ریاضی عمومی ۲

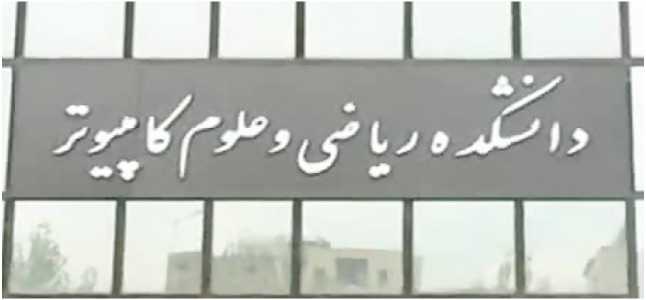
ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



توابع ضمنی

سؤال

آیا می‌توان معادلهٔ

$$F(x, y) = x^3y^4 + \sin(x^4y^3) + \cos(x + y) - e^{\sin(y)} = 0$$

را در نزدیکی نقطهٔ $P = (0, 0)$ به گونه‌ای حل کرد که $y = g(x)$ (یعنی y تابعی از x شود) به‌طوری که $g(0) = 0$ و داشته باشیم $F(x, g(x)) = 0$؟

تذکر

توجه کنید که در سؤال بالا داریم $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \neq 0$. در ادامه، خواهیم دید که این شرط به‌منظور پاسخ‌دهی به سؤال بالا نقش مهمی دارد.

سؤال کلی‌تر

فرض کنید که تابع $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در یک همسایگی نقطهٔ درونی $P = (a, b) \in U$ باشد. آیا می‌توان معادلهٔ $F(x, y) = 0$ را که $F(a, b) = 0$، به گونه‌ای حل کرد که در نزدیکی نقطهٔ P، y تابعی از x باشد؟ به عبارت دقیق‌تر، آیا تابع مشتق‌پذیر $y = \phi(x)$ روی بازه‌ای مثل I حول a وجود دارد که $\phi(a) = b$ و به‌ازای هر $x \in I$ داشته باشیم $F(x, \underbrace{\phi(x)}_{y}) = 0$؟

توجه

با مفروضات سؤال قبل، فرض کنید که تابع مشتق‌پذیر $y=\phi(x)$ به‌طور مطلوب وجود دارد. در این صورت، $\frac{dy}{dx}|_{x=a}=\phi'(a)$ را می‌یابیم. داریم:

$$F(x,y)=0 \implies \frac{d}{dx}F(x,y)=0, \quad x\in I$$

در این صورت، بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$F_1(x,y)+F_2(x,y)\frac{dy}{dx}(x)=0$$

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "F_1"'] \arrow[dr, "F_2"] & \\ x & & y \arrow[d, "\frac{dy}{dx}"] \\ & & x \end{tikzcd}$$

حال، با فرض $F_2(a,b)\neq 0$، داریم:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=-\frac{F_1(a,b)}{F_2(a,b)}$$

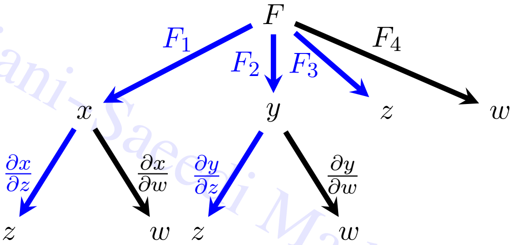
توجه

در ادامهٔ درس خواهیم دید که در حالت خاصی از قضیه‌ای با عنوان قضیهٔ تابع ضمنی، اگر $F_2(a,b) \neq 0$، آنگاه تابع مشتق‌پذیر $y=\phi(x)$ با شرایط یاد شده وجود دارد.

به‌عنوان مثال، به حالت خاص دیگری از قضیهٔ تابع ضمنی می‌پردازیم. فرض کنید $F, G : U \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند. معادله‌های $F(x, y, z, w) = G(x, y, z, w) = 0$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید x و y توابعی از z و w هستند؛ یعنی $x = x(z, w)$ و $y = y(z, w)$. به دنبال یافتن $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$ (یا همان $\frac{\partial x}{\partial z}$) هستیم. داریم:

$$\begin{cases} F(x(z,w), y(z,w), z, w) = 0 \\ G(x(z,w), y(z,w), z, w) = 0 \end{cases}$$

حال، با مشتق‌گیری نسبت به z از دو طرف معادلهٔ مربوط به F، داریم:



$$F_1\frac{\partial x}{\partial z} + F_2\frac{\partial y}{\partial z} + F_3 = 0$$

به‌طور مشابه، داریم:

$$G_1\frac{\partial x}{\partial z} + G_2\frac{\partial y}{\partial z} + G_3 = 0$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} F_1 \frac{\partial x}{\partial z} + F_2 \frac{\partial y}{\partial z} + F_3 = 0 \\ G_1 \frac{\partial x}{\partial z} + G_2 \frac{\partial y}{\partial z} + G_3 = 0 \end{cases}$$

به‌منظور حذف $\frac{\partial y}{\partial z}$، با ضرب دو طرف معادلهٔ اول در G_2 و ضرب دو طرف معادلهٔ دوم در $-F_2$ و سپس جمع دو معادلهٔ حاصل، داریم:

$$F_1 G_2 \frac{\partial x}{\partial z} + F_3 G_2 - F_2 G_1 \frac{\partial x}{\partial z} - F_2 G_3 = 0$$

پس، داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{F_2 G_3 - F_3 G_2}{F_1 G_2 - F_2 G_1}, \quad F_1 G_2 - F_2 G_1 \neq 0$$

توجه کنید که رابطهٔ قبل را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت (البته رابطهٔ زیرمستقیماً از روش کرامر نیز قابل دست‌یابی است):

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_3G_2 - F_2G_3}{F_1G_2 - F_2G_1} = -\frac{\det\begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ G_3 & G_2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix}}, \quad \det\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

توجه

کمی بعد، در قضیهٔ تابع ضمنی خواهیم دید که اگر نقطهٔ $P = (x, y, z, w) \in U$ با شرایط مطلوب باشد و

$$\det\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix}_P \neq 0$$

آنگاه می‌توان در نزدیکی P، x و y را به عنوان توابعی از z و w نوشت، به‌طوری که در دستگاه یادشده صدق کنند.

نمادگذاری

فرض کنید که $F_{(1)}, \ldots, F_{(n)} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ توابعی از متغیرهای $z_1, \ldots, z_n$ باشند.
در این صورت، نمادگذاری زیر را داریم:

$$\frac{\partial(F_{(1)}, \ldots, F_{(n)})}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{(1)}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_{(1)}}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{(n)}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_{(n)}}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

بنابراین، در مثال قبل داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(z, y)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}$$

قضیهٔ تابع ضمنی

فرض کنید که توابع $F_{(1)},\ldots,F_{(n)} : U \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ با متغیرهای $x_1,\ldots,x_m$ و $y_1,\ldots,y_n$ باشند و $P=(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n)\in U$. همچنین فرض کنید که این توابع دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در یک همسایگی P باشند. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=0 \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=0 \end{cases}$$

و فرض کنید که نقطهٔ P در این دستگاه صدق کند. اگر

$$\frac{\partial(F_{(1)},\ldots,F_{(n)})}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}(P)\neq 0$$

ادامهٔ قضیهٔ تابع ضمنی

آنگاه دستگاه مذکور را می‌توان در یک همسایگی P نسبت به $y_1, \ldots, y_n$ به عنوان توابعی از $x_1, \ldots, x_m$ حل کرد. یعنی در یک همسایگی P، توابعی مانند

$$\phi_{(i)}(x_1, \ldots, x_m), \quad i = 1, \ldots, n$$

وجود دارند که

$$\phi_{(i)}(a_1, \ldots, a_m) = b_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

و دستگاه زیر را در این همسایگی داریم:

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1, \ldots, x_m, \phi_{(1)}(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \phi_{(n)}(x_1, \ldots, x_m)) = 0 \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1, \ldots, x_m, \phi_{(1)}(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \phi_{(n)}(x_1, \ldots, x_m)) = 0 \end{cases}$$

ادامهٔ قضیهٔ تابع ضمنی

به‌علاوه، داریم:

$$\frac{\partial \phi_{(i)}}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial(F_{(1)},\ldots,F_{(i)},\ldots,F_{(n)})}{\partial(y_1,\ldots,y_{i-1},{\color{red}x_j},y_{i+1},\ldots,y_n)}}{\dfrac{\partial(F_{(1)},\ldots,F_{(i)},\ldots,F_{(n)})}{\partial(y_1,\ldots,y_{i-1},{\color{red}y_i},y_{i+1},\ldots,y_n)}}$$

که در آن:

$$i = 1,\ldots,n, \qquad j = 1,\ldots,m$$

مثال

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u - x^2 - y^2 = 0 \\ v - y^2 - xy = 0 \end{cases}$$

و فرض کنید $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 2, 2)$.

۱ نشان دهید که در دستگاه بالا می‌توان در یک همسایگی P، x و y را برحسب u و v نوشت.

۲ مطلوبست $\frac{\partial x}{\partial u}$ و $\frac{\partial y}{\partial u}$ در $(u_0, v_0) = (2, 2)$.

۳ اگر $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی با ضابطهٔ $g(x, y) = x + y$ باشد، آنگاه $\frac{\partial g}{\partial u}$ را در $(u_0, v_0) = (2, 2)$ بیابید.

پاسخ ۱: دستگاه داده شده را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} F(u,v,x,y) = u - x^2 - y^2 = 0 \\ G(u,v,x,y) = v - y^2 - xy = 0 \end{cases}$$

توجه کنید که $P = (x,y,u,v) = (1,1,2,2)$ در دستگاه بالا صدق می‌کند و F و G دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند. داریم:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_P$$

$$= \det \begin{bmatrix} -2x & -2y \\ -y & -2y - x \end{bmatrix}_P = \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$$

پس بنا بر قضیهٔ تابع ضمنی می‌توان در یک همسایگی نقطهٔ P، x و y را برحسب u و v نوشت.

پاسخ ۲: در قسمت (۱)، دیدیم که:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P) = 4$$

به‌علاوه، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(P) &= \det\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{bmatrix}_P\\ &= \det\begin{bmatrix}1 & -2y\\ 0 & -2y-x\end{bmatrix}_P = \det\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix} = -3\end{aligned}$$

حال، با استفاده از فرمول قضیهٔ تابع ضمنی، داریم:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)=(2,2)} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(P)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P)} = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

از طرفی، داریم:

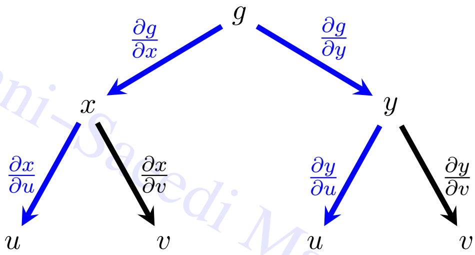
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}(P) = \det\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u}\end{bmatrix}_P$$

$$= \det\begin{bmatrix}-2x & 1\\ -y & 0\end{bmatrix}_P = \det\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = 1$$

با استفاده از فرمول قضیهٔ تابع ضمنی، داریم:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)=(2,2)} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}(P)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P)} = -\frac{1}{4}$$

پاسخ ۳: بنا بر قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم:



$$\frac{\partial g}{\partial u} = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}}_{1}\frac{\partial x}{\partial u} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}}_{1}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}$$

با جای‌گذاری از قسمت‌های (۱) و (۲)، داریم:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)=(2,2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال

فرض کنید دو معادلهٔ چهار مجهولی زیر را داریم:

$$\begin{cases} xe^y - y^2ze^w = 1 \\ 2x + x^3z^5 - x^2yw + z^2w^4 = 2 \end{cases}$$

همچنین، فرض کنید که $P = (x, y, z, w) = (1, 0, -1, 1)$.

۱ نشان دهید که در دستگاه بالا می‌توان در یک همسایگی P، x و z را بر حسب y و w نوشت.

۲ اگر $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ تابعی با ضابطه $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 \sin(z^2)$ باشد، آنگاه $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial w}$ را در نقطهٔ $(y_0, w_0) = (0, 1)$ بیابید.

پاسخ ۱: دستگاه داده‌شده را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} F(y,w,x,z) = xe^y - y^2ze^w - 1 = 0 \\ G(y,w,x,z) = 2x + x^3z^5 - x^2yw + z^2w^4 - 2 = 0 \end{cases}$$

توجه کنید که نقطهٔ $P = (x,y,z,w) = (1,0,-1,1)$ در دستگاه بالا صدق می‌کند و F و G دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند. داریم:

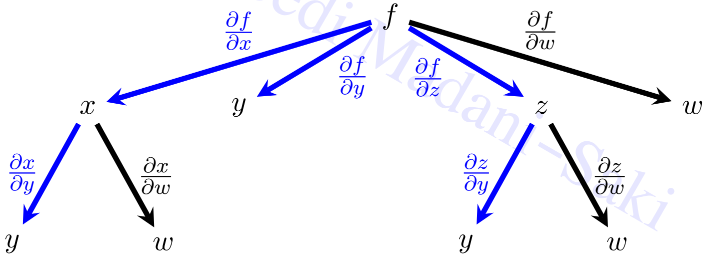
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}(P) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{bmatrix}_P$$

$$= \det\begin{bmatrix} e^y & -y^2e^w \\ 2+3x^2z^5-2xyw & 5x^3z^4+2zw^4 \end{bmatrix}_P$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$$

پس، بنابر قضیهٔ تابع ضمنی می‌توان در یک همسایگی نقطهٔ P، x و z را بر حسب y و w نوشت.

پاسخ ۲: بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم:



$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 2x\frac{\partial x}{\partial y} + 2y\sin(z^2) + 2zy^2\cos(z^2)\frac{\partial z}{\partial y}$$

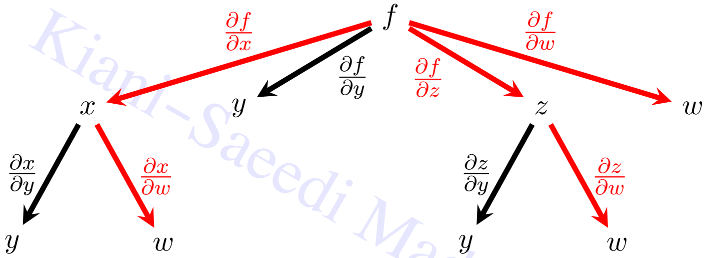
به عبارت دقیق‌تر، قسمت آبی رنگ رابطهٔ قبل عبارت است از:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_w = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,w}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z,w} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,w}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

بنابراین، به‌ازای $P = (x, y, z, w) = (1, 0, -1, 1)$، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2(1)\frac{\partial x}{\partial y}(0,1) + 0 + 0 = 2\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)$$

به‌طور مشابه، داریم:



$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = 2x\frac{\partial x}{\partial w} + 0 + 2zy^2\cos(z^2)\frac{\partial z}{\partial w}$$

به عبارت دقیق‌تر، قسمت قرمز رنگ رابطهٔ قبل عبارت است از:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,w}\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{x,y,z} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,w}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,1) = 2(1)\frac{\partial x}{\partial w}(0,1) + 0 + 0 = 2\frac{\partial x}{\partial w}(0,1)$$

پس، باید $\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)$ و $\frac{\partial x}{\partial w}(0,1)$ را بیابیم. ابتدا $\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)$ را می‌یابیم. از معادلات دستگاه

$$\begin{cases} F(y,w,x,z) = xe^y - y^2ze^w - 1 = 0 \\ G(y,w,x,z) = 2x + x^3z^5 - x^2yw + z^2w^4 - 2 = 0 \end{cases}$$

بر حسب y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} xe^y + e^y\frac{\partial x}{\partial y} - 2yze^w - y^2e^w\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ 2\frac{\partial x}{\partial y} + 3x^2z^5\frac{\partial x}{\partial y} + 5x^3z^4\frac{\partial z}{\partial y} - 2xyw\frac{\partial x}{\partial y} - x^2w + 2zw^4\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

حال، با جای‌گذاری نقطهٔ $P=(x,y,z,w)=(1,0,-1,1)$ در دستگاه به‌دست آمده، داریم:

$$\begin{cases} 1+\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)-0-0=0 \\ 2\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)-3\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)+5\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)-0-1-2\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)=0 \end{cases}$$

یعنی:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial y}(0,1)=-1 \\ -\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)+3\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)=1 \end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)=-1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1)=0$$

به‌طور مشابه، می‌توان دید که $\frac{\partial x}{\partial w}(0,1)=0$. پس، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=2\frac{\partial x}{\partial y}(0,1)=-2, \qquad \frac{\partial f}{\partial w}(0,1)=2\frac{\partial x}{\partial w}(0,1)=0$$

مثال

فرض کنید دو معادلهٔ چهار مجهولی زیر را داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 + uv + u = 4 \\ xy + u^3 + v = 3 \end{cases}$$

همچنین، فرض کنید که $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$.

۱ نشان دهید که در دستگاه بالا می‌توان در یک همسایگی P، u و v را بر حسب x و y نوشت.

۲ u_x، u_y، v_x، v_y، u_{xx}، u_{xy}، v_{xx} و v_{xy} را در نقطهٔ $(x_0, y_0) = (1, 1)$ محاسبه کنید.

پاسخ ۱: دستگاه داده‌شده را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x^2 + y^3 + uv + u - 4 = 0 \\ G(x,y,u,v) = xy + u^3 + v - 3 = 0 \end{cases}$$

واضح است که نقطهٔ P در دو معادلهٔ بالا صدق می‌کند و F و G دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند. داریم:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix}_P = \det\begin{bmatrix} v+1 & u \\ 3u^2 & 1 \end{bmatrix}_P$$

$$= \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

پس، بنابر قضیهٔ تابع ضمنی u و v را می‌توان در یک همسایگی نقطهٔ P بر حسب x و y نوشت.

پاسخ ۲: از معادلات دستگاه داده‌شده به‌صورت زیر بر حسب x مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2x + u_x v + u v_x + u_x = 0 \\ y + 3u^2 u_x + v_x = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

در نقطهٔ $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$، داریم:

$$\begin{cases} 2(1) + u_x(1,1)(1) + (1)v_x(1,1) + u_x(1,1) = 0 \\ 1 + 3(1)^2 u_x(1,1) + v_x(1,1) = 0 \end{cases}$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} 2u_x(1,1) + v_x(1,1) = -2 \\ 3u_x(1,1) + v_x(1,1) = -1 \end{cases}$$

در نتیجه، داریم $u_x(1,1) = 1$ و $v_x(1,1) = -4$.

حال، به‌منظور به‌دست آوردن u_{xx} و v_{xx} از دستگاه $(*)$ به‌صورت زیر بر حسب x مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2 + u_{xx}v + 2u_x v_x + uv_{xx} + u_{xx} = 0 \\ 6uu_x^2 + 3u^2 u_{xx} + v_{xx} = 0 \end{cases}$$

در نقطهٔ $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$، داریم:

$$\begin{cases} 2 + u_{xx}(1,1)(1) + 2u_x(1,1)v_x(1,1) + (1)v_{xx}(1,1) + u_{xx}(1,1) = 0 \\ 6(1)u_x^2(1,1) + 3(1)^2 u_{xx}(1,1) + v_{xx}(1,1) = 0 \end{cases}$$

حال، با توجه به اینکه $u_x(1,1) = 1$ و $v_x(1,1) = -4$، دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} 2u_{xx}(1,1) + v_{xx}(1,1) = 6 \\ 3u_{xx}(1,1) + v_{xx}(1,1) = -6 \end{cases}$$

در نتیجه، داریم $u_{xx}(1,1) = -12$ و $v_{xx}(1,1) = 30$.

به‌منظور به‌دست آوردن $u_y(1,1)$ و $v_y(1,1)$، به‌صورت زیر از دستگاه داده‌شده در صورت مثال بر حسب y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} 3y^2 + u_y v + u v_y + u_y = 0 \\ x + 3u^2 u_y + v_y = 0 \end{cases}$$

بنابراین، در نقطهٔ P داریم:

$$\begin{cases} 2u_y(1,1) + v_y(1,1) = -3 \\ 3u_y(1,1) + v_y(1,1) = -1 \end{cases}$$

پس، داریم $u_y(1,1) = 2$ و $v_y(1,1) = -7$.

حال، به‌منظور به‌دست آوردن $u_{xy}(1,1)$ و $v_{xy}(1,1)$، از دستگاه $(*)$ بر حسب y مشتق می‌گیریم.

$$\begin{cases} u_{xy}v + u_x v_y + u_y v_x + u v_{xy} + u_{xy} = 0 \\ 1 + 6u u_y u_x + 3u^2 u_{xy} + v_{xy} = 0 \end{cases}$$

در نقطهٔ P داریم:

$$\begin{cases} 2u_{xy}(1,1) + u_x(1,1)v_y(1,1) + u_y(1,1)v_x(1,1) + v_{xy}(1,1) = 0 \\ 3u_{xy}(1,1) + 6u_y(1,1)u_x(1,1) + v_{xy}(1,1) = -1 \end{cases}$$

اما داریم:

$$u_x(1,1) = 1,\ v_x(1,1) = -4,\ u_y(1,1) = 2,\ v_y(1,1) = -7$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} 2u_{xy}(1,1) + v_{xy}(1,1) = 15 \\ 3u_{xy}(1,1) + v_{xy}(1,1) = -13 \end{cases}$$

بنابراین، داریم $u_{xy}(1,1) = -28$ و $v_{xy}(1,1) = 71$.

قضیهٔ تابع وارون

فرض کنید که $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تابع به‌صورت زیر باشد:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n), \quad y_i = \phi_{(i)}(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

همچنین، فرض کنید که $P = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. اگر یک همسایگی از P مثل V وجود داشته باشد که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $\phi_{(i)}$ در آن دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشد و

$$\frac{\partial(\phi_{(1)}, \ldots, \phi_{(n)})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(P) \neq 0,$$

آنگاه با فرض $\Phi(P) = (b_1, \ldots, b_n)$، یک همسایگی از $\Phi(P)$ وجود دارد که می‌توان در این همسایگی $x_1, \ldots, x_n$ را به‌صورت توابعی از $y_1, \ldots, y_n$ نوشت. به‌علاوه، داریم:

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}}$$

اثبات: دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = y_1 - \phi_{(1)}(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = y_n - \phi_{(n)}(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{cases}$$

نقطهٔ $P' = (a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)$ در این دستگاه صدق می‌کند و به‌ازای هر $1 \le i \le n$، $F_{(i)}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در نقطهٔ P' است. داریم:

$$\frac{\partial(F_{(1)},\dots,F_{(n)})}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(P') = \pm\frac{\partial(\phi_{(1)},\dots,\phi_{(n)})}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(P) \neq 0$$

بنابر قضیهٔ تابع ضمنی می‌توان دستگاه بالا را در یک همسایگی P' مثل V' نسبت به $x_1,\dots,x_n$ بر حسب $y_1,\dots,y_n$ نوشت. پس، همسایگی مناسب V'' حول $(b_1,\dots,b_n)$ و تابع $\Psi : V'' \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ وجود دارند که

$$\Psi(y_1,\dots,y_n) = (x_1,\dots,x_n), \quad x_i = \psi_{(i)}(y_1,\dots,y_n), \quad i = 1,\dots,n$$

حال، به‌ازای هر $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ و هر $y = (y_1, \dots, y_n) \in V''$، داریم:

$$\Psi \circ \Phi(x) = x, \quad \Phi \circ \Psi(y) = y$$

بنابراین، داریم:

$$D(\Psi \circ \Phi)(x) = D\Psi(\Phi(x))D\Phi(x)$$

حال، از دو طرف تساوی بالا دترمینان می‌گیریم:

$$1 = \underbrace{\frac{\partial(\pi_1, \dots, \pi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x)}_{\text{ماتریس همانی}} = \frac{\partial(\psi_{(1)}, \dots, \psi_{(n)})}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(\Phi(x))\frac{\partial(\phi_{(1)}, \dots, \phi_{(n)})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x)$$

که در آن $\Psi \circ \Phi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$، به‌طوری که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، داریم

$$\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

در نهایت، داریم:

$$\frac{\partial(\psi_{(1)},\ldots,\psi_{(n)})}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}(\Phi(x)) = \frac{1}{\frac{\partial(\phi_{(1)},\ldots,\phi_{(n)})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x)}$$

یا به‌طور معادل، داریم:

$$\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}}$$

مثال

در چه نقاطی از صفحه، (r, θ) را می‌توان به عنوان تابعی از (x, y) بیان کرد؟

پاسخ: از قضیهٔ تابع وارون استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x = r\cos(\theta) = \phi_{(1)}(r, \theta), \quad y = r\sin(\theta) = \phi_{(2)}(r, \theta)$$

واضح است که $\phi_{(1)}$ و $\phi_{(2)}$ دارای مشتقات جزئی اول پیوسته هستند. داریم:

$$\frac{\partial(\phi_{(1)}, \phi_{(2)})}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_{(1)}}{\partial r} & \frac{\partial\phi_{(1)}}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\phi_{(2)}}{\partial r} & \frac{\partial\phi_{(2)}}{\partial\theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = r$$

پس اگر $r \neq 0$ (یعنی همهٔ نقاط صفحه غیر از مبدأ)، آنگاه به‌ازای هر نقطهٔ صفحه با نمایش قطبی (r_0, θ_0)، می‌توان یک همسایگی حول این نقطه یافت که r و θ را بتوان بر حسب x و y نوشت.

روی همسایگی یاد شده داریم:

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}}$$

تمرین

فرض کنید که $F(x,y,z)=0$. اگر F_1، F_2 و F_3 موجود، پیوسته و ناصفر باشند، آنگاه نشان دهید که

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=-1$$