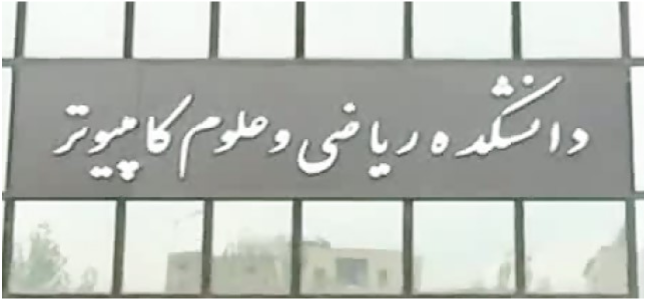
ریاضی عمومی ۲

ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



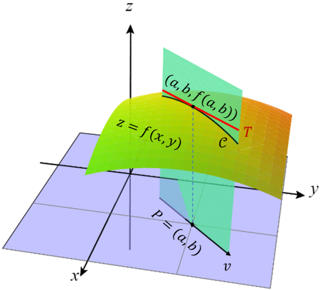
مشتق جهتی توابع چندمتغیره

مشتق جهتی

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این صورت، مشتق جهتی (سویی) f در نقطهٔ $P \in U$ در جهت بردار یکهٔ $v \in \mathbb{R}^n$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_v f(P) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(P + hv) - f(P)}{h}$$

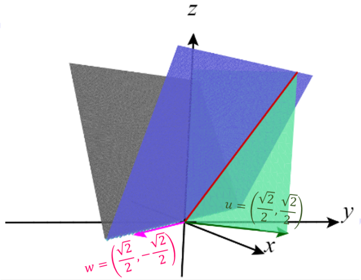
با توجه به شکل، مشتق جهتی تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $P = (a, b) \in U$ در جهت $v \in \mathbb{R}^2$، برابر با شیب خط مماس بر خم $\mathcal{C}$ در نقطهٔ $(a, b, f(a, b))$ است؛ که در آن $\mathcal{C}$ خم فصل مشترک نمودار f و صفحه‌ای است که شامل خط $P + \langle v \rangle$ است و بر صفحهٔ xy عمود است.



مثال

تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ به‌صورت $f(x,y)=|x+y|$ تعریف شده و $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ یک بردار یکه است. دربارهٔ $D_vf(0,0)$ بحث کنید.

پاسخ:



داریم:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(h(v_1,v_2))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{|hv_1+hv_2|}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{|h||v_1+v_2|}{h}$$
$$=\lim_{h\to0^+}\frac{h|v_1+v_2|}{h}=|v_1+v_2|$$

تذکر

در مثال قبل، مشتقات جزئی اول تابع f موجود نیستند. بنابراین، ممکن است مشتقات جهتی تابعی در یک نقطه در تمام جهت‌ها وجود داشته باشند (مثل جهت‌های i، j و k) اما مشتقات جزئی اول آن تابع وجود نداشته باشند.

توجه

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر و $v \in \mathbb{R}^n$ برداری یکه باشد.
همچنین، فرض کنید که $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to U$ با ضابطهٔ $\gamma(h) = P + hv$ باشد و $0 \in I$ (با توجه به درونی‌بودن $P \in U$، چنین بازهٔ Iای وجود دارد). حال، تابع $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$g(h) = f(\gamma(h)), \qquad h \in \mathbb{R}$$

در این صورت، با توجه به اینکه $\gamma(h)$ در $h = 0$ و f در P مشتق‌پذیر است، g به‌عنوان ترکیبی از این دو تابع در $h = 0$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + hv) - f(P)}{h} = D_v f(P)$$

توجه

به‌عنوان یک نتیجه، وجود مشتق در P، منجر به وجود مشتقات جهتی در P در جهت‌های مختلف می‌شود. بنابراین، اگر مشتق جهتی تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ P در جهتی مثل $v \in \mathbb{R}^n$ موجود نباشد، آنگاه f در نقطهٔ P مشتق‌پذیر نیست.

قضیه (استفاده از گرادیان به منظور یافتن مشتقات جهتی)

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر و $v \in \mathbb{R}^n$ برداری یکه باشد. در این صورت، داریم:

$$D_v f(P) = \nabla f(P).v$$

اثبات: فرض کنید $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که $0 \in I$، به‌صورت $g(h) = f(P + hv)$ تعریف می‌شود. در این صورت، بنابر نکته‌ای که دیدیم، داریم $g'(0) = D_v f(P)$. از طرفی، با فرض اینکه $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to U$ به‌صورت $\gamma(h) = P + hv$ تعریف می‌شود، داریم $g = f \circ \gamma$. از این‌رو، بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$g'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(P) \cdot v$$

بنابراین، داریم $D_v f(P) = \nabla f(P).v$.

مثال

میزان تغییر تابع $f(x,y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ در نقطهٔ $(0,1)$ را در هر یک از جهت‌های $v_1 = i + 2j$ و $v_2 = j - 2i$ بیابید.

پاسخ: داریم $\widehat{v_1} = \frac{i+2j}{\sqrt{5}}$ و $\widehat{v_2} = \frac{j-2i}{\sqrt{5}}$. باید $D_{\widehat{v_1}} f(0,1)$ و $D_{\widehat{v_2}} f(0,1)$ را بیابیم.
مشتقات جزئی f موجود و پیوسته هستند؛ پس f تابعی مشتق‌پذیر است، و داریم:

$$D_{\widehat{v_1}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \widehat{v_1}, \quad D_{\widehat{v_2}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \widehat{v_2}$$

توجه کنید که:

$$f_1(x,y) = 2y^3 + 2xy^2, \quad f_2(x,y) = 4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\nabla f(x,y) = (2y^3 + 2xy^2, 4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y) \implies \nabla f(0,1) = (2,4)$$

در نهایت، داریم:

$$D_{\widehat{v_1}} f(0,1) = (2,4) \cdot \widehat{v_1} = \frac{10}{\sqrt{5}}, \quad D_{\widehat{v_2}} f(0,1) = (2,4) \cdot \widehat{v_2} = 0$$

نتیجه

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد و $P \in U$. در این صورت:

- اگر گرادیان f در نقطهٔ P موجود باشد و بردار یکهٔ $v \in \mathbb{R}^n$ چنان باشد که $D_v f(P)$ موجود باشد و $D_v f(P) \neq \nabla f(P) \cdot v$، آنگاه f در نقطهٔ P مشتق‌پذیر نیست.
- اگر f در P مشتق‌پذیر باشد و v بر مجموعهٔ تراز f گذرنده از P در نقطهٔ P مماس باشد، آنگاه داریم $D_v f(P) = 0$.

مثال

فرض کنید که تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد. به‌ازای هر بردار یکهٔ $v\in\mathbb{R}^2$، $D_vf(0,0)$ را بیابید. آیا f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است؟

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^4+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

پاسخ: فرض کنید که $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ یک بردار یکه باشد. داریم:

$$D_vf(0,0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(hv_1,hv_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{2(hv_1)^2(hv_2)}{(hv_1)^4+(hv_2)^2}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{2h^3v_1^2v_2}{h^2(h^2v_1^4+v_2^2)}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{2v_1^2v_2}{h^2v_1^4+v_2^2}$$

اگر $v_2 = 0$، آنگاه $\frac{2v_1^2 v_2}{h^2 v_1^4 + v_2^2} = 0$. پس حد بالا و از این‌رو $D_v f(0,0)$ برابر با 0 است. در غیر این صورت، اگر $v_2 \neq 0$، داریم $D_v f(0,0) = 2\frac{v_1^2}{v_2}$.

حال، مشتق‌پذیری f در $(0,0)$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4+0} - 0}{h} = 0$$

به‌طور مشابه، داریم $f_2(0,0) = 0$. حال، اگر f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه به‌ازای هر بردار یکهٔ $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$، داریم:

$$D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = (0,0) \cdot v = 0$$

در حالی که برای $v_1, v_2 \neq 0$، دیدیم که $D_v f(0,0) = 2\frac{v_1^2}{v_2} \neq 0$. پس، f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

قضیه

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر باشد. به‌ازای هر بردار یکهٔ $v \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$-|\nabla f(P)| \leq D_v f(P) \leq |\nabla f(P)|$$

به‌علاوه، f در نقطهٔ P در جهت $\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ بیشترین افزایش و در جهت $-\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ بیشترین کاهش را دارد.

اثبات: به‌ازای هر بردار یکهٔ $v \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot v = |\nabla f(P)||v| \cos(\theta) = |\nabla f(P)| \cos(\theta)$$

که در آن θ زاویهٔ بین v و $\nabla f(P)$ است. تساوی بالا نتیجه می‌دهد که:

$$-|\nabla f(P)| \leq D_v f(P) \leq |\nabla f(P)|$$

به‌علاوه، بیشترین مقدار $D_v f(P)$ به‌ازای $\theta = 0$ و کمترین مقدار آن به‌ازای $\theta = \pi$ به‌دست می‌آید. اگر $\theta = 0$، آنگاه v و $\nabla f(P)$ همجهت هستند و از این‌رو داریم $v = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$. همچنین، اگر $\theta = \pi$، آنگاه $\nabla f(P)$ و v هم‌راستا اما در خلاف جهت هم هستند و از این‌رو داریم $v = -\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$.

مثال

فرض کنید که $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

۱ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ را در $(1, -1, 2)$ بیابید.

۲ میزان بیش‌ترین افزایش f در $(1, -1, 2)$ را بیابید.

۳ میزان تغییر f در نقطهٔ $(1, -1, 2)$ در جهت برداری که از $(1, -1, 2)$ به $(3, 1, 1)$ می‌رود، چقدر است؟

پاسخ ۱: از آنجا که کرهٔ داده‌شده همان مجموعهٔ تراز $f^{-1}(6)$ است، بنابر قضیه‌ای $\nabla f(1,-1,2)$ بر کرهٔ یادشده در نقطهٔ $(1,-1,2)$ عمود و لذا بردار نرمال صفحهٔ مماس بر این کره در $(1,-1,2)$ است. داریم:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \implies \nabla f(1,-1,2) = (2,-2,4)$$

پس، معادلهٔ صفحهٔ مماس به‌صورت زیر است:

$$2(x-1) + (-2)(y-(-1)) + 4(z-2) = 0 \implies 2x - 2y + 4z = 12$$

پاسخ ۲: بنابر قضیهٔ قبل، میزان بیش‌ترین افزایش f در $(1,-1,2)$ برابر است با $|\nabla f(1,-1,2)|$؛ یعنی $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2+(-2)^2+4^2}$.

پاسخ ۳: داریم:

$$v=(3,1,1)-(1,-1,2)=(2,2,-1) \implies \widehat{v}=\frac{1}{3}(2,2,-1)$$

بنابراین، از آنجا که f همه‌جا مشتق‌پذیر است (زیرا مشتقات جزئی پیوسته دارد)، داریم:

$$D_{\widehat{v}}f(1,-1,2)=\nabla f(1,-1,2)\cdot\widehat{v}=(2,-2,4)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}$$

مثال‌های تکمیلی

تاکنون مثال‌های **مفهومی** و **کاربردی** مختلفی را از این مبحث دیدیم. در ادامه، به مثال‌های بیشتری از این مبحث توجه فرمایید. برای درک بهتر، ابتدا به مسائل فکر کنید و سعی کنید که آن‌ها را حل بفرمایید. سپس پاسخ‌ها را با دقت مطالعه و بررسی نمایید.

مثال

فرض کنید که $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz$ و $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. مقدار $D_v f(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$ در کدام گزینه آمده است؟

۱ 3

۲ 1

۳ 5

۴ 2

پاسخ: از آنجا که f دارای مشتقات جزئی اول پیوسته است، مشتق‌پذیر است. پس، بنابر قضیه‌ای داریم:

$$D_v f(0, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = \nabla f(0, \sqrt{3}, \sqrt{3}) \cdot v$$

توجه کنید که:

$$f_1(x, y, z) = 2x + y, \quad f_2(x, y, z) = x + z, \quad f_3(x, y, z) = y$$

از این‌رو، داریم:

$$f_1(0, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = \sqrt{3}, \quad f_2(0, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = \sqrt{3}, \quad f_3(0, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$D_v f(0, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3$$

بنابراین، گزینهٔ ۱ درست است.

مثال

فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) $D_uf(0,0)$ را برای بردار یکه $u=(u_1,u_2)$ بیابید.

ب) آیا f در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

پاسخ:

الف) فرض کنید $u=(u_1,u_2)$ یک بردار یکه باشد. داریم:

$$D_u f(0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin\left(\frac{t^3u_1^2u_2}{t^2}\right)-0}{t}$$

اگر $u_1\neq 0$ و $u_2\neq 0$، آنگاه داریم:

$$D_u f(0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(tu_1^2u_2)-0}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(tu_1^2u_2)-0}{tu_1^2u_2}\times u_1^2u_2=u_1^2u_2$$

اما اگر $u_1=0$ یا $u_2=0$، آنگاه داریم:

$$D_u f(0,0)=0$$

ب) داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h^2\times 0)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

لذا برای هر بردار یکه u، داریم:

$$\nabla f(0,0)\cdot u=0$$

در نتیجه، اگر $u=(u_1,u_2)$ را طوری در نظر بگیریم که $u_1\neq 0$ و $u_2\neq 0$، آنگاه

$$D_u f(0,0)=1\times u_1^2u_2\neq 0$$

و در نتیجه

$$D_u f(0,0)\neq \nabla f(0,0)\cdot u$$

لذا f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.