مشتق

تعریف و نمادها (Definition and Notation)

اگر $y = f(x)$ تابعی مفروض باشد، مشتق تابع f برابر با حد $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ است.	اگر $y = f(x)$ باشد، تمامی عبارات زیر، مشتق تابع f در نقطه $x = a$ را نشان می‌دهند. $f'(a) = y'\|_{x=a} = \frac{df}{dx}\|_{x=a} = \frac{dy}{dx}\|_{x=a} = Df(a)$

اگر $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه تمامی عبارات زیر معادل یکدیگر هستند:

$$f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d\big(f(x)\big)}{dx} = Df(x)$$

بیان مشتق (Interpretation of the Derivative)

$f'(a)$ تغییرات لحظه‌ای تابع f در نقطه $x = a$ را نشان می‌دهد.	$m = f'(a)$ اندازه شیب خط مماس بر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ را نشان می‌دهد. همچنین معادله این خط مماس برابر با $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ است.

اگر $y = f(x)$ موقعیت ذره‌ای را در زمان x نشان دهد، $f'(a)$ نشان دهنده سرعت ذره در زمان $x = a$ است.

ویژگی‌ها و فرمول‌های مشتق (Properties and Formulas)

$(cf)' = cf'(x)$	قانون تقسیم $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$	$\frac{d}{dx}(c) = 0$
قانون ضرب $(fg)' = f'g + g'(x)f$	قانون توان $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

مشتق زنجیره‌ای $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

مشتق توابع معروف (Known functions Derivative)

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\ \tan x$	$\frac{d}{dx}(x) = 1$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\ \cot x$	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a)$	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
اگر $x > 0$ آن‌گاه $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$	اگر $x > 0$ آن‌گاه $\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x\ln(a)}$

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

مشتق‌گیری زنجیره‌ای (Chain Rule)

$\frac{d}{dx}([f(x)^n]) = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$	$\frac{d}{dx}(\cos[f(x)]) = -f'(x)\sin[f(x)]$
$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = f'(x)e^{f(x)}$	$\frac{d}{dx}(\sin[f(x)]) = f'(x)cos\,[f(x)]$
$\frac{d}{dx}(\ln[f(x)]) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{d}{dx}(\cos[f(x)]) = -f'(x)sin\,[f(x)]$
$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\mathrm{f(x)}}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{\mathrm{f(x)}}}$	$\frac{d}{dx}(\tan[f(x)]) = f'(x)\sec^2[f(x)]$
$\frac{d}{dx}(\sec[f(x)]) = f'(x)\sec\,[f(x)]tan[f(x)]$	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}[f(x)]) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

مشتق مراتب بالاتر (Higher Order Derivatives)

مشتق مرتبه nام تابع f به صورت زیر بیان می‌شود.

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{d\,x^n}$$

عبارت فوق برابر با تابع زیر است.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

توجه: تابع $f^{(n-1)}(x)$، مشتق $n-1$ام تابع f است.

مشتق دوم تابع f(x) به صورت

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{d\,x^2}$$

بیان شده و برابر با عبارت زیر است.

$$f''(x) = (f'(x))'$$

مشتق‌گیری ضمنی (Implicit Differentiation)

به منظور مشتق‌گیری ضمنی، از هرکدام از اجزای عبارت، مشتق‌گیری می‌شود. فرض کنید هدف یافتن y' در عبارت $e^{2x-9y} + x^3y^2 = sin\,(y) + 11x$ است. به منظور انجام این کار از طرفین عبارت مذکور مشتق‌گیری شده و به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$e^{2x-9y}(2-9y') + 3x^2y^2 + 2x^3yy' = \cos y\, y' + 11$$

$$e^{2x-9y} - 9y'e^{2x-9y} + 3x^2y^2 + 2x^3yy' = \cos y\, y' + 11$$

$$(2x^3y - 9e^{2x-9y} - \cos y)y' = 11 - 2e^{2x-9y} - 3x^2y^2 \Rightarrow \left[\!\left[y' = \frac{11 - 2e^{2x-9y} - 3x^2y^2}{2x^3y - 9e^{2x-9y} - \cos y} \right]\!\right]$$

بنابراین در مشتق‌گیری ضمنی، مشتق تابع بر حسب خود و متغیرش بیان می‌شود.

صعودی، نزولی – تقعر (Increasing/Decreasing – Concave Up & Down)

نقطه بحرانی

$x = c$، نقطه بحرانی تابع f(x) نامیده می‌شود، در صورتی که یکی از دو شرط زیر را برآورده کند.

- $f'(c)$ برابر با صفر باشد ($f'(c) = 0$).
- $f'(c)$موجود نباشد.

تابعِ نزولی و صعودی

- اگر در بازه I، $f'(x) > 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور صعودی است.
- اگر در بازه I، $f'(x) < 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور نزولی است.
- اگر در بازه I، $f'(x) = 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور ثابت است.

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

تقعر • اگر در بازه I، $f"(x) > 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور مقعر است. • اگر در بازه I، $f"(x) < 0$ باشد، آن‌گاه تابع f در بازه مذکور محدب است.	نقطه عطف x = c نقطه عطف تابع f نامیده می‌شود در صورتی که جهت تقعر در آن تغییر کند. بنابراین در این نقطه، مشتق دوم برابر با صفر است ($f"(x) = 0$).

اکسترمم، ماکزیمم و مینیمم (Extremum, Maximum and Minimum)

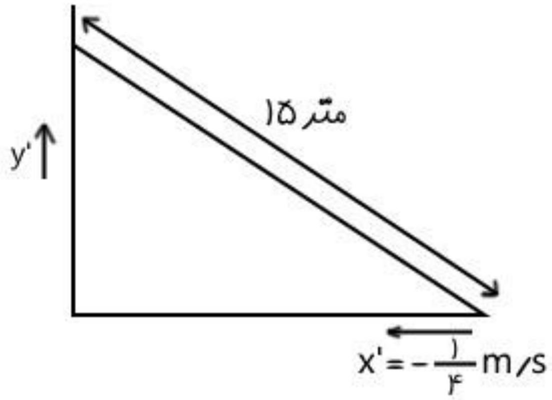
اکسترمم نسبی • $x = c$، ماکزیمم نسبی تابع f است، در صورتی که به ازای تمامی مقادیر نزدیک به x = c، رابطه $f(c) \geq f(x)$ برقرار باشد. • $x = c$، مینیمم نسبی تابع f است، در صورتی که به ازای تمامی مقادیر نزدیک به x = c، رابطه $f(c) \leq f(x)$ برقرار باشد.	اکسترمم مطلق • $x = c$، ماکزیمم مطلق تابع f است، در صورتی که به ازای تمامی مقادیر x، رابطه $f(c) > f(x)$ برقرار باشد. • $x = c$، مینیمم مطلق تابع f است، در صورتی که به ازای تمامی مقادیر x در دامنه، رابطه $f(c) < f(x)$ برقرار باشد.
آزمون اول مشتق اگر x = c نقطه بحرانی تابع f باشد: • x = c ماکزیمم نسبی است اگر در سمت چپ نقطه، $f'(x) > 0$ و در سمت راست آن، $f'(x) < 0$ باشد. • x = c مینیمم نسبی است اگر در سمت چپ نقطه، $f'(x) < 0$ و در سمت راست آن، $f'(x) > 0$ باشد. • x = c نه مینیمم و نه ماکزیمم است اگر علامت مشتق اول در سمت راست و چپِ x با یکدیگر مشابه باشد.	قضیه مقدار اکسترمم اگر f(x) در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، مقادیر c و d وجود دارند به نحوی که نامساوی $a \leq c, d \leq b$ برقرار بوده و مقادیر f(c) و f(d) به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق هستند.
آزمون دوم مشتق اگر x = c نقطه‌ای بحرانی برای تابع f باشد، در این صورت $f'(c) = 0$ بوده و عبارت‌های زیر صادق هستند. • x = c ماکزیمم نسبی تابع f است در صورتی که $f"(c) < 0$ باشد. • x = c مینیمم نسبی تابع f است در صورتی که $f"(c) > 0$ باشد.	یافتن اکسترمم مطلق مراحل زیر برای یافتن مقدار مطلق تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$، انجام می‌شود. • تمامی نقاط بحرانی در بازه مذکور یافته می‌شوند. • مقادیر f(x) در تمامی نقاط بحرانی یافته شده، محاسبه می‌شوند. • مقادیر f(a) و f(b) محاسبه می‌شوند. • بیشترین و کم‌ترین مقدار در مراحل ۲ و ۳ به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f(x) هستند.

قضیه مقدار میانگین

اگر تابع $f(a,b)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته بوده و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه عددِ c در بازه $a<c<b$ وجود دارد به نحوی که در رابطه $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ صدق کند.

مثال

مطابق با شکل زیر پله‌ای به طول ۱۵ متر به دیواری تکیه داده شده است. با فرض اینکه قاعده اولیه مثلث برابر با ۱۰ متر باشد، اگر انتهای پله که روی سطح قرار داده شده با سرعت $\frac{1}{4}$ متر بر ثانیه به سمت راست کشیده شود، پس از گذشت ۱۲ ثانیه سرعت – عمودی - نوک پله چقدر است؟



با توجه به ثابت بودن طول پله، می‌توان رابطه زیر را بین y و x نوشت و از آن مشتق گرفت.

$$x^2+y^2=15^2 \quad \Rightarrow \quad 2xx'+2yy'=0$$

با توجه به رابطه سرعت-جابه‌جایی، پس از 12 ثانیه، طول قاعده مثلث برابر با $x=10-12\left(\frac{1}{4}\right)=7$ بوده، در نتیجه اندازه ارتفاع مثلث برابر است با:

$$y=\sqrt{15^2-7^2}=\sqrt{176}$$

با جای‌گذاری x و y در رابطه فوق، سرعت y، ۱۲ ثانیه پس از حرکت (y')، برابر است با:

$$7\left(-\frac{1}{4}\right)+\sqrt{176}y'=0 \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{7}{4\sqrt{176}}$$

مجموعه آموزش‌های جامع ریاضیات فرادرس (+کلیک کنید)

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

جهت آگاهی از آخرین تقلب‌نامه‌های منتشر شده، در کانال تلگرام مجله فرادرس عضو شوید.

تهیه و تنظیم: مجله فرادرس

منبع