تمرینات سری سوم: مشتقات جزیی و کاربردها

۱۵ فروردین ۱۴۰۳

سوال۱

نشان دهید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{۲xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در $(۰,۰)$ پیوسته نیست. بنابراین نمودار تابع در این نقطه هموار نیست. با وجود این نشان دهید $f_۱(x,y)$ و $f_۲(x,y)$ هر دو وجود دارند. پس وجود مشتقات جزیی تابعی چند متغیره، مستلزم پیوستگی آن نیست. این امر با حالت تک متغیره تفاوت دارد.

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

باید دو مسیر دلخواه و متفاوت ارائه دهیم که مقادیر حد برای این دو مسیر متفاوت باشد.

مسیر اول را $x = 0$ وقتی $y \to 0$ در نظر می‌گیریم, داریم

$$I_1 = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

مسیر دوم را $x = y$ در نظر می‌گیریم, داریم

$$I_2 = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1.$$

$I_1 \neq I_2$ بنابراین تابع در $(0,0)$ حد ندارد, در نتیجه پیوسته نیست

پاسخ سوال ۱

برای محاسبه $f_1(x,y)$ در $(x,y)\neq(0,0)$ از ضابطه تابع نسبت به x مشتق می‌گیریم و برای نقطه $(x,y)=(0,0)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f_1(x,y)\big|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{2y(x^2+y^2)-2x(2xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2yx^2+2y^3-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

در نتیجه

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

به همین صورت $f_۲(x,y)$ را بدست می‌آوریم.

$$f_۲(x,y)|_{(x,y)\neq(\circ,\circ)} = \frac{۲x(x^۲+y^۲)-۲y(۲xy)}{(x^۲+y^۲)^۲}$$
$$= \frac{۲xy^۲+۲x^۳-۴y^۲x}{(x^۲+y^۲)^۲} = \frac{۲x^۳-۲y^۲x}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$f_۲(\circ,\circ) = \lim_{h\to\circ}\frac{f(\circ,\circ+h)-f(\circ,\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ}\frac{\circ-\circ}{h} = \circ$$

در نتیجه

$$f_۲\,(x,y) = \begin{cases} \frac{۲x^۳-۲y^۲x}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(\circ,\circ) \\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ) \end{cases}$$

پس وجود مشتقات جزئی، پیوستگی تابع را نتیجه نمی‌دهد.

سوال۲

(آدامز بخش ۳ − ۱۲ سوال۳۷) اگر

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^{3}+y)\sin\frac{1}{x^{2}+y^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مطلوبست تعیین $f_1(0,0)$ و $f_2(0,0)$ در صورت وجود.

پاسخ سوال ۲

$$f_{۱}(x_{\circ}, y_{\circ}) = \lim_{h \to \circ} \frac{f(x_{\circ} + h, y_{\circ}) - f(x_{\circ}, y_{\circ})}{h}$$

$$f_{۲}(x_{\circ}, y_{\circ}) = \lim_{h \to \circ} \frac{f(x_{\circ}, y_{\circ} + h) - f(x_{\circ}, y_{\circ})}{h}$$

حال برای نقطه $(x_\circ, y_\circ) = (\circ, \circ)$ داریم

$$f_1(\circ,\circ) = \lim_{h\to\circ} \frac{f(\circ+h,\circ)-f(\circ,\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ} \frac{(h^3+\circ)\sin(\frac{1}{h^2})-\circ}{h}$$
$$= \lim_{h\to\circ} \frac{h^3\sin(\frac{1}{h^2})}{h} = \lim_{h\to\circ} h^2\sin(\frac{1}{h^2}) = \circ$$

و

$$f_2(\circ,\circ) = \lim_{h\to\circ} \frac{f(\circ,\circ+h)-f(\circ,\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ} \frac{h\sin(\frac{1}{h^2})}{h} = \lim_{h\to\circ} \sin(\frac{1}{h^2})$$

حد بالا وجود ندارد. (دنباله‌های $a_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ و $b_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}$ در نظر بگیرید. روی دنباله a_n تابع به صفر و روی دنباله b_n به یک میل می‌کند)

سوال۳

نشان دهید که تابع با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases}$ در $(\circ, \circ)$ پیوسته است و مشتقات جزیی در این نقطه وجود دارند اما تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. درباره $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\circ, \circ)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\circ, \circ)$ چه می توان گفت؟

پاسخ سوال ۳

برای اثبات پیوستگی: با توجه به ضابطه تابع داریم $|f(x,y)| = |x|$,

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} |x| = ۰$$

بنا بر قضیه $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = ۰$ و چون مقدار حد تابع در $(۰,۰)$ برابر با مقدار تابع در این نقطه است, پس تابع در $(۰,۰)$ پیوسته است. حال مشتقات جزئی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۰+h,۰) - f(۰,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{-h-۰}{h} = -۱$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۰,۰+h) - f(۰,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{۰-۰}{h} = ۰$$

می‌دانیم تابع $f(x,y)$ در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است اگر و تنها اگر

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)} \frac{f(۰+h,۰+k) - f(۰,۰) - h\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) - k\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)}{\sqrt{h^۲+k^۲}} = ۰$$

حال حد بالا را برای تابع مورد نظر محاسبه می‌کنیم

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)} \frac{f(h,k)-۰-h(-۱)-k(۰)}{\sqrt{h^۲+k^۲}} = \lim_{(h,k)\to(۰,۰)} \frac{f(h,k)+h}{\sqrt{h^۲+k^۲}}$$

مسیر اول را $h=۰$ وقتی $k\to ۰$ در نظر می‌گیریم

$$\lim_{k\to ۰} \frac{f(۰,k)+۰}{\sqrt{k^۲}} = \lim_{k\to ۰} \frac{۰}{|k|} = ۰$$

مسیر دوم را $h=k, h>۰$ در نظر می‌گیریم

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(h,h)+h}{\sqrt{۲h^۲}} = \lim_{h\to ۰} \frac{۲h}{\sqrt{۲}h} = \frac{۲}{\sqrt{۲}}$$

روی دو مسیر مختلف مقدار حد ها با هم برابر نبودند پس حد بالا موجود نیست و در نتیجه تابع در $(۰,۰)$ مشتق پذیر نیست

برای بدست آوردن $(\circ,\circ)\ \frac{\partial^{2} f}{\partial y \partial x}$, $(\circ,\circ)\ \frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}$ باید تابع $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ را بدست آوریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} ١ & |x|<|y| \\ -١ & |x|>|y| \ \ or \ \ x=y=\circ \end{cases}$$

برای حالت $x=y\neq\circ$ مشتق جزئی نسبت به x وجود ندارد زیرا:

$$۱) x = y = a > ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h}$$

$$۱) \lim_{h \to ۰^+} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h \to ۰^+} \frac{-a-h-a}{h} = -\infty$$

$$۲) \lim_{h \to ۰^-} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h \to ۰^-} \frac{a+h-a}{h} = ۱$$

$$۲) x = y = a < ۰$$

$$۱) \lim_{h \to ۰^+} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h \to ۰^+} \frac{a+h-a}{h} = ۱$$

$$۲) \lim_{h \to ۰^-} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h \to ۰^-} \frac{-a-h-a}{h} = \infty$$

برای حالت $x = -y \neq ۰$ نیز مشتق جزئی نسبت به x وجود ندارد زیرا

$$۱)y = -a, x = a, a > ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h}$$

$$۱) \lim_{h\to ۰^+} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h} = \lim_{h\to ۰^+} \frac{-a-h-a}{h} = \infty$$

$$۲) \lim_{h\to ۰^-} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h} = \lim_{h\to ۰^-} \frac{a+h-a}{h} = ۱$$

$$۲)y = -a, x = a, a < ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, -a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h, -a) - f(a, -a)}{h}$$

$$۱) \lim_{h \to ۰^+} \frac{f(a+h, -a) - f(a, -a)}{h} = \lim_{h \to ۰^+} \frac{a+h-a}{h} = ۱$$

$$۲) \lim_{h \to ۰^-} \frac{f(a+h, -a) - f(a, -a)}{h} = \lim_{h \to ۰^-} \frac{-a-h-a}{h} = -\infty$$

مشابه قسمت قبل می توان نشان داد برای نقاطی که $|y| = |x|$ و $(x, y) \neq (۰, ۰)$
مشتق دوم وجود ندارد.

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} \text{وجود ندارد} & x=y\neq 0\\ 0 & x\neq y, x=y=0\end{cases}$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-(-1)}{h}=\infty$$

سوال۴

(آدامز بخش ۳ − ۱۲ سوال ۲۱)معادله صفحه مماس و خط قائم بر نمودار تابع $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ را در نقطه $(۱, -۱)$ بیابید.

معادله نمودار تابع برابر است با $z = \arctan(\frac{y}{x})$, پس در نقطه‌ی $(۱, -۱)$, $z = -\frac{\pi}{۴}$ است. پس نقطه‌ی مورد نظر $p = (۱, -۱, -\frac{\pi}{۴})$ است. برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی مماس, بردار نرمال صفحه را لازم داریم, که می‌توانیم از بردار گرادیان رویه F در نقطه p استفاده کنیم.

$$F(x, y, z) = z - \arctan(\frac{y}{x})$$

$$\begin{aligned}
\nabla F(۱, -۱, -\frac{\pi}{۴}) &= (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})|_{(۱,-۱,-\frac{\pi}{۴})} \\
&= (-\frac{\frac{-y}{x^۲}}{۱ + \frac{y^۲}{x^۲}}, -\frac{\frac{۱}{x}}{۱ + \frac{y^۲}{x^۲}}, ۱)|_{(۱,-۱,-\frac{\pi}{۴})} \\
&= (-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, ۱)
\end{aligned}$$

بنابراین معادله صفحه مماس برابر است با

$$-\frac{۱}{۲}(x - ۱) - \frac{۱}{۲}(y + ۱) + (z + \frac{\pi}{۴}) = ۰,$$

همچنین بردار گرادیان, بردار هادی خط قائم در نقطه‌ی p است. بنابراین معادله خط قائم برابر است با

$$\frac{x-۱}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{y+۱}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{z+\frac{\pi}{۴}}{۱}.$$

یادآوری:

$$(\arctan u)'=\frac{u'}{۱+u^{۲}}.$$

سوال۵

(آدامز بخش ۳ − ۱۲ سوال۲۳) مختصات همه نقاط متعلق به رویه دارای معادله ۲ − $z = x^۴ - ۴xy^۳ + ۶y^۲$ را بیابید که در آنها این رویه دارای صفحه مماس افقی هست.

باید نقاطی را بیابیم که مولفه اول و دوم بردار گرادیان در آن نقطه‌ها برابر با صفر باشد زیرا در این صورت معادله صفحه مماس به صورت $z = c$ است که c عددی ثابت است.
بردار گرادیان رویه $F(x, y, z) = x^{۴} - ۴xy^{۳} + ۶y^{۲} - ۲ - z$ برابر است با

$$\nabla F(x, y, z) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) = (۴x^{۳} - ۴y^{۳}, -۱۲xy^{۲} + ۱۲y, -۱)$$
$$= (۴(x - y)(x^{۲} + xy + y^{۲}), ۱۲y(۱ - xy), -۱)$$

صفحه مماس در نقاطی که $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}$ صفر هستند افقی است. پس باید معادله های زیر را حل کنیم:

$$۴(x - y)(x^{۲} + xy + y^{۲}) = ۰, \qquad ۱۲y(۱ - xy) = ۰$$

از صفر بودن معادله دوم داریم $y = ۰$ یا $۱ - xy = ۰$

1. اگر $y = ۰$ باشد, از معادله اول نتیجه می‌شود $x = ۰$ است بنابراین نقطه $(۰, ۰)$ را داریم.

2. اگر $xy = ۱$ باشد از معادله اول داریم

$$x^{۲} + x(\frac{۱}{x}) + \frac{۱}{x^{۲}} = ۰$$

یا

$$x - \frac{۱}{x} = ۰$$

. عبارت $\frac{۱}{x^{۲}} + ۱ + x^{۲}$ همواره ناصفر است. بنابراین باید $۰ = \frac{۱}{x} - x$ باشد. درنتیجه $x^{۲} = ۱$ یعنی $x = \pm ۱$ پس نقاط $(۱, ۱)$ و $(-۱, -۱)$ را داریم.
بنابراین صفحه مماس در نقاط $(۰, ۰)$, $(۱, ۱)$ و $(-۱, -۱)$ افقی است.

سوال۶

(آدامز بخش ۳ − ۱۲سوال۲۶، ۲۹) نشان دهید هر یک از توابع زیر در معادله دیفرانسیل جزیی داده شده صدق می کند.

$$z = \frac{x+y}{x-y}; \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۰,$$
$$w = \frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲}; \quad x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = -۲w.$$

ابتدا تابع $z = \frac{x+y}{x-y}$ را در نظر می‌گیریم. حال، با توجه به قواعد مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x-y)(1)-(x+y)(1)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x-y)(1)-(x+y)(-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{-2y}{(x-y)^2} + y\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{-2xy}{(x-y)^2} + \frac{2xy}{(x-y)^2} = 0.$$

اکنون تابع $w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ را در نظر می‌گیریم. برای این تابع داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} & x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} \\ &= x\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + y\frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + z\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ &= \frac{-2x^2-2y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -2\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -2w. \end{aligned}$$

سوال۷

(آدامز بخش ۳ − ۱۲سوال ۳۰) اگر $z = f\left(x^{۲} + y^{۲}\right)$ که در آن f یک تابع یک متغیره مشتق پذیر دلخواه است، نشان دهیددر معادله دیفرانسیل جزیی داده شده زیر صدق می کند.

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

با توجه به رابطه‌ی $z = f\left(x^۲ + y^۲\right)$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۲x\, f'(x^۲ + y^۲),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = ۲y\, f'(x^۲ + y^۲).$$

در نتیجه با توجه روابط بالا، داریم:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = ۲xy\, f'(x^۲ + y^۲) - ۲xy\, f'(x^۲ + y^۲) = ۰$$

سوال۸

(آدامز بخش ۳ − ۱۲سوال۳۴) فاصله نقطه $(۱, ۱, ۰)$ از سهمی‌وار دایره ای به معادله $z = x^۲ + y^۲$ را بیابید

راه حل اول:

فرض کنیم نقطه‌ی $Q=(u_\circ, v_\circ, w_\circ)$ ، نقطه‌ای روی سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ باشد که نسبت به نقاط دیگر، کم‌ترین فاصله را از این سهمی‌وار تا نقطه‌ی $P=(1,1,0)$ دارد. (یعنی کم‌ترین فاصله‌ی P تا سهمی‌وار، در نقطه‌ی Q ایجاد می‌شود.) در این‌صورت، بردارِ $\vec{PQ}=(u_\circ-1)\vec{i}+(v_\circ-1)\vec{j}+w_\circ\vec{k}$ باید در نقطه Q بر سهمی‌وارِ مذکور عمود باشد. به عبارتی دیگر، بردار $\vec{PQ}$ باید با بردار نرمالِ سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ در نقطه‌ی Q، یعنی بردار $\vec{n}=2u_\circ\vec{i}+2v_\circ\vec{j}-\vec{k}$ ، موازی باشد. در این صورت، به ازای عدد حقیقی λ داریم:

$$\vec{PQ}=\lambda\vec{n}$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$u_\circ-1=2\lambda u_\circ, \quad v_\circ-1=2\lambda v_\circ, \quad w_\circ=-\lambda.$$

در نتیجه بدیهی است که $u_\circ=v_\circ=\dfrac{1}{1-2\lambda}$. از طرفی دیگر، چون نقطه Q روی سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ قرار دارد، پس $w_\circ=u_\circ^2+v_\circ^2$.

پاسخ سوال ۸

حال از رابطه‌ای که برای $u_{\circ}$ و $v_{\circ}$ بدست آمد داریم $w_{\circ} = \frac{۲}{(۱-۲\lambda)^{۲}}$. از طرفی داشتیم $w_{\circ} = -\lambda$، پس نتیجه می‌شود: $\frac{۲}{(۱-۲\lambda)^{۲}} = -\lambda$ لذا داریم:

$$-\lambda(۱-۲\lambda)^{۲} = ۲ \rightarrow ۴\lambda^{۳} - ۴\lambda^{۲} + \lambda + ۲ = \circ$$
$$\rightarrow (\lambda + \frac{۱}{۲})(۴\lambda^{۲} - ۶\lambda + ۴) = \circ$$

از آن جا که برای معادله‌ی $۴\lambda^{۲} - ۶\lambda + ۴ = \circ$ داریم $\Delta < \circ$، تنها جواب ممکن برای معادله‌ی بالا عبارت است از $\lambda = -\frac{۱}{۲}$ و بنابراین $u_{\circ} = v_{\circ} = w_{\circ} = \frac{۱}{۲}$. در نتیجه، فاصله‌ی نقطه‌ی $P = (۱, ۱, \circ)$ تا سهمی‌وار $z = x^{۲} + y^{۲}$، برابر است با فاصله‌ی این نقطه تا نقطه‌ی $Q = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$، که این فاصله نیز برابر است با

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^{۲} + (۱-\frac{۱}{۲})^{۲} + (-\frac{۱}{۲})^{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

راه حل دوم:

این سوال را با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ نیز می‌توان حل کرد. اگر قرار دهیم:

$$d(x,y,z) = \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ + z^۲}$$

آنگاه تابع d با تعریف بالا، فاصله نقطه‌ی دل‌خواه $(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳$ را از نقطه $(۱,۱,۰)$ به دست می‌آورد. حال در این سوال می‌خواهیم نقطه‌ای روی رویه‌ی $g(x,y,z) = x^۲ + y^۲ - z = ۰$ پیدا کنیم، که تابع d را مینیمم کند (یعنی کم‌ترین فاصله را با $(۱,۱,۰)$ داشته باشد). پس کافیست مسئله زیر را با روش ضرایب لاگرانژ حل کنیم:

$$\begin{array}{ll} \min & d = \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ + z^۲} \\ s.t. & \{\, g = ۰ : \quad x^۲ + y^۲ - z = ۰ \end{array}$$

از آن جا که تابع رادیکال با فرجه‌ی زوج یک تابع صعودی است، برای سهولت در محاسبه‌ی مشتق، d را بدون رادیکال در نظر گرفته و ادامه می‌دهیم. یعنی قرار می‌دهیم $f(x,y,z) = (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ + z^۲$.

با توجه به روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g = ۰ \end{cases}$$

داریم:

$$\nabla f = (۲x - ۲, ۲y - ۲, ۲z)$$
$$\nabla g = (۲x, ۲y, -۱)$$

پس از این که

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

نتیجه می‌شود

$$(۲x - ۲, ۲y - ۲, ۲z) = \lambda(۲x, ۲y, -۱)$$

حال داریم:

$$\begin{cases} ۲x - ۲ = ۲\lambda x & (۱) \\ ۲y - ۲ = ۲\lambda y & (۲) \\ ۲z = -\lambda & (۳) \\ x^{۲} + y^{۲} - z = ۰ & (۴) \end{cases}$$

با کم کردن (۲) از (۱) داریم $۲(x-y) = ۲\lambda(x-y)$ و در این صورت یا

$x = y$ **یا** $\lambda = ۱$

اگر $\lambda = ۱$ آنگاه از (۳) نتیجه می‌شود $z = -\frac{۱}{۲}$ که با (۴) در تناقض است ((۴) می‌گوید z باید مثبت باشد).

پس باید $x=y$.

از رابطه‌های $(۲), (۱)$ نتیجه می‌شود $x=y=\frac{۱}{۱-\lambda}$. از طرفی از رابطه‌ی (۳) داریم $z=-\frac{\lambda}{۲}$ و در نتیجه از رابطه‌ی (۴) خواهیم داشت $\frac{-\lambda}{۲}=\frac{۲}{(۱-\lambda)^۲}$.

یعنی $-\lambda(۱-\lambda)^۲=۴$ که در این‌صورت می توان بسادگی دید که یکی از ریشه های معادله $\lambda=-۱$ است.

با تقسیم چندجمله ای $\lambda^۳-۲\lambda^۲+\lambda+۴$ بر عامل $(\lambda+۱)$ داریم $\lambda^۳-۲\lambda^۲+\lambda+۴=(\lambda+۱)(\lambda^۲-۳\lambda+۴)$. با توجه به اینکه معادله $\lambda^۲-۳\lambda+۴=۰$ فاقد ریشه است، تنها ریشه معادله $\lambda=-۱$ است. در نتیجه $x=y=z=\frac{۱}{۲}$ و لذا

$$|\vec{PQ}|=\sqrt{(\frac{۱}{۲}-۱)^۲+(\frac{۱}{۲}-۱)^۲+(\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}.$$

سوال۹

(آدامز بخش ۳ − ۱۲ سوال۴۰) فرض کنیم

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xy^{2}z}{x^{4}+y^{4}+z^{4}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

$f_1(0,0,0)$, $f_2(0,0,0)$, $f_3(0,0,0)$ را بیابید. آیا f_1, f_2, f_3 در $(0,0,0)$ پیوسته هستند

برای محاسبه‌ی $f_{۱}$ و $f_{۲}$ و $f_{۳}$ در نقطه‌ی $(۰,۰,۰)$، از رابطه‌ی حدی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم:

$$f_{۱}(۰,۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h,۰,۰)-f(۰,۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۰}{h^{۴}}-f(۰,۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰}{h^{۵}}=۰$$

$$f_{۲}(۰,۰,۰)=\lim_{k\to ۰}\frac{f(۰,k,۰)-f(۰,۰,۰)}{k}=\lim_{k\to ۰}\frac{\frac{۰}{k^{۴}}-f(۰,۰,۰)}{k}=\lim_{k\to ۰}\frac{۰}{k^{۵}}=۰$$

$$f_{۳}(۰,۰,۰)=\lim_{l\to ۰}\frac{f(۰,۰,l)-f(۰,۰,۰)}{l}=\lim_{l\to ۰}\frac{\frac{۰}{l^{۴}}-f(۰,۰,۰)}{l}=\lim_{l\to ۰}\frac{۰}{l^{۵}}=۰$$

برای بررسی پیوستگی $f_{۱}$ و $f_{۲}$ و $f_{۳}$ در نقطه‌ی $(۰,۰,۰)$، ابتدا ضابطه‌ی آن‌ها را بدست می‌آوریم.

پاسخ سوال ۹

برای $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y,z) &= \frac{(y^2z)(x^4+y^4+z^4)-(xy^2z)(4x^3)}{(x^4+y^4+z^4)^2} \\
&= \frac{(y^2z)(x^4+y^4+z^4)-(y^2z)(4x^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2} \\
&= \frac{(y^2z)(-3x^4+y^4+z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x,y,z) &= \frac{(2xyz)(x^4+y^4+z^4)-(xy^2z)(4y^3)}{(x^4+y^4+z^4)^2} \\
&= \frac{(2xyz)(x^4+y^4+z^4)-(2xyz)(2y^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2} \\
&= \frac{(2xyz)(x^4-y^4+z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2},
\end{aligned}
$$

$$f_۳(x,y,z) = \frac{(xy^۲)(x^۴+y^۴+z^۴)-(xy^۲z)(۴z^۳)}{(x^۴+y^۴+z^۴)^۲}$$
$$= \frac{(xy^۲)(x^۴+y^۴+z^۴)-(xy^۲)(۴z^۴)}{(x^۴+y^۴+z^۴)^۲}$$
$$= \frac{(xy^۲)(x^۴+y^۴-۳z^۴)}{(x^۴+y^۴+z^۴)^۲}.$$

می‌دانیم به ازای $i = ۱,۲,۳$، تابع f_i در $(۰,۰,۰)$ پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} f_i(x,y,z) = f_i(۰,۰,۰).$$

برای محاسبه‌ی حد f_i در $(۰,۰,۰)$ ، درگام اول، باید مقدار f_i را به ازای $i = ۱,۲,۳$ در $(۰,۰,۰)$ محاسبه کنیم. داریم:

$$f_۱(۰,۰,۰) = \frac{۰}{۰}, f_۲(۰,۰,۰) = \frac{۰}{۰}, f_۳(۰,۰,۰) = \frac{۰}{۰}.$$

با توجه به ضابطه‌ی بدست آمده برای f_1 و f_2 و f_3، در هر سه حالت به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. در گام دوم، برای هر یک حدهای خواسته شده، مسیر $x = y = z$ را به عنوان مثال نقضِ وجود حد در نظر می‌گیریم. برای f_1 داریم:

$$I_1 = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 x)(-3x^4+x^4+x^4)}{(x^4+x^4+x^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^7}{9x^8} = \text{حد وجود ندارد},$$

برای f_2 داریم:

$$I_2 = \lim_{x\to 0} \frac{(2x^3)((x^4-x^4+x^4))}{(x^4+x^4+x^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^7}{9x^8} = \text{حد وجود ندارد},$$

برای f_3 داریم:

$$I_3 = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3)(x^4+x^4-3x^4)}{(x^4+x^4+x^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^7}{9x^8} = \text{حد وجود ندارد}.$$

همان‌طور که دیده می‌شود، در این مسیر، هیچ‌کدام از حدها وجود ندارند. در نتیجه f_1 و f_2 و f_3 در $(0, 0, 0)$ پیوسته نیستند.

سوال ۱۰

(آدامز بخش ۵ − ۱۲ سوال۱۵)فرض کنید f دارای مشتقات جزیی مرتبه دوم پیوسته باشد.

الف) اگر $z = f(x, y)$, $x = ۲s + ۳t$, $y = ۳s - ۲t$ مطلوبست است محاسبه $\frac{\partial^۲ z}{\partial s \partial t}$.

ب) اگر $x = t \sin s$, $y = t \cos s$ مطلوبست است محاسبه $\frac{\partial^۲}{\partial s \partial t} f(x, y)$.

با استفاده از قاعده‌ی مشتق‌گیری زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ z}{\partial s\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial z}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(۳f_۱(x,y) - ۲f_۲(x,y)) = ۳\frac{\partial f_۱}{\partial s} - ۲\frac{\partial f_۲}{\partial s} \\ &= ۳(\frac{\partial f_۱}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۱}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}) - ۲(\frac{\partial f_۲}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۲}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}) \\ &= ۳(۲f_{۱۱} + ۳f_{۱۲}) - ۲(۲f_{۲۱} + ۳f_{۲۲}) = ۶f_{۱۱} + ۵f_{۱۲} - ۶f_{۲۲}\end{aligned}$$

حل قسمت (ب) : با استفاده از قاعده زنجیره‌ای در مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial z}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial s}(\sin s f_۱(x,y) + \cos s f_۲(x,y))$$

$$= \cos s f_۱(x,y) + \sin s \frac{\partial f_۱}{\partial s} - \sin s f_۲(x,y) + \cos s \frac{\partial f_۲}{\partial s}$$

$$= \cos s f_۱(x,y) + \sin s(\frac{\partial f_۱}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۱}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s})$$

$$- \sin s f_۲(x,y) + \cos s(\frac{\partial f_۲}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۲}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s})$$

$$= \cos s f_۱ + \sin s(t\cos s f_{۱۱} - t\sin s f_{۱۲}) -$$

$$\sin s f_۲ + \cos s(t\cos s f_{۲۱} - t\sin s f_{۲۲})$$

$$= \cos s f_۱ + t\sin s\cos s f_{۱۱} - t\sin^۲ s f_{۱۲} -$$

$$\sin s f_۲ + t\cos^۲ s f_{۲۱} - t\cos s\sin s f_{۲۲}$$

$$= \cos s f_۱ - \sin s f_۲ + t\sin s\cos s(f_{۱۱} - f_{۲۲}) + t(\cos^۲ s - \sin^۲ s) f_{۲۱}$$

سوال۱۱

(آدامز بخش ۵ − ۱۲ سوال۲۳) اگر $x = e^s \cos t, y = e^s \sin t$ و $z = u(x, y) = v(s, t)$ نشان دهید که

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial t^۲} = (x^۲ + y^۲)\left(\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}\right)$$

حل : $x = e^s \cos t$ و $y = e^s \sin t$ توابعی بر حسب s و t هستند. در نتیجه :

$$\frac{\partial x}{\partial s} = e^s \cos t, \frac{\partial x}{\partial t} = -e^s \sin t,$$
$$\frac{\partial y}{\partial s} = e^s \sin t, \frac{\partial y}{\partial t} = e^s \cos t.$$

از z نسبت s مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = e^s \cos t \frac{\partial z}{\partial x} + e^s \sin t \frac{\partial z}{\partial y}$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب s مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^۲ z}{\partial s^۲} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(e^s \cos t\,\frac{\partial z}{\partial x} + e^s \sin t\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&= e^s \cos t\,\frac{\partial z}{\partial x} + e^s \cos t\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + e^s \sin t\,\frac{\partial z}{\partial y} + e^s \sin t\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&= e^s \cos t\,\frac{\partial z}{\partial x} + e^s \sin t\,\frac{\partial z}{\partial y} + e^s \cos t\left(\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}\,\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y \partial x}\,\frac{\partial y}{\partial s}\right)\\
&+ e^s \sin t\left(\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}\,\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)\\
&= e^s \cos t\,\frac{\partial z}{\partial x} + e^s \sin t\,\frac{\partial z}{\partial y} + e^s \cos t\left(e^s \cos t\,\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + e^s \sin t\,\frac{\partial^۲ z}{\partial y \partial x}\right)\\
&+ e^s \sin t\left(e^s \sin t\,\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} + e^s \cos t\,\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}\right)
\end{aligned}$$

از z نسبت t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -e^s \sin t \,\frac{\partial z}{\partial x} + e^s \cos t \,\frac{\partial z}{\partial y}$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب t مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^۲ z}{\partial t^۲} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(-e^s \sin t \,\frac{\partial z}{\partial x} + e^s \cos t \,\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\\
&= -e^s \cos t \,\frac{\partial z}{\partial x} - e^s \sin t \,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big) - e^s \sin t \,\frac{\partial z}{\partial y} + e^s \cos t \,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\\
&= -e^s \cos t \,\frac{\partial z}{\partial x} - e^s \sin t \,\frac{\partial z}{\partial y} -\\
&\quad e^s \sin t\Big(\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\Big) + e^s \cos t\Big(\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\Big)
\end{aligned}$$

$$= -e^s \cos t \,\frac{\partial z}{\partial x} - e^s \sin t \,\frac{\partial z}{\partial y} - e^s \sin t\Big(- e^s \sin t \,\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} \; + e^s \cos t \,\frac{\partial^۲ z}{\partial y \partial x} \Big)$$

$$+ e^s \cos t\big(e^s \cos t \,\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} \; - e^s \sin t \,\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} \big)$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial t^۲} = e^{۲s}(\sin^۲ t + \cos^۲ t)\big(\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}\big) = (x^۲ + y^۲)\big(\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}\big)$$

سوال۱۲

(آدامز بخش ۵ − ۱۲ سوال۲۵) اگر $u(x,y) = r^{۲} \ln r$ و $r^{۲} = x^{۲} + y^{۲}$ ، نشان دهید

$$\left(\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}\right)\left(\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}}\right) = ۰$$

طبق فرض مسئله $r^۲ = x^۲ + y^۲$ و $u(x,y) = r^۲ \ln r$، با مشتق گیری از طرفین رابطه‌ی $r^۲ = x^۲ + y^۲$ نسبت به x و y داریم:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

حال از u نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} = (۲r\ \ln r + r)\frac{x}{r} = x(۱ + ۲\ln r)$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(۱ + ۲\ln r\right)\right)$$

$$= \left(۱ + ۲\ln r\right) + x\frac{\partial}{\partial x}\left(۱ + ۲\ln r\right)$$

$$= \left(۱ + ۲\ln r\right) + ۲x\left(\frac{\partial \ln r}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x}\right) = ۱ + ۲\ln r + \frac{۲x^۲}{r^۲}$$

حال از u نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = (۲r\ \ln r + r)\frac{y}{r} = y(۱ + ۲\ln r)$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق بار دیگر برحسب y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\left(۱ + ۲\ln r\right)\right)$$
$$= \left(۱ + ۲\ln r\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(۱ + ۲\ln r\right) = \left(۱ + ۲\ln r\right) + ۲y\left(\frac{\partial \ln r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$
$$= ۱ + ۲\ln r + \frac{۲y^۲}{r^۲}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۲ + ۴\ln r + ۲\left(\frac{x^۲ + y^۲}{r^۲}\right) = ۴ + ۴\ln r = ۴ + ۲\ln(x^۲ + y^۲)$$

برای سادگی محاسبات قرار دهید:

$$f(x,y)=\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=۴+۲\ln(x^۲+y^۲)$$

در نتیجه:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۴x}{x^۲+y^۲}\to f_{xx}=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=۴\left(\frac{x^۲+y^۲-۲x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}\right)=۴\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۴y}{x^۲+y^۲}\to f_{yy}=\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=۴\left(\frac{x^۲+y^۲-۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}\right)=۴\frac{x^۲-y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

در نتیجه با توجه به خواسته‌ی مسئله داریم:

$$\left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}\right)=\left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)(f(x,y))$$

$$=f_{xx}+f_{yy}=۴\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}+۴\frac{x^۲-y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}=۰$$

سوال۱۳

(آدامز بخش ۷ − ۱۲ سوال۱۹)اگر برای تابع دیفرانسیل پذیر $f(x,y)$ داشته باشیم:

$$D_{(i+j)/\sqrt{۲}}f(a,b) = ۳\sqrt{۲},$$
$$D_{(۳i-۴j)/۵}f(a,b) = ۵,$$

مطلوبست محاسبه $\nabla f(a,b)$.

چون تابع مورد نظر دیفرانسیل‌پذیر است لذا:

$$D_u f(a,b) = u \cdot \nabla f(a,b) \qquad (*)$$

فرض کنید $\nabla f(a,b) = (s,t)$.

ابتدا با توجه به فرض اول بردار جهت را $u = (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}})$ در نظر می‌گیریم. لذا با توجه به $(*)$ داریم:

$$D_{(i+j)/\sqrt{۲}} f(a,b) = ۳\sqrt{۲} = (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}}) \cdot (s,t) = \frac{s+t}{\sqrt{۲}} \quad \rightarrow \quad s+t = ۶$$

حال با توجه به فرض دوم بردار جهت را $u = (\frac{۳}{۵}, \frac{-۴}{۵})$ در نظر می‌گیریم. لذا با توجه به $(*)$ داریم:

$$D_{(۳i-۴j)/۵} f(a,b) = ۵ = (\frac{۳}{۵}, \frac{-۴}{۵}) \cdot (s,t) = \frac{۳s-۴t}{۵} \quad \rightarrow \quad ۳s-۴t = ۲۵$$

با حل دستگاه داریم $s = ۷$ و $t = -۱$ در نتیجه $\nabla f(a,b) = ۷i - j$.

سوال۱۴

(آدامز بخش ۷ − ۱۲سوال۲۶) بردار مماس بر خم مشترک بین دو استوانه $x^{۲} + y^{۲} = ۲$ و $y^{۲} + z^{۲} = ۲$ را در نقطه $(۱, −۱, ۱)$ بیابید.

ابتدا باید بردار قائم هر دو منحنی را پیدا کنیم.
بردار قائم سطح استوانه‌ای $x^۲ + y^۲ = ۲$ برابر است با:

$$n_۱ = \nabla(x^۲+y^۲-۲) = (۲x, ۲y, ۰) \xrightarrow{(x,y,z)=(۱,-۱,۱)} n_۱ = (۲, -۲, ۰)$$

و بردار قائم سطح استوانه‌ای $y^۲ + z^۲ = ۲$ برابر است با:

$$n_۲ = \nabla(y^۲+z^۲-۲) = (۰, ۲y, ۲z) \xrightarrow{(x,y,z)=(۱,-۱,۱)} n_۲ = (۰, -۲, ۲)$$

بردار مماس بر خم مشترک هر دو منحنی، بر هر دو بردار قائم فوق عمود است. در نتیجه:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{vmatrix} = i + j + k$$

لذا بردار $i + j + k$ یا هر مضرب اسکالر دیگری از آن در نقطه‌ی داده شده بر منحنی‌ها مماس است.

سوال۱۵

(آدامز بخش ۷ − ۱۲ سوال۳۶) فرض کنیم

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

الف) مطلوبست محاسبه $\nabla f(۰,۰)$.

ب) با استفاده از تعریف مشتق سویی، $D_u f(۰,۰)$ را که در آن $u=(i+j)/\sqrt{۲}$ را محاسبه کنید.

ج) آیا $f(x,y)$ در $(۰,۰)$ دیفرانسیل پذیر است

پاسخ سوال ۱۵

الف) برای محاسبه‌ی $\nabla f(\circ,\circ)$ باید مشتقات جزئی را از تعریف مشتق محاسبه کنیم:

$$f_x(\circ,\circ) = \lim_{h\to\circ} \frac{f(\circ+h,\circ)-f(\circ,\circ)}{h} = \frac{\circ-\circ}{h} = \circ$$

$$f_y(\circ,\circ) = \lim_{h\to\circ} \frac{f(\circ,\circ+h)-f(\circ,\circ)}{h} = \frac{\circ-\circ}{h} = \circ$$

لذا

$$\nabla f(\circ,\circ) = \big(f_x(\circ,\circ), f_y(\circ,\circ)\big) = (\circ,\circ).$$

ب) می‌خواهیم مشتق سویی را با استفاده از تعریف در جهت بردار $(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}})$ در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ بیابیم. با توجه به تعریف مشتق سویی که به صورت

$$D_u f(a) = \lim_{h\to ۰^+} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h}$$

تعریف می‌شود داریم:

$$D_u f(۰, ۰) = \lim_{h\to ۰^+} \frac{f(۰ + \frac{h}{\sqrt{۲}}, ۰ + \frac{h}{\sqrt{۲}}) - f(۰, ۰)}{h} =$$

$$\lim_{h\to ۰^+} \frac{\sin(\frac{h^۲}{۲})}{h\sqrt{\frac{h^۲}{۲} + \frac{h^۲}{۲}}} = \lim_{h\to ۰^+} \frac{\sin(\frac{h^۲}{۲})}{h^۲} = \frac{۱}{۲}$$

ج) خیر. زیرا $\frac{1}{2} = D_u f(0,0) \neq u \,.\, \nabla f(0,0) = 0$ نکته: اگر تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه $D_u f(a,b) = u \,.\, \nabla f(a,b)$. اما عکس آن لزوما برقرار نیست.

سوال۱۶

فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{|y|}\sqrt{x^۲+y^۲}, & y \neq ۰, \\ ۰, & y = ۰. \end{cases}$$

1. نشان دهید برای هر بردار یکه $u = (u_۱, u_۲)$ در صفحه، $D_u f(۰,۰)$ وجود دارد.
2. آیا تابع f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟

حل: الف) دو حالت در نظر می گیریم:

اگر $u_۲ \neq ۰$

$$D_uf(۰,۰) = \lim_{t\to ۰^+} \frac{f(tu_۱, tu_۲) - f(۰,۰)}{t} = \lim_{t\to ۰^+} \frac{f(tu_۱, tu_۲)}{t}$$

$$= \lim_{t\to ۰^+} \frac{\frac{tu_۲}{|tu_۲|}\sqrt{(tu_۱)^۲ + (tu_۲)^۲}}{t}$$

$$= \lim_{t\to ۰^+} \frac{tu_۲}{|tu_۲|} = \lim_{t\to ۰^+} \frac{u_۲}{|u_۲|} = \pm ۱$$

اگر $u_۲ = ۰$

$$D_uf(۰,۰) = \lim_{t\to ۰^+} \frac{f(tu_۱, tu_۲) - f(۰,۰)}{t} = \lim_{t\to ۰^+} \frac{۰}{t} = ۰$$

ب) خیر، اگر $f(x,y)$ در $(0,0)$ دیفرانسیل پذیر باشد در آن صورت $D_uf(0,0)=\nabla f(0,0).u$ اما همان طور که در زیر مشاهده می کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k}{|k|}|k|}{k}=1$$

$$\nabla f(0,0).u=(0,1).(u_1,u_2)=u_2$$

اما از آنجا که $u=(u_1,u_2)$ بردار یکه است داریم $\sqrt{u_1^2+u_2^2}=1$. بنابراین بردار u می تواند هر یک از نقاط روی دایره واحد به مرکز مبدا و شعاع یک باشد. پس با توجه به قسمت الف لزوما u_2 صفر یا ± 1 نیست پس لزوماً $D_uf(0,0)=\nabla f(0,0).u$ برقرار نیست.

سوال۱۷

(آدامز بخش ۸ − ۱۲ سوال۱۰)در هر یک از حالت های زیر، با توجه به معادلات مفروض، مشتق خواسته شده را محاسبه کنید. کدام شرط بر متغیر ها وجود جوابی را تضمین می کند که دارای مشتق مشخص شده است؟

الف) $x^۲ + y^۲ + z^۲ + w^۲ = ۱$, $x + ۲y + ۳z + ۴w = ۲$ ، $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$.

ب) $xyuv = ۱$, $x + y + u + v = ۰$, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u$.

الف)

$$\begin{cases} x = x(y,z) \\ w = w(y,z) \end{cases}$$

با مشتق گرفتن از معادله نسبت به y خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۲x\frac{\partial x}{\partial y} + ۲y + ۲w\frac{\partial w}{\partial y} = ۰ \\ \frac{\partial x}{\partial y} + ۲ + ۴\frac{\partial w}{\partial y} = ۰ \end{cases}$$

در نتیجه با ضرب معادله اول در 2 و ضرب معادله دوم در w خواهیم داشت:

$$(۴x - w)\frac{\partial x}{\partial y} + ۴y - ۲w = ۰$$

$$(\frac{\partial x}{\partial y})_z = \frac{۲w - ۴y}{۴x - w}$$

اگر $۴x \neq w$ باشد معادله جواب دارد.

ب)

$$\begin{cases} y = y(x,u) \\ v = v(x,u) \end{cases}$$

با مشتق گرفتن از معادله نسبت به x خواهیم داشت:

$$\begin{cases} yuv + xuv\frac{\partial y}{\partial x} + xyu\frac{\partial v}{\partial x} = ۰ \\ ۱ + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = ۰ \end{cases}$$

در نتیجه با ضرب معادله دوم در xyu خواهیم داشت:

$$yuv - xyu + (xuv - xyu)\frac{\partial y}{\partial x} = ۰$$

$$(\frac{\partial y}{\partial x})_u = \frac{y(x-v)}{x(v-y)}$$

اگر $x \neq ۰ , v \neq y , u \neq ۰$ باشد معادله جواب دارد.

سوال۱۸

(آدامز بخش ۸ $-$ ۱۲ سوال ۱۷)نشان دهید که می توان معادله های

$$\begin{cases} xy^{۲} + zu + v^{۲} = ۳ \\ x^{۳}z + ۲y - uv = ۲ \\ xu + yv - xyz = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x, y, z, u, v) = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱)$ نسبت به مجهولات x, y, z به عنوان توابعی از u, v حل کرد و سپس $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$ را به ازای $(u, v) = (۱, ۱)$ بیابید.

پاسخ سوال ۱۸

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = xy^{۲} + zu + v^{۲} - ۳ \\ G(x,y,z,u,v) = x^{۳}z + ۲y - uv - ۲ \\ H(x,y,z,u,v) = xu + yv - xyz - ۱ \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}\bigg|_{p_\circ} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix}_{p_\circ} = \begin{vmatrix} y^{۲} & ۲xy & u \\ ۳x^{۲}z & ۲ & x^{۳} \\ u - yz & v - xz & -xy \end{vmatrix}_{p_\circ} =$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ \circ & \circ & -۱ \end{vmatrix} = ۴ \neq \circ$$

بنابر قضیه تابع ضمنی می‌توان x, y, z را به صورت توابعی از u, v نوشت.

برای محاسبه $\frac{\partial y}{\partial u}$ می‌توان از دو روش استفاده کرد.

روش اول: از معادلات دستگاه داده شده نسبت به u مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} y^{۲}\frac{\partial x}{\partial u}+۲xy\frac{\partial y}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial u}+z=۰ \\ ۳x^{۲}z\frac{\partial x}{\partial u}+x^{۳}\frac{\partial z}{\partial u}+۲\frac{\partial y}{\partial u}-v=۰ \\ u\frac{\partial x}{\partial u}+x+v\frac{\partial y}{\partial u}-yz\frac{\partial x}{\partial u}-xz\frac{\partial y}{\partial u}-xy\frac{\partial z}{\partial u}=۰ \end{cases}$$

با جایگذاری نقطه $p_{۰}$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}+۲\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}+۱=۰ \\ ۳\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}+۲\frac{\partial y}{\partial u}-۱=۰ \\ \frac{\partial x}{\partial u}+۱+\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial u}=۰ \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا، $\frac{\partial y}{\partial u}|_{p_{۰}}=-\frac{۳}{۲}$.

روش دوم: استفاده از فرمول:

$$\frac{\partial y}{\partial u}\Big|_{p_\circ} = -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)} \Big/ \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}\Big|_{p_\circ} = -\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}\Big|_{p_\circ} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix}_{p_\circ} = \begin{vmatrix} y^{۲} & z & u \\ ۳x^{۲}z & -v & x^{۳} \\ u-yz & x & -xy \end{vmatrix}_{p_\circ}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۶$$

سوال۱۹

(آدامز بخش ۸ − ۱۲ سوال۱۸)نشان دهید که می توان معادله های

$$\begin{cases} xe^{y} + uz - \cos v = ۲ \\ u\cos y + x^{۲}y - yz^{۲} = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x, y, z, u, v) = (۲, ۰, ۱, ۱, ۰)$ نسبت به مجهولات u, v به عنوان توابعی از x, y, z حل کرد و سپس $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y}$ را به ازای $(x, y, z) = (۲, ۰, ۱)$ بیابید.

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = xe^{y} + uz - \cos v - ۲ \\ G(x,y,z,u,v) = u\cos y + x^{۲}v - yz^{۲} - ۱ \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\Big|_{p_۰} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}_{p_۰} = \begin{vmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^{۲} \end{vmatrix}_{p_۰} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۴$$

از آنجا که $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\Big|_{p_۰} \neq ۰$ بنابر قضیه تابع ضمنی می‌توان u, v را به صورت توابعی از x, y, z نوشت.با استفاده از فرمول داریم

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{p_۰} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\Big|_{p_۰} = -\frac{۱}{۴}\begin{vmatrix} u & \sin v \\ -۲yz & x^{۲} \end{vmatrix}_{p_۰} = -\frac{۱}{۴}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$= -۱$$

سوال ۲۰

(آدامز بخش ۸ − ۱۲ سوال۲۲)اگر رابطه $F\left(x,y,z\right)=0$ متغیر z را به عنوان تابعی از x,y به دست دهد، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ بر حسب مشتق های جزیی F .
(فرض کنید مشتقات جزیی مرتبه دوم F پیوسته باشند. نیز فرض کنید F_3, F_{33} در هیچ نقطه ای صفر نباشند.)

از دو طرف رابطه $f(x,y,z(x,y))=۰$ یکبار نسبت به x و یکبار نسبت به y مشتق میگیریم.

$$F_۱+F_۳\frac{\partial z}{\partial x}=۰ \tag{1}$$

$$F_۲+F_۳\frac{\partial z}{\partial y}=۰ \tag{2}$$

از دو طرف معادله (1) نسبت به x مشتق میگیریم.

$$[F_{۱۱}+F_{۱۳}\frac{\partial z}{\partial x}]+[F_{۳۱}+F_{۳۳}(\frac{\partial z}{\partial x})]\frac{\partial z}{\partial x}+F_۳\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}=۰$$

در نتیجه از رابطه بالا و همچنین روابط (1)و (2)داریم:

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}=-\frac{۱}{F_۳}[F_{۱۱}+۲F_{۱۳}(-\frac{F_۱}{F_۳})+F_{۳۳}(-\frac{F_۱}{F_۳})^۲]$$
$$=-\frac{۱}{F_۳^۳}[F_{۱۱}F_۳^۲-۲F_{۱۳}F_۱F_۳+F_{۳۳}F_۱^۲]$$

به صورت مشابه با مشتق گیری از دو طرف معادله (2) نسبت به yداریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{F_3^3}[F_{22}F_3^2 - 2F_{23}F_2F_3 + F_{33}F_2^2]$$

همچنین با مشتق گیری از دو طرف معادله (1) نسبت به yداریم:

$$[F_{12} + F_{13}\frac{\partial z}{\partial y}] + (F_{32} + F_{33}\frac{\partial z}{\partial y})\frac{\partial z}{\partial x} + F_{33}(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}) = 0$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -\frac{1}{F_{33}}[F_{12} + F_{13}(-\frac{F_2}{F_3}) + F_{32}(-\frac{F_1}{F_3}) + F_{33}(\frac{F_1F_2}{F_3^2})] \\ &= -\frac{1}{F_{33}^3}[F_{12}F_3^2 - F_{13}F_2F_3 - F_{32}F_1F_3 + F_{33}F_1F_2]\end{aligned}$$

سوال۲۱

(آدامز بخش ۸ − ۱۲ سوال ۲۵)اگر $F(x,y,z)=0$ و F_x, F_y, F_z در هیچ نقطه ای صفر نباشند، نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

فرمول‌های مشابهی برای $F(x,y,z,u)=0$ و $F(x,y,z,u,v)=0$ بدست آورید. حالت کلی چیست؟

با مشتق گرفتن از رابطه $F(x,y,z)=0$ نسبت به x و y و z داریم:

$$\begin{cases} F_x\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + F_y = 0 \\ F_y\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + F_z = 0 \\ F_z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + F_x = 0 \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{-F_y}{F_x}$$

و

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{-F_z}{F_y}$$

و

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{-F_x}{F_z}$$

حال فرض کنید $F(x,y,z,u)=0$. مشابه قسمت قبل، با مشتق‌گیری از F نسبت به x و y و z و u، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z,u}=\frac{-F_y}{F_x} \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{u,x}=\frac{-F_z}{F_y}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{x,y}=\frac{-F_u}{F_z} \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z}=\frac{-F_x}{F_u}$$

لذا

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z,u}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{u,x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z}=(-1)^4=1.$$

حال مشابهاً، اگر داشته باشیم $F(x_1,\dots,x_n)=0$، داریم:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3,\dots,x_n}\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right)_{x_4,\dots,x_n,x_1}\cdots\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)_{x_2,\dots,x_{n-1}}=(-1)^n.$$

سوال۲۲

دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u^۴v^۴ + (u+x)^۳ + y + ۳w - ۴ = ۰, \\ \sin(uv) + e^{v+y^۲-۱} + v - ۱ = ۰, \\ x^۲ - ۴y^۲ + ۴w = v - u, \end{cases}$$

1. نشان دهید در یک همسایگی نقطه $p_۰ = (u,v,w,x,y) = (۰,۰,۱,۰,۱)$ می توان این دستگاه را نسبت به مجهولات u، v و w به عنوان تابعی از x و y حل کرد.
2. مقادیر $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y) = (۰,۱)$ بیابید.
3. اگر $f(x,y) = e^{wv}$ باشد مقدار $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y) = (۰,۱)$ بیابید.

الف) قرار دهید:

$$\begin{cases} F = u^۴v^۴ + (u+x)^۳ + y + ۳w - ۴, \\ G = \sin(uv) + e^{v+y^۲-۱} + v - ۱, \\ H = x^۲ - ۴y^۲ + ۴w + u - v. \end{cases}$$

حال به راحتی می‌توان بررسی کرد که $F(p_۰) = G(p_۰) = H(p_۰) = ۰$. همچنین، F و G و H در یک همسایگی از $p_۰$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند. حال داریم:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} ۴u^۳v^۴ + ۳(u+x)^۲ & ۴u^۴v^۳ & ۳ \\ v\cos(uv) & u\cos(uv) + e^{v+y^۲-۱} + ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{vmatrix}.$$

پس داریم:

$$\left.\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}\right|_{p_۰} = \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{vmatrix} = -۶ \neq ۰$$

لذا طبق قضیه تابع ضمنی، میتوان u و v و w را حول $p_۰$، نسبت به x و y حل نمود.

ب)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)} = \begin{vmatrix} ۴u^{۳}v^{۴} + ۳(u+x)^{۲} & ۱ & ۳ \\ v\cos(uv) & ۲ye^{v+y^{۲}-۱} & ۰ \\ ۱ & -۸y & ۴ \end{vmatrix}.$$

$$\left.\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}\right|_{p_۰} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۸ & ۴ \end{vmatrix} = -۶, \rightarrow \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{p_۰} = \frac{-۶}{۶} = -۱$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}} \qquad \left.\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}\right|_{p_۰} = \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۱ & -۱ & -۸ \end{vmatrix} = -۲$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{p_۰} = \frac{-۲}{۶} = \frac{-۱}{۳}$$

ج) داریم: $f(x,y) = e^{vw}$. لذا خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_v v_y + f_w w_y = w e^{vw} v_y + v e^{vw} w_y$$

حال طبق قسمت ب، خواهیم داشت:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{p_۰} = -۱$$

سوال۲۳

(آدامز بخش ۱ − ۱۳ سوالات ۹, ۱۸) نقاط بحرانی توابع مفروض زیر را بیابید و نوع آنها را مشخص کنید.

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad f(x,y) = x^{۲}ye^{-(x^{۲}+y^{۲})}\\
&(b)\quad f(x,y,z) = ۴xyz - x^{۴} - y^{۴} - z^{۴}
\end{aligned}
$$

پاسخ سوال ۲۳

الف) داریم $f(x,y)=x^{۲}ye^{-(x^{۲}+y^{۲})}$. لذا خواهیم داشت

$$\nabla f=(۲xy(۱-x^{۲})e^{-(x^{۲}+y^{۲})},x^{۲}(۱-۲y^{۲})e^{-(x^{۲}+y^{۲})}).$$

قرار می‌دهیم $\nabla f=(۰,۰)$. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} xy(۱-x^{۲})=۰ \\ \text{و} \\ x^{۲}(۱-۲y^{۲})=۰ \end{cases}$$

لذا نقاط $\left(\pm ۱,\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\right)$ و $\left(\pm ۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ و $(۰,y)$ که $y\in\mathbb{R}$ نقاط بحرانی تابع است.

حال قرار می‌دهیم:

$$A=f_{۱۱}(x,y)=۲y(۱-۵x^{۲}+۲x^{۴})e^{-(x^{۲}+y^{۲})},$$
$$B=f_{۱۲}(x,y)=۲x(۱-x^{۲})(۱-۲y^{۲})e^{-(x^{۲}+y^{۲})},$$
$$C=f_{۲۲}(x,y)=۲x^{۲}y(۲y^{۲}-۳)e^{-(x^{۲}+y^{۲})}.$$

حال برای $\left(\pm ۱, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ داریم:

$$A = C = -۲\sqrt{۲}e^{\frac{-۳}{۲}} \quad \text{و} \quad B = ۰$$

حال چون $AC > B^۲$ و $A < ۰$، طبق آزمون مشتق دوم f در این نقاط ماکسیمم نسبی دارد.

همچنین برای $(\pm ۱, -\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ داریم:

$$A = C = ۲\sqrt{۲}e^{\frac{-۳}{۲}} \quad , \quad B = ۰$$

لذا چون $AC > B^۲$ و $A > ۰$، طبق آزمون مشتق دوم f در این نقاط مینیمم نسبی دارد.

برای نقاط $(\circ, y)$ آزمون مشتق دوم ساکت است و نمی توان نوع نقاط را تعیین کرد.
برای این دسته نقاط داریم $f(\circ, y) = \circ$. همچنین برای هر $x \neq \circ$ داریم:

(I) اگر $y > \circ$، آنگاه $f(x, y) > \circ$.

(II) اگر $y < \circ$، آنگاه $f(x, y) < \circ$.

لذا نقطه $(\circ, \circ)$ نقطه زینی f است و برای هر $y \in \mathbb{R}$، اگر $y > \circ$، نقطه $(\circ, y)$ نقطه مینیمم نسبی و اگر $y < \circ$، نقطه $(\circ, y)$ ماکسیمم نسبی برای f است.

$$f(x,y,z) = ۴xyz - x^۴ - y^۴ - z^۴.$$

$$\nabla f = (۴yz - ۴x^۳, ۴xz - ۴y^۳, ۴xy - ۴z^۳).$$

$$\nabla f = (۰,۰,۰) \longrightarrow \begin{cases} ۴yz - ۴x^۳ = ۰ \\ ۴xz - ۴y^۳ = ۰ \\ ۴xy - ۴z^۳ = ۰ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} yz - x^۳ = ۰ \\ xz - y^۳ = ۰ \\ xy - z^۳ = ۰ \end{cases}$$

حال داریم $x = ۰ \Longleftrightarrow y = ۰ \Longleftrightarrow z = ۰$. از طرفی $(۰,۰,۰)$ یک نقطه بحرانی f است. حال فرض می‌کنیم $x \neq ۰$ و $y \neq ۰$ و $z \neq ۰$. خواهیم داشت:

$$x^۲y^۲z^۲ = x^۳y^۳z^۳$$

حال چون $xyz \neq ۰$ است داریم $xyz = ۱$. حال $yz = x^۳$ نتیجه می‌دهد $x^۴ = ۱$. پس $x = ۱$ یا $x = -۱$.

حال اگر $x = ۱$ باشد داریم $z = y^۳$ و $y = z^۳$. لذا داریم $z = z^۹$. پس $z = \pm ۱$.
اگر $z = ۱$ باشد، داریم $y = ۱$ و اگر $z = -۱$ داریم $y = -۱$. پس $(۱, -۱, -۱)$ و $(۱, ۱, ۱)$ نقاط بحرانی f هستند.
حال اگر $x = -۱$ باشد، داریم $-z = y^۳$ و $-y = z^۳$. پس $z = z^۹$. پس $z = ۱$ یا $z = -۱$. اگر $z = ۱$ باشد داریم $y = -۱$ و اگر $z = -۱$ باشد داریم $y = ۱$. لذا نقاط $(-۱, -۱, ۱)$ و $(-۱, ۱, -۱)$ نیز نقاط بحرانی f هستند.

حال با تشکیل ماتریس هسین H وابسته به تابع f داریم:

$$H = \begin{pmatrix} f_{۱۱} & f_{۱۲} & f_{۱۳} \\ f_{۲۱} & f_{۲۲} & f_{۲۳} \\ f_{۳۱} & f_{۳۲} & f_{۳۳} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱۲x^{۲} & ۴z & ۴y \\ ۴z & -۱۲y^{۲} & ۴x \\ ۴y & ۴x & -۱۲z^{۲} \end{pmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $P_۱ = (۰, ۰, ۰)$ و $P_۲ = (۱, -۱, -۱)$ و $P_۳ = (۱, ۱, ۱)$ و $P_۴ = (-۱, -۱, ۱)$ و $P_۵ = (-۱, ۱, -۱)$. حال به دلیل تقارنی که تابع f دارد، نوع نقاط بحرانی $P_۲, P_۴, P_۵$ یکی هستند. لذا کافی است تنها نوع نقاط بحرانی $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ را مشخص کنیم.

نقطه $P_۳$:

$$H(p_۳) = \begin{bmatrix} -۱۲ & ۴ & ۴ \\ ۴ & -۱۲ & ۴ \\ ۴ & ۴ & -۱۲ \end{bmatrix}$$

$$\Delta_۱ = -۱۲ < ۰, \ \Delta_۲ = \begin{vmatrix} -۱۲ & ۴ \\ ۴ & -۱۲ \end{vmatrix} = ۱۲۸ > ۰,$$

$$\Delta_۳ = \begin{vmatrix} -۱۲ & ۴ & ۴ \\ ۴ & -۱۲ & ۴ \\ ۴ & ۴ & -۱۲ \end{vmatrix} = -۱۰۲۴ < ۰,$$

بنابراین $H(p_۳)$ معین منفی است و $p_۳$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

نقطه $P_۲$:

$$H(p_۲) = \begin{bmatrix} -۱۲ & -۴ & -۴ \\ -۴ & -۱۲ & ۴ \\ -۴ & ۴ & -۱۲ \end{bmatrix}$$

$$\Delta_۱ = -۱۲ < ۰,\ \Delta_۲ = ۱۲۸ > ۰,\ \Delta_۳ = \det(H(p_۲)) = -۱۰۲۴ < ۰.$$

بنابراین $H(p_۲)$ نیز معین منفی است و $p_۲$ نیز نقطه ماکزیمم نسبی است.
نقاط $P_۴, P_۵$ نیز وضعیت مشابه با نقاط $P_۲, P_۳$ دارند. بنابراین نقاط ماکزیمم نسبی هستند.

نقطه $P_۱$:

آزمون ساکت است و اطلاعاتی در اختیار ما نمی گذارد.

ادعا می کنیم P_1 نقطه مینیمم نسبی f نیست. برای این منظور باید نشان دهیم هیچ همسایگی مانند

$$\{x \in R^3 \mid \|x - P_1\| < \varepsilon\} = B_\varepsilon(P_1)$$

وجود ندارد بطوریکه f روی این گوی باز (همسایگی باز) حول P_1 مینیمم مطلق باشد.
توجه داریم که $f(P_1) = f(0,0,0) = 0$. پس باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon > 0$ حداقل یک نقطه مانند $Q = (x_0, y_0, z_0) \in B_\varepsilon(P_1)$ وجود دارد بطوریکه $f(Q) < f(P_1) = 0$.
بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی وجود دارد $n_0 \in \mathbb{N}$ بطوریکه $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. حال قرار دهید $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}, \frac{1}{\sqrt{3}n_0}, \frac{-1}{\sqrt{3}n_0}\right)$ در اینصورت داریم:

$$\|Q - P_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}n_0}\right)^2} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

بعلاوه

$$\Rightarrow Q \in B_\varepsilon(P_1) \Rightarrow f(Q) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{1}{n_0^3} - 3\frac{1}{n_0^4} < 0$$

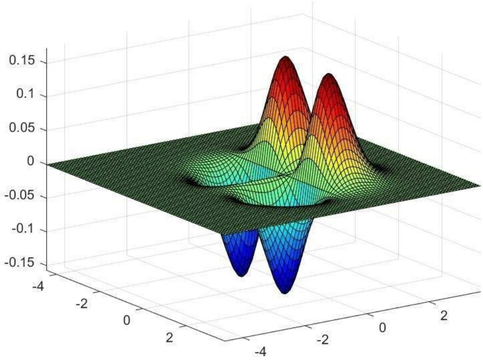
حال ادعا میکنیم نقطه P_1 نقطه ماکزیمم نسبی f نیست. برای این منظور باید نشان دهیم هیچ همسایگی مانند $B_\varepsilon(P_1)$ وجود ندارد بطوریکه f روی آن ماکزیمم مطلق باشد.
مجددا چون $f(P_1)=0$ باید نشان دهیم به ازای هر $\varepsilon>0$ حداقل یک نقطه مانند $S=(x_1,y_1,z_1)\in B_\varepsilon(P_1)$ وجود دارد بطوریکه $f(P_1)<f(S)$. برای اثبات وجود چنین نقطه ای، روی خط $\alpha(t)=(t,t,t)$ شروع به نزدیک شدن به مبدا یعنی نقطه P_1 می کنیم.

$$\forall t\geq 0 \quad f(\alpha(t))=4t^3-3t^4=t^3(4-3t),$$

پس اگر $4-3t>0$ یا بطور معادل $0<t<\frac{4}{3}$ آنگاه f در نقطه (t,t,t) مقدار مثبت اختیار می کند. اما الزاما این نقطه در $B_\varepsilon(P_1)$ قرار ندارد. توجه داریم که

$$\|\alpha(t)-P_1\|=\sqrt{t^2+t^2+t^2}=\sqrt{3}t$$

بنابراین باید شرط $\sqrt{3}t<\varepsilon$ نیز روی t گذاشته شود. بنابراین اگر $0<t_0<\min\left\{\frac{4}{3},\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right\}$ آنگاه نقطه $S=(t_0,t_0,t_0)$ در شرط های $S\in B_\varepsilon(P_1)$ و $0<f(S)$ صدق می کند. پس نقطه P_1 نقطه ماکزیمم نسبی f نیز نمی باشد.



بنابراین نقطه $P_۱$ یک نقطه زینی f است.

سوال۲۴

(آدامز بخش۲ − ۱۳ سوالات ۶, ۳)

الف) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = xy - y^۲$ را بر قرص $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ بیابید.

ب) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = xy(۱ - x - y)$ را بر مثلثی که راس هایش عبارت اند از $(۰, ۰)$, $(۱, ۰)$ و $(۰, ۱)$ بیابید.

الف) $x^۲ + y^۲ \leq ۱; \quad f(x,y) = xy - y^۲$. داریم:

$$\nabla f = (y, x - ۲y)$$

$$\longrightarrow \nabla f = (۰,۰) \longrightarrow \begin{cases} y = ۰ \\ \text{و} \\ x - ۲y = ۰ \end{cases} \longrightarrow (x,y) = (۰,۰)$$

لذا $(۰,۰)$ نقطه بحرانی f است. همچنین داریم $f(۰,۰) = ۰$. حال قرار می‌دهیم $D = \{(x,y) : x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$. به بررسی نقاطی روی مرز D می پردازیم که تابع f را اکسترمم نمایند.

روش اول:

با استفاده از قضیه ضرایب لاگرانژ این کار را انجام میدهیم. قرار می دهیم $g(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۱$. به دنبال یافتن نقاطی مثل (x,y) هستیم به طوریکه تابع f را اکسترمم نمایند با این شرط که $g(x,y) = ۰$.

قرار می دهیم

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy - y^۲ + \lambda(x^۲ + y^۲ - ۱).$$

داریم

$$\nabla L = (L_x, L_y, L_\lambda) = (y + ۲\lambda x, x - ۲y + ۲\lambda y, x^۲ + y^۲ - ۱).$$

$$\nabla f = (۰, ۰, ۰) \longrightarrow \begin{cases} y + ۲\lambda x = ۰ \\ x - ۲y + ۲\lambda y = ۰ \\ x^۲ + y^۲ - ۱ = ۰ \end{cases}$$

از معادله اول داریم $y = -۲\lambda x$. لذا با جایگذاری در دو معادله دیگر داریم:

$$\begin{cases} x + ۴\lambda x - ۴\lambda^{۲} x = ۰ \\ x^{۲}(۱ + ۴\lambda^{۲}) = ۱ \end{cases}$$

حال از معادله دوم نتیجه میشود $x \neq ۰$. لذا از معادله اول داریم:

$$۱ + ۴\lambda - ۴\lambda^{۲} = ۰ \Rightarrow \lambda = \frac{۱ \pm \sqrt{۲}}{۲}.$$

حال اگر $\lambda = \frac{۱ + \sqrt{۲}}{۲}$ باشد، از $x^{۲}(۱ + ۴\lambda^{۲}) = ۱$ نتیجه میشود

$$x = \pm \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}.$$

حال اگر داشته باشیم $x = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$، از $y = -۲\lambda x$ خواهیم داشت:

$$y = -(\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲})(\frac{۱ + \sqrt{۲}}{۲}).$$

اگر داشته باشیم $x = -\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$، باز هم از $y = -۲\lambda x$ خواهیم داشت:

$$y = (\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲})(\frac{۱ + \sqrt{۲}}{۲}).$$

لذا نقاط

$$(x, y) = (\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}, -(\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲})(\frac{۱ + \sqrt{۲}}{۲}))$$

و

$$(x, y) = (-\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}, (\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲})(\frac{۱ + \sqrt{۲}}{۲}))$$

را خواهیم داشت.

حال اگر $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲} = \lambda$ باشد، با محاسباتی مشابه آنچه انجام شد، نقاط

$$(x,y) = \left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}, -\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right)\left(\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}\right)\right)$$

و

$$(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}, \left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right)\left(\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}\right)\right)$$

را به دست خواهیم آورد.

$$f\left(\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}, -\left(\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}\right)\left(\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}\right)\right) = -\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$$

و

$$f\left(-\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}, \left(\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}\right)\left(\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}\right)\right) = -\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}.$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$f\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}, -\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right)\left(\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}\right)\right) = \frac{-۱+\sqrt{۲}}{۲}$$

و

$$f\left(-\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}, \left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\right)\left(\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}\right)\right) = \frac{-۱+\sqrt{۲}}{۲}.$$

لذا $\frac{-۱+\sqrt{۲}}{۲}$ و $-\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$ به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع f روی ناحیه D خواهند بود.

روش دوم:
به وضوح هر نقطه (x,y) روی مرز ناحیه D به شکل $(cost, sint) = (x,y)$، به ازای یک $۰ \leq t \leq ۲\pi$ خواهد بود. لذا روی مرز D خواهیم داشت:

$$f(x,y) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t - \sin^{۲} t = g(t).$$

لذا داریم:

$$g'(t) = \cos ۲t - \sin ۲t$$

حال $g'(t) = ۰$ نتیجه می‌دهد $۲t = \frac{\pi}{۴}$ یا $۲t = \frac{۵\pi}{۴}$. لذا خواهیم داشت $t = \frac{\pi}{۸}$ یا $t = \frac{۵\pi}{۸}$. داریم:

$$g(\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} - \frac{۱}{۲} > ۰$$

و

$$g(\frac{۵\pi}{۸}) = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} - \frac{۱}{۲} < ۰$$

ب) داریم:

$$f(x,y) = xy(1 - x - y)$$

$$\nabla f = (y - 2xy - y^2, x - x^2 - 2xy)$$

حال $\nabla f = (0,0)$ نتیجه می‌دهد $y - y^2 = x - x^2$. لذا خواهیم داشت:

$$y^2 - x^2 + x - y = 0$$

$$\longrightarrow (y-x)(y+x) - (y-x) = 0 \longrightarrow (y-x)(y+x-1) = 0$$

حال با جایگذاری $y = x$ در معادله $x - x^2 - 2xy = 0$ نقاط $(0,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ را بدست می آوریم. این نقاط در معادله $y - 2xy - y^2 = 0$ نیز صدق می کنند. حال داریم $f(0,0) = 0$ و $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$. از طرفی به ازای تمام نقاط روی مرز ناحیه(نقاط روی خط $y + x - 1 = 0$ روی مرز ناحیه قرار دارند)، به راحتی داریم $f(x,y) = 0$. لذا روی ناحیه مورد نظر، بیشترین مقدار تابع $\frac{1}{27}$ و کمترین مقدار آن صفر خواهد بود.

سوال۲۵

(آدامز بخش ۲ − ۱۳ سوال ۱۱)ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = xy^{۲} + yz^{۲}$ را بر گوی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \leq ۱$ بیابید.

$$f(x,y,z) = xy^{۲} + yz^{۲}$$

$$g(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - ۱$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\nabla f = (y^{۲}, ۲xy + z^{۲}, ۲yz)$$

$$\nabla g = (۲x, ۲y, ۲z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^{۲} = ۲\lambda x & (۱) \\ ۲xy + z^{۲} = ۲\lambda y & (۲) \\ ۲yz = ۲\lambda z & (۳) \\ x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱ & (۴) \end{cases}$$

$$(۳) \quad \Rightarrow \quad z = ۰ \quad or \quad y = \lambda$$

$$IF \quad z=\circ \quad \overset{(۲)}{\Rightarrow} \quad ۲xy=۲\lambda y \quad \Rightarrow \quad y=\circ \quad or \quad x=\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\circ \quad \overset{(۴)}{\Rightarrow} \quad x=\pm ۱ \Rightarrow p_۱=(۱,\circ,\circ), p_۲=(-۱,\circ,\circ) \\ x=\lambda \quad \overset{(۱)}{\Rightarrow} \quad y^۲=۲x^۲ \Rightarrow y=\pm\sqrt{۲}x \overset{(۴)}{\Rightarrow} ۳x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_۳=(\frac{\sqrt{۳}}{۳},\pm\frac{\sqrt{۶}}{۳},\circ), \quad p_۴=(-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\pm\frac{\sqrt{۶}}{۳},\circ)$$

$$IF \quad y=\lambda \quad \overset{(۱)}{\Rightarrow} \quad y^۲=۲xy \quad \Rightarrow \quad y=\circ \quad or \quad y=۲x$$

$$\begin{cases} y=\circ \quad \overset{(۲)}{\Rightarrow} \quad z=\circ \quad \overset{(۴)}{\Rightarrow} \quad x=\pm ۱ \\ y=۲x \quad \overset{(۲)}{\Rightarrow} \quad z^۲=۴x^۲ \quad \overset{(۴)}{\Rightarrow} \quad ۹x^۲=۱ \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_۵=(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\pm\frac{۲}{۳}) \text{و} p_۶=(-\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},\pm\frac{۲}{۳})$$

حال به بررسی نقاط بحرانی f می پردازیم:

$$\nabla f = (y^۲, ۲xy + z^۲, ۲yz) = (۰, ۰, ۰)$$
$$\Rightarrow y = ۰, \ z = ۰$$

پس به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $(x, ۰, ۰)$ نقطه بحرانی f است.
درگام آخر مقادیر بدست آمده را مقایسه می کنیم:

$$\begin{aligned} f(x, ۰, ۰) &= ۰ \\ f(p_۱) &= f(p_۲) = ۰ \\ f(p_۳) &= \frac{۲\sqrt{۳}}{۹} \\ f(p_۴) &= -\frac{۲\sqrt{۳}}{۹} \\ f(p_۵) &= \frac{۴}{۹} \quad \rightarrow \quad \text{max } in\ D \\ f(p_۶) &= -\frac{۴}{۹} \quad \rightarrow \quad \text{min } in\ D \end{aligned}$$

سوال۲۶

(آدامز بخش ۳ − ۱۳ سوال ۱۲)کوتاهترین فاصله مبدا از خم حاصل از فصل مشترک رویه های $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ و $x - ۲z = ۳$ را بیابید.

حل. تابع فاصله از مبدأ مختصات عبارتست از $\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$.
همچنین می دانیم به دلیل صعودی بودن تابع رادیکال با فرجه زوج، می توانیم رادیکال را در نظر نگرفته و تنها عبارت زیر رادیکال را مینیمم یا ماکزیمم کنیم.

$$\text{min } or \text{ max} \qquad f = x^۲ + y^۲ + z^۲$$
$$s.t. \qquad \begin{cases} g_۱ = ۰ : & x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰ \\ g_۲ = ۰ : & x - ۲z = ۳ \end{cases}$$

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_۱ + \mu \nabla g_۲ \\ g_۱ = ۰ \\ g_۲ = ۰ \end{cases}$$

داریم:

$$\nabla f = (۲x, ۲y, ۲z)$$
$$\nabla g_۱ = (۲x, ۲y, -۲z)$$
$$\nabla g_۲ = (۱, ۰, -۲)$$

پس

$$\begin{cases} ۲x = ۲\lambda x + \mu & (۱) \\ ۲y = ۲\lambda y & (۲) \\ ۲z = -۲\lambda z - ۲\mu & (۳) \\ x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰ & (۴) \\ x - ۲z = ۳ & (۵) \end{cases}$$

از معادله (۲) داریم $y = ۰$ یا $\lambda = ۱$.

اگر $y = ۰$ از معادله (۴) نتیجه می شود $x = \pm z$ و با توجه به معادله (۵) نقاط بحرانی زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} x = z & \Rightarrow z = -۳ & \Rightarrow p_۱ = (-۳, ۰, -۳) \\ x = -z & \Rightarrow z = -۱ & \Rightarrow p_۲ = (۱, ۰, -۱) \end{cases}$$

$$f(p_۱) = ۱۸, \quad f(p_۲) = ۲$$

اگر $\lambda = ۱$ ، از معادله (۱) بدست می آید $\mu = ۰$. پس از معادله (۳) داریم $z = ۰$ و از معادله (۴) بدست می آید $x = y = ۰$ و این در تناقض با $x = ۳$ است که از معادله (۵) بدست می آید. پس این حالت اتفاق نمی افتد. لذا نقطه $p_۲$ کمترین فاصله را از مبدأ دارد.

سوال۲۷

(آدامز بخش ۳ − ۱۳ سوال ۱۴) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = x + y^{2}z$ را مقید به قیدهای $y^{2} + z^{2} = 2$ و $z = x$ بیابید.

حل.

$$\text{min } or \text{ max} \qquad f = x + y^{۲}z$$
$$s.t. \qquad \begin{cases} g_۱ = ۰ : & y^۲ + z^۲ - ۲ = ۰ \\ g_۲ = ۰ : & x - z = ۰ \end{cases}$$

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_۱ + \mu \nabla g_۲ \\ g_۱ = ۰ \\ g_۲ = ۰ \end{cases}$$

داریم:

$$\nabla f = (۱, ۲yz, y^۲)$$
$$\nabla g_۱ = (۰, ۲y, ۲z)$$
$$\nabla g_۲ = (۱, ۰, -۱)$$

$$\begin{cases} ۱ = \mu & (۱) \\ ۲yz = ۲\lambda y & (۲) \\ y^۲ = ۲\lambda z - \mu & (۳) \\ y^۲ + z^۲ - ۲ = ۰ & (۴) \\ x - z = ۰ & (۵) \end{cases}$$

از معادله دوم دو حالت پیش می آید $y = ۰$ یا $z = \lambda$. اگر $y = ۰$ از معادله (۴) بدست می آید $z = \pm\sqrt{۲}$. با توجه به معادله (۵) نقاط بحرانی زیر بدست می آید.

$$\begin{array}{ll} p_۱ = (\sqrt{۲}, ۰, \sqrt{۲}), & f(p_۱) = \sqrt{۲} \\ p_۲ = (-\sqrt{۲}, ۰, -\sqrt{۲}), & f(p_۲) = -\sqrt{۲} \end{array}$$

اگر $z = \lambda$ از معادله (۳) داریم $y^۲ - ۲z^۲ + ۱ = ۰$، پس از معادله (۴) بدست می آید:

$$۲ - z^۲ = ۲z^۲ - ۱ \Rightarrow z = \pm ۱.$$

$$\begin{array}{ll} p_{۳,۴} = (۱, \pm ۱, ۱), & f(p_۳) = f(p_۴) = ۲ \\ p_{۵,۶} = (-۱, \pm ۱, -۱), & f(p_۵) = f(p_۶) = -۲ \end{array}$$

لذا ماکزیمم و مینیمم به ترتیب در نقاط $p_۳$ و $p_۵$ خواهد بود.

سوال۲۸

مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ بوسیله صفحه $z = y + x + ۱$ در طول منحنی C قطع شده است. بر C نزدیکترین نقطه به مبدا را تعیین کنید.

تابع فاصله از مبدأ مختصات عبارتست از $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
همچنین می دانیم به دلیل صعودی بودن تابع رادیکال با فرجه زوج، می توانیم رادیکال را در نظر نگرفته و تنها عبارت زیر رادیکال را مینیمم یا ماکزیمم کنیم.

$$\text{min } or \text{ max} \qquad f = x^2+y^2+z^2$$

$$s.t. \qquad \begin{cases} g_1 = 0 : & x^2+y^2-z^2 = 0 \\ g_2 = 0 : & 1+x+y-z = 0 \end{cases}$$

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$
$$\nabla g_1 = (2x, 2y, -2z)$$
$$\nabla g_2 = (1, 1, -1)$$

پس

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu & (1) \\ 2y = 2\lambda y + \mu & (2) \\ 2z = -2\lambda z - \mu & (3) \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 & (4) \\ 1 + x + y - z = 0 & (5) \end{cases}$$

از معادله اول و دوم می توان نتیجه گرفت

$$x - y = \lambda(x - y) \Rightarrow \lambda = 1 \ or \ x = y.$$

با فرض $\lambda = 1$ نتیجه می شود $\mu = 0$. از معادله سوم داریم $z = 0$ و از معادله چهارم داریم $x = y = 0$. در این حالت با جایگذاری در معادله پنجم به تناقض $0 = 1$ می رسیم.

با فرض $x = y$ از معادله پنجم بدست می آید:

$$z = 2y + 1$$

حال با جایگذاری در معادله چهارم، متغیر y را محاسبه می کنیم.

$$2y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

پس متغیرهای z و x بدست می آید. در نهایت حاصل دو نقطه زیر خواهد بود:

$$y = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, z = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$$p_1 = (-1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}) \Rightarrow f(p_1) = 6 - 4\sqrt{2}$$
$$p_2 = (-1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}) \Rightarrow f(p_2) = 6 + 4\sqrt{2}$$

که مقادیر مینیمم و ماکزیمم را دارند.

سوال۲۹

هر صفحه مماس بر سطح $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{\pi}$ محورهای مختصات را در نقاط A، B و C قطع میکند. ثابت کنید

$$\left\|\overrightarrow{oA}\right\|+\left\|\overrightarrow{oB}\right\|+\left\|\overrightarrow{oC}\right\|=\pi$$

فرض کنید $f(x,y,z)=0$ معادله رویه مورد نظر باشد.

$$f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{\pi}$$

$$\nabla f=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}).$$

معادله صفحه مماس بر رویه ی مورد نظر در یک نقطه دلخواه مانند (x_0,y_0,z_0) به صورت زیر است.

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}z=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x_0+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}y_0+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}z_0,$$

که نتیجه می دهد:

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z)=\frac{1}{2}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}),$$

حال چون $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ نقطه ای از رویه مورد نظر است، داریم:

$$\frac{x}{\sqrt{x_\circ}} + \frac{y}{\sqrt{y_\circ}} + \frac{z}{\sqrt{z_\circ}} = \sqrt{\pi}.$$

نقاط A, B, C که محل برخورد صفحه مماس با محورهای مختصات می باشند در معادله صفحه صدق می کنند. لذا داریم:

$$A = (a, \circ, \circ) \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{x_\circ}} + \circ + \circ = \sqrt{\pi} \Rightarrow a = \sqrt{x_\circ}\sqrt{\pi}$$

$$B = (\circ, b, \circ) \Rightarrow \circ + \frac{b}{\sqrt{y_\circ}} + \circ = \sqrt{\pi} \Rightarrow b = \sqrt{y_\circ}\sqrt{\pi}$$

$$C = (a, \circ, \circ) \Rightarrow \circ + \circ + \frac{c}{\sqrt{z_\circ}} = \sqrt{\pi} \Rightarrow c = \sqrt{z_\circ}\sqrt{\pi}$$

$$\|oA\| + \|oB\| + \|oC\| = a + b + c = \sqrt{\pi}(\underbrace{\sqrt{x_\circ} + \sqrt{y_\circ} + \sqrt{z_\circ}}_{\sqrt{\pi}}) = \pi.$$

سوال ۳۰

اگر $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ توابعی مشتق پذیر و $f(x, y) = h(g(x, y))$ باشد، دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

فرض کنید $u=g(x,y)$ در این صورت $f(x,y)=h(u)$ که در آن $u=g(x,y)$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=h'(u)\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=h'(u)\frac{\partial g}{\partial y}$$

لذا

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} h'(u)\frac{\partial g}{\partial x} & h'(u)\frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}=h'(u)\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}-h'(u)\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}=0.$$

سوال۳۱

نشان دهید معادله‌ی لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

در می‌آید.

مختصات استوانه‌ای:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z.$$

$$\begin{aligned}
u_r &= u_x x_r + u_y y_r + u_z z_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \\
u_{rr} &= (u_{xx} x_r + u_{xy} y_r)\cos\theta + (u_{yy} y_r + u_{yx} x_r)\sin\theta \\
&= u_{xx}\cos^{۲}\theta + ۲u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^{۲}\theta \\
u_\theta &= u_x x_\theta + u_y y_\theta + u_z z_\theta = (-r\sin\theta)u_x + (r\cos\theta)u_y \\
u_{\theta\theta} &= (-r\cos\theta)u_x + (-r\sin\theta)(u_{xx}x_\theta + u_{xy}y_\theta) + (-r\sin\theta)u_y \\
&+ (r\cos\theta)(u_{yy}y_\theta + u_{yx}x_\theta) \\
&= (-r\cos\theta)u_x + (-r\sin^{۲}\theta)u_{xx} + (۲r\sin\theta\cos\theta)u_{xy} \\
&+ (-r\cos^{۲}\theta)u_{yy} + (-r\sin\theta)u_y \\
&\Longrightarrow \frac{۱}{r^{۲}}u_{\theta\theta} + u_{rr} + u_{zz} + \frac{۱}{r}u_r = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = ۰
\end{aligned}$$

متشکر از توجه شما