فصل ۱۰ – روابط بازگشتی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

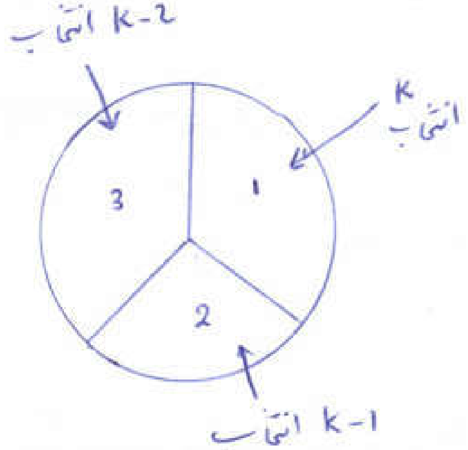
10

Recurrence Relations

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

دایره‌ای را به $n \geq 3$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ام. می‌خواهیم این قسمت‌ها را با k رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ ۲ قطاع مجاور هم‌رنگ نباشند. اگر a_n تعداد روشهای ممکن برای انجام این کار باشد، a_n را به ازای $n \geq 3$ بیابید.

- به ازای $n=3$ داریم:

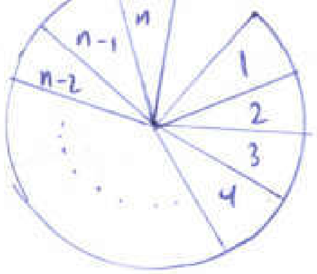


$$a_3 = k(k-1)(k-2)$$

- در مورد $n \geq 4$ داریم:

فرض کنیم همانند شکل زیر بین قطاع‌های ۱ و n یک فضای خالی وجود داشته باشد:

در اینصورت می‌توانیم n قطاع را بصورت زیر رنگ‌آمیزی کنیم:



$$k(k-1)(k-1)\cdots(k-1) = k(k-1)^{n-1}$$

اولین قطاع — دومین قطاع — nامین قطاع

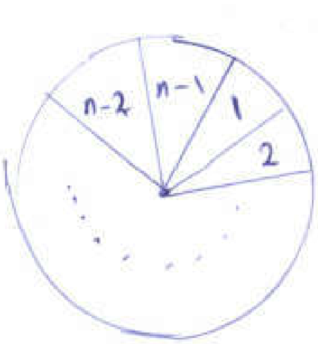
این تعداد رنگ‌آمیزی (یعنی $k(k-1)^{n-1}$) دو دسته زیر را شامل می‌شود:

$k(k-1)^{n-1}$

دسته ① آن دسته از رنگ‌آمیزی‌هایی که قطاع‌های ۱ و n دارای رنگ‌های مختلفی هستند.

دسته ② آن دسته از رنگ‌آمیزی‌هایی که قطاع‌های ۱ و n دارای رنگ‌های یکسانی هستند.

دسته ①، جواب مطلوب ماست. اما دسته ② دقیقاً دارای تناظر یک به یک با رنگ‌آمیزی n-1 قطاع می‌باشد (شکل روبرو) (در این رنگ‌آمیزی که شامل n-1 قطاع می‌باشد هر دو قطاع مجاور یکدیگر، مختلف الرنگ هستند).



بنابراین داریم :

$$K(K-1)^{n-1} = \text{تعداد رنگ آمیزی های موجود در دسته ①} + \text{تعداد رنگ آمیزی های موجود در دسته ②}$$

$$\Rightarrow K(K-1)^{n-1} = a_n + a_{n-1} \qquad n \geq 3 \quad (*)$$

ابتدا معادله مشخصه رابطه (*) را بدست می آوریم:

$$a_n + a_{n-1} = 0 \Rightarrow r^n + r^{n-1} = 0 \Rightarrow r = -1$$

$$\Rightarrow a_n^{(h)} = A(-1)^n$$

از آنجایی که در عبارت (*)، $f(n) = K(K-1)^{n-1}$ می باشد لذا $a_n^{(p)} = B(K-1)^{n-1}$ خواهد بود. حال با جایگذاری این عبارت $a_n^{(p)}$ در (*) داریم:

$$B(K-1)^{n-1} + B(K-1)^{n-2} = K(K-1)^{n-1} \Rightarrow B = K-1$$

حال داریم:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A(-1)^n + (K-1)(K-1)^{n-1}$$
$$= A(-1)^n + (K-1)^n$$

با استفاده از رابطه $a_3 = K(K-1)(K-2)$، داریم:

$$a_3 = K(K-1)(K-2) = A(-1)^3 + (K-1)^3 \Rightarrow A = K-1$$

لذا در نهایت، جواب به شکل زیر می باشد:

$$a_n = (-1)^n(K-1) + (K-1)^n$$

$$n \geq 3 \qquad K \geq 3$$

تمرین ۷ (تمرینات ۱۰-۳) ص ۲۱۲

رابطه بازگشتی $a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=3+5(n)$ را حل کنید.
$n\in \mathbb{Z}^{\geq 0}$

$$\begin{cases} a_n^{(h)}=Ar^n \\ n\geq 0 \quad A,r\neq 0\end{cases} \Rightarrow Ar^{n+3}-3Ar^{n+2}+3Ar^{n+1}-3Ar^n=0$$

$$\Rightarrow (r-1)^3=0 \Rightarrow r_1=r_2=r_3=1$$ (معادله مشخصه)

$$\boxed{a_n^{(h)}=A_0+A_1n+A_2n^2}$$

$$a_n^{(p)}=n^3(B_0+B_1n)=B_0n^3+B_1n^4$$

با جایگذاری $a_n^{(p)}$ در معادله اصلی داریم:

$$B_0(n+3)^3+B_1(n+3)^4-3\left(B_0(n+2)^3+B_1(n+2)^4\right)$$
$$+3\left(B_0(n+1)^3+B_1(n+1)^4\right)-\left(B_0n^3+B_1n^4\right)=3+5n$$

$$\Rightarrow B_0=-\frac{3}{4}, \quad B_1=\frac{5}{24}$$

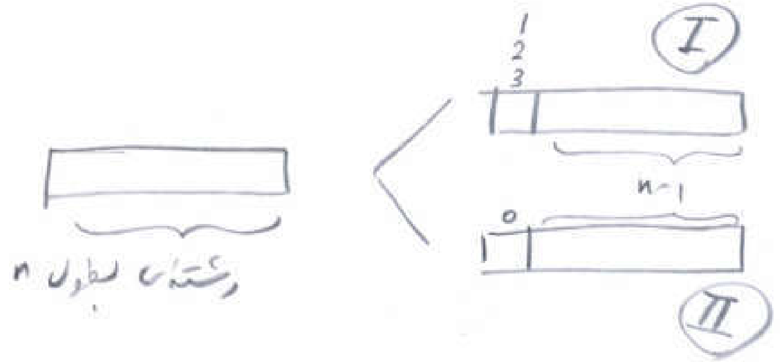
$$a_n^{(p)}=-\frac{3}{4}n^3+\frac{5}{24}n^4$$

$$\Downarrow$$

$$a_n=a_n^{(h)}+a_n^{(p)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n=A_0+A_1n+A_2n^2-\frac{3}{4}n^3+\frac{5}{24}n^4 \\ n\geq 0\end{array}}$$

تعداد رشته‌های n رقمی با استفاده از ارقام $\{0,1,2,3\}$ را بیابید بطوری که عدد ۳ هیچ‌گاه در سمت راست ۰ قرار نگیرد.



رشته‌هایی که رقم سمت چپ‌ترین آن‌ها 1، 2 یا 3 است.

رشته‌هایی که رقم سمت چپ‌تر آن‌ها ۰ است.

اگر کل رشته‌های بطول n با شرایط ذکر شده را با a_n نشان دهیم در این صورت مجموع حالات I و II برابر با a_n است.

$$a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1} \qquad (*)$$

$$a_1 = 4$$

حل معادله همگن متناظر

$$a_n - 3a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n^{(h)} = cr^n \Rightarrow cr^n - 3cr^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow r = 3 \Rightarrow \boxed{a_n^{(h)} = A3^n}$$

یافتن جواب خصوصی $\Rightarrow$ $B3^{n-1}$ نمی‌تواند جواب خصوصی باشد (به علت وابستگی به جواب معادله همگن) $\Rightarrow \boxed{a_n^{(p)} = Bn3^{n-1}} \Rightarrow$ جایگذاری در معادله (*)

$$Bn3^{n-1} - 3\left(B(n-1)3^{n-2}\right) = 3^{n-1} \Rightarrow B=1 \Rightarrow \boxed{a_n^{(p)} = n3^{n-1}}$$

$$\boxed{a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A3^n + n3^{n-1}}$$

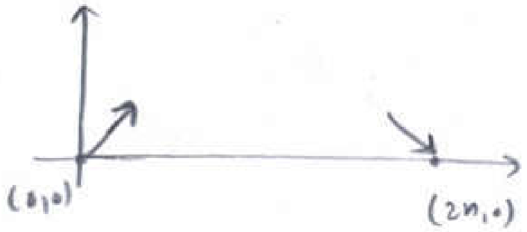
$$a_1 = 4 = 3A + 3^0 \Rightarrow \boxed{A=1} \Rightarrow \boxed{a_n = 3^n + n3^{n-1} \quad n \geq 1}$$

به ازای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$

که در اینجا منظور از C_n ، عدد nام کاتالان است. $C_0 = 1$

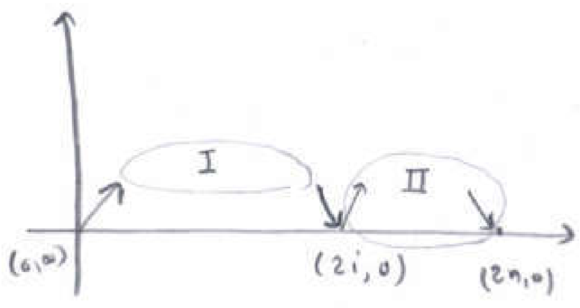
C_n برابر است با کلیه مسیرهایی که بین $(0,0)$ و $(2n,0)$ وجود دارد و این مسیرها صرفاً با استفاده از حرکت‌های $(x,y) \rightarrow (x+1,y+1)$ و $(x,y) \rightarrow (x+1,y-1)$ انجام می‌گیرد و در عین حال هیچ گاه در طول مسیر پایین‌تر از محور xها نمی‌رویم.

این چون عدد کاتالان nام است.



حال می‌خواهیم به روشی دیگر عدد nام کاتالان را محاسبه کنیم.

کلیه مسیرهای مطلوب ما (با شرایطی که در بالا ذکر شد) از $(0,0)$ شروع می‌شوند اما در نهایت برای نخستین بار در یکی از نقاط $(2i,0)$ (که $1 \le i \le n$) بر محور xها مماس می‌شوند.



پس می‌توان مسیرها را بر حسب اینکه اولین نقطه برخوردشان با محور xها کجاست، افراز کرد.

پس تعداد مسیرهای مطلوبمان که اولین برخورد در $(2i,0)$ صورت گیرد برابر است با:

مسیرهای مطلوب با شرط بالا = (تعداد مسیرهای I) × (تعداد مسیرهای II)

$$= C_{i-1} \times C_{n-i}$$

(توجه: C_n تعداد مسیرهایی به طول $2n$ است. C_i نیز تعداد مسیرهایی به طول $2i$ است.)

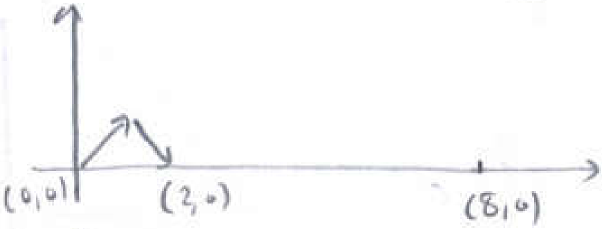
I مسیرهای : مسیرهایی هستند که از $(1,1)$ به $(2i-1,1)$ وجود دارند و هیچگاه از خط $y=1$ پایین‌تر نمی‌آیند.

II مسیرهای : چون مسئله اصلی است با ابعاد کوچکتر یعنی کلیه مسیرهای از $(2i,0)$ به $(2n,0)$ بطوریکه زیر محور x ها نیایند.

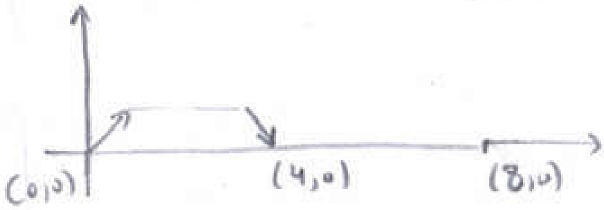
$\Rightarrow$ کل مسیرها $= C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}\, C_{n-i}$

نکته: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
$C_0 = 1 \quad n \in \mathbb{Z}^+$

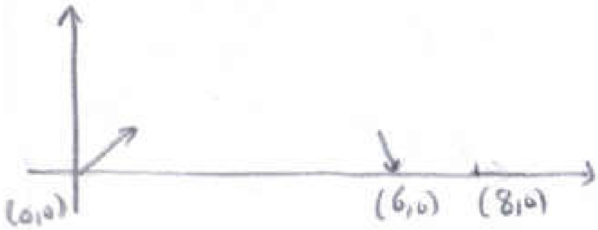
مثال: می‌خواهیم برای $n=4$، C_4 را حساب کنیم:



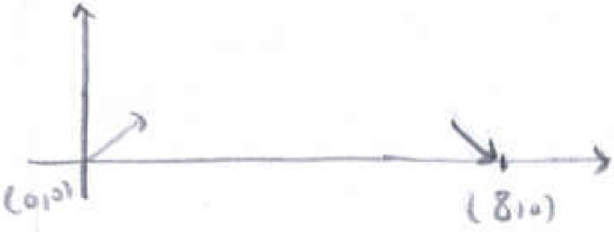
$C_0 C_3$



$C_1 C_2$



$C_2 C_1$



$C_3 C_0$

پس تعداد کل مسیرها می‌شود: $C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0$

$(C_0 = 1)$

برازای $n \geq 0$ فرض کنید $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

(اگر $n=0$ باشد آنگاه $S = \varnothing$)

اگر a_n تعداد زیرمجموعه‌هایی از S را نشان دهد که شامل هیچ سه عضو متوالی نیستند، رابطه بازگشتی برای a_n بیابید.

فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ زیرمجموعه‌ای باشد که هیچ سه عضو متوالی ندارد. $(n \geq 3)$

در اینصورت A به صورت یکی از موارد زیر است:

① $n \notin A \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌هایی از این نوع $= a_{n-1}$

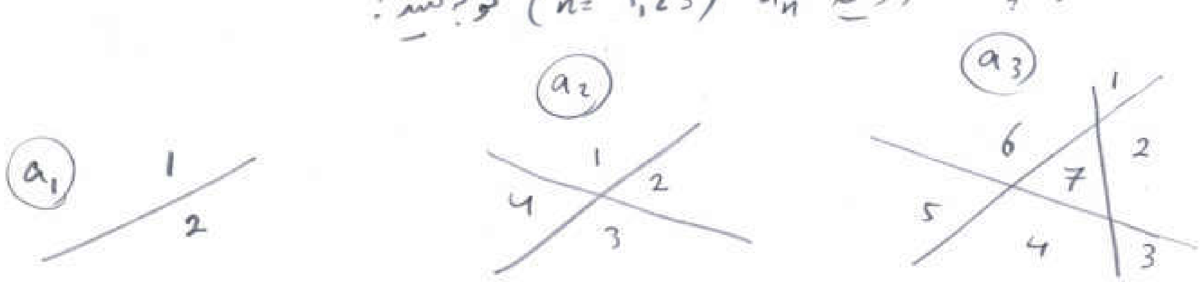
② $\begin{cases} n \in A \;,\; (n-1) \notin A \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های از این نوع} = a_{n-2} \\ n \in A \;,\; (n-1) \in A \Rightarrow (n-2) \notin A \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های از این نوع} = a_{n-3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \qquad , n \geq 3 \\ a_0 = 1 \qquad a_1 = 2 \qquad a_2 = 4 \\ \quad \varnothing \qquad \varnothing, \{1\} \qquad \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \end{cases}$$

تمرین ۳ . (از تمرینات ۳.۱۰) – ص ۶۱۶

الف) فرض کنید n خط در صفحه چنان رسم شده اند که هر خط همه خط‌های دیگر را قطع می‌کند، ولی هیچ سه خطی در یک نقطه همدیگر را قطع نمی‌کنند. فرض کنید a_n به ازای $n \geq 0$ تعداد ناحیه‌هایی در صفحه باشد که این n خط پدید می‌آورند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس آن را حل کنید.

ابتدا به عنوان مثال، به چند مقدار اولیه a_n $(n = 1,2,3)$ توجه کنید:



و اما برای حل و رسیدن به یک راه حل کلی: (l_i نشان دهنده i امین خط رسم شده است. $i \in \mathbb{Z}^+$)

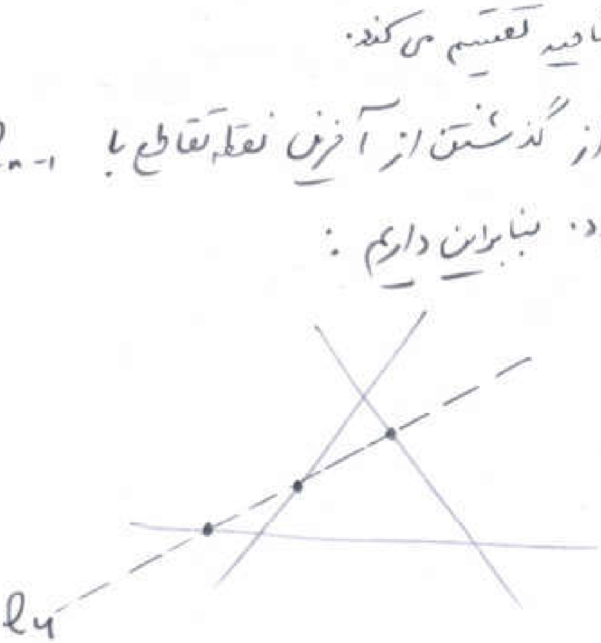
فرض کنید $n-1$ خط را رسم کرده‌ام. حال در حین نصب n امین خط (یعنی l_n) یکایک خطوط را قطع می‌کنم بدین ترتیب که ابتدا l_1، سپس l_2، .... و در نهایت l_{n-1}.

هر بار l_n که با یکی از خطوط از قبل رسم شده برخورد می‌کند، یکی از ناحیه‌های ایجاد شده قبلی را به دو ناحیه تقسیم می‌کند.

و سپس از گذشتن از آخرین نقطه تقاطع با l_{n-1}، یک ناحیه دیگر جدید نیز به دو بخش تقسیم می‌گردد. بنابراین داریم:

$$a_n = a_{n-1} + n$$

$$a_0 = 1$$



$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_0 = 1 \quad n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

معادله همگن متناظر

$$\begin{cases} a_n^{(h)} = Ar^n \\ A, r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{Ar^n - Ar^{n-1} = 0}_{\text{(معادله مشخصه)}} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow a_n^{(h)} = A1^n = A$$

$$\boxed{a_n^{(h)} = A}$$

$$\begin{cases} a_n^{(p)} = n(B + Cn) = Bn + Cn^2 \\ Bn + Cn^2 = B(n-1) + C(n-1)^2 + n \Rightarrow \\ B = C = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \end{cases}$$

نحوه محاسبه جواب خصوصی

(ضرایب توان‌های یکسان n باید با یکدیگر برابر باشند)

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$a_0 = 1 = A + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0)^2 \Rightarrow A = 1$$

پس جواب نهایی:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \qquad n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}}$$

ب) برای وضعیت قسمت الف فرض کنید b_n تعداد ناحیه‌های بیکران حاصل باشد. رابطه بازگشتی برای b_n بیابید و آن را حل کنید.

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2 \\ b_1 = 2 \quad n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} b_n = 2n \\ b_0 = 1 \quad n \in \mathbb{Z}^{\geq 1} \end{cases}}$$

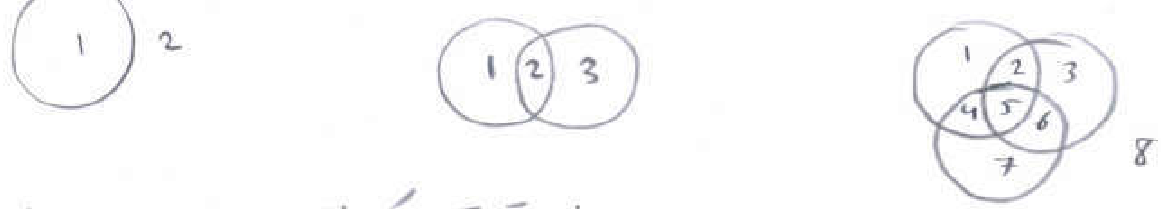
در هنگام رسم خط ℓ_n ، ابتدا (قبل از برخورد با اولین خط)، و همچنین بعد از برخورد با آخرین خط دو فضای بیکران جدید ایجاد می‌گردد.

ℓ_n

n دایره دو به دو متقاطع در صفحه رسم شده‌اند، بطوریکه هیچ ۳ دایره‌ای از یک نقطه نمی‌گذرند.
فرض کنید a_n تعداد ناحیه هایی باشد که این n دایره پدید می‌آورند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس آن را حل کنید.

ابتدا به عنوان مثال، به چند مقدار اولیه a_n توجه کنید:

a_1 a_2 a_3

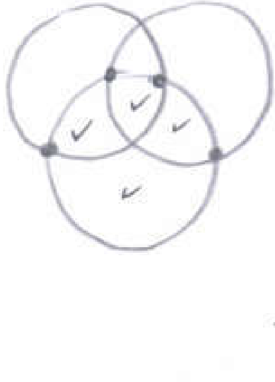


اگر فرض کنیم n-1 دایره، صفحه را به a_{n-1} ناحیه تقسیم کرده‌اند، در اینصورت داریم:
در حین رسم دایره nام، این دایره جدید با هر یک از n دایره قبلی، در ۲ نقطه متقاطع خواهد بود.

سپس روی دایره جدید، $2(n-1)$ نقطه تقاطع ایجاد می‌گردد.

بین هر دو نقطه متوالی روی دایره جدید (دایره nام)، یک ناحیه درون دایره جدید وجود دارد.

به عنوان مثال دایره سوم که دو دایره قبلی را قطع می‌کند، نواحی زیر را بوجود می‌آورد:



بنابراین با افزودن دایره nام، تعداد $2(n-1)$ ناحیه جدید به نواحی قبلی اضافه می‌گردد.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \qquad n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

معادله همگن متناظر

$$\begin{cases} a_n^{(h)} = Ar^n \\ A, r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow Ar^n - Ar^{n-1} = 0 \Rightarrow r = 1 \qquad a_n^{(h)} = A\,1^n = A$$

(معادله مشخصه)

$$\boxed{a_n^{(h)} = A}$$

$$\begin{cases} a_n^{(p)} = n(B + Cn) = Bn + Cn^2 \\ Bn + Cn^2 = B(n-1) + C(n-1)^2 + 2(n-1) \\ \cancel{Bn} + \cancel{Cn^2} = \cancel{Bn} - B + \cancel{Cn^2} - 2Cn + C + 2n - 2 \\ B - C + 2 = 2n - 2Cn = n(2 - 2C) \\ \begin{cases} B - C + 2 = 0 \\ 2 - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow C = 1,\ B = -1 \Rightarrow \boxed{a_n^{(p)} = n^2 - n} \end{cases}$$

تحویل به جواب خصوصی (ضرایب توان‌های یکسان n با یکدیگر باید برابر باشند)

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A + n^2 - n$$

$$a_1 = 2 = A + 1 - 1 \Rightarrow A = 2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = n^2 - n + 2 \\ a_1 = 2 \quad n \in \mathbb{Z}^+ \end{array}}$$

To understand recursion, one must first understand recursion.

Stephen Hawking