ریاضی عمومی ۲

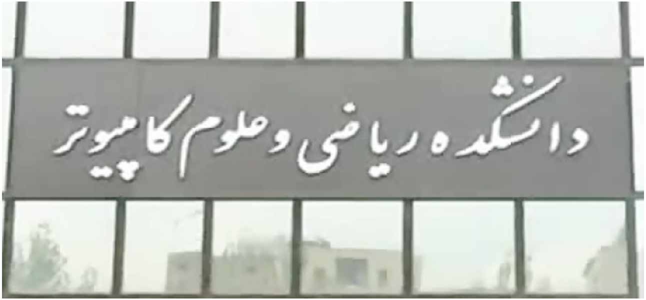
ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



کاربردهای مشتقات جزئی

نکاتی از جبر خطی: ماتریس‌های معین، نیمه‌معین و نامعین

فرض کنید که A یک ماتریس متقارن $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. به‌ازای هر بردار ستونی $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ با درایه‌های حقیقی، قرار می‌دهیم:

$$Q(X) = X^T A X$$

در این صورت، ماتریس A را

- معین مثبت گوییم، هرگاه به‌ازای هر بردار ناصفر X، داشته باشیم $Q(X) > 0$.
- معین منفی گوییم، هرگاه به‌ازای هر بردار ناصفر X، داشته باشیم $Q(X) < 0$.
- نیمه‌معین مثبت گوییم، هرگاه به‌ازای هر بردار ناصفر X، داشته باشیم $Q(X) \geq 0$.
- نیمه‌معین منفی گوییم، هرگاه به‌ازای هر بردار ناصفر X، داشته باشیم $Q(X) \leq 0$.
- نامعین گوییم، هرگاه بردارهای ناصفر X و Y وجود داشته باشند که $Q(X) > 0$ و $Q(Y) < 0$.

قضیه

فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n$$

که در آن A ماتریسی متقارن با درایه‌های حقیقی است. در این صورت:

۱ اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $D_i > 0$، آنگاه A معین مثبت است.

۲ اگر به‌ازای اندیس‌های زوج i داشته باشیم $D_i > 0$، و به‌ازای اندیس‌های فرد i داشته باشیم $D_i < 0$، آنگاه A معین منفی است.

۳ اگر $D_n = \det A \neq 0$، و هیچ‌یک از شرایط ۱ و ۲ برقرار نباشند، آنگاه A نامعین است.

۴ اگر $D_n = \det A = 0$، آنگاه A نه معین مثبت است و نه معین منفی، اما ممکن است نیمه‌معین یا نامعین باشد.

در ادامهٔ این اسلایدها، به کاربردهای مشتقات جزئی در بهینه‌سازی و مقادیر اکسترمم توابع می‌پردازیم.

نقاط بحرانی، منفرد و اکسترمم نسبی

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد و $P \in U$. نقطهٔ P را

- یک نقطهٔ بحرانی f گوییم، هرگاه $\nabla f(P) = 0$.
- یک نقطهٔ منفرد یا تکین f گوییم، هرگاه $\nabla f(P)$ وجود نداشته باشد.
- یک نقطهٔ مینیمم نسبی یا موضعی f گوییم، هرگاه یک همسایگی از P موجود باشد که به‌ازای هر نقطهٔ $x \in U$ در این همسایگی، $f(x) \geq f(P)$.
- یک نقطهٔ ماکسیمم نسبی یا موضعی f گوییم، هرگاه یک همسایگی از P موجود باشد که به‌ازای هر نقطهٔ $x \in U$ در این همسایگی، $f(x) \leq f(P)$.
- یک نقطهٔ مینیمم مطلق یا سراسری f گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x \in U$، داشته باشیم $f(x) \geq f(P)$.
- یک نقطهٔ ماکسیمم مطلق یا سراسری f گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x \in U$، داشته باشیم $f(x) \leq f(P)$.

توجه

به مقادیر یک تابع در نقاط مینیمم نسبی و نقاط ماکسیمم نسبی، به‌ترتیب مقادیر مینیمم نسبی و مقادیر ماکسیمم نسبی آن تابع گفته می‌شود؛ مثلاً اگر $f(x,y) = 1-(x-y)^2$ و $g(x,y) = 1+(x-y)^2$، آنگاه هر نقطه به فرم $(x,y) = (a,a)$ یک نقطهٔ ماکسیمم نسبی برای f و یک نقطهٔ مینیمم نسبی برای g است. بنابراین، مقدار ماکسیمم نسبی f و مقدار مینیمم نسبی g متناظر با نقاط یادشده برابر با 1 هستند (توجه کنید که مقدار ماکسیمم مطلق f و مقدار مینیمم مطلق g نیز برابر با 1 هستند).

توجه

اگر نقطهٔ P یک نقطهٔ مینیمم نسبی یا ماکسیمم نسبی برای یک تابع باشد، آنگاه به P یک نقطهٔ اکسترمم نسبی نیز گفته می‌شود. همچنین، به هر یک از نقاط ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق یک تابع، یک نقطهٔ اکسترمم مطلق نیز گفته می‌شود.

قضیه

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این صورت، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی (به‌ویژه اکسترمم مطلق) f دارای یکی از شرایط زیر است:

۱ یک نقطهٔ بحرانی است.

۲ یک نقطهٔ منفرد است.

۳ یک نقطهٔ مرزی است.

قضیه

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع **پیوسته** باشد که در آن، U یک ناحیهٔ **بسته** و **کران‌دار** است. در این صورت، برد f یک زیرمجموعهٔ کران‌دار از $\mathbb{R}$ است و f **مقادیر اکسترمم مطلق خود را می‌گیرد** (یعنی نقاط $P, Q \in U$ وجود دارند که P نقطهٔ ماکسیمم مطلق f و Q نقطهٔ مینیمم مطلق f است).

مثال

در مورد نقاط بحرانی توابع زیر بحث کنید:

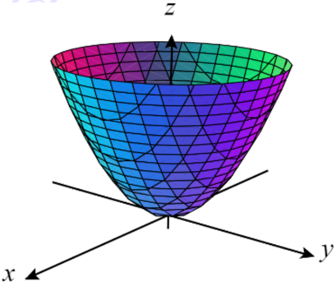
$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad g(x,y) = 1 - x^2 - y^2, \quad h(x,y) = y^2 - x^2,$$
$$k(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad l(x,y) = 1 - x$$

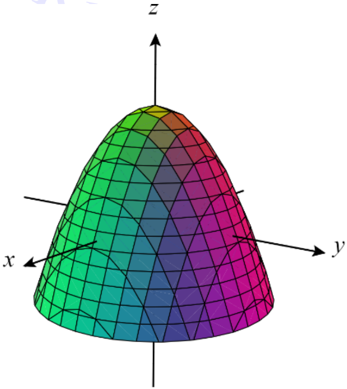
پاسخ:

- $f(x,y) = x^2 + y^2$:

داریم $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$؛ پس $\nabla f(x,y) = (0,0)$ نتیجه می‌دهد که $(x,y) = (0,0)$. از آنجا که f همواره نامنفی است، نقطهٔ $(0,0)$ مینیمم مطلق تابع f است.

توجه کنید که f نقطهٔ ماکسیمم مطلق ندارد.





- $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$:

داریم $\nabla g(x,y) = (-2x,-2y)$. بنابراین، $\nabla g(x,y) = (0,0)$ نتیجه می‌دهد که $(x,y) = (0,0)$. توجه کنید که به‌ازای هر $(x,y) \in \mathbb{R}^2$، داریم:

$$g(x,y) = 1 - (x^2 + y^2) \leq 1 = g(0,0)$$

پس، $(0,0)$ نقطهٔ ماکسیمم مطلق تابع g است.

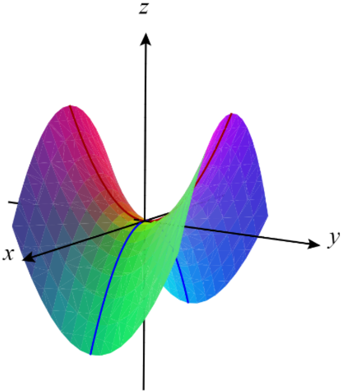
البته، تابع g دارای مینیمم مطلق نیست.

- $h(x,y) = y^2 - x^2$:

داریم $\nabla h(x,y) = (-2x, 2y)$. بنابراین، $\nabla h(x,y) = (0,0)$ نتیجه می‌دهد که $(x,y) = (0,0)$. توجه کنید که به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ با $x, y \neq 0$، داریم:

$$h(0,y) = y^2 > 0 = h(0,0)$$

$$h(x,0) = -x^2 < 0 = h(0,0)$$



بنابراین، $(0,0)$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست.

در شکل، خم قرمز رنگ، متشکل از نقاط $(0, y, h(0,y))$، و خم آبی رنگ، متشکل از نقاط $(x, 0, h(x,0))$ است.

- $k(x,y)=\sqrt{y^2+x^2}$:

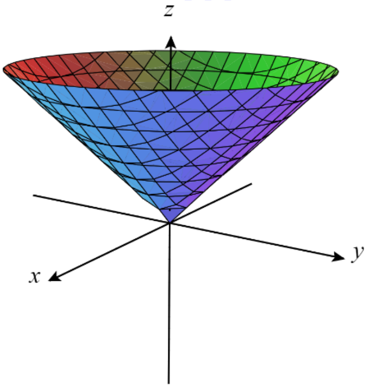
داریم:

$$\nabla k(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}},\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\right)$$

توجه کنید که مشتقات جزئی مرتبه اول k در $(0,0)$ موجود نیستند. پس، گرادیان k در $(0,0)$ تعریف نمی‌شود. از این‌رو، $\nabla k(x,y)=(0,0)$ دارای هیچ جوابی نیست؛ یعنی k دارای نقطهٔ بحرانی نیست. بنابراین، $(0,0)$ یک نقطهٔ منفرد است. داریم:

$$k(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0=k(0,0)$$

پس، $(0,0)$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع k است.



■ $l(x,y) = 1 - x$:
داریم:

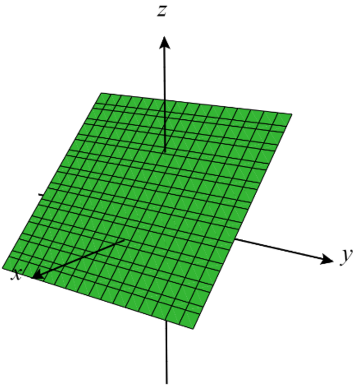
$$\nabla l(x,y) = (-1,0)$$

توجه کنید که $\nabla l(x,y) = (0,0)$ دارای هیچ جوابی نیست؛ یعنی l دارای نقطهٔ بحرانی نیست. اما اگر دامنهٔ l را به دیسک $x^2 + y^2 \leq 1$ محدود کنیم، آنگاه با توجه به بسته و کران‌دار بودن دامنه، l مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق خود را می‌گیرد. روی دیسک یادشده، داریم $-1 \leq x \leq 1$ که نتیجه می‌دهد:

$$l(1,0) = 0 \leq 1 - x = l(x,y)$$

$$l(x,y) = 1 - x \leq 2 = l(-1,0)$$

پس، نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ به‌ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکسیمم مطلق l روی دیسک یادشده هستند.



نقاط زینی

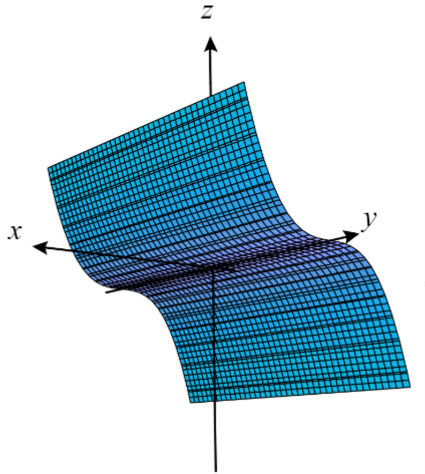
فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع و $P \in U$ یک نقطهٔ درونی باشد. در این صورت، نقطهٔ P یک **نقطهٔ زینی** تابع f نامیده می‌شود، هرگاه P یک نقطهٔ **بحرانی** f **باشد**، اما یک نقطهٔ **اکسترمم نسبی** f **نباشد**.

مثال

نقطهٔ $(0,0)$ یک نقطهٔ زینی تابع $h(x,y) = y^2 - x^2$ است.

تذکر

نمودار یک تابع حول یک نقطهٔ زینی، لزوماً شبیه زین نیست. مثلاً نمودار تابع $f(x,y)=x^3$ را در نظر بگیرید:



ماتریس هسین (Hessian)

فرض کنید تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته در یک همسایگی $P \in U$ باشد. به‌ازای هر $x \in U$ در این همسایگی، ماتریس هسین f در x به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

توجه کنید که از پیوستگی مشتقات جزئی مرتبه دوم f در همسایگی یادشده نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $1 \leq i, j \leq n$، داریم $f_{ij}(x) = f_{ji}(x)$. بنابراین، $H(x)$ یک ماتریس متقارن است.

قضیه (آزمون مشتق دوم)

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی نقطهٔ $P \in U$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. اگر P یک نقطهٔ بحرانی f باشد، آنگاه

۱ اگر $H(P)$ معین مثبت باشد، آنگاه P یک نقطهٔ مینیمم نسبی f است.

۲ اگر $H(P)$ معین منفی باشد، آنگاه P یک نقطهٔ ماکسیمم نسبی f است.

۳ اگر $H(P)$ نامعین باشد، آنگاه P یک نقطهٔ زینی f است.

۴ اگر $H(P)$ معین مثبت، معین منفی یا نامعین نباشد، آنگاه نتیجه‌ای در مورد P نمی‌توان گرفت.

مثال

اگر $f(x,y,z)=x^2+12yz+(y-z)^3$، آنگاه نقاط بحرانی f و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

پاسخ: داریم:

$$f_1(x,y,z)=2x,\quad f_2(x,y,z)=12z+3(y-z)^2,$$
$$f_3(x,y,z)=12y-3(y-z)^2$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}
&f_{11}(x,y,z)=2, && f_{12}(x,y,z)=0, && f_{13}(x,y,z)=0\\
&f_{21}(x,y,z)=0, && f_{22}(x,y,z)=6(y-z), && f_{23}(x,y,z)=12-6(y-z)\\
&f_{31}(x,y,z)=0, && f_{32}(x,y,z)=12-6(y-z), && f_{33}(x,y,z)=6(y-z)
\end{aligned}$$

پس، داریم:

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6(y-z) & 12-6(y-z) \\ 0 & 12-6(y-z) & 6(y-z) \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

حال، نقاط بحرانی f را می‌یابیم. توجه کنید که:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 12z + 3(y-z)^2, 12y - 3(y-z)^2)$$

بنابراین با قرار دادن $\nabla f(x,y,z)=0$ نتیجه می‌گیریم که:

$$2x=0, \quad 12z+3(y-z)^2=0, \quad 12y-3(y-z)^2=0$$

بنابراین، $x=0$ و از حاصل‌جمع دو طرف نظیر تساوی‌های دوم و سوم نتیجه می‌شود که $z=-y$.
بنابراین، از آنجا که $12y-3(y-z)^2=0$، داریم $12y-12y^2=0$ و از این‌رو $y=0$ یا $y=1$. پس، نقاط بحرانی f عبارت‌اند از:

$$P=(0,0,0), \quad Q=(0,1,-1)$$

پس، می‌توان نوشت:

$$H(P)=H(0,0,0)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

حال، داریم:

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} = -288$$

بنابراین، $H(P)$ نامعین است، و از این‌رو $P = (0, 0, 0)$ یک نقطهٔ زینی f است.

همچنین، داریم:

$$H(Q) = H(0,1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

از این‌رو، داریم:

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = 24 > 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = 288 > 0$$

پس، $H(Q)$ معین مثبت است، و بنابراین Q یک نقطهٔ مینیمم نسبی f است.

قضیه (آزمون مشتق دوم برای حالت خاص دومتغیره)

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی نقطهٔ $P = (a,b) \in U$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. اگر P یک نقطهٔ بحرانی f باشد و

$$A = f_{11}(a,b), \quad B = f_{12}(a,b) = f_{21}(a,b), \quad C = f_{22}(a,b),$$

آنگاه:

- اگر $A > 0$ و $AC - B^2 > 0$، آنگاه P یک نقطهٔ مینیمم نسبی f است.
- اگر $A < 0$ و $AC - B^2 > 0$، آنگاه P یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی f است.
- اگر $AC - B^2 < 0$، آنگاه P یک نقطهٔ زینی f است.
- اگر $AC - B^2 = 0$، آنگاه نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

مثال

فرض کنید که $f(x,y)=3x^3+y^2-9x+4y$. در این صورت، نقاط بحرانی f و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

پاسخ: داریم:

$$f_1(x,y)=9x^2-9, \quad f_2(x,y)=2y+4$$

بنابراین، داریم:

$$f_{11}(x,y)=18x, \quad f_{12}(x,y)=f_{21}(x,y)=0, \quad f_{22}(x,y)=2$$

توجه کنید که $\nabla f(x,y)=(9x^2-9,2y+4)$. پس، $\nabla f(x,y)=(0,0)$ نتیجه می‌دهد که $9x^2-9=2y+4=0$، و از این‌رو داریم $x=\pm1$ و $y=-2$. پس، $P=(1,-2)$ و $Q=(-1,-2)$ تنها نقاط بحرانی f هستند.

به‌منظور تعیین نوع نقاط P و Q، از آزمون مشتق دوم برای توابع دومتغیره استفاده می‌کنیم. داریم:

$$A(P) = f_{11}(P) = 18, \quad B(P) = f_{12}(P) = 0, \quad C(P) = f_{22}(P) = 2$$

پس، $A(P) = 18 > 0$ و $A(P)C(P) - B(P)^2 = 36 > 0$. از این‌رو، P یک نقطه‌ی مینیمم نسبی f است. به‌علاوه، داریم:

$$A(Q) = f_{11}(Q) = -18, \quad B(Q) = f_{12}(Q) = 0, \quad C(Q) = f_{22}(Q) = 2$$

پس، $A(Q)C(Q) - B(Q)^2 = -36 < 0$. از این‌رو، Q یک نقطهٔ زینی f است.

روش ضرایب لاگرانژ در مسائل بهینه‌سازی و مقدار اکسترمم

- فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد.
- فرض کنید که $m \leq n-1$ و $g_{(1)}, \dots, g_{(m)} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نیز دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند.
- دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} g_{(1)}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_{(m)}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

- فرض کنید که $P = (a_1, \dots, a_n) \in U$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی f در بین نقاطی باشد که در دستگاه بالا صدق می‌کنند.

ادامهٔ روش ضرایب لاگرانژ در مسائل بهینه‌سازی و مقدار اکسترمم

- تابع $L : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_{(i)}(x_1,\dots,x_n)$$

- بنابر قضیه‌ای (که در اینجا اثبات نمی‌کنیم)، $(\lambda_1,\dots,\lambda_m) = (b_1,\dots,b_m) \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $(P, b_1,\dots,b_m)$ یک نقطهٔ بحرانی تابع L است. یعنی، داریم:

$$\nabla L(P, b_1,\dots,b_m) = 0$$

ادامهٔ روش ضرایب لاگرانژ در مسائل بهینه‌سازی و مقدار اکسترمم

- سپس، به منظور یافتن P دستگاه زیر را حل می‌کنیم که در آن $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$
\begin{array}{rl}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0: & \\
\vdots & \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0: & \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0: & \\
\vdots & \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0: &
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \lambda_1 \dfrac{\partial g_{(1)}}{\partial x_1}(x) + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_{(m)}}{\partial x_1}(x) = 0 \\
\vdots \\
\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \lambda_1 \dfrac{\partial g_{(1)}}{\partial x_n}(x) + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial g_{(m)}}{\partial x_n}(x) = 0 \\
g_{(1)}(x) = 0 \\
\vdots \\
g_{(m)}(x) = 0
\end{array}
\right.
$$

ادامهٔ روش ضرایب لاگرانژ در مسائل بهینه‌سازی و مقدار اکسترمم

- در این روش، به منظور یافتن نقاط اکسترمم مطلق f با قیدهای یادشده، به‌ازای هر نقطهٔ بحرانی L مثل $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$، مقدار $f(a_1, \dots, a_n)$ را به‌دست می‌آوریم. در این صورت، بسته به اینکه می‌خواهیم مینیمم مطلق یا ماکسیمم مطلق f را بیابیم، نقاطی که به‌ترتیب کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار f را به‌دست می‌دهند، نقاط مینیمم مطلق یا ماکسیمم مطلق f هستند.

مثال

مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x,y,z)=xy+2z$ را روی دایرهٔ فصل مشترک صفحهٔ $x+y+z=0$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2=24$ بیابید.

پاسخ: قرار می‌دهیم:

$$g(x,y,z)=x+y+z, \quad h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-24$$

در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z) \\ &= xy+2z+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2+z^2-24) \end{aligned}$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{\partial L}{\partial x} = 0 : & \left\{ \begin{array}{lr}
y + \lambda + 2\mu x = 0 & (1) \\
x + \lambda + 2\mu y = 0 & (2) \\
2 + \lambda + 2\mu z = 0 & (3) \\
x + y + z = 0 & (4) \\
x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0 & (5)
\end{array} \right. \\
\frac{\partial L}{\partial y} = 0 : & \\
\frac{\partial L}{\partial z} = 0 : & \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 : & \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 : &
\end{array}
$$

حال، این دستگاه را حل می‌کنیم:

$$(1) - (2) : \quad (y - x) - 2\mu(y - x) = 0 \implies y = x \ \text{یا} \ \mu = \frac{1}{2}$$

- $\mu = \frac{1}{2}$:

در این صورت، معادله‌های (1) و (3) به‌صورت زیر تغییر خواهند کرد:

$$\begin{cases} x+\lambda+y=0 & (1') \\ 2+\lambda+z=0 & (3') \end{cases}$$

از رابطهٔ (4) داریم $x+y=-z$ و از این‌رو با جای‌گذاری در رابطهٔ $(1')$ داریم $\lambda-z=0$، که نتیجه می‌دهد $z=\lambda$. حال، با جای‌گذاری در رابطهٔ $(3')$ نتیجه می‌گیریم که $z=-1$. پس، معادله‌های (4) و (5) به‌صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases} x+y=1 & (4') \\ x^2+y^2=23 & (5') \end{cases}$$

از $(4')$ داریم $y=1-x$ و از این‌رو رابطهٔ $(5')$ به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$x^2+(1-x)^2=23 \implies x^2-x-11=0 \implies x=\frac{1\pm 3\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین، دو نقطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$P_1 = \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}, \frac{1-3\sqrt{5}}{2}, -1\right), \quad P_2 = \left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \frac{1+3\sqrt{5}}{2}, -1\right)$$

- $x = y$:

در این صورت، از معادلهٔ (4) داریم $z = -2x$، و از این‌رو بنابر معادلهٔ (5) داریم:

$$x^2 + x^2 + (-2x)^2 = 24 \implies x = \pm 2$$

بنابراین، نقاط زیر به‌دست می‌آیند:

$$P_3 = (2, 2, -4), \quad P_4 = (-2, -2, 4)$$

در نهایت، داریم:

$$f(P_1) = \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right) + 2(-1) = -13$$

$$f(P_2) = \left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right) + 2(-1) = -13$$

$$f(P_3) = (2)(2) + 2(-4) = -4$$

$$f(P_4) = (-2)(-2) + 2(4) = 12$$

بنابراین، مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق f روی خم فصل مشترک داده‌شده، به‌ترتیب برابر با 12 و -13 هستند.

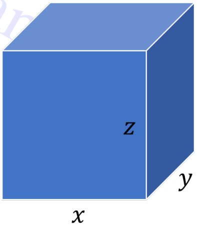
مثال‌های تکمیلی

تاکنون مثال‌های **مفهومی** و **کاربردی** مختلفی را از این مبحث دیدیم. در ادامه، به مثال‌های بیشتری از این مبحث توجه فرمایید. برای درک بهتر، ابتدا به مسائل فکر کنید و سعی کنید که آن‌ها را حل بفرمایید. سپس پاسخ‌ها را با دقت مطالعه و بررسی نمایید.

مثال

می‌خواهیم یک مکعب مستطیل بسازیم. به منظور ساخت قاعدهٔ این مکعب مستطیل، می‌خواهیم از ماده‌ای استفاده کنیم که قیمت هر واحد آن دو برابر قیمت هر واحد ماده‌ای است که در سقف و دیواره‌های مکعب به کار برده می‌شود. اگر بخواهیم که حجم این مکعب مستطیل $10\,m^3$ باشد، آنگاه ابعاد مکعب چگونه باشند تا هزینهٔ ساخت مکعب مینیمم شود؟

پاسخ:



اگر C هزینهٔ هر واحد از ماده‌ای باشد که می‌خواهیم در دیواره‌ها یا سقف مکعب به کار ببریم، آنگاه هزینهٔ ساخت مکعب برابر است با:

$$3Cxy + 2Czy + 2Cxz$$

پس، به‌طور معادل باید مقدار مینیمم تابع $(x, y, z > 0)\ f(x, y, z) = 3xy + 2yz + 2xz$ را با قید $xyz = 10$ بیابیم. با فرض $(x, y, z > 0)\ g(x, y, z) = xyz - 10$، از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = 3xy + 2yz + 2xz + \lambda(xyz - 10)$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x} = 0: & \left\{ \begin{array}{lr} 3y + 2z + \lambda yz = 0 & (1) \\ 3x + 2z + \lambda xz = 0 & (2) \\ 2y + 2x + \lambda xy = 0 & (3) \\ xyz - 10 = 0 & (4) \end{array} \right. \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0: & \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0: & \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0: & \end{array}$$

حال، داریم:

$$(1) - (2): \quad 3(y - x) + \lambda z(y - x) = 0 \implies (y - x)(3 + \lambda z) = 0$$

پس، داریم $y = x$ یا $\lambda z = -3$.

- $\lambda z = -3$:

در این صورت، با جای‌گذاری در معادلهٔ (2) داریم $z = 0$، که با معادلهٔ (4) در تناقض است. پس، این حالت غیرممکن است.

- $y = x$:

با جای‌گذاری در معادلهٔ (3) داریم:

$$2x + 2x + \lambda x^2 = 0 \implies x(4 + \lambda x) = 0 \implies x = 0 \text{ یا } \lambda x = -4$$

توجه کنید که $x = 0$ با معادلهٔ (4) در تناقض است. پس، حتماً باید $\lambda x = -4$. حال، با جای‌گذاری مقدار اخیر در رابطهٔ (2) داریم $3x = 2z$. سپس، با جای‌گذاری در معادلهٔ (4) داریم:

$$x^2\left(\frac{3}{2}x\right) = 10 \implies x^3 = \frac{20}{3} \implies x = \sqrt[3]{\frac{20}{3}}$$

پس، فقط نقطهٔ $\left(\sqrt[3]{\frac{20}{3}}, \sqrt[3]{\frac{20}{3}}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{20}{3}}\right) = P = (x_0, y_0, z_0)$ به‌دست می‌آید. بنابر روش ضرایب لاگرانژ، P یک نقطهٔ ماکسیمم مطلق یا مینیمم مطلق f روی رویهٔ $xyz = 10$ است.

داریم $\sqrt[3]{\frac{20}{3}} < 2$ و $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{\frac{20}{3}} < 2$ و $z_0 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{20}{3}} < 3$ و از این‌رو:

$$f(P) = 3x_0y_0 + 2y_0z_0 + 2x_0z_0 < 3(2)(2) + 2(2)(3) + 2(2)(3) = 36$$

با این‌حال، $(2, 5, 1)$ نقطه‌ای در دامنهٔ f و رویهٔ $xyz = 10$ است و داریم:

$$f(2, 5, 1) = 3(2)(5) + 2(5)(1) + 2(2)(1) = 44 > 36 > f(P)$$

پس، P یک نقطهٔ ماکسیمم مطلق نیست. بنابراین، P یک نقطهٔ مینیمم مطلق است.

مثال

کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ را در نظر بگیرید. فرض کنید (α,β,γ) نقطه‌ای روی کره است که در بین نقاط کره کم‌ترین فاصله را از نقطهٔ $(3,1,-1)$ دارد. مقدار $\alpha+\beta-\gamma$ در کدام گزینه آمده است؟

۱ $\frac{10}{\sqrt{11}}$

۲ $\frac{11}{\sqrt{11}}$

۳ $\frac{12}{\sqrt{11}}$

۴ $\frac{13}{\sqrt{11}}$

پاسخ: تابع فاصلهٔ نقاط $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ از $(3,1,-1)$، یعنی $d:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$

بنابراین، باید نقاط مینیمم مطلق d را روی کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ بیابیم. به‌طور معادل، نقاط مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(d(x,y,z))^2$ را روی کرهٔ یادشده می‌یابیم. قرار می‌دهیم:

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$$

حال، به منظور استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}L(x,y,z,\lambda)&=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)\\&=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)\end{aligned}$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x} = 0: & \left\{ \begin{array}{ll} 2(x-3) + 2\lambda x = 0 \xrightarrow{\lambda \neq -1} x = \frac{3}{1+\lambda} & (1) \\ 2(y-1) + 2\lambda y = 0 \xrightarrow{\lambda \neq -1} y = \frac{1}{1+\lambda} & (2) \\ 2(z+1) + 2\lambda z = 0 \xrightarrow{\lambda \neq -1} z = -\frac{1}{1+\lambda} & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 & (4) \end{array} \right. \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0: & \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0: & \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0: & \end{array}$$

با جای‌گذاری مقادیر به‌دست آمده برای x، y و z در رابطهٔ (4)، داریم:

$$\frac{9}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda)^2} = 4$$

که نتیجه می‌دهد $\frac{11}{(1+\lambda)^2} = 4$، و از این‌رو داریم:

$$1 + \lambda = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

بنابراین، دو نقطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$P = \left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right), \quad Q = \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

داریم:

$$f(P) = \left(\frac{6}{\sqrt{11}} - 3\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{11}} - 1\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{11}} + 1\right)^2 = 15 - 4\sqrt{11}$$

$$f(Q) = \left(-\frac{6}{\sqrt{11}} - 3\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{11}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{11}} + 1\right)^2 = 15 + 4\sqrt{11}$$

پس، $f(P) < f(Q)$، و از این‌رو P نزدیک‌ترین نقطهٔ کره به نقطهٔ $(3, 1, -1)$ است. از فرض سؤال نتیجه می‌شود که

$$P = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \implies \alpha + \beta - \gamma = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

پس، گزینهٔ ۱ درست است.

مثال

تابع $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

۱ نقاط بحرانی f را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

۲ ماکسیمم و مینیمم مطلق f را روی گوی بستهٔ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ بیابید.

پاسخ ۱: داریم:

$$f_1(x,y,z)=x^3-x^2-2x,\quad f_2(x,y,z)=2y,\quad f_3(x,y,z)=z$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
&f_{11}(x,y,z)=3x^2-2x-2, && f_{12}(x,y,z)=f_{13}(x,y,z)=0\\
&f_{22}(x,y,z)=2, && f_{21}(x,y,z)=f_{23}(x,y,z)=0\\
&f_{33}(x,y,z)=1, && f_{31}(x,y,z)=f_{32}(x,y,z)=0
\end{aligned}$$

بنابراین، داریم:

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 3x^2-2x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال، نقاط بحرانی f را می‌یابیم. داریم:

$$\nabla f(x,y,z) = (x^3 - x^2 - 2x, 2y, z)$$

بنابراین، $\nabla f(x,y,z) = 0$ نتیجه می‌دهد که $y = z = 0$ و

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \implies x(x+1)(x-2) = 0 \implies x = 0 \text{ یا } x = -1 \text{ یا } x = 2$$

در نتیجه، نقاط بحرانی زیر را داریم:

$$P_1 = (0,0,0), \quad P_2 = (-1,0,0), \quad P_3 = (2,0,0)$$

- P_1:

$$H(P_1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، داریم:

$$D_1 = -2 < 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -4 < 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -4 < 0$$

پس، $H(P_1)$ نامعین است. از این‌رو، P_1 یک نقطهٔ زینی f است.

- P_2:

$$H(P_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، داریم:

$$D_1 = 3 > 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

پس، $H(P_2)$ معین مثبت است. از این‌رو، P_2 یک نقطهٔ مینیمم نسبی f است.

:P_3

$$H(P_3) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، داریم:

$$D_1 = 6 > 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 12 > 0$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 12 > 0$$

پس، $H(P_3)$ معین مثبت است. از این‌رو، P_3 یک نقطهٔ مینیمم نسبی f است.

پاسخ ۲: بنابر قضیه‌ای، نقاط اکسترمم f نقاط بحرانی هستند، یا نقاط مرزی، یا نقاط منفرد. حال، از آنجا که f همه‌جا دارای مشتقات جزئی است، نقاط اکسترمم f روی گوی بستهٔ $x^2+y^2+z^2 \leq 1$، نقاط بحرانی هستند، یا نقاط مرزی. در قسمت ۱، نقاط بحرانی f را روی $\mathbb{R}^3$ به‌دست آوردیم. توجه کنید که فقط نقطهٔ P_1 در درون گوی داده‌شده قرار دارد، در حالی‌که P_1 یک نقطهٔ زینی است. پس به‌اجبار، نقاط اکسترمم مطلق f روی مرز گوی بستهٔ داده‌شده یعنی کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ واقع هستند. به منظور یافتن مقادیر اکسترمم مطلق f روی کرهٔ یادشده (و در نتیجه روی گوی بستهٔ $x^2+y^2+z^2 \leq 1$)، از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. با فرض اینکه $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z) \\ &= \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1) \end{aligned}$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}=0: \\ \frac{\partial L}{\partial y}=0: \\ \frac{\partial L}{\partial z}=0: \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0: \end{array} \begin{cases} x^3-x^2-2x+2\lambda x=0 \qquad (1) \\ 2y+2\lambda y=0 \implies (1+\lambda)y=0 \implies y=0 \text{ یا } \lambda=-1 \\ z+2\lambda z=0 \implies (1+2\lambda)z=0 \implies z=0 \text{ یا } \lambda=-\frac{1}{2} \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \qquad (2) \end{cases}$$

بنابراین، y و z همزمان غیر صفر نیستند. از این‌رو، سه حالت ممکن داریم:

- $y=z=0$:

از رابطهٔ (2) داریم $x^2=1$، و لذا $x=\pm 1$. پس، دو نقطهٔ $Q_1=(1,0,0)$ و $Q_2=(-1,0,0)$ را داریم (البته Q_2 همان P_2 در جواب قسمت ۱ است).

- $y = 0$ و $\lambda = -\frac{1}{2}$:

از رابطهٔ (1) داریم:

$$x^3 - x^2 - 3x = 0 \implies x(x^2 - x - 3) = 0 \implies x = 0 \text{ یا } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

اگر $x = 0$، آنگاه از رابطهٔ (2) داریم $z^2 = 1$، و لذا $z = \pm 1$. پس، نقاط زیر را داریم:

$$Q_3 = (0, 0, 1), \quad Q_4 = (0, 0, -1)$$

حال، اگر $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$، آنگاه $|x| > 1$ و لذا هیچ نقطه‌ای با مؤلفهٔ اول برابر با چنین xهایی روی مرز کره وجود ندارد.

- $z=0$ و $\lambda=-1$:

از رابطهٔ (1) داریم:

$$x^3-x^2-4x=0 \implies x(x^2-x-4)=0 \implies x=0 \text{ یا } x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

اگر $x=0$، آنگاه از رابطهٔ (2) داریم $y^2=1$، و لذا $y=\pm 1$. پس، نقاط زیر را داریم:

$$Q_5=(0,1,0),\quad Q_6=(0,-1,0)$$

حال، اگر $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$، آنگاه $|x|>1$ و لذا هیچ نقطه‌ای با مؤلفهٔ اول برابر با چنین xهایی روی مرز کره وجود ندارد.

بنابراین، نقاط اکسترمم زیر روی کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ به‌دست می‌آیند:

$$Q_1=(1,0,0),\quad Q_2=(-1,0,0),\quad Q_3=(0,0,1),$$
$$Q_4=(0,0,-1),\quad Q_5=(0,1,0),\quad Q_6=(0,-1,0).$$

داریم:

$$f(Q_1)=-\frac{13}{12},\quad f(Q_2)=-\frac{5}{12},\quad f(Q_3)=\frac{1}{2},$$
$$f(Q_4)=\frac{1}{2},\quad f(Q_5)=1,\quad f(Q_6)=1$$

پس، مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f روی گوی بستهٔ $x^2+y^2+z^2\leq 1$ به‌ترتیب برابر هستند با 1 و $-\frac{13}{12}$.

مثال

مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x,y,z) = xy + 2z$ را با قیدهای زیر بیابید:

$$x + y + z \geq 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 24$$

پاسخ:

از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. اما توجه کنید که قیدها در روش ضرایب لاگرانژ به‌صورت معادله هستند و نه نامعادله. بنابراین، می‌توانیم با اضافه کردن دو متغیر s و t، نامعادله‌های بالا را به معادله تبدیل کنیم. برای این منظور، تابع داده‌شده و قیدها را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x,y,z,s,t) = xy + 2z,\ x + y + z - s^2 = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 - 24 + t^2 = 0$$

قرار می‌دهیم:

$$g(x,y,z,s,t) = x + y + z - s^2, \quad h(x,y,z,s,t) = x^2 + y^2 + z^2 - 24 + t^2$$

پس، داریم:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,s,t) &= f(x,y,z,s,t) + \lambda g(x,y,z,s,t) + \mu h(x,y,z,s,t) \\ &= xy + 2z + \lambda(x + y + z - s^2) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 24 + t^2) \end{aligned}$$

پس، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} = 0: \quad & \left\{\begin{array}{ll}
y + \lambda + 2\mu x = 0 & (1)\\
x + \lambda + 2\mu y = 0 & (2)\\
2 + \lambda + 2\mu z = 0 & (3)\\
-2\lambda s = 0 & (4)\\
2\mu t = 0 & (5)\\
x + y + z - s^2 = 0 & (6)\\
x^2 + y^2 + z^2 - 24 + t^2 = 0 & (7)
\end{array}\right.\\
\frac{\partial L}{\partial y} = 0: \quad & \\
\frac{\partial L}{\partial z} = 0: \quad & \\
\frac{\partial L}{\partial s} = 0: \quad & \\
\frac{\partial L}{\partial t} = 0: \quad & \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0: \quad & \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0: \quad &
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن روابط (4) و (5)، چهار حالت ممکن داریم:

$$s = t = 0, \quad \lambda = \mu = 0, \quad \lambda = t = 0, \quad s = \mu = 0$$

$s = t = 0$ (I):

در این حالت، قیدها به‌صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$x + y + z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 24$$

توجه کنید که قبل‌تر در مثالی دیگر، مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با قیدهای بالا را به‌ترتیب برابر با 12 و -13 به‌دست آوردیم.

$\lambda = \mu = 0$ (II):

در این صورت، با رابطهٔ (3) به تناقض می‌رسیم. پس، این حالت امکان‌پذیر نیست.

$(\mathrm{III})\quad \lambda = t = 0$:

در این صورت، دستگاه یادشده به دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{\partial L}{\partial x} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial y} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial z} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0: & \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0: &
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ll}
y + 2\mu x = 0 & (1') \\
x + 2\mu y = 0 & (2') \\
2 + 2\mu z = 0 & (3') \\
x + y + z - s^2 = 0 & (6) \\
x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0 & (7')
\end{array}
\right.
$$

پس، داریم:

$$(1') - (2'): \quad (y - x)(1 - 2\mu) = 0 \implies y = x \ \text{یا}\ \mu = \frac{1}{2}$$

(i) $y = x$:

در این صورت، از رابطهٔ $(1')$ داریم $x = 0$ یا $\mu = -\frac{1}{2}$. چنان‌چه $x = 0$، آنگاه با توجه به $y = x$، داریم $y = 0$ و لذا از رابطهٔ $(7')$ نتیجه می‌شود که $z^2 = 24$. بنابراین، $z = \pm 2\sqrt{6}$. اما از رابطهٔ (6) داریم $z = s^2$، که نتیجه می‌دهد z نامنفی است. پس، فقط $z = 2\sqrt{6}$ قابل قبول است. بنابراین، نقطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \left(0, 0, 2\sqrt{6}\right)$$

اما اگر $\mu = -\frac{1}{2}$، آنگاه از رابطهٔ $(3')$ نتیجه می‌شود که $z = 2$. حال، با جای‌گذاری در $(7')$ داریم $2x^2 = 20$، که نتیجه می‌دهد $x = \pm\sqrt{10}$. با این‌حال، جای‌گذاری $x = -\sqrt{10}$ در رابطهٔ (6) باعث تناقض می‌شود (نتیجه می‌شود که $s^2 < 0$). پس، تنها نقطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$B = (\sqrt{10}, \sqrt{10}, 2)$$

(ii) $\mu = \frac{1}{2}$:

بنابر روابط $(1')$ و $(3')$، داریم $y = -x$ و $z = -2$. حال، با جای‌گذاری در رابطهٔ (6) به تناقض $s^2 + 2 = 0$ می‌رسیم. پس، این حالت امکان‌پذیر نیست.

(IV) $s = \mu = 0$:

در این صورت، دستگاه زیر را داریم:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{\partial L}{\partial x} = 0 : & \left\{ \begin{array}{lr}
y + \lambda = 0 & \qquad (1'') \\
x + \lambda = 0 & \qquad (2'') \\
2 + \lambda = 0 & \qquad (3'') \\
x + y + z = 0 & \qquad (6'') \\
x^2 + y^2 + z^2 - 24 + t^2 = 0 & \qquad (7)
\end{array} \right. \\
\frac{\partial L}{\partial y} = 0 : & \\
\frac{\partial L}{\partial z} = 0 : & \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 : & \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 : &
\end{array}
$$

از روابط $(1'')$، $(2'')$ و $(3'')$ نتیجه می‌شود که $x = y = 2$. حال، از رابطهٔ $(6'')$ داریم $z = -4$. البته با جای‌گذاری این مقادیر در رابطهٔ (7)، داریم $t = 0$ و لذا نقطهٔ $C = (2, 2, -4)$ به‌دست می‌آید.

در نهایت، باید مقادیر اکسترمم مطلق به‌دست آمده در حالت‌های (I)، (III) و (IV) را با هم مقایسه کنیم. مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق در حالت (I) به‌ترتیب برابر با 12 و -13 هستند. به‌علاوه، داریم:

$$f(A) = 4\sqrt{6}, \quad f(B) = 14, \quad f(C) = -4$$

پس، مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق f با قیدهای داده‌شده در صورت مثال، به‌ترتیب برابر با 14 و -13 هستند.