انتگرال

تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

پاییز ۱۴۰۲

تعریف

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. می‌گوییم:

- A از **بالا کران‌دار** است، هرگاه عددی مانند K وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \leq K$.
- A از **پایین کران‌دار** است، هرگاه عددی مانند L وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \geq L$.
- A **کران‌دار** است، هرگاه A از بالا و پایین کران‌دار باشد. در واقع A کران‌دار است اگر و تنها اگر عددی چون M وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $|x| \leq M$؛ یعنی $-M \leq x \leq M$.
- K (L) عضو **ماکسیمم** (عضو **مینیمم**) A است، هرگاه کران بالایی K (کران پایینی L) عضو A هم باشد.

مثال

- مجموعه‌های $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ بی‌کران هستند.
- بازه بسته $A = [۱, ۳]$ از بالا و از پایین کران‌دار است. در واقع هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۳، یک کران بالا و هر عدد کوچک‌تر یا مساوی ۱، یک کران پایین برای $A = [۱, ۳]$ می‌باشد. در این حالت $\max A = ۳$ و $\min A = ۱$.
- برای بازه باز $A = (۱, ۳)$ هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۳، یک کران بالا و هر عدد کوچک‌تر یا مساوی ۱، یک کران پایین برای A می‌باشد. اما این مجموعه ماکسیمم و مینیمم ندارد.

تذکر

مشاهده می‌شود که مجموعه‌ی مثال آخر، از بالا و پایین کران‌دار است ولی عضو ماکسیمم و عضو مینیمم ندارد. برای این مجموعه‌ها مفهومی وجود دارد که جای عضو ماکسیمم (عضو مینیمم) را می‌گیرد. این مفهوم، همان کوچک‌ترین کران بالای مجموعه (بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه) است.

تعریف (کوچک‌ترین کران بالا)

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی باشد. عدد K را کوچک‌ترین کران بالا مجموعه‌ی A می‌نامیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

(۱) K یک کران بالا برای A باشد.

(۲) هیچ عدد کوچک‌تر از K یک کران بالا برای A نباشد.

تعریف (بزرگ‌ترین کران پایین)

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی باشد. عدد L را بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه‌ی A می‌نامیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

(۱) L یک کران پایین برای A باشد.

(۲) هیچ عدد بزرگ‌تر از L یک کران پایین برای A نباشد.

تذکر

توجه می‌کنیم که کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین، در صورت وجود یکتا هستند. از این پس، به جای واژه‌ی کوچک‌ترین کران بالا اصطلاح سوپریمم، با علامت اختصاری sup، و به جای واژه‌ی بزرگ‌ترین کران پایین اصطلاح اینفیمم، با علامت اختصاری inf، را به کار می‌بریم.

$$K = \sup A, \qquad L = \inf A.$$

اصل کمال

هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کران‌دار (از پایین کران‌دار) باشد، دارای sup (inf) است.

مثال

- $A = \mathbb{Q} \implies \inf A = \text{ندارد}, \quad \sup A = \text{ندارد}$
- $A = [-۱, \sqrt{۲}] \cup \{۴\} \implies \inf A = \min A = -۱$
  $\sup A = \max A = ۴$
- $A = (۳, ۸) \implies \inf A = ۳, \quad \sup A = ۸$
- $A = \left\{ \dfrac{۱}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \implies \inf A = ۰, \quad \sup A = \max A = ۱$
- $A = \{x \in \mathbb{Q},\ x^۲ < ۵\} \implies \inf A = -\sqrt{۵} \quad , \sup A = \sqrt{۵}$

تعریف

تابع $f(x)$ با دامنه‌ی D_f را کران‌دار گوییم، هرگاه مجموعه‌ی برد تابع کران‌دار باشد؛ یعنی مجموعه‌ی $\{f(x) : x \in D_f\}$ کران‌دار باشد. یا به‌طور معادل عددی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$|f(x)| \leq M.$$

مثال

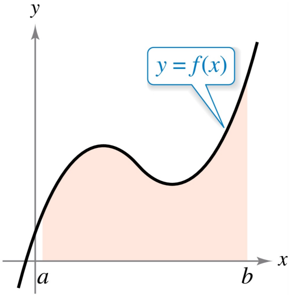
تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ روی بازه‌ی $(0, 1)$ کران‌دار نیست، اما روی بازه‌ی $(\frac{1}{2}, 3)$ کران‌دار است.

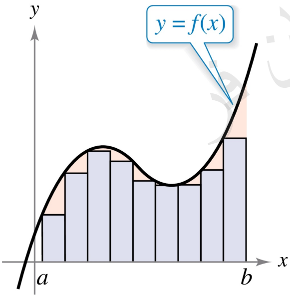
Isaac Newton (۱۶۴۳ – ۱۷۲۷)

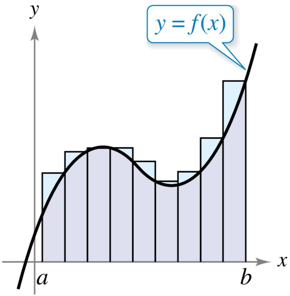
Wilhelm Leibniz (۱۶۴۶ – ۱۷۱۶)

Bernhard Rieman (۱۸۲۶ – ۱۸۶۶)

فرض کنیم $f(x)$ تابعی کران‌دار و نامنفی بر $[a,b]$ باشد. می‌خواهیم در صورت امکان مساحت محصور به نمودار $y=f(x)$، محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$ را بیابیم. برای این منظور، با استفاده از مجموع مساحت مستطیل‌هایی مطابق شکل، یک کران بالا و یک کران پایین برای مساحت مطلوب به‌دست







می‌آوریم. واضح است که اگر در شکل صفحه‌ی قبل تعداد مستطیل‌ها بیشتر شوند، آن‌گاه کران‌های بالا و پایینی که به‌وسیله‌ی مجموع مساحت مستطیل‌های بالایی و پایینی به‌دست می‌آیند، به مساحت زیر نمودار تابع $y = f(x)$ نزدیک‌تر می‌شوند. در ادامه این مطلب را به‌طور دقیق‌تر بیان می‌کنیم.

فرض کنیم بازه بسته $[a, b]$ را با درج $n - ۱$ نقطه‌ی

$$x_۰ = a < x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{n-۱} < x_n = b$$

به n زیربازه تجزیه کرده باشیم. در این صورت مجموعه‌ی

$$P = \{x_۰, x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}, x_n\}$$

را یک افراز $[a, b]$ می‌نامیم. افراز P مشخص کننده‌ی n زیربازه‌ی بسته

$$[x_۰, x_۱], [x_۱, x_۲], \ldots, [x_{n-۱}, x_n]$$

خواهد بود. $[x_{i-1}, x_i]$ را زیربازه‌ی بسته‌ی iـام P می‌نامیم. تعداد زیربازه‌های بسته این افراز، n تا می‌باشد. طول زیربازه‌ی iـام افراز P عبارت است از

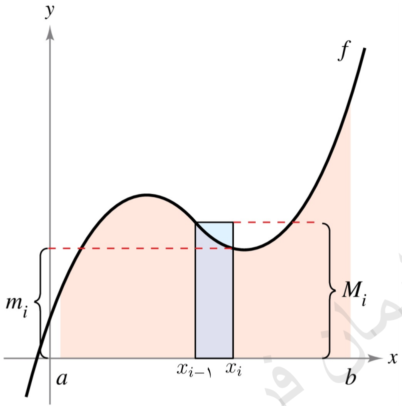
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

در بین این طول زیربازه‌ها، بزرگ‌ترین مقدار Δx_i را نُرم افراز P می‌گوییم و آن را با $\|P\|$ نشان می‌دهیم. بنابراین $\|P\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i$.

چون f روی $[a, b]$ کران‌دار است، پس بر هر یک از زیربازه‌های $[x_{i-1}, x_i]$ کران‌دار است. در نتیجه به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ مجموعه‌ی

$$\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

دارای سوپریمم و اینفیمم است. (توجه می‌کنیم در صورتی که f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه مجموعه‌های بالا دارای ماکسیمم و مینیمم هستند.)



فرض کنیم:

$$m_i = \inf_{x_{i-۱} \leq x \leq x_i} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x_{i-۱} \leq x \leq x_i} f(x).$$

اگر A_i مساحت محصور به محور x و نمودار تابع $y = f(x)$ روی $[x_{i-۱}, x_i]$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\text{مساحت مستطیل پایینی} = m_i \Delta x_i \leq A_i \leq M_i \Delta x_i = \text{مساحت مستطیل بالایی}.$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=۱}^{n} m_i \Delta x_i \leq \text{مساحت ناحیه‌ی مطلوب} \leq \sum_{i=۱}^{n} M_i \Delta x_i.$$

مجموع مساحت مستطیل‌های پایینی یعنی $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ را با $L(f,P)$ نمایش داده و **مجموع پایین ریمان** می‌نامند. به‌طور مشابه، مجموع مساحت مستطیل‌های بالایی یعنی $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ را با $U(f,P)$ نمایش داده و **مجموع بالای ریمان** می‌نامند. به عبارت دیگر، داریم:

$$L(f,P) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

$$U(f,P) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

پس به‌ازای هر افراز P از $[a,b]$ داریم:

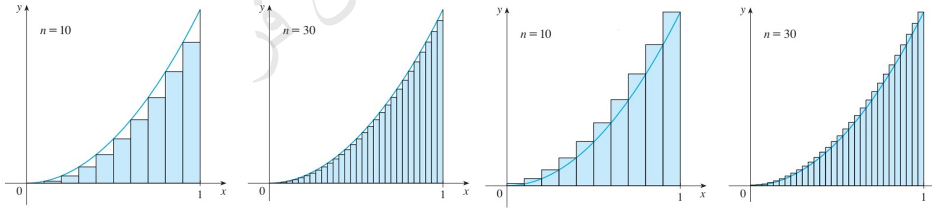
$$L(f,P) \leq \text{مساحت ناحیه‌ی مطلوب} \leq U(f,P).$$

تذکر

اگر P_1 و P_2 دو افراز از بازه‌ی $[a, b]$ باشند به‌طوری که $P_1 \subseteq P_2$، آن‌گاه

$$L(f, P_1) \leq L(f, P_2) \leq U(f, P_2) \leq U(f, P_1).$$

به عبارت دیگر، اگر نقاطی به یک افراز اضافه کنیم، مجموع پایین (در صورت تغییر) افزایش و مجموع بالا (در صورت تغییر) کاهش می‌یابند.



تعریف (انتگرال بالا و پایین)

فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کران‌دار باشد. اگر

$$S=\{L(f,P)\mid P \text{ افرازی از } [a,b] \text{ باشد}\},$$

$$T=\{U(f,P)\mid P \text{ افرازی از } [a,b] \text{ باشد}\},$$

آن‌گاه عدد $\sup S$ را **انتگرال پایینی** $f(x)$ روی $[a,b]$ می‌نامیم و با نماد

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

نمایش می‌دهیم. همچنین، عدد $\inf T$ **انتگرال بالایی** $f(x)$ روی $[a,b]$ نامیده می‌شود و با نماد زیر نمایش داده می‌شود:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

گزاره

هرگاه تابع f بر $[a,b]$ کران‌دار باشد، آن‌گاه دارای انتگرال پایینی $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ و انتگرال بالایی $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ است و به‌ازای هر افراز P از $[a,b]$ در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq U(f,P).$$

تذکر

ثابت می‌شود که:

$$\lim_{\|P\|\to 0} L(P,f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{\|P\|\to 0} U(P,f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

مثال

فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$. انتگرال‌های $\underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x$ و $\overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x$ را حساب کنید.

پاسخ: فرض کنیم $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ افرازی از $[0, 1]$ باشد. از آنجا که در هر بازه‌ی بسته‌ای مانند $[x_{i-1}, x_i]$ اعداد گویا و گنگ وجود دارند، داریم:

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 0 \implies L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0,$$

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 1 \implies U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = 1.$$

بنابراین

$$\underline{\int_{0}^{1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{L(f,P) \mid \text{باشد } [0,1] \text{ افرازی از } P\right\} = \sup\{0\} = 0$$

$$\overline{\int_{0}^{1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{U(f,P) \mid \text{باشد } [0,1] \text{ افرازی از } P\right\} = \inf\{1\} = 1$$

تعریف

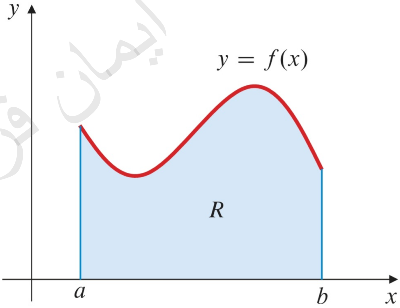
تابع کران‌دار $f(x)$ را بر $[a,b]$ *انتگرال‌پذیر* گوییم، هرگاه $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

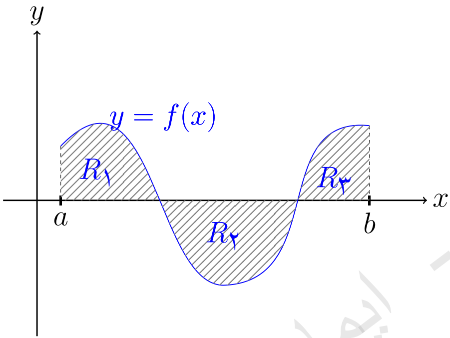
به‌علاوه، این مقدار مشترک را با نماد $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ نمایش می‌دهیم و آن را انتگرال $f(x)$ از a تا b می‌خوانیم.

توجه

نماد $\int$ را نماد انتگرال می‌نامیم. این نماد به S (حرف اول کلمه‌ی SUM) شباهت دارد که نمایش حد مجموع است. اعداد a و b را حدود انتگرال‌گیری می‌نامیم. (b حد بالا و a حد پایین است.) تابع f را انتگرالده می‌نامیم. نماد $\mathrm{d}x$، دیفرانسیل x است که به جای Δx در مجموع‌های ریمان نشسته است.

در صورتی که بر $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$، آن‌گاه مساحت ناحیه‌ی R که بین نمودار تابع $y=f(x)$، محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$ قرار دارد برابر است با $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. اگر بر $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) \leq 0$، آن‌گاه مساحت محصور به محور x و نمودار تابع $y=f(x)$ روی $[a,b]$، برابر است با $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.





فرض کنید R ناحیه‌ی محدود به محور x و نمودار تابع $y = f(x)$ روی $[a, b]$ باشد. در حالت کلی $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ برابر است با مساحت قسمتی از ناحیه‌ی R که بالای محور xها قرار دارد منهای مساحت قسمتی از R که زیر محور xها قرار دارد.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R_۱ \text{ مساحت}) - (R_۲ \text{ مساحت}) + (R_۳ \text{ مساحت}),$$

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = (R_۱ \text{ مساحت}) + (R_۲ \text{ مساحت}) + (R_۳ \text{ مساحت}).$$

مثال

انتگرال‌پذیری تابع ثابت $f(x) = c$ را بر بازه‌ی $[a, b]$ بررسی کنید.

پاسخ: برای افراز دلخواه $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ از $[a, b]$ داریم:

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = c, \qquad M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = c.$$

$$\begin{aligned} L(f, P) = U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

$$\underline{\int_{۰}^{۱}} f(x)dx = \sup\left\{L(f,P) \mid \text{باشد } [a,b] \text{ افرازی از } P\right\} = \sup\{c(b-a)\}$$
$$= c(b-a)$$

$$\overline{\int_{۰}^{۱}} f(x)dx = \inf\left\{U(f,P) \mid \text{باشد } [a,b] \text{ افرازی از } P\right\} = \inf\{c(b-a)\}$$
$$= c(b-a)$$

پس f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و داریم:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a).$$

گاهی مناسب است که نقاط x_i $(0 \le i \le n)$ متعلق به بازه‌ی $[a,b]$ را طوری انتخاب کنیم که همه‌ی Δx_iها برابر باشند. در این حالت داریم:

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

این افراز را با P_n نمایش می‌دهیم. داریم:

$$P_n = \left\{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b\right\}.$$

توجه کنید که اگر

$$\lim_{n\to+\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to+\infty} U(f,P_n) = \ell,$$

آن‌گاه تابع f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و داریم $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \ell$.

مثال

نشان دهید تابع $f(x)=x$ بر $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است و $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ را محاسبه کنید.

پاسخ: افراز P_n از بازه‌ی $[0,1]$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\Delta x_i=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n},\qquad x_i=0+i\Delta x_i=\frac{i}{n}.$$

چون تابع $f(x)=x$ بر $[0,1]$ صعودی است، اینفیمم و سوپریمم مقادیر $f(x)$ بر $[x_{i-1},x_i]$ به‌ترتیب برابر با $f(x_{i-1})$ و $f(x_i)$ است. بنابراین

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=x_{i-1},\quad M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)=x_i.$$

$$\begin{aligned}L(f,P_n)&=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\\&=\frac{0+1+2\cdots+n-1}{n^2}=\frac{(n-1)n}{2n^2}=\frac{n-1}{2n}.\end{aligned}$$

$$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}$$
$$=\frac{1+2+3\cdots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}.$$

چون

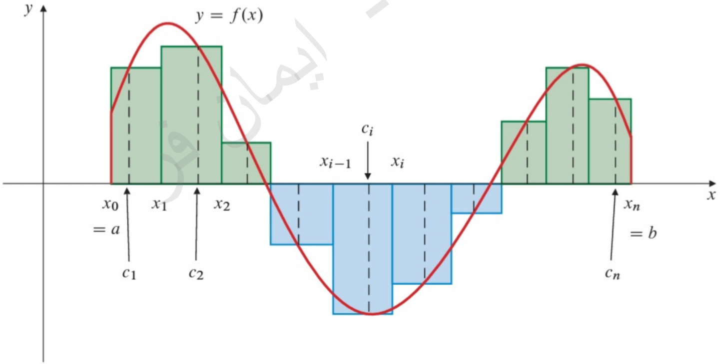
$$L(f,P_n)\le \underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x\le \overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x\le U(f,P_n),$$
$$\lim_{n\to+\infty} L(f,P_n)=\lim_{n\to+\infty} U(f,P_n)=\frac{1}{2},$$

تابع $f(x)$ بر $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

فرض کنید $f(x)$ تابعی کران‌دار بر $[a,b]$ و $P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ افرازی از $[a,b]$ باشد. به‌ازای هر $1\leq i\leq n$ نقاط دلخواه $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ را در نظر می‌گیریم و مجموع ریمان f متناظر با افراز P و نقاط c_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(f,P)=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i.$$



واضح است که به‌ازای هر افراز P از بازه‌ی $[a, b]$ می‌توان نوشت:

$$L(f, P) \leq R(f, P) \leq U(f, P).$$

در صورتی که f انتگرال‌پذیر باشد، داریم:

$$\lim_{\|P\| \to ۰} L(f, P) = \lim_{\|P\| \to ۰} U(f, P) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

بنابراین، از قضیه‌ی فشردگی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{\|P\| \to ۰} R(f, P) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

تذکر

توجه کنید که:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y.$$

در واقع، نام متغیر داخل انتگرال تاثیری در مقدار انتگرال ندارد.

قضیه

- هر تابع یکنوا بر بازه‌ی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است.
- هر تابع پیوسته بر بازه‌ی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است.

تذکر

فرض کنید f تابعی پیوسته (در نتیجه انتگرال‌پذیر) بر $[a,b]$ باشد. افراز P_n از $[a,b]$ و نقاط $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ را به‌ازای هر $1 \le i \le n$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$R(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

چون $\lim_{n\to+\infty} R(f, P_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$، بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

مثال

حد $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2i-1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$ را به‌صورت یک انتگرال معین بیان کنید.

پاسخ: اگر مجموع ریمان f متناظر با افراز P_n و نقاط c_i را در نظر بگیریم، یعنی $\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$، آن‌گاه داریم:

$$x_{i-1}\leq c_i\leq x_i,\quad \Delta x_i=\frac{b-a}{n},\quad x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}.$$

بنابراین $a=x_0\leq c_1\leq x_1=a+\frac{(b-a)}{n}$ و در نتیجه $\lim\limits_{n\to+\infty}c_1=a$. همچنین، می‌دانیم $a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}=x_{n-1}\leq c_n\leq x_n=b$ پس $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=b$.

اکنون فرض کنیم $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$. ملاحظه می‌کنیم $\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}$ و $c_i=1+\frac{2i-1}{n}$. طبق توضیحات بالا، داریم:

$$a=\lim_{n\to+\infty}c_1=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

$$b=\lim_{n\to+\infty} c_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n-1}{n}\right)=3$$

بنابراین نقاط افراز عبارتند از $x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}=1+\frac{2i}{n}$. مشاهده می‌شود که:

$$x_{i-1}=1+\frac{2i-2}{n}<1+\frac{2i-1}{n}<1+\frac{2i}{n}=x_i \implies x_{i-1}<c_i<x_i.$$

از این‌رو، مجموع مفروض، یک مجموع ریمان تابع $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ بر بازه‌ی $[1,3]$ است.
چون f بر این بازه پیوسته است، پس بر این بازه انتگرال‌پذیر بوده و در نتیجه:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2i-1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}(c_i)^{\frac{1}{3}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$$

$$=\lim_{n\to+\infty}R(f,P_n)=\int_1^3 x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x.$$

ویژگی‌های اساسی انتگرال ریمان

(۱) **خطی بودن نسبت به انتگرالده.** یعنی اگر f و g بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند، آن‌گاه $c_1 f + c_2 g$ نیز به‌ازای هر جفت ثابت c_1 و c_2 انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b \left(c_1 f(x) + c_2 g(x)\right) \mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + c_2 \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

با استقرای ریاضی می‌توان نتیجه گرفت که اگر $f_1, f_2, \ldots, f_n$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند، آن‌گاه $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$ نیز به‌ازای ثابت‌های حقیقی دلخواه $c_1, c_2, \ldots, c_n$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b \left(c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)\right) \mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x) \mathrm{d}x + \cdots + c_n \int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x$$

ویژگی‌های اساسی انتگرال ریمان

(۲) **جمع‌پذیری نسبت به بازه‌ی انتگرال‌گیری.** اگر از سه انتگرال زیر، دو انتگرال وجود داشته باشند، آن‌گاه سومی نیز موجود خواهد بود و داریم:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(۳) **مقایسه‌پذیری.** هرگاه f و g بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و به‌ازای هر x در $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$، آن‌گاه:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

ویژگی‌های اساسی انتگرال ریمان

(۴) **نابرابری مثلثی.** اگر f بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(۵) **انتگرال تابع فرد.** اگر f تابعی فرد باشد (یعنی $f(-x) = -f(x)$) و انتگرال آن بر $[-a, a]$ موجود باشد، آن‌گاه:

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \circ.$$

ویژگی‌های اساسی انتگرال ریمان

(۶) **انتگرال تابع زوج.** اگر f تابعی زوج باشد (یعنی $f(-x) = f(x)$) و انتگرال آن بر $[-a, a]$ موجود باشد، آن‌گاه:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = ۲\int_{۰}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(۷) **تعویض حدود انتگرال.** با تعویض جای حدود انتگرال، علامت انتگرال عوض می‌شود:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{b}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

پس $\int_{a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = ۰$ ؛ یعنی انتگرال بر هر بازه‌ی به طول صفر، صفر است.

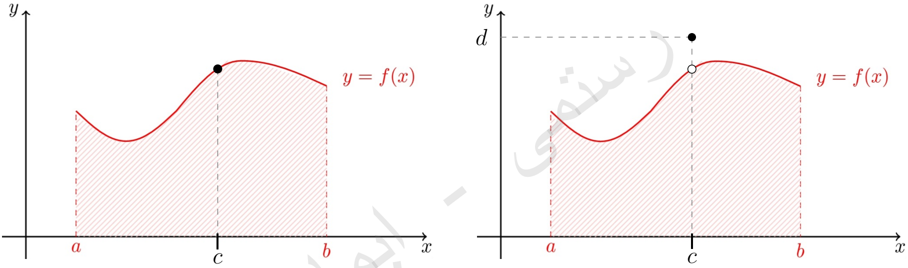
نکته

فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد. می‌دانیم f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. تابع g بر $[a,b]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in[a,b],\ x\neq c \\ d & x=c \end{cases}$$

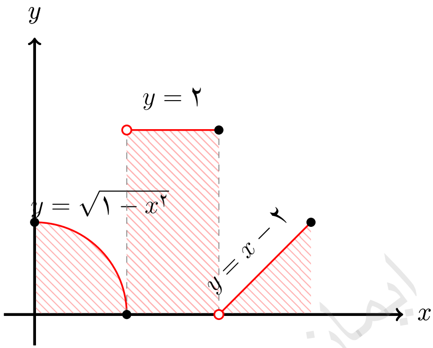
در این صورت می‌توان ثابت کرد که g نیز بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$



نکته

در حالت کلی، اگر تعداد متناهی نقطه از نمودار f حذف شود، باز هم f بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال تغییری نخواهد کرد.



مثال

مقدار $\int_۰^۳ f(x)\,\mathrm{d}x$ را که در آن

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{۱ - x^۲} & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۲ & ۱ < x \leq ۲ \\ x - ۲ & ۲ < x \leq ۳ \end{cases}$$

بیابید.

پاسخ:

$$\int_۰^۳ f(x)\,\mathrm{d}x = \int_۰^۱ \sqrt{۱ - x^۲}\,\mathrm{d}x + \int_۱^۲ ۲\,\mathrm{d}x + \int_۲^۳ (x - ۲)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{۴} + ۲ + \frac{۱}{۲} = \frac{\pi + ۱۰}{۴}.$$

تعریف (مقدار متوسط یک تابع)

فرض کنید تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد. مقدار متوسط یا مقدار میانگین تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ که با $\overline{f}$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند $c \in [a,b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).$$

بنابراین $f(c)$ مقدار متوسط تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ است.

اثبات: چون f بر $[a,b]$ پیوسته است، بنابر قضیه‌ی مقدار اکسترمم، نقاط $x_1, x_2 \in [a,b]$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $x \in [a,b]$ داریم:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

با توجه به خواص انتگرال، داریم:

$$\int_a^b f(x_1)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x_2)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow\ (b-a)f(x_1) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)f(x_2)$$

$$\Longrightarrow\ f(x_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(x_2)$$

حال، بنابر قضیه‌ی مقدار میانی، نقطه‌ی $c \in [a,b]$ وجود دارد که

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).$$

گزاره

فرض کنید f تابعی پیوسته و نامنفی بر $[a,b]$ باشد. اگر $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$، آن‌گاه به‌ازای هر $x \in [a,b]$ داریم $f(x) = 0$.

تذکر

توجه کنید که $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ بی‌معنی است و متغیر انتگرال هیچ‌گاه در کران بالا یا پایین انتگرال ظاهر نمی‌شود. اما $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ کاملاً درست است و می‌توان آن را به‌عنوان تابعی بر حسب x در نظر گرفت؛ یعنی

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

تعریف (تابع اولیه)

تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه (یا یک پادمشتق) تابع $f(x)$ بر بازه‌ی I گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x \in I$ داشته باشیم $F'(x) = f(x)$.

قضیه

اگر $F(x)$ و $G(x)$ دو تابع اولیه‌ی $f(x)$ باشند، آن‌گاه تفاضل $F(x)$ و $G(x)$ یک عدد ثابت است؛ یعنی به‌ازای هر x داریم $F(x) - G(x) = c$.

اثبات:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ G'(x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow F'(x) - G'(x) = 0 \Rightarrow (F - G)'(x) = 0$$

$$\xRightarrow{h'(x)=0 \iff h(x)=c} \exists c \in \mathbb{R}:\ (F - G)(x) = c$$

قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنید تابع f بر بازه‌ی I، که شامل نقطه‌ی a است، پیوسته باشد. اگر تابع F به‌صورت

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in I$$

تعریف شده باشد، آن‌گاه F بر I مشتق‌پذیر است و بر این بازه داریم $F'(x) = f(x)$. یعنی F یک تابع اولیه f است؛

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

اثبات:

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to ۰} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\left[hf(c_h)\right] \\
&= \lim_{h\to ۰} f(c_h) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

(طبق ق. مقدار میانگین $\exists c_h \in [x, x+h]$ که $\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = hf(c_h)$)

(چون $x \le c_h \le x+h$ و $h \to ۰$ داریم $c_h \to x$. این نتیجه به‌همراه پیوستگی f، تساوی آخر را آشکار می‌کند.)

قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنید تابع f بر بازه‌ی I، که شامل نقطه‌ی a است، پیوسته باشد. همچنین، فرض کنید G یک تابع اولیه‌ی f بر بازه‌ی I باشد؛ یعنی $G' = f$. در این صورت به‌ازای هر $b \in I$ داریم:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b G'(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a).$$

اثبات: به‌ازای هر $x \in I$ تعریف می‌کنیم $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$. طبق قضیه‌ی اساسی اول، به‌ازای هر $x \in I$ داریم $F'(x) = f(x)$، پس F نیز مانند G یک تابع اولیه برای f است. در نتیجه $F - G$ ثابت است. یعنی عددی حقیقی مانند c وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in I$ داریم:

$$F(x) - G(x) = c \Rightarrow F(x) = G(x) + c \Rightarrow \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} = G(x) + c.$$

اگر قرار دهیم $x = a$، آنگاه $G(a) + c = \int_a^a f(t)\,\mathrm{dt} = 0$. بنابراین $c = -G(a)$،

و اگر قرار دهیم $x = b$، آنگاه

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = G(b) + c = G(b) - G(a).$$

فرض کنید $F(x)$ تابع اولیه‌ی $f(x)$ باشد. اگر $f(x)$ تابع اولیه‌ی دیگری هم داشته باشد، تفاوتش با $F(x)$ در مقدار ثابتی می‌باشد. اگر $f(x)$ پیوسته باشد، یکی از این توابع اولیه، با دستور

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

داده می‌شود و تفاوت سایر اولیه‌ها مثل F با A فقط می‌تواند در مقدار ثابتی باشد. لایب‌نیتز نماد $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ را برای نمایش یک تابع اولیه‌ی کلی f به کار برد. در این نمادگذاری، معادله‌ای به‌صورت $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ صرفا طریقه‌ی دیگری است برای نوشتن $F'(x) = f(x)$. به عبارت دیگر، اگر f دارای مشتق پیوسته بر یک بازه باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\boxed{\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c}$$

به‌عنوان مثال، $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^۲}{۲} + c$ یا $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$.

نکته

- قضیه‌ی اساسی دوم می‌گوید که به‌ازای هر تابع اولیه‌ی F از f و هر ثابت c داریم:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)+c]\Big|_a^b = F(b)+c-(F(a)+c)$$
$$= F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

- اگر تابع f بر بازه‌ی I مشتق پیوسته داشته باشد، طبق قضیه‌ی اساسی دوم، به‌ازای هر دو نقطه‌ی a و b در I داریم:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b)-f(a).$$

مثال

انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$(۱)\quad \int_{۰}^{a} x^{۲}\,\mathrm{d}x$$

$$(۲)\quad \int_{۰}^{۳} \left(۳x - x^{۲}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$(۳)\quad \int_{۰}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$$

پاسخ:

(۱) با توجه به اینکه $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{۳}}{۳}\right) = x^{۲}$، داریم:

$$\int_{۰}^{a} x^{۲}\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۳}x^{۳}\Big|_{۰}^{a} = \frac{۱}{۳}a^{۳} - \frac{۱}{۳}۰^{۳} = \frac{۱}{۳}a^{۳}.$$

(۲) می‌دانیم $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{۳}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{۳}x^{۳}\right)=۳x-x^{۲}$، بنابراین:

$$\int_{۰}^{۳}(۳x-x^{۲})\,\mathrm{d}x=(\frac{۳}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{۳}x^{۳})\Big|_{۰}^{۳}=\frac{۲۷}{۲}-\frac{۲۷}{۳}-(۰-۰)=\frac{۲۷}{۶}.$$

(۳) با توجه به تساوی $(-\cos x)'=\sin x$، داریم:

$$\int_{۰}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_{۰}^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos ۰)=۱+۱=۲.$$

چند انتگرال مهم و پرکاربرد

$$(۱)\quad \int ۱ \, \mathrm{d}x = x + c$$

$$(۲)\quad \int x \, \mathrm{d}x = \frac{۱}{۲}x^{۲} + c$$

$$(۳)\quad \int \frac{۱}{x^{۲}} \, \mathrm{d}x = -\frac{۱}{x} + c$$

$$(۴)\quad \int \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + c$$

$$(۵)\quad \int \frac{۱}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = ۲\sqrt{x} + c$$

$$(۶)\quad \int x^{r} \, \mathrm{d}x = \frac{۱}{r+۱}x^{r+۱} + c \qquad (r \in \mathbb{Q},\ r \neq -۱)$$

چند انتگرال مهم و پرکاربرد

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c \qquad (۱۰)$$

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c \qquad (۱۱)$$

$$\int \sec^{2}(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x) + c \qquad (۱۲)$$

$$\int \csc^{2}(x)\,\mathrm{d}x = -\cot(x) + c \qquad (۱۳)$$

$$\int \sec(x)\tan(x)\,\mathrm{d}x = \sec(x) + c \qquad (۱۴)$$

$$\int \csc(x)\cot(x)\,\mathrm{d}x = -\csc(x) + c \qquad (۱۵)$$

مثال

فرض کنید تابع f بر بازه‌ی I پیوسته و توابع g و h بر این بازه مشتق‌پذیر باشند. نشان دهید:

$$(۱)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$(۲)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f\big(g(x)\big)g'(x) - f\big(h(x)\big)h'(x)$$

پاسخ:

(۱) فرض کنیم $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. در این صورت داریم $F'(x) = f(x)$. اگر تابع مرکب $F\big(g(x)\big) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[F\big(g(x)\big)\Big] = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x).$$

$$\Longrightarrow \left(\int_{\circ}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f\big(g(x)\big)g'(x).$$

(۲) برای قسمت دوم می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{h(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{a}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{a}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' &= \left(\int_{a}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' - \left(\int_{a}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)'\\ &= f\big(g(x)\big)g'(x) - f\big(h(x)\big)h'(x).\end{aligned}$$

مثال

حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}$$

پاسخ: فرض کنیم $f(x) = \int_0^{x} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$. چون $\sin\sqrt{t}$ بر $[0, +\infty)$ پیوسته است، بنابر قضیه‌ی اساسی، $f(x)$ در این بازه مشتق‌پذیر و در نتیجه تابع $f(x^2)$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. همچنین تابع x^3 نیز همه جا مشتق‌پذیر است. چون $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$، بنابراین شرایط قاعده‌ی اول هوپیتال برقرار است. داریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\int_{۰}^{x^{۲}} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^{۳}} = \lim_{x\to ۰} \frac{\left(\int_{۰}^{x^{۲}} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\right)'}{(x^{۳})'}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۲x\sin\sqrt{x^{۲}}}{۳x^{۲}} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin|x|}{۳x}$$

توجه می‌کنیم که:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin|x|}{۳x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{۲\sin x}{۳x} = \lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{۲\cos x}{۳} = \dfrac{۲}{۳} \\ \lim\limits_{x\to ۰^{-}} \dfrac{-۲\sin x}{۳x} = \lim\limits_{x\to ۰^{-}} \dfrac{-۲\cos x}{۳} = -\dfrac{۲}{۳} \end{cases}$$

بنابراین حد وجود ندارد.

مثال‌های تکمیلی

مثال

اگر $a<b$ و f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه t را چنان بیابید که

$$g(t)=\int_a^b \big(f(x)-t\big)^{۲}\,\mathrm{d}x$$

مینیمم شود.

پاسخ:

$$g(t)=\int_a^b \big(f(x)\big)^{۲}\,\mathrm{d}x-۲t\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+t^{۲}(b-a)$$

$$\xRightarrow{g'=۰} g'(t)=-۲\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+۲t(b-a)=۰$$

$$\Longrightarrow\ t=\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

چون $\lim\limits_{t\to\pm\infty} g(t)=+\infty$، پس g مینیمم مطلق دارد. (یا اینکه $g''>۰$، پس g مینیمم مطلق دارد.) در نتیجه $t_{\min}$ برابر $(*)$ است.

مثال

فرض کنید $f:[۰,۱]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به‌طوری که $\int_۰^۱ f(x)\,\mathrm{d}x=۱$. نشان دهید حداقل یک c در $[۰,۱]$ وجود دارد که $f(c)=۳c^۲$.

پاسخ: تابع پیوسته $h:[۰,۱]\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $h(x)=\int_۰^x f(t)\,\mathrm{d}t-x^۳$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$h(۰)=\int_۰^۰ f(t)\,\mathrm{d}t-۰=۰.\qquad h(۱)=\int_۰^۱ f(t)\,\mathrm{d}t-۱=۰,$$

چون تابع h در بازه‌ی $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر است و $h(۰)=h(۱)$، لذا بنابر قضیه‌ی رل، $c\in(۰,۱)$ وجود دارد که

$$h'(c)=۰\Rightarrow h'(c)=f(c)-۳c^۲=۰\Rightarrow f(c)=۳c^۲.$$

مثال

فرض کنید تابع $f\colon [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $\int_۰^۱ f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۲}$. نشان دهید $c \in [۰, ۱]$ وجود دارد که $f(c) = c$.

پاسخ: تابع $h(x) = f(x) - x$ بر $[۰, ۱]$ پیوسته و در نتیجه انتگرال‌پذیر است. داریم:

$$\int_۰^۱ h(x)\,\mathrm{d}x = \int_۰^۱ f(x)\,\mathrm{d}x - \int_۰^۱ x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{x^۲}{۲}\right)\Big|_۰^۱ = ۰.$$

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال، $c \in [۰, ۱]$ وجود دارد که

$$f(c) - c = h(c) = \frac{۱}{۱ - ۰}\int_۰^۱ h(x)\,\mathrm{d}x = ۰.$$

مثال

فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد. نشان دهید $c\in[a,b]$ وجود دارد که

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

پاسخ: به‌ازای هر $x\in[a,b]$ تعریف می‌کنیم $g(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
بنابر قضیه‌ی اساسی اول، g بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر و در نتیجه پیوسته است. داریم:

$$g(a)=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad g(b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow\ g(a)g(b)\leq 0\ \xRightarrow{\text{قضیه مقدار میانی}}\ \exists\, c\in[a,b]:\ g(c)=0.$$

مثال

فرض کنید $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x\in[0,+\infty)$ داشته باشیم:

$$(f(x))^2 = 1 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

ضابطه‌ی تابع f را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم f مشتق‌پذیر است. توابع $g(x)=(f(x))^2$ و $h(x)=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. چون $g(x)=1+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ و f تابعی پیوسته است، پس g مشتق‌پذیر است. در نتیجه $h\circ g(x)=\sqrt{(f(x))^2}=|f(x)|=f(x)$ مشتق‌پذیر است. با مشتق‌گیری از طرفین تساوی داده شده در صورت مسئله، داریم:

$$2f(x)f'(x)=0+2f(x) \implies f(x)f'(x)=f(x).$$

نشان می‌دهیم به‌ازای هر $x \in [0, +\infty)$ داریم $f(x) > 0$. چون به‌ازای هر x در این بازه $f(x) \geq 0$، پس $\int_0^x 0 \,\mathrm{d}t = 0 \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. بنابراین $2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ و درنتیجه $(f(x))^2 = 1 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq 1$. یعنی همواره $f(x) > 0$.

$$f(x)f'(x) = f(x) \xrightarrow{f>0} f'(x) = 1 \implies f(x) = x + c.$$

از طرفی

$$(f(0))^2 = 1 + 2\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \implies f(0) = 1 \implies c = 1$$

مثال

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته باشد و $\int_{۱}^{۳} f(x)\,\mathrm{d}x = ۸$. نشان دهید مقدار تابع $f(x)$ حداقل یک بار روی بازه‌ی $[۱,۳]$ برابر ۴ خواهد بود.

پاسخ: تابع $g(x) = f(x) - ۴$ بر بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته است. از قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\exists\, c \in [۱,۳]:\quad g(c)(۳-۱) &= \int_{۱}^{۳} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{۱}^{۳} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{۱}^{۳} ۴\,\mathrm{d}x \\ &= ۸ - ۸ = ۰\end{aligned}$$

بنابراین $g(c) = ۰$ و در نتیجه $f(c) = ۴$.

مثال

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته بر $[۰,۱]$ باشد. در این صورت نشان دهید $۰ < c < ۱$ وجود دارد به‌طوری که

$$۲c \int_۰^c f(t)\,\mathrm{d}t + (c^۲ - ۱) f(c) = ۰.$$

پاسخ: کافی است تابع کمکی زیر را در نظر بگیریم:

$$g(x) = (x^۲ - ۱) \int_۰^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

چون $f(x)$ تابعی پیوسته بر $[۰,۱]$ است، لذا $g(x)$ نیز بر $[۰,۱]$ پیوسته است. بنابر قضیه‌ی اساسی حساب، $g(x)$ بر $[۰,۱]$ مشتق‌پذیر است. از آنجا که $g(۱) = ۰ = g(۰)$، پس بنابر قضیه‌ی رل داریم:

$$\exists\, c \in (۰,۱) : g'(c) = ۰ \implies ۲c \int_۰^c f(t)\,\mathrm{d}t + \left(c^۲ - ۱\right) f(c) = ۰.$$

تمرین

حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$(۱)\quad \lim_{x\to ۱} \frac{x}{x-۱}\int_{۱}^{x} \frac{\tan t}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$(۲)\quad \lim_{x\to ۰^{+}} \frac{\displaystyle\int_{\cos\sqrt{x}}^{۱} \frac{\cos t}{۱-t}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x}}$$

تمرین

فرض کنید f و g توابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشند. نشان دهید حداقل یک $c\in[a,b]$ وجود دارد که

$$f(c)\int_{a}^{c} g(x)\,\mathrm{d}x = g(c)\int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

تمرین

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{\sqrt{t}\sin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ در نظر بگیرید.
نشان دهید رابطه‌ی زیر برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ برقرار است:

$$|f(b)-f(a)|\leq|b-a|.$$

تمرین

فرض کنید $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=1$. نشان دهید $c\in[0,\frac{\pi}{2}]$ وجود دارد که $f(c)=\sin(c)$.

تمرین

فرض کنید $f:[-۱,۱]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، $\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} f(t)\,\mathrm{d}t=\pi$ و $f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$.
با استفاده از فرمول تقریب خطی یک مقدار تقریبی برای

$$\int_{۰}^{\cos\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۰}\right)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

به‌دست آورید.

تمرین

فرض کنید $f:[۰,۱۴۰۲]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید $c\in(۰,۱۴۰۲)$ وجود دارد که

$$f(c)=\frac{\int_{۰}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t}{۱۴۰۲-c}.$$