی $\mathbb{R}^3$ است.
همچنین، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = z \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = x - \sin(yz) - zy\sin(yz) \end{cases}$$

بنابراین، F پایستار است. پس، تابع اسکالر $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $\nabla\phi = F$.

داریم:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = (P, Q, R)$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = yz & (1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = xz - z\sin(yz) & (2) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = xy - y\sin(yz) & (3) \end{cases}$$

حال، از دو طرف رابطهٔ (1) به‌صورت زیر بر حسب x انتگرال می‌گیریم:

$$\phi = \int yz\, dx = xyz + g(y, z)$$

سپس، از دو طرف رابطهٔ قبل به‌صورت زیر نسبت به y مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xz + \frac{\partial g}{\partial y}$$

از مقایسهٔ رابطهٔ اخیر و رابطهٔ (2)، داریم:

$$xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - z\sin(yz)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -z\sin(yz)$$

با انتگرال‌گیری نسبت به y از تساوی بالا، داریم:

$$g(y,z) = \cos(yz) + h(z)$$

بنابراین، داریم:

$$\phi = xyz + \cos(yz) + h(z)$$

سپس، از دو طرف رابطهٔ قبل به‌صورت زیر نسبت به z مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy - y\sin(yz) + h'(z)$$

از مقایسهٔ رابطهٔ اخیر و رابطهٔ (3)، داریم:

$$xy - y\sin(yz) + h'(z) = xy - y\sin(yz)$$

پس، داریم $h'(z) = 0$. لذا عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $h(z) = c$. از این‌رو، داریم:

$$\phi = xyz + \cos(yz) + c$$

حال، بنابر تعمیم قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، می‌توان نوشت:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot T ds = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \phi(r(1)) - \phi(r(0))$$

توجه کنید که:

$$r(0) = (1, \pi, 1), \qquad r(1) = (e^{1+\sin(1)}, 0, 0)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot T ds = \phi(e^{1+\sin(1)}, 0, 0) - \phi(1, \pi, 1) = 1 - (\pi - 1) = 2 - \pi$$

در ادامه، دو سؤال تستی آورده می‌شوند که از مثال قبل استخراج شده‌اند.

مثال

فرض کنید که C یک خم با یک نمایش پارامتری به‌صورت زیر باشد:

$$r(t) = (e^{t^2+\sin(t)}, \pi(1-t)e^{\sin(t)}, (1-t)e^{\sin(t^2)}), \quad 0 \le t \le 1$$

همچنین، فرض کنید که میدان برداری F به‌صورت زیر روی $\mathbb{R}^3$ تعریف شود:

$$F(x,y,z) = (yz, xz - z\sin(yz), xy - y\sin(yz))$$

مقدار $\int_C F \cdot T\, ds$ کدام است؟

۱ 0

۲ $1-\pi$

۳ $2-\pi$

۴ $3-\pi$

مثال

فرض کنید که میدان برداری F به‌صورت زیر روی $\mathbb{R}^3$ تعریف شود:

$$F(x,y,z) = (yz, xz - z\sin(yz), xy - y\sin(yz))$$

در این صورت، کدام گزینه نادرست است؟

۱ $\int_{C_1} F \cdot dr = 0$، که در آن C_1 خم $x^2 + 3y^2 = 1$ است.

۲ $\int_{C_2} F \cdot dr = \pi$، که در آن C_2 خم $x^4 + y^4 = 1$ است.

۳ $\int_{C_3} F \cdot dr = 0$، که در آن C_3 خم $x^2 + y^2 = 4$ است.

۴ F پایستار است.

مثال

فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک خم و r یک نمایش پارامتری $\mathcal{C}$ به‌صورت زیر باشد:

$$r:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2,\qquad r(t)=(3\cos(t),4\sin(t))$$

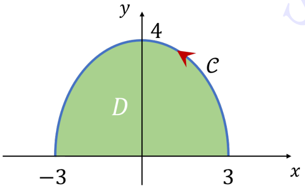
انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I=\int_{\mathcal{C}}\left(e^{2x}-y-\frac{1}{2}\sin(2y)\right)dx+\left(e^{2y}+2x\sin^2(y)\right)dy$$

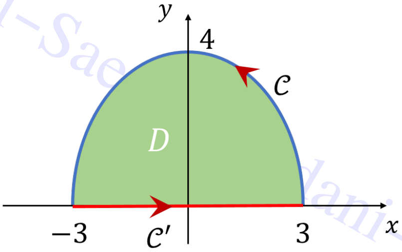
پاسخ: فرض کنید D ناحیهٔ محدودشده به $\mathcal{C}$ و محور x است.

داریم $x = 3\cos(t)$ و $y = 4\sin(t)$، که نتیجه می‌دهد $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. بنابراین، D مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است که:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, \quad y \geq 0$$



از قضیهٔ گرین استفاده می‌کنیم. بنابراین، باید خمی که روی آن انتگرال می‌گیریم، بسته باشد. از این‌رو خم $\mathcal{C}'$ را به دنبال $\mathcal{C}$ اضافه می‌کنیم تا خم بستهٔ $\mathcal{C}''$ به‌دست آید. توجه کنید که خم $\mathcal{C}''$ مرز D است و نسبت به D جهت‌گذاری مثبت دارد.



$$\mathcal{C}'' = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$$

داریم:

$$F(x,y) = (P,Q) = \left(e^{2x} - y - \frac{1}{2}\sin(2y), e^{2y} + 2x\sin^2(y)\right)$$

بنابر قضیهٔ گرین داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}''} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA_{x,y}$$

به علاوه، داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2\sin^2(y), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - \cos(2y)$$

و

$$\oint_{\mathcal{C}''} F \cdot dr = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr + \int_{\mathcal{C}'} F \cdot dr = I + \int_{\mathcal{C}'} F \cdot dr$$

از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\mathcal{C}'} F \cdot dr + \iint_D \left(2\sin^2(y) + 1 + \cos(2y)\right) dA_{x,y} \\ &= -\int_{\mathcal{C}'} F \cdot dr + 2\iint_D dA_{x,y} = -\int_{\mathcal{C}'} F \cdot dr + 2\frac{(3)(4)\pi}{2} \end{aligned}$$

بنابراین، کافی است که $\int_{C'} F \cdot dr$ را بیابیم. نمایش پارامتری زیر را برای C' در نظر می‌گیریم:

$$r_1(t) = (t, 0), \qquad -3 \leq t \leq 3$$

لذا، داریم:

$$\int_{C'} F \cdot dr = \int_{C'} Pdx + Q\,\underbrace{dy}_{0} = \int_{-3}^{3} P(x(t), y(t))x'(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{1} e^{2x(t)} x'(t)\,dt = \int_{-3}^{3} e^{2t}\,dt = \left(\frac{e^{2t}}{2}\right)\Bigg|_{t=-3}^{t=3}$$

$$= \frac{e^{6} - e^{-6}}{2}$$

در نهایت، داریم:

$$I = -\int_{C'} F \cdot dr + 12\pi = -\frac{e^{6} - e^{-6}}{2} + 12\pi$$

یادآوری

یک نمایش پارامتری برای یک پاره‌خط با نقطهٔ ابتدایی A و نقطهٔ انتهایی B در $\mathbb{R}^n$، به‌صورت زیر است:

$$r(t) = A + (B - A)t, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

مثال

فرض کنید که میدان برداری F به‌صورت زیر تعریف شود:

$$F(x,y,z) = (yz\cos(xz) - e^z\sin(x), \sin(xz), xy\cos(xz) + e^z\cos(x))$$

۱ مطلوب است تابع اسکالر ϕ که $\nabla\phi = F$.

۲ فرض کنید که میدان برداری G به‌صورت زیر تعریف شود:

$$G(x,y,z) = (y + yz\cos(xz) - e^z\sin(x), \sin(xz), x + xy\cos(xz) + e^z\cos(x))$$

مقدار انتگرال $\int_C G\cdot dr$ را بیابید که در آن، C خمی است متشکل از دو پاره‌خط جهت‌دار، اولی از نقطهٔ $A=(1,1,1)$ به نقطهٔ $B=(1,-1,1)$ و دومی از نقطهٔ $B=(1,-1,1)$ به نقطهٔ $C=(1,0,0)$.

پاسخ ۱: نشان می‌دهیم که F پایستار است. واضح است که F تابعی هموار روی $\mathbb{R}^3$ است.
همچنین، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z\cos(xz) \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -xyz\sin(xz) - e^z\sin(x) \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x\cos(xz) \end{cases}$$

بنابراین، F پایستار است. پس، تابع اسکالر $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $\nabla\phi = F$. داریم:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (P, Q, R)$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = yz\cos(xz) - e^z\sin(x) & (1) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = \sin(xz) & (2) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = xy\cos(xz) + e^z\cos(x) & (3) \end{cases}$$

حال، از دو طرف رابطهٔ (1) به‌صورت زیر بر حسب x انتگرال می‌گیریم:

$$\phi = \int (yz\cos(xz) - e^z \sin(x))\, dx = y\sin(xz) + e^z\cos(x) + g(y, z)$$

سپس، از دو طرف رابطهٔ قبل به‌صورت زیر نسبت به y مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin(xz) + \frac{\partial g}{\partial y}$$

از مقایسهٔ رابطهٔ بالا و رابطهٔ (2)، داریم:

$$\sin(xz) + \frac{\partial g}{\partial y} = \sin(xz)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \implies g(y, z) = h(z)$$

بنابراین، داریم:

$$\phi = y\sin(xz) + e^z\cos(x) + h(z)$$

سپس، از دو طرف رابطهٔ قبل به‌صورت زیر نسبت به z مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy\cos(xz) + e^z\cos(x) + h'(z)$$

از مقایسهٔ رابطهٔ بالا و رابطهٔ (3)، داریم:

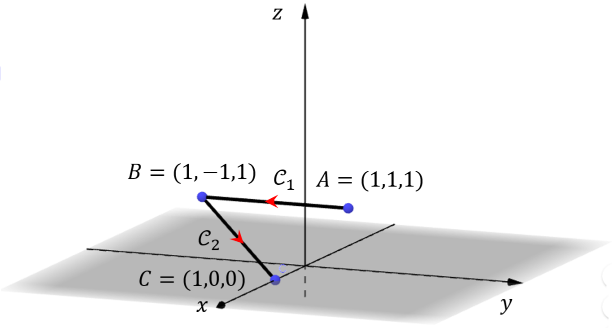
$$xy\cos(xz) + e^z\cos(x) + h'(z) = xy\cos(xz) + e^z\cos(x)$$

بنابراین، داریم $h'(z) = 0$. پس عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $h(z) = c$. بنابراین، داریم:

$$\phi = y\sin(xz) + e^z\cos(x) + c$$

پاسخ ۲: توجه کنید که $G(x,y,z) = F(x,y,z) + (y,0,x)$. پس، داریم:

$$\int_{\mathcal{C}} G\cdot dr = \int_{\mathcal{C}} F\cdot dr + \int_{\mathcal{C}} (y,0,x)\cdot dr$$



حال، بنابر تعمیم قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، می‌توان نوشت:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \phi(C) - \phi(A) = (1-e)\cos(1) - \sin(1)$$

بنابراین، کافی است که $I = \int_{\mathcal{C}} (y, 0, x) \cdot dr$ را بیابیم.

با توجه به اینکه $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$، داریم:

$$I = \int_{\mathcal{C}_1} (y,0,x)\cdot dr + \int_{\mathcal{C}_2} (y,0,x)\cdot dr$$

نمایش‌های پارامتری زیر را برای $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{C}_1: \qquad r_1(t) = A + (B-A)t = (1,-2t+1,1), \quad 0 \le t \le 1$$

$$\mathcal{C}_2: \qquad r_2(t) = B + (C-B)t = (1,t-1,1-t), \quad 0 \le t \le 1$$

بنابراین، داریم:

$$\int_{\mathcal{C}_1} (y,0,x)\cdot dr = \int_{\mathcal{C}_1} y\,\underbrace{dx}_{0} + \int_{\mathcal{C}_1} x\,\underbrace{dz}_{0} = 0$$

$$\int_{\mathcal{C}_2} (y,0,x)\cdot dr = \int_{\mathcal{C}_2} y\,\underbrace{dx}_{0} + \int_{\mathcal{C}_2} x\,dz$$

$$= \int_0^1 -1\,dt = (-t)\Big|_{t=0}^{t=1} = -1$$

در نهایت، داریم $I = -1$ و از این‌رو:

$$\int_{\mathcal{C}} G \cdot dr = (1 - e)\cos(1) - \sin(1) - 1$$

مثال

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^2$ یک ناحیهٔ بسته و منتظم در صفحه باشد و C مرز قطعه‌به‌قطعه هموار ناحیهٔ Dباشد، به‌طوری که C از مبدأ نمی‌گذرد و دارای جهت‌گذاری مثبت نسبت به D است. اگر E درون D باشد، آنگاه نشان دهید:

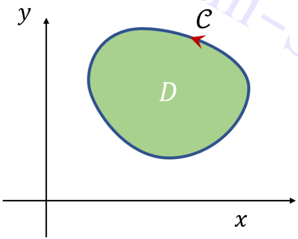
$$I = \oint_C \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy = \begin{cases} 0 & ,(0,0) \notin E \\ 2\pi & ,(0,0) \in E \end{cases}$$

پاسخ:

فرض کنید $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} : F$ با ضابطهٔ $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ باشد.

حالت اول: $E \notin (0,0)$.

در این صورت، D زیرمجموعهٔ دامنهٔ F است و F یک میدان برداری هموار است.



همچنین، داریم:

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

در حالی‌که:

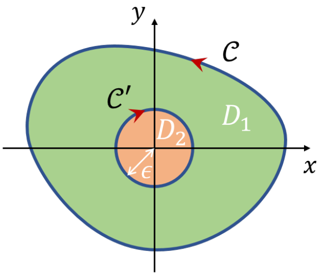
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

پس، بنابر قضیهٔ گرین، داریم:

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA_{x,y} = 0$$

حالت دوم: $(0,0) \in E$.

تابع F در مبدأ تعریف نشده است، پس روی D هموار نیست. از این‌رو، نمی‌توان مستقیماً از قضیهٔ گرین استفاده کرد. توجه کنید که $(0,0)$ یک نقطهٔ درونی D است و از این‌رو، $\epsilon > 0$ وجود دارد که دیسک بسته با شعاع ϵ و مرکز مبدأ نیز کاملاً در D قرار می‌گیرد.

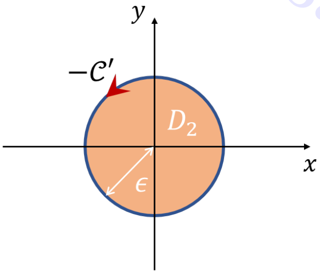


مطابق با شکل، داریم $D = D_1 \cup D_2$ و به علاوه، $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ و $-\mathcal{C}'$ به‌ترتیب مرزهای D_1 و D_2 با جهت‌گذاری‌های مثبت نسبت به D_1 و D_2 هستند. با توجه به اینکه $(0,0) \notin D_1$، بنابر حالت اول، داریم:

$$\int_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'} F \cdot dr = 0$$

داریم:

$$I = \int_{\mathcal{C}} F \cdot dr = \underbrace{\int_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'} F \cdot dr}_{0} + \int_{-\mathcal{C}'} F \cdot dr = \int_{-\mathcal{C}'} F \cdot dr = \int_{-\mathcal{C}'} P dx + Q dy$$



نمایش پارامتری $r_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ را برای $-\mathcal{C}'$ به‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$r_1(t) = (\underbrace{\epsilon \cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{\epsilon \sin(t)}_{y(t)})$$

بنابراین، داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \big(P(r_1(t))x'(t) + Q(r_1(t))y'(t)\big)\, dt$$

پس، می‌توان نوشت:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\epsilon \sin(t)}{\epsilon^2} (-\epsilon \sin(t)) + \frac{\epsilon \cos(t)}{\epsilon^2} (\epsilon \cos(t)) \right) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t) \right) \, dt = \int_0^{2\pi} \, dt = 2\pi$$