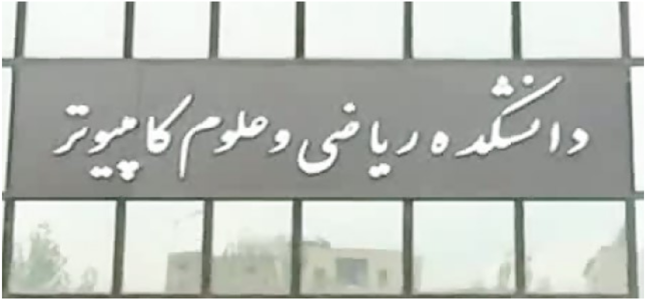
ریاضی عمومی ۲

ارائه دهنده:
دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



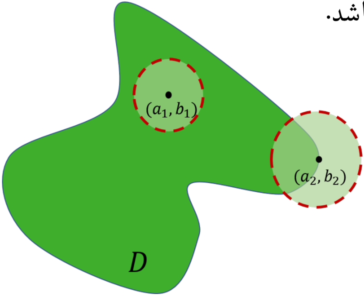
مشتقات جزئی توابع چندمتغیره- بخش اول

نقاط درونی و مرزی

فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^n$. در این صورت:

- نقطهٔ $P \in D$ یک نقطهٔ درونی D نامیده می‌شود، هرگاه یک همسایگی از P موجود باشد که کاملاً در D قرار گیرد.
- نقطهٔ $P \in \mathbb{R}^n$ یک نقطهٔ مرزی D نامیده می‌شود، هرگاه هر همسایگی از P نقطه‌ای در D و نقطه‌ای در $\mathbb{R}^n \backslash D$ (مکمل D) داشته باشد.

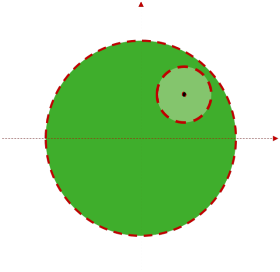
برای مثال، در شکل مقابل، ناحیهٔ D، نقطهٔ درونی (a_1, b_1)، و نقطهٔ مرزی (a_2, b_2) از آن در $\mathbb{R}^2$ نمایش داده شده‌اند.



درون، مرز و ناحیه‌های باز و بسته

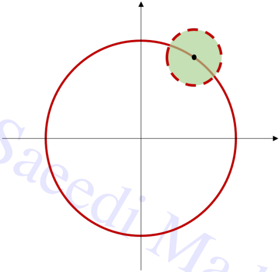
فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^n$. در این صورت:

- مجموعهٔ نقاط درونی D، درون D نامیده می‌شود.
- مجموعهٔ نقاط مرزی D، مرز D نامیده می‌شود.
- ناحیهٔ D باز نامیده می‌شود، هرگاه هر نقطهٔ آن یک نقطهٔ درونی باشد (یعنی D با درون خودش برابر باشد).
- ناحیهٔ D بسته نامیده می‌شود، هرگاه هر نقطهٔ مرزی آن در خود D باشد (یعنی مرز D کاملاً در D قرار گیرد).



(آ) دیسک یکهٔ باز:

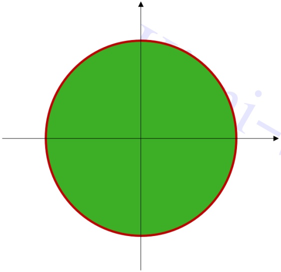
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$



(ب) مرز دیسک یکهٔ باز:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(دایرهٔ یکه)



(ج) دیسک یکهٔ بسته:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

مشتق جزئی

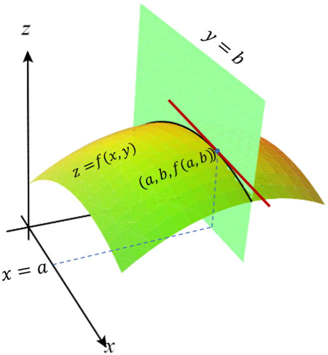
فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع چندمتغیره باشد. مشتق جزئی مرتبهٔ اول f نسبت به مؤلفهٔ iام $(i = 1, \ldots, n)$ در نقطهٔ درونی $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$، با نماد $f_i(a_1, \ldots, a_n)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_i(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

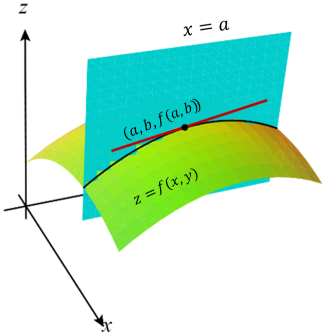
در حالت $n = 2$ و با در نظر گرفتن $P = (a, b)$، داریم:

$$f_1(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}$$

$$f_2(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h}$$



(آ) شیب خط مماس بر خم فصل مشترک رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحهٔ $y = b$ در نقطهٔ $(a, b, f(a, b))$ همان $f_1(a, b)$ است.



(ب) شیب خط مماس بر خم فصل مشترک رویهٔ $z = f(x, y)$ و صفحهٔ $x = a$ در نقطهٔ $(a, b, f(a, b))$ همان $f_2(a, b)$ است.

مثال

فرض کنید $f(x,y) = x^2 \sin(y)$. در این صورت، $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ را بیابید.

پاسخ:

$$f_1(x,y) = x \text{ مشتق جزئی } f \text{ نسبت به } = 2x\sin(y)$$

$$f_2(x,y) = y \text{ مشتق جزئی } f \text{ نسبت به } = x^2\cos(y)$$

نمادگذاری

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد و $P = (a_1, \dots, a_n) \in D$ یک نقطهٔ درونی باشد. در این صورت، به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، مشتق جزئی اول نسبت به مؤلفهٔ iـام در P را با نمادهای زیر نیز نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f_i(a_1, \dots, a_n) &= f_{x_i}(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(a_1, \dots, a_n) = D_i f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

توجه

همهٔ قواعد متعارف مشتق‌گیری در توابع تک‌متغیرهٔ اسکالر که در ریاضی ۱ دیده‌ایم، مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ترکیب با یک تابع تک‌متغیرهٔ اسکالر، برای مشتقات جزئی توابع چندمتغیره نیز برقرارند.

مثال

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ همه‌جا مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید که $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

پاسخ:

فرض کنید که $g:D\to\mathbb{R}$ به صورت $g(x,y)=\dfrac{x}{y}$ تعریف می‌شود، که در آن $D=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$. داریم $z(x,y)=f(g(x,y))$. پس:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(g(x,y))=\left(\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)\right)f'(g(x,y))=\frac{1}{y}f'(g(x,y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(g(x,y))=\left(\frac{\partial}{\partial y}g(x,y)\right)f'(g(x,y))=-\frac{x}{y^2}f'(g(x,y))$$

بنابراین، داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}f'(g(x,y))-\frac{x}{y}f'(g(x,y))=0$$

توجه

برخلاف توابع تک‌متغیره، وجود مشتقات جزئی یک تابع چندمتغیره، پیوستگی آن تابع را نتیجه نمی‌دهد.

مثال

نشان دهید که تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست، اما مشتقات جزئی اول آن در مبدأ وجود دارند.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-2xy}{x-y} & ,x\neq y\\ 0 & ,x=y\end{cases}$$

پاسخ: دو مسیر زیر را در نظر می‌گیریم:

- مسیر $x=0$:

واضح است که تابع f روی این مسیر برابر با 0 است.

- مسیر $y=\frac{x-x^3}{1-2x}$ به‌ازای $x<\frac{1}{2}$ (حاصل از برابر قرار دادن صورت و مخرج):

$$\lim_{x\to 0} f\left(x,\frac{x-x^3}{1-2x}\right)=1$$

بنابراین، f در مبدأ پیوسته نیست.

توجه: می‌توانستیم مسیر $y=x+\frac{x^2}{2}$ را نیز در نظر بگیریم (حد تابع روی این مسیر برابر با 4 می‌شود).

حال، نشان می‌دهیم که $f_1(0,0)$ و $f_2(0,0)$ به صورت زیر موجود هستند:

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3-0}{h-0}-0}{h} = 0$$

$$f_2(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0-0}{0-h}-0}{h} = 0$$

مثال

فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود. در مورد پیوستگی f و وجود مشتقات جزئی اول آن در مبدأ بحث کنید. آیا $f_1(x,y,z)$ تابعی پیوسته است؟

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} & ,(x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ,(x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

پاسخ: دو مسیر زیر را در نظر بگیرید:

- هر مسیر صفحهٔ $x=0$ (مثل $x=y=0$):

  واضح است که تابع f روی این مسیر برابر با 0 است.

- مسیر $x=y=z$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4+x^4}=\frac{1}{3}$$

بنابراین، f در مبدأ پیوسته نیست.

حال، مشتقات جزئی اول f را در مبدأ بررسی می‌کنیم:

$$f_1(0,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0,0) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4+0+0} - 0}{h} = 0$$

به طور مشابه، می‌توان دید که $f_2(0,0,0) = f_3(0,0,0) = 0$.

حال، ضابطهٔ $f_1(x,y,z)$ را به‌دست می‌آوریم و پیوستگی آن را بررسی می‌کنیم. به‌ازای $(x,y,z) \neq (0,0,0)$، داریم:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= \frac{(y^2z)(x^4+y^4+z^4) - (4x^3)(xy^2z)}{(x^4+y^4+z^4)^2} \\ &= \frac{(y^2z)(-3x^4+y^4+z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2} \end{aligned}$$

بنابراین، ضابطهٔ $f_1(x,y,z)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_1(x,y,z)=\begin{cases}\frac{(y^2z)(-3x^4+y^4+z^4)}{(x^4+y^4+z^4)^2} & ,(x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ,(x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

مسیر $x=y=z$ را در نظر بگیرید. روی این مسیر، داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f_1(x,x,x) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3(-3x^4+x^4+x^4)}{(x^4+x^4+x^4)^2}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{x^7}{9x^8} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{9x}\\ &= \begin{cases} -\infty & ,(x\to 0^+)\\ +\infty & ,(x\to 0^-)\end{cases}\end{aligned}$$

بنابراین، $f_1(x,y,z)$ در مبدأ پیوسته نیست.

مشتقات جزئی مرتبه‌های بالاتر

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد و $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ یک نقطهٔ درونی باشد. در این صورت، تعریف می‌کنیم:

$$\text{مشتق جزئی دوم نسبت به مؤلفهٔ } i\text{ـام} = (f_i)_i\,(a_1, \ldots, a_n)$$
$$= (f_{x_i})_{x_i}\,(a_1, \ldots, a_n)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a_1, \ldots, a_n)$$

در این صورت، به شکلی مختصر، از نمادگذاری‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{مشتق جزئی دوم نسبت به مؤلفهٔ } i\text{ـام} = f_{ii}(a_1, \ldots, a_n)$$
$$= f_{x_i x_i}(a_1, \ldots, a_n)$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a_1, \ldots, a_n)$$

مشتقات جزئی مرتبه‌های بالاتر

همچنین، در حالت کلی به‌ازای عدد صحیح و مثبت $l \geq 2$، تعریف می‌کنیم:

$$\text{مشتق جزئی } l\text{ــام نسبت به مؤلفهٔ } i\text{ــام} = \Big(f_{\underbrace{i\ldots i}_{(l-1)\text{ــبار}}}\Big)_i(a_1,\ldots,a_n)$$

$$= \Big(f_{\underbrace{x_i\cdots x_i}_{(l-1)\text{ــبار}}}\Big)_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{l-1}f}{\partial x_i^{l-1}}\right)(a_1,\ldots,a_n)$$

در این صورت، به شکلی مختصر، از نمادگذاری‌های زیر به منظور نمایش مشتق جزئی lــام نسبت به مؤلفهٔ iــام استفاده می‌کنیم:

$$f_{\underbrace{i\ldots i}_{l\text{ــبار}}}(a_1,\ldots,a_n) = f_{\underbrace{x_i\cdots x_i}_{l\text{ــبار}}}(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial^l f}{\partial x_i^l}(a_1,\ldots,a_n)$$

مشتقات جزئی مرتبه‌های بالاتر

مشتقات جزئی مخلوط

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a_1, \ldots, a_n)$$

مشتق جزئی بالا را با نمادهای زیر هم می‌توان نمایش داد:

$$f_{ij}(a_1, \ldots, a_n) = f_{x_i x_j}(a_1, \ldots, a_n)$$

به طور مشابه، مشتقات جزئی مخلوط دیگر، مانند نمونهٔ زیر قابل تعریف هستند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) &:= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right)(a_1, \ldots, a_n)\\ &= f_{122}(a_1, \ldots, a_n) = f_{x_1 x_2 x_2}(a_1, \ldots, a_n)\end{aligned}$$

مثال

فرض کنید $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : f$ به صورت $f(x,y,z,w) = xyzw^3$ تعریف می‌شود. در این صورت، f_{xyzw} و f_{xwzy} را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} f_x(x,y,z,w) = yzw^3 \\ f_{xw}(x,y,z,w) = 3yzw^2 \\ f_{xwz}(x,y,z,w) = 3yw^2 \\ f_{xwzy}(x,y,z,w) = 3w^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(x,y,z,w) = yzw^3 \\ f_{xy}(x,y,z,w) = zw^3 \\ f_{xyz}(x,y,z,w) = w^3 \\ f_{xyzw}(x,y,z,w) = 3w^2 \end{cases}$$

قضیه

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد و $P = (a, b) \in D$ یک نقطهٔ درونی باشد. در این صورت، اگر f، $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک همسایگی P در D، و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ در P پیوسته باشند، آنگاه داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

در حالت کلی، فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ یک نقطهٔ درونی است. همچنین، فرض کنید دو مشتق جزئی مخلوط mـام تابع f در نقطهٔ P، با مشتق‌گیری‌های یکسان و با ترتیب‌های مختلف باشند. اگر این مشتقات جزئی در P پیوسته باشند، و به‌علاوه f و همهٔ مشتقات جزئی آن از مرتبهٔ کمتر از m در یک همسایگی از P در D، پیوسته باشند، آنگاه دو مشتق جزئی مخلوط یادشده در P برابر هستند.

تذکر

- در مثال قبل، با در نظرگرفتن $f(x,y,z,w) = xyzw^3$، دیدیم که

$$f_{xyzw}(x,y,z,w) = f_{xwzy}(x,y,z,w) = 3w^2$$

توجه کنید که f یک چندجمله‌ای است و روی $\mathbb{R}^n$ مشتقات جزئی f از هر مرتبه‌ای وجود دارند و پیوسته هستند. پس، بنابر قضیهٔ قبل، صرفاً با محاسبهٔ $f_{xyzw}(x,y,z,w)$ می‌توانستیم نتیجه بگیریم که $f_{xwzy}(x,y,z,w) = f_{xyzw}(x,y,z,w)$.

- در صورتی که شرایط قضیهٔ قبل برقرار نباشند، ممکن است با تغییر ترتیب مشتق‌گیری، به نتایج متفاوتی برسیم (مثال بعدی چنین شرایطی را نشان می‌دهد).

مثال

فرض کنید f به صورت زیر تعریف شده است. نشان دهید که f_1، f_2، f_{12} و f_{21} در $(0,0)$ موجود هستند؛ اما $f_{12}(0,0) \neq f_{21}(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

پاسخ: داریم:

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2+0} - 0}{h} = 0$$

به طور مشابه، می‌توان دید که $f_2(0,0) = 0$. به‌ازای $(x,y) \neq (0,0)$، داریم:

$$f_1(x,y) = \frac{4x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2y(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$$

بنابراین، داریم:

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{4x^2y}{x^2+y^2}-\frac{2y(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_2(x,y)=\begin{cases}-\frac{4xy^2}{x^2+y^2}+\frac{2x(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حال، داریم:

$$f_{12}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_1(0,h)-f_1(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{0+h^2}-\frac{2h(0-h^2)^2}{(0+h^2)^2}}{h}=-2$$

$$f_{21}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_2(h,0)-f_2(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{0}{h^2+0}+\frac{2h(h^2-0)^2}{(h^2+0)^2}}{h}=2$$

بنابراین، $f_{12}(0,0)\neq f_{21}(0,0)$.

توجه

در مثال قبل، با استفاده از مختصات قطبی به‌سادگی می‌توان دید که توابع f، f_1 و f_2 در نقطهٔ $(0,0)$ پیوسته هستند. از طرفی، از ضابطه‌های این توابع، واضح است که در هر نقطهٔ دیگر از $\mathbb{R}^2$ پیوسته هستند. بنابراین این توابع روی کل $\mathbb{R}^2$ پیوسته هستند.

توجه

در مثال قبل، تابع f_{12} در $(0,0)$ پیوسته نیست، زیرا داریم:

$$f_{12}(x,y)=\begin{cases}\frac{2(x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6)}{(x^2+y^2)^3} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ -2 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

- مسیر $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} f_{12}(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2(0+0-0-y^6)}{(0+y^2)^3}=\lim_{y\to 0}\frac{-2y^6}{y^6}=-2$$

- مسیر $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} f_{12}(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{2(x^6+0-0-0)}{(x^2+0)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^6}{x^6}=2$$

بنابراین، شرایط قضیهٔ قبل برقرار نیست.