بسم الله الرحمن الرحیم

تمرینات سری اول: توابع برداری و خم های پارامتری

۲۸ بهمن ۱۴۰۲

سوال۱

اگر بردارهای $\overrightarrow{A} = (a_1, a_2, a_3), \overrightarrow{B} = (b_1, b_2, b_3), \overrightarrow{C} = (c_1, c_2, c_3)$ بگونه‌ای باشند که $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0$

نشان دهید:

$$\mathbb{R}^3 = \{a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

پاسخ:

با توجه به صورت سوال کافیست نشان دهیم هر بردار دلخواه مانند $\overrightarrow{X} = (x, y, z)$ را می‌توان با استفاده از بردارهای $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ نوشت.

مسئله را به صورت بازگشتی حل می‌کنیم، فرض کنیم برای بردار دلخواه $\overrightarrow{X}$ داریم:

$$\overrightarrow{X} = (x, y, z) = a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = YA$$

از طرفی چون $\det A \neq 0$ در نتیجه A معکوس پذیر است لذا اگر طرفین تساوی را از راست در A^{-1} ضرب کنیم، داریم

$$Y = XA^{-1} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

درنتیجه برای هر بردار $\overrightarrow{X}$ سه تایی (a, b, c) وجود دارد بطوریکه

$$(x, y, z) = a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}$$

سوال۲

معادله‌ی صفحه (P) گذرنده از نقاط $A = (۲, ۰, ۳)$ و $B = (۱, ۱, ۱)$ و عمود بر صفحه‌ی $Q = x + ۲y - ۳z = ۰$ را بیابید.

پاسخ:

بردار قائم صفحه‌ی Q را در نظر می‌گیریم:

$$N_q = (1, 2, -3)$$

این بردار موازی صفحه‌ی P است و $(1,1,1) \in P, Q$ از طرفی $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -2)$. در نتیجه بردار قائم P ، (N_P) بر این دو بردار $(N_q, \overrightarrow{AB})$ عمود است لذا :

$$N_p = (1, 2, -3) \times (-1, 1, -2) = (-1, 5, 3)$$

پس معادله صفحه‌ی مورد نظر برابر است با

$$P: \quad -1(x-1) + 5(y-1) + 3(z-1) = 0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$P: \quad -x + 5y + 3z = 7$$

سوال۳

معادله‌ی صفحه (P) گذرنده از نقطه‌ی $(1,1,1)$ و عمود بر صفحه‌ی (Q) $2x - y + 4z = 1$، و موازی خط $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z-1}{4}$ را بیابید.

پاسخ:

بردار قائم بر صفحه Q و هادی خط را می‌یابیم:

$$N_q = (۲, -۱, ۴), \qquad l = (۲, ۱, ۴)$$

کافیست نرمال صفحه P را عمود بر هر دو بردار در نظر بگیریم. در نتیجه:

$$N_p = (۲, -۱, ۴) \times (۲, ۱, ۴) = (-۸, ۰, ۴) \rightarrow N_p = (-۲, ۰, ۱)$$

❋ می‌توان نرمال صفحه را مضربی از آن نیز در نظر گرفت.

لذا معادله‌ی صفحه‌ی P برابر است با:

$$-۲(x - ۱) + ۱(z - ۱) = ۰ \qquad \longrightarrow \qquad -۲x + z = -۱.$$

سوال۴

ذره ای روی فصل مشترک استوانه‌های $z = x^۲$ و $y = -x^۲$ در جهتی که x افزایش میابد در حرکت است. تندی این ذره در لحظه‌ای که در نقطه‌ی $(۱, -۱, ۱)$ است، برابر است با $۹ \frac{cm}{s}$ و این تندی با اهنگ $۳ \frac{cm}{s^۲}$ افزایش میابد. سرعت و شتاب ذره را در لحظه‌ی یاد شده بیابید.

پاسخ:

مکان حرکت ذره :

$$\overrightarrow{r} = x\ i + y\ j + z\ k = x\ i - x^2\ j + x^2\ k = (x, -x^2, x^2)$$

درنتیجه ذره زمانی در نقطه‌ی $(1,-1,1)$ است که $x = 1$. با مشتقگیری از مکان ذره در لحظه‌ی t بردار سرعت برابر است با:

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}(1, -2x, 2x) \qquad (I)$$

و شتاب ذره برابر است با:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}(1, -2x, 2x) + (\frac{dx}{dt})^2(0, -2, 2) \qquad (II)$$

تندی ذره:

$$|v| = |\frac{dx}{dt}|\sqrt{۱ + ۴x^۲ + ۴x^۲} = \sqrt{۱ + ۸x^۲}\frac{dx}{dt} \xrightarrow{x=۱} \frac{dx}{dt} = ۳$$

اهنگ تندی ذره:

$$\frac{d|v|}{dt} = \frac{۱۶x}{۲\sqrt{۱ + ۸x^۲}}(\frac{dx}{dt})^۲ + \frac{d^۲x}{dt^۲}\sqrt{۱ + ۸x^۲} \xrightarrow{\frac{dx}{dt}=۳,\ x=۱} \frac{d^۲x}{dt^۲} = -۷$$

با استفاده از $\frac{dx}{dt} = ۳$ و $\frac{d^۲x}{dt^۲} = -۷$ و روابط $(I), (II)$ سرعت و شتاب در لحظه‌ی مورد نظر برابر است با:

$$\vec{v} = ۳(۱, -۲, ۲) = (۳, -۶, ۶)\ , \qquad \vec{a} = -۷(۱, -۲, ۲) + ۳^۲(۰, -۲, ۲) = (-۷, -۴, ۴)$$

سوال۵

سرعت و تندی و شتاب ذره‌ای را بیابید که مکانش در لحظه‌ی t عبارتست از $r(t)$. مسیر حرکت ذره را توصیف کنید.

الف) $r(t) = (e^{-t}\cos(e^t), e^{-t}\sin(e^t), -e^t)$

ب) $r(t) = (a\cos t\sin t, a\sin^2 t, a\cos t)$

پاسخ:

سرعت:

$$\overrightarrow{v} = \big(-e^{-t}\cos(e^t) - \sin(e^t), -e^{-t}\sin(e^t) + \cos(e^t), -e^t \big)$$

شتاب:

$$\overrightarrow{a} = \big((e^{-t} - e^t)\cos(e^t) + \sin(e^t), (e^{-t} - e^t)\sin(e^t) - \cos(e^t), -e^t\big)$$

تندی:

$$|v| = \sqrt{e^{۲t} + e^{-۲t} + ۱}$$

در نتیجه :

$$x^۲ + y^۲ = e^{-۲t}\cos^۲(e^t) + e^{-۲t}\sin^۲(e^t) = e^{-۲t} \quad \longrightarrow \quad z\sqrt{x^۲ + y^۲} = -۱$$

مسیر حرکت مارپیچ و روی $z\sqrt{x^۲ + y^۲} = -۱$ می‌باشد.

ب) $r(t) = (a\cos t \sin t, a\sin^۲ t, a\cos t)$

پاسخ:

مکان ذره با تغییر نسبت‌های مثلثاتی :

$$r(t) = (\frac{a}{۲}\sin ۲t, a(\frac{۱-\cos ۲t}{۲}), a\cos t)$$

سرعت:

$$\overrightarrow{v} = (a\cos ۲t, a\sin ۲t, -a\sin t)$$

شتاب:

$$\overrightarrow{a} = (-۲a\sin ۲t, ۲a\cos ۲t, -a\cos t)$$

تندی:

$$|v| = a\sqrt{۱+\sin^۲ t}$$

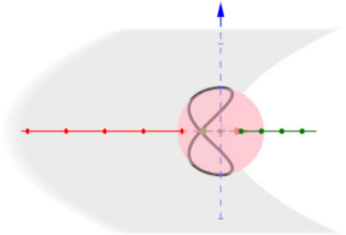
در نتیجه :

$$x^۲+y^۲+z^۲=\frac{a^۲}{۴}\sin^۲ ۲t+\frac{a^۲}{۴}(۱+\cos^۲ ۲t-۲\cos ۲t)+a^۲\cos^۲ t=a^۲$$

و

$$ay+z^۲=a^۲\sin^۲ t+a^۲\cos^۲ t=a^۲$$

مسیر حرکت فصل مشترک کره $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ و استوانه $ay+z^۲=a^۲$ (یا $x^۲+y^۲=ay$) است.



سوال۶

خم‌های زیر را پارامتری کنید.

الف) $\begin{cases} x+y=1 \\ z=\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ 2x-4y-z-1=0 \end{cases}$

ج) تقاطع دو رویه‌ی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ و $z=x^2y^2$.

الف) $\begin{cases} x+y=۱ \\ z=\sqrt{۱-x^{۲}-y^{۲}} \end{cases}$

$$x=t \longrightarrow y=۱-t \longrightarrow z=\sqrt{۱-t^{۲}-(۱-t)^{۲}}=\sqrt{۲t-۲t^{۲}}$$

$$r(t)=(t,۱-t,\sqrt{۲t-۲t^{۲}})$$

ب) $\begin{cases} z = x^۲ + y^۲ \\ ۲x - ۴y - z - ۱ = ۰ \end{cases}$

پاسخ:

با قرار دادن z از خم اول در خم دوم داریم:

$$۲x - ۴y - x^۲ - y^۲ - ۱ = ۰ \longrightarrow (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$$

$$x = ۱ + ۲\cos t\ ,\ y = -۲ + ۲\sin t \ \rightarrow\ z = ۲(۱+۲\cos t) - ۴(-۲+۲\sin t) - ۱ = ۴\cos t - ۸\sin t + ۹ = \sqrt{۲t - ۲t^۲}$$

در نتیجه:

$$r(t) = (۱ + ۲\cos t, -۲ + ۲\sin t, ۴\cos t - ۸\sin t + ۹)$$

ج) تقاطع دو رویه‌ی $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$ و $z = x^۲ y^۲$.

پاسخ:

$$x = a\cos^۳ t \ , \ \ y = a\sin^۳ t \ \ \rightarrow \ \ z = (a^۲ \cos^۳ t \sin^۳ t)^۲ = \frac{a^۴}{۶۴} \sin^۶ ۲t$$

در نتیجه:

$$r(t) = (a\cos^۳ t, a\sin^۳ t, \frac{a^۴}{۶۴} \sin^۶ ۲t)$$

سوال۷

خم فصل مشترک کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و استوانه بیضوی $x^۲ + ۲z^۲ = ۱$ را توصیف کرده و طول خم مشترک را بیابید.

پاسخ:

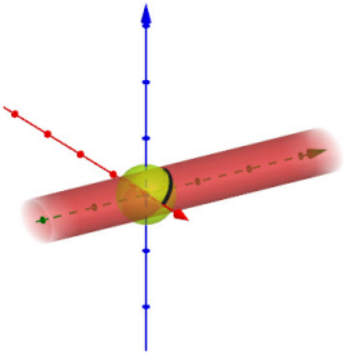
خم ایجاد شده در ۸ ناحیه کاملا متقارن است لذا فقط یک ناحیه را محاسبه کرده و در نهایت ۸ برابر می‌کنیم:

$$x = \cos t \ , \ z = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \sin t \ \rightarrow \ y = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \sin t \qquad\qquad (۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲})$$

لذا $r(t) = (\cos t, \frac{۱}{\sqrt{۲}} \sin t, \frac{۱}{\sqrt{۲}} \sin t)$.

در نتیجه:

$$s = ۸ \times \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{(x'(t))^۲ + (y'(t))^۲ + (z'(t))^۲} dt = ۸ \times \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{\sin^۲ t + \frac{۱}{۲} \cos^۲ t + \frac{۱}{۲} \cos^۲ t} dt = ۸ \times \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} dt = ۴\pi$$



سوال۸

خم‌های زیر را بر حسب طول قوس پارامتری کنید.

الف) $r(t) = (a\cos^{۳} t, a\sin^{۳} t, b\cos ۲t), \qquad (۰ \le t \le \frac{\pi}{۲})$

ب) $r(t) = \left(\int_{۰}^{t} \sin(\frac{ks^{۲}}{۲})ds, \int_{۰}^{t} \cos(\frac{ks^{۲}}{۲})ds \right)$

ج) $r(t) = \left(t, \int_{۰}^{t} \sin(\frac{ks^{۲}}{۲})ds, \int_{۰}^{t} \cos(\frac{ks^{۲}}{۲})ds \right)$

الف) $r(t) = (a\cos^{۳} t, a\sin^{۳} t, b\cos ۲t), \qquad (۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲})$

پاسخ:

$$v(t) = (-۳a\cos^{۲} t\sin t, ۳a\sin^{۲} t\cos t, -۲b\sin ۲t)$$

$$|v(t)| = \sqrt{۹a^{۲}\cos^{۴} t\sin^{۲} t + ۹a^{۲}\sin^{۴} t\cos^{۲} t + ۱۶b^{۲}\sin^{۲} t\cos^{۲} t} = \sqrt{۹a^{۲} + ۱۶b^{۲}}\sin t\cos t$$

$$s = \int_{۰}^{t} \sqrt{۹a^{۲} + ۱۶b^{۲}}\sin u\cos u du = \frac{۱}{۲}\sqrt{۹a^{۲} + ۱۶b^{۲}}\sin^{۲} t = A\sin^{۲} t$$

در نتیجه:

$$\sin^{۲} t = \frac{s}{A} \quad \rightarrow \quad \sin t\sqrt{\frac{s}{A}}, \ \cos t = \sqrt{۱ - \frac{s}{A}} \quad \rightarrow \cos ۲t = ۱ - ۲\frac{s}{A}$$

لذا:

$$r(s) = \left(a(۱ - \frac{s}{A})^{\frac{۳}{۲}}, a(\frac{s}{A})^{\frac{۳}{۲}}, b(۱ - ۲\frac{s}{A})\right)$$

ب) $r(t) = \left(\int_۰^t \sin(\frac{ks^۲}{۲})ds, \int_۰^t \cos(\frac{ks^۲}{۲})ds \right)$

$$v(t) = \left(\sin(\tfrac{ks^۲}{۲}), \cos(\tfrac{ks^۲}{۲})\right) \quad \longrightarrow \quad |v(t)| = ۱ \quad \longrightarrow \quad s = \int_۰^t dt = t$$

$$r(s) = \left(\int_۰^s \sin(\frac{ku^۲}{۲})du, \int_۰^s \cos(\frac{ku^۲}{۲})du \right)$$

ج) $r(t) = \left(t, \int_۰^t \sin(\frac{ks^۲}{۲})ds, \int_۰^t \cos(\frac{ks^۲}{۲})ds\right)$

$$v(t) = \left(۱, \sin(\frac{ks^۲}{۲}), \cos(\frac{ks^۲}{۲})\right) \quad \longrightarrow \quad |v(t)| = \sqrt{۲} \quad \longrightarrow \quad s = \int_۰^t \sqrt{۲}dt = \sqrt{۲}t \quad \longrightarrow$$

$$r(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{۲}}, \int_۰^{\frac{s}{\sqrt{۲}}} \sin(\frac{ku^۲}{۲})du, \int_۰^{\frac{s}{\sqrt{۲}}} \cos(\frac{ku^۲}{۲})du\right)$$

سوال۹

خمیدگی و تاب خم پارامتری زیر را در نقطه‌ی دلخواه t بیابید.

$$\begin{cases} x = ۲ + \sqrt{۲}\cos t \\ y = ۱ - \sin t \\ z = ۳ + \sin t \end{cases}$$

پاسخ:

$$r(t) = (۲ + \sqrt{۲}\cos t, ۱ - \sin t, ۳ + \sin t)$$

$$v(t) = (-\sqrt{۲}\sin t, -\cos t, \cos t) \ \rightarrow \ |v| = \sqrt{۲}$$

$$a(t) = (-\sqrt{۲}\cos t, \sin t, -\sin t)$$

$$\frac{da}{dt} = (\sqrt{۲}\sin t, \cos t, -\cos t) \ \rightarrow \ |v| = \sqrt{۲}$$

$$\kappa = \frac{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|^{۳}} = \frac{|(۰, -\sqrt{۲}, -\sqrt{۲})|}{\sqrt{۲}^{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tau = \frac{(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{a}) \cdot (\frac{da}{dt})}{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{a}|^{۲}} = \frac{-\sqrt{۲}\cos t + \sqrt{۲}\cos t}{|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{a}|^{۲}} = ۰$$

سوال۱۰

خم $\gamma(t) = \left(۴\cos(۳t), ۴\sin(۳t), ۳\cos(۲t)\right)$ مفروض است. مطلوب است محاسبه‌ی $T(\circ), N(\circ), B(\circ), \kappa(\circ), \tau(\circ)$.

پاسخ:

$$T(t)=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|},\qquad B(t)=\frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|},\qquad N(t)=B(t)\times T(t),$$

$$\kappa=\frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^{۳}},\qquad \tau=\frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t))\cdot\gamma'''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^{۲}}$$

$$\gamma(t)=\big(۴\cos(۳t),۴\sin(۳t),۳\cos(۲t)\big)$$

$$\gamma'(t)=\big(-۱۲\sin(۳t),۱۲\cos(۳t),-۶\sin(۲t)\big)\quad\longrightarrow\quad\gamma'(۰)=(۰,۱۲,۰)$$

$$\gamma''(t)=\big(-۳۶\cos(۳t),-۳۶\sin(۳t),-۱۲\cos(۲t)\big)\quad\longrightarrow\quad\gamma''(۰)=(-۳۶,۰,۱۲)$$

$$\gamma'''(t)=\big(۱۰۸\sin(۳t),-۱۰۸\cos(۳t),۲۴\sin(۲t)\big)\quad\longrightarrow\quad\gamma'''(۰)=(۰,-۱۰۸,۰)$$

$$\gamma'(۰) \times \gamma''(۰) = (-۱۴۴, ۰, ۳(۱۴۴))$$

$$(\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)) \cdot \gamma'''(۰) = (-۱۴۴, ۰, ۳(۱۴۴)) \cdot (۰, -۱۰۸, ۰) = ۰ \longrightarrow \tau(۰) = ۰$$

$$|\gamma'(۰)| = ۱۲$$

$$|\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)| = \sqrt{۱۴۴^۲ + ۹(۱۴۴^۲)} = ۱۴۴\sqrt{۱۰}$$

$$T(۰) = \frac{(۰, ۱۲, ۰)}{۱۲} = (۰, ۱, ۰)$$

$$B(۰) = \frac{(-۱۴۴, ۰, ۳(۱۴۴))}{۱۴۴\sqrt{۱۰}} = (\frac{-۱}{\sqrt{۱۰}}, ۰, \frac{۳}{\sqrt{۱۰}})$$

$$N(t) = B(t) \times T(t) = (\frac{-۳}{\sqrt{۱۰}}, ۰, \frac{-۱}{\sqrt{۱۰}})$$

$$\kappa(۰) = \frac{۱۴۴\sqrt{۱۰}}{۱۲^۳} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۱۲}$$

سوال۱۱

منحنی حاصل از فصل مشترک دو رویه $x^۲ + y^۲ = z - ۱$ و $۴x^۲ + ۹y^۲ = ۹$ را بر حسب t پارامتری کنید.
برای خم پارامتری حاصل از قسمت آ ، مقادیر B, κ, τ, N را در $t = ۰$ محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\frac{x^{۲}}{۹}+\frac{y^{۲}}{۴}=\frac{۱}{۴} \quad \longrightarrow \quad x=\frac{۳}{۲}\cos t \quad ,y=\sin t \quad ,z=-\frac{۵}{۴}\cos^{۲} t$$

$$\gamma(t)=(\frac{۳}{۲}\cos t,\sin t,\frac{۵}{۴}\cos^{۲} t)$$

$$\gamma'(t)=(-\frac{۳}{۲}\sin t,\cos t,\frac{۵}{۴}\sin ۲t) \quad \longrightarrow \quad \gamma'(۰)=(۰,۱,۰)$$

$$\gamma''(t)=(\frac{۳}{۲}\cos t,-\sin t,\frac{۵}{۲}\cos^{۲} t) \quad \longrightarrow \quad \gamma''(۰)=(-\frac{۳}{۲},۰,\frac{۵}{۲})$$

$$\gamma'''(t)=(\frac{۳}{۲}\sin t,-\cos t,-۵\sin ۲t) \quad \longrightarrow \quad \gamma'''(۰)=(۰,-۱,۰)$$

$$\gamma'(۰)\times\gamma''(۰)=(\frac{۵}{۲},۰,\frac{۳}{۲}) \quad , \quad |\gamma'(۰)\times\gamma''(۰)|=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}+\frac{۹}{۴}}=\frac{\sqrt{۳۴}}{۲}$$

$$|\gamma'(۰)|=۱$$

$$(\gamma'(۰)\times\gamma''(۰)).\gamma'''(۰)=(\frac{۵}{۲},۰,\frac{۳}{۲})\cdot(۰,-۱,۰)=۰ \quad \rightarrow \quad \tau(۰)=۰$$

$$T(۰) = \frac{\gamma'(۰)}{|\gamma'(۰)|} = (۰, ۱, ۰)$$

$$B(۰) = \frac{\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)}{|\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)|} = \frac{(\frac{۵}{۲}, ۰, \frac{۳}{۲})}{\frac{\sqrt{۳۴}}{۲}} = (\frac{۵}{\sqrt{۳۴}}, ۰, \frac{۳}{\sqrt{۳۴}})$$

$$N(۰) = B(۰) \times T(۰) = (\frac{-۳}{\sqrt{۳۴}}, ۰, \frac{۵}{\sqrt{۳۴}})$$

$$\kappa(۰) = \frac{|\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)|}{|\gamma'(۰)|^{۳}} = \frac{\sqrt{۳۴}}{۲}$$

سوال۱۲

الف) نشان دهید:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\times\frac{d^2u}{dt^2}\right)=\frac{du}{dt}\times\frac{d^3u}{dt^3}$$

ب) محاسبه و ساده کنید:

$$\frac{d}{dt}\left(u\times(\frac{du}{dt}\times\frac{d^2u}{dt^2})\right)$$

الف) نشان دهید:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\times\frac{d^2u}{dt^2}\right)=\frac{du}{dt}\times\frac{d^3u}{dt^3}$$

پاسخ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\times\frac{d^2u}{dt^2}\right)=\left(\frac{d^2u}{dt^2}\times\frac{d^2u}{dt^2}\right)+\frac{du}{dt}\times\frac{d^3u}{dt^3}=\frac{du}{dt}\times\frac{d^3u}{dt^3}$$

دقت کنید ضرب خارجی دو بردار موازی صفر می‌باشد، ($\frac{d^2u}{dt^2}\times\frac{d^2u}{dt^2}=0$) .

ب) محاسبه و ساده کنید:

$$\frac{d}{dt}\left(u \times (\frac{du}{dt} \times \frac{d^{۲}u}{dt^{۲}})\right)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(u \times (\frac{du}{dt} \times \frac{d^{۲}u}{dt^{۲}})\right) &= \frac{du}{dt} \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^{۲}u}{dt^{۲}}\right) + u \times \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^{۲}u}{dt^{۲}}\right) \\
&= \frac{du}{dt} \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^{۲}u}{dt^{۲}}\right) + u \times \left(\frac{d^{۲}u}{dt^{۲}} \times \frac{d^{۲}u}{dt^{۲}}\right) + u \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^{۳}u}{dt^{۳}}\right) \\
&= \frac{du}{dt} \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^{۲}u}{dt^{۲}}\right) + u \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^{۳}u}{dt^{۳}}\right)
\end{aligned}$$

سوال۱۳

فرض کنید خم γ بر حسب طول قوس پارامتری شده است و سه بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت مقدار $|\gamma'''(s) \times \frac{dN}{ds}|$ را محاسبه کنید

پاسخ:

$$\gamma^{'''}(s) \times \frac{dN}{ds} = (\kappa N(s))' \times \frac{dN}{ds}$$

$$= \Big(\kappa N'(s) + \kappa' N(s)\Big) \times N'(s)$$

$$= \kappa'(s) N(s) \times N'(s)$$

$$= \kappa'(s) N(s) \times \big(-\kappa'(s) T(s) + \tau(s) B(s)\big)$$

$$= -\kappa'(s)\kappa(s)\big(N(s) \times T(s) + \kappa'(s)\tau(s)\big(N(s) \times B(s)\big)$$

$$= \kappa'(s)\kappa(s) B(s) + \kappa'(s)\tau(s) T(s)$$

در نتیجه :

$$|\, \gamma^{'''}(s) \times \frac{dN}{ds} \,| = \sqrt{\kappa^{۲}\kappa'^{۲} + \kappa'^{۲}\tau^{۲}}$$

سوال۱۴

کنج فرنه و مقادیر تاب و انحنا را برای منحنی $\gamma(t) = (\cos t \sin t, \sin^{۲} t, \cos t)$ در لحظه‌ی $t = ۰$ به دست آورید.

پاسخ :

$$\gamma'(t) = (\cos ۲t, \sin ۲t, -\sin t) \quad \longrightarrow \quad \gamma'(۰) = (۱, ۰, ۰) \quad \longrightarrow \quad |\gamma'(۰)| = ۱$$

$$\gamma''(t) = (-۲\sin ۲t, ۲\cos ۲t, -\cos t) \quad \longrightarrow \quad \gamma''(۰) = (۰, ۲, -۱)$$

$$\gamma'''(t) = (-۴\cos ۲t, ۴\sin ۲t, \sin t) \quad \longrightarrow \quad \gamma'''(۰) = (-۴, ۰, ۰)$$

$$\gamma'(۰) \times \gamma''(۰) = (۰, ۱, ۲) \quad \longrightarrow \quad |\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)| = \sqrt{۵}$$

$$T(۰) = \frac{\gamma'(۰)}{|\gamma'(۰)|} = (۱, ۰, ۰)$$

$$B(۰) = \frac{\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)}{|\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)|} = (۰, \frac{۱}{\sqrt{۵}}, \frac{۲}{\sqrt{۵}})$$

$$N(۰) = B(۰) \times T(۰) = (۰, \frac{۲}{\sqrt{۵}}, \frac{۱}{\sqrt{۵}})$$

$$\kappa(۰) = \frac{\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)}{|\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)|^۳} = \frac{\sqrt{۵}}{۱} = \sqrt{۵}$$

$$\tau(۰) = \frac{(\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)).\gamma'''(۰)}{|\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)|^۲} = ۰ \,.$$

سوال۱۵

منحنی فصل مشترک دو رویه زیر را در نظر بگیرید و طول قوس ، کنج فرنه و تاب خم را به دست آورید.

$$\begin{cases} \sqrt{۳}y + z = ۱ \\ x^۲ + ۴y^۲ = ۴ \end{cases}$$

پاسخ:

$$x = ۲\cos t \quad , y = \sin t \quad \longrightarrow \quad z = ۱ - \sqrt{۳}\sin t$$

$$\gamma(t) = (۲\cos t, \sin t, ۱ - \sqrt{۳}\sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-۲\sin t, \cos t, -\sqrt{۳}\cos t) \quad \longrightarrow \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{۴\sin^۲ t + \cos^۲ t + ۳\cos^۲ t} = ۲$$

$$\gamma''(t) = (-۲\cos t, -\sin t, \sqrt{۳}\sin t)$$

$$\gamma'''(t) = (۲\sin t, -\cos t, \sqrt{۳}\cos t)$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (۰, ۲\sqrt{۳}, ۲) \quad \longrightarrow \quad |\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = ۴$$

$$s = \int_۰^{۲\pi} |\gamma'(t)| \; dt = ۲ \times ۲\pi = ۴\pi$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\ \gamma'(t)\ |} = (-\sin t, \frac{۱}{۲}\cos t, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos t)$$

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\ \gamma'(t) \times \gamma''(t)\ |} = (۰, \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$$

$$N(t) = B(t) \times T(t) = (-\cos t, \frac{-۱}{۲}\sin t, \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\ \gamma'(t) \times \gamma''(t)\ |}{|\ \gamma'(t)\ |^{۳}} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\ \gamma'(t) \times \gamma''(t)\ |^{۲}} = ۰\ .$$

سوال۱۶

برای منحنی $\gamma(t) = (t - \frac{t^۳}{۳}, t^۲, t + \frac{t^۳}{۳})$ نشان دهید:

$$\kappa = \tau = \frac{۱}{(۱ + t^۲)^۲}$$

پاسخ:

$$\gamma'(t) = (1 - t^2, 2t, 1 + t^2) \quad \longrightarrow \quad \gamma''(t) = (-2t, 2, 2t) \quad \longrightarrow \quad \gamma'''(t) = (-2, 0, 2)$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (2t^2 - 2, -4t, 2t^2 + 2)$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(1 - t^2)^2 + 4t^2 + (1 + t^2)^2} = \sqrt{2t^4 + 4t^2 + 2} = \sqrt{2}(t^2 + 1)$$

$$|\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = \sqrt{(2t^2 - 2)^2 + 16t^2 + (2t^2 + 2)^2} = \sqrt{8t^4 + 16t^2 + 8} = 2\sqrt{2}(1 + t^2)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{2}(1 + t^2)}{2\sqrt{2}(t^2 + 1)^3} = \frac{1}{(1 + t^2)^2}$$

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2} = \frac{-4t^2 + 4 + 4t^2 + 4}{8(1 + t^2)^2} = \frac{1}{(1 + t^2)^2}$$

پس:

$$\tau = \kappa = \frac{1}{(1 + t^2)^2} \ .$$

سوال۱۷

ثابت کنید یک منحنی در صفحه با معادله پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ دارای انحنای زیر است:

$$\kappa = \frac{| x' y'' - y' x'' |}{(x'^{۲} + y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} .$$

پاسخ:

با توجه به معادله پارامتری فوق داریم:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), ۰)$$

در نتیجه:

$$\gamma'(t) = (x', y', ۰)$$

$$\gamma''(t) = (x'', y'', ۰)$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (۰, ۰, x'y'' - y'x'')$$

$$| \gamma'(t) | = \sqrt{x'^{۲} + y'^{۲}}$$

$$| \gamma'(t) \times \gamma''(t) | = | x'y'' - y'x'' |$$

پس:

$$\kappa = \frac{| x'y'' - y'x'' |}{(x'^{۲} + y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

سوال۱۸

خم C با معدله پارامتری $\gamma(t) = (t, ۱ + t, \sqrt{۱ - ۲t^۲})$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید انحنای این خم در همه نقاط مقداری ثابت است.

ب) ثابت کنید این خم مسطح است و معادله صفحه شامل این خم را بنویسید.

پاسخ الف:

$$\gamma'(t) = (۱, ۱, \frac{-۲t}{\sqrt{۱-۲t^۲}}) \longrightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{۲ + \frac{۴t^۲}{۱-۲t^۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱-۲t^۲}}$$

$$\gamma''(t) = (۰, ۰, \frac{-۲}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۳}{۲}}})$$

$$\gamma'''(t) = (۰, ۰, \frac{-۱۲t}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۵}{۲}}})$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (\frac{-۲}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۳}{۲}}}, \frac{۲}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۳}{۲}}}, ۰) \longrightarrow |\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = \frac{۲\sqrt{۲}}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\kappa = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳} = \frac{۲\sqrt{۲}(۱-۲t^۲)^{\frac{-۳}{۲}}}{۲\sqrt{۲}(۱-۲t^۲)^{\frac{-۳}{۲}}} = ۱$$

ب :

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\ \gamma'(t) \times \gamma''(t)\ |} = ۰$$

از انجاکه $\tau(t) = ۰$ ، لذا خم مذکور مسطح است و خم در صفحه‌ی بوسان قرار می‌گیرد. از طرفی

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{(|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|} = (\frac{-۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰)$$

در نتیجه نرمال صفحه بوسان برابر است با $(-۱, ۱, ۰)$ و نقطه $(۰, ۱, ۱) = \gamma(۰)$ یک نقطه روی خم است پس معادله‌ی صفحه بوسان برابر است با:

$$-(x - ۰) + (y - ۱) = ۰ \quad \longrightarrow \quad y - x = ۱$$

سوال۱۹

نشان دهید خم منحنی $r = f(\theta)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\kappa(\theta) = \frac{|\, 2(f(\theta)^{2} + (f(\theta)^{2}) - f(\theta) f^{6}(\theta) \,|}{[(f'(\theta)^{2} + (f(\theta))^{2}]^{\frac{3}{2}}} \;.$$

پاسخ:

$$\gamma(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta, ۰)$$

$$\gamma'(\theta) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, f'(\theta)\sin\theta + f(\theta), ۰)$$

$$|\gamma'(\theta)| = (f'^{۲}(\theta) + f^{۲}(\theta))^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\gamma''(\theta) = (f''(\theta)\cos\theta - ۲f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta, f''(\theta)\sin\theta + ۲f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, ۰)$$

$$\gamma'(\theta) \times \gamma''(\theta) = (۰, ۰, ۲f'^{۲}(\theta) + f^{۲}(\theta) - f(\theta)f''(\theta))$$

$$\kappa = \frac{\gamma'(\theta) \times \gamma''(\theta)}{|\gamma'(\theta)|^{۳}} = \frac{|۲f'^{۲}(\theta) + f^{۲}(\theta) - f(\theta)f''(\theta)|}{(f'^{۲}(\theta) + f^{۲}(\theta))^{\frac{۳}{۲}}}$$

با تشکر از توجه شما