توابع متعالی

تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
پاییز ۱۴۰۲

فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq -۱$. همان‌طور که در فصل قبل دیدیم

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c$$

حال می‌خواهیم حالتی که $n = -۱$ است را در نظر بگیریم و سعی کنیم جوابی برای $\int \frac{۱}{x} \, \mathrm{d}x$ بیابیم. به عبارت دیگر، هدف این است که تابع اولیه‌ای برای $f(x) = \frac{۱}{x}$ پیدا کنیم. برای این منظور، دامنه را محدود می‌کنیم به بازه‌ی $(۰, +\infty)$ و با استفاده از قضیه‌ی اساسی، تابع اولیه‌ای برای $f(x) = \frac{۱}{x}$ به‌صورت $\int_۱^x \frac{۱}{t} \, \mathrm{d}t$ بر بازه‌ی $(۰, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. در ادامه به بررسی ویژگی‌های این تابع می‌پردازیم.

تعریف

فرض کنید x عددی حقیقی و مثبت باشد. *لگاریتم طبیعی* x را با $\ln x$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ln x = \int_{۱}^{x} \frac{۱}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > ۰)$$

قضیه

تابع لگاریتم دارای خواص زیر است:

(۱) $\ln(۱) = ۰$.

(۲) به‌ازای هر $x > ۰$ داریم $(\ln x)' = \frac{۱}{x}$.

(۳) به‌ازای هر $x, y > ۰$ داریم:

$$\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$$

اثبات: فرض کنیم $x, y > ۰$. با ثابت در نظر گرفتن y و مشتق‌گیری از $\ln(xy)$ نسبت به x، داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln(xy)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{۱}^{xy} \frac{۱}{t}\,\mathrm{d}t\right) = y\frac{۱}{xy} = \frac{۱}{x}$$

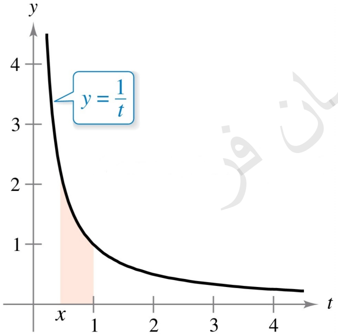
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln(xy) - \ln x\big) = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x} = ۰ \implies \ln(xy) - \ln x = c$$

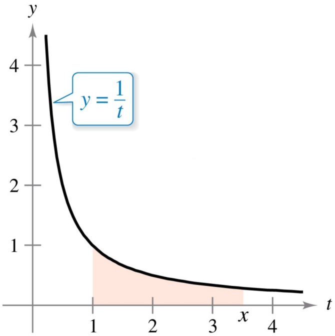
اگر قرار دهیم $x = ۱$، آن‌گاه

$$\ln y - \ln ۱ = c \implies \ln y = c \implies \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

تذکر

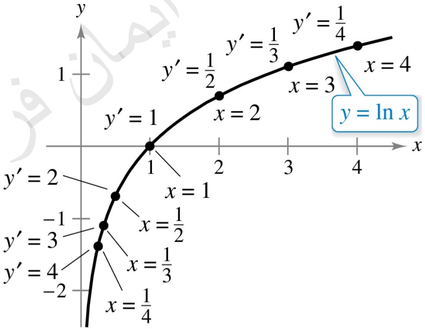
توجه می‌کنیم که اگر $x > ۱$، آن‌گاه $\ln x = \int_{۱}^{x} \frac{۱}{t}\,\mathrm{d}t > ۰$ و اگر $x < ۱$، آن‌گاه $\ln x = \int_{۱}^{x} \frac{۱}{t}\,\mathrm{d}t < ۰$.





تذکر

برای رسم نمودار تابع $y = \ln x$ توجه می‌کنیم که $(\ln x)' = \frac{۱}{x}$، پس تابع $y = \ln x$ بر بازه‌ی $(۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است. همچنین $(\ln x)'' = -\frac{۱}{x^۲} < ۰$، بنابراین تقعر نمودار $y = \ln x$ رو به پایین است. با استفاده از رابطه‌ی (۳) در قضیه‌ی بعد، می‌توان نشان داد که $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+} \ln x = -\infty$.



قضیه

لگاریتم طبیعی دارای ویژگی‌های زیر است:

(۱) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \qquad (x > 0)$

(۲) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \qquad (x, y > 0)$

(۳) $\ln\left(x^{r}\right) = r \ln x \qquad (x > 0,\ r \in \mathbb{Q})$

اثبات:

$$\ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0 \implies \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad (2)$$

(۳) قرار می‌دهیم $f(x) = \ln(x^r) - r\ln x$. در این صورت داریم:

$$f'(x) = \frac{rx^{r-1}}{x^r} - \frac{r}{x} = \frac{r}{x} - \frac{r}{x} = 0 \implies f(x) = c$$

$$f(1) = \ln(1^r) - r\ln 1 = \ln 1 - r\times 0 = 0 \implies c = 0$$

$$\implies f(x) = 0$$

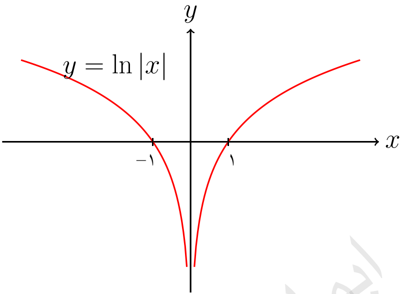
قضیه

به‌ازای هر عدد حقیقی b، دقیقا یک عدد حقیقی مثبت مانند a وجود دارد که $\ln a = b$.
(یعنی برد $\ln x$ کل اعداد حقیقی است.)

تعریف

به عدد حقیقی e که به‌ازای آن داریم $\ln \mathrm{e} = ۱$، *عدد نپر* گویند. بعدا ثابت می‌کنیم که e یک عدد گنگ است. مقدار تقریبی این عدد برابر است با:

$$\mathrm{e} \simeq ۲/۷۱۸$$



گزاره

نشان دهید به‌ازای هر $x \neq ۰$ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|x| = \frac{۱}{x}$$

اثبات:

$$\begin{cases} \text{if } x > ۰ \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|x| = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \dfrac{۱}{x} \\ \text{if } x < ۰ \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|x| = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(-x) = (-۱)\dfrac{۱}{-x} = \dfrac{۱}{x} \end{cases}$$

نکته

از گزاره‌ی قبل نتیجه می‌شود $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$. بنابراین، اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه به‌ازای xهایی که $f(x) \neq 0$ داریم $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
در نتیجه

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c}$$

به‌عنوان مثال می‌توان نوشت:

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c \qquad \int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c$$

یکی از ویژگی‌های مهم تابع $\ln x$ این است که به‌ازای هر x و y در بازه‌ی $(0, +\infty)$ داریم $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. حال تابع کلی $f(x)$ را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم به‌ازای هر $x, y > 0$ داشته باشیم:

$$\boxed{f(xy) = f(x) + f(y)} \qquad (*)$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1) \implies f(1) = 0$$

فرض کنیم $f(x)$ به‌ازای هر $x > 0$ مشتق داشته باشد. اگر در معادله‌ی $(*)$ متغیر y را ثابت گرفته و نسبت به x مشتق بگیریم، آنگاه داریم:

$$yf'(xy)=f'(x) \xRightarrow{x=1} yf'(y)=f'(1) \Rightarrow f'(y)=\frac{f'(1)}{y} \quad (\forall y>0)$$

بنابراین، f' بر هر بازه‌ی بسته‌ای در $\mathbb{R}^+$ پیوسته است و در نتیجه انتگرال‌پذیر است. طبق قضیه‌ی اساسی حساب، برای هر $x>0$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow f(x) &= \int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \frac{f'(1)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= f'(1)\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= f'(1)\ln x \end{aligned}$$

به‌طور خلاصه، اگر تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ در رابطه‌ی $(*)$ صدق کند، آن‌گاه به‌ازای هر $x > ۰$ داریم $f(x) = c\ln x$، که در آن c عددی ثابت است. به‌ازای $c = ۰$ حالت بدیهی پیش می‌آید. فرض کنیم $c \neq ۰$. از آنجا که برد تابع $\ln x$ کل اعداد حقیقی است، پس $f : (۰, +\infty) \to \mathbb{R}$ تابعی پوشا است. در نتیجه عدد حقیقی منحصر به فردی چون $a > ۰$ وجود دارد که

$$f(a) = ۱ \Rightarrow c\ln a = ۱ \Rightarrow c = \frac{۱}{\ln a} \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (a \neq ۱).$$

تعریف

فرض کنید $a > ۰$ و $۱ \neq a$ و $x > ۰$. **لگاریتم x در پایه‌ی a** را با $\log_a x$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

قضیه

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند و $a, b \neq ۱$. روابط زیر برای هر $x, y > ۰$ برقرار است:

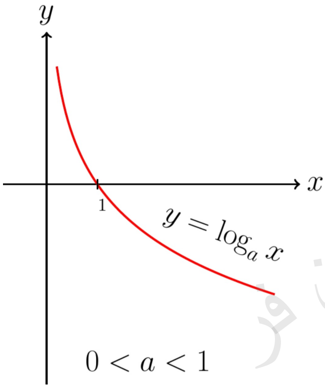
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a ۱ = ۰$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a \frac{۱}{x} = -\log_a x$$

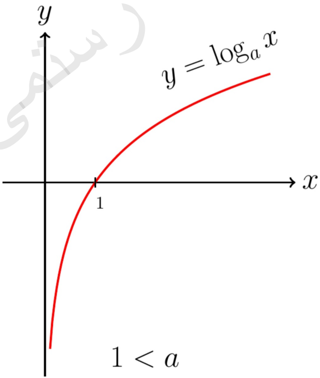
$$\log_a x^r = r \log_a x \quad (r \in \mathbb{Q}) \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & ۱ < a \\ -\infty & ۰ < a < ۱ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to ۰^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & ۱ < a \\ +\infty & ۰ < a < ۱ \end{cases}$$



y
x
1
$y = \log_a x$
$0 < a < 1$



y
x
1
$y = \log_a x$
$1 < a$

نکته

فرض کنید $f(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد. به‌ازای xهایی که $f(x) \neq 0$، تعریف می‌کنیم $g(x) = \ln|f(x)|$. در این صورت داریم:

$$g'(x) = f'(x)\frac{1}{f(x)} \implies f'(x) = f(x)g'(x).$$

مثال

مشتق تابع $f(x) = x^{۲}\left(۱ + x^{۴}\right)^{-۷}\cos x$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$g(x) = \ln|f(x)| = \ln\left|x^{۲}\right| + \ln\left|\left(۱ + x^{۴}\right)^{-۷}\right| + \ln|\cos x|$$

$$= ۲\ln|x| - ۷\ln\left|\left(۱ + x^{۴}\right)\right| + \ln|\cos x|$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{۲}{x} - \frac{۲۸x^{۳}}{۱ + x^{۴}} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(x)f(x) = \frac{۲x\cos x}{\left(۱ + x^{۴}\right)^{۷}} - \frac{۲۸x^{۵}\cos x}{\left(۱ + x^{۴}\right)^{۸}} - \frac{x^{۲}\sin x}{\left(۱ + x^{۴}\right)^{۷}}.$$

مثال

اگر $f(x)=\dfrac{(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲+۱)(x^۲+۳)}$، آن‌گاه $f'(۲)$ را بیابید.

پاسخ:

$$g(x)=\ln|f(x)|=\ln|x^۲-۱|+\ln|x^۲-۳|-\ln(x^۲+۱)-\ln(x^۲+۳)$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{۲x}{x^۲-۱}+\frac{۲x}{x^۲-۳}-\frac{۲x}{x^۲+۱}-\frac{۲x}{x^۲+۳}$$

$$\Rightarrow g'(۲)f(۲)=f'(۲),\qquad f(۲)=\frac{۳\times۱}{۵\times۷}=\frac{۳}{۳۵}$$

$$\Rightarrow f'(۲)=\frac{۳}{۳۵}\left(\frac{۴}{۳}+\frac{۴}{۱}-\frac{۴}{۵}-\frac{۴}{۷}\right)=\cdots$$

تعریف

تابع $f(x)$ را **یک‌به‌یک** گوییم، هرگاه به‌ازای هر دو نقطه‌ی $x_1, x_2 \in D_f$ که $x_1 \neq x_2$، داشته باشیم $f(x_1) \neq f(x_2)$. به عبارت دیگر، f یک‌به‌یک است، هرگاه

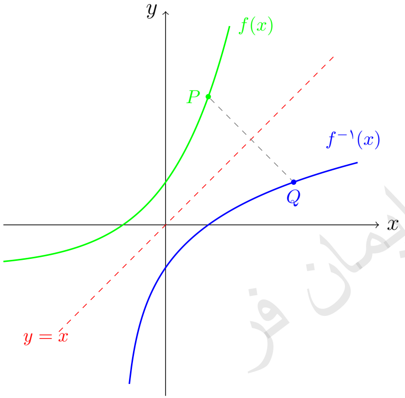
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

گزاره

اگر $f(x)$ تابعی یک‌به‌یک و پیوسته بر بازه‌ی I باشد، آنگاه $f(x)$ بر بازه‌ی I یا اکیدا صعودی است یا اکیدا نزولی.

تعریف

اگر $f(x)$ تابعی یک‌به‌یک باشد، آنگاه وارون یا معکوس دارد، که آنرا با f^{-1} نمایش می‌دهیم. مقدار $f^{-1}(x)$ عبارت است از عدد یکتای y متعلق به دامنه‌ی f که به‌ازای آن داریم $f(y) = x$.



$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$D_{f^{-1}} = R_f, \quad R_{f^{-1}} = D_f$$

$$f^{-1} : R_f \to D_f, \quad f : D_f \to R_f$$

$$\forall x \in D_f : f^{-1}(f(x)) = x,$$

$$\forall x \in D_{f^{-1}} : f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

نمودار f^{-1} بازتاب نمودار f نسبت به خط $y = x$ است.

گزاره

فرض کنید f تابعی یک‌به‌یک بر بازه‌ی I باشد و در هر نقطه‌ی این بازه مشتق ناصفر داشته باشد. در این صورت، $y = f^{-1}(x)$ نیز مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

تابع $\mathbb{R} \to (0, +\infty) :\ln$ اکیدا صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک است. یعنی $\ln$ وارون دارد. وارون $\ln$ را *تابع نمایی* می‌نامیم و با E نمایش می‌دهیم.

- به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، مقدار $E(x)$ را مساوی آن yای تعریف می‌کنیم که لگاریتم‌اش (بر پایه‌ی e) x است. یعنی $y = E(x)$ به معنی $x = \ln y$.
- برای تابع نمایی $E(x) \colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ داریم:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \ln\big(E(x)\big) = x, \qquad \forall\, y \in (0, +\infty) :\ E\big(\ln(y)\big) = y.$$

قضیه

تابع نمایی دارای خواص زیر است:

(۱) $E(۰) = ۱$ و $E(۱) = \mathrm{e}$.

(۲) به‌ازای هر عدد حقیقی x داریم $E'(x) = E(x)$.

(۳) به‌ازای هر a و b داریم $E(a+b) = E(a)E(b)$.

اثبات:

(۱) کافی است توجه کنیم که $\ln 1 = 0$ و $\ln \mathrm{e} = 1$.

(۲) فرض کنیم $f(x) = \ln x$ و $f^{-1}(x) = E(x)$. در این صورت داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \Rightarrow E'(x) = \frac{1}{\frac{1}{E(x)}} = E(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

(۳) فرض کنیم $E(a) = x$، $E(b) = y$ و $\ln(xy) = c$. در این صورت داریم:

$$E(c) = xy, \quad \ln y = b, \quad \ln x = a,$$
$$c = \ln(xy) = \ln x + \ln y = a + b \Rightarrow c = a + b,$$
$$E(c) = xy \xRightarrow{c=a+b} E(a+b) = xy = E(a)E(b).$$

قضیه

اگر $r \in \mathbb{Q}$، r، آن‌گاه $E(r) = \mathrm{e}^r$.

اثبات: از رابطه‌ی $E(a+b) = E(a)E(b)$ می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n داریم:

$$E(na) = \big(E(a)\big)^n \xrightarrow{a=\frac{۱}{n}} E(۱) = E\Big(n \times \frac{۱}{n}\Big) = \Big(E\big(\frac{۱}{n}\big)\Big)^n$$

$$\Rightarrow \mathrm{e} = E(۱) = \Big(E\big(\frac{۱}{n}\big)\Big)^n \Rightarrow E\Big(\frac{۱}{n}\Big) = e^{\frac{۱}{n}}.$$

$$E(na) = \big(E(a)\big)^n \xrightarrow[m\in\mathbb{N}]{a=\frac{۱}{m}} E(n \times \frac{۱}{m}) = \Big(E\big(\frac{۱}{m}\big)\Big)^n = \Big(e^{\frac{۱}{m}}\Big)^n$$

$$\Rightarrow E\Big(\frac{n}{m}\Big) = e^{\frac{n}{m}} \xrightarrow{r\in\mathbb{Q}, r>۰} E(r) = e^r.$$

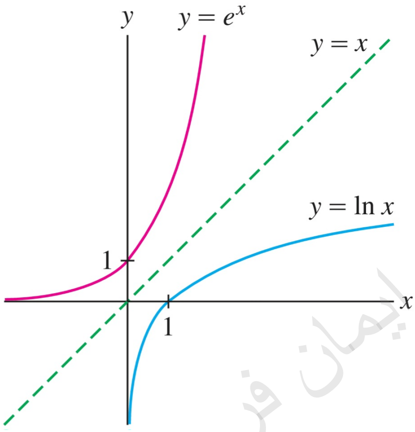
در صورتی که $r \in \mathbb{Q}$ و $r > ۰$، داریم:

$$E(-r)E(r) = E\big(r + (-r)\big) = E(۰) = ۱$$
$$\Rightarrow E(-r) = \frac{۱}{E(r)} = \frac{۱}{\mathrm{e}^r} = \mathrm{e}^{-r}.$$

مشاهده کردیم که برای اعداد گویا تساوی $E(r) = e^r$ را داریم. چنانچه r عددی گنگ باشد، آنگاه دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{r_n\}$ وجود دارد به‌طوری که $r_n \to r$. از پیوستگی تابع $E(x)$ نتیجه می‌شود که

$$E(r) = \lim_{n\to+\infty} E(r_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{r_n}.$$

از این پس $E(r)$ در بحث فوق را e به توان r می‌نامیم و آن را با e^r نمایش می‌دهیم. پس به‌ازای هر $r \in \mathbb{R}$ داریم $E(r) = \mathrm{e}^r$ و لذا از این پس به جای $E(x)$ از e^x استفاده خواهیم کرد.



$$y = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\ln x : (\circ, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{e}^x : \mathbb{R} \to (\circ, +\infty)$$

$$\lim_{x \to \circ^+} \ln x = -\infty$$

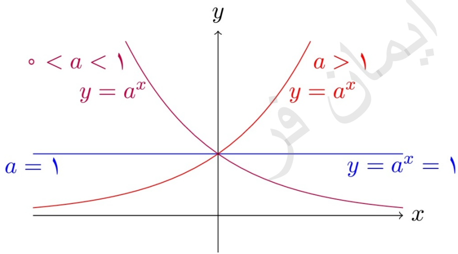
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \circ$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \implies \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c}$$

می‌دانیم e^x نشان‌گر آن yای است که $x = \ln y = \log_{\mathrm{e}} y$. به همین شکل، می‌گوییم a^x نشان‌گر آن yای باشد که $\log_a y = x$. مشکل این تعریف این است که شامل $a = ۱$ نمی‌باشد. راه دیگر، تعریف آن به‌صورت $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ است. در این صورت a^x برای $a > ۰$ تعریف شده است. این تعریف برای ما مناسب‌تر است، زیرا بررسی ویژگی‌های a^x با این تعریف ساده‌تر است.



تعریف

برای $a > ۰$، تابع $a^x : \mathbb{R} \to (۰, +\infty)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}}$$

قضیه

فرض کنید $a > ۰$ و x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند. داریم:

(۱) $a^{\circ} = ۱$ (۲) $\ln a^x = x \ln a$ (۳) $a^{x+y} = a^x a^y$

(۴) $a^{-x} = \frac{۱}{a^x}$ (۵) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ (۶) $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$

(۷) هرگاه $a \neq ۱$، آن‌گاه $y = a^x$ اگر و فقط اگر $x = \log_a y$ $(y > ۰)$.

اثبات:

(۷) فرض کنید $۰ < a \neq ۱$، $x \in \mathbb{R}$ و $y = a^x$. در این صورت داریم:

$$\log_a y = \log_a(a^x) = \frac{\ln a^x}{\ln a} = \frac{x \ln a}{\ln a} = x \implies \log_a (a^x) = x.$$

حال فرض کنیم $x = \log_a y$. داریم:

$$a^x = a^{\log_a y} = \mathrm{e}^{(\log_a y)\ln a} = \mathrm{e}^{\frac{\ln y}{\ln a}\times \ln a} = \mathrm{e}^{\ln y} = y$$

$$\Longrightarrow \quad a^{\log_a y} = y \qquad (a, y > ۰, a \neq ۱).$$

نتیجه

۱) $\log_a (a^x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}, a > ۰, a \neq ۱)$

۲) $a^{\log_a x} = x \qquad (a, x > ۰, a \neq ۱)$

۳) $\log_a (x^y) = y \log_a x \qquad (y \in \mathbb{R}, a, x > ۰, a \neq ۱)$

فرض کنیم $a > ۰$. به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)' = \ln a \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right) = a^x \ln a.$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = (a^x)' = a^x \ln a \implies \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c}$$

قضیه

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند و $f(x) > ۰$، آن‌گاه مشتق تابع $y = (f(x))^{g(x)}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y' = (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right).$$

اثبات:

$$y = (f(x))^{g(x)} \implies \ln y = g(x) \ln f(x)$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق‌گیری از طرفین}} y' \times \frac{۱}{y} = g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)$$

$$\implies y' = (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x) g(x)}{f(x)} \right).$$

مثال

مشتق توابع زیر را محاسبه کنید:

۱) $y = x^x \qquad (x > 0)$

۲) $y = (\sin t)^{\ln t} \qquad (0 < t < \pi)$

پاسخ:

۱) $$y = x^x \implies \ln y = x \ln x \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق‌گیری از طرفین}} \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{x}{x}$$

$$\implies y' = x^x(\ln x + 1).$$

۲) $$y = (\sin t)^{\ln t} \implies \ln y = (\ln t)\ln(\sin t)$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به } t]{\text{مشتق‌گیری از طرفین}} \frac{y'}{y} = \frac{1}{t}\ln(\sin t) + (\ln t)\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\implies y' = (\sin t)^{\ln t}\left(\frac{\ln(\sin t)}{t} + (\ln t)\cot t\right).$$

مثال

کدام یک از اعداد e^{π} و π^{e} بزرگتر است؟

پاسخ:

$$e^{\pi} \,\square\, \pi^{e} \iff \pi \ln e \,\square\, e \ln \pi \iff \frac{\ln e}{e} \,\square\, \frac{\ln \pi}{\pi}$$

تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را به‌ازای $x > ۰$ در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$f'(x) = \frac{۱ - \ln x}{x^{۲}} = ۰ \implies x = e$$

$$\implies \begin{cases} \text{if } x > e \Rightarrow f'(x) < ۰ \\ \text{if } x < e \Rightarrow f'(x) > ۰ \end{cases} \xRightarrow{\text{آزمون مشتق اول}} \text{در } x = e \text{ ماکسیمم دارد } f(x)$$

$$\implies f(e) > f(\pi) \implies \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \implies e^{\pi} > \pi^{e}.$$

قضیه رشد

فرض کنید $a > 0$ دلخواه باشد. داریم:

(۱) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

(۲) $$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x = 0$$

(۳) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^x} = 0$$

(۴) $$\lim_{x \to -\infty} |x|^a \mathrm{e}^x = 0$$

نکته

رشد $\ln x$ < رشد x^a < رشد e^x

اثبات:

(۱) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0.$$

(۲) $$\lim_{x\to 0^+}x^a\ln x\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u^a}\ln\left(\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{(-\ln u)}{u^a}\overset{(1)}{=\!=}0.$$

(۳) قرار می‌دهیم $u=\mathrm{e}^x$. بنابراین $x=\ln u$. همچنین $x\to+\infty$ اگر و تنها اگر $u\to+\infty$. لذا داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\mathrm{e}^x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{(\ln u)^a}{\mathrm{e}^{\ln u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{(\ln u)^a}{u}=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\ln u}{u^{\frac{1}{a}}}\right)^a\overset{(1)}{=\!=}0$$

(۴) $$\lim_{x\to-\infty}|x|^a\mathrm{e}^x\overset{u=-x}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}|u|^a\mathrm{e}^{-u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^a}{\mathrm{e}^u}\overset{(3)}{=\!=}0$$

قضیه

$$\lim_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{\alpha}.$$

اثبات:

$$y=\left(۱+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}\implies \ln y = x\ln\left(۱+\frac{\alpha}{x}\right)=\frac{\ln\left(۱+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(۱+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\alpha}{x^{۲}}\frac{۱}{۱+\frac{\alpha}{x}}}{-\frac{۱}{x^{۲}}}=\alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln y=\alpha\Rightarrow \mathrm{e}^{\left(\lim_{x\to+\infty}\ln y\right)}=\mathrm{e}^{\alpha}$$

$$\xRightarrow{\text{پیوستگی } \mathrm{e}^{x}}\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\ln y}=\lim_{x\to+\infty}y=\mathrm{e}^{\alpha}.$$

قضیه

$$\lim_{x\to+\infty}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = ۱.$$

اثبات:

$$y=(۱+x)^{\frac{۱}{x}} \Longrightarrow \ln y = \frac{۱}{x}\ln(۱+x) = \frac{\ln(۱+x)}{x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln y = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(۱+x)}{x} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{۱+x}}{۱} = ۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln y = ۰ \Rightarrow \mathrm{e}^{\left(\lim_{x\to+\infty}\ln y\right)} = \mathrm{e}^{۰} = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{پیوستگی } \mathrm{e}^x} \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\ln y} = \lim_{x\to+\infty} y = ۱.$$

قضیه

اگر $x > ۰$، آن‌گاه $\ln x \leq x - ۱$.

اثبات: نشان می‌دهیم به‌ازای هر $x > ۰$ داریم $f(x) = \ln x - x + ۱ \leq ۰$.

$$f'(x) = \frac{۱}{x} - ۱ = ۰ \implies x = ۱ \implies \begin{cases} \text{if } x > ۱ \Rightarrow f'(x) < ۰ \\ \text{if } ۰ < x < ۱ \Rightarrow f'(x) > ۰ \end{cases}$$

$\xRightarrow{\text{آزمون مشتق اول}}$ $f(x)$ در $x = ۱$ ماکسیمم دارد $\implies f(x) \leq f(۱) \quad (\forall x > ۰)$

$$\implies \ln x + ۱ - x \leq \ln ۱ + ۱ - ۱ = ۰ \implies \ln x \leq x - ۱.$$

مثال

حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to+\infty} \left(x+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$(3)\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

پاسخ:

$$(۱)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-۱}}{e^x}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\dots\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=۰.$$

$$(۲)\quad y=\left(x+e^x+e^{۲x}\right)^{\frac{۱}{x}}\Longrightarrow \ln y=\frac{۱}{x}\ln\left(x+e^x+e^{۲x}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+e^x+e^{۲x}\right)}{x}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\left(۱+e^x+۲e^{۲x}\right)}{x+e^x+e^{۲x}}}{۱}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(۱+e^x+۲e^{۲x}\right)}{x+e^x+e^{۲x}}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x+۴e^{۲x}\right)}{۱+e^x+۲e^{۲x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{۲x}\left(\frac{۱}{e^x}+۴\right)}{e^{۲x}\left(\frac{۱}{e^{۲x}}+\frac{۱}{e^x}+۲\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{e^x}+۴}{\frac{۱}{e^{۲x}}+\frac{۱}{e^x}+۲}=۲$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\ln y=۲\Rightarrow e^{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y\right)}=e^{۲}$$

$$\xRightarrow{\text{پیوستگی } e^x}\lim_{x\to+\infty}e^{\ln y}=\lim_{x\to+\infty}y=e^{۲}.$$

$$(۳)\quad y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{۱}{x^۲}} \Longrightarrow \ln y=\frac{۱}{x^۲}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\ln y=\lim_{x\to ۰}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^۲}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{x\cos x-\sin x}{۲x^۲\sin x}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{-x\sin x}{۴x\sin x+۲x^۲\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x}{۴\sin x+۲x\cos x}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{-\cos x}{۴\cos x+۲\cos x-۲x\sin x}=-\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\ln y=-\frac{۱}{۶}\Rightarrow e^{\left(\lim_{x\to ۰}\ln y\right)}=e^{-\frac{۱}{۶}}$$

$$\xRightarrow{\text{پیوستگی } e^x}\lim_{x\to ۰}e^{\ln y}=\lim_{x\to ۰}y=e^{-\frac{۱}{۶}}.$$

تابع وارون $\sin x$

فرآیند معکوس‌سازی را می‌توان در مورد توابع مثلثاتی به کار برد. برای این منظور، تابع $\sin x$ را به بازه‌ای محدود می‌کنیم که در آن یکنوا باشد. مثلا می‌توان بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$، $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ یا $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ را در نظر گرفت. اینکه کدام بازه را انتخاب کنیم اهمیتی ندارد. تحدید تابع $\sin x$ را به بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ در نظر می‌گیریم.

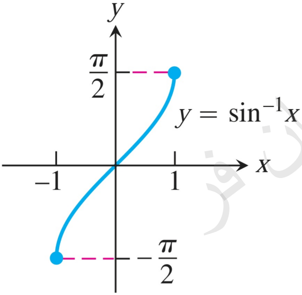
$$f(x) = \sin x \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

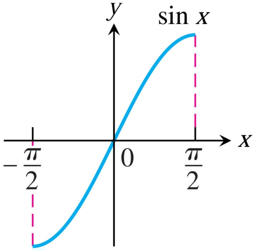
چون $f(x) = \sin x$ یک‌به‌یک است، پس تابع وارون (معکوس) آن موجود است و آن‌را با $\sin^{-1} x$ یا $\arcsin x$ نمایش می‌دهیم.

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y.$$

$$\sin x : [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}] \rightarrow [-۱, ۱],$$

$$\sin^{-۱} x : [-۱, ۱] \rightarrow [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}].$$





مسئله

مشتق $\sin^{-۱} x$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$y = \sin^{-۱} x \iff x = \sin y, \quad \big(-\frac{\pi}{۲} \leq y \leq \frac{\pi}{۲}\big).$$

$$\left(f^{-۱}\right)'(x) = \frac{۱}{f'\big(f^{-۱}(x)\big)} \implies y' = \frac{۱}{\cos y}$$

$$\xrightarrow{\cos y \geq ۰} y' = \frac{۱}{\sqrt{\cos^۲ y}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \sin^۲ y}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}.$$

توجه شود که در تساوی آخر باید داشته باشیم $-\frac{\pi}{۲} < y < \frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $-۱ < x < ۱$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,\mathrm{d}x = \sin^{-1}x + c$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}$$

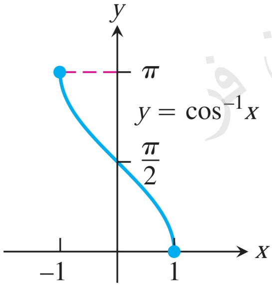
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}\,\mathrm{d}x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

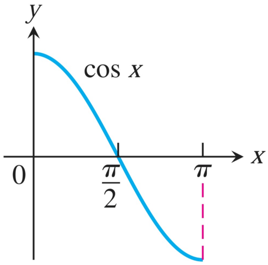
تابع وارون $\cos x$

تابع $\cos x = f(x)$ بر بازه‌ی $[۰, \pi]$ یک‌به‌یک و لذا دارای وارون (معکوس) است. تابع وارون آن‌را با $\cos^{-۱} x$ یا $\arccos x$ نمایش می‌دهیم.

$$y = \cos^{-۱} x \iff x = \cos y$$

$$\cos x : [۰, \pi] \to [-۱, ۱], \qquad \cos^{-۱} x : [-۱, ۱] \to [۰, \pi].$$





می‌دانیم $\cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$. اگر $0 \leq y \leq \pi$، آن‌گاه $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$.
بنابراین داریم:

$$y = \cos^{-1} x \iff x = \cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$$

$$\iff \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$$

$$\iff \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

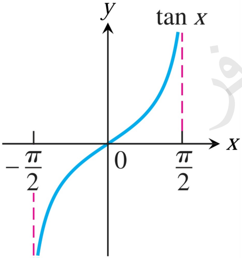
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

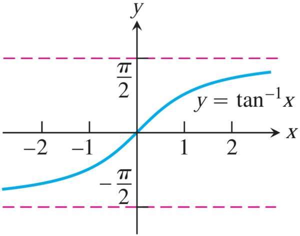
تابع وارون $\tan x$

تابع $f(x) = \tan x$ بر بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ یک‌به‌یک و لذا دارای وارون (معکوس) است.
تابع وارون آنرا با $\tan^{-۱} x$ یا $\arctan x$ نمایش می‌دهیم.

$$y = \tan^{-۱} x \iff x = \tan y$$

$$\tan x : (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \to \mathbb{R}, \qquad \tan^{-۱} x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}).$$





مسئله

مشتق $\tan^{-۱} x$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$y = \tan^{-۱} x \iff x = \tan y, \quad \left(-\frac{\pi}{۲} < y < \frac{\pi}{۲}\right).$$

$$(f^{-۱})'(x) = \frac{۱}{f'(f^{-۱}(x))} \implies y' = \frac{۱}{۱ + \tan^{۲} y}$$

$$\xRightarrow{x=\tan y} y' = \frac{۱}{۱ + x^{۲}}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1} x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tan^{-1} x + c$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{a^2+x^2}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

مثال

ثابت کنید اگر $x \neq -۱$، آن‌گاه $\tan^{-۱}\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right) = \tan^{-۱} x - \frac{\pi}{۴}$.

پاسخ: به‌ازای هر $x \neq -۱$ تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \tan^{-۱}\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right) - \tan^{-۱} x.$$

نشان می‌دهیم $f'(x) = ۰$.

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\tan^{-۱}\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)\right)' - \left(\tan^{-۱} x\right)'$$

$$= \frac{۱}{۱+\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)^۲} \times \frac{(x+۱)-(x-۱)}{(x+۱)^۲} - \frac{۱}{۱+x^۲}$$

$$= \frac{(x+۱)^۲}{(x^۲+۲x+۱)+(x^۲-۲x+۱)} \times \frac{۲}{(x+۱)^۲} - \frac{۱}{۱+x^۲}$$
$$= \frac{۲}{۲+۲x^۲} - \frac{۱}{۱+x^۲} = ۰.$$

بنابراین $f(x)$ تابعی ثابت است. فرض کنیم $f(x) = c$. داریم:

$$c = f(۰) = \tan^{-۱}(-۱) - \tan^{-۱}(۰) = -\frac{\pi}{۴}$$

$$\Longrightarrow\ f(x) = \tan^{-۱}\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right) - \tan^{-۱} x = -\frac{\pi}{۴}.$$

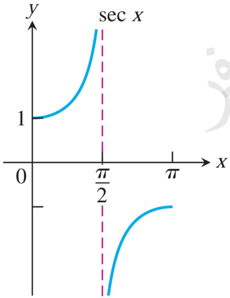
تابع وارون $\sec x$

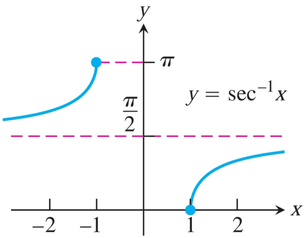
تابع $f(x) = \sec x$ بر بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ یک‌به‌یک و لذا دارای وارون (معکوس) است. تابع وارون آن‌را با $\sec^{-1} x$ نمایش می‌دهیم.

$$y = \sec^{-1} x \iff x = \sec y$$

$$\sec x : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty),$$

$$\sec^{-1} x : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi].$$





$$y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow x = \sec y = \frac{1}{\cos y} \Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{x} \iff y = \cos^{-1}(\frac{1}{x}).$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(\frac{1}{x}) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec^{-1} x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \times (\frac{-1}{x^2})$$

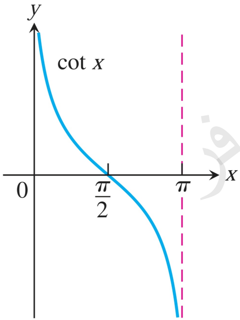
$$= \frac{1}{x^2} \times \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

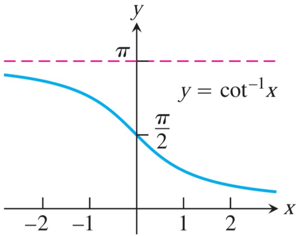
$$\boxed{\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{d}x = \sec^{-1} x + c}$$

$$y = \cot^{-۱} x \iff x = \cot y$$

$$\cot x\colon (۰, \pi) \to \mathbb{R}, \qquad \cot^{-۱} x\colon \mathbb{R} \to (۰, \pi).$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cot^{-۱} x = \frac{-۱}{۱ + x^{۲}} \qquad \int \frac{-۱}{۱ + x^{۲}} \, \mathrm{d}x = \cot^{-۱} x + c}$$



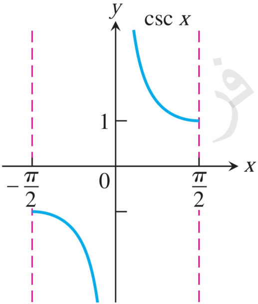


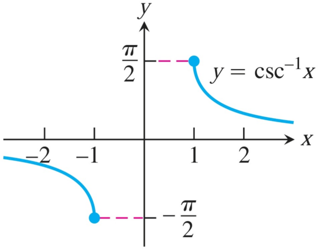
$$y = \csc^{-۱} x \iff x = \csc y$$

$$\csc x : [-\frac{\pi}{۲}, ۰) \cup (۰, \frac{\pi}{۲}] \to (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty),$$

$$\csc^{-۱} x : (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty) \to [-\frac{\pi}{۲}, ۰) \cup (۰, \frac{\pi}{۲}].$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \csc^{-۱} x = \frac{-۱}{|x|\sqrt{x^۲ - ۱}} \qquad \int \frac{-۱}{|x|\sqrt{x^۲ - ۱}}\,\mathrm{d}x = \csc^{-۱} x + c}$$





فرض کنید تابع $f(x)$ نسبت به مبدا متقارن باشد. آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{۲}}_{\text{تابع زوج}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{۲}}_{\text{تابع فرد}}$$

بنابراین $f(x)$ را می‌توان به‌صورت جمع دو تابع زوج و فرد نوشت. حال توابع زوج و فردی که مجموع آن‌ها e^x است را در نظر می‌گیریم. یعنی:

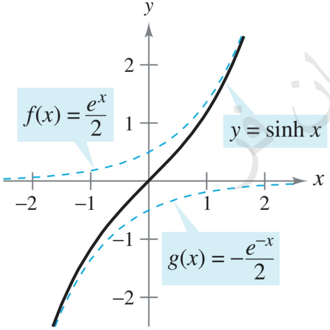
$$\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{۲} + \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{۲}$$

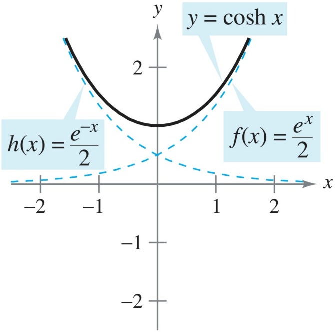
این توابع ویژگی‌های جالبی دارند که در ادامه بررسی خواهیم کرد.

تعریف

به‌ازای هر عدد حقیقی x، سینوس هایپربولیک (سینوس هذلولوی) $\sinh x$ و تابع کسینوس هایپربولیک (کسینوس هذلولوی) $\cosh x$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{۲} \qquad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲}$$





مسئله

ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\boxed{\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = ۱}$$

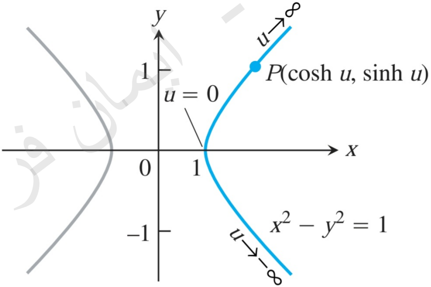
پاسخ:

$$\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{۲}\right)^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۴}\Big(\cancel{e^{۲x}} + ۲ + \cancel{e^{-۲x}} - (\cancel{e^{۲x}} - ۲ + \cancel{e^{-۲x}})\Big) = ۱$$

نکته

بنابراین به‌ازای هر $u \in \mathbb{R}$، نقطه‌ی $P = (\cosh u, \sinh u)$ روی شاخه‌ی سمت راست هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$ قرار دارد.



برخی خواص توابع هایپربولیک

(۱) $\sinh(۰) = ۰$

(۲) $\cosh(۰) = ۱$

(۳) $\sinh(-x) = -\sinh x$

(۴) $\cosh(-x) = \cosh x$

(۵) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

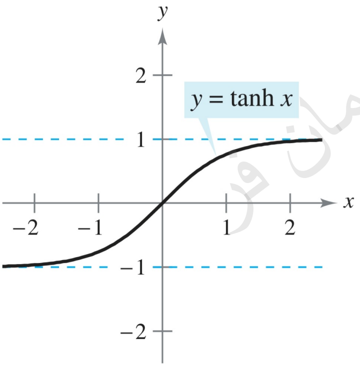
(۶) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

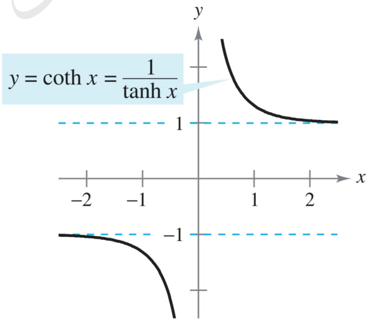
(۷) $\cosh(۲x) = \cosh^۲ x + \sinh^۲ x = ۱ + ۲\sinh^۲ x = ۲\cosh^۲ x - ۱$

(۸) $\sinh(۲x) = ۲\sinh x \cosh x$

تعریف

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

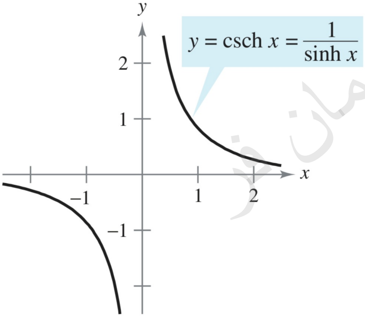


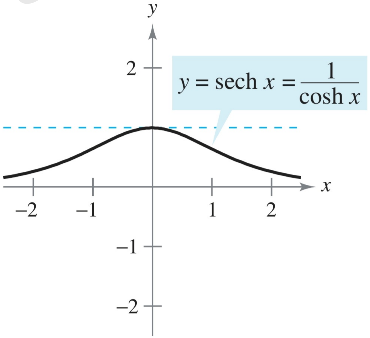


تعریف

$$\operatorname{csch} x = \frac{۱}{\sinh x} = \frac{۲}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{۱}{\cosh x} = \frac{۲}{e^{x} + e^{-x}}$$





مشتق

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

تابع وارون $\sinh x$

تابع $\sinh x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اکیدا صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است. تابع وارون آن‌را با $\sinh^{-1} x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

مسئله

نشان دهید به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sinh^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \sinh^{-1} x + c}$$

پاسخ:

$$y = \sinh^{-1} x \iff x = \sinh y = \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2\mathrm{e}^{y}}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{e}^{y})^{2} - 2x\mathrm{e}^{y} - 1 = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{y} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^{2} + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^{2} + 1}$$

$$\mathrm{e}^{y} > 0, x < \sqrt{x^{2} + 1} \Rightarrow \mathrm{e}^{y} \neq x - \sqrt{x^{2} + 1} \Rightarrow e^{y} = x + \sqrt{x^{2} + 1}$$

$$\Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^{2} + 1}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh^{-1} x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\left(x + \sqrt{x^{2} + 1}\right) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+1}}}{x + \sqrt{x^{2} + 1}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x^{2}+1}+x}{\sqrt{x^{2}+1}}}{x + \sqrt{x^{2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^{2} + 1}}$$

تابع وارون $\cosh x$

تابع $\cosh x : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ اکیدا صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است. تابع وارون آن‌را با $\cosh^{-1} x : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ نمایش می‌دهیم.

مسئله

تساوی‌های زیر را ثابت کنید؛

$$\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad (x \geq 1)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cosh^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1)$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x = \cosh^{-1} x + c \qquad (x > 1)}$$

پاسخ:

$$y=\cosh^{-۱}x \iff x=\cosh y=\frac{e^{y}+e^{-y}}{۲}=\frac{e^{۲y}+۱}{۲e^{y}}$$

$$\Rightarrow (e^{y})^{۲}-۲xe^{y}+۱=۰ \Rightarrow e^{y}=\frac{۲x\pm\sqrt{۴x^{۲}-۴}}{۲}=x\pm\sqrt{x^{۲}-۱}$$

$$y=\cosh^{-۱}x\geq ۰ \implies e^{y}\geq ۱ \Rightarrow e^{y}=\begin{cases} x-\sqrt{x^{۲}-۱} & \text{غ.ق.ق} \\ x+\sqrt{x^{۲}-۱} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\cosh^{-۱}x=\ln\left(x+\sqrt{x^{۲}-۱}\right)} \quad (x\geq ۱)$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-۱}x=\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^{۲}-۱}\right)=\frac{۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}-۱}}}{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x^{۲}-۱}+x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}}{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}} \quad (x>۱)$$

تابع وارون $\tanh x$

تابع $\tanh x\colon \mathbb{R} \to (-۱, ۱)$ اکیدا صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.
تابع‌وارون آن‌را با $\tanh^{-۱} x\colon (-۱, ۱) \to \mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

مسئله

نشان دهید به‌ازای هر $x \in (-۱, ۱)$ داریم:

$$\tanh^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲} \ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right) \qquad (-۱ < x < ۱)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tanh^{-۱}(x)\right) = \frac{۱}{۱-x^{۲}} \qquad (-۱ < x < ۱)$$

$$\boxed{\int \frac{۱}{۱-x^{۲}}\,\mathrm{d}x = \tanh^{-۱} x + c \qquad (-۱ < x < ۱)}$$

پاسخ:

$$y = \tanh^{-1} x \iff x = \tanh y = \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x} \Rightarrow \boxed{y = \tfrac{1}{2} \ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right)} \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh^{-1} x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \frac{1}{2} \frac{\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^{2}}}{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1}{1 - x^{2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

تابع وارون $\coth x$

تابع $\coth x : \mathbb{R} - \{۰\} \to (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty)$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. تابع‌وارون آن‌را با $\coth^{-۱} x : (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty) \to \mathbb{R} - \{۰\}$ نمایش می‌دهیم.

مسئله

نشان دهید که اگر $|x| > ۱$، آن‌گاه داریم:

$$\coth^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲} \ln\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right) \qquad (|x| > ۱)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\coth^{-۱}(x)\right) = \frac{۱}{۱-x^۲} \qquad (|x| > ۱)$$

$$\boxed{\int \frac{۱}{۱-x^۲}\,\mathrm{d}x = \coth^{-۱} x + c \qquad (|x| > ۱)}$$

پاسخ:

$$y=\coth^{-1}x \iff x=\coth y=\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}=\frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{2y}=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow \boxed{y=\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{x+1}{x-1}\right)} \qquad (|x|>1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\coth^{-1}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^{2}}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{x^{2}-1}=\frac{1}{1-x^{2}} \qquad (|x|>1)$$

تابع وارون $\operatorname{sech} x$

تابع $\operatorname{sech} x\colon [0,+\infty) \to (0,1]$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. تابع‌وارون آن‌را با $\operatorname{sech}^{-1} x\colon (0,1] \to [0,+\infty)$ نمایش می‌دهیم.

مسئله

تساوی‌های زیر را ثابت کنید؛

$$\operatorname{sech}^{-1}(x) = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 < x \leq 1)$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{sech}^{-1}(x)\right) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad (0 < x < 1)$$

$$\boxed{\int \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{sech}^{-1} x + c \qquad (0 < x < 1)}$$

پاسخ:

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \iff x = \operatorname{sech} y = \frac{1}{\cosh y}$$

$$\xRightarrow{\cosh y \geq 1} \frac{1}{x} = \cosh y \xRightarrow{0 < x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 1} \boxed{y = \operatorname{sech}^{-1}(x) = \cosh^{-1}(\tfrac{1}{x})}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{x})^2 - 1}}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \frac{|x|}{\sqrt{1 - x^2}} \overset{x>0}{=\!=} -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} \qquad (0 < x < 1)$$

تابع وارون $\operatorname{csch} x$

تابع $\operatorname{csch} x \colon \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. تابع وارون آن‌را با $\operatorname{csch}^{-1} x \colon \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\}$ نمایش می‌دهیم.

مسئله

نشان دهید به‌ازای هر $x \neq 0$ داریم:

$$\operatorname{csch}^{-1}(x) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{csch}^{-1}(x)\right) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{\int \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{csch}^{-1} x + c}$$

پاسخ:

$$y = \operatorname{csch}^{-۱} x \iff x = \operatorname{csch} y = \frac{۱}{\sinh y}$$

$$\xRightarrow{\cosh y \geq ۱} \frac{۱}{x} = \sinh y \Rightarrow \boxed{y = \operatorname{csch}^{-۱}(x) = \sinh^{-۱}(\tfrac{۱}{x})}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{csch}^{-۱} x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh^{-۱}(\frac{۱}{x}) = \frac{-۱}{x^۲} \frac{۱}{\sqrt{۱ + (\frac{۱}{x})^۲}}$$

$$= \frac{-۱}{x^۲} \frac{|x|}{\sqrt{x^۲ + ۱}} = \frac{-۱}{|x|\sqrt{۱ + x^۲}} \qquad (x \neq ۰)$$

چند انتگرال مهم

$$(۱)\quad \int \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\,\mathrm{d}x = \sin^{-۱} x + c$$

$$(۲)\quad \int \frac{۱}{\sqrt{a^۲-x^۲}}\,\mathrm{d}x = \sin^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$(۳)\quad \int \frac{۱}{۱+x^۲}\,\mathrm{d}x = \tan^{-۱} x + c$$

$$(۴)\quad \int \frac{۱}{a^۲+x^۲}\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}(\frac{x}{a}) + c$$

$$(۵)\quad \int \frac{۱}{|x|\sqrt{x^۲-۱}}\,\mathrm{d}x = \sec^{-۱} x + c$$

$$(۶)\quad \int \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}\,\mathrm{d}x = \sinh^{-۱} x + c$$

چند انتگرال مهم

$$(۷)\quad \int \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}\,\mathrm{d}x = \cosh^{-۱} x + c$$

$$(۸)\quad \int \frac{۱}{۱-x^{۲}}\,\mathrm{d}x = \tanh^{-۱} x + c \qquad (-۱ < x < ۱)$$

$$(۹)\quad \int \frac{۱}{۱-x^{۲}}\,\mathrm{d}x = \coth^{-۱} x + c \qquad (|x| > ۱)$$

$$(۱۰)\quad \int \frac{-۱}{x\sqrt{۱-x^{۲}}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{sech}^{-۱} x + c \qquad (۰ < x < ۱)$$

$$(۱۱)\quad \int \frac{-۱}{|x|\sqrt{۱+x^{۲}}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{csch}^{-۱} x + c$$