سری‌های توانی

تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
پاییز ۱۴۰۲

تعریف

هر سری به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

را یک *سری توانی* برحسب توان‌های $(x-c)$ یا یک سری توانی حول نقطه‌ی $x = c$ می‌نامیم. ثابت‌های a_0، a_1، a_2، ... را ضریب‌های سری توانی می‌نامیم. به‌علاوه، c مرکز همگرایی سری توانی نام دارد.

تذکر

همگرایی یا واگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ به مقدار x بستگی دارد. واضح است که اگر $x=c$، آن‌گاه سری توانی به a_0 همگرا است. به‌عنوان مثال، سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ یک سری توانی است که به‌ازای $|x|<1$ همگرا و به‌ازای $|x|\geq 1$ واگرا است.

نکته

اگر $a_N \neq 0$ و به‌ازای هر $n>N$ داشته باشیم $a_n=0$، آن‌گاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ به‌صورت زیر تحویل می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_N(x-c)^N$$

که یک چندجمله‌ای از درجه‌ی N است. لذا، به بیان نادقیق، سری‌های توانی چندجمله‌ای‌هایی هستند که بی‌نهایت جمله دارند.

قضیه

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ یک سری توانی حول c باشد. قرار می‌دهیم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \ell \neq 0, +\infty \\ +\infty & \ell = 0 \\ 0 & \ell = +\infty \end{cases}$$

در این صورت داریم:

(۱) اگر $0 < R < +\infty$، آن‌گاه، سری توانی به‌ازای نقاطی مانند x که $|x-c| < R$ همگرای مطلق و به‌ازای نقاط x که $|x-c| > R$ واگرا است. همچنین، در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه، یعنی $x = c+R$ و $x = c-R$ باید جداگانه (با جایگذاری این نقاط در سری توانی) همگرایی سری توانی را بررسی کنیم.

(۲) اگر $R = +\infty$، آن‌گاه سری به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ همگرای مطلق است.

قضیه

(۳) اگر $R = 0$، آن‌گاه سری فقط به‌ازای $x = c$ همگرا است.

c *مرکز همگرایی* و R *شعاع همگرایی* سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ نام دارند.

اثبات: فرض کنیم $\ell \neq 0, +\infty$. داریم:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n (x-c)^n} \right| = \left(\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) |x-c|$$

بنا بر آزمون نسبت، اگر $0 \leq \rho < 1$، آن‌گاه سری همگرای مطلق و اگر $\rho > 1$، آن‌گاه سری واگرا است. بنابراین، اگر $|x-c| < \frac{1}{\ell} = R$، آن‌گاه سری همگرای مطلق و اگر $|x-c| > \frac{1}{\ell} = R$، آن‌گاه سری واگرا است. فرض کنیم $\ell = 0$. در این حالت $\rho = 0$ و در نتیجه سری به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ همگرای مطلق است. اگر $\ell = +\infty$، آن‌گاه سری در $x = c$ همگرا و در $x \neq c$ واگرا است.

نکته

بنا بر قضیه‌ی قبل، بازه‌ی همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ به یکی از صورت‌های زیر است:

$$(c-R, c+R) \qquad \{c\}$$
$$(c-R, c+R] \qquad [c-R, c+R)$$
$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \qquad [c-R, c+R]$$

مثال

مرکز، شعاع و بازه‌ی همگرایی هر یک از سری‌های زیر را مشخص کنید.

$$(۱)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (۳)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\,3^n}$$

$$(۲)\ \sum_{n=0}^{\infty}n!x^n \qquad (۴)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{x+2}{2}\Big)^n$$

پاسخ: (۱) مرکز سری $c=0$ است و داریم $a_n=\frac{1}{n!}$. بنابراین

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\xrightarrow{R=\frac{1}{\ell}}R=\infty$$

در نتیجه سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$ به‌طور مطلق همگرا است.

(۲)

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \xrightarrow{R=\frac{1}{\ell}} R = 0$$

بنابراین شعاع همگرایی سری $R = 0$ است. در نتیجه سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ در $x = 0$ همگرا و در نقاط $x \neq 0$ واگرا است.

(۳) با ساده کردن سری داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\,3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n^2+1}\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)^n$$

با در نظر گرفتن سری بالا به‌صورت یک سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$، داریم $c = -\frac{5}{2}$ و $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{n^2+1}$. در نتیجه

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n+۱}\frac{۱}{(n+۱)^۲+۱}}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n}\frac{۱}{n^۲+۱}}$$

$$= \frac{۲}{۳}\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲+۱}{(n+۱)^۲+۱} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین شعاع همگرایی برابر $R = \frac{۱}{\ell} = \frac{۳}{۲}$ است. پس سری بر بازه‌ی

$$\left(-\frac{۵}{۲}-\frac{۳}{۲}, -\frac{۵}{۲}+\frac{۳}{۲}\right) = (-۴, -۱)$$

همگرای مطلق است. حال همگرایی را در نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی همگرایی، بررسی می‌کنیم؛

$$x = -۱ \Longrightarrow \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳^n}{(n^۲+۱)\,۳^n} = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n^۲+۱}$$

به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $\frac{۱}{n^۲} > \frac{۱}{n^۲+۱} > ۰$. از آنجا که $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ همگرا است، بنا بر آزمون

مقایسه $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲+۱}$ و در نتیجه $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲+۱}$ همگرا (مطلق) است.

$$x = -۴ \implies \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۳)^n}{(n^۲+۱)\,۳^n} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۲+۱}$$

$$a_n = \frac{(-۱)^n}{n^۲+۱} \implies ۰ < |a_n| < \frac{۱}{n^۲} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

بنا بر آزمون مقایسه $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ و در نتیجه $\sum_{n=۰}^{\infty} |a_n|$ همگرا است. پس سری توانی در $x = -۴$ همگرای مطلق است. بنابراین بازه‌ی همگرایی به‌صورت $[-۴, -۱]$ است و سری بر این بازه همگرای مطلق است.

توجه کنید که با استفاده‌ی مستقیم از آزمون نسبت نیز می‌توان بازه‌ی اولیه‌ی همگرایی (مطلق) این سری را به‌دست آورد؛

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(۲x+۵)^{n+۱}}{((n+۱)^۲+۱)۳^{n+۱}}}{\frac{(۲x+۵)^n}{(n^۲+۱)۳^n}}\right| = \frac{۱}{۳}|۲x+۵|\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲+۱}{(n+۱)^۲+۱}$$
$$= \frac{۱}{۳}|۲x+۵| < ۱$$
$$\Rightarrow |۲x+۵| < ۳$$
$$\Rightarrow -۳ < ۲x+۵ < ۳$$
$$\Rightarrow -۸ < ۲x < -۲$$
$$\Rightarrow -۴ < x < -۱$$

در این حالت نیز نقاط مرزی باید جداگانه بررسی شوند.

(۴) با ساده کردن سری داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}\left(\frac{x+۲}{۲}\right)^n = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n۲^n}\left(x-(-۲)\right)^n$$

در نتیجه مرکز سری $c=-۲$ است و $a_n = \frac{۱}{n۲^n}$. داریم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{(n+۱)۲^{n+۱}}}{\frac{۱}{n۲^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n۲^n}{(n+۱)۲^{n+۱}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+۱} = \frac{۱}{۲} \implies R = ۲$$

بنابراین شعاع همگرایی سری ۲ است و این سری بر بازه‌ی

$$(-۲-۲, -۲+۲) = (-۴, ۰)$$

همگرای مطلق است. همگرایی سری را در نقاط ابتدا و انتهای بازه بررسی می‌کنیم؛

$$x=-۴ \implies \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\left(\frac{-۲}{۲}\right)^n=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n}$$

چون دنباله‌ی $\{\frac{۱}{n}\}$ نزولی، نامنفی و دارای حد صفر است، بنا بر آزمون لایب‌نیتز، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n}$ همگرا است اما $\sum_{n=۱}^{\infty}\left|\frac{(-۱)^n}{n}\right|=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ همگرا نیست. پس سری در $x=-۴$ همگرای مشروط است.

$$x=۰ \implies \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\left(\frac{۲}{۲}\right)^n=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$$

که این سری واگرا است. بنابراین بازه‌ی همگرایی این سری توانی $[-۴,۰)$ است که همگرایی آن به‌جز در $x=-۴$، مطلق است.

روش دیگر برای تعیین بازه‌ی اولیه‌ی همگرایی (مطلق) با استفاده از آزمون نسبت:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{۱}{n+۱}\left(\frac{x+۲}{۲}\right)^{n+۱}}{\frac{۱}{n}\left(\frac{x+۲}{۲}\right)^{n}}\right| = \frac{۱}{۲}\left|x+۲\right| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+۱}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left|x+۲\right| < ۱$$

$$\Rightarrow \left|x+۲\right| < ۲$$

$$\Rightarrow -۲ < x+۲ < ۲$$

$$\Rightarrow -۴ < x < ۰$$

در این حالت نیز نقاط مرزی باید جداگانه بررسی شوند.

قضیه

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ دو سری توانی، به‌ترتیب با شعاع‌های همگرایی R_a و R_b باشند و $\alpha \in \mathbb{R}$. در این صورت داریم:

(۱) سری $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n(x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی R_a است و در بازه‌ی همگرایی داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n(x-c)^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

(۲) سری $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی R است که در رابطه‌ی $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ صدق می‌کند و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$$

قضیه آبل

فرض کنید سری توانی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی $R>0$ باشد. در این صورت تابع $f(x)$ بر $(c-R, c+R)$ پیوسته است. همچنین،

(۱) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ همگرا باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to (c+R)^-} f(x) = f(c+R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

(۲) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ همگرا باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to (c-R)^+} f(x) = f(c-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

قضیه (مشتق‌گیری جمله به جمله از یک سری توانی)

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی $R>0$ باشد. در این صورت تابع

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+\cdots$$

یعنی مجموع سری توانی، بر بازه‌ی $(c-R, c+R)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1} \\ &= a_1+2a_2(x-c)+3a_3(x-c)^2+\cdots \end{aligned}$$

که برابر مجموع سری حاصل از مشتق‌گیری جمله به جمله، از سری داده شده است.

قضیه (انتگرال‌گیری جمله به جمله از یک سری توانی)

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی $R > 0$ باشد. در این صورت تابع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

بر هر زیربازه بسته $[c, x]$ از $(c-R, c+R)$ انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-c)^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_c^x (t-c)^n\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} = a_0(x-c) + \frac{a_1}{2}(x-c)^2 + \cdots$$

که برابر مجموع سری حاصل از انتگرال‌گیری جمله به جمله، از سری داده شده است.

تذکر

شعاع و مرکز همگرایی حاصل از مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری سری توانی، با شعاع و مرکز سری توانی اولیه برابر است. در واقع بازه‌ی همگرایی آن‌ها یکی است، به‌جز احتمالا در نقاط ابتدا و انتهای بازه.

مثال

نمایش توابع زیر را به‌صورت سری توانی بیابید.

$$(۱)\quad \frac{۱}{(۱-x)^{۲}}$$

$$(۲)\quad \frac{۱}{(۱-x)^{۳}}$$

$$(۳)\quad \ln(۱+x)$$

$$(۴)\quad \tan^{-۱} x$$

پاسخ: (۱)

$$\frac{۱}{۱-x} = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n \quad (|x|<۱)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{۱}{۱-x}\right)' = \left(\sum_{n=۰}^{\infty} x^n\right)' = (۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots)'$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{(۱-x)^۲} = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots = \sum_{n=۱}^{\infty} nx^{n-۱} \quad (|x| < ۱)$$

(۲) برای $|x| < ۱$ داریم:

$$\frac{۱}{۱-x} = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n \qquad \Longrightarrow \frac{۱}{(۱-x)^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} nx^{n-۱}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{۱}{(۱-x)^۲}\right)' = \left(\sum_{n=۱}^{\infty} nx^{n-۱}\right)'$$

$$\Longrightarrow \frac{۲}{(۱-x)^۳} = \sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)x^{n-۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{(۱-x)^۳} = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n(n-۱)}{۲}x^{n-۲} \quad (|x| < ۱)$$

(۳)

$$\frac{۱}{۱-t}=\sum_{n=۰}^{\infty} t^n \qquad (|t|<۱)$$

$$\Longrightarrow \ \frac{۱}{۱+t}=\frac{۱}{۱-(-t)}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-t)^n=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^n$$

$$=۱-t+t^۲-t^۳+\cdots \qquad (|t|<۱)$$

فرض کنیم $|x|<۱$، در این صورت داریم:

$$\ln(۱+x)=\ln(۱+x)-\ln(۱)=\int_۰^x \frac{\mathrm{d}t}{۱+t}$$

$$=\int_۰^x \Big(\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n t^n\Big)\mathrm{d}t=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\int_۰^x t^n\ \mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{n+۱}}{n+۱} \qquad (-۱<x<۱)$$

حال به بررسی نقاط ابتدا و انتهای بازه می‌پردازیم؛

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \qquad x=-1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1},$$

چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است، طبق آزمون مقایسه‌ی حدی، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ نیز واگرا است. بنابراین $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ واگرا و در نتیجه $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ واگرا است.

$$x = 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ نزولی، نامنفی و دارای حد صفر است. بنا بر آزمون لایب‌نیتز، سری بالا همگرا است. بنا بر قضیه‌ی آبل، نتیجه‌ی بعد را داریم:

$$\ln ۲ = \lim_{x\to ۱^-} \ln(۱+x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n+۱}$$

$$\Longrightarrow \ln ۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \cdots$$

(۴)

$$\frac{۱}{۱-t} = \sum_{n=۰}^{\infty} t^n \quad (|t| < ۱)$$

$$\frac{۱}{۱+t^۲} = \frac{۱}{۱-(-t^۲)} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-t^۲)^n = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n t^{۲n}$$

چون $|t| < ۱$، بنابراین $|-t^۲| = |t^۲| < ۱$.

حال فرض کنیم $|x| < ۱$. داریم:

$$\tan^{-۱} x = \tan^{-۱} x - \tan^{-۱} ۰ = \int_۰^x \frac{\mathrm{d}t}{۱+t^۲} = \int_۰^x \left(\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n t^{۲n}\right) \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \int_۰^x t^{۲n}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}$$

$$= x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۷}{۷} + \frac{x^۹}{۹} - \cdots \qquad (-۱ < x < ۱)$$

همگرایی سری را در نقاط ابتدا و انتهای بازه بررسی می‌کنیم؛

$$x = -۱ \implies \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n (-۱)^{۲n+۱}}{۲n+۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲n+۱}$$

دنباله‌ی $\left\{\frac{۱}{۲n+۱}\right\}$ نزولی، نامنفی و دارای حد صفر است. بنا بر آزمون لایب‌نیتز، سری بالا همگرا است.

$$x = ۱ \implies \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲n+۱} \implies \text{همگرا به همان دلیل قبل}$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه‌ی آبل}} \frac{\pi}{۴} = \lim_{x\to ۱^{-۱}} \tan^{-۱}(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲n+۱} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} - \cdots$$

همگرایی در نقاط $x = \pm ۱$ مشروط است.

نکته

فرض کنید $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی $R>0$ باشد. به‌صورت استقرائی نشان می‌دهیم که به‌ازای هر n داریم $a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} \\ &= 2a_2 + 6a_3(x-c) + 12a_4(x-c)^2 + \cdots \end{aligned}$$

نکته

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱)a_n(x-c)^{n-k}$$
$$= k!a_k + \frac{(k+۱)!}{۱!}a_{k+۱}(x-c) + \frac{(k+۲)!}{۲!}a_{k+۲}(x-c)^۲ + \cdots$$

هر یک از این سری‌ها، به‌ازای $c-R < x < c+R$ همگرا است. اگر قرار دهیم $x=c$، می‌بینیم که $f^{(k)}(c) = k!a_k$.

قضیه

فرض کنید سری توانی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی $R>0$ باشد.
در این صورت به‌ازای هر $n\geq 0$ داریم:

$$\boxed{a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}}$$

که در آن $0!=1$ و $f^{(0)}(c)=f(c)$.

نتیجه

هرگاه دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ در یکی از همسایگی‌های نقطه‌ی c یک تابع مجموع f داشته باشند، آن‌گاه دو سری جمله به جمله برابرند؛ در واقع به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم $a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

نتیجه

اگر تابع $f(x)$ دارای نمایش سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ با شعاع همگرایی $R > 0$ باشد، آن‌گاه این نمایش منحصر به فرد است. به‌علاوه، $f(x)$ در $x = c$ از هر مرتبه مشتق‌پذیر است و مشتق nـام آن در $x = c$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f^{(n)}(c) = n!a_n \qquad (n \geq 0)$$

تعریف (سری تیلور و مکلورن)

فرض کنید تابع $f(x)$ در $x=c$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت سری

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}$$

را سری (بسط) تیلور f حول c می‌نامیم. اگر $c=0$، آن‌گاه سری

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

را سری (بسط) مکلورن f می‌نامیم.

دو سوال در ارتباط با سری تیلور مطرح می‌کنیم. آیا این سری در هر x غیر از c همگرا است؟ اگر چنین است آیا مجموع آن $f(x)$ خواهد بود؟ درحالت کلی جواب هر دو سوال منفی است. یک سری ممکن است به‌ازای $x \neq c$ همگرا باشد یا نباشد و درصورت همگرایی، مجموع آن ممکن است مساوی $f(x)$ باشد یا نباشد. به‌عنوان مثال می‌توان نشان داد که تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم $f^{(n)}(0) = 0$. پس سری مکلورن f برابر صفر است. یعنی هیچ بازه‌ای با شعاع مثبت وجود ندارد که $f(x)$ روی آن بازه با سری مکلورن خود برابر باشد.

تعریف (تابع تحلیلی)

می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = c$ *تحلیلی* است، هرگاه با مجموع یک سری توانی حول $x = c$ با شعاع همگرایی مثبت، برابر باشد. (این سری حتما سری تیلور تابع $f(x)$ حول $x = c$ است.)

اگر $f(x)$ در هر نقطه‌ی بازه‌ی (a, b) تحلیلی باشد، می‌گوییم $f(x)$ بر بازه‌ی (a, b) تحلیلی است.

مثال قبل نشان می‌دهد تابع $f(x)$ در $x = ۰$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است ولی تحلیلی نیست.

قضیه

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع تحلیلی در $x = c$ باشند، آن‌گاه تابع $(f \pm g)(x)$ نیز در $x = c$ تحلیلی است.

مثال

فرض کنید $f(x) = e^x$. نشان دهید سری تیلور $f(x)$ حول $x = c$ به e^x همگرا است.

پاسخ: فرض کنیم $c \in \mathbb{R}$. به‌ازای هر $n \geq ۰$ داریم $f^{(n)}(x) = e^x$. بنابراین سری تیلور e^x حول $x = c$ به‌صورت

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n$$

است. داریم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^c}{(n+۱)!}}{\frac{e^c}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n+۱} = ۰ \xRightarrow{R=\frac{۱}{\ell}} R = +\infty$$

پس سری به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ همگرا است. مجموع این سری را با $g(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n \\
&= e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \frac{e^c}{3!}(x-c)^3 + \cdots \\
\Longrightarrow\ g'(x) &= e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{2!}(x-c)^2 + \cdots = g(x)
\end{aligned}
$$

یعنی به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $g'(x) = g(x)$ و $g(c) = e^c$. نشان می‌دهیم به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $g(x) = e^x$. برای این منظور، تابع کمکی $h(x) = g(x)e^{-x}$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. $h(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است و

$$
h'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} \quad \xrightarrow{g'(x)=g(x)} \quad h'(x) = 0
$$

$$\exists k \in \mathbb{R} : h(x) = k \quad \xRightarrow{h(c)=g(c)e^{-c}=۱} \quad k = ۱, \quad h(x) = ۱$$

پس به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $g(x) = e^x$.

بنابراین سری تیلور e^x حول نقطه‌ی $x = c$ به‌صورت زیر است:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n}$$

همچنین، سری مکلورن e^x نیز به‌شکل زیر است:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

مثال

هر یک از توابع زیر را به‌صورت سری توانی بنویسید.

(۱) e^{-x} (۲) $\sinh x$ (۳) $\cosh x$

پاسخ: (۱) سری مکلورن e^{-x}:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \implies e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(۲) سری مکلورن $\sinh x$:

$$\sinh x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(۳) سری مکلورن $\cosh x$:

$$\cosh x = \frac{e^x}{۲} + \frac{e^{-x}}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^n}{n!}\right)$$

$$= ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n}}{(۲n)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

توجه

می‌توان نشان داد که توابع $\sin x$ و $\cos x$ روی $\mathbb{R}$ تحلیلی هستند و برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\sin x = \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \qquad \cos x = \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n x^{۲n}}{(۲n)!}$$

چند سری مکلورن مهم

$$(۱)\quad \frac{۱}{۱-x} = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n \qquad (-۱ < x < ۱)$$

$$(۲)\quad \frac{۱}{(۱-x)^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} n x^{n-۱} \qquad (-۱ < x < ۱)$$

$$(۳)\quad \frac{۱}{(۱-x)^۳} = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n(n-۱)}{۲} x^{n-۲} \qquad (-۱ < x < ۱)$$

$$(۴)\quad \ln(۱+x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n} x^n \qquad (-۱ < x \leq ۱)$$

$$(۵)\quad \tan^{-۱} x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲n+۱} x^{۲n+۱} \qquad (-۱ \leq x \leq ۱)$$

چند سری مکلورن مهم

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{۶}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{۷}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{۸}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{۹}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{۱۰}$$

مثال

سری مکلورن تابع $f(x) = \dfrac{x}{۴ - x}$ را به‌دست آورید و با استفاده از آن $f^{(۱۴۰۰)}(۰)$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\frac{۱}{۱ - x} = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n \quad (|x| < ۱) \qquad (*)$$

$$f(x) = \frac{x}{۴ - x} = \frac{x}{۴}\left(\frac{۱}{۱ - \frac{x}{۴}}\right) \underset{x \to \frac{x}{۴}}{\overset{(*)}{=\!=}} \frac{x}{۴}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{x}{۴}\right)^n \qquad \left(\left|\frac{x}{۴}\right| < ۱\right)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۴^{n+۱}} x^{n+۱} \qquad (|x| < ۴)$$

با توجه به اینکه ضریب x^{n+1}، یعنی a_{n+1} برابر است با $\frac{1}{4^{n+1}}$، داریم:

$$\frac{f^{(1400)}(0)}{1400!} = a_{1400} \implies \frac{f^{(1400)}(0)}{1400!} = \frac{1}{4^{1400}}$$
$$\implies f^{(1400)}(0) = \frac{1400!}{4^{1400}}$$

مثال

فرض کنید $f(x) = \ln(۱+x^{۵})$. سری مکلورن تابع $f(x)$ را به‌دست آورید و با استفاده از آن $f^{(۲۰)}(۰)$ را بیابید.

پاسخ:

$$\frac{۱}{۱-t} = \sum_{n=۰}^{\infty} t^n \qquad (|t| < ۱)$$

$$\frac{۱}{۱+t} = \frac{۱}{۱-(-t)} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n t^n \qquad (|t| < ۱)$$

$$\ln(۱+x) = \int_{۰}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{۱+t} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \int_{۰}^{x} t^n \,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n x^{n+۱}}{n+۱} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱} x^n}{n} \qquad (-۱ < x \leq ۱)$$

در نتیجه سری مکلورن تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$\Longrightarrow \ln(1+x^5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{5n}}{n} \qquad (-1 < x \leq 1)$$

با توجه به اینکه ضریب x^{20}، یعنی a_{20} برابر است با $\frac{(-1)^{4-1}}{4}$، داریم:

$$\frac{f^{(20)}(0)}{20!} = a_{20} \Longrightarrow f^{(20)}(0) = 20! \times \frac{-1}{4} = -\frac{20!}{4}$$

مثال

مقدار $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n \quad (|t|<1) \implies \frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \quad (|t|<1)$$

$$\xRightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

بنابراین اگر $-1<x\leq 1$، آن‌گاه $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. در نتیجه

$$\xRightarrow{x=\frac{1}{3}} \ln\left(\frac{4}{3}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}$$

مثال

مرکز، شعاع و بازه‌ی همگرایی هر یک از سری‌های زیر را مشخص کنید.

$$(۱)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۴ ۲^{۲n}} x^n \qquad (۲)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۴x-۱)^n}{n^n} \qquad (۳)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n(x-۱)^n}{۲^n(۳n-۱)}$$

پاسخ: (۱) مرکز سری $c=۰$ است و داریم $a_n = \frac{(-۱)^n}{n^۴ ۲^{۲n}}$.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+۱}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-۱)^{n+۱}}{(n+۱)^۴ ۲^{۲n+۲}}}{\frac{(-۱)^n}{n^۴ ۲^{۲n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۴ ۲^{۲n}}{(n+۱)^۴ ۲^{۲n+۲}}$$

$$= \frac{۱}{۴} \lim_{n\to\infty} \frac{n^۴}{(n+۱)^۴} = \frac{۱}{۴} \quad \xRightarrow{R=\frac{۱}{\ell}} \quad R = ۴$$

شعاع همگرایی ۴ است، پس سری بر بازه‌ی $(-۴, ۴)$ همگرای مطلق است. همگرایی سری را در نقاط ابتدا و انتهای بازه بررسی می‌کنیم؛

$$x = ۴ \implies \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n ۴^n}{n^۴ ۴^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۴}$$

$$x = -۴ \implies \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n (-۱)^n ۴^n}{n^۴ ۴^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴}$$

pـسری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴}$ همگرا است. توجه می‌کنیم که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴}$ همگرای مطلق نیز است.
پس سری توانی بر بازه‌ی $[-۴, ۴]$ همگرای مطلق است.

(۲)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۴x-۱)^n}{n^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴^n}{n^n}\left(x-\frac{۱}{۴}\right)^n$$

مرکز سری $c=\frac{۱}{۴}$ است و $a_n=\frac{۴^n}{n^n}$. داریم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۴^{n+۱}}{(n+۱)^{n+۱}}}{\frac{۴^n}{n^n}} = \lim \frac{۴^{n+۱}n^n}{۴^n(n+۱)^{n+۱}}$$

$$= ۴\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+۱)^n} \times \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n+۱}$$

$$\overset{\star}{=} ۴\times\frac{۱}{e}\times ۰ = ۰$$

بنابراین شعاع همگرایی سری توانی برابر $+\infty$ است؛ یعنی سری توانی به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$ همگرای مطلق است.

دلیل ★:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+۱}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+۱}\right)}{\frac{۱}{x}} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{۱}{(x+۱)^۲} \times \frac{x+۱}{x}}{-\frac{۱}{x^۲}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+۱} = -۱$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+۱}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+۱}\right)^x = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

(۳) مرکز سری $c=۱$ است و $a_n = \frac{n}{۲^n(۳n-۱)}$. داریم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+۱}{۲^{n+۱}(۳n+۲)}}{\frac{n}{۲^n(۳n-۱)}} = \frac{۱}{۲}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)(۳n-۱)}{n(۳n+۲)}$$

$$= \frac{۱}{۲}\lim_{n\to\infty}\frac{۳n^۲+۲n-۱}{۳n^۲+۲n} = \frac{۱}{۲} \quad \xrightarrow{R=\frac{۱}{\ell}} \quad R = ۲$$

شعاع همگرایی سری توانی برابر ۲ است و در نتیجه بر بازه‌ی $(-1, 3) = (1-2, 1+2)$ همگرای مطلق است. حالا همگرایی سری را در نقاط مرزی بازه بررسی می‌کنیم؛

$$x = -1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-2)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$$

$$x = 3 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$$

از آنجا که حد دنباله‌ی $\left\{\frac{(-1)^n n}{3n-1}\right\}$ وجود ندارد و حد دنباله‌ی $\left\{\frac{n}{3n-1}\right\}$ نیز مخالف صفر است، پس سری در نقاط $x = -1$ و $x = 3$ واگرا است.

مثال

بازه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2n}$ را به‌دست آورید و در نقاط مرزی بحث کنید.

پاسخ:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2}}{\frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2n}} \right| = |x^2| \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+2} 2n}{2^{2n}(2n+2)}$$

$$= 4|x^2| \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+2} = 4|x^2|$$

بنا بر آزمون نسبت، اگر $0 \leq \rho < 1$، آن‌گاه سری همگرای مطلق است. بنابراین اگر

$$4|x^2| < 1 \implies |x| < \frac{1}{2}$$

سری همگرای مطلق است. یعنی بازه‌ی همگرایی سری عبارت است از بازه‌ی $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

همگرایی سری را در نقاط مرزی بررسی می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}\implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$

$$x=-\frac{1}{2}\implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$

دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ نزولی، نامنفی و دارای حد صفر است. بنابراین، طبق آزمون لایب‌نیتز، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ همگرا است. چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است، پس همگرایی سری مفروض در نقاط $x=\pm\frac{1}{2}$ مشروط است. در نتیجه سری داده شده دارای بازه‌ی همگرایی $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ است که به‌جز نقاط مرزی، در سایر نقاط همگرایی مطلق است.

مثال

بازه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$ را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{(n+1)x}}{(n+1)^2-(n+1)+1}}{\frac{e^{nx}}{n^2-n+1}}\right| = |e^x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2-n+1}{n^2+2n+1-n-1+1}\right|$$

$$= |e^x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right| = |e^x|$$

بنا بر آزمون نسبت، اگر $0 \leq \rho < 1$، آن‌گاه سری مفروض همگرای مطلق است. پس به‌ازای xهایی که $|e^x| < 1$ یا $-\infty < x < 0$، سری همگرای مطلق است. همگرایی سری را در نقطه‌ی مرزی $x = 0$ بررسی می‌کنیم؛

$$x = \circ \implies \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲ - n + ۱} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n^۲-n+۱}}{\frac{۱}{n^۲}} = ۱$$

چون $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ همگرا است، بنا بر آزمون مقایسه‌ی حدی، سری بالا همگرا است.

مثال

سری مکلورن توابع زیر را به‌دست آورید.

(۱) $e^{۳x+۱}$

(۲) $\tan^{-۱}(۵x^۲)$

(۳) $\ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)$

(۴) $\frac{e^{۲x^۲}-۱}{x^۲}$

(۵) $a^x \qquad (a > ۱)$

(۶) $\cos^۲\left(\frac{x}{۲}\right)$

(۷) $f(x) = \int_۱^{۱+x} \frac{\ln t}{t-۱}\,\mathrm{d}t$

پاسخ: (۱) برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \implies e^{3x+1} = e \times e^{3x} = e \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e3^n}{n!} x^n$$

(۲) در چند صفحه‌ی قبل دیدیم که

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (|x| \leq 1)$$

در نتیجه برای $|5x^2| \leq 1$ یا به‌طور معادل برای $|x| \leq 1/\sqrt{5}$ داریم:

$$\tan^{-1}\left(5x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(5x^2\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n+1}}{2n+1} x^{4n+2}$$

(۳) تساوی زیر را قبلا به‌دست آوردیم؛

$$\ln(۱+x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۱}x^{n+۱}\qquad(-۱<x\leq ۱)$$

در نتیجه برای $-۱<x<۱$ داریم:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)&=\ln(۱+x)-\ln(۱-x)\\&=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{n+۱}}{n+۱}-\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n(-x)^{n+۱}}{n+۱}\\&=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۱}x^{n+۱}+\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{n+۱}}{n+۱}=۲\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}\end{aligned}$$

(۴)

$$e^x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad (x\in\mathbb{R})\implies e^{۲x^۲}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\left(۲x^۲\right)^n}{n!}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^n x^{۲n}}{n!}$$

$$\begin{aligned}\frac{e^{۲x^۲}-۱}{x^۲}&=\frac{۱}{x^۲}\left(e^{۲x^۲}-۱\right)\\&=\frac{۱}{x^۲}\left(۱+۲x^۲+\frac{۲^۲x^۴}{۲!}+\frac{۲^۳x^۶}{۳!}+\cdots-۱\right)\\&=۲+\frac{۲^۲x^۲}{۲!}+\frac{۲^۳x^۴}{۳!}+\frac{۲^۴x^۶}{۴!}+\cdots\\&=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)!}x^{۲n}\qquad (x\neq ۰)\end{aligned}$$

(۵)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \implies a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$$

(۶)

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\implies \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(۷)

$$f(x)=\int_{۱}^{۱+x}\frac{\ln t}{t-۱}\,\mathrm{d}t=\int_{۰}^{x}\frac{\ln(۱+u)}{u}\,\mathrm{d}u=\int_{۰}^{x}\frac{\sum\limits_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{u^{n+۱}}{n+۱}}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_{۰}^{x}\frac{u-\frac{u^{۲}}{۲}+\frac{u^{۳}}{۳}-\frac{u^{۴}}{۴}+\cdots}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_{۰}^{x}\left(۱-\frac{u}{۲}+\frac{u^{۲}}{۳}-\frac{u^{۳}}{۴}+\cdots\right)\mathrm{d}u$$

$$=\left(u-\frac{u^{۲}}{۲^{۲}}+\frac{u^{۳}}{۳^{۲}}-\frac{u^{۴}}{۴^{۲}}+\cdots\right)\Bigg|_{۰}^{x}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{n+۱}}{(n+۱)^{۲}}\qquad(|x|<۱)$$

مثال

سری تیلور هر یک از توابع زیر را حول نقطه‌ی خواسته شده بیابید.

$$(۱)\quad e^{-۲x}, \qquad c=-۱$$

$$(۲)\quad \cos x, \qquad c=\frac{\pi}{۲}$$

$$(۳)\quad \ln x, \qquad c=۳$$

$$(۴)\quad \frac{۱}{x^{۲}}, \qquad c=-۲$$

$$(۵)\quad \frac{x}{۱+x}, \qquad c=۱$$

پاسخ: (۱)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$t = x - c = x - (-1) = x + 1 \implies x = t - 1$$

$$e^{-2x} = e^{-2t+2} = e^{2} e^{-2t} = e^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2t)^n}{n!} = e^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (x+1)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2} 2^n}{n!} (x+1)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(۲)

$$t = x - \frac{\pi}{2} \implies x = t + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \cos\left(t + \frac{\pi}{۲}\right) = -\sin t = -\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n t^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}\left(x - \frac{\pi}{۲}\right)^{۲n+۱} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(۳)

$$\ln(۱+x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n+۱} x^{n+۱} \qquad x \in (-۱, ۱]$$

$$t = x - ۳ \implies x = t + ۳$$

$$
\begin{aligned}
\ln x &= \ln(t+۳) = \ln\left(۳\left(۱+\frac{t}{۳}\right)\right) = \ln ۳ + \ln\left(۱+\frac{t}{۳}\right)\\
&= \ln ۳ + \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n+۱}\left(\frac{t}{۳}\right)^{n+۱} = \ln ۳ + \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۳^{n+۱}(n+۱)}(x-۳)^{n+۱}\\
&= \ln ۳ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n۳^n}(x-۳)^n
\end{aligned}
$$

بازه‌ی همگرایی آن به‌صورت زیر است:

$$
-۱ < \frac{t}{۳} \leq ۱ \implies -۳ < t \leq ۳ \implies ۰ < t+۳ \leq ۶ \implies ۰ < x \leq ۶
$$

(۴)

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (|x|<1) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \quad (|x|<1)$$

$$t=x-(-2)=x+2 \implies x=t-2$$

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(t-2)^2}=\frac{1}{4\left(1-\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}(x+2)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x+2)^n$$

بازه‌ی همگرایی:

$$-۱ < \frac{t}{۲} < ۱ \implies -۲ < t < ۲ \implies -۴ < t - ۲ < ۰$$

$$\implies -۴ < x < ۰$$

(۵)

$$t = x - ۱ \implies x = t + ۱$$

$$\frac{x}{x+۱} = \frac{t+۱}{t+۲} = \frac{t+۲-۱}{t+۲} = ۱ - \frac{۱}{t+۲} = ۱ - \frac{۱}{۲\left(۱+\frac{t}{۲}\right)}$$

$$= ۱ - \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۱-\left(-\frac{t}{۲}\right)} = ۱ - \frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(-\frac{t}{۲}\right)^n$$

$$= ۱ - \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{t}{۲} + \left(\frac{t}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{t}{۲}\right)^۳ + \cdots\right)$$

$$\frac{x}{x+۱} = \cdots = \frac{۱}{۲}\left(۱ + \frac{t}{۲} - \left(\frac{t}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{t}{۲}\right)^۳ - \cdots\right)$$

$$= \frac{۱}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲^{n+۱}} t^n$$

$$= \frac{۱}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲^{n+۱}} (x-۱)^n \qquad (-۱ < x < ۳)$$

بازه‌ی همگرایی:

$$|-\frac{t}{۲}| < ۱ \implies -۲ < t < ۲ \implies -۱ < t+۱ = x < ۳$$

مثال

مجموع سری‌های عددی زیر را بیابید.

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \qquad\qquad (3)\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$(2)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \qquad\qquad (4)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}$$

پاسخ: (۱)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x|<1) \xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad |x|<1$$

$$\xRightarrow{x=\frac{1}{3}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۳^n} = \frac{۱}{۳}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۳^{n-۱}} = \frac{۱}{۳}\frac{۱}{\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)^۲} = \frac{۳}{۴}$$

(۲)

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n+۱}{۲^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۲^{n-۱}} = \sum_{n=۱}^{\infty} n\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} = \frac{۱}{\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)^۲} = ۴$$

(۳)

$$\ln(۱+x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n} x^n$$

$$\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)\frac{۱}{n۲^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}\left(-\frac{۱}{۲}\right)^n = \ln\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\ln ۲$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2 \Longrightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \ln 2 - \frac{5}{8}$$

(۴) برای $|x| < 1$ داریم:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n x^{n-1}$$

$$\xRightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n n(n+۱)}{۲^n} = \sum_{n=۱}^{\infty}(n+۱)n\left(-\frac{۱}{۲}\right)^n$$

$$= -\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}(n+۱)n\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}$$

$$= -\frac{۱}{۲}\frac{۲}{\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^۳} = -\frac{۸}{۲۷}$$

تمرین

نشان دهید

$$\int_{-۱}^{۰} \frac{\ln(۱+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

تمرین

مجموع سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ را بیابید.

تمرین

سری مکلورن تابع $f(x) = \int_{۰}^{x} \frac{e^t - ۱}{t}\,\mathrm{d}t$ را بیابید و سپس $f^{(۱۴۰۲)}(۰)$ را محاسبه کنید.

تمرین

الف) سری تیلور تابع $f(x) = \dfrac{۱}{x^{۲} + ۲x + ۲}$ را حول نقطه‌ی $x = -۱$ بیابید.

ب) با استفاده از قسمت قبل $f^{(۱۳۹۶)}(-۱)$ را محاسبه کنید.

تمرین

شعاع و بازه همگرایی سری توانی زیر را به‌ازای a های مختلف بیابید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + ۱۴۰۲}$$