معادله‌ی دیفرانسیل: معادله‌ی $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ متشکل از متغیر مستقل x، متغیر وابسته‌ی y و مشتقات y را معادله‌ی دیفرانسیل می‌نامیم که
(*)
هدف از حل آن، یافتن $y(x)$ است.

اگر بیش از یک متغیر مستقل داشته باشیم $(x_1,x_2,\dots,x_m)$ و معادله شامل مشتقات جزئی y نسبت به این متغیرها باشد $(\frac{\partial y}{\partial x_1},\frac{\partial y}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2},\dots)$، به آن معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌گوییم که البته ما با آن سروکار نداریم!

مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل: بالاترین مرتبه‌ی مشتق در معادله‌ی (*)، مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل نامیده می‌شود.

درجه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل: اگر بتوان معادله‌ی دیفرانسیل (*) را به صورت یک چند جمله‌ای نسبت به متغیر وابسته‌ی y و مشتقات آن نوشت، در این صورت بالاترین درجه‌ی بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله را درجه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل می‌نامیم.

مثال:

$y''+y'\sin x+y^2=0 \longrightarrow$ مرتبه 2، درجه 1

$tg(y'')+y'=\sin x \longrightarrow$ مرتبه 2 ولی درجه ندارد زیرا نمی‌توان به صورت چند جمله‌ای برحسب y و مشتقاتش نوشت.

معادله‌ی دیفرانسیل خطی: اگر معادله‌ی دیفرانسیل (*) به صورت $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$ باشد، در واقع ضرایب معادله توابعی از x باشند، معادله‌ی (**)، معادله‌ی دیفرانسیل خطی نامیده می‌شود. اگر به ازای هر x، داشته باشیم $a_n(x)\neq 0$، در این صورت با تقسیم طرفین معادله به $a_n(x)$، معادله‌ی دیفرانسیل در فرم کانونی خواهیم داشت.
(**)

اگر معادله‌ی دیفرانسیل (*) فرمی غیر از (**) داشته باشد، به آن معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی می‌گوییم.

مثال: معادله‌ی $y'''tgx+y''\sqrt{x^2+1}+xy=\cos x$ یک معادله‌ی خطی است.

معادله‌ی دیفرانسیل همگن: در معادله‌ی دیفرانسیل (**) اگر $f(x)=0$ باشد، معادله‌ی دیفرانسیل همگن و در غیر این صورت ناهمگن نامیده می‌شود.

جواب معادله‌ی دیفرانسیل: تابع $y=f(x)$ را جواب معادله‌ی دیفرانسیل (*) می‌نامیم هرگاه y در معادله‌ی مذکور صدق کند.

مثال: تابع $y=\sin 2x$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y''+4y=0$ است.

توجه: تابع $y=\cos 2x$ نیز جواب معادله‌ی دیفرانسیل مذکور می‌باشد! در نتیجه هر معادله‌ی دیفرانسیل از مرتبه‌ی n، می‌تواند n دسته جواب داشته باشد.

توجه: اگر y_1، y_2، ... و y_n، جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه n اُم باشند، به شرط خطی و همگن بودن معادله، هر ترکیب خطی از آنها به صورت $c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n$ نیز جواب معادله‌ی دیفرانسیل است. $(c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R})$

نکته: در حالت کلی، جواب معادله‌ی دیفرانسیل، به سه دسته‌ی جواب عمومی، جواب خصوصی و جواب غیرعادی (منفرد) تقسیم می‌شود.

مثال: برای معادله‌ی دیفرانسیل $y''+4y=0$، جواب خصوصی را تحت شرایط $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ را به دست آورید.

جواب عمومی معادله: $y_g=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$

$$y(0)=c_2 \longrightarrow c_2=1 \longrightarrow y=c_1\sin 2x+\cos 2x$$

$$y'(0)=2c_1 \longrightarrow c_1=\frac{1}{2} \longrightarrow y_p=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x$$

جواب منفرد (غیرعادی): جوابی است که تحت هیچ شرط اولیه‌ای از جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل به دست نمی‌آید؛ علاوه بر این، منحنی آن بر تمام منحنی‌های جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل، مماس است.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y^2(1+y'^2)=9$ را در نظر بگیرید. جواب عمومی این معادله به صورت $(x-c)^2+y^2=9$ می‌باشد. از طرفی $y=\pm3$ نیز جواب معادله‌ی فوق است که تحت هیچ شرط اولیه‌ای از جواب عمومی به دست نمی‌آید و منحنی آن بر تمام منحنی‌های جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل، مماس است؛ پس $y=\pm3$ جواب‌های منفرد این معادله‌ی دیفرانسیل هستند.

تذکر: ممکن است یک معادله‌ی دیفرانسیل جواب عمومی نداشته باشد.

مثال: معادله‌ی $y'^2+y^2=0$، تنها جواب بدیهی $y=0$ را دارد.

تذکر: در حالت کلی، یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه n، دارای جواب عمومی با n پارامتر ثابت است. این مطلب برای معادلات غیرخطی، لزوماً برقرار نیست.

مثال: معادله‌ی $y'^2-4x^2=0$ را در نظر بگیرید.

$$(y'-2x)(y'+2x)=0 \longrightarrow \begin{cases} y'=2x \longrightarrow y_1=x^2+c_1 \\ y'=-2x \longrightarrow y_2=-x^2+c_2 \end{cases}$$

دو دسته جواب با دو پارامتر ثابت دلخواه

تشکیل معادله‌ی دیفرانسیل از روی جواب عمومی: فرض کنیم $y=F(x,c)$ یک خانواده از منحنی‌ها باشد؛ برای یافتن معادله‌ی دیفرانسیل نظیر این دسته منحنی، کافی است با مشتق‌گیری نسبت به x، از روابط $y=F(x,c)$, $y'=\frac{\partial F(x,c)}{\partial x}$، ثابت c را حذف نماییم.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل نظیر منحنی‌های $y=x^2+c$ ، $y=cx^2+2$ را به دست آورید.

$$y=x^2+c:\quad \boxed{y'=2x}$$

$$y=cx^2+2:\ y'=2cx \Rightarrow c=\frac{y'}{2x} \Rightarrow y=\frac{y'}{2x}\cdot x^2+2=\frac{xy'}{2}+2 \Rightarrow 2y=xy'+4 \Rightarrow \boxed{2y-xy'-4=0}$$

فرض کنیم $y=F(x,c_1,\dots,c_n)$ خانواده‌ای از منحنی‌ها باشد؛ برای یافتن معادله‌ی دیفرانسیل نظیر این دسته منحنی، به تعداد ثابت‌های موجود از دسته منحنی، مشتق می‌گیریم تا با حل n معادله و n مجهول حاصل، ثابت‌های موجود در دسته منحنی حذف شده و معادله‌ی دیفرانسیل نظیر آن به دست آید.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل نظیر دسته منحنی‌های زیر را به دست آورید.

$$1)\ y=2x^2+c_1x+c_2 \Rightarrow y'=4x+c_1 \Rightarrow \boxed{y''=4}$$

$$2)\ y=(c_1+c_2x)e^x \Rightarrow y'=c_2e^x+(c_1+c_2x)e^x=c_2e^x+y \Rightarrow c_2e^x=y'-y \quad (1)$$

$$\rightarrow y''=c_2e^x+y' \xrightarrow{(1)} y''=2y'-y \Rightarrow \boxed{y''-2y'+y=0}$$

مسیرهای قائم (متعامد): دو دسته منحنی زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2+y^2=c \ ,\ y=mx$$

که در آن‌ها c ، m، دو ثابت دلخواهند.

واضح است که هر منحنی از یک دسته (یک خانواده)، بر تمام منحنی‌های خانواده‌ی دیگر عمود است.

هرگاه چنین ارتباطی بین دو دسته از منحنی‌ها وجود داشته باشد، یک دسته را مسیرهای متعامد دسته‌ی دیگر می‌گویند.

برای یافتن مسیرهای قائم یک دسته از منحنی‌ها، کافی است با مشتق‌گیری و حذف ثابت موجود، معادله‌ی دیفرانسیل نظیر دسته منحنی داده شده را به دست آوریم؛ سپس در آن، y' را با $\frac{-1}{y'}$ جایگزین نماییم. جواب معادله‌ی دیفرانسیل جدید، مسیرهای قائم دسته منحنی اولیه است.

مثال: مسیرهای قائم دسته منحنی $x^2+y^2=c$ را به دست آورید.

$$x^2+y^2=c \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow 2x-\frac{2y}{y'}=0 \Rightarrow x=\frac{y}{y'}$$

$$\rightarrow y'=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0$$

$$\xrightarrow{\int} \ln|y|-\ln|x|=\ln c_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right|=\ln c_1 \Rightarrow \frac{y}{x}=c_1 \Rightarrow \boxed{y=c_1x}$$

یافتن مسیرهای قائم بر دسته منحنی، در مختصات قطبی B $r=f(\theta,c)$ را می دهند ← نسبت به θ مشتق گرفته و c را حذف می کنیم ← معادله ی دیفرانسیل نظیر دسته منحنی داده شده برحسب r, r', θ به دست می آید ← به جای $\frac{r}{r'}$ ، $-\frac{r'}{r}$ را قرار می دهیم ← معادله ی دیفرانسیل به دست آمده را حل می کنیم ← جواب معادله، مسیرهای قائم بر دسته منحنی اولیه است.

مثال 3 مسیرهای قائم بر دسته منحنی زیر را به دست آورید.

$$r^{-1}=\sin^2\theta+c \rightsquigarrow -r^{-2}r'=\sin2\theta \rightsquigarrow -\frac{1}{r}\cdot\frac{r'}{r}=\sin2\theta \rightsquigarrow -\frac{1}{r}\cdot\frac{-r}{r'}=\sin2\theta \rightsquigarrow r'\sin2\theta=1$$

$$\rightsquigarrow dr=\frac{d\theta}{\sin2\theta} \xrightarrow{\int} r=\int\frac{d\theta}{\sin2\theta} \quad (A)$$

$$u:=tg\theta \longrightarrow du=(1+tg^2\theta)d\theta=(1+u^2)d\theta \rightsquigarrow d\theta=\frac{du}{1+u^2} \quad (B)$$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2tg\theta\cos^2\theta=2u\frac{1}{1+u^2} \rightsquigarrow \frac{1}{\sin2\theta}=\frac{u^2+1}{2u} \quad (C)$$

$$\xrightarrow{(A),(B),(C)} r=\int\frac{du}{2u}=\frac{1}{2}Ln2u+c \rightsquigarrow \boxed{r=\frac{1}{2}Ln(2tg\theta)+c}$$

دسته بندی معادلات مرتبه ی اول B

1. معادلات جداپذیر (تفکیک پذیر) [یا معادلات قابل تبدیل به جداپذیر]
2. معادلات همگن [یا معادلات قابل تبدیل به همگن]
3. معادلات کامل [یا معادلات قابل تبدیل به کامل (با استفاده از عامل انتگرال ساز)]
4. معادلات خطی مرتبه اول
5. معادلات معروف و خاص (استفاده از تغییر متغیرها)
6. تعویض نقش x و y در معادله

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول: فرم کلی این معادلات به صورت $F(x,y,y')=0$ می باشد.

برای جلوگیری از ابهام، فرض می کنیم معادله به فرم استاندارد $y'=f(x,y)$ باشد.
(*)

به طور معادل، معادلات مرتبه اول را می توان به صورت $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ نیز در نظر گرفت.
(**)

معادلات تفکیک پذیر: اگر در معادلاتی به فرم (*)، بتوان تابع $f(x,y)$ را به صورت حاصلضرب مجزایی از دو تابع برحسب x و y نوشت، معادله را تفکیک پذیر می نامیم؛
همچنین در فرم (**) اگر توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ را بتوان به صورت حاصلضرب مجزایی از x و y نوشت، معادله تفکیک پذیر است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $y'=\frac{x(y+1)}{y(x+2)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x(y+1)}{y(x+2)} \Rightarrow \frac{y}{y+1}dy=\frac{x}{x+2}dx \Rightarrow (1-\frac{1}{y+1})dy=(1-\frac{2}{x+2})dx$

$$\xrightarrow{\int} y-Ln(y+1)=x-2Ln(x+2)+C \Rightarrow x-y+C=Ln\frac{(x+2)^2}{y+1} \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{y+1}=C_1e^{x-y}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2e^y=C_1(y+1)e^x \Rightarrow \boxed{C_1(y+1)e^x-(x+2)^2e^y=0}$$

۲) $y'=\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)} \Rightarrow \frac{ydy}{1+y^2}=\frac{dx}{x(1+x^2)} \Rightarrow \frac{ydy}{1+y^2}=(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})dx$

$$\xrightarrow{\int} \frac{1}{2}Ln(1+y^2)=Ln(x)-\frac{1}{2}Ln(x^2+1)+Ln(C_1) \Rightarrow Ln(1+y^2)=2Ln(x)-Ln(1+x^2)+2Ln(C_1)$$

$$\Rightarrow y^2+1=\frac{C_2x^2}{x^2+1} \Rightarrow \boxed{(y^2+1)(x^2+1)=C_2x^2}$$

تذکر: معادلاتی به فرم $y'=f(px+qy+r)$ Ⓐ که در آن p، q و r سه ثابت دلخواه هستند را می توان به معادلات تفکیک پذیر تبدیل نمود:

$u:=px+qy+r$ Ⓑ $\Rightarrow u'=p+qy' \Rightarrow y'=\frac{1}{q}(u'-p)$ Ⓒ $(q\neq 0)$

$$Ⓐ,Ⓑ,Ⓒ \longrightarrow f(u)=\frac{1}{q}(u'-p) \Rightarrow qf(u)=u'-p \Rightarrow u'=qf(u)+p \Rightarrow dx=\frac{du}{qf(u)+p}$$

مثال: معادله ی دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$y'=tg(x+y)-1$

$$u:=x+y \Rightarrow u'=1+y' \Rightarrow y'=u'-1 \xrightarrow{y'=tg(u)-1} u'-1=tg(u)-1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=tg(u) \Rightarrow \frac{du}{tg(u)}=dx$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} Ln(Sin u)=x+C_1 \Rightarrow Sin u=C_2e^x \Rightarrow u=Sin^{-1}(C_2e^x) \Rightarrow \boxed{y_g=Sin^{-1}(C_2e^x)-x}$$

تابع همگن: تابع $f_{(x,y)}$ را همگن از درجه‌ی n گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$f_{(\lambda x,\lambda y)}=\lambda^n f_{(x,y)}$$
$$(n\in\mathbb{Z})$$

مثال: $x^2+xy+y^2 \longrightarrow$ همگن $(n=2)$

$x^2+y^2+1 \longrightarrow$ ناهمگن (علت: وجود عدد ثابت)

$x\sin(\frac{y}{x}) \longrightarrow$ همگن $(n=1)$

$\frac{1}{xy} \longrightarrow$ همگن $(n=-2)$

$x^2+\cos(y^2) \longrightarrow$ ناهمگن (علت: در آرگومان تابع مثلثاتی، λ^n حذف نمی‌شود.)

معادله‌ی دیفرانسیل همگن: معادله‌ی دیفرانسیل $M_{(x,y)}dx+N_{(x,y)}dy=0$ را همگن گوییم هرگاه توابع $M_{(x,y)}$ و $N_{(x,y)}$، از یک درجه همگن باشند؛

همچنین درحالتی که معادله به فرم $y'=f_{(x,y)}$ باشد، زمانی همگن است که $f_{(x,y)}$ همگن از درجه‌ی صفر باشد.

روش حل: معادلات همگن را می‌توان با تغییر متغیر $y=x\,r_{(x)}$، به معادلات جداپذیر تبدیل کرد.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

1) $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ معادله همگن است.

$y=x.r_{(x)} \Rightarrow dy=xdr+rdx$

$\longrightarrow (x^2-r^2x^2)dx+2x^2r(xdr+rdx)=0$

$\xrightarrow{\div x^2} (1-r^2)dx+2r^2dx+2xrdr=0 \Rightarrow (r^2+1)dx+2xrdr=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{2rdr}{r^2+1}=0$

$\xrightarrow{\int} \ln(x)+\ln(C_1)+\ln(r^2+1)=0 \Rightarrow C_1x(r^2+1)=1 \Rightarrow r^2=\frac{C_2}{x}-1 \Rightarrow \boxed{y^2=C_2x-x^2}$

2) $\frac{y}{x}\cos(\frac{y}{x})dx-(\frac{x}{y}\sin(\frac{y}{x})+\cos(\frac{y}{x}))dy=0$ معادله همگن است.

$y=x.r_{(x)} \Rightarrow dy=xdr+rdx \longrightarrow r\cos(r)dx-(\frac{1}{r}\sin(r)+\cos(r))(xdr+rdx)=0$

$\Rightarrow \cancel{r\cos r dx}-(\frac{x}{r}\sin r dr+x\cos r dr+\sin r dx+\cancel{r\cos r dx})=0$

$\Rightarrow (\frac{x}{r}\sin r+x\cos r)dr+\sin r dx=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+(\frac{1}{r}+\cot g r)dr=0$

$\xrightarrow{\int} \ln(x)+\ln(C_1)+\ln(r)+\ln(\sin r)=0 \Rightarrow \ln(xr\sin r)=-\ln(C_1)=\ln(C_2)$

$\Rightarrow x.\frac{y}{x}\sin(\frac{y}{x})=C_2 \Rightarrow \boxed{y\sin(\frac{y}{x})=C_2}$

معادلات قابل تبدیل به همگن : معادلاتی به فرم $y'=f\left(\frac{ax+by+d}{\alpha x+\beta y+h}\right)$ را می‌توان با تغییر متغیر مناسب به فرم معادلات همگن تبدیل کرد:

1) فرض کنیم دو خط زیر در نقطه‌ی (x_0,y_0) متقاطع باشند:

$$\begin{cases} ax+by+d=0 \\ \alpha x+\beta y+h=0 \end{cases} \qquad \left(\frac{a}{b}\neq\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

در نظر می‌گیریم که $r=x-x_0$ ، $s=y-y_0$ ؛ در نتیجه $x=r+x_0$ ، $y=s+y_0$. با جایگذاری در معادله‌ی اولیه داریم:

$$\frac{ds}{dr}=f\left(\frac{ar+bs+\overbrace{ax_0+by_0+d}^{0}}{\alpha r+\beta s+\underbrace{\alpha x_0+\beta y_0+h}_{0}}\right) \Rightarrow \frac{ds}{dr}=f\left(\frac{ar+bs}{\alpha r+\beta s}\right)$$

همگن شد!

2) فرض کنیم دو خط زیر موازی باشند:

$$\begin{cases} ax+by+d=0 \\ \alpha x+\beta y+h=0 \end{cases} \qquad \left(\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

فرض کنیم $u=ax+by$ ؛ در نتیجه $y'=\frac{1}{b}(u'-a)$. با جایگذاری در معادله، داریم:

$(b\neq 0)$

$$\frac{1}{b}(u'-a)=f\left(\frac{u+d}{\frac{\beta}{b}u+h}\right) \Rightarrow u'=bf\left(\frac{u+d}{\frac{\beta}{b}u+h}\right)+a$$

تفکیک پذیر شد!

مثال : معادلات دیفرانسیلی زیر را حل کنید.

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+2}{x-y-4}$

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \longrightarrow x_0=1,\ y_0=-3 \Rightarrow \begin{cases} r=x-x_0=x-1 \\ s=y-y_0=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=r+1 \\ y=s-3 \end{cases}$$

جایگذاری در معادله:

$$\frac{ds}{dr}=\frac{r+1+s-3+2}{r+1-s+3-4}=\frac{r+s}{r-s} \Rightarrow (r-s)ds-(r+s)dr=0 \quad (A)$$

$$v=\frac{s}{r} \Rightarrow s=rv \Rightarrow ds=rdv+vdr \xrightarrow{(A)} (r-rv)(rdv+vdr)-(r+rv)dr=0$$

$$\Rightarrow (1-v)(rdv+vdr)-(1+v)dr=0 \Rightarrow r(1-v)dv-(1+v^2)dr=0 \Rightarrow \frac{1-v}{1+v^2}dv=\frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+v^2}\right)dv-\left(\frac{v}{1+v^2}\right)dv=\frac{dr}{r} \xrightarrow{\int} tg^{-1}(v)-\frac{1}{2}Ln(1+v^2)=Ln(r)+C_1$$

$$\Rightarrow tg^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)-\frac{1}{2}Ln\left(1+\left(\frac{s}{r}\right)^2\right)-Ln(r)=C_1 \Rightarrow 2tg^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)-Ln(r^2+s^2)=2C_1=C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{2tg^{-1}\left(\frac{y+3}{x-1}\right)-Ln\left((x-1)^2+(y+3)^2\right)=C_2}$$

2) $(x-2\sin y+3)dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$

$$z:=\sin y \Rightarrow dz=\cos y\,dy$$

جایگذاری در معادله: $(x-2z+3)dx+(2x-4z-3)dz=0 \Rightarrow \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x-2z+3}{-2x+4z+3}$

$$u:=x-2z \Rightarrow u'=1-2z' \Rightarrow z'=\frac{1-u'}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}(1-u')=\frac{u+3}{-2u+3}$$

$$\Rightarrow 1-u'=\frac{2u+6}{-2u+3} \Rightarrow u'=1+\frac{2u+6}{2u-3}$$

$$\longrightarrow u'=\frac{4u+3}{2u-3} \Rightarrow \left(\frac{2u-3}{4u+3}\right)du=dx \Rightarrow \left(\frac{1}{2}-\frac{\frac{9}{2}}{4u+3}\right)du=dx$$

$$\xrightarrow{\int} \frac{1}{2}u-\frac{9}{8}\ln(4u+3)=x+C_1 \xrightarrow{\times 8} 4u-9\ln(4u+3)=8x+8C_1$$

$$\xrightarrow{u=x-2z=x-2\sin y} 4(x-2\sin y)-9\ln(4(x-2\sin y)+3)=8x+C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{8\sin y+9\ln(4x-8\sin y+3)+4x+C_2=0}$$

معادلات دیفرانسیل کامل: معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (*) را کامل گوییم هرگاه تابع $\Phi(x,y)$ موجود باشد به طوری که:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=M(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=N(x,y) \end{cases}$$

در این صورت جواب عمومی معادله عبارت است از: $\Phi(x,y)=C$. $(C\in\mathbb{R})$

قضیه: فرض کنیم $M(x,y)$، $N(x,y)$، $M_y(x,y)$، $N_x(x,y)$ در ناحیه‌ای از صفحه مانند R پیوسته باشند؛ در این صورت معادله‌ی (*) کامل است اگر و تنها اگر $M_y=N_x$.

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

اثبات (طرف اول قضیه): فرض کنیم معادله‌ی $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ کامل باشد؛ پس تابع $\Phi(x,y)$ وجود دارد به طوری که:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=M(x,y)\ ,\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}=N(x,y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=M \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} \Phi_{xy}=M_y \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=N \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \Phi_{yx}=N_x \end{cases} \Rightarrow M_y=N_x$$

توجه: برای توابع دو متغیره مثل $\Phi(x,y)$، ترتیب مشتق‌گیری اهمیت دارد و فقط در صورتی که پیوسته باشند، می‌توان گفت:

$$\Phi_{xy}=\Phi_{yx}$$

اثبات (طرف دوم) قضیه: فرض کنیم $N_x = M_y$. برای این که نشان دهیم معادله‌ی $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل است،

باید نشان دهیم تابع $\Phi(x,y)$ موجود است که دو شرط $\Phi_x = M$ ، $\Phi_y = N$ را داشته باشد.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = M(x,y) \xrightarrow{\quad\int\quad} \underbrace{\Phi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y)}_{A} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \int M(x,y)\,dx + h'(y) \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x,y)} N(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h'(y) \quad \text{پس} \quad \underbrace{h'(y) = N(x,y) - \int M(x,y)\,dx}_{B}$$

$\xrightarrow{A,\,B}$ با انتگرال‌گیری نسبت به y از $h'(y)$ ، یافتن $h(y)$ ، $\Phi(x,y)$ نیز یافت می‌شود.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل داده شده را حل کنید.

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

$$\text{پس} \quad \underbrace{(y\cos x + 2xe^y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(\sin x + x^2e^y - 1)}_{N(x,y)}dy = 0$$

$$\begin{cases} M_y = \cos x + 2xe^y \\ N_x = \cos x + 2xe^y \end{cases} \xrightarrow{M_y = N_x} \text{معادله کامل است.} \quad \text{پس} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = M(x,y) = y\cos x + 2xe^y & (A) \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x,y) = \sin x + x^2e^y - 1 & (B) \end{cases}$$

$$(A) \xrightarrow{\int dx} \Phi(x,y) \overset{(*)}{=} y\sin x + x^2e^y + h(y) \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری نسبت به } y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sin x + x^2e^y + h'(y) \quad (C)$$

$$(B),(C) \longrightarrow h'(y) = -1 \xrightarrow{\int dy} h(y) = -y + c_1 \xrightarrow{(*)} y\sin x + x^2e^y - y + c_1 = c$$

پس جواب عمومی معادله: $\boxed{y\sin x + x^2e^y - y = c_2}$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل داده شده را حل کنید.

$$\underbrace{(4x^3\sin^3 y-2x\sin y)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(3x^4\sin^2 y-x^2)\cos y}_{N(x,y)}dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y=12x^3\sin^2 y\cos y-2x\cos y \\ N_x=12x^3\sin^2 y\cos y-2x\cos y\end{array}\right\} \xrightarrow{M_y=N_x}$$ معادله کامل است. $\Rightarrow$ $\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=M(x,y)=4x^3\sin^3 y-2x\sin y & (A)\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y}=N(x,y)=3x^4\sin^2 y\cos y-x^2\cos y & (B)\end{cases}$

$$(A)\xrightarrow{\int}\overset{(*)}{\phi(x,y)}=x^4\sin^3 y-x^2\sin y+h(y)\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial\phi}{\partial y}=3x^4\sin^2 y\cos y-x^2\cos y+h'(y)\quad (C)$$

$$(B),(C)\longrightarrow h'(y)=0\Rightarrow h(y)=c_1\xrightarrow{(*)}x^4\sin^3 y-x^2\sin y+c_1=c\Rightarrow \boxed{x^4\sin^3 y-x^2\sin y=c_2}$$ جواب عمومی معادله

عامل انتگرال ساز: گاهی از مواقع ممکن است معادله کامل نباشد اما با ضرب تابعی مانند $\mu(x,y)$، تبدیل به معادله‌ای کامل شود. چنین تابعی را عامل انتگرال ساز معادله گوییم.

روش به دست آوردن عامل انتگرال ساز:

شکل کلی معادله: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\xrightarrow{\times\mu(x,y)}\mu Mdx+\mu Ndy=0\xrightarrow{\text{شرط کامل بودن}}\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\mu N)$

$$\Rightarrow \mu_y M+\mu M_y=\mu_x N+\mu N_x\Rightarrow \mu(M_y-N_x)=\mu_x N-\mu_y M\Rightarrow M_y-N_x=\frac{\mu_x}{\mu}N-\frac{\mu_y}{\mu}M$$

$$\Rightarrow M_y-N_x=N\frac{\partial}{\partial x}Ln(\mu)-M\frac{\partial}{\partial y}Ln(\mu)$$

معادله‌ی فوق برای یافتن $\mu(x,y)$، یک PDE (معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی) است و حل آن در حالت کلی ممکن نمی‌باشد.

اما می‌توان در حالات خاصی، آن را حل کرد:

۱) فرض کنیم که عامل انتگرال ساز، فقط تابعی از x باشد؛ طبق PDE مورد نظر داریم:

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{\partial}{\partial x}Ln(\mu)$$

در صورتی که کسر سمت چپ، تنها تابعی از x باشد $\left(f(x)=\dfrac{M_y-N_x}{N}\right)$، می‌توان μ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$$

۲) فرض کنیم که عامل انتگرال ساز، فقط تابعی از y باشد؛ طبق PDE مورد نظر داریم:

$$\frac{M_y-N_x}{-M}=\frac{\partial}{\partial y}Ln(\mu)\Rightarrow \frac{N_x-M_y}{M}=\frac{\partial}{\partial y}Ln(\mu)$$

در صورتی که کسر سمت چپ، تنها تابعی از y باشد $\left(g(y)=\dfrac{N_x-M_y}{M}\right)$، می‌توان μ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\mu(y)=e^{\int g(y)dy}$$

۳) فرض کنیم که عامل انتگرال ساز معادله، تابعی از $z=xy$ باشد؛ طبق PDE مورد نظر، داریم:

$$\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=\frac{\partial}{\partial z}\ln(\mu(z))$$

درصورتی که کسر سمت چپ، تابعی از $z=xy$ باشد $\left(h(z)=\frac{M_y-N_x}{yN-xM}\right)$، می‌توان μ را به صورت زیر به دست آورید:

$$\mu(z)=e^{\int h(z)dz}$$

۴) حالت کلی: فرض کنیم که عامل انتگرال ساز معادله، عبارتی مثل $z(x,y)$ باشد؛ طبق PDE مورد نظر، داریم:

$$\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y}=\frac{\partial}{\partial z}\ln(\mu(z))$$

مثال: به کمک عامل انتگرال ساز، معادلات زیر را حل کنید.

1) $\underbrace{(x+y^2)}_{M(x,y)}dx\underbrace{-2xy}_{N(x,y)}dy=0$

$$\left.\begin{aligned}M_y&=2y\\N_x&=-2y\end{aligned}\right\}\longrightarrow M_y\neq N_x$$ پس معادله کامل نیست.

$$\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y}=\frac{4y}{(-2xy)z_x-(x+y^2)z_y}\xrightarrow{z(x,y):=x}\frac{4y}{-2xy}=\frac{\partial}{\partial z}\ln(\mu(z))$$ پس $$\frac{\partial}{\partial x}\ln(\mu(x))=\frac{-2}{x}$$

پس $\mu(x)=e^{\int(\frac{-2}{x})dx}=\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2}$ طرفین معادله ضرب در $\longrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}_{P}dx\underbrace{-2\left(\frac{y}{x}\right)}_{Q}dy=0$

$$\left.\begin{aligned}P_y&=\frac{2y}{x^2}\\Q_x&=\frac{2y}{x^2}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{P_y=Q_x}$$ پس معادله کامل است.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=P=\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & \text{(B)}\\[2mm]\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=Q=\dfrac{-2y}{x}\xrightarrow{\int dy}\Phi(x,y)=\dfrac{-y^2}{x}+h(x) & \text{(A)}\end{cases}$$

(A) $\xrightarrow{\text{مشتق گیری نسبت به } x}$ $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+h'(x)\xrightarrow{(B)}h'(x)=\frac{1}{x}\xrightarrow{\int dx}h(x)=\ln(x)$ (C)

(A),(C) $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{-y^2}{x}+\ln x=c}$

۲) $\underbrace{y(1+xy)}_{M}dx - \underbrace{x}_{N}dy = 0$

$M_y = 1+2xy$

$N_x = -1$

پس $M_y \neq N_x$ پس معادله کامل نیست

$$\frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y} = \frac{2+2xy}{-xz_x - y(1+xy)z_y} \xrightarrow{z:=y} \frac{\partial}{\partial z}\ln(\mu(z)) = \frac{-2}{y}$$ پس $$\mu(y) = e^{\int \frac{-2}{y}dy} = \frac{1}{y^2}$$

طرفین معادله ضرب در $\frac{1}{y^2}$: $\underbrace{(\frac{1}{y}+x)}_{P}dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{Q}dy = 0$

$P_y = \frac{-1}{y^2}$

$Q_x = \frac{-1}{y^2}$

$P_y = Q_x \longrightarrow$ معادله کامل است. پس

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P = \frac{1}{y}+x \xrightarrow{\int dx} \Phi(x,y) = \frac{x}{y} + x^2 + h(y) \quad (A)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q = \frac{-x}{y^2} \quad (B)$$

$(A) \xrightarrow{\text{مشتق جزئی نسبت به } y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} + h'(y) \xrightarrow{(B)} h'(y) = 0$ پس $h(y) = C_1 \xrightarrow{(A)} \boxed{\frac{x}{y} + x^2 = C}$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(y+x^4y^2)}_{M}dx+\underbrace{x}_{N}dy=0$$

$$\left.\begin{aligned}M_y&=1+2x^4y\\N_x&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow M_y\neq N_x \Rightarrow$$ معادله کامل نیست

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln(\mu(z))=\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y}=\frac{2x^4y}{xz_x-y(1+x^4y)z_y}\xrightarrow{z:=xy}\frac{\partial}{\partial z}\ln(\mu(z))=\frac{2x^4y}{xy-xy(1+x^4y)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\ln(\mu(z))=\frac{2x^4y}{-x^5y^2}=\frac{-2}{xy}=\frac{-2}{z}\Rightarrow \mu(z)=e^{-\int\frac{2}{z}dz}=\frac{1}{z^2}=\frac{1}{x^2y^2}$$

$\frac{1}{x^2y^2}$ را در طرفین معادله ضرب: $\underbrace{\left(\frac{1}{x^2y}+x^2\right)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{\frac{1}{xy^2}}_{Q(x,y)}dy=0$

$$\left.\begin{aligned}P_y&=\frac{-1}{x^2y^2}\\Q_x&=\frac{-1}{x^2y^2}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{P_y=Q_x}$$ معادله کامل است. $\Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial x}=P=\frac{1}{x^2y}+x^2 & (A)\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=Q=\frac{1}{xy^2}\xrightarrow{\int dy}\phi(x,y)=\frac{-1}{xy}+h(x) & (B)\end{cases}$

(B) $\xrightarrow{\text{مشتق کلی نسبت به } x}$ $\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{x^2y}+h'(x)\xrightarrow{(A)}h'(x)=x^2\Rightarrow h(x)=\frac{x^3}{3}\xrightarrow{(B)}\boxed{\frac{-1}{xy}+\frac{x^3}{3}=C}$

مسئله: با چه شرطی معادله‌ی دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دارای عامل انتگرال‌سازی است که تنها تابعی از $z=x^2-y^2$ باشد؟

$$\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y}=\boxed{\frac{M_y-N_x}{2xN+2yM}}$$ اگر این کسر تابعی از x^2-y^2 شود، معادله‌ی داده شده دارای عامل انتگرال‌ساز مورد نظر است.

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول: فرم کلی این معادلات به صورت $A(x)y'+B(x)y=R(x)$ است یا در فرم استاندارد می‌توان نوشت:

$$y'+p(x)y=q(x)\qquad \left(p(x)=\frac{B(x)}{A(x)},\ q(x)=\frac{R(x)}{A(x)}\right)$$

روش حل:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\Rightarrow dy+p(x)ydx=q(x)dx\Rightarrow (p(x)y-q(x))dx+dy=0\Rightarrow\begin{cases}M(x,y)=p(x)y-q(x)\\N(x,y)=1\end{cases}$$

معادله لزوماً تفکیک‌پذیر، همگن یا کامل نیست؛ امّا قابل تبدیل به کامل می‌باشد:

$$\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y}=\frac{p(x)}{z_x-(p(x)y-q(x))z_y}\xrightarrow{z(x,y):=x}\frac{\partial}{\partial x}\ln(\mu(x))=\frac{p(x)}{1-0}=p(x)\Rightarrow\boxed{\mu(x)=e^{\int p(x)dx}}$$

طرفین معادله ضرب در $\mu(x)$:

$$\underbrace{\mu(x)\left(p(x)y-q(x)\right)}_{M^*_{(x,y)}}dx+\underbrace{\mu(x)}_{N^*_{(x,y)}}dy=0 \quad \text{پس} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x}=M^*=\mu(x)\left(p(x)y-q(x)\right) & (A) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y}=N^*=\mu(x) & (B) \end{cases}$$

$$(B)\xrightarrow{\int dy}\phi(x,y)\underset{(*)}{=}\mu(x)y+h(x)\xrightarrow{\text{مشتق گیری نسبت به } x}\frac{\partial\phi}{\partial x}=\mu'(x)y+h'(x) \quad (C)$$

$$\xrightarrow{(A),(C)}\mu'(x)y+h'(x)=\mu(x)p(x)y-\mu(x)q(x)\xrightarrow{\int dx}h(x)=-\int\mu(x)q(x)\,dx \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)}\mu(x)y-\int\mu(x)q(x)dx=C \quad \text{پس} \quad \mu(x)y=\int\mu(x)q(x)dx+C \quad \text{پس} \quad \boxed{y_g=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int\mu(x)q(x)dx+C\right) \quad \left(\mu(x)=e^{\int p(x)dx}\right)}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ xy'+2y=4x^2\xrightarrow{\div x}y'+\frac{2}{x}y=4x \quad \text{پس} \quad \begin{cases} p(x)=\dfrac{2}{x} & (A) \\ q(x)=4x & (B) \end{cases}$$

$$\mu(x):=e^{\int p(x)dx}\xrightarrow{(A)}\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=x^2 \quad (C)$$

$$y_g=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx+C\right)\xrightarrow{(B),(C)}y_g=\frac{1}{x^2}\left(\int 4x^3dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(x^4+C\right) \quad \text{پس} \quad \boxed{y_g=x^2+\frac{C}{x^2}}$$

$$2)\ (tg\,x)y'+y=\frac{3x}{\cos x}\xrightarrow{\times\, Cotg\,x}y'+Cotg\,x.y=\frac{3x}{\sin x} \quad \text{پس} \quad \begin{cases} p(x)=Cotg\,x & (A) \\ q(x)=\dfrac{3x}{\sin x} & (B) \end{cases}$$

$$\mu(x):=e^{\int p(x)dx}\xrightarrow{(A)}\mu(x)=e^{\int Cotg\,x\,dx}=e^{Ln(\sin x)}=\sin x \quad (C)$$

$$y_g=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int\mu(x)q(x)dx+C\right)\xrightarrow{(B),(C)}y_g=\frac{1}{\sin x}\left(\int 3x\,dx+C\right) \quad \text{پس} \quad \boxed{y_g=\frac{1}{\sin x}\left(\frac{3}{2}x^2+C\right)}$$

$$3)\ y'(x\sin y+2\sin^2 y)=1$$

$$\hookrightarrow \frac{dy}{dx}(x\sin y+2\sin^2y)=1 \quad \text{پس} \quad \frac{dx}{dy}=x\sin y+2\sin^2y$$

$$\text{پس} \quad \frac{dx}{dy}-(\sin y)x=2\sin^2y \quad \text{پس} \quad \begin{cases} p(y)=-\sin y & (A) \\ q(y)=2\sin^2 y & (B) \end{cases}$$

$$\mu(y):=e^{\int p(y)dy}\xrightarrow{(A)}\mu(y)=e^{-\int\sin y\,dy}=e^{\cos y} \quad (C)$$

$$x=\frac{1}{\mu(y)}\left(\int\mu(y)q(y)dy+C\right)\xrightarrow{(B),(C)}x=e^{-\cos y}\left(\underbrace{\int 2\sin^2y\,e^{\cos y}dy}_{I}+C\right) \quad (D)$$

$u := \cos y$ پس $du = -\sin y\, dy$ (*)

$I = \int \sin 2y\, e^{\cos y}\, dy = 2\int \sin y \cos y\, e^{\cos y}\, dy \xrightarrow{(*)} I = -2\int u e^{u}\, du = -2(u-1)e^{u}$ (E)

$\xrightarrow{D,E} x = e^{-u}(2I + c) = e^{-u}(c - 4(u-1)e^{u}) = ce^{-u} - 4(u-1) = 4 - 4u + ce^{-u}$ (**)

$\xrightarrow{(*),(**)} \boxed{x = 4 - 4\cos y + ce^{-\cos y}}$

4) $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$ پس $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$ پس $\frac{dx}{dy} = 2\ln y + 1 - \frac{x}{y}$ پس $\frac{dx}{dy} + \underbrace{\frac{1}{y}}_{p(y)} x = \underbrace{2\ln y + 1}_{q(y)}$

$\mu(y) := e^{\int p(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y$ (*)

$x = \frac{1}{\mu(y)}\left(\int \mu(y) q(y)\, dy + c\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{y}\left(\int (2y\ln y + y)\, dy + c\right) = \frac{1}{y}\left(y^2 \ln y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c\right)$ پس $\boxed{x = y\ln y + \frac{c}{y}}$

معادله‌ی دیفرانسیل برنولی: فرم کلی این معادله به صورت $y' + p(x)y = q(x)y^{n}$ است ($n \neq 0, 1$) که با تغییر متغیر $u := y^{1-n}$ به معادله‌ی دیفرانسیل خطی تبدیل شده و قابل حل است:

$y' + p(x)y = q(x)y^{n} \xrightarrow{\div y^{n}} y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$ (*)

$u := y^{1-n} \longrightarrow u' = (1-n)y^{-n}y'$ پس $y^{-n}y' = \frac{u'}{1-n} \xrightarrow{(*)} \frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x)$

پس $u' + \underbrace{\boxed{(1-n)p(x)}}_{p^{*}(x)} u = \underbrace{\boxed{(1-n)q(x)}}_{q^{*}(x)}$ معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول برای $u(x)$

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

1) $\frac{dy}{dx} - y = xy^{2}$ پس $n = 2$ پس $u := y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$ پس $u' = -y^{-2}y'$ پس $\begin{cases} y = \frac{1}{u} = u^{-1} \\ y' = -u^{-2}u' \end{cases}$

معادله‌ی دیفرانسیل برنولی

جایگذاری در معادله: $-u^{-2}u' - u^{-1} = xu^{-2} \xrightarrow[\times -u^{2}]{} u' + u = -x$ معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول $\begin{cases} p^{*}(x) = 1 \\ q^{*}(x) = -x \end{cases}$

$\mu(x) := e^{\int p^{*}(x)dx} = e^{\int dx} = e^{x}$

$u_g = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu q^{*} dx + c\right)$ پس $u_g = e^{-x}\left(\int -xe^{x} dx + c\right) = e^{-x}(e^{x} - xe^{x} + c) = 1 - x + ce^{-x}$

$y_g = u_g^{-1}$ پس $\boxed{y_g = \frac{1}{1 - x + ce^{-x}}}$

۲) $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2} \xrightarrow{\div 3x} y' - \dfrac{2}{3x}y = \dfrac{1}{3}x^2y^{-2}$

معادلهی دیفرانسیل برنولی $(n=-2)$

$$u := y^{1-n} = y^3 \Rightarrow y = u^{\frac{1}{3}}$$
$$u' = 3y^2y' \Rightarrow y' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}u'$$

جایگذاری در معادله: $\dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}u' - \dfrac{2}{3x}u^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}x^2u^{-\frac{2}{3}} \xrightarrow{3u^{\frac{2}{3}}} u' - \dfrac{2}{x}u = x^2$

$$\begin{cases} p^*(x) = \dfrac{-2}{x} \\ q^*(x) = x^2 \end{cases}$$

معادلهی دیفرانسیل خطی مرتبه اول برحسب $u(x)$

$$\mu(x) := e^{\int p^*(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$$
$$u_g = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)\,dx + c\right)$$
$$\Rightarrow u_g = x^2\left(\int dx + c\right) = x^3 + cx^2 \xrightarrow{u=y^3} y^3 = x^3 + cx^2$$
$$\Rightarrow \boxed{y_g = \sqrt[3]{x^3 + cx^2}}$$

۳) $xy' + y = 2x^2yy'\,Lny \Rightarrow y'(2x^2y\,Lny - x) = y \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x^2y\,Lny - x}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2x^2y\,Lny - x}{y} = 2x^2Lny - \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}(x) = 2x^2Lny$$

معادلهی دیفرانسیل برنولی برحسب x $(n=2)$

$$u := x^{1-n} = x^{-1} \Rightarrow x = u^{-1}$$
$$\frac{du}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -u^{-2}\frac{du}{dy}$$

جایگذاری در معادله: $-u^{-2}\dfrac{du}{dy} + \dfrac{1}{y}u^{-1} = (2Lny)u^{-2} \xrightarrow{\times -u^2} \dfrac{du}{dy} - \dfrac{1}{y}u = -2Lny$

$$\begin{cases} p^*(y) = \dfrac{-1}{y} \\ q^*(y) = -2Lny \end{cases}$$

معادلهی دیفرانسیل خطی مرتبه اول برحسب $u(y)$

$$\mu(y) := e^{\int p(y)dy} = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-Lny} = \frac{1}{y}$$
$$u_g(y) = \frac{1}{\mu(y)}\left(\int \mu(y)q(y)dy + c\right)$$
$$\Rightarrow u_g(y) = y\left(\underbrace{\int \frac{-2Lny}{y}dy}_{-(Lny)^2} + c\right)$$

$$u_g(y) = -y(Lny)^2 + cy \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{cy - y\,Ln^2y}}$$

نکته: معادلاتی به فرم $f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)p(x)=q(x)$ $(*)$ را می‌توان با تغییر متغیر $u=f(y)$ به معادلات خطی تبدیل نمود:

$u=f(y)$ پس $u'=y'f'(y) \xrightarrow{(*)} u'+up(x)=q(x)$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'-2=2xe^{-y} \xrightarrow{xe^{y}} y'e^{y}-2e^{y}=2x$

$u:=e^{y}$ پس $u'=y'e^{y} \longrightarrow u'-2u=2x$ پس $\begin{cases} p(x)=-2 \\ q(x)=2x \end{cases}$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول برحسب u

$\mu(x):=e^{\int p(x)dx}=e^{\int -2dx}=e^{-2x}$

$u_g=\frac{1}{\mu}\left(\int \mu q\, dx+c\right)$ پس $u_g=e^{2x}\left(\int 2xe^{-2x}dx+c\right)=e^{2x}\left(c-xe^{-2x}-\frac{e^{-2x}}{2}\right)$

پس $u_g=ce^{2x}-x-\frac{1}{2}=e^{y}$ پس $\boxed{y_g=\ln\left(ce^{2x}-x-\frac{1}{2}\right)}$

2) $y'\cos y+\sin y=x$

$u:=\sin y$ پس $u'=y'\cos y$ پس $u'+u=x$ معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول برحسب u

$p(x)=1\ ,\ q(x)=x$

$\mu(x):=e^{\int p(x)dx}=e^{\int dx}=e^{x}$

$u_g=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx+c\right)$ پس $u_g=e^{-x}\left(\int xe^{x}dx+c\right)=e^{-x}\left(xe^{x}-e^{x}+c\right)=x-1+ce^{-x}=\sin y$

پس $\boxed{y_g=\sin^{-1}\left(x-1+ce^{-x}\right)}$

معادله‌ی دیفرانسیل ریکاتی: فرم کلی این معادله به صورت $y'+p_1(x)y+p_2(x)y^2=q(x)$ است ($p_2(x)\neq 0$). فرض کنیم $y_1(x)$ جوابی برای معادله‌ی فوق باشد؛ در این صورت، جواب عمومی معادله‌ی ریکاتی به صورت $y_g(x)=y_1(x)+\frac{1}{z(x)}$ است که $z(x)$ از حل یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول حاصل می‌شود:

$y_g(x)$ را در معادله قرار می‌دهیم: $y_1'-\frac{z'}{z^2}+p_1\left(y_1+\frac{1}{z}\right)+p_2\left(y_1+\frac{1}{z}\right)^2=q$

پس $y_1'-\frac{z'}{z^2}+p_1y_1+\frac{p_1}{z}+p_2y_1^2+\frac{2p_2y_1}{z}+\frac{p_2}{z^2}=q$ پس $-\frac{z'}{z^2}+\frac{p_1}{z}+\frac{2p_2y_1}{z}+\frac{p_2}{z^2}=0$

$y_1'+p_1y_1+p_2y_1^2=q$ ← y_1 در معادله‌ی اولیه صدق می‌کند

$\xrightarrow{\times -z^2} z'-p_1z-p_2(2y_1z+1)=0$ پس $z'-p_1z-2p_2y_1z-p_2=0$ پس $\boxed{z'(x)-(p_1+2p_2y_1)z(x)=p_2(x)}$

مثال: با فرض این که $y_1(x)=x$ جوابی برای معادله‌ی زیر باشد، جواب عمومی آن را به دست آورید.

$$y'=1+\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}$$

$$\to y'-\frac{1}{x}y+\frac{1}{x^2}y^2=1 \quad \Rightarrow \begin{cases} P_1(x)=\frac{-1}{x} \\ P_2(x)=\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

معادله‌ی دیفرانسیل ریکاتی

$$Z'(x)-(P_1(x)+2P_2(x)y_1(x))Z(x)=P_2(x)$$

$$\Rightarrow Z'(x)-\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x}\right)Z(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$Z'(x)-\frac{1}{x}Z(x)=\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \begin{cases} p(x)=\frac{-1}{x} \\ q(x)=\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu(x):=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int \frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

$$Z_g(x)=\frac{1}{\mu}\left(\int \mu q\,dx+c\right)$$

$$\Rightarrow Z_g(x)=x\left(\int \frac{1}{x^3}dx+c\right)=x\left(c-\frac{1}{2x^2}\right)=cx-\frac{1}{2x} \quad (*)$$

$$y_g(x)=y_1(x)+\frac{1}{Z(x)} \xrightarrow{(*)} \boxed{y_g(x)=x+\frac{1}{cx-\frac{1}{2x}}}$$

معادله‌ی دیفرانسیل کلرو: فرم کلی این معادله به صورت $y=xy'+f(y')$ است.

روش حل: فرض کنیم $y'=r(x)$ ؛ با جایگذاری در معادله، داریم:

$$y=xr(x)+f(r(x)) \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری نسبت به } x} y'=r(x)+xr'(x)+r'(x)f'(r(x)) \xrightarrow{y'=r(x)} r=r+xr'+r'f'(r)$$

$$\Rightarrow r'(x+f'(r))=0 \Rightarrow \begin{cases} r'(x)=0 \Rightarrow r(x)=c \xrightarrow{y'=r(x)} y'(x)=c \Rightarrow \boxed{y_g(x)=cx+f(c)} \\ x+f'(r)=0 \end{cases}$$

جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل کلرو

$$x+f'(c)=0 \Rightarrow x=-f'(c)$$

با حذف c از روابط $x=-f'(c)$ ، $y=cx+f(c)$ ، جواب غیرعادی (منفرد) معادله حاصل می‌شود.

مثال: جواب عمومی و غیرعادی معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$y=xy'+\frac{1}{y'}, \quad r(x):=y'$$

$$\Rightarrow y=xr(x)+\frac{1}{r(x)} \Rightarrow y'=r(x)+xr'(x)-\frac{r'(x)}{r^2(x)} \xrightarrow{y'=r(x)} 0=xr'(x)-\frac{r'(x)}{r^2(x)}$$

$$\Rightarrow r'(x)\left(x-\frac{1}{r^2(x)}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} r'(x)=0 \Rightarrow r(x)=c \Rightarrow y'=c \xrightarrow{y=xy'+\frac{1}{y'}} \boxed{y_g=cx+\frac{1}{c}} \\ x-\frac{1}{r^2(x)}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{r^2(x)}=\frac{1}{c^2} \end{cases}$$

جواب عمومی

$$\begin{cases} y=cx+\frac{1}{c} \\ x=\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2x=1 \end{cases} \Rightarrow y=2cx \Rightarrow y^2=4c^2x^2=4c^2\times\frac{1}{c^2}\times x=4x \Rightarrow \boxed{y^2=4x}$$

جواب غیرعادی (منفرد)

بررسی چند حالت خاص در معادلات مرتبه اول :

۱) فرض کنیم معادله‌ی $\boxed{F(x,y,y')=0}$ $(*)$، مستقل از x و y به صورت $F(y')=0$ باشد. با فرض اینکه معادله‌ی جبری $F(x)=0$ دارای ریشه‌ی حقیقی مثل k $F(k)=0$

باشد، می توان نوشت:

$$y'=k \longrightarrow y=kx+c \longrightarrow k=\frac{y-c}{x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت $F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$ می باشد.

مثال : جواب عمومی معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$\underline{(y')^5-3(y')^2+1=0}$$

$$F(y') \Rightarrow F(x)=x^5-3x^2+1$$

طبق قضیه‌ی اساسی جبر، این معادله‌ی جبری، ۵ ریشه دارد که به علت فرد بودن تعداد ریشه‌ها، می توان گفت که حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^5-3\left(\frac{y-c}{x}\right)^2+1=0$$: جواب عموم معادله

۲) فرض کنیم معادله‌ی $(*)$ مستقل از x و به صورت $F(y,y')=0$ باشد. در این صورت تنها می توان معادله را در یکی از دو حالت زیر حل کرد:

a) $y'=f(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f(y) \Rightarrow \frac{dy}{f(y)}=dx$ معادله تفکیک پذیر است

b) $y=f(y') \xrightarrow{y'=r(x)} \boxed{y=f(r)} \Rightarrow dy=f'(r)dr \Rightarrow r\,dx=f'(r)dr \Rightarrow dx=\frac{f'(r)\,dr}{r}$

$$\Rightarrow \boxed{x+c=\int\frac{f'(r)}{r}dr}$$

با حذف r از روابط $y=f(r)$ و $x+c=\int\frac{f'(r)}{r}dr$، جواب عمومی معادله حاصل می شود. اگر نتوانستیم r را حذف کنیم، جواب عمومی معادله را برحسب پارامتر r به دست آورده‌ایم.

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left.\begin{array}{l} y=(y')^2e^{y'} \\ r(x)=y' \end{array}\right\} \Rightarrow y=r^2e^r \Rightarrow dy=e^r(2r+r^2)dr \Rightarrow r\,dx=e^r(2r+r^2)dr$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r=0 \xrightarrow{y=r^2e^r} \boxed{y=0} & \text{جواب غیرعادی (منفرد)} \\ r\neq 0 \Rightarrow dx=e^r(r+2)dr \Rightarrow \begin{cases} x+c=(r+1)e^r \\ y=r^2e^r \end{cases} & \text{فرم پارامتری جواب عمومی} \end{cases}$$

۳) فرض کنیم معادله‌ی (*) مستقل از y و به صورت $F(x,y')=0$ باشد. در این صورت معادله را تنها در یکی از دو حالت زیر می‌توان حل کرد:

$y'=f(x) \rightsquigarrow \frac{dy}{dx}=f(x) \rightsquigarrow dy=f(x)\,dx$ معادله تفکیک‌پذیر است

$x=f(y') \xrightarrow[r(x):=y']{} x=f(r) \rightsquigarrow dx=f'(r)\,dr \rightsquigarrow \frac{dy}{r}=f'(r)\,dr \rightsquigarrow dy=r f'(r)\,dr$ معادله تفکیک‌پذیر است

۴) فرض کنیم معادله‌ی (*) به یکی از دو حالت $x=f(y,y')$ یا $y=f(x,y')$ قابل نوشتن باشد:

$$x=f(y,y') \xrightarrow{r(x):=y'} x=f(y,r) \rightsquigarrow dx=f_y\,dy+f_r\,dr \rightsquigarrow \frac{dy}{r}=f_y\,dy+f_r\,dr$$

$$\xrightarrow{\div dy} \boxed{\frac{1}{r}=f_y+f_r\frac{dr}{dy}} \rightsquigarrow$$

بعد از حل معادله، r برحسب y و c به دست می‌آید که با جایگذاری در معادله‌ی $x=f(y,r)$، جواب عمومی مسئله‌ی اولیه به دست می‌آید.

توجه: اگر معادله به صورت $y=f(x,y')$ باشد، راه حل مشابه راه حل فوق است و باز هم $r:=y'$ و ...!

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y=\underbrace{\frac{(y')^2}{2}+2xy'+x^2}_{f(x,y')}$$

$$r:=y' \rightsquigarrow y=\underbrace{\frac{r^2}{2}+2xr+x^2}_{(A)} \rightsquigarrow dy=r\,dr+2x\,dr+2r\,dx+2x\,dx=(r+2x)\,dr+(2x+2r)\,dx$$

$$\rightsquigarrow r\,dx=(r+2x)\,dr+(2x+2r)\,dx \rightsquigarrow (r+2x)\,dr+(2x+r)\,dx=0 \rightsquigarrow (r+2x)(dr+dx)=0$$

$$\rightsquigarrow (r+2x)\left(1+\frac{dr}{dx}\right)=0 \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{dr}{dx}=-1 \rightsquigarrow r=-x+C \xrightarrow{(A)} \boxed{y_g=\frac{(C-x)^2}{2}+2x(C-x)+x^2} \\ r+2x=0 \rightsquigarrow r=-2x \xrightarrow{(A)} y=\frac{4x^2}{2}+2x\times(-2x)+x^2 \rightsquigarrow \boxed{y=-x^2} \end{cases}$$

جواب عمومی: $y_g=\frac{(C-x)^2}{2}+2x(C-x)+x^2$

جواب غیرعادی: $y=-x^2$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر:

فرم کلی یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه n: $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$

فرم خطی یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه n: $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=r(x)$

- در معادله‌ی فوق، اگر $r(x)=0$، معادله را همگن و در غیر این صورت ناهمگن گوییم.
- در معادله‌ی فوق، اگر توابع $a_0(x)$، $a_1(x)$، ... و $a_{n-1}(x)$، ثابت باشند، معادله را خطی با ضرایب ثابت گوییم.

تذکر: برای یافتن جواب خصوصی یک معادله‌ی مرتبه‌ی n، به n شرط اضافی نیاز است. اگر این n شرط در یک نقطه روی تابع و مشتقات آن مشخص شوند، مسئله‌ی حاصل را مسئله‌ی مقدار اولیه (IVP) می‌نامند؛ اما اگر این شرایط اضافی روی تابع و مشتقات آن در دو نقطه‌ی متمایز داده شده باشد، مسئله را مسئله‌ی مقدار مرزی (BVP) می‌نامند.

استقلال و وابستگی خطی: توابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را در بازه‌ی $[a,b]$ مستقل خطی گوییم هرگاه به ازای هر $x\in[a,b]$، رابطه‌ی $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$ نتیجه دهد: $c_1=c_2=0$. در غیر این صورت y_1 و y_2 را وابسته‌ی خطی گوییم.

★ اگر یکی ضریبی از دیگری باشد، وابسته‌ی خطی و در غیر این صورت مستقل خطی هستند.

توجه: تابع $y=0$ با هر تابع دیگری وابسته‌ی خطی محسوب می‌شود.

حالت کلی: توابع y_1، ... و y_n را مستقل خطی گوییم هرگاه به ازای هر $x\in[a,b]$، رابطه‌ی $c_1y_1+\dots+c_ny_n=0$، نتیجه دهد:

$c_1=\dots=c_n=0$

در غیر این صورت، این توابع را وابسته‌ی خطی گوییم.

رونسکین (دترمینان رونسکی) (wronskian): فرض کنیم توابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در نقطه‌ی x_0 مشتق پذیر باشند؛ رونسکین این توابع را در x_0 به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$W(y_1,y_2)(x_0):=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}=(y_1y_2'-y_2y_1')(x_0)$$

همچنین برای توابع y_1 تا y_n، رونسکین در نقطه‌ی x_0، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n)(x_0):=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

قضیه: توابع f و g مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر $W(f,g)\neq 0$.

نتیجه: توابع f و g وابسته‌ی خطی هستند اگر و تنها اگر $W(f,g)=0$.

مثال: $y_1(x)=e^{x}$ ، $y_2(x)=e^{2x}$:

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}=2e^{3x}-e^{3x}=e^{3x}\neq 0$$

y_1 ، y_2 مستقل خطی هستند.

قضیه (اصل برهم‌نهی یا انطباق جواب‌ها): فرض کنیم $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب برای معادله‌ی دیفرانسیل خطی و همگن زیر باشند:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (*)$$

در این صورت به ازای هر دو ثابت دلخواه c_1 ، c_2 ، عبارت $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ ، نیز جواب معادله است.

نکته: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ ، دو جواب مستقل خطی برای معادله‌ی $(*)$ باشند، آنگاه جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$y_g(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

همچنین با فرض این که $y_1(x)$ ، ... ، $y_n(x)$ ، n جواب مستقل خطی برای معادله‌ی $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ باشد، آنگاه جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$y_g(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$$

حل معادلات مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت؛ فرم کلی این معادلات به صورت $y''+py'+qy=0$ می باشد.

$(p,q\in\mathbb{R})$

با فرض این که $y=e^{\lambda x}$ جواب معادله‌ی فوق باشد، داریم: $(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$

پس باید داشته باشیم: $\underbrace{\lambda^2+p\lambda+q=0}_{\text{معادله‌ی مشخصه}}$

برای حل معادله‌ی مشخصه، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

1) $\Delta=p^2-4q>0$: معادله‌ی مشخصه دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز λ_1 و λ_2 می باشد. بنابراین $y_1(x)=e^{\lambda_1 x}$ و $y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$ دو جواب برای معادله‌ی (*) هستند. با توجه به این که $W(y_1,y_2)(x)=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2+\lambda_1)x}\neq 0$، y_1، y_2 مستقل خطی بوده و جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y_g(x)=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$$

2) $\Delta=p^2-4q<0$: معادله‌ی مشخصه دارای دو ریشه‌ی مختلط و متمایز $\lambda_1=\alpha+\beta i$ و $\lambda_2=\alpha-\beta i$ می باشد. در این حالت، $y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}$، $y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}$ دو جواب مختلط برای معادله‌ی (*) هستند. Y_1 و Y_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_1:=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x\ ,\quad Y_2:=\frac{y_1-y_2}{2}=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

طبق اصل انطباق، Y_1 و Y_2 نیز جواب های معادله هستند و با توجه به اینکه $W(Y_1,Y_2)(x)=\beta e^{2\alpha x}\neq0$، Y_1,Y_2 مستقل خطی بوده و جواب عمومی معادله‌ی (*) به صورت مقابل است:

$$y_g(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

3) $\Delta=p^2-4q=0$: معادله‌ی مشخصه دارای ریشه‌ی مضاعف $\lambda_1=\lambda_2=\lambda^*$ است؛ پس معادله‌ی (*) دارای جوابی به فرم $y_1(x)=e^{\lambda^* x}$ می باشد.

برای یافتن جواب دوم معادله‌ی (*) که مستقل خطی با y_1 باشد، از روش کاهش مرتبه استفاده می کنیم. به این منظور، فرض می کنیم $y_2(x)=r(x)y_1(x)$،

تابع $r(x)$ را به گونه‌ای می‌یابیم که y_2 جواب معادله‌ی (*) باشد:

$$y_2'=r'y_1+ry_1'$$
$$y_2''=r''y_1+2r'y_1'+ry_1''$$

$$\Rightarrow r''y_1+2r'y_1'+\boxed{ry_1''}+pr'y_1+\boxed{pry_1'}+\boxed{qry_1}=0$$

y_1 جواب معادله است ← مجموع این سه عبارت صفر است.

$$\Rightarrow r''y_1+2r'y_1'+pr'y_1=0 \xrightarrow{\div y_1} r''+2r'\frac{y_1'}{y_1}+pr'=0 \Rightarrow r''+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p\right)r'=0\Rightarrow r''=0\Rightarrow r(x)=ax+b$$

$(a,b\in\mathbb{R})$

صفر (علت: در این حالت خاص به علت آن که y' ریشه‌ی معادله است، $\Delta=p^2-4q=0$، داریم: $\frac{2y_1'}{y_1}+p=0$)

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2=c_1y_1+c_2ry_1=(c_1+c_2r)y_1=(c_1+ac_2x+bc_2)e^{\lambda^*x}=\underbrace{(c_1+bc_2)}_{k_1}e^{\lambda^*x}+\underbrace{ac_2}_{k_2}xe^{\lambda^*x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_g(x)=k_1e^{\lambda^*x}+k_2xe^{\lambda^*x}}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

1) $y''+5y'+6y=0$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^2+5\lambda+6=0$

$(\lambda+2)(\lambda+3)=0$ پس $\begin{cases}\lambda_1=-2\\ \lambda_2=-3\end{cases}$ پس $\boxed{y_g=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}}$

2) $y''-2y'+10y=0$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^2-2\lambda+10=0$

$\lambda_1,\lambda_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2\pm\sqrt{-36}}{2}=1\pm 3i$ پس $\boxed{y_g=e^{x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)}$

3) $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$ پس $(\lambda-\frac{1}{2})^2=0$ پس $\lambda_1=\lambda_2=\lambda^*=\frac{1}{2}$ پس $\boxed{y_g=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2xe^{\frac{1}{2}x}}$

روش کاهش مرتبه: با فرض این که $y_1(x)$ جوابی برای معادله‌ی $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد، جواب دوم معادله‌ی مذکور که مستقل خطی با y_1 باشد را می‌توان به صورت $y_2=r(x)y_1$ در نظر گرفت که با جایگذاری در معادله، داریم:

$$r''(x)+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p(x)\right)r'(x)=0 \xrightarrow[\frac{2y_1'}{y_1}+p(x)=Q(x)]{r'(x)=u(x)} u'(x)+Q(x)u(x)=0$$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول برحسب u

$$\mu(x):=e^{\int Q(x)\,dx} \text{ پس } \mu(x)=e^{2\ln(y_1)+\int p(x)dx}=y_1^2e^{\int p(x)dx} \text{ پس } u_g=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}(0+c)$$

$$\xrightarrow[u=r']{c=1} r'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx} \xrightarrow{\int dx} \boxed{r(x)=\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx} \xrightarrow[y_2=ry_1]{\text{فرمول آبل پس}} \boxed{y_2(x)=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx}$$

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2=c_1y_1+c_2y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx \text{ پس } \boxed{y_g(x)=y_1\left(c_1+c_2\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx\right)}$$

مثال: اولاً نشان دهید $y_1=\frac{1}{x}$ جوابی برای معادله‌ی زیر است و سپس جواب عمومی معادله را به دست آورید.

$$2x^2y''+3xy'-y=0$$

y_1 جوابی برای معادله است. $\Leftarrow$ $2x^2\times\frac{2}{x^3}+3x\times\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x}=0$: جایگذاری y_1 و مشتقاتش در معادله

$y''+\frac{3y'}{2x}-\frac{y}{2x^2}=0 \Rightarrow p(x)=\frac{3}{2x}$: طرفین معادله تقسیم بر $2x^2$

$r(x)=\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx=\int x^2e^{-\int\frac{3}{2x}dx}dx=\int x^2e^{-\frac{3}{2}\ln x}dx=\int x^2.x^{-\frac{3}{2}}dx=\int\sqrt{x}\,dx$: فرمول آبل

$$\Rightarrow r(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\xrightarrow[y_2=ry_1]{}y_2=\frac{2}{3}\sqrt{x}\Rightarrow \boxed{y_g=\frac{c_1}{x}+\frac{2}{3}c_2\sqrt{x}}$$

حل معادلات خطی و همگن از مرتبه‌ی n با ضرایب ثابت؛ فرم کلی این معادلات به صورت زیر است:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0 \qquad (a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R})$$

با فرض این که $e^{\lambda x}$ جواب معادله‌ی فوق باشد، داریم:

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0$$: معادله‌ی مشخصه

حالات زیر را روی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه در نظر می‌گیریم:

۱) فرض کنیم معادله‌ی مشخصه دارای n ریشه‌ی حقیقی و متمایز λ_1 تا λ_n باشد؛ در این صورت جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y_g=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}+\dots+c_ne^{\lambda_nx}$$

۲) فرض کنیم معادله‌ی مشخصه دارای n ریشه‌ی حقیقی باشد که m تای آن تکراری هستند؛ یعنی:

$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_m=\lambda^*$

$\lambda_{m+1},\lambda_{m+2},\dots,\lambda_n$ متمایز

$\Rightarrow$ جواب عمومی معادله: $y_g=(c_1+c_2x+\dots+c_mx^{m-1})e^{\lambda^*x}+c_{m+1}e^{\lambda_{m+1}x}+\dots+c_ne^{\lambda_nx}$

۳) فرض کنیم معادله‌ی مشخصه دارای ۲ ریشه‌ی مختلط غیرتکراری $\lambda_1=\alpha+\beta i$ ، $\lambda_2=\alpha-\beta i$ باشد؛ در این صورت، جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$y_g=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)+$ جواب های متناظر با سایر ریشه‌ها

۴) فرض کنیم معادله‌ی مشخصه دارای m ریشه‌ی مختلط تکراری باشد:

$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_m=\alpha+\beta i$

$\lambda_{m+1}=\lambda_{m+2}=\dots=\lambda_{2m}=\alpha-\beta i$

$\lambda_{2m+1},\dots,\lambda_n$ متمایز

در این حالت جواب عمومی به صورت زیر است:

$y_g=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)+xe^{\alpha x}(c_3\cos\beta x+c_4\sin\beta x)+\dots+x^{m-1}e^{\alpha x}(c_{2m-1}\cos\beta x+c_{2m}\sin\beta x)$

+ جواب‌های متناظر با سایر ریشه‌ها

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $y^{(3)} - 2y'' - 3y' = 0$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$ پس $\lambda(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$ پس $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$ پس $\boxed{y_g = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}}$

۲) $y^{(3)} - y'' = 0$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ پس $\lambda^2(\lambda - 1) = 0$ پس $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$ پس $\boxed{y_g = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x}}$

۳) $y^{(3)} - 4y'' + 5y' = 0$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = 0$ پس $\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$ پس $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2, \lambda_3 = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm 2i \end{cases}$

پس $\boxed{y_g = c_1 + e^{2x}(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)}$

۴) $y^{(4)} - y = 0$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^4 - 1 = 0$ پس $\begin{cases} \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i \end{cases}$ پس $\boxed{y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x}$

۵) $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0$ پس $\lambda^4(\lambda^2+1) - (\lambda^2+1) = 0$ پس $(\lambda^4 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$ پس $\begin{cases} \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i \\ \lambda_5 = i, \lambda_6 = -i \end{cases}$

پس $\boxed{y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + x(c_5 \cos x + c_6 \sin x)}$

حل معادلات خطی ناهمگن از مرتبه‌ی n: با فرض این که $y_p(x)$ جوابی برای معادله‌ی زیر باشد:

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=r(x) \quad (*)$$

و $y(x)$ نیز جواب دلخواهی برای همین معادله باشد، واضح است که $y(x)-y_p(x)$ جواب عمومی معادله‌ی همگن نظیر آن می‌باشد؛ پس داریم:

$$\underbrace{y_G(x)}_{\text{جواب عمومی معادله‌ی }(*)}=\underbrace{y_g(x)}_{\text{جواب عمومی برای فرم همگن معادله‌ی }(*)}+\underbrace{y_p(x)}_{\text{جواب خصوصی معادله‌ی }(*)}$$

برای یافتن $y_p(x)$ از دو روش تغییر پارامتر و ضرایب نامعین استفاده می‌کنیم.

روش تغییر پارامتر: فرض کنیم $y_g=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ جواب عمومی فرم همگن معادله‌ی $(*)$ باشد؛ در این روش فرض می‌کنیم که

$$y_p(x)=u_1(x)y_1+u_2(x)y_2+\cdots+u_n(x)y_n$$

و توابع $u_1(x)$ تا $u_n(x)$ را به گونه‌ای می‌یابیم که $y_p(x)$ در معادله‌ی $(*)$ صدق کند.

$$y_p'=u_1'y_1+\cdots+u_n'y_n+u_1y_1'+\cdots+u_ny_n'$$

فرض کنیم $u_1'y_1+\cdots+u_n'y_n=0$؛

$$y_p''=u_1'y_1'+\cdots+u_n'y_n'+u_1y_1''+\cdots+u_ny_n''$$

فرض کنیم $u_1'y_1'+\cdots+u_n'y_n'=0$ و به همین ترتیب با ادامه‌ی این فرآیند، داریم:

$$y_p^{(n-1)}=u_1'y_1^{(n-2)}+\cdots+u_n'y_n^{(n-2)}+u_1y_1^{(n-1)}+\cdots+u_ny_n^{(n-1)}$$

فرض کنیم $u_1'y_1^{(n-2)}+\cdots+u_n'y_n^{(n-2)}=0$؛

$$y_p^{(n)}=u_1'y_1^{(n-1)}+\cdots+u_n'y_n^{(n-1)}+u_1y_1^{(n)}+\cdots+u_ny_n^{(n)}$$

با جایگذاری y_p، y_p'، ...، $y_p^{(n)}$ در معادله‌ی $(*)$، داریم:

$$u_1'y_1^{(n-1)}+\cdots+u_n'y_n^{(n-1)}=r(x)$$

پس یک دستگاه n معادله و n مجهول به صورت زیر داریم:

1) $u_1'y_1+\cdots+u_n'y_n=0$

2) $u_1'y_1'+\cdots+u_n'y_n'=0$

$\vdots$

n-1) $u_1'y_1^{(n-2)}+\cdots+u_n'y_n^{(n-2)}=0$

n) $u_1'y_1^{(n-1)}+\cdots+u_n'y_n^{(n-1)}=r(x)$

با استفاده از روش کرامر می‌توان نوشت: $u'_m(x)=\dfrac{W_m(x)}{W(x)}$

$(m=1,2,\dots,n)$

که در آن

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n\\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}\neq 0$$

، $W_m(x)$ همان $W(x)$ است که ستون m اُم آن، با بردار $\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ r(x)\end{bmatrix}_{n\times1}$ جایگزین شده است.

در نهایت داریم:

$$u_m(x)=\int \frac{W_m(x)}{W(x)}\,dx$$

مثال 3: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y''+2y'+y=e^{-x}\ln x$$

y_g: $y''+2y'+y=0$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda^*=-1 \Rightarrow y_g=c_1\underbrace{e^{-x}}_{y_1}+c_2\underbrace{xe^{-x}}_{y_2}$ (*)

y_p: $y_p=u_1y_1+u_2y_2=u_1e^{-x}+u_2xe^{-x}$ (A)

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x}\\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x}\end{vmatrix}=e^{-2x},\quad W_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x}\\ e^{-x}\ln x & (1-x)e^{-x}\end{vmatrix}=-x\ln x\, e^{-2x},\quad W_2(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & 0\\ -e^{-x} & e^{-x}\ln x\end{vmatrix}=e^{-2x}\ln x$$

$$u_1(x)=\int\frac{W_1(x)}{W(x)}dx=\int -x\ln x\,dx=\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x \text{ (B)},\quad u_2(x)=\int\frac{W_2(x)}{W(x)}dx=\int\ln x\,dx=x\ln x-x \text{ (C)}$$

$$\xrightarrow{A,B,C} y_p=\frac{1}{2}x^2e^{-x}\left(\frac{1}{2}-\ln x\right)+x^2e^{-x}(\ln x-1) \Rightarrow y_p=x^2e^{-x}\left(\frac{1}{2}\ln x-\frac{3}{4}\right) \text{ (**)}$$

y_G: $y_G=y_g+y_p \xrightarrow{(*),(**)} \boxed{y_G=e^{-x}\left(c_1+c_2x+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)}$

Scanned by CamScanner

مثال: نشان دهید $y_1=x$, $y_2=x^2$ جواب های معادله‌ی $x^2y''-2xy'+2y=0$ هستند و سپس جواب عمومی معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$x^2y''-2xy'+2y=\frac{4}{x}$$

y_1 و y_2 و مشتقاتشان در معادله صدق می‌کنند $\leftarrow$ جواب های معادله هستند

با توجه به این که y_1 ، y_2 مستقل خطی هستند و معادله‌ی اولیه در واقع فرم همگن معادله‌ی ثانویه است، داریم:

$$(*)\quad y_g=c_1x+c_2x^2$$

$$y_p:\quad y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=\frac{4}{x^3} \Rightarrow r(x)=\frac{4}{x^3}\ ,\ y_p=u_1x+u_2x^2\ \text{(A)}$$

$$w(x)=\begin{vmatrix} x & x^2\\ 1 & 2x\end{vmatrix}=x^2\ ,\ w_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & x^2\\ \frac{4}{x^3} & 2x\end{vmatrix}=\frac{-4}{x}\ ,\ w_2(x)=\begin{vmatrix} x & 0\\ 1 & \frac{4}{x^3}\end{vmatrix}=\frac{4}{x^2}$$

$$u_1(x)=\int\frac{w_1(x)}{w(x)}dx=\int\frac{-4}{x^3}dx=\frac{2}{x^2}\ \text{(B)}\ ,\ u_2(x)=\int\frac{w_2(x)}{w(x)}dx=\int\frac{4}{x^4}dx=\frac{-2}{x^3}\ \text{(C)}$$

$$\xrightarrow{\text{(A)},\text{(B)},\text{(C)}} y_p=\frac{2}{x}+\frac{-2}{x}=\frac{1}{x}\ (**)$$

$$y_G:\quad y_G=y_g+y_p \xRightarrow[(**)]{(*)} \boxed{y_G=c_1x+c_2x^2+\frac{1}{x}}$$

مثال: جواب عمومی معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$y^{(3)}-2y''+y'=e^x$$

$$y_g:\quad \lambda^3-2\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=\lambda_3=\overset{*}{\lambda}=1 \Rightarrow y_g(x)=c_1+c_2e^x+c_3xe^x\ (*)$$

y_p:

$$w(x)=\begin{vmatrix} 1 & e^x & xe^x\\ 0 & e^x & (x+1)e^x\\ 0 & e^x & (x+2)e^x\end{vmatrix}\ ,\ w_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & e^x & xe^x\\ 0 & e^x & (x+1)e^x\\ e^x & e^x & (x+2)e^x\end{vmatrix}\ ,\ w_2(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & xe^x\\ 0 & 0 & (x+1)e^x\\ 0 & e^x & (x+2)e^x\end{vmatrix}\ ,\ w_3(x)=\begin{vmatrix} 1 & e^x & 0\\ 0 & e^x & 0\\ 0 & e^x & e^x\end{vmatrix}$$

$$w(x)=e^{2x}\qquad w_1(x)=e^{3x}\qquad w_2(x)=-(x+1)e^{2x}\qquad w_3(x)=e^{2x}$$

$$y_p=u_1+u_2e^x+u_3xe^x\ \text{(A)}\ ,\ u_1(x)=\int\frac{w_1}{w}dx=\int e^xdx=e^x\ \text{(B)}\ ,\ u_2(x)=\int\frac{w_2}{w}dx=-(\frac{x^2}{2}+x)\ \text{(C)}\ ,\ u_3(x)=\int\frac{w_3}{w}dx=x\ \text{(D)}$$

$$\xrightarrow{\text{(A)},\text{(B)},\text{(C)},\text{(D)}} y_p=e^x-(\frac{x^2}{2}+x)e^x+x^2e^x=(\frac{x^2}{2}-x+1)e^x\ (**)$$

$$y_G:\quad y_G=y_g+y_p \xrightarrow{(*),(**)} y_G=c_1+c_2e^x+c_3xe^x+(\frac{x^2}{2}-x+1)e^x=\underset{k_1}{c_1}+\overset{k_2}{(c_2+1)}e^x+\overset{k_3}{(c_3-1)}xe^x+\frac{x^2}{2}e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{y_G=(k_1e^{-x}+k_2+k_3x+\frac{x^2}{2})e^x}$$

روش ضرایب نامعین: از این روش فقط برای پیدا کردن جواب خصوصی معادلاتی استفاده می‌شود که خطی با ضرایب ثابت باشند و تابع سمت راست معادله، از جنس توابع خوب (چند جمله‌ای ها، توابع نمایی، توابع مثلثاتی و ...) باشد.

$$y^{(n)}+a_{(n-1)}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=r(x) \quad (*)$$

حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) فرض کنیم $r(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد:

$$r(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n$$

در این حالت، y_p را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y_p(x)= \text{کامل از درجه‌ی } n \text{ چند جمله‌ای } \times x^m$$

که m تعداد ریشه‌های صفر معادله‌ی مشخصه است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

a) $y''+2y'+y=x^2+1$

y_g: $\lambda^2+2\lambda+1=0 \rightsquigarrow (\lambda+1)^2=0 \rightsquigarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda^*=-1 \rightsquigarrow y_g(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x} \quad (*)$

y_p: $y_p(x)=Ax^2+Bx+C \rightsquigarrow y_p'(x)=2Ax+B \rightsquigarrow y_p''(x)=2A$

جایگذاری در معادله: $2A+4Ax+2B+Ax^2+Bx+C=x^2+1 \rightsquigarrow \boxed{A=1} \rightsquigarrow 2+4x+2B+x^2+Bx+C=x^2+1$

$\rightsquigarrow \boxed{B=-4} \rightsquigarrow 2+4x-8+x^2-4x+C=x^2+1 \rightsquigarrow \boxed{C=7} \rightsquigarrow y_p(x)=x^2-4x+7 \quad (**)$

y_G: $y_G(x)=y_g(x)+y_p(x) \xrightsquigarrow[(**)]{(*)} \boxed{y_G(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x^2-4x+7}$

b) $y''-y'=2x$

y_g: $\lambda^2-\lambda=0 \rightsquigarrow \lambda(\lambda-1)=0 \rightsquigarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=1\end{cases} \rightsquigarrow y_g(x)=c_1+c_2e^{x} \quad (*)$

y_p: $y_p(x)=x(Ax+B)=Ax^2+Bx \rightsquigarrow y_p'(x)=2Ax+B \rightsquigarrow y_p''(x)=2A$

جایگذاری در معادله: $2A-2Ax-B=2x \rightsquigarrow \boxed{A=-1} \rightsquigarrow -2+2x-B=2x \rightsquigarrow \boxed{B=-2} \rightsquigarrow y_p(x)=-x^2-2x \quad (**)$

y_G: $y_G(x)=y_g(x)+y_p(x) \xrightsquigarrow[(**)]{(*)} \boxed{y_G(x)=c_1+c_2e^{x}-x^2-2x}$

c) $y^{(3)}-y''=x^3+1$

y_g: $\lambda^3-\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=\lambda^*=0\\ \lambda_3=1\end{cases} \Rightarrow \boxed{y_g(x)=C_1+C_2x+C_3e^x}$ (*)

y_p: $y_p(x)=x^2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2 \Rightarrow y_p'(x)=5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx$

$\Rightarrow y_p''(x)=20Ax^3+12Bx^2+6Cx+2D \Rightarrow y_p'''(x)=60Ax^2+24Bx+6C$

جایگذاری در معادله: $60Ax^2+24Bx+6C-20Ax^3-12Bx^2-6Cx-2D=x^3+1 \Rightarrow \boxed{A=\frac{-1}{20}}$

$\Rightarrow -3x^2+24Bx+6C-12Bx^2-6Cx-2D=1 \Rightarrow \boxed{B=\frac{-1}{4}} \Rightarrow -6x+6C-6Cx-2D=1 \Rightarrow \boxed{C=-1}$

$\Rightarrow -6-2D=1 \Rightarrow \boxed{D=\frac{-7}{2}} \Rightarrow \boxed{y_p(x)=-\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{7}{2}x^2}$ (**)

y_G: $y_G(x)=y_g(x)+y_p(x) \xRightarrow[(**)]{(*)} \boxed{y_G(x)=C_1+C_2x+C_3e^x-\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{7}{2}x^2}$

۲) فرض کنیم $r(x)$ به فرم $M(x)e^{px}$ باشد که در آن، $M(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n، p یک عدد ثابت است. در این حالت، y_p به فرم زیر درنظرگرفته می‌شود:

$y_p(x)=$ چند جمله‌ای کامل از درجه‌ی n $\times e^{px}\times x^m$

که در آن، m= تعداد ریشه‌های $\lambda=p$ برای معادله‌ی مشخصه است.

مثال ۵ معادلات زیر را حل کنید.

a) $y''-7y'+6y=(x-2)e^x$

y_g: $\lambda^2-7\lambda+6=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-6)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=6\end{cases} \Rightarrow y_g(x)=c_1e^x+c_2e^{6x}$ (*)

y_p: $y_p(x)=(Ax+B)e^x\times x=(Ax^2+Bx)e^x \Rightarrow y_p'(x)=(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x$

$\Rightarrow y_p''(x)=(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x$

جایگذاری در معادله: $(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x+(-7Ax^2+(-14A-7B)x-7B)e^x+(6Ax^2+6Bx)e^x=(x-2)e^x$

$\Rightarrow (4A+B-14A-7B+6B)x+2A+2B-7B=x-2 \Rightarrow \boxed{A=\frac{-1}{10}} \Rightarrow -\frac{1}{5}-5B=-2 \Rightarrow \boxed{B=\frac{9}{25}}$

$\Rightarrow y_p(x)=(\frac{-1}{10}x^2+\frac{9}{25}x)e^x$ (**)

y_G: $y_G(x)=y_g(x)+y_p(x) \xRightarrow[(**)]{(*)} \boxed{y_G(x)=c_1e^x+c_2e^{6x}+(\frac{-1}{10}x^2+\frac{9}{25}x)e^x}$

b) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$

y_g: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^* = 2 \Rightarrow y_g(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ (*)

y_p: $y_p(x) = Ae^{2x} \times x^2 = Ax^2 e^{2x} \Rightarrow y_p'(x) = (2Ax^2 + 2Ax)e^{2x} \Rightarrow y_p''(x) = (4Ax^2 + 8Ax + 2A)e^{2x}$

جایگذاری در معادله: $(4Ax^2 + 8Ax + 2A)\cancel{e^{2x}} + (-8Ax^2 - 8Ax)\cancel{e^{2x}} + 4Ax^2\cancel{e^{2x}} = 3\cancel{e^{2x}} \Rightarrow 2A = 3 \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{2}}$

$\Rightarrow y_p(x) = \frac{3}{2}x^2 e^{2x}$ (**)

y_G: $y_G(x) = y_g(x) + y_p(x) \xRightarrow[(*)]{(**)} \boxed{y_G(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}}$

c) $y^{(4)} + y^{(3)} + y'' = (x^2+3)e^{-x} + 4x$

y_g: $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^* = 0 \\ \lambda_3, \lambda_4 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \Rightarrow y_g(x) = c_1 + c_2 x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$ (*)

y_p: $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x} + (Dx + E) \times x^2 = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x} + Dx^3 + Ex^2$

$y_p'(x) = (-Ax^2 + (2A-B)x + B - C)e^{-x} + 3Dx^2 + 2Ex$

$y_p''(x) = (Ax^2 + (-4A+B)x + 2A - 2B + C)e^{-x} + 6Dx + 2E$

$y_p^{(3)}(x) = (-Ax^2 + (6A-B)x - 6A + 3B - C)e^{-x} + 6D$

$y_p^{(4)}(x) = (Ax^2 + (-8A+B)x + 12A - 4B + C)e^{-x}$

جایگذاری در معادله: $(Ax^2 + (-6A+B)x + 8A - 3B + C)e^{-x} + 6Dx + 6D + 2E = (x^2+3)e^{-x} + 4x \Rightarrow \boxed{A=1}$

$\Rightarrow ((B-6)x + 8 - 3B + C)e^{-x} + 6Dx + 6D + 2E = 3e^{-x} + 4x \Rightarrow \boxed{B=6}$

$\Rightarrow (C-10)e^{-x} + 6Dx + 6D + 2E = 3e^{-x} + 4x \Rightarrow \boxed{C=13}, \boxed{D=\frac{2}{3}} \Rightarrow 4 + 2E = 0 \Rightarrow \boxed{E=-2}$

$\Rightarrow y_p(x) = (x^2 + 6x + 13)e^{-x} + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$ (**)

y_G: $y_G(x) = y_g(x) + y_p(x) \xRightarrow[(*)]{(**)} \boxed{y_G(x) = c_1 + c_2 x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + (x^2 + 6x + 13)e^{-x} + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2}$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = r(x)$$

۳) فرض کنیم $r(x) = M(x)\cos(qx) + N(x)\sin(qx)$ که در آن، $M(x)$ و $N(x)$ به ترتیب چند جمله‌ای‌هایی از درجات m و n می‌باشند. در این حالت $y_p(x)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$y_p(x) = x^t\left(R(x)\cos(qx) + S(x)\sin(qx)\right)$$

که در آن، $S(x)$ ، $R(x)$ ، دو چند جمله‌ای کامل از درجه‌ی $\max\{m,n\}$ می‌باشند و t تعداد ریشه‌های qi در معادله‌ی مشخصه است.

مثال ۸) معادلات زیر را حل کنید.

a) $y'' + 4y = \cos 5x$

y_g: $\lambda^2 + 4 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1, \lambda_2 = \pm 2i \rightsquigarrow y_g = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x \quad (*)$

y_p: $y_p(x) = A\cos 5x + B\sin 5x \rightsquigarrow y_p'(x) = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x \rightsquigarrow y_p''(x) = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$

جایگذاری در معادله: $-21A\cos 5x - 21B\sin 5x = \cos 5x \rightsquigarrow \boxed{A = \frac{-1}{21}}, \boxed{B = 0} \rightsquigarrow y_p(x) = \frac{-1}{21}\cos 5x \quad (**)$

y_G: $y_G(x) = y_g(x) + y_p(x) \xrightarrow[(*)]{(**)} \boxed{y_G(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{21}\cos 5x}$

b) $y'' + 4y = x^2\sin 2x$

y_g: $\lambda^2 + 4 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1, \lambda_2 = \pm 2i \rightsquigarrow y_g(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x \quad (*)$

y_p: $y_p(x) = x\left((Ax^2+Bx+C)\cos 2x + (Dx^2+Ex+F)\sin 2x\right) = (Ax^3+Bx^2+Cx)\cos 2x + (Dx^3+Ex^2+Fx)\sin 2x$

$$y_p'(x) = (2Dx^3 + (3A+2E)x^2 + (2B+2F)x + C)\cos 2x + (-2Ax^3 + (3D-2B)x^2 + (2E-2C)x + F)\sin 2x$$

$$y_p''(x) = (-4Ax^3 + (-4B+12D)x^2 + (6A-4C+8E)x + 2B+4F)\cos 2x$$
$$+ (-4Dx^3 + (-12A-4E)x^2 + (-8B+6D-4F)x - 4C + 2E)\sin 2x$$

جایگذاری در معادله: $(12Dx^2 + (6A+8E)x + 2B+4F)\cos 2x + (-12Ax^2 + (-8B+6D)x - 4C+2E)\sin 2x = x^2\sin 2x$

$\rightsquigarrow \boxed{A = \frac{-1}{12}}, \boxed{D=0} \rightsquigarrow \left((-\frac{1}{2} + 8E)x + 2B + 4F\right)\cos 2x + (-8Bx - 4C + 2E)\sin 2x = 0 \rightsquigarrow \boxed{B=0}, \boxed{E = \frac{1}{16}}$

$\rightsquigarrow 4F\cos 2x + (\frac{1}{8} - 4C)\sin 2x = 0 \rightsquigarrow \boxed{C = \frac{1}{32}}, \boxed{F=0} \rightsquigarrow y_p(x) = (\frac{-1}{12}x^3 + \frac{1}{32}x)\cos 2x + \frac{1}{16}x^2\sin 2x \quad (**)$

y_G: $y_G(x) = y_g(x) + y_p(x) \xrightarrow[(*)]{(**)} \boxed{y_G(x) = (\frac{-1}{12}x^3 + \frac{1}{32}x + c_1)\cos 2x + (\frac{1}{16}x^2 + c_2)\sin 2x}$

۱۴) فرض کنیم $r(x)$ در معادله‌ی (*) به‌صورت زیر باشد:

$$r(x)=e^{px}\left(M(x)\cos(qx)+N(x)\sin(qx)\right)$$

که در آن، $M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله‌ای از درجات m, n می‌باشند، p و q دو پارامتر دلخواه هستند. در این حالت y_p به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$y_p(x)=e^{px}\left(R(x)\cos(qx)+S(x)\sin(qx)\right)x^t$$

که $R(x)$، $S(x)$، دو چندجمله‌ای کامل از درجه‌ی $\max\{m,n\}$ هستند، t تعداد دفعات تکرار ریشه‌ی $p+qi$ در معادله مشخصه است.

مثال 8: فرم جواب خصوصی معادلات زیر را به‌دست آورید.

a) $y''-4y'+5y=(x+2)e^{2x}\sin x$

y_g: $\lambda^2-4\lambda+5=0 \rightsquigarrow \lambda_1,\lambda_2=2\pm i \rightsquigarrow y_g(x)=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

$$y_p:=(Ax+B)e^{2x}(C\cos x+D\sin x)x=(Ax^2+Bx)e^{2x}(C\cos x+D\sin x)$$

b) $\lambda^2(\lambda^2+1)^3(\lambda-2)^2=0 \longrightarrow \begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=i\\ \lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=-i\\ \lambda_9=\lambda_{10}=2\end{cases}$

$$r(x)=\underbrace{x}_{r_1(x)}+\underbrace{(x+3)\sin x}_{r_2(x)}+\underbrace{x^2e^{2x}}_{r_3(x)}$$

$$y_g(x)=c_1+c_2x+(c_3x^2+c_4x+c_5)\cos x+(c_6x^2+c_7x+c_8)\sin x+c_9e^{2x}+c_{10}xe^{2x}$$

(مرتبط با $r_1(x)$) $y_{p_1}(x)=(A_1x+A_2)x^2=A_1x^3+A_2x^2$

(مرتبط با $r_2(x)$) $y_{p_2}(x)=\left((\alpha_1x+\alpha_2)\cos x+(\beta_1x+\beta_2)\sin x\right)x^3=(\alpha_1x^4+\alpha_2x^3)\cos x+(\beta_1x^4+\beta_2x^3)\sin x$

(مرتبط با $r_3(x)$) $y_{p_3}(x)=(B_1x^2+B_2x+B_3)e^{2x}\times x^2=(B_1x^4+B_2x^3+B_3x^2)e^{2x}$

$$y_p(x)=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}=A_1x^3+A_2x^2+(\alpha_1x^4+\alpha_2x^3)\cos x+(\beta_1x^4+\beta_2x^3)\sin x+(B_1x^4+B_2x^3+B_3x^2)e^{2x}$$

بررسی چند حالت خاص در معادلات مرتبه دوم و بالاتر :

۱) فرض کنیم معادله ی دیفرانسیل مرتبه n ام به فرم زیر باشد :

$$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (m<n)$$

معادلات فوق را می توان با تغییر متغیر $p(x) := y^{(m)}(x)$ ، به معادله ای با مرتبه ی $n-m$ تبدیل نمود.

مثال : معادله ی زیر را حل کنید.

$$\left.\begin{array}{l} xy^{(4)} - y^{(3)} = 0 \\ p(x) := y^{(3)}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow xp' - p = 0 \Rightarrow x\frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \ln p = \ln x + \ln c_1$$

$$\Rightarrow p = c_1 x \Rightarrow y^{(3)} = c_1 x \xrightarrow{\int} y'' = \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 \xrightarrow{\int} y' = \frac{c_1}{6}x^3 + c_2 x + c_3$$

$$\xrightarrow{\int} y = \underbrace{\frac{c_1}{24}}_{c_5}x^4 + \underbrace{\frac{c_2}{2}}_{c_6}x^2 + c_3 x + c_4 \Rightarrow \boxed{y_g(x) = c_5 x^4 + c_6 x^2 + c_3 x + c_4}$$

۲) فرض کنیم معادله به صورت زیر باشد :

$$F(y, y', y'') = 0$$

با تغییر متغیر $y' = p$ ، معادله به صورت $f(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$ در می آید که با حل آن ، p برحسب y به صورت $p = g(y)$ حاصل می شود ،

با حل این معادله ، y برحسب x بدست می آید.

مثال : معادله ی زیر را حل کنید.

$$\left.\begin{array}{l} yy'' + (y+1)y'^2 = 0 \\ p := y' \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy} \end{array}\right\} \Rightarrow yp\frac{dp}{dy} + (y+1)p^2 = 0$$

a) $p \neq 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} + (y+1)p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{(y+1)dy}{y} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -(1+\frac{1}{y})dy \xrightarrow{\int} \ln p = -y - \ln y + c_1$$

$$\Rightarrow py = c_2 e^{-y} \Rightarrow \frac{1}{p} = c_3 y e^{y} \Rightarrow dx = c_3 y e^{y} dy$$

$$\xrightarrow{\int} x + c_4 = c_3(y-1)e^{y} \Rightarrow \boxed{c_5 x + c_6 = (y-1)e^{y}}$$ جواب عمومی

b) $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \boxed{y = c}$ جواب صنفرد

۳) معادلاتی به فرم $F(x,y,y',y'')=0$ را همگن گوییم هرگاه $F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^n F(x,y,y',y'')$.

در این صورت با تغییر متغیر $y=e^{\int z(x)dx}$ ، معادله تبدیل به یک معادله‌ی مرتبه اول برای تابع $z(x)$ می‌شود.

$$y'=z(x)e^{\int z(x)dx}=z.y \quad , \quad y''=z'y+zy'=z'y+z^2y=(z'+z^2)y$$

مثال 8) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$yy''-y'^2-6xy^2=0$$

معادله همگن است

$$F(x,y,y',y''):=yy''-y'^2-6xy^2 \Rightarrow F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^2 F(x,y,y',y'') \Rightarrow$$

$$y=e^{\int z(x)dx} \Rightarrow y'=z(x)e^{\int z(x)dx}=zy \Rightarrow y''=(z'+z^2)y$$

جایگذاری در معادله: $(z'+z^2)y^2-z^2y^2-6xy^2=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y^2=0 \Rightarrow \boxed{y=0} & \text{جواب غیرعادی (منفرد)} \\ z'+z^2-z^2-6x=0 \Rightarrow z'=6x \xrightarrow{\int} z(x)=3x^2+C_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=e^{\int z(x)dx}=e^{\int(3x^2+C_1)dx}=e^{x^3+C_1x+C_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_g(x)=C_2e^{x^3+C_1x}}$$ جواب عمومی

معادله‌ی $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=f(x)$ را کامل گوییم هرگاه: $P''-Q'+R=0$

در این صورت داریم: $\frac{d}{dx}\left(P(x)y'+(Q(x)-P'(x))y\right)=f(x)$

$\xrightarrow{\int}$ $P(x)y'+(Q(x)-P'(x))y=\int f(x)dx+c_1$ خطی مرتبه اول برحسب y

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(x^2-2x)}_{P}y''+\underbrace{4(x-1)}_{Q}y'+\underbrace{2}_{R}y=e^{2x}$$

$P''-Q'+R=2-4+2=0 \longrightarrow$ معادله کامل است $\to \frac{d}{dx}\left((x^2-2x)y'+(4x-4-2x+2)y\right)=e^{2x}$

$$\xrightarrow{\int}(x^2-2x)y'+(2x-2)y=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1 \to y'+\underbrace{\frac{2x-2}{x^2-2x}}_{p(x)}y=\underbrace{\frac{e^{2x}+c_1}{2(x^2-2x)}}_{q(x)}$$

خطی مرتبه اول برحسب y

$$\mu(x):=e^{\int p(x)dx}=e^{Ln(x^2-2x)}=x^2-2x$$

$$y_g=\frac{1}{\mu}\left(\int \mu q\,dx+c\right)=\frac{1}{x^2-2x}\left(\frac{1}{2}\int(e^{2x}+c_1)dx+c\right)=\frac{1}{x^2-2x}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}c_1x+c\right)$$

$$\to \boxed{y_g=\frac{1}{x^2-2x}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+c_2x+c\right)}$$

معادله‌ی کوشی-اویلر: معادله‌ی کوشی-اویلر از مرتبه‌ی n، به صورت زیر است:

$$\underbrace{x^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1xy'+a_0y=0}_{(I)}$$ یا $$(ax+b)^ny^{(n)}+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1(ax+b)y'+a_0y=0 \quad (II)$$

که در آن a، b، a_i ها اعداد ثابت هستند.

با تغییر متغیر $x=e^t$، می‌توان معادله‌ی کوشی-اویلر به فرم (I) را به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل نمود.

(تغییر متغیر $ax+b=e^t$، برای فرم (II) به کار می‌رود.)

حالت خاص معادله‌ی کوشی-اویلر: معادله‌ی کوشی-اویلر مرتبه ۲:

$$x^2y''+a_1xy'+a_0y=q(x) \quad (1)$$

$$e^t:=x \to t=Ln x$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{Dy}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot Dy \to y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=\frac{-1}{x^2}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{Dy}+\frac{1}{x}\cdot\overbrace{\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\frac{1}{x}}\cdot\frac{dy}{dt}}^{D^2y}=\frac{1}{x^2}(D^2y-Dy)$$

$$xy'=Dy \quad (2)$$

$$x^2y''=D(D-1)y \quad (3)$$

معادله‌ی به دست آمده به صورت $\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_0y=q(x)$ $(*)$ می‌باشد.

معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط به همگن معادله‌ی $(*)$ به صورت $\lambda^2+(a_1-1)\lambda+a_0=0$ می‌باشد که حالات زیر را برای ریشه‌های آن در نظر می‌گیریم:

۱) $(\Delta>0)$: λ_1 و λ_2 ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله‌ی مشخصه باشند:

$$y_g=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}\xrightarrow{x=e^t}\boxed{y_g=c_1x^{\lambda_1}+c_2x^{\lambda_2}}$$

۲) $(\Delta=0)$: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda^*$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی مشخصه باشد:

$$y_g=c_1e^{\lambda^* t}+c_2te^{\lambda^* t}\xrightarrow{x=e^t}\boxed{y_g=c_1x^{\lambda^*}+c_2\ln x\cdot x^{\lambda^*}}$$

۳) $(\Delta<0)$: $\lambda_1=\alpha+\beta i$, $\lambda_2=\alpha-\beta i$ ریشه‌های مختلط معادله‌ی مشخصه باشند:

$$y_g=e^{\alpha t}(c_1\cos(\beta t)+c_2\sin(\beta t))\xrightarrow{t=\ln x}\boxed{y_g=x^{\alpha}(c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\sin(\beta\ln x))}$$

توجه: معادله‌ی کوشی-اویلر برای $x>0$ برقرار است؛ اگر $x<0$ باشد، η را به صورت $\eta=-x$ تعریف می‌کنیم و ادامه‌ی ماجرا...!

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$t^3y''-2ty=4\ln t\xrightarrow{\div t}t^2y''-2y=\frac{4\ln t}{t}$$

معادله‌ی کوشی-اویلر ناهمگن از مرتبه‌ی ۲

y_g: $t^2y''-2y=0$

$$t=e^x\xrightarrow{D=\frac{d}{dx}}t^2y''=D(D-1)y\Big\}\to(D^2-D-2)y=0$$

معادله‌ی مشخصه: $\lambda^2-\lambda-2=0\to\begin{cases}\lambda_1=2\\\lambda_2=-1\end{cases}$

$$\to y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}=c_1t^2+c_2t^{-1}$$

y_p: $(D^2-D-2)y=4xe^{-x}\to y_p=x(Ax+B)e^{-x}=(Ax^2+Bx)e^{-x}$

$$\to y_p'=(-Ax^2+(2A-B)x+B)e^{-x}\to y_p''=(Ax^2+(B-4A)x+2A-2B)e^{-x}$$

$\frac{dy}{dx}=Dy$ $\qquad$ $\frac{d^2y}{dx^2}=D^2y$

$$(D^2-D-2)y_p=(-6Ax+2A-3B)e^{-x}=4xe^{-x}\to A=-1,\ B=-\frac{2}{3}\to y_p=-(x^2+\frac{2}{3}x)e^{-x}=-(\ln^2t+\frac{2}{3}\ln t)\frac{1}{t}$$

$$\boxed{y_G=y_g+y_p=c_1t^2+\frac{c_2}{t}+\frac{-\ln^2t-\frac{2}{3}\ln t}{t}}$$

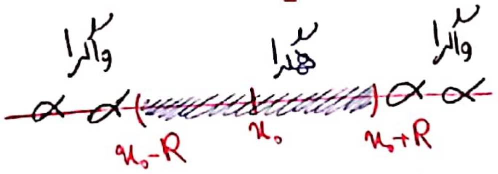
پایان مباحث میانترم - فروردین ۹۸

مرتضی عشری
دانشجوی مهندسی مکانیک
پلی تکنیک تهران

سری توانی: فرض کنیم a_n دنباله‌ای در اعداد حقیقی و $x_0\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد؛ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ را یک سری توانی حول x_0 گوییم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$$

شعاع همگرایی: $R\geq 0$ را شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ گوییم، هرگاه سری به ازای $\underbrace{|x-x_0|<R}_{\text{بازه‌ی همگرایی}}$ همگرا و به ازای $|x-x_0|>R$ واگرا باشد.



$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

توجه: ① به ازای $x=x_0\pm R$، نمی‌توان درباره‌ی همگرایی یا واگرایی سری اظهار نظر کرد.

② اگر $R=0$ $\leftarrow$ سری فقط به ازای $x=x_0$ همگراست.

③ اگر $R=\infty$ $\leftarrow$ سری به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ همگراست.

مثال: شعاع و بازه‌ی همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n n}_{a_n}(x-1)^n$ را حساب کنید. ($x_0=1$)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{(-1)^{n+1}(n+1)}\right| = 1 \rightarrow |x-1|<1 \quad ①$$

$$\text{if } x=0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$ واگرا ②

$$\text{if } x=2 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^n n}_{b_n}$$ $\lim_{n\to\infty} b_n$ وجود ندارد $\rightarrow$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ واگراست ③

①,②,③ $\rightarrow$ بازه‌ی همگرایی: $(0,2)$ ، $R=1$

نکته: شرط لازم برای همگرایی سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$، این است که $\lim_{n\to\infty} b_n=0$؛ ولی برعکس آن برقرار نیست؛ یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} b_n=0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$ همگراست

(مثال: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ولی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست)

$$\star \rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1} \rightarrow f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$(|x-x_0|<R)$ $\quad$ $(|x-x_0|<R)$ $\quad$ $(|x-x_0|<R)$

سری تیلور: سری تیلور $f(x)$ حول x_0 به صورت زیر است:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

توجه: سری تیلور حول $x_0=0$ را سری مک‌لورن می‌نامیم.

مثال: معادله زیر را به کمک سری حل کنید.

$$y''+y=0 \quad (1)$$

$$y_{(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \xrightarrow[\text{صفر در نظر می‌گیریم}]{\text{به طور پیش فرض } x_0 \text{ را}} y_{(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \ (2) \rightarrow y''_{(x)}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} \ (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \sum_{\substack{n=2\\ n=0}}^{\infty}\underbrace{n(n-1)}_{(n+2)(n+1)}\underbrace{a_n}_{a_{n+2}}\underbrace{x^{n-2}}_{x^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right)x^n=0$$

$$\rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0 \rightarrow a_{n+2}=\frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}$$

$(n\geq 0)$

$$a_2=\frac{-a_0}{2!} \qquad a_3=\frac{-a_1}{3!}$$

$$a_4=\frac{-a_2}{4\times 3}=\frac{a_0}{4!} \qquad a_5=\frac{-a_3}{5\times 4}=\frac{a_1}{5!}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\text{I} \quad a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{(2n)!}\ ;\ n=0,1,\dots \qquad \text{II} \quad a_{2n+1}=(-1)^n\frac{a_1}{(2n+1)!}\ ;\ n=0,1,\dots$$

$$y_{(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{a_{2n}}_{\text{I}}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{a_{2n+1}}_{\text{II}}x^{2n+1}=a_0\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}_{\cos x}+a_1\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}_{\sin x}$$

$$\rightarrow \boxed{y_g=a_0\cos x+a_1\sin x}$$

★ ← سری را می‌توانیم حول هر نقطه‌ای بنویسیم و از این جهت می‌توان گفت که سری یک تابع، منحصر به فرد نیست اما برای حل معادلات دیفرانسیل، به طور معمول سری‌ها را حول $x_0=0$ می‌نویسیم.

تعریف: x_0 را نقطه‌ی عادی (معمولی) برای معادله‌ی $P_{(x)}y''+Q_{(x)}y'+R_{(x)}y=0$ (★) گوییم هرگاه $P(x_0)\neq 0$؛ در غیر این صورت x_0 را نقطه‌ی تکین (منفرد) گوییم.

★ ← دو معادله‌ی معروف که به فرم معادله‌ی (★) هستند و جداً در مورد آن‌ها صحبت می‌کنیم:

(1) معادله‌ی لژاندر: $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

(2) معادله‌ی بسل: $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \quad (p\in\mathbb{R})$

قضیه: فرض کنیم x_0 یک نقطه‌ی عادی برای معادله‌ی $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ باشد، در این صورت جواب عمومی معادله را می‌توان برحسب یک سری توانی حول x_0 به صورت زیر نوشت:

$$y_g=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

که در آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$، دو سری توانی مستقل خطی حول x_0 می‌باشند. همچنین شعاع همگرایی این دو سری، برابر با مینیمم شعاع همگرایی سری‌های $\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $\frac{R(x)}{P(x)}$ حول x_0 می‌باشد.

مثال: جواب عمومی معادله‌ی زیر را حول $x_0=0$ به دست آورید.

$$y''-xy'+y=0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \longrightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \longrightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری در معادله:

$$\sum_{\substack{n=2\\ n=0}}^{\infty} \overbrace{n(n-1)}^{(n+2)(n+1)} \underbrace{a_n}_{a_{n+2}} x^{\overbrace{n-2}^{n}} - \sum_{\substack{n=1\\ n=0}}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (a_0=0)$$

$$\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n a_n + a_n\right]x^n = 0 \longrightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-1)a_n = 0$$

$$\longrightarrow a_{n+2} = \frac{(n-1)a_n}{(n+2)(n+1)} \;;\; n=0,1,2,\dots \longrightarrow a_3=0 \longrightarrow a_5=a_7=\dots=0 \qquad (a_1\neq 0)$$

$$n=0 \longrightarrow a_2=\frac{-a_0}{2!}$$

$$n=2 \longrightarrow a_4=\frac{a_2}{4\times3}=\frac{-a_0}{4!}$$

$$n=4 \longrightarrow a_6=\frac{3a_4}{6\times5}=\frac{-3a_0}{6!}$$

$$n=6 \longrightarrow a_8=\frac{5\times3\times a_6}{8\times7}=\frac{-15a_0}{8!}$$

$$\vdots$$

$$\Longrightarrow y_g=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}-\frac{3x^6}{6!}+\dots\right)}_{y_0(x)} + a_1 \underbrace{x}_{y_1(x)}$$

$y_0(x)$: $R=\infty$ ، $y_1(x)$: $R=\infty$

$$R_{y_g}=\infty$$

معادله‌ی لژاندر: فرم کلی این معادله به صورت $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ می‌باشد $(\alpha\in\mathbb{R})$ که $x_0=0$ نقطه‌ی عادی آن است؛ پس داریم:

$$y_g=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \rightsquigarrow y_g'=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1} \rightsquigarrow y_g''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}$$

جایگذاری در معادله:

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^k-2\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k+\alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$$

$k=0$, $(k+2)(k+1)$, a_{k+2}, x^k $\quad$ $k=0$ $(b_0=b_1=0)$ $\quad$ $k=0$ $(c_0=0)$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}-k(k-1)a_k-2ka_k+\alpha(\alpha+1)a_k\right]x^k=0$$

$$\rightarrow (k+2)(k+1)a_{k+2}-k(k-1)a_k-2ka_k+\alpha(\alpha+1)a_k=0 \rightsquigarrow a_{k+2}=\frac{-(\alpha-k)(\alpha+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

$k=0,1,2,\dots$

$$\xrightarrow{\alpha=n\in\mathbb{N}} a_{k+2}=\frac{-(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \qquad (R=1\rightarrow |x|<1)$$

$k=0 \rightsquigarrow a_2=-\dfrac{n(n+1)}{2!}a_0$

$k=2 \rightsquigarrow a_4=\dfrac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0$

$k=4 \rightsquigarrow a_6=\dfrac{-(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}a_0$

$\vdots$

$k=1 \rightsquigarrow a_3=\dfrac{-(n-1)(n+2)}{3!}a_1$

$k=3 \rightsquigarrow a_5=\dfrac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$

$k=5 \rightsquigarrow a_7=\dfrac{-(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}a_1$

$\vdots$

$$y_g=a_0\underbrace{\left(1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\cdots\right)}_{y_0(x)}+a_1\underbrace{\left(x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+\cdots\right)}_{y_1(x)}$$

اگر n عددی زوج باشد، y_0 تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n می‌شود و اگر n عددی فرد باشد، y_1 تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n می‌شود (چند جمله‌ای‌های لژاندر):

$L_0(x)=a_0$

$L_2(x)=a_0(1-3x^2)$

$L_4(x)=a_0(1-10x^2+\frac{35}{3}x^4)$

$\vdots$

$L_1(x)=a_1x$

$L_3(x)=a_1(x-\frac{5}{3}x^3)$

$L_5(x)=a_1(x-\frac{14}{3}x^3+\frac{63}{15}x^5)$

$\vdots$

در چند جمله‌ای های لژاندر، ضرایب a_0 و a_1 را به گونه‌ای می‌یابیم که $L_n(1)=1$:

$L_0(1)=1 \rightsquigarrow a_0=1$

$L_2(1)=1 \rightsquigarrow a_0=\frac{-1}{2}$

$L_4(1)=1 \rightsquigarrow a_0=\frac{1\times3}{2\times4}$

$\vdots$

$L_1(1)=1 \rightsquigarrow a_1=1$

$L_3(1)=1 \rightsquigarrow a_1=\frac{-3}{2}$

$L_5(1)=1 \rightsquigarrow a_1=\frac{1\times3\times5}{2\times4}$

$\vdots$

$$a_0=\begin{cases} 1 & ; \quad n=0 \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\times\dfrac{1\times3\times\dots\times(n-1)}{2\times4\times\dots\times n} & ; \quad n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

$$a_1=\begin{cases} 1 & ; \quad n=1 \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\times\dfrac{1\times3\times\dots\times n}{2\times4\times\dots\times(n-1)} & ; \quad n=3,5,7,\dots \end{cases}$$

چند جمله‌ای های لژاندر:

$L_0(x)=1 \qquad L_1(x)=x \qquad L_2(x)=\frac{-1}{2}(1-3x^2) \qquad L_3(x)=-\frac{3}{2}(x-\frac{5}{3}x^3) \qquad \dots$

خواص چند جمله‌ای های لژاندر: ۱) $L_n(x)$ به ازای n های زوج، تابعی زوج و به ازای n های فرد، تابعی فرد است.

۲) به ازای n های فرد، $L_n(0)=0$ و به ازای n های زوج، $L'_n(0)=0$ می‌باشد.

۳) $L_n(x)$ دقیقاً دارای n ریشه‌ی حقیقی و متمایز در بازه‌ی $(-1,+1)$ می‌باشد.

۴) خاصیت تعامد: چند جمله‌ای های $L_n(x)$ در بازه‌ی $(-1,+1)$ دو به دو برهم عمودند:

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)\,dx=\begin{cases} 0 & ; \quad n\neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & ; \quad n=m \end{cases}$$

۵) فرمول رودریگز: می‌توان ثابت کرد:

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\times\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

۶) رابطه‌ی بازگشتی زیر میان چندجمله‌ای های لژاندر برقرار است:

$$\begin{cases} L_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}x\,L_n(x)-\dfrac{n}{n+1}L_{n-1}(x) & (n\in\mathbb{N}) \\ L_0(x)=1 \\ L_1(x)=x \end{cases}$$

۷) فرض کنیم $\underbrace{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x)}_{\text{سری فوریه}}$ ، در این صورت طبق خاصیت تعامد، داریم:

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)L_n(x)\,dx \qquad (n\in\mathbb{N})$$

مثال: سه ضریب اول بسط لژاندر تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & -1<x<0\end{cases}$ را بیابید.

$$C_0=\frac{2\times 0+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,L_0(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

$$C_1=\frac{2\times 1+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,L_1(x)\,dx=\frac{3}{2}\int_{0}^{1}x\,dx=\frac{3}{4}$$

$$C_2=\frac{2\times 2+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,L_2(x)\,dx=\frac{5}{2}\int_{0}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx=0$$

$$\to f(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+C_3L_3(x)+\cdots$$

مثال: چهار جمله‌ی اول جواب معادلات زیر را به کمک سری به دست آورید.

1) $\begin{cases} yy''+3y'^2=0\\ y(0)=1\\ y'(0)=\frac{1}{4}\end{cases}$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\qquad a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\quad\xrightarrow{x_0=0}\quad y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\xrightarrow{\text{چهار جمله‌ی اول}} y_p=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2}y''(0)+\frac{x^3}{6}y'''(0)\quad ①$$

صورت معادله: $yy''+3y'^2=0\ \xrightarrow[y'(0)=\frac{1}{4}]{y(0)=1}\ y''(0)=\frac{-3}{16}\quad ②$

$$y'y''+yy'''+6y'y''=0\ \xrightarrow[y''(0)=\frac{-3}{16}]{y(0)=1,\ y'(0)=\frac{1}{4}}\ y'''(0)=\frac{21}{64}\quad ③$$

$$①,②,③\longrightarrow \boxed{y_p=1+\frac{1}{4}x-\frac{3}{32}x^2+\frac{7}{128}x^3}$$

2) $\begin{cases} y'=x^2+y^2\\ y(0)=1\end{cases}$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\qquad a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\quad\xrightarrow{x_0=0}\quad y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\xrightarrow{\text{چهار جمله‌ی اول}} y_p=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2}y''(0)+\frac{x^3}{6}y'''(0)\quad ①$$

صورت معادله: $y'=x^2+y^2\ \xrightarrow{y(0)=1}\ y'(0)=1$

$\to y''=2x+2yy'\to y''(0)=2$

$\to y'''=2+2y'^2+2yy''\to y'''(0)=8$

$$①\longrightarrow \boxed{y_p=1+x+x^2+\frac{4}{3}x^3}$$

3) $y'' + y'\sin x + e^{x} y = 0$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad , \quad a_n=\frac{y^{(n)}_{(x_0)}}{n!} \;\Bigg\}\xrightarrow{x_0=0} y_g=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}_{(0)}}{n!}x^n$$

$$\xrightarrow{\text{چهار جمله‌ی اول}} y_g=y_{(0)}+xy'_{(0)}+\frac{x^2}{2}y''_{(0)}+\frac{x^3}{6}y'''_{(0)}$$

$$\xrightarrow[y'_{(0)}=b_1]{y_{(0)}=b_0} y_g=b_0+b_1x+\frac{x^2}{2}y''_{(0)}+\frac{x^3}{6}y'''_{(0)} \quad ①$$

صورت معادله: $y''+y'\sin x+e^{x}y=0 \xrightarrow[y'_{(0)}=b_1]{y_{(0)}=b_0} y''_{(0)}=-b_0$

$y'''+y''\sin x+y'\cos x+(y+y')e^{x}=0 \longrightarrow y'''_{(0)}=-b_0-2b_1$

$$\xrightarrow{①} \boxed{y_g=b_0\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+b_1\left(x-\frac{x^3}{3}\right)}$$

تابع تحلیلی: تابع $f_{(x)}$ را حول نقطه‌ی x_0 تحلیلی گوییم هرگاه سری تیلور تابع حول x_0، به خود تابع همگرا باشد.

توجه: در حد درس معادلات دیفرانسیل، تابع $f_{(x)}$ را حول x_0 تحلیلی گوییم هرگاه مشتقات آن در x_0 موجود باشند؛ البته این تعریف به طور کامل درست نمی‌باشد و مثال نقض دارد؛ مثال نقض:

$$f_{(x)}=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

انواع نقطه‌ی تکین: 1) تکین منتظم 2) تکین نامنتظم

تکین منتظم: x_0 را نقطه‌ی تکین منتظم معادله‌ی $P_{(x)}y''+Q_{(x)}y'+R_{(x)}y=0$ گوییم هرگاه، اولاً $P_{(x_0)}=0$، ثانیاً توابع $(x-x_0)\frac{Q_{(x)}}{P_{(x)}}$ و $(x-x_0)^2\frac{R_{(x)}}{P_{(x)}}$ در x_0 تحلیلی باشند.

تکین نامنتظم: اگر حداقل یکی از دو تابع مذکور در x_0 تحلیلی نباشد، x_0 را نقطه‌ی تکین نامنتظم معادله‌ی مذکور می‌نامیم.

تذکر (راه دیگر تشخیص نقطه‌ی تکین منتظم): اگر توابع $(x-x_0)\frac{Q_{(x)}}{P_{(x)}}$ و $(x-x_0)^2\frac{R_{(x)}}{P_{(x)}}$ در x_0 دارای حد متناهی باشند، x_0 نقطه‌ی تکین منتظم برای معادله‌ی دیفرانسیل $P_{(x)}y''+Q_{(x)}y'+R_{(x)}y=0$ است (شرط $P_{(x_0)}=0$ به طور پیش‌فرض باید برقرار باشد).

مثال: نوع نقاط تکین معادلات زیر را مشخص کنید.

1) $\underbrace{(1-x^2)}_{P(x)}y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$

$P(x)=1-x^2=0 \rightsquigarrow x=\pm 1$

$x_0=+1 \rightsquigarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\dfrac{-2x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{1+x}=1 \rightsquigarrow \\ \lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\alpha(\alpha+1)}{1+x}=0 \rightsquigarrow \end{cases}$

$(x-x_0)\frac{Q}{P}$ در $x=1$ تحلیلی است.

$(x-x_0)^2\frac{R}{P}$ در $x=1$ تحلیلی است.

$x=1$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است.

$x_1=-1 \rightsquigarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1}(x+1)\dfrac{-2x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-2x}{1-x}=1 \rightsquigarrow \\ \lim\limits_{x\to -1}(x+1)^2\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)}=0 \rightsquigarrow \end{cases}$

$(x-x_1)\frac{Q}{P}$ در $x=-1$ تحلیلی است.

$(x-x_1)^2\frac{R}{P}$ در $x=-1$ تحلیلی است.

$x=-1$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است.

2) $2x(x-2)^2y''+3xy'+(x-2)y=0$

$P(x)=2x(x-2)^2=0 \rightsquigarrow x=0,2$

$x_0=0 \rightsquigarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x\left(\dfrac{3x}{2x(x-2)^2}\right)=0 \rightsquigarrow \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\dfrac{x-2}{2x(x-2)^2}\right)=0 \rightsquigarrow \end{cases}$

$(x-x_0)\frac{Q}{P}$ در $x=0$ تحلیلی است.

$(x-x_0)^2\frac{R}{P}$ در $x=0$ تحلیلی است.

$\rightsquigarrow$ $x=0$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است.

$x_1=2 \rightsquigarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2}(x-2)\left(\dfrac{3x}{2x(x-2)^2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{2(x-2)} \rightsquigarrow \begin{cases} x\to 2^+ : +\infty \\ x\to 2^- : -\infty \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\left(\dfrac{x-2}{2x(x-2)^2}\right) \end{cases}$

بدون بررسی مورد بعدی، می‌توان گفت که $x=2$ نقطه‌ی تکین نامنظم معادله است.

۳) $(x-\frac{\pi}{2})^2 y'' + y'\cos x + y\sin x = 0$

$P(x) = (x-\frac{\pi}{2})^2 = 0 \rightsquigarrow x = \frac{\pi}{2}$

$x_0 = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2})\left(\frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = -1 \rightsquigarrow \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2})^2\left(\frac{\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}\right) = 1 \rightsquigarrow \end{cases}$

$-1 \rightsquigarrow$ $(x-x_0)\frac{Q}{P}$ در $x=\frac{\pi}{2}$ تحلیلی است.

$1 \rightsquigarrow$ $(x-x_0)^2\frac{R}{P}$ در $x=\frac{\pi}{2}$ تحلیلی است.

$x=\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است.

قضیه: فرض کنیم x_0 نقطه‌ی تکین منظم معادله‌ی $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ باشد، در این صورت، این معادله دارای جوابی به فرم

$y(x) = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (*) می باشد که در آن، r عددی حقیقی یا مختلط است، $a_0 \neq 0$.

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}}$$

سری $y(x)$، سری توانی نیست زیرا توان های $(x-x_0)$ لزوماً طبیعی نیستند؛ به سری فوق، سری فروبنیوس می‌گوییم.

معادله‌ی (*): $Py'' + Qy' + Ry = 0 \rightsquigarrow y'' + \frac{Q}{P}y' + \frac{R}{P}y = 0 \rightsquigarrow x^2y'' + x(x\frac{Q}{P})y' + (x^2\frac{R}{P})y = 0$ Ⓐ

$x\frac{Q}{P} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ Ⓑ

$x^2\frac{R}{P} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ Ⓒ

با فرض این که $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ جوابی برای معادله‌ی فوق باشد، داریم:

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$ Ⓓ $\rightsquigarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$ Ⓔ

(برخلاف سری توانی، در سری فروبنیوس، بعد از مشتق‌گیری‌ها، n همچنان از صفر شروع می‌شود)

$$Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ, Ⓓ, Ⓔ \longrightarrow a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left((r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right)\right]x^{n+r} = 0$$

که در آن $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$ می باشد. از معادله‌ی به دست آمده، داریم:

$$\begin{cases} a_0 F(r) = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} \boxed{F(r) = 0 \quad \text{معادله‌ی شاخص}} \\ F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left((r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right) = 0 \quad (n=1,2,\ldots) \end{cases}$$

(**)

حالات زیر را برای ریشه‌های معادله‌ی شاخصی در نظر می‌گیریم:

عدد طبیعی

① فرض کنیم $r_1 > r_2$ دو ریشه‌ی حقیقی برای معادله‌ی شاخصی باشند به طوری که $r_1 - r_2 \neq N$: به ازای $r=r_1$ در رابطه‌ی $(**)$ ضرایب a_n مشخص می‌شوند و $y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک جواب برای معادله‌ی $(*)$ است. همچنین به ازای $r=r_2$ در رابطه‌ی $(**)$، ضرایب جدید a_n مشخص می‌شوند و جواب دوم معادله‌ی $(*)$ مستقل خطی با y_1 به صورت $y_2 = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حاصل می‌شود.

a_n های جدید به ازای $r=r_2$

در نهایت داریم: $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$

② فرض کنیم $r_1 = r_2 = r^*$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی شاخصی باشد: در این حالت ضرایب a_n به ازای $r=r^*$ از رابطه‌ی $(**)$ حاصل می‌شود و یک جواب معادله به صورت $y_1(x) = x^{r^*}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ می‌باشد. برای یافتن جواب دوم، از روش کاهش مرتبه استفاده می‌کنیم:

$$y_2(x) = y_1(x)\cdot v(x) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r^*}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

که در آن ضرایب b_n با جایگذاری y_2 در معادله مشخص می‌شوند و در نهایت داریم: $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$

عدد طبیعی

③ فرض کنیم $r_1 > r_2$ دو ریشه‌ی حقیقی برای معادله‌ی شاخصی باشند به طوری که $r_1 - r_2 = N$: در این حالت یک جواب به صورت $y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ می‌باشد و برای یافتن جواب دوم، از روش کاهش مرتبه استفاده می‌کنیم:

$$y_2(x) = y_1(x)\cdot v(x) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow y_2(x) = C y_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

که در آن ثابت C و ضرایب b_n با جایگذاری y_2 در معادله مشخص می‌شوند و در نهایت داریم: $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$

مثال: جواب عمومی معادلات زیر را حول $x=0$ به دست آورید.

1) $2x^2y''-xy'+(1+x)y=0$

$P(x)=2x^2=0 \longrightarrow x=0 \longrightarrow$ $x=0$ نقطه‌ی منفرد معادله است.

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0}(x-0)\dfrac{-x}{2x^2}=\dfrac{-1}{2}\ \checkmark \\ \lim_{x\to 0}(x-0)^2\dfrac{1+x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\ \checkmark \end{cases} \longrightarrow$$ $x=0$ نقطه‌ی منفرد منظم معادله است.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} \Rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} \Rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

جایگذاری در معادله:
$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}+\sum_{\substack{n=0\\ n=1}}^{\infty}a_{\substack{n\\ n-1}}x^{\substack{n+r+1\\ n+r}}=0$$

$$\longrightarrow 2r(r-1)a_0-ra_0+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+r)(n+r-1)a_n-(n+r)a_n+a_n+a_{n-1}\right]x^{n+r}=0 \quad (*)$$

$$\longrightarrow \left(2r(r-1)-r+1\right)a_0=0 \xRightarrow{a_0\neq 0} 2r^2-3r+1=0 \Rightarrow (2r-1)(r-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(*) \longrightarrow \text{ضریب } x^{n+r}=0 \Rightarrow a_n=\frac{-a_{n-1}}{2(n+r)^2-3(n+r)+1} \quad (**)$$
$(n\in\mathbb{N})$

$$r_1=1,(**) \longrightarrow a_n=\frac{-a_{n-1}}{n(2n+1)} \Rightarrow a_1=\frac{-a_0}{1\times 3}$$

$$a_2=\frac{-a_1}{2\times 5}=\frac{a_0}{2!\times 3\times 5}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{(-1)^n a_0}{n!\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}$$

$$a_0=1 \longrightarrow \boxed{y_1=x^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}x^n}$$

$$r_2=\frac{1}{2},(**) \longrightarrow a_n=\frac{-a_{n-1}}{n(2n-1)} \Rightarrow a_1=\frac{-a_0}{1\times 1}$$

$$a_2=\frac{-a_1}{2\times 3}=\frac{a_0}{2!\times 3}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{(-1)^n a_0}{n!\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}$$

$$\longrightarrow \boxed{y_2 = x^{\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}x^n\right)}$$

$$y_g = c_1y_1 + c_2y_2 \rightsquigarrow \boxed{y_g = c_1x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}x^n + c_2\sqrt{x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}x^n\right)}$$

۲) $4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2+1)y = 0$

$P(x) = 4x^2 = 0 \longrightarrow x=0 \longrightarrow$ $x=0$ نقطه‌ی منفرد معادله است.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(x-0)\dfrac{-8x^2}{4x^2} = 0 \checkmark \\ \\ \lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2\dfrac{(4x^2+1)}{4x^2} = \dfrac{1}{4} \checkmark \end{cases} \longrightarrow$$ $x=0$ نقطه‌ی منفرد منظم معادله است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} \rightsquigarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} \rightsquigarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

جایگذاری در معادله: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} - \sum_{\substack{n=0\\ n=1}}^{\infty}8(n+r)a_{\underset{n-1}{n}}x^{\overset{n+r}{n+r+1}} + \sum_{\substack{n=0\\ n=2}}^{\infty}4a_{\underset{n-2}{n}}x^{\overset{n+r}{n+r+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} = 0$

$$\rightarrow 4r(r-1)a_0x^r + 4r(r+1)a_1x^{r+1} - 8ra_0x^{r+1} + a_0x^r + a_1x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[4(n+r)(n+r-1)a_n - 8(n+r-1)a_{n-1} + 4a_{n-2} + a_n\right]x^{n+r} = 0$$

$$\rightarrow (4r^2-4r+1)a_0x^r + (4r^2+4r+1)a_1x^{r+1} - 8ra_0x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[4(n+r)(n+r-1)a_n + a_n - 8(n+r-1)a_{n-1} + 4a_{n-2}\right]x^{n+r} = 0$$

ضریب $x^r = 0 \rightsquigarrow a_0(4r^2-4r+1) = 0 \xrightarrow[a_0\neq 0]{} r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$

ضریب $x^{r+1} = 0 \rightsquigarrow (4r^2+4r+1)a_1 - 8ra_0 = 0 \xrightarrow{r=\frac{1}{2}} \boxed{a_1 = a_0}$ (I)

ضریب $x^{n+r} = 0 \rightsquigarrow 4(n+r)(n+r-1)a_n + a_n - 8(n+r-1)a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$

$$\longrightarrow a_n = \frac{-4a_{n-2}}{4(n+r)(n+r-1)+1} + \frac{8(n+r-1)a_{n-1}}{4(n+r)(n+r-1)+1} \qquad (n=2,3,\ldots)$$

$$r_1 = \frac{1}{2}: \quad a_n = \frac{-4a_{n-2}}{4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})+1} + \frac{8(n-\frac{1}{2})a_{n-1}}{4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})+1} \rightsquigarrow a_n = \frac{-a_{n-2} + (2n-1)a_{n-1}}{n^2}$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{4} + \frac{3a_1}{4} \quad \text{I} \quad \rightsquigarrow a_2 = \frac{a_0}{2!}$$

$$a_3 = \frac{-a_1 + 5a_2}{9} \rightsquigarrow a_3 = \frac{a_0}{3!}$$

$$a_4 = \frac{-a_2 + 7a_3}{16} \rightsquigarrow a_4 = \frac{a_0}{4!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_0}{n!} \ (\text{new}) \longrightarrow y_1 = x^{\frac{1}{2}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{e^x} \rightsquigarrow \boxed{y_1 = \sqrt{x}\, e^x} \ \text{A}$$

$r_2 = r_1 = \frac{1}{2}$:

$$y_2 = ? \begin{cases} \longrightarrow y_1 \operatorname{Ln} x + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ \longrightarrow \text{کاهش مرتبه به طور مستقیم} \end{cases}$$

سری داخل y_1، تابع آشنایی شده است پس برای به دست آوردن y_2، روش دوم ساده‌تر است:

$$y_2 = r(x) y_1 = r\sqrt{x}\, e^x \rightsquigarrow y_2' = r'\sqrt{x}\, e^x + r\left(\frac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\rightsquigarrow y_2'' = r''\sqrt{x}\, e^x + r'\left(\frac{(2x+1)e^x}{\sqrt{x}}\right) + r\left(\frac{2\sqrt{x}\left(2e^x + (2x+1)e^x\right) - \frac{(2x+1)e^x}{\sqrt{x}}}{4x}\right)$$

$$\longrightarrow y_2'' = r''\sqrt{x}\, e^x + r'\left(\frac{(2x+1)e^x}{\sqrt{x}}\right) + r\left(\frac{e^x(4x^2 + 4x - 1)}{4x}\right)$$

جایگذاری در معادله: $\ldots \rightsquigarrow r(x) = \operatorname{Ln} x \rightsquigarrow \boxed{y_2 = \sqrt{x}\, e^x \operatorname{Ln} x}$ B

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 \xrightarrow{\text{A},\text{B}} \boxed{y_g = c_1\sqrt{x}\, e^x + c_2\sqrt{x}\, e^x \operatorname{Ln} x}$$

مثال: دو جواب مستقل خطی برای معادله‌ی زیر حول $x=0$ به دست آورید.

برای ساده سازی محاسبات

$$xy''+2y'+xy=0 \xrightarrow{\times x} x^2y''+2xy'+x^2y=0$$

$P_{(x)}=x^2=0 \longrightarrow$ $x=0$ نقطه‌ی منفرد معادله است.

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0}(x-0)\dfrac{2x}{x^2}=2 \checkmark \\ \lim_{x\to 0}(x-0)^2\dfrac{x^2}{x^2}=0 \checkmark \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $x=0$ نقطه‌ی منفرد منظم معادله است. $\rightsquigarrow y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

جایگذاری در معادله:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_n x^{n+r}+\sum_{\substack{n=0\\ n=2}}^{\infty} a_{\substack{n\\ n-2}} x^{\substack{n+r\\ n+r+2}}=0$$

$$\longrightarrow r(r-1)a_0x^r+r(r+1)a_1x^{r+1}+2ra_0x^r+2(r+1)a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+2(n+r)a_n+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

$$\longrightarrow r(r+1)a_0x^r+(r+2)(r+1)a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r+1)a_n+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

x^r ضریب $=0 \rightsquigarrow r(r+1)a_0=0 \xrightarrow{a_0\neq 0}$ معادله‌ی شاخصی: $r(r+1)=0 \rightsquigarrow \begin{cases} r_1=0 \\ r_2=-1 \end{cases}$

x^{r+1} ضریب $=0 \rightsquigarrow (r+2)(r+1)a_1=0$ (*)

x^{n+r} ضریب $=0 \rightsquigarrow (n+r)(n+r+1)a_n+a_{n-2}=0 \rightsquigarrow a_n=\dfrac{-a_{n-2}}{(n+r)(n+r+1)}$; $n=2,3,\dots$ (**)

$r_1=0$:

$\xrightarrow{(*)} 2a_1=0 \longrightarrow a_1=0$

$\xrightarrow{(**)} a_n=\dfrac{-a_{n-2}}{n(n+1)}$

$\rightsquigarrow a_3=a_5=\dots=0$ Ⓐ

$\longrightarrow a_2=\dfrac{-a_0}{2!}$

$$a_4=\frac{-a_2}{4\times 3}=\frac{a_0}{4!}$$

$\vdots$

Ⓑ $a_{2n}=\dfrac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!}$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r_1} \underset{r_1=0}{\leadsto} y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}}_{\text{Ⓐ}\to 0} \to y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$$

$$\text{Ⓑ} \leadsto y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \leadsto \boxed{y_1=\frac{\sin x}{x}}$$

$r_2=-1$:

$r_1-r_2=1\in\mathbb{N} \leadsto y_2=?$

- $\to cy_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{n+r_2}$
- $\to$ کاهش مرتبه به طور مستقیم
- $\to$ استفاده از محاسبات قبلی

با توجه به رابطه‌ی $(*)$ داریم: $0\times a_1=0 \to a_1\in\mathbb{R}$

به‌طور دلخواه a_1 را برابر با صفر فرض می‌کنیم.

$$(**) \to a_n=\frac{-a_{n-2}}{n(n-1)}\ ;\ n=2,3,\dots \underset{a_1=0}{\leadsto} a_3=a_5=\dots=0 \quad \text{Ⓒ}$$

$$a_2=\frac{-a_0}{2!}$$

$$a_4=\frac{-a_2}{4\times 3}=\frac{a_0}{4!}$$

$$\vdots$$

$$\text{Ⓓ}\quad a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$$

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-1} \to y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n-1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n}}_{\text{Ⓒ}\to 0} \to y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n-1} \underset{\text{Ⓓ}}{\leadsto} y_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-1}$$

$$\leadsto \boxed{y_2=\frac{\cos x}{x}}$$

تابع گاما: به ازای $x>0$، تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x):=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad (x>0)$$

نکته:

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \quad (x>0)}$$

اثبات:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty}t^{x}e^{-t}\,dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \Gamma(x+1)=\underbrace{-e^{-t}t^{x}\Big|_{t=0}^{\infty}}_{0}+\underbrace{\int_0^{\infty}xt^{x-1}e^{-t}\,dt}_{x\Gamma(x)}$$

$$\leadsto \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

نکته‌ی مهم: در تابع گاما، اگر $x=n\in\mathbb{N}$، آنگاه:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\dots=n!\underbrace{\Gamma(1)}_{1}=n! \rightsquigarrow \boxed{\Gamma(n+1)=n!}$$

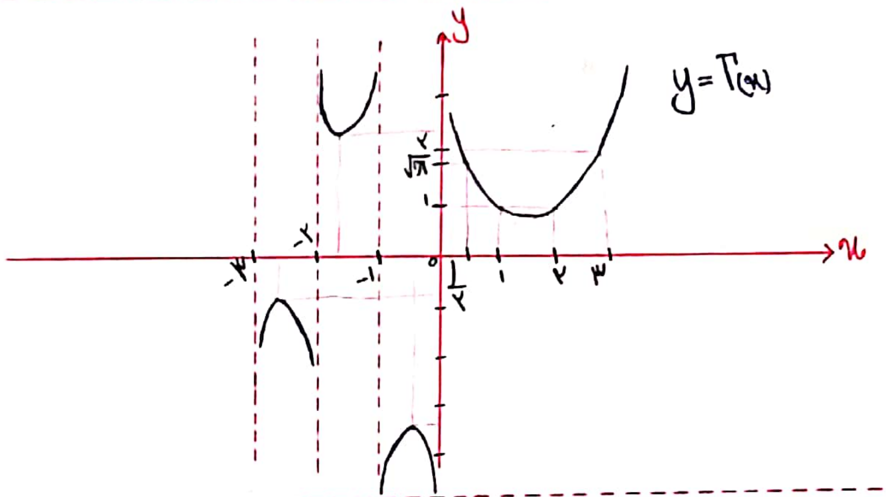
پس در حالت کلی برای هر $p\in\mathbb{R}^+$، داریم:

$$\boxed{p! := \Gamma(p+1)}$$

تابع گامای تعمیم یافته: به ازای $x<0$ که $x\notin\mathbb{Z}$، تابع گامای تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\begin{gathered}\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x}\\ (x<0\ ,\ x\notin\mathbb{Z})\end{gathered}}$$

$$\Gamma(x)=\begin{cases}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt & (x>0)\\[2ex] \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} & (x<0\ ,\ x\notin\mathbb{Z})\end{cases}$$



معادله‌ی دیفرانسیل بسل: فرم کلی معادله دیفرانسیل بسل مرتبه p به صورت زیر است:

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \qquad p\in\mathbb{R}$$

$P(x)=x^2=0 \rightsquigarrow x=0$ نقطه‌ی تکین معادله است

$$\begin{cases}\lim_{x\to0}(x-0)\dfrac{x}{x^2}=1 \checkmark\\[2ex] \lim_{x\to0}(x-0)^2\dfrac{x^2-p^2}{x^2}=-p^2 \checkmark\end{cases} \rightsquigarrow$$

$x=0$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است. $\rightsquigarrow y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

جایگذاری در معادله:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}p^2a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

$$\rightsquigarrow r(r-1)a_0x^r+r(r+1)a_1x^{r+1}+ra_0x^r+(r+1)a_1x^{r+1}-p^2a_0x^r-p^2a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n+a_{n-2}-p^2a_n\right]x^{n+r}=0$$

$$\rightsquigarrow (r^2-p^2)a_0x^r+\left((r+1)^2-p^2\right)a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((n+r)^2-p^2\right)a_n+a_{n-2}\right]x^{n+r}$$

x^{r} ضریب $=0 \rightsquigarrow (r^2-p^2)a_0=0 \overset{a_0\neq 0}{\rightsquigarrow} \underbrace{r^2-p^2=0}_{\text{معادله‌ی شاخصی}} \rightsquigarrow r=\pm p$

x^{r+1} ضریب $=0 \rightsquigarrow ((r+1)^2-p^2)a_1=0 \quad (*)$

x^{n+r} ضریب $=0 \rightsquigarrow ((n+r)^2-p^2)a_n+a_{n-2}=0 \rightsquigarrow a_n=\dfrac{-a_{n-2}}{(n+r)^2-p^2} \; ; \; n=2,3,\dots \quad (**)$

فرض کنیم $p>0$:

$r_1=p$:

$(*) \longrightarrow (2p+1)a_1=0 \overset{p>0}{\rightsquigarrow} a_1=0 \quad Ⓐ$

$(**) \longrightarrow a_n=\dfrac{-a_{n-2}}{n(n+2p)} \quad (n=2,3,\dots)$

$\overset{Ⓐ}{\rightsquigarrow} a_3=a_5=\dots=0 \quad Ⓑ$

$a_0=\dfrac{1}{2^p\,\Gamma(p+1)}$

$a_2=\dfrac{-a_0}{2^2(p+1)}=\dfrac{-1}{2^{p+2}\,\Gamma(p+2)}$

$a_4=\dfrac{-a_2}{4(4+2p)}=\dfrac{1}{2^{p+4}(2!)\,\Gamma(p+3)}$

$a_6=\dfrac{-1}{2^{p+6}(3!)\,\Gamma(p+4)}$

$\vdots$

$a_{2n}=\dfrac{(-1)^n}{2^{p+2n}(n!)\,\Gamma(p+n+1)} \quad Ⓒ$

$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1} \rightsquigarrow y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+p}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n+p}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1+p}}_{\overset{Ⓑ}{\to}0}$

$$\overset{Ⓒ}{\rightsquigarrow} \boxed{y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}=J_p(x)}$$

تابع بسل نوع اول مرتبه‌ی p

جواب دوم معادله‌ی بسل: برای یافتن جواب دوم معادله‌ی بسل، فرض می‌کنیم p غیر صحیح باشد و مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ نیز نباشد؛ در این صورت به ازای $r=-p$ در روابط $(*)$ و $(**)$، جواب زیر برای معادله‌ی بسل حاصل می‌شود:

$$\boxed{J_{-p}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}}$$

و در نهایت داریم:

$$\boxed{y_g=C_1J_p(x)+C_2J_{-p}(x)}$$

تذکر: شرط مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ نبودن p، غیرضروری است و در صورتی که p مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ باشد نیز جواب عمومی معادله، به همان فرم فوق است! علت آن هم صفر شدن a_{2n+1} هاست.

نتیجه: جواب عمومی معادله‌ی بسل مرتبه p به ازای p های غیرصحیح، به صورت زیر است:

$$\boxed{y_g=C_1J_p(x)+C_2J_{-p}(x)}$$

حال فرض کنیم $p=m$ عددی صحیح باشد؛ در این حالت توابع $J_m(x)$ و $J_{-m}(x)$ مستقل خطی نمی‌باشند و رابطه‌ی زیر بین این دو تابع برقرار است:

$$J_{-m}(x)=(-1)^mJ_m(x)$$

دو حالت زیر را برای عدد صحیح m، در نظر می‌گیریم:

① $m=0$:

$$\boxed{y_2(x)=(\ln x)J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n}\rightsquigarrow \boxed{Y_0(x):=a\left(y_2(x)+bJ_0(x)\right)}\rightsquigarrow\boxed{y_g=C_1J_0(x)+C_2Y_0(x)}$$

تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر

$$a=\frac{2}{\pi}\quad,\quad b=\gamma-\ln(2)$$

ثابت اویلر - ماسکرونی $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(H_n-\ln(n)\right)\approx 0{,}577\ldots$

سری هارمونیک $H_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

② $m\neq 0$:

$$\boxed{y_2(x)=(C\ln x)J_m(x)+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-m}}\rightsquigarrow\boxed{Y_m(x):=a\left(y_2(x)+bJ_m(x)\right)}\rightsquigarrow\boxed{y_g=C_1J_m(x)+C_2Y_m(x)}$$

تابع بسل نوع دوم مرتبه m

تذکر: حالت کلی تابع بسل نوع دوم مرتبه p به ازای هر p (چه صحیح و چه غیرصحیح):

$$Y_p(x)=\frac{J_p(x)\cos(p\pi)-J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}$$

مثال ۸: توابع $J_{\frac{1}{2}}(x)$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ را به صورت توابع مثلثاتی بنویسید.

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \quad (A)$$

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}+1)=(n+\tfrac{1}{2})\Gamma(n+\tfrac{1}{2})=(n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2})=\cdots=(n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})\cdots\times\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})=(\tfrac{1}{2})^{n+1}(2n+1)(2n-1)\cdots\times1\times\sqrt{\pi}$$

$$\times\frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times2}{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times2}$$

$$\rightsquigarrow \Gamma(n+\tfrac{1}{2}+1)=(\tfrac{1}{2})^{n+1}\times\frac{(2n+1)!\times\sqrt{\pi}}{2^n\times n!}=\frac{(2n+1)!\times\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\times n!} \quad (B)$$

$$(A),(B)\longrightarrow J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times2^{2n+1}\times\cancel{n!}}{\cancel{n!}\times(2n+1)!\times\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times\cancel{2^{2n+1}}\times x^{2n+1}}{(2n+1)!\times\sqrt{\pi}\times\cancel{2^{2n+1}}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin x}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\frac{1}{2}+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}} \quad (C)$$

$$\Gamma(n-\tfrac{1}{2}+1)=(n-\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2})=(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\Gamma(n-\tfrac{3}{2})=\cdots=(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\cdots\times\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})=(\tfrac{1}{2})^{n}(2n-1)(2n-3)\cdots\times1\times\sqrt{\pi}$$

$$\rightsquigarrow \Gamma(n-\tfrac{1}{2}+1)=(\tfrac{1}{2})^{n}\times\frac{(2n)!\times\sqrt{\pi}}{2^n\times n!}=\frac{(2n)!\times\sqrt{\pi}}{2^{2n}\times n!} \quad (D)$$

$$\times\frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times2}{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times2}$$

$$(C),(D)\longrightarrow J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times2^{2n}\times\cancel{n!}}{\cancel{n!}\times(2n)!\times\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times\cancel{2^{2n}}\times x^{2n}}{(2n)!\times\sqrt{\pi}\times\cancel{2^{2n}}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times x^{2n}}{(2n)!}}_{\cos x}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x}$$

خواص تابع بسل نوع اول:

(i) Ⓐ $\frac{d}{dx}\left(x^{p} J_{p}(x)\right)=x^{p} J_{p-1}(x)$

اثبات: $x^{p} J_{p}(x)=x^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}=\frac{1}{2^{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n+2p}}{n!\,\Gamma(n+p+1)\, 2^{2n}}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{p} J_{p}(x)\right)=\frac{1}{2^{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(2n+2p) x^{2n+2p-1}}{n!\,\Gamma(n+p+1)\, 2^{2n}}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{p} J_{p}(x)\right)=x^{p} \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cancel{(n+p)}}{n!\,\cancel{\Gamma(n+p+1)}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}_{J_{p-1}(x)}$ ، $\Gamma(n+p)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{p} J_{p}(x)\right)=x^{p} J_{p-1}(x)$ ✓

Ⓑ $\frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_{p}(x)\right)=-x^{-p} J_{p+1}(x)$

اثبات: $x^{-p} J_{p}(x)=x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{n!\,\Gamma(n+p+1)\, 2^{2n+p}}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_{p}(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(2n) x^{2n-1}}{n!\,\Gamma(n+p+1)\, 2^{2n+p}}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_{p}(x)\right)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+2) x^{2n+1}}{(n+1)!\,\Gamma(n+p+2)\, 2^{2n+p+2}}=-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cancel{2(n+1)} x^{2n+1}}{\cancel{(n+1)!}\,\Gamma(n+p+2)\, \cancel{2} \times 2^{2n+p+1}}$ ، $n!$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_{p}(x)\right)=-x^{-p} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!\,\Gamma(n+p+2)\, 2^{2n+p+1}} x^{2n+p+1}}_{J_{p+1}(x)} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_{p}(x)\right)=-x^{-p} J_{p+1}(x)$ ✓

(ii) با مشتق‌گیری از روابط Ⓐ,Ⓑ ، ساده‌سازی های مربوط ، داریم:

Ⓒ $J_{p}'=J_{p-1}-\frac{p}{x} J_{p}$

Ⓓ $J_{p}'=\frac{p}{x} J_{p}-J_{p+1}$

(iii) با جمع دو رابطه‌ی Ⓒ ، Ⓓ رابطه‌ی بازگشتی زیر حاصل می‌شود:

$\frac{2p}{x} J_{p}=J_{p+1}-J_{p-1}$

(iv) بین توابع بسل نوع اول، فقط توابع $J_{m+\frac{1}{2}}(x);(m\in \mathbb{Z})$ را می‌توان برحسب توابع بسته‌ی مشخصی نوشت:

$\ldots,\quad J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\right),\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,\quad J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,\quad J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right),\ldots$

(V) Ⓔ $\int x^{p} J_{p-1}(x)\,dx = x^{p} J_{p}(x) + c$

Ⓕ $\int x^{-p} J_{p+1}(x)\,dx = -x^{-p} J_{p}(x) + c$

مثال برای خاصیت (V):

۱) $\int J_{1}(x)\,dx = -J_{0}(x) + c$

۲) $\int J_{3}(x)\,dx = ?$

$\int \underset{u}{x^{2}}\,\underset{dv}{x^{-2} J_{3}(x)\,dx}$ ✓

$\int \underset{u}{x^{-4}}\,\underset{dv}{x^{4} J_{3}(x)\,dx}$

du چیز ناجوری میشه پس بی‌خیالش!

$\Rightarrow \int J_{3}(x)\,dx = \int \underset{u}{x^{2}}\,\underset{dv}{x^{-2} J_{3}(x)\,dx} = x^{2}\cdot(-x^{-2} J_{2}(x)) - \int -2x^{-1} J_{2}(x)\,dx = -J_{2}(x) + 2\int x^{-1} J_{2}(x)\,dx$

$du = 2x\,dx$, $v = -x^{-2} J_{2}(x)$

$\Rightarrow \int J_{3}(x)\,dx = -J_{2}(x) - 2x^{-1} J_{1}(x) + c = -J_{2}(x) - \frac{2J_{1}(x)}{x} + c$

نکته 8: برخی معادلات را می‌توان با تغییر متغیر مناسب به معادله‌ی بسل تبدیل نمود؛ مانند:

(i) $x^{2}y'' + xy' + (\lambda^{2}x^{2} - p^{2})y = 0 \qquad z := \lambda x$

(ii) $4x^{2}y'' + 4xy' + (x - p^{2})y = 0 \qquad z := \sqrt{x}$

(iii) $x^{2}y'' + xy' + 4(x^{4} - p^{2})y = 0 \qquad z := x^{2}$

(iv) $xy'' + (1+2p)y' + xy = 0 \qquad y = x^{-p}u$

(V) $y'' + xy = 0 \qquad \begin{cases} z := \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ y = \sqrt{x}\,u \end{cases}$

حل مورد (ii):

$\begin{cases} 4x^{2}y'' + 4xy' + (x - p^{2})y = 0 \\ z = \sqrt{x} \end{cases}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \dot{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'' = \frac{d^{2}y}{dx^{2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\dot{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \dot{y}\cdot\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$

$\Rightarrow y'' = \ddot{y}\,\frac{1}{4x} - \dot{y}\,\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

جایگذاری در معادله: $x\ddot{y} - \sqrt{x}\,\dot{y} + 2\sqrt{x}\,\dot{y} + (x - p^{2})y = 0 \Rightarrow z^{2}\ddot{y} + z\dot{y} + (z^{2} - p^{2})y = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} p \notin \mathbb{Z}: & y_{g} = c_{1}J_{p}(z) + c_{2}J_{-p}(z) = c_{1}J_{p}(\sqrt{x}) + c_{2}J_{-p}(\sqrt{x}) \\ p \in \mathbb{Z}: & y_{g} = c_{1}J_{p}(z) + c_{2}Y_{p}(z) = c_{1}J_{p}(\sqrt{x}) + c_{2}Y_{p}(\sqrt{x}) \end{cases}$

حل مورد (۷):

$$\begin{cases} y''+xy=0 \\ z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ y=\sqrt{x}\,u \end{cases} \longrightarrow y'=\frac{u}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\,u' \Longrightarrow y''=\frac{-u}{4x\sqrt{x}}+\frac{u'}{\sqrt{x}}+u''\sqrt{x}$$

$$u'=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\dot{u}\sqrt{x}$$

$$u''=\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\dot{u}\sqrt{x})=\ddot{u}x+\frac{\dot{u}}{2\sqrt{x}}$$

جایگذاری در معادله: $\frac{-u}{4x\sqrt{x}}+\frac{u'}{\sqrt{x}}+u''\sqrt{x}+x\sqrt{x}\,u=0 \overset{\times\sqrt{x}}{\Longrightarrow} \frac{-u}{4x}+u'+u''x+x^2u=0$

$$\Longrightarrow \frac{-u}{4x}+\dot{u}\sqrt{x}+\ddot{u}x^2+\frac{\dot{u}\sqrt{x}}{2}+x^2u=0 \overset{\div\sqrt{x}}{\Longrightarrow} \frac{-u}{4\times\frac{3}{2}z}+\frac{3}{2}\dot{u}+\ddot{u}\times\frac{3}{2}z+\frac{3}{2}zu=0$$

$$\overset{\times\frac{2}{3}z}{\Longrightarrow} z^2\ddot{u}+z\dot{u}+\left(z^2-\frac{1}{9}\right)u=0$$

$$\hookrightarrow p=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z} \Longrightarrow u_g=c_1J_{\frac{1}{3}}(z)+c_2J_{-\frac{1}{3}}(z)$$

$$\overset{\times\sqrt{x}}{\Longrightarrow} y_g=c_1\sqrt{x}\,J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+c_2J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$$

تذکر: احتیاجی به حفظ کردن تغییر متغیرهای مطرح شده نیست زیرا در صورت سؤال داده می‌شوند و اگر داده نشوند به حدی ساده هستند که بتوان آنها را یافت.

تابع معمولی:

متغیر مستقل x ⟵ ضابطه‌ی تابع ⟵ $f(x)$ تابع

تبدیل:

تابع $f(t)$ ⟵ ضابطه‌ی تبدیل ⟵ $F(s)$ تابع

معمولاً انتگرالی است.

توجه: یک تبدیل زمانی ارزشمند است که وارون آن نیز وجود داشته باشد تا بتوانیم اطلاعات به دست آمده برحسب s را به اطلاعاتی برحسب t برگردانیم.

تبدیل لاپلاس: فرض کنیم $f(t)$ به ازای $t>0$ تعریف شده باشد؛ تبدیل لاپلاس f را با نماد $L\{f\}$ یا $F(s)$ نمایش می‌دهیم و به صورت روبه‌رو تعریف می‌کنیم:

$$L\{f\}=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \equiv F(s)$$

همچنین $f(t)$ را تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ گوییم و آن را به صورت $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ نمایش می‌دهیم.

توجه: استفاده از نماد $\{\}$ برای تمیز تبدیل از تابع است.

محاسبه‌ی لاپلاس برخی توابع مقدماتی:

۱) $f(t)=1$

$$L\{1\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt=\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty} \xrightarrow{s>0} L\{1\}=\frac{1}{s}$$

$\left(F(s)=\frac{1}{s}\right)$ دامنه‌ی تابع لاپلاس $(s>0)$

۲) $f(t)=t$

$$L\{t\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\,t\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}t\Big|_{t=0}^{\infty}-\frac{-1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt \xrightarrow{s>0} L\{t\}=\frac{1}{s^2}$$

$(s>0)$

۳) $f(t)=t^n \quad (n\in\mathbb{N})$

با توجه به $L\{t\}$ و استفاده از استقرای ریاضی، می‌توان نشان داد:

$$L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$(s>0)$

۴) $f(t)=e^{at} \quad (a\in\mathbb{R})$

$$L\{e^{at}\}=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}\,dt=-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} \xrightarrow{s>a} L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$$

$(s>a)$

۵) $f(t)=t^p \quad (p\in\mathbb{R})$

$$L\{t^p\}=\int_0^{\infty} e^{-\overset{x}{st}}\,t^p\,dt=\frac{1}{s^{p+1}}\overbrace{\int_0^{\infty} e^{-x}x^p\,dx}^{\Gamma(p+1)}=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \quad (s>0)$$

$(s>0)$

خواص تبدیل لاپلاس:

۱) تبدیل لاپلاس و معکوس آن، عملگرهای خطی هستند:

$$L\{c_1 f + c_2 g\} = c_1 L\{f\} + c_2 L\{g\}$$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$$L^{-1}\{c_1 F_{(s)} + c_2 G_{(s)}\} = c_1 L^{-1}\{F_{(s)}\} + c_2 L^{-1}\{G_{(s)}\}$$

۶) $\begin{cases} f_{(t)} = \cos(at) \\ \quad (a \in \mathbb{R}) \\ g(t) = \sin(at) \end{cases}$ $\xrightarrow{e^{iat} = \cos at + i \sin at}$ $L\{e^{iat}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{iat} dt = -\frac{1}{s - ia} e^{-(s-ia)t} \Big|_{t=0}^{\infty}$

درس $L\{e^{iat}\} = -\frac{1}{s-ia} e^{-st} e^{iat} \Big|_{t=0}^{\infty} \overset{s>0}{=\!=} \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \overset{F_{(s)}}{\frac{s}{s^2+a^2}} + i \overset{G_{(s)}}{\frac{a}{s^2+a^2}}$

$\cos(at) + i\sin(at)$

(اویلر داریم)

درس $\begin{cases} L\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2} \\ \quad (s>0) \\ L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2} \end{cases}$

۷) $f_{(t)} = \cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$

$$L\{\cosh(at)\} = L\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2} L\{e^{at}\} + \frac{1}{2} L\{e^{-at}\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (s > |a|)$$

۸) $f_{(t)} = \sinh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$

$$L\{\sinh(at)\} = L\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2} L\{e^{at}\} - \frac{1}{2} L\{e^{-at}\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (s > |a|)$$

مثال برای خاصیت i) لاپلاس تابع $f(t)$ ، لاپلاس وارون تابع $F(s)$ را بیابید.

$$f(t)=4t^2-2\cos 3t+5e^{-t}-4\sinh(2t)+1$$

$$L\{f(t)\}=4L\{t^2\}-2L\{\cos 3t\}+5L\{e^{-t}\}-4L\{\sinh(2t)\}+L\{1\}$$

$$=4\times\frac{2!}{s^3}-2\times\frac{s}{s^2+9}+5\times\frac{1}{s+1}-4\times\frac{2}{s^2-4}+\frac{1}{s}$$

$$F(s)=\frac{5s-1}{s(s-1)(s^2+1)}$$

$$\frac{5s-1}{s(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}\rightsquigarrow\begin{cases}A=1\\B=2\\C=-3\\D=-2\end{cases}\rightsquigarrow F(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{-3s}{s^2+1}+\frac{-2}{s^2+1}$$

$$\rightsquigarrow L^{-1}\{F(s)\}=1+2e^t-3\cos t-2\sin t$$

ii) تبدیل لاپلاس مشتقات تابع : با فرض اینکه $L\{f(t)\}=F(s)$ ، داریم:

$$L\{f'(t)\}=\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{u}\underbrace{f'(t)dt}_{dv}=\underbrace{e^{-st}f(t)\Big|_{t=0}^{\infty}}_{-f(0)}+s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt}_{L\{f(t)\}=F(s)}\rightsquigarrow\boxed{L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)}$$

و به همین ترتیب داریم:

$$L\{f''(t)\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$L\{f'''(t)\}=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$$

$$\vdots$$

$$L\{f^{(n)}(t)\}=s^nF(s)+s^{n-1}f(0)---sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

توجه: معادلاتی را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس حل نمود که خطی بوده و شرایط اولیه‌ی آنها داده شده باشد.

ضریب ثابت یا متغیر بودن معادله اهمیتی ندارد.

در واقع حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیلات لاپلاس ، به یافتن جواب خصوصی معادله می‌انجامد.

مثال: به کمک تبدیل لاپلاس ، معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y^{(4)}-y=0\qquad (y(0)=y''(0)=y'''(0)=0\ ,\ y'(0)=1)$$

$$\xrightarrow{L} L\{y^{(4)}-y\}=L\{0\}\rightsquigarrow L\{y^{(4)}\}-L\{y\}=0\qquad Y(s):=L\{y\}$$

$$\rightsquigarrow s^4Y(s)-\underbrace{s^3y(0)}_{0}-\underbrace{s^2y'(0)}_{-s^2}-\underbrace{sy''(0)}_{0}-\underbrace{y'''(0)}_{0}-Y(s)=0\rightsquigarrow Y(s)=\frac{s^2}{s^4-1}=\frac{s^2}{(s^2+1)(s^2-1)}=\frac{As+B}{s^2-1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}\rightsquigarrow\begin{cases}A=C=0\\B=D=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\rightsquigarrow Y(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s^2-1}+\frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}\xrightarrow{L^{-1}}\boxed{y_p(t)=\frac{1}{2}\sinh(t)+\frac{1}{2}\sin t}$$

نکته: توابع لاپلاس پذیری که ما با آنها سروکار داریم، همواره دارای شرط $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$ می باشند.

(iii) تبدیل لاپلاس انتگرال تابع: با فرض اینکه $L\{f(t)\} = F(s)$، داریم:

$$L\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\} = I$$

$$g(t) := \int_0^t f(x)\,dx \Rightarrow g'(t) = f(t) \xrightarrow{L} L\{g'(t)\} = F(s) \Rightarrow L\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s} \Rightarrow I = \boxed{L\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s}}$$

$$g(0) = \int_0^0 f(x)\,dx = 0 \qquad sL\{g(t)\} - \cancel{g(0)}$$

مثال: به کمک تبدیل لاپلاس، معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y'' - 4y' = 1 \qquad (y(0) = y'(0) = 0)$$

$$\xrightarrow{L} L\{y''\} - 4L\{y'\} = L\{1\}$$

$$Y(s) := L\{y\}$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} - 4(sY(s) - \cancel{y(0)}) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(s-4)} = \frac{\frac{\frac{1}{s-4}}{s}}{s}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s-4}}{s}\right\} = \int_0^x e^{4u}\,du = \frac{1}{4}(e^{4x} - 1) \Rightarrow L^{-1}\{Y(s)\} = \int_0^t \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}e^{4t} - \frac{1}{4} - t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(t) = \frac{1}{16}e^{4t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{16}}$$

(iv) خاصیت انتقال اول: با فرض این که $L\{f(t)\} = F(s)$، داریم:

$$L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = F(s-a) \Rightarrow \boxed{L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)}$$

مثال: الف) لاپلاس تابع $e^{-3t}\cos 2t$ را بیابید.

$$L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4} \xrightarrow{a=-3} L\{e^{-3t}\cos 2t\} = \frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

ب) به کمک تبدیل لاپلاس، معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \qquad (y(0) = 2,\ y'(0) = -4)$$

$$\xrightarrow{L} L\{y''\} + 2L\{y'\} + 5L\{y\} = L\{0\}$$

$$Y(s) := L\{y\}$$

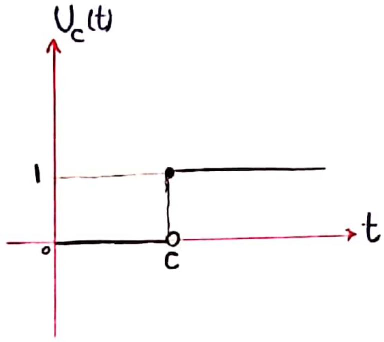
$$\Rightarrow s^2 Y(s) - \underbrace{s y(0)}_{-2s} - \underbrace{y'(0)}_{4} + 2(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{-2}) + 5Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - 2s + 4 + 2sY(s) - 4 + 5Y(s) = 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{2s}{s^2+2s+5} = \frac{2s+2-2}{(s+1)^2+4} = 2\frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

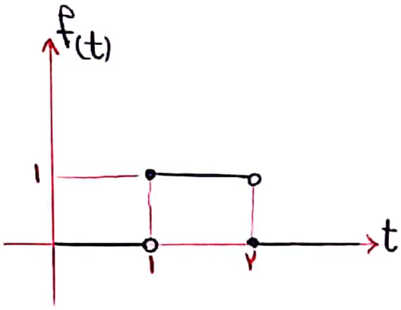
$$\Rightarrow \boxed{y_p(t) = 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t}$$

تابع پله‌ای واحد به ازای $c \geq 0$ تعریف می‌کنیم: (Heaviside)

$$U_c(t) := \begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$



مثال: ضابطه‌ی $f(t)$ را برحسب تابع پله‌ای واحد بنویسید.



$$f(t)=U_1(t)-U_2(t)$$

۱۷) تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد:

$$L\{U_c(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}U_c(t)\,dt=\int_c^\infty e^{-st}\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=c}^{\infty}=\frac{e^{-cs}}{s}\ ;(s>0) \Rightarrow \boxed{L\{U_c(t)\}=\frac{e^{-cs}}{s}\ ;(s>0)}$$

مثال:

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s}\right\}=U_\pi(t)$$

۱۸) خاصیت انتقال دوم: با فرض این که $L\{f(t)\}=F(s)$، داریم:

$$L\{U_c(t)f(t-c)\}=\int_{c}^{\infty} e^{\overset{-s(x+c)}{-st}} f(\underset{x}{t-c})\,\underset{dx}{dt}=\int_0^\infty e^{-sx-cs}f(x)\,dx=e^{-cs}\underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx}_{F(s)}=e^{-cs}F(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{L\{U_c(t)f(t-c)\}=e^{-cs}F(s)}$$

مثال: لاپلاس تابع $f(t)$ و لاپلاس وارون تابع $F(s)$ را بیابید.

$$f(t)=\begin{cases} \sin t & 0\leq t<\frac{\pi}{4} \\ \sin t+\cos(t-\frac{\pi}{4}) & t\geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t)=\sin t+U_{\frac{\pi}{4}}(t)\cos(t-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow L\{f(t)\}=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{s}{s^2+1}$$

ترم مشترک — محل عوض شدن ضابطه — ترم غیرمشترک

$$F(s)=\frac{1-e^{-2s}}{s^2} \Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}=t-U_2(t)(t-2)=\begin{cases} t & 0\leq t<2 \\ 2 & t\geq 2 \end{cases}$$

پیچش: پیچش دو تابع $f(t)$, $g(t)$ را به صورت $(f*g)(t)$ نمایش می‌دهیم و داریم: (Convolution)

$$(f*g)_{(t)} := \int_0^t f_{(x)}\, g(t-x)\, dx$$

خواص پیچش:

(i) $f*g = g*f$ (ii) $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$ (iii) $f*(g*h) = (f*g)*h$

(iv) $f*0 = 0*f = 0$ (v) $f*1 = 1*f \neq f$

ادامه‌ی خواص لاپلاس: (vii) اگر $L\{f_{(t)}\} = F_{(s)}$, $L\{g(t)\} = G_{(s)}$ آنگاه:

$$L\{(f*g)_{(t)}\} = L\{f_{(t)}\}L\{g(t)\} = F_{(s)}G_{(s)} \quad \text{یا} \quad (f*g)_{(t)} = L^{-1}\{F_{(s)}G_{(s)}\}$$

مثال: الف) لاپلاس وارون $F_{(s)} = \dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}$ را به دست آورید.

$$L^{-1}\{F_{(s)}\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = t * \sin(at) = \int_0^t x \sin(a(t-x))\, dx \quad \text{Ⓐ}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x \rightsquigarrow du = dx \\ dv := \sin(a(t-x))\,dx \rightsquigarrow v = \frac{1}{a}\cos(a(t-x)) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Ⓐ}} L^{-1}\{F_{(s)}\} = \frac{x}{a}\cos(a(t-x))\Big|_{x=0}^{t} - \frac{1}{a}\int_0^t \cos(a(t-x))\,dx$$

$$\rightsquigarrow L^{-1}\{F_{(s)}\} = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\sin(a(t-x))\Big|_{x=0}^{t} = \frac{t}{a} - \frac{\sin(at)}{a^2} = \frac{at-\sin(at)}{a^2} \rightsquigarrow L^{-1}\{F_{(s)}\} = \frac{at-\sin(at)}{a^2}$$

ب) به کمک تبدیل لاپلاس، معادله‌ی دیفرانسیل ـ انتگرال زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y''_{(t)} + y'_{(t)} = \cos t + \int_0^t y'_{(x)} \sin(t-x)\,dx \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{L} L\{y''\} + L\{y'\} = L\{\cos t\} + L\left\{\int_0^t y'_{(x)}\sin(t-x)\,dx\right\}$$

$$\xrightarrow{Y_{(s)} := L\{y\}} s^2 Y_{(s)} - s\cancel{y_{(0)}} - \cancel{y'_{(0)}} + sY_{(s)} - \cancel{y_{(0)}} = \frac{s}{s^2+1} + L\{y'_{(t)} * \sin t\}$$

$$\rightsquigarrow (s^2+s)Y_{(s)} = \frac{s}{s^2+1} + L\{y'\}L\{\sin t\} = \frac{s}{s^2+1} + (sY_{(s)} - \cancel{y_{(0)}})\left(\frac{1}{1+s^2}\right) = \frac{s}{s^2+1}(Y_{(s)}+1)$$

$$\rightsquigarrow (s+1)Y_{(s)} = \frac{1}{s^2+1}(Y_{(s)}+1) \rightsquigarrow (s^3+s^2+s+1)Y_{(s)} = Y_{(s)}+1 \rightsquigarrow Y_{(s)} = \frac{1}{s(s^2+s+1)} \quad \text{Ⓑ}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} = \frac{2}{\sqrt{3}}L^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} = \underbrace{\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{h(t)} \quad \text{Ⓒ}$$

$$\xrightarrow{\text{Ⓑ,Ⓒ}} L^{-1}\{Y_{(s)}\} = (h*1)_{(t)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^t e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}I \quad \text{Ⓓ}$$

Scanned by CamScanner

$$\left.\begin{aligned} u &:= \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) \Rightarrow du = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx \\ dv &:= e^{-\frac{x}{2}}dx \Rightarrow v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = -2e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\Big|_{x=0}^{t} - \int_0^t -\sqrt{3}\,e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx$$

$$\Rightarrow I = -2e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\int_0^t e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx = -2e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\,J \quad (E)$$

$$\left.\begin{aligned} r &:= \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) \Rightarrow dr = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx \\ ds &:= e^{-\frac{x}{2}}dx \Rightarrow s = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow J = -2e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\Big|_{x=0}^{t} - \int_0^t \sqrt{3}\,e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx$$

$$\Rightarrow J = -2e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 2 - \sqrt{3}\underbrace{\int_0^t e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx}_{I} \quad (F)$$

$$\xrightarrow{(E),(F)} I = -2e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 2\sqrt{3}\,e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 2\sqrt{3} - 3I$$

$$\Rightarrow I = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \overset{(D)}{\Rightarrow} L^{-1}\{Y_{(s)}\} = \tfrac{-1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) - e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(t) = 1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}$$

(viii) تبدیل لاپلاس توابع متناوب: فرض کنیم $f_{(t)}$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب p باشد (یعنی: $\forall t\in D_f;\ f_{(t+p)}=f_{(t)}$)؛ آنگاه:

$$L\{f_{(t)}\} = \int_0^\infty e^{-st}f_{(t)}dt = \int_0^p e^{-st}f_{(t)}dt + \int_p^\infty e^{-st}f_{(t)}dt$$

$$\int_p^\infty e^{-st}f_{(t)}dt \;\xrightarrow{x=t-p}\; \int_0^\infty e^{-s(x+p)}f_{(x+p)}dx$$

$$\Rightarrow L\{f_{(t)}\} = \int_0^p e^{-st}f_{(t)}dt + e^{-sp}\int_0^\infty e^{-sx}\underbrace{f_{(x+p)}}_{f_{(x)}}dx = \int_0^p e^{-st}f_{(t)}dt + e^{-sp}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}f_{(t)}dt}_{L\{f_{(t)}\}}$$

$$\Rightarrow (1-e^{-sp})L\{f_{(t)}\} = \int_0^p e^{-st}f_{(t)}dt \Rightarrow \boxed{L\{f_{(t)}\} = \frac{1}{1-e^{-sp}}\int_0^p e^{-st}f_{(t)}dt}$$

مثال: لاپلاس توابع $f(t)=\sin t$ ، $g(t)=t-[t]$ را با استفاده از دوره‌ی تناوبشان به دست آورید.

$$L\{\sin t\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}\sin t\,dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\, I \quad (A)$$

$$\left.\begin{array}{l} u:=\sin t \rightsquigarrow du=\cos t\,dt \\ dv:=e^{-st}dt \rightsquigarrow v=\frac{-1}{s}e^{-st}\end{array}\right\} \rightsquigarrow I=-\frac{1}{s}\cancel{e^{-st}\sin t\Big|_{t=0}^{2\pi}}+\frac{1}{s}\int_0^{2\pi} e^{-st}\cos t\,dt=\frac{1}{s}J \quad (B)$$

$$\left.\begin{array}{l} r:=\cos t \rightsquigarrow dr=-\sin t\,dt \\ dq:=e^{-st}dt \rightsquigarrow q=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{array}\right\} \rightsquigarrow J=-\frac{1}{s}e^{-st}\cos t\Big|_{t=0}^{2\pi}-\frac{1}{s}\int_0^{2\pi} e^{-st}\sin t\,dt=\frac{-e^{-2\pi s}}{s}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s}I \quad (C)$$

$$(B),(C) \longrightarrow I=\frac{1}{s}\left(\frac{1-e^{-2\pi s}}{s}-\frac{1}{s}I\right) \rightsquigarrow \left(1+\frac{1}{s^2}\right)I=\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2} \rightsquigarrow I=\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1} \quad (D)$$

$$(A),(D) \longrightarrow \boxed{L\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}}$$

$$L\{t-[t]\}=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-st}(\overset{t}{\cancel{t-[t]}})dt=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 te^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-s}}\left(\frac{-t}{s}e^{-st}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big|_{t=0}^{1}$$

$$\rightsquigarrow L\{t-[t]\}=\frac{1}{1-e^{-s}}\left(\frac{-1}{s}e^{-s}-\frac{e^{-s}}{s^2}-\left(-\frac{1}{s^2}\right)\right)=\frac{1}{1-e^{-s}}\left(\frac{-se^{-s}-e^{-s}+1}{s^2}\right)=\frac{-e^{-s}(s+1)+1}{s^2(1-e^{-s})}$$

(۱۲) مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس: فرض کنیم $L\{f(t)\}=F(s)$ ؛ آنگاه:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$F'(s)=\int_0^\infty e^{-st}.(-tf(t))\,dt=L\{-tf(t)\}=-L\{tf(t)\}$$

$$F''(s)=L\{t^2f(t)\}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{F^{(n)}(s)=(-1)^n L\{t^n f(t)\} \ \text{یا}\ L^{-1}\{F^{(n)}(s)\}=(-1)^n t^n f(t)}$$

مثال: موارد خواسته شده را به دست آورید.

$$1)\ L\{t^2\sin t\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right)=\frac{-2(s^2+1)^2+2s.4s(s^2+1)}{(s^2+1)^4}$$

$$\rightsquigarrow L\{t^2\sin t\}=\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

$$2)\ L\{te^{-t}\cos t\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)=\frac{-\left((s+1)^2+1-2(s+1)^2\right)}{((s+1)^2+1)^2}=\frac{(s+1)^2-1}{((s+1)^2+1)^2}$$

$$3)\ \int_0^\infty te^{-2t}\sin t\,dt=\int_0^\infty e^{-\overset{s}{2}t}(t\sin t)\,dt=F(2)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\Big|_{s=2}=\frac{2s}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2}=\frac{4}{25}$$

$$F(s):=L\{t\sin t\}$$

۴) $L^{-1}\{tg^{-1}(\frac{1}{s})\}$

$(s>0)$

$$F_{(s)}=tg^{-1}(\tfrac{1}{s}) \rightsquigarrow F'_{(s)}=\frac{\frac{-1}{s^2}}{1+(\frac{1}{s})^2}=\frac{-1}{1+s^2} \rightsquigarrow L^{-1}\{F'_{(s)}\}=L^{-1}\{\frac{-1}{1+s^2}\}=-\sin t \quad A$$

$$L^{-1}\{F'_{(s)}\}=-t\,f_{(t)} \overset{A}{\rightsquigarrow} \boxed{f_{(t)}=\frac{\sin t}{t}}$$

۵) $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\,Ln(\frac{s}{s-1})\}=f_{(t)}*g(t)$ B

$f_{(t)}:=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}=\cos t$ C

$g(t):=L^{-1}\{Ln(\frac{s}{s-1})\}$

$$G_{(s)}=Ln(\frac{s}{s-1})=Ln(s)-Ln(s-1) \rightsquigarrow G'_{(s)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} L^{-1}\{G'_{(s)}\}=1-e^{t} \\ L^{-1}\{G'_{(s)}\}=-t\,g(t) \end{array}\right\} \rightarrow g(t)=\frac{e^{t}-1}{t} \quad D$$

$$\xrightarrow{B,\,C,\,D} L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\,Ln(\frac{s}{s-1})\}=\cos t * \frac{e^{t}-1}{t}=\cdots$$

(۱۸) انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس: فرض کنیم $L\{f(t)\}=F_{(s)}$ ، آنگاه:

$$\boxed{L\{\frac{f(t)}{t}\}=\int_s^{\infty}F_{(u)}\,du}$$

مثال: موارد خواسته شده را بیابید.

۱) $L\{\frac{\sin t}{t}\}=\int_s^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du=tg^{-1}(u)\Big|_{u=s}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-tg^{-1}(s)$

$$\xrightarrow{\text{if } s>0 \rightsquigarrow tg^{-1}(s)+tg^{-1}(\frac{1}{s})=\frac{\pi}{2}} L\{\frac{\sin t}{t}\}=tg^{-1}(\tfrac{1}{s})$$

۲) $L\{\frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{t}\}=L\{\frac{1-\cos t}{t}\}=\int_s^{\infty}(\frac{1}{u}-\frac{u}{u^2+1})\,du=\left(Ln(u)-\frac{1}{2}Ln(u^2+1)\right)\Big|_{u=s}^{\infty}=Ln(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}})\Big|_{u=s}^{\infty}$

$$\rightsquigarrow L\{\frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{t}\}=0-Ln(\frac{s}{\sqrt{s^2+1}})=Ln(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s})$$

۳) $\int_0^{\infty}e^{-t}\,\frac{1-\cos t}{t}\,dt=F_{(1)}$ A

$$F_{(s)}:=L\{\frac{1-\cos t}{t}\} \overset{\text{طبق مورد ۲}}{\rightsquigarrow} F_{(s)}=Ln(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}) \rightsquigarrow F_{(1)}=Ln(\sqrt{2})=\frac{1}{2}Ln(2) \quad B$$

$$\xrightarrow{A,\,B} \int_0^{\infty}e^{-t}\,\frac{1-\cos t}{t}\,dt=\frac{1}{2}Ln(2)$$

$$F)\ L\Big\{e^{t}\underbrace{\int_0^t e^{-2x}\,\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx}_{f(t)}\Big\} = L\{e^{t}f(t)\} = F_1(S-1) \quad Ⓐ$$

$$F_1(S) := L\Big\{\int_0^t e^{-2x}\,\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx\Big\} = \frac{F_2(S)}{S} \quad Ⓑ$$

$$F_2(S) := L\Big\{e^{-2x}\,\frac{1-e^{-x}}{x}\Big\} = F_3(S+2) \quad Ⓒ$$

$$F_3(S) := L\Big\{\frac{1-e^{-x}}{x}\Big\} = \int_S^{\infty}\Big(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\Big)du = Ln\Big(\frac{u}{u+1}\Big)\Big|_{u=S}^{\infty} = 0 - Ln\Big(\frac{S}{S+1}\Big) = Ln\Big(\frac{S+1}{S}\Big) \quad Ⓓ$$

$$Ⓒ,Ⓓ \longrightarrow F_2(S) = Ln\Big(\frac{S+3}{S+2}\Big) \xrightarrow{Ⓑ} F_1(S) = \frac{1}{S}\,Ln\Big(\frac{S+3}{S+2}\Big) \xrightarrow[Ⓐ]{} L\Big\{e^{t}\int_0^t e^{-2x}\,\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx\Big\} = \frac{1}{S-1}\,Ln\Big(\frac{S+2}{S+1}\Big)$$

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

1) $\begin{cases} y''+3ty'-6y=2 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{L} L\{y''\}+3L\{ty'\}-6L\{y\}=L\{2\}$

$\xrightarrow{L\{y\}:=Y(s)} s^2Y(s)-s\cancel{y(0)}-\cancel{y'(0)}+3\times\frac{-d}{ds}\left(sY(s)-\cancel{y(0)}\right)-6Y(s)=\frac{2}{s}$

$\longrightarrow s^2Y(s)-3\left(Y(s)+sY'(s)\right)-6Y(s)=\frac{2}{s}\longrightarrow -3sY'(s)+(s^2-9)Y(s)=\frac{2}{s}$

$\longrightarrow Y'(s)-\frac{s^2-9}{3s}Y(s)=\frac{-2}{3s^2}\longrightarrow Y'(s)+\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\right)Y(s)=\frac{-2}{3s^2}$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$p(s)=\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\ ,\ q(s)=\frac{-2}{3s^2}$

$$\mu(s):=e^{\int p(s)ds}=e^{\int\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\right)ds}=e^{3\ln(s)-\frac{s^2}{6}}=s^3e^{-\frac{s^2}{6}}$$

$$Y(s)=\frac{1}{\mu(s)}\left(\int\mu(s)q(s)ds+C\right)=\frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}\left(\int-\frac{2}{3}se^{-\frac{s^2}{6}}ds+C\right)=\frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}\left(2e^{-\frac{s^2}{6}}+C\right)$$

$\longrightarrow Y(s)=\frac{2+Ce^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}$

برای اینکه بتوانیم از $Y(s)$ وارون بگیریم، باید ثابت C را مشخص کنیم:

$\lim_{s\to+\infty}Y(s)=0\longrightarrow C=0\longrightarrow Y(s)=\frac{2}{s^3}\xrightarrow{L^{-1}}\boxed{y_p(t)=t^2}$

2) $\begin{cases} ty''-ty'+y=2 \\ y(0)=2\ ,\ y'(0)=-4 \end{cases}$ $\xrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+\frac{d}{ds}\left(sY(s)-y(0)\right)+Y(s)=\frac{2}{s}$

$\longrightarrow -2sY(s)-s^2Y'(s)+2+Y(s)+sY'(s)+Y(s)=\frac{2}{s}$

$\longrightarrow (-s^2+s)Y'(s)+(-2s+2)Y(s)+2=\frac{2}{s}$

$\longrightarrow Y'(s)+\frac{2}{s}Y(s)=\frac{2}{s^2}$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$p(s)=\frac{2}{s}\ ,\ q(s)=\frac{2}{s^2}$

$$\mu(s):=e^{\int p(s)ds}=e^{\int\frac{2ds}{s}}=e^{2\ln(s)}=s^2$$

$$Y(s)=\frac{1}{\mu(s)}\left(\int\mu(s)q(s)ds+C\right)=\frac{1}{s^2}\left(\int 2ds+C\right)=\frac{2}{s}+\frac{C}{s^2}\xrightarrow{L^{-1}}y_p(t)=2+Ct\rightarrow y_p'(t)=C$$

$y'(0)=-4\longrightarrow C=-4\longrightarrow\boxed{y_p(t)=2-4t}$

مثال ۵: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

۱) $J_0(t)$:

معادله‌ای که $J_0(t)$ جواب آن است: $t^2y''+ty'+(t^2-0)y=0 \xrightarrow{t\neq 0} ty''+y'+ty=0$

$$\xrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s)-s\cancel{y(0)}-\cancel{y'(0)}\right)+sY(s)-\cancel{y(0)}-Y'(s)=0$$

$$\longrightarrow -2sY(s)-s^2Y'(s)+sY(s)-Y'(s)=0 \longrightarrow (s^2+1)Y'(s)+sY(s)=0 \longrightarrow Y'(s)+\frac{s}{s^2+1}Y(s)=0$$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$p(s)=\frac{s}{s^2+1}$, $q(s)=0$

$$\mu(s):=e^{\int p(s)\,ds}=e^{\int\frac{s}{s^2+1}ds}=e^{\frac{1}{2}\ln(s^2+1)}=\sqrt{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{\mu(s)}\left(\int\mu(s)\underbrace{q(s)}_{0}ds+c\right)=\frac{c}{\sqrt{s^2+1}} \quad (A)$$

$$L\{J_0'(t)\}=sL\{J_0(t)\}-\underbrace{J_0(0)}_{1} \xrightarrow{(A)} L\{J_0'(t)\}=\frac{cs}{\sqrt{s^2+1}}-1 \quad (B)$$

$$\lim_{s\to+\infty}\left(L\{J_0'(t)\}\right)=0 \xrightarrow{(B)} c-1=0 \longrightarrow c=1 \longrightarrow \boxed{L\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}}$$

۲) $J_0(\sqrt{t})$:

$$J_0(\sqrt{t})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2\,2^{2n}} \xrightarrow{L} L\{J_0(\sqrt{t})\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cancel{n!}}{(n!)^{\cancel{2}}\,2^{2n}\,s^{n+1}}$$

$$\longrightarrow L\{J_0(\sqrt{t})\}=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-1}{4s}\right)^n}{n!}=\frac{1}{s}e^{\frac{-1}{4s}} \longrightarrow \boxed{L\{J_0(\sqrt{t})\}=\frac{1}{s}e^{\frac{-1}{4s}}}$$

۳) $J_1(t)$:

$$J_1(t)=-J_0'(t) \xrightarrow{L} L\{J_1(t)\}=-sL\{J_0(t)\}+J_0(0)=\frac{-s}{\sqrt{s^2+1}}+1$$

$$\longrightarrow \boxed{L\{J_1(t)\}=\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}}$$

(ب) اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد؛ آنگاه: $L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
$(a>0)$

اثبات:

$$L\{f(at)\}=\int_0^\infty e^{-st} f(at)\,dt$$

$$x:=at \to t=\frac{x}{a} \to dt=\frac{dx}{a} \to L\{f(at)\}=\int_0^\infty e^{-(\frac{s}{a})x} f(x)\frac{dx}{a}=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

۴) $J_0(2t)$:

$$L\{J_0(2t)\}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(\frac{s}{2})^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{s^2+4}}$$

نکته: به طور کلی تبدیل لاپلاس $J_0(at)$ برابر است با:

$$L\{J_0(at)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\begin{cases} ty''+y'+4ty=0 \\ y(0)=3\ ,\ y'(0)=0 \end{cases} \xrightarrow{L} L\{ty''\}+L\{y'\}+4L\{ty\}=0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))+sY(s)-y(0)+4\times\frac{-d}{ds}Y(s)=0$$

$$-2sY(s)-s^2Y'(s)+3+sY(s)-3-4Y'(s)=0$$

$$-(s^2+4)Y'(s)-sY(s)=0 \to Y'(s)+\frac{s}{s^2+4}Y(s)=0$$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول

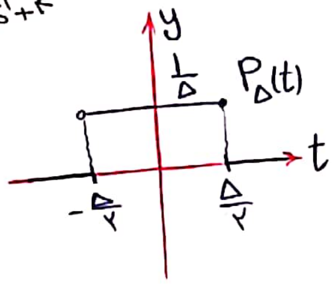
$p(s)=\frac{s}{s^2+4}\ ,\ q(s)=0$

$$\mu(s):=e^{\int p(s)ds}=e^{\int\frac{s}{s^2+4}ds}=e^{\frac{1}{2}\ln(s^2+4)}=\sqrt{s^2+4}$$

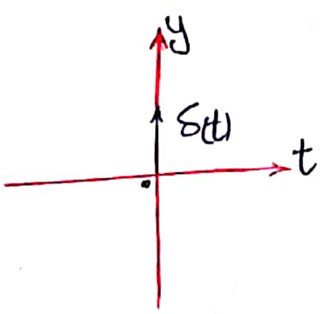
$$Y(s)=\frac{1}{\mu(s)}\left(\int\mu(s)q(s)ds+C\right)=\frac{C}{\sqrt{s^2+4}}\xrightarrow{L^{-1}}y_p(t)=CJ_0(2t)\xrightarrow{y(0)=3}C=3\to\boxed{y_p(t)=3J_0(2t)}$$

تابع دلتای دیراک:

$$P_\Delta(t):=\begin{cases}\frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2}<t<\frac{\Delta}{2} \\ 0 & t\le-\frac{\Delta}{2}\ ,\ t\ge\frac{\Delta}{2}\end{cases}$$



تابع دلتای دیراک: $\delta(t):=\lim_{\Delta\to0}P_\Delta(t)$



خواص: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1 \to$ حالت کلی: $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1$

$U_0'(t)=\delta(t)\to$ حالت کلی: $U_c'(t)=\delta(t-c)$

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)\to$ حالت کلی: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$

$L\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$ $(t_0\ge0)$ $\to$ حالت خاص: $L\{\delta(t)\}=1$

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل:

۱) روش حذفی

۲) روش تبدیل لاپلاس

۳) روش ماتریسی (مقادیر ویژه)

مثال: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش حذفی، حل کنید.

$$\begin{cases} y_2'' - 4y_1 = -4e^t \\ y_1'' - y_1 = 3y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0)=2 \\ y_2(0)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1'(0)=3 \\ y_2'(0)=2 \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم، دو بار مشتق گرفته و در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{3}\left(y_1^{(4)} - y_1''\right) - 4y_1 = -4e^t$$

$$\xrightarrow{\times 3} y_1^{(4)} - y_1'' - 12y_1 = -12e^t$$

y_{1g}: $y_1^{(4)} - y_1'' - 12y_1 = 0 \rightarrow$ معادله‌ی مشخصه: $\lambda^4 - \lambda^2 - 12 = 0 \rightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = \sqrt{3}i \\ \lambda_4 = -\sqrt{3}i \end{cases}$

$$\rightarrow y_{1g} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \cos(\sqrt{3}t) + c_4 \sin(\sqrt{3}t) \quad (A)$$

y_{1p}: $y_{1p} = Ae^t \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} A = 1 \rightarrow y_{1p} = e^t \quad (B)$

$$y_{1G} = y_{1g} + y_{1p} \xrightarrow{(A),(B)} \boxed{y_{1G} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \cos(\sqrt{3}t) + c_4 \sin(\sqrt{3}t) + e^t}$$

از معادله‌ی دوم: $y_{2G} = \frac{1}{3}\left(y_{1G}'' - y_{1G}\right)$

$$\rightarrow \boxed{y_{2G} = \frac{1}{3}\left(3c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-2t} - 4c_3 \cos(\sqrt{3}t) - 4c_4 \sin(\sqrt{3}t)\right)}$$

$$\begin{cases} y_{1G}(0) = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 + 1 = 2 \\ y_{1G}'(0) = 3 \Rightarrow 2c_1 - 2c_2 + \sqrt{3}c_4 + 1 = 3 \\ y_{2G}(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 - \frac{4}{3}c_3 = 1 \\ y_{2G}'(0) = 2 \Rightarrow 2c_1 - 2c_2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}c_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = c_3 = c_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_{1p}(t) = e^{2t} + e^t \\ y_{2p}(t) = e^{2t} \end{cases}$$

مثال: دستگاه زیر را به روش لاپلاس حل کنید.

$$\begin{cases} y_2'' - 4y_1 = -4e^t \\ y_1'' - y_1 = 3y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_1'(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 1 \\ y_2'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L} \begin{cases} s^2Y_2(s) \underbrace{- sy_2(0)}_{-s} \underbrace{- y_2'(0)}_{-2} - 4Y_1(s) = \dfrac{-4}{s-1} \\ s^2Y_1(s) \underbrace{- sy_1(0)}_{-2s} \underbrace{- y_1'(0)}_{-3} - Y_1(s) = 3Y_2(s) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -4Y_1(s) + s^2Y_2(s) = \dfrac{-4}{s-1} + s + 2 \\ (s^2-1)Y_1(s) - 3Y_2(s) = 2s+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} Y_1(s) = \dfrac{2s-3}{(s-1)(s-2)} = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s-2} \xrightarrow{L^{-1}} y_{1p}(t) = e^t + e^{2t} \\ Y_2(s) = \dfrac{1}{s-2} \xrightarrow{L^{-1}} y_{2p}(t) = e^{2t} \end{cases}$$

مقدار ویژه و بردار ویژه: ریشه‌های چند جمله‌ای $\det(A-\lambda I)=0$ را مقادیر ویژه‌ی ماتریس A می‌گوییم. بردار $X \neq \bar{0}$ را بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ گوییم هرگاه:

$$AX = \lambda X \Rightarrow (A-\lambda I)X = \bar{0}$$

تذکر: بردار ویژه‌ی X، یکتا نیست و هر مضربی از آن نیز می‌تواند بردار ویژه‌ی متناظر با λ باشد.

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A-\lambda I) = 0 \longrightarrow (\lambda+3)(\lambda+2) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+4)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

$$(A-\lambda_1 I)X_1 = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \sqrt{2}\beta = 0 \\ \sqrt{2}\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$(A-\lambda_2 I)X_2 = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^* + \sqrt{2}\beta^* = 0 \\ \sqrt{2}\alpha^* + 2\beta^* = 0 \end{cases} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} \alpha^* \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^* \end{bmatrix} \quad (\alpha^* \neq 0)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت:

$$\begin{cases} y_1'(t)=a_{11}y_1(t)+a_{12}y_2(t)+\cdots+a_{1n}y_n(t)+g_1(t) \\ y_2'(t)=a_{21}y_1(t)+a_{22}y_2(t)+\cdots+a_{2n}y_n(t)+g_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t)=a_{n1}y_1(t)+a_{n2}y_2(t)+\cdots+a_{nn}y_n(t)+g_n(t) \end{cases}$$

$$Y:=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n\times1} \qquad A:=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad G:=\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}_{n\times1}$$

$$\underbrace{Y'=AY+G}_{\text{ناهمگن}} \xrightarrow{\text{if } g_1=g_2=\cdots=g_n=0} \underbrace{Y'=AY}_{\text{همگن}}$$

باید n بردار Y_1 تا Y_n را بیابیم که هرکدام جواب دستگاه بوده و $\underbrace{\text{مستقل خطی}}_{\det([Y_1|\cdots|Y_n])\neq0}$ باشند تا بتوانیم جواب عمومی دستگاه را به صورت زیر بنویسیم:

$$Y_G=c_1Y_1+c_2Y_2+\cdots+c_nY_n$$

$$\begin{bmatrix} y_{1G} \\ y_{2G} \\ \vdots \\ y_{nG} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1y_{11}+c_2y_{12}+\cdots+c_ny_{1n} \\ c_1y_{21}+c_2y_{22}+\cdots+c_ny_{2n} \\ \vdots \\ c_1y_{n1}+c_2y_{n2}+\cdots+c_ny_{nn} \end{bmatrix}$$

(y_{ij}: درایه‌ی j اُم Y_i)

می‌توان اثبات کرد که $Y=Xe^{\lambda t}$ جواب دستگاه است:

$$Y=Xe^{\lambda t} \rightsquigarrow Y'=\lambda Xe^{\lambda t}$$

جایگذاری در معادله: $\lambda Xe^{\lambda t}\overset{?}{=}AXe^{\lambda t} \xrightarrow{\div e^{\lambda t}} \lambda X\overset{?}{=}AX$

طبق تعریف بردار ویژه، تساوی فوق برقرار است. پس $Y=Xe^{\lambda t}$ جواب دستگاه می‌باشد.

شرط مستقل خطی بودن Y_iها، مستقل خطی بودن X_i هاست.

$$\det([Y_1|\cdots|Y_n])\neq0 \rightsquigarrow \underbrace{e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}}_{\text{همواره مخالف صفر}} \det([X_1|\cdots|X_n])\neq0 \rightsquigarrow$$

اگر X_1 تا X_n، n بردار ویژه‌ی مستقل خطی متناظر با λ_1 تا λ_n برای ماتریس A باشند، آنگاه $Y_1=X_1e^{\lambda_1 t}$ تا $Y_n=X_ne^{\lambda_n t}$، n جواب مستقل خطی برای دستگاه $Y'=AY$ می‌باشند و داریم:

$$Y_G=c_1Y_1+\cdots+c_nY_n$$

مثال 3 < دستگاه های زیر را حل کنید.

1) $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + \sqrt{2}\,y_2 \\ y_2' = \sqrt{2}\,y_1 - 2y_2 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}}_{Y'} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{Y}$

طبق مثال صفحه‌ی ۳۷ $\longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \to X_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -4 \to X_2 = \begin{bmatrix} \alpha^* \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha^* \end{bmatrix} \end{cases}$

α, α^* را طوری مقدار می‌دهیم که X_1 و X_2 مستقل خطی شوند. $\longrightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} , X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{cases} Y_1 = X_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ \sqrt{2}e^{-t} \end{bmatrix} \\ Y_2 = X_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} e^{-4t} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{Y_G = c_1Y_1 + c_2Y_2} \begin{bmatrix} y_{1G}(t) \\ y_{2G}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + c_2e^{-4t} \\ \sqrt{2}c_1e^{-t} - \frac{\sqrt{2}}{2}c_2e^{-4t} \end{bmatrix}$

2) $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}}_{Y'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{Y}$

$\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow (\lambda+1)(\lambda+2-\lambda^2)=0 \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$

$(A-\lambda_1 I)X_1 = \bar{O} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

به همین ترتیب X_2 به دست می‌آید؛ فقط باید توجه کرد که X_1 و X_2 حتماً مستقل خطی باشند:

$X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$(A-\lambda_3 I)X_3 = \bar{O} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (مستقل با X_1 و X_2)

$Y_G = c_1X_1e^{\lambda_1 t} + c_2X_2e^{\lambda_2 t} + c_3X_3e^{\lambda_3 t} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_{1G}(t) \\ y_{2G}(t) \\ y_{3G}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + 2c_2e^{-t} + c_3e^{2t} \\ -c_1e^{-t} - c_2e^{-t} + c_3e^{2t} \\ -c_2e^{-t} + c_3e^{2t} \end{bmatrix}$

۳) $Y' = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{A} Y \qquad \xrightarrow{\det(A-\lambda I)=0} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ پس $(\lambda+\frac{1}{2})^2+1=0$

پس $\lambda^2+\lambda+\frac{5}{4}=0$ پس $\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2}+i \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}-i \end{cases}$

$(A-\lambda_1 I)X_1=\bar{0}$ پس $\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ پس $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

$(A-\lambda_2 I)X_2=\bar{0}$ پس $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ پس $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

$Y_1 = X_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} \cos t + i\sin t \\ -\sin t + i\cos t \end{bmatrix}$

$Y_2 = X_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-\frac{1}{2}-i)t} = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} \cos t - i\sin t \\ -\sin t - i\cos t \end{bmatrix}$

پس $\begin{cases} U := \dfrac{Y_1+Y_2}{2} = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \\ V := \dfrac{Y_1-Y_2}{2i} = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \end{cases}$

$Y_G(t) = c_1 U + c_2 V = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} c_1\cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{bmatrix}$

ماتریس مربعی

$e^{A} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$ پس $e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots \xrightarrow{A=I} e^{It} = I + tI + \frac{t^2I^2}{2!} + \frac{t^3I^3}{3!} + \cdots$

پس $e^{It} = I\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right) = Ie^t = \begin{bmatrix} e^t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^t \end{bmatrix}$

نکته 8: به ازای هر بردار دلخواه X، $Y=e^{At}X$ جواب دستگاه $Y'=AY$ است. اثبات:

$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$ پس $\frac{d}{dt}(e^{At}X) = Ae^{At}X \xrightarrow{Y=e^{At}X} Y'=AY$ ✓

e^{At} با توجه به بسط

حال طبق اطلاعات فوق، داریم:

$e^{(A-\lambda I)t} = I + (A-\lambda I)t + \frac{(A-\lambda I)^2t^2}{2!} + \cdots \xrightarrow{\times e^{\lambda I t}}$ پس $e^{At} = \underbrace{e^{\lambda It}}_{Ie^{\lambda t}}\left(I + (A-\lambda I)t + \frac{(A-\lambda I)^2t^2}{2!} + \cdots\right)$

$\times X$ پس $e^{At}X = e^{\lambda t}\left(X + \underbrace{(A-\lambda I)X}_{\bar{0}}t + \frac{(A-\lambda I)^2Xt^2}{2!} + \cdots\right) = e^{\lambda t}X$ پس $Y_1 = e^{\lambda t}X$

اگر نتوانیم یک بردار ویژه‌ی مستقل خطی با X، متناظر با λ_2 بیابیم، برای Y_2 مستقل از Y_1 داریم:

فرض کنیم $X=(A-\lambda I)N \Longrightarrow (A-\lambda I)^2 N=(A-\lambda I)X=\bar{0}$

$$Y_2:=e^{At}N=e^{\lambda t}\Big(N+\underbrace{(A-\lambda I)N}_{X}t+\frac{\overbrace{(A-\lambda I)^2N}^{\bar{0}}}{2!}+\dots\Big)=Ne^{\lambda t}+Xte^{\lambda t}$$

با توجه به انتهای صفحه‌ی ۶۴

و به همین ترتیب اگر λ_3 نیز با λ_1 و λ_2 برابر باشد و نتوانیم بردار ویژه‌ی مستقل خطی با X بیابیم، برای Y_3 مستقل از Y_1 و Y_2 داریم:

$$N=(A-\lambda I)M \Longrightarrow X=(A-\lambda I)^2M \Longrightarrow Y_3=Me^{\lambda t}+Nte^{\lambda t}+X\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}$$

همینطور برای Y_4:

$$(A-\lambda I)P=M \longrightarrow Y_4=Pe^{\lambda t}+Mte^{\lambda t}+N\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}+X\frac{t^3}{3!}e^{\lambda t}$$

و ...

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$Y'=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}}_{A}Y$$

$$\underrightarrow{\det(A-\lambda I)=0}\ \det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{bmatrix}\right)=(\lambda-1)(\lambda-3)+1=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=2$$

$$(A-\lambda_1 I)X_1=\bar{0} \Longrightarrow \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Longrightarrow X_1=\begin{bmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{bmatrix}\ (\alpha\neq 0) \xrightarrow{\alpha=1} Y_1=e^{2t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

دو بردار ویژه‌ی مستقل ندارد.

فرض می‌کنیم $(A-\lambda I)N=X_1 \Longrightarrow \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \Longrightarrow n_1+n_2=-1 \xrightarrow{\text{دلخواه}} N=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$

$$Y_2=Ne^{2t}+tX_1e^{2t}=e^{2t}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\ -t\end{bmatrix}e^{2t}=e^{2t}\begin{bmatrix}t-1\\ -t\end{bmatrix}$$

$$Y_G=c_1Y_1+c_2Y_2=\begin{bmatrix}c_1e^{2t}+c_2(t-1)e^{2t}\\ -c_1e^{2t}-c_2te^{2t}\end{bmatrix}$$

مثال: دستگاه ناهمگن زیر را به روش ضرایب نامعین حل کنید.

$$Y' = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} Y + \underbrace{\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}}_{F}$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow (\lambda+2)^2-1=0 \Rightarrow \lambda^2+4\lambda+3=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-1 \\ \lambda_2=-3 \end{cases}$$

$$(A-\lambda_1 I)X_1=\bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha=\beta \xRightarrow{\text{دلخواه}} X_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Y_1=e^{\lambda_1 t}X_1=\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)X_2=\bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha^*=-\beta^* \xRightarrow{\text{دلخواه}} X_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Y_2=e^{\lambda_2 t}X_2=\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}$$

جواب عمومی فرم همگن $Y_g(t)=c_1Y_1+c_2Y_2=\begin{bmatrix} c_1e^{-t}+c_2e^{-3t} \\ c_1e^{-t}-c_2e^{-3t} \end{bmatrix}$ (A)

$$F(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}e^{-t}+\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}t \Rightarrow Y_p(t)=Pte^{-t}+Qe^{-t}+Rt+S \quad (1)$$

$\lambda=-1$ مقدار ویژه است.

(P، Q، R, S بردار هستند)

جایگذاری در معادله:
$$Pe^{-t}-Pte^{-t}-Qe^{-t}+R=APte^{-t}+AQe^{-t}+ARt+AS+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}e^{-t}+\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}t$$

(te^{-t}): $AP+P=\bar{0} \Rightarrow P=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ (پارامتری نوشتیم چون به معادله ی ۲ هم بستگی دارد)

(e^{-t}): $P-Q-AQ=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=2-m_1 \\ \alpha-\beta=m_1 \end{cases} \Rightarrow m_1=1 \Rightarrow P=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2)

(t): $-AR=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow R=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (3)

(بردارهای ثابت): $R-AS=\bar{0} \Rightarrow S=\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (4)

$$(1),(2),(3),(4) \longrightarrow Y_p(t)=\begin{bmatrix} te^{-t}+e^{-t}+t-\frac{4}{3} \\ te^{-t}+2t-\frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad (B)$$

$$Y_G(t)=Y_g(t)+Y_p(t) \xrightarrow[(B)]{(A)} Y_G(t)=\begin{bmatrix} c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}+te^{-t}+e^{-t}+t-\frac{4}{3} \\ c_1e^{-t}-c_2e^{-3t}+te^{-t}+2t-\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

مثال 3: فرم کلی جواب خصوصی دستگاه‌های زیر را بنویسید. (به دست آوردن ضرایب الزامی نیست)

1) $y' = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} y + \underbrace{\begin{bmatrix} e^t \\ 1 \end{bmatrix}}_{F}$

$$\xrightarrow{\det(A-\lambda I)=0} (\lambda+1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y_p(t) = Pte^t + Qe^t + R$$

$\lambda_2 = 1$ مقدار ویژه است.

2) $y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} y + \underbrace{\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos 2t \end{bmatrix}}_{F}$

$$\xrightarrow{\det(A-\lambda I)=0} (\lambda-1)(\lambda-4) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 2t \Rightarrow y_p(t) = P\sin t + Q\cos t + R\cos 2t + S\sin 2t$$

3) $y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} y + \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t} \\ \sin 2t \end{bmatrix}}_{F}$

$$\xrightarrow{\det(A-\lambda I)=0} (\lambda-1)(\lambda+1) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2i \\ \lambda_2 = -2i \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2t \Rightarrow y_p(t) = Pe^{2t} + (Qt+R)\sin 2t + (St+T)\cos 2t$$

$\lambda_1 = 2i$ مقدار ویژه است.

۴) $y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} y + \underbrace{\begin{bmatrix} -t & -1 \\ -4t & -2 \end{bmatrix}}_{F}$

$$\xrightarrow{\det(A-\lambda I)=0} (\lambda-1)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow Y_p(t) = Pt + Q$$

۵) $y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} y + \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} \\ 6e^{t} \end{bmatrix}}_{F}$

$$\xrightarrow{\det(A-\lambda I)=0} (\lambda-3)(\lambda+1) + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} e^{t} \Longrightarrow Y_p(t) = Pe^{3t} + (Qt^2 + Rt + S)e^{t}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ مقادیر ویژه هستند.

حل دستگاه ناهمگن به روش ماتریسی: فرم کلی این دستگاه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\dots+a_{1n}x_n(t)+f_1(t) \\ x_2'(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\dots+a_{2n}x_n(t)+f_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\dots+a_{nn}x_n(t)+f_n(t) \end{cases} \longrightarrow X'_{(t)}=AX_{(t)}+F_{(t)}$$

جواب عمومی دستگاه: $X_G(t)=X_g(t)+X_p(t)$

$X_g(t)$: جواب عمومی دستگاه همگن $X'=AX$

$X_p(t)$: جواب خصوصی دستگاه ناهمگن $X'=AX+F_{(t)}$

نحوه‌ی یافتن جواب خصوصی دستگاه: می‌دانیم $X_g(t)=c_1X_1+c_2X_2+\dots+c_nX_n$؛ قرار می‌دهیم:

$$\Phi_{(t)}:=\begin{bmatrix} X_1(t) & X_2(t) & - & X_n(t)\end{bmatrix}_{n\times n}$$

و همینطور $V'_{(t)\,n\times1}=\Phi^{-1}_{(t)\,n\times n}F_{(t)\,n\times1}$؛ بنابراین $V_{(t)}=\int\Phi^{-1}_{(t)}F_{(t)}\,dt$ و در نهایت $X_p(t)=\Phi_{(t)}V_{(t)}$.

نتیجه‌ی نهایی:

$$\boxed{X_p(t)=\Phi_{(t)}\int\Phi^{-1}_{(t)}F_{(t)}\,dt}$$

مثال: دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$1)\begin{cases} \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+5x+3y=e^{-t} & (A) \\ 2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+x+y=3 & (B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(B)-(A)} \frac{dx}{dt}-4x-2y=3-e^{-t} \\ \xrightarrow{2(A)-(B)} \frac{dy}{dt}+9x+5y=2e^{-t}-3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x'=4x+2y+3-e^{-t} \\ y'=-9x-5y+2e^{-t}-3 \end{cases}$$

فرم ماتریسی دستگاه:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{X'}=\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}+\underbrace{\begin{bmatrix} 3-e^{-t} \\ 2e^{-t}-3 \end{bmatrix}}_{F}$$

حل قسمت همگن:

$$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -9 & -5-\lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow (\lambda+5)(\lambda-4)+18=0$$

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1)=0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-2 \\ \lambda_2=1 \end{cases}$$

$$(A-\lambda_1 I)V_1=\bar{0} \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 6t_1+2t_2=0 \\ -9t_1-3t_2=0 \end{cases} \xrightarrow{t_1=1} t_2=-3 \longrightarrow V_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \longrightarrow X_1=e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)V_2=\bar{0} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 3t_3+2t_4=0 \\ -9t_3-6t_4=0 \end{cases} \xrightarrow{t_3=2} t_4=-3 \longrightarrow V_2=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \longrightarrow X_2=e^{t}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{(t)}=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{t} \\ -3e^{-2t} & -3e^{t} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(\Phi_{(t)})=-3e^{-t}+6e^{-t}=3e^{-t} \longrightarrow \Phi^{-1}_{(t)}=\frac{1}{3}e^{t}\begin{bmatrix} -3e^{t} & -2e^{t} \\ 3e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \Phi^{-1}(t)=\begin{bmatrix} -e^{2t} & -\frac{2}{3}e^{2t} \\ e^{-t} & \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix} \longrightarrow V'_{(t)}=\Phi^{-1}_{(t)}F_{(t)}=\begin{bmatrix} -e^{2t} & -\frac{2}{3}e^{2t} \\ e^{-t} & \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3-e^{-t} \\ 2e^{-t}-3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow V'_{(t)}=\begin{bmatrix} -3e^{2t}+e^{t}-\frac{4}{3}e^{t}+2e^{2t} \\ 3e^{-t}-e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-2t}-e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -e^{2t}-\frac{1}{3}e^{t} \\ 2e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-2t} \end{bmatrix} \xrightarrow{\int} V_{(t)}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{t} \\ -2e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow X_{p(t)}=\Phi_{(t)}V_{(t)}=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{t} \\ -3e^{-2t} & -3e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{t} \\ -2e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}e^{-t}-4+\frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{3}{2}+e^{-t}+6-\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{15}{2}+\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

جواب عمومی دستگاه: $X_{G(t)}=X_g(t)+X_p(t)=c_1X_1+c_2X_2+X_p(t) \longrightarrow \boxed{X_{G(t)}=\begin{bmatrix} c_1e^{-2t}+2c_2e^{t}-\frac{9}{2} \\ -3c_1e^{-2t}-3c_2e^{t}+\frac{15}{2}+\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}}$

2) $$Y'_{(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{A}Y_{(t)}+\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{Cotg}(t) \end{bmatrix}}_{F_{(t)}}$$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)+2=0 \longrightarrow \lambda^2+1=0 \longrightarrow \lambda=\pm i$$

$$(A-\lambda_1 I)V_1=\bar{0} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -(1+i)t_1+t_2=0 \\ -2t_1+(1-i)t_2=0 \end{cases} \xrightarrow{t_1=1} t_2=1+i \longrightarrow V_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

$$e^{\lambda_1 t}V_1=e^{it}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos t+i\sin t \\ \cos t-\sin t+i(\cos t+\sin t) \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t-\sin t \end{bmatrix}}_{Y_1(t)}+i\underbrace{\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t+\sin t \end{bmatrix}}_{Y_2(t)}$$

$$\Phi_{(t)}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ \cos t-\sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix}\longrightarrow \det(\Phi_{(t)})=1\longrightarrow \Phi^{-1}_{(t)}=\begin{bmatrix}\cos t+\sin t & -\sin t\\ -\cos t+\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

$$V'_{(t)}=\Phi^{-1}_{(t)}F_{(t)}=\begin{bmatrix}\cos t+\sin t & -\sin t\\ \sin t-\cos t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \cot g t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin t\\ \sin t-\cos t+\dfrac{\cos^2 t}{\sin t}\end{bmatrix} \quad Ⓐ$$

$$\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int\frac{1}{\sin t}dt-\int \sin t\,dt=\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\sin t}-\cot g t\right)+\cos t=\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)+\cos t \quad Ⓑ$$

$$Ⓐ,Ⓑ\longrightarrow V_{(t)}=\begin{bmatrix}-\cos t\\ -\sin t+\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)\end{bmatrix}\longrightarrow Y_p(t)=\Phi_{(t)}V_{(t)}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ \cos t-\sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos t\\ -\sin t+\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow Y_p(t)=\begin{bmatrix}\sin t\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)-1\\ (\cos t+\sin t)\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)-1\end{bmatrix}$$

$$Y_G(t)=c_1Y_1(t)+c_2Y_2(t)+Y_p(t)=\begin{bmatrix}c_1\cos t+c_2\sin t+\sin t\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)-1\\ c_1(\cos t-\sin t)+c_2(\cos t+\sin t)+(\cos t+\sin t)\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)-1\end{bmatrix}$$

پایان مباحث پایانترم - خرداد ۹۸

مرتضی عسگری
دانشجوی مهندسی مکانیک
پلی تکنیک تهران