نمونه سوالات

میان‌ترم

مهندسی آمار و احتمالات

با پاسخ تشریحی

Mathema

شورای صنفی
ریاضی و علوم کامپیوتر

امتحان میان‌ترم آمار و احتمال مهندسی   وقت: 90 دقیقه

1- فرض کنید تابع چگالی متغیر تصادفی X عبارتست از

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x) & ;0<x<1\\ 0 & ;o.w.\end{cases}$$

ابتدا $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)$ را محاسبه کنید وسپس نتیجه را با نتیجه حاصل از قاعده چبیشف مقایسه نمائید(μ میانگین و σ انحراف معیار است).

2- تعداد تلفن های زده شده به یک مرکز تعمیر گاهی از توزیع پواسن پیروی می کند و به طور متوسط یک تلفن در هر دقیقه است. احتمال این را بیابید که

الف) در هر دقیقه بیش از 4 تلفن به مرکز زده شود.

ب) در یک دوره زمانی 5 دقیقه ای بیش از 10 تلفن به مرکز زده شود.

3) اگر تابع چگالی احتمال توام به صورت

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6-x-y}{8} & ;0<x<2,\ 2<y<4\\ 0 & ;o.w.\end{cases}$$

باشد $P(1<Y<3\mid X=2)$ را حساب کنید.

4) اگر X دارای تابع احتمال $b(2,p)$ و Y هم دارای تابع احتمال $b(4,p)$ و X و Y مستقل باشند و بعلاوه $P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$ باشد، مقدار $P(Y\geq 1)$ را بیابید.

5) اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با تابع احتمال یکسان

$P(X=x)=(\frac{1}{2})^x;\ x=1,2,3,\ldots$ باشند، آنوقت اگر $P(X\geq k,Y\geq 2k)=\frac{1}{16}$، مقدار k را بیابید

موفق باشید.

امتحان میان ترم آمار واحتمال مهندسی وقت :90 دقیقه

1) از ظرف A که حاوی سه مهره سفید وسه مهره سیاه و سه مهره سبز است ، دو مهره را به تصادف وبدون جایگذاری ونیز بدون مشاهده رنگ آن انتخاب وسپس در ظرف B که حاوی یک مهره سفید ویک مهره سیاه است قرار می دهیم وبعد از ظرف B یک مهره بر می داریم، مطلوبست احتمال اینکه مهره انتخابی از ظرف B: الف) سفید باشد، ب) سیاه باشد.

2) فرض کنید متغیر های تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام زیر هستند:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}; & 0<x<y<\infty \\ 0; & otherwise \end{cases}$$

الف) ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

ب) $E(X \mid Y=y)$ را بدست آورید.

3) فرض می‌شود تعداد مشتری های که در هر ساعت به یک مرکز سرویس دهی اتومبیل وارد می‌شوند، دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda=7$ است.

الف) احتمال این را که بیش از 10 مشتری در یک دوره 2 ساعته وارد شوند، محاسبه کنید.

ب) میانگین تعداد ورودی ها در طی یک دوره 2 ساعته، چه قدر است؟

4) فرض کنید X دارای توزیع هندسی با پارامتر p $(1>p>0)$ با شد، یعنی، داشته باشیم

$$f(x)=\begin{cases} (1-p)^{x-1}p; & x=1,2,\ldots \\ 0; & otherwise \end{cases}$$

الف) اگر $P(X=4)=\frac{1}{9}P(X=2)$ باشد، مقدار p رابیابید.

ب) $P(X\geq 3)$ را محاسبه کنید.

5) X متغیری تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی فرض می‌شود و برای پیشامد A داریم:

$$P(A \mid X=n)=n!\,P(X=n \mid A)$$

مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

موفق باشید

باسمه تعالی

یکشنبه، ۱۳۹۰/۲/۴
ساعت ۱۳:۳۰
مدت آزمون: ۱:۳۰ ساعت

آزمون میان‌ترم آمار و احتمال مهندسی
نیم‌سال دوم ۸۹-۹۰
خرم، عرب‌زاده، نقشینه ارجمند

۱. دستگاه‌های یک کارگاه تولیدی سه دسته‌اند: فرسوده، عادی و جدید که به ترتیب ۲۰، ۷۰ و ۱۰ درصد قطعات با آن‌ها تولید می‌شود. احتمال این‌که قطعهٔ تولیدشدهٔ هر کدام از این سه نوع دستگاه کاملاً بی‌نقص باشد به ترتیب ۹۰، ۹۵ و ۹۹ درصد است. در این کارگاه، احتمال این‌که یک قطعهٔ بی‌نقص را یک دستگاه فرسوده تولید کرده باشد چه‌قدر است؟

۲. فرض کنید تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X برابر تابع زیر باشد. میانگین و واریانس X را حساب کنید.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 5 \\ 1 & 5 \leq x \end{cases}$$

۳. فرض کنید تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی X و Y به شکل زیر باشد.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{بقیهٔ نقاط} \end{cases}$$

الف. مقدار c را مشخص کنید.

ب. ضریب همبستگی X و Y (یعنی $\rho(X,Y)$) را محاسبه کنید.

ج. $\mathrm{E}[Y \mid X = \frac{1}{2}]$ و $\mathrm{Var}(Y \mid X = \frac{1}{2})$ را به دست آورید.

۴. می‌دانیم فردی روزانه به‌طور متوسط ۴ نامهٔ الکترونیکی دریافت می‌کند.

الف. احتمال این‌که این فرد یک‌شنبهٔ هفتهٔ بعد کم‌تر از ۳ نامهٔ الکترونیکی دریافت کند چه‌قدر است؟

ب. انحراف معیار تعداد نامه‌های الکترونیکی یک روز چه‌قدر است؟

۵. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p باشند. ثابت کنید

$$\mathrm{P}(X + Y = n) = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n.$$

بارم همهٔ سؤال‌ها برابر است.

موفق باشید.

areldh . h (a)

آزمون میان ترم آمار و احتمال مهندسی ۹۵/۲/۴

۱)

A_1 : پیشامد این که قطعه را دستگاه فرسوده تولید کند.

A_2 : " " " " " " عادی " "

A_3 : " " " " " " جدید "

B : پیشامد این که قطعه‌ی تولیدی بی‌نقص باشد.

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{\frac{20}{100}\times\frac{90}{100}}{\frac{20}{100}\times\frac{90}{100}+\frac{70}{100}\times\frac{95}{100}+\frac{10}{100}\times\frac{97}{100}}=\frac{45}{211}$$

۲) با رسم شکل تابع $F_X(x)$ واضح است که متغیر تصادفی X، گسسته است بنابراین

$$P(X=0)=P(X\leq 0)-P(X<0)=F_X(0)-F_X(0^-)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1)=P(X\leq 1)-P(X<1)=F_X(1)-F_X(1^-)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=5)=P(X\leq 5)-P(X<5)=F_X(5)-F_X(5^-)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E(X)=\sum_x xP(X=x)=\ldots=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{2}=\frac{11}{4}$$

$$E(X^2)=\sum_x x^2P(X=x)=0^2\times P(X=0)+1^2\times P(X=1)+5^2\times P(X=5)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+25\times\frac{1}{2}=\frac{51}{4}$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{51}{4}-\frac{121}{16}=\frac{83}{16}$$

3) الف)

1) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in R^2 \longrightarrow c \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \longrightarrow \int_0^1\int_0^1 c(x^2+y)\,dx\,dy = c\int_0^1 \left(\frac{1}{3}+y\right)dy = c\left(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{5}{6}c$

$\longrightarrow \frac{5}{6}c = 1 \longrightarrow c = \frac{6}{5}$

ب)

$f(x) = \int_y f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x^2+y)\,dy = \frac{6}{5}\left(x^2y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{6}{5}\left(x^2+\frac{1}{2}\right) \quad 0 \leq x \leq 1$

$f(y) = \int_x f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{6}{5}(x^2+y)\,dx = \frac{6}{5}\left(\frac{x^3}{3}+xy\Big|_0^1\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}+y\right) \quad 0 \leq x \leq 1$

$E(X) = \int_0^1 \frac{6}{5}x\left(x^2+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{6}{5}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{4}\Big|_0^1\right) = \frac{3}{5}$

$E(X^2) = \int_0^1 \frac{6}{5}x^2\left(x^2+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{6}{5}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{6}\Big|_0^1\right) = \frac{11}{25}$

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{11}{25} - \frac{9}{25} = \frac{2}{25}$

$E(Y) = \int_0^1 \frac{6}{5}y\left(\frac{1}{3}+y\right)dy = \frac{6}{5}\left(\frac{y^2}{6}+\frac{y^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{3}{5}$

$E(Y^2) = \int_0^1 \frac{6}{5}y^2\left(\frac{1}{3}+y\right)dy = \frac{6}{5}\left(\frac{y^3}{9}+\frac{y^4}{4}\Big|_0^1\right) = \frac{13}{30}$

$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{13}{30} - \frac{9}{25} = \frac{11}{150}$

$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}xy(x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}\left(\frac{y}{4}+\frac{y^2}{2}\right)dy = \frac{6}{5}\left(\frac{y^2}{8}+\frac{y^3}{6}\Big|_0^1\right) = \frac{7}{20}$

$\rho(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X)\ Var(Y)}} = \frac{\frac{7}{20} - \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{2}{25}\times\frac{11}{150}}}$

$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{6}{5}(x^2+y)}{\frac{6}{5}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)} = \frac{x^2+y}{x^2+\frac{1}{2}} \longrightarrow f\left(y|x=\frac{1}{2}\right) = \frac{y+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \quad 0 \leq y \leq 1$

[illegible] $= \frac{[illegible]}{18}$

$E(Y^2|[illegible]) =$ [illegible]

$$Var(y|x=\tfrac{1}{2}) = E(y^2|x=\tfrac{1}{2}) - E^2(y|x=\tfrac{1}{2}) = \frac{4}{9} - \frac{121}{324} = \frac{23}{324}$$

---

۴) الف) اگر تعداد نامه‌های دریافتی روزانه فرد را متغیر تصادفی X در نظر بگیریم داریم:

$$X \sim P(\lambda=4) \longrightarrow P(X=x) = \frac{e^{-4}4^x}{x!} \quad x=0,1,2,\dots$$

$$P(X<3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!} + \frac{e^{-4}4^2}{2!} = 13e^{-4}$$

ب) در توزیع پواسن داریم:

$$Var(X) = E(X) = \lambda \longrightarrow \sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{4} = 2$$

---

5)

$$\underset{\text{مستقل}}{X \sim bin(n,p)} \longrightarrow P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x=0,1,2,\dots,n$$

$$Y \sim bin(n,p) \longrightarrow P(Y=y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \quad y=0,1,\dots,n$$

$$P(X+Y=n) = \sum_{x=0}^{n} P(X=x)P(X+Y=n|X=x) = \sum_{x=0}^{n} P(X=x)P(Y=n-x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{n}{n-x} p^{n-x} (1-p)^{n-(n-x)}$$

$$= (p(1-p))^n \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}\binom{n}{n-x} = \binom{2n}{n} (p(1-p))^n$$

یادآوری: در توزیع فوق هندسی داریم:

$$P(X=x) = \frac{\binom{n}{x}\binom{N-n}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x=0,1,2,\dots,n$$

بنابراین:

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{n}{x}\binom{N-n}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 1 \longrightarrow \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}\binom{N-n}{n-x} = \binom{N}{n}$$

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

آزمون میان ترم درس آمار و احتمال مهندسی | وقت : ۹۰ دقیقه | تاریخ : ۸۹/۸/۱۸

۱- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X بصورت:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x<-2 \\ \dfrac{x+4}{8} & ; \quad -2\le x<2 \\ 1 & ; \quad x\ge 2 \end{cases}$$

داده شده است.

الف) تابع احتمال، میانگین و واریانس X را بدست آورید.

ب) مقدار $P\{|X|\le 1\}$ را محاسبه کنید.

۲- تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی Y, X بصورت :

$$f(x,y)=\begin{cases} k & ; \quad 0\le y\le x \quad , \quad 0\le x\le 1 \\ 0 & ; \quad o.w. \end{cases}$$

$E[x|Y=\frac{1}{2}] = \int x|Y=\frac{1}{2} \; f(x|y)\, d\cancel{x}$

داده شده است.

الف) ثابت k را محاسبه کنید.

$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \int x \, f(x|y)_{Y=1/2}\, dx$ ←

ب) مقدار $E\left[X \middle| Y=\frac{1}{2}\right]$ را بدست آورید.

۳- تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X بصورت :

$$f_X(x)=\begin{cases} k e^{-ax} & ; \quad x\ge 0 \\ 0 & ; \quad o.w. \end{cases}$$

که درآن پارامتر a عددی ثابت و مثبت است، داده شده است.

الف) ثابت k را بدست آورید.

ب) میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را بدست آورید.

۴- احتمال اینکه شخصی که بیماری عفونت تنفسی دارد، فوت کند ۰/۰۰۱ است. از ۳۰۰۰ بیمار بعدی که دچار بیماری عفونت تنفسی می شوند، میانگین تعداد افرادی که از این بیماری فوت می کنند، چقدر است؟

۵- فرض کنید تعداد مشتری هایی که در هر ساعت به یک تأسیسات سرویس دهی اتومبیل وارد می شوند از توزیع پواسن با میانگین هفت پیروی کند.

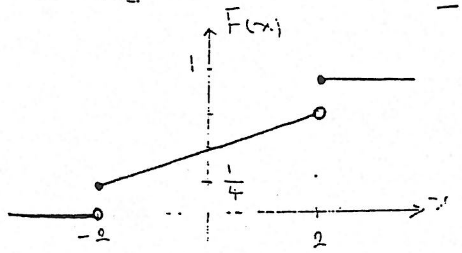
الف) احتمال آن را بیابید که در یک دوره ۲ ساعته بیش از ۱۰ مشتری وارد شوند.

ب) میانگین تعداد ورودی ها در طی یک دوره ۲ ساعته چقدر است؟

«موفق باشید»

آزمون میان ترم درس آمار و احتمال مهندسی ۸۹/۸/۱۸

۱) با رسم شکل تابع $F(x)$ واضح است که متغیر تصادفی X، آمیخته (ترکیبی از متغیر تصادفی گسسته و پیوسته) می‌باشد. با نگاهی به شکل درمی‌یابیم که این متغیر تصادفی در نقاط $x=-2,2$ گسسته و در سایر نقاط پیوسته است بنابراین



$$P(X=-2)=P(X\leq -2)-P(X<-2)=F_X(-2)-F_X(-2^-)=\frac{-2+4}{8}-0=\frac{1}{4}$$

$$P(X=2)=P(X\leq 2)-P(X<2)=F_X(2)-F_X(2^-)=1-\frac{2+4}{8}=\frac{1}{4}$$

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x+4}{8}\right)=\frac{1}{8} \qquad -2<x<2$$

خواهیم داشت:

$$f_X(x)=\begin{cases} 0 & x<-2 \\ \frac{1}{4} & x=-2 \\ \frac{1}{8} & -2<x<2 \\ \frac{1}{4} & x=2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$$

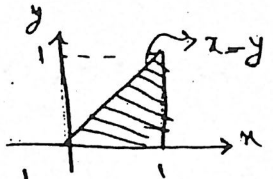
$$E(X)=-2\times P(X=-2)+2\times P(X=2)+\int_{-2}^{2}\frac{x}{8}\,dx=-2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+\frac{x^2}{16}\Big|_{-2}^{2}=0$$

$$E(X^2)=(-2)^2\times P(X=-2)+2^2\times P(X=2)+\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{8}\,dx=4\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+\frac{x^3}{24}\Big|_{-2}^{2}=\frac{8}{3}$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{8}{3}-0^2=\frac{8}{3}$$

ب)

$$P(|X|\leq 1)=P(-1\leq X\leq 1)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{8}\,dx=\frac{x}{8}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}$$



2) الف)

1) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in R^2 \rightarrow k \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \longrightarrow \int_0^1\int_0^x k\,dy\,dx = \int_0^1 kx\,dx = \frac{kx^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{k}{2} \rightarrow \frac{k}{2} = 1 \rightarrow k = 2$

ب)

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y} \qquad 0 < y < x \leq 1$$

$$f(y) = \int_x f(x,y)\,dx = \int_y^1 2\,dx = 2(1-y) \qquad 0 < y < 1$$

$$E(x|y=\tfrac{1}{2}) = \int x f(x|y=\tfrac{1}{2})\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\,dx = x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

---

3) الف)

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R \longrightarrow k \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \longrightarrow \int_{-\infty}^0 0\,dx + \int_0^{\infty} k e^{-ax}\,dx = \frac{-a}{k} e^{-ax}\Big|_0^{\infty} = \frac{a}{k} \longrightarrow \frac{a}{k} = 1 \rightarrow k = a$

ب)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 x \times 0\,dx + \int_0^{\infty} x \cdot a e^{-ax}\,dx = -xe^{-ax}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = 0 - \frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}$$

$x = u \longrightarrow dx = du$

$ae^{-ax}dx = dv \longrightarrow v = -e^{-ax}$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \times 0\,dx + \int_0^{\infty} x^2 \times a e^{-ax}\,dx = -x^2 e^{-ax}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} x e^{-ax}\,dx = 0 + \frac{2}{a}\int_0^{\infty} x a e^{-ax}\,dx$$

$x^2 = u \rightarrow 2x\,dx = du$

$$= 0 + \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{2}{a^2}$$

$ae^{-ax}dx = dv \rightarrow v = -e^{-ax}$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

۴) با استفاده از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $p=0.001$ و $n=3000$ داریم

$X \sim bin(3000, 0.001) \longrightarrow E(X) = np = 3000 \times 0.001 = 3$

۵) اگر متغیر تصادفی X را نشان‌دهندهٔ مشتری‌های که در هر ساعت وارد تاسیسات سرویس‌دهی می‌شوند در نظر بگیریم داریم:

$X \sim P(\lambda = 7)$

الف) $\lambda' = \lambda t = 7 \times 2 = 14$ برای دو ساعت

$$P(X>10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{x=0}^{10} \frac{e^{-14} 14^x}{x!}$$

ب) $E(X) = \lambda' = \lambda t = 7 \times 2 = 14$

یادآوری: در توزیع پواسون داریم: $E(X) = Var(X) = \lambda, \; P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

آمار و احتمال مهندسی	میان‌ترم	تاریخ: ۱۳۹۰/۸/۱۵	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:		شماره دانشجویی:	

توجه: از بین سوال‌های ۱ و ۲ تنها یکی را به انتخاب خود حل نمایید.

۱- یک وسیله الکتریکی دارای یک سنسور است که متصل به یک سیستم هشدار دهنده می‌باشد. این سنسور در هنگام مواجه با شرایط خطرناک در یک روز معین با احتمال ۰/۹۵ فعال می‌شود و همچنین با احتمال ۰/۰۰۵ در شرایط عادی در یک روز، فعال می‌شود. روزهای با شرایط خطرناک با احتمال ۰/۰۰۵ اتفاق می‌افتد. مطلوب است:

الف) احتمال اینکه روز عادی باشد به شرطی که سنسور فعال باشد.

ب) احتمال اینکه در یک روز شرایط خطرناک باشد به شرطی که سنسور فعال نباشد.

۲- فرض کنید ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۶ مهره سفید و ظرف دوم ۵ مهره سفید و ۵ مهره قرمز باشد. بدون نگاه کردن، ۲ مهره از ظرف اول خارج و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس اگر یک مهره از ظرف دوم خارج کنیم و قرمز باشد، احتمال اینکه هر دو مهره اولی سفید باشند، چقدر است؟

۳- تابع چگالی توام X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f(x,y) = c\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

الف) مقدار c را بیابید.

ب) تابع چگالی کناری X را پیدا کنید.

پ) $P\left(Y > \frac{1}{2} \middle| X < \frac{1}{2}\right)$ را بیابید. $E(X|Y$

ت) آیا X و Y مستقلند؟

۴- در یک ارتباط مخابراتی به طور متوسط در هر ثانیه یک خطا وجود دارد. اگر تعداد این خطاها در فواصل زمانی مجزا، مستقل و پواسن باشد، احتمال اینکه بیشتر از یک خطا در نیم دقیقه رخ دهد، چقدر است؟

۵- مطابق با گزارش یک مجله معتبر مهندسی شیمی، علت ۳۰ درصد از خرابی‌ها در کارخانجات پتروشیمی، خطای انسانی است.

الف) احتمال اینکه از ۲۰ خرابی بعدی حداقل ۱۰ خرابی به واسطه خطای انسانی باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه کم‌تر از ۴ خرابی از ۲۰ خرابی از این نوع به واسطه خطای انسانی باشد، چیست؟

۶- اگر مکانیسمی در کشف ذخایر نفتی دارای شانس ۰/۸ باشد و بر اساس این مکانیسم ۲۰ مورد نشان شد، باشد و بر روی موارد نشان شده که مستقل از یکدیگر می‌باشند، حفاری‌ها صورت گیرد و بدانیم تاکنون ۲ حفاری ناموفق داشته‌ایم، احتمال اینکه برای رسیدن به اولین حفاری موفق لازم باشد حداکثر ۳ حفاری دیگر انجام دهیم، چقدر است؟

موفق باشید

آزمون میان ترم درس آمار و احتمال مهندسی ۱۳۹۰/۸/۱۵

۱)

A_1 : پیشامد یک روز عادی

A_2 : پیشامد یک روز خطرناک

B : پیشامد فعال شدن سنسور

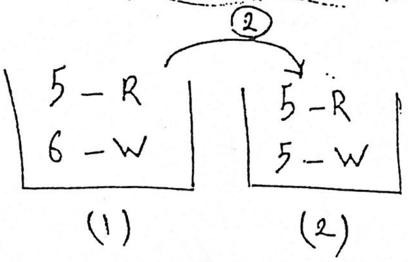
الف)

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{0.995\times 0.005}{0.995\times0.005+0.005\times0.95}=\frac{199}{389}$$

ب)

$$P(A_2|B')=\frac{P(A_2)P(B'|A_2)}{1-P(B)}=\frac{0.005\times(1-0.95)}{1-(0.995\times0.005+0.005\times0.95)}=0.00025$$

۲)



A_1 : پیشامد این که دو مهره‌ی انتخابی از ظرف (۱) قرمز باشد

A_2 : 〃 〃 〃 〃 〃 〃 سفید باشد

A_3 : 〃 〃 〃 〃 〃 〃 یکی قرمز و دیگری سفید باشد.

B : پیشامد این که مهره‌ی انتخابی از ظرف (۲) قرمز باشد.

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}=\frac{\frac{3}{11}\times\frac{5}{12}}{\frac{2}{11}\times\frac{7}{12}+\frac{3}{11}\times\frac{5}{12}+\frac{6}{11}\times}$$

$$P(A_1)=\frac{\binom{5}{2}\binom{6}{0}}{\binom{11}{2}}=\frac{2}{11},\quad P(A_2)=\frac{\binom{5}{0}\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}=\frac{3}{11},\quad P(A_3)=\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{11}{2}}=\frac{6}{11}$$

$$P(A_2|B)=\frac{3}{13}$$

۳) الف)

1) $f(x,y)\geq 0 \quad \forall (x,y)\in R^2 \longrightarrow c\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1 \longrightarrow \int_0^1\int_0^1 c\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dx\,dy = c\int_0^1\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{4}\right)dy=\frac{11c}{24}$

$$\Rightarrow \frac{11c}{24}=1 \longrightarrow c=\frac{24}{11}$$

ب)

$$f(x)=\int_y f(x,y)\,dy=\int_0^1 \frac{24}{11}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\frac{24}{11}\left(x^2y+\frac{xy^2}{4}\Big|_0^1\right)=\frac{24}{11}\left(x^2+\frac{x}{4}\right)$$

$0<x<1$

ج)

$$P\left(Y>\frac{1}{2}\,\Big|\,X<\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(Y>\frac{1}{2},X<\frac{1}{2}\right)}{P\left(X<\frac{1}{2}\right)}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x,y)\,dy\,dx}{\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx}$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{24}{11}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy\,dx}{\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{24}{11}\left(x^2+\frac{x}{4}\right)dx}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{16}\right)dx}{\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{8}\right)\Big|_0^{1/2}}$$

$$=\frac{\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{32}\Big|_0^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{24}+\frac{1}{32}}=\frac{\frac{1}{48}+\frac{1}{128}}{\frac{1}{24}+\frac{1}{32}}=\frac{11}{28}$$

د)

$$f(y)=\int_x f(x,y)\,dx=\int_0^1\frac{24}{11}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dx=\frac{24}{11}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{4}\Big|_0^1\right)=\frac{24}{11}\left(\frac{y}{4}+\frac{1}{3}\right)$$

$0<y<1$

ه) چون $f(x,y)\neq f(x)f(y)$ بنابراین متغیرهای تصادفی X, Y مستقل نیستند

4) اگر تعریف کنیم:

X : تعداد خطاها در هر ثانیه در یک ارتباط مخابراتی

Y : - - - - - - در هر نیم دقیقه - - - - - -

$E(X) = \lambda = 1$

$E(Y) = \lambda t = 1 \times 30 = 30 \longrightarrow P(Y>1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$

$$= 1 - \frac{e^{-30}(30)^0}{0!} - \frac{e^{-30}(30)^1}{1!} = 1 - 31e^{-30}$$

5) الف) با استفاده از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=20$, $p=0.3$ داریم:

$$P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{20} \binom{n}{x} (0.3)^x (1-0.3)^{20-x}$$

ب)

$$P(X<4) = \sum_{x=0}^{3} \binom{n}{x} (0.3)^x (1-0.3)^{20-x}$$

6) با استفاده از خاصیت فقدان حافظه توزیع هندسی داریم:

$P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$$= (0.8)(0.2)^{1-1} + (0.8)(0.2)^{2-1} + (0.8)(0.2)^{3-1} = 0.992$$

یادآوری: اگر $X \sim Ge(p)$ آنگاه $P(X=x) = p(1-p)^{x-1} \quad x = 1, 2, \ldots$

(3

X : تعداد مشتریهای ورودی در هر ساعت

$$X \sim P(\lambda = 7)$$

الف) Y : تعداد مشتریهای ورودی در هر 2 ساعت

$$\lambda' = \lambda t = 7 \times 2 = 14$$

$$Y \sim P(\lambda = 14) \longrightarrow P(Y = y) = \frac{e^{-14} 14^{y}}{y!} \quad y = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - \sum_{y=0}^{10} \frac{e^{-14} 14^{y}}{y!}$$

ب)

$$E(Y) = \lambda' = 14$$

---

4) الف)

$$P(X = 4) = \frac{1}{9} P(X = 2)$$

$$(1-p)^{4-1} p = \frac{1}{9} (1-p)^{2-1} p \longrightarrow (1-p)^2 = \frac{1}{9} \longrightarrow p = \frac{2}{3}$$

ب)

$$P(X \geq 3) = \sum_{x \geq 3} P(X = x) = \sum_{x=3}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{9}$$

(5

$$P(A | X = n) = n! \, P(X = n | A)$$

$$\frac{P(A \cap X = n)}{P(X = n)} = n! \frac{P(X = n \cap A)}{P(A)} \longrightarrow P(X = n) = \frac{P(A)}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

چون $P(X = n)$ یک تابع احتمال است بنابراین باید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(A)}{n!} = P(A) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = P(A) \cdot e^{1}$$

$$\longrightarrow P(A) e = 1 \longrightarrow P(A) = e^{-1}$$

یادآوری: $\sum^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$

آمار و احتمال مهندسی	آزمون شماره ۲	تاریخ: ۱۳۹۰/۸/۳	مدت آزمون: ۶۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:		شماره دانشجویی:	

توجه: آزمون شامل ۴ سوال می‌باشد. از بین سوالاتی که شماره یکسان دارند، تنها یکی را به انتخاب خود حل نمایید (امتیاز برابر دارند) و بقیه را به عنوان تمرین در منزل حل نمایید.

۱- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$ را برای تابع چگالی زیر یک بار به طور دقیق و بار دیگر با قضیه چبیشف محاسبه کنید:

$$f(x) = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

۱- اگر ۱۰ تاس سالم پرتاب شوند، احتمال تقریبی اینکه مجموع عددها بین ۳۰ و ۴۰ باشد را پیدا کنید.

۲- اگر احتمال پسر بودن یک فرزند برابر با ۰٫۵ باشد، آنگاه در بین ۱۰۰ خانواده با ۳ فرزند، انتظار می‌رود که در چند خانواده، تعداد پسرها بیشتر از تعداد دخترها باشد؟

۳- فرض کنید X طول عمر کمپرسوری با تابع توزیع زیر باشد:

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-x/900}, \quad x > 0.$$

میانگین و واریانس طول عمر کمپرسور را پیدا کنید.

۲- فرض کنید که توزیع تعداد اتومبیل‌هایی که هر سال دچار نقص ترمز می‌شوند متغیر تصادفی پواسن با واریانس ۵ است.

الف) احتمال اینکه حداکثر ۳ اتومبیل در سال دچار نقص ترمز شود، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه بیش از یک اتومبیل در سال دچار نقص ترمز شود، چقدر است؟

۳- محموله‌ای شامل ۴۰ عدد کالا است که ۳ عدد از آن‌ها معیوب است. از این محموله یک نمونه ۵تایی را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه دقیقاً یک نمونه معیوب باشد چقدر است؟

ب) میانگین و واریانس تعداد معیوب‌های موجود در این نمونه را به دست آورید.

۴- فرض کنید تابع چگالی توام X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = cxy^2, \quad 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$$

الف) مقدار c را پیدا کنید.

ب) کوواریانس X و Y را پیدا کنید.

موفق باشید.

(۱

$$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma}6x(1-x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt5}{5}}^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5}{5}}6x(1-x)\,dx=3x^2-2x^3\Big|_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt5}{5}}^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5}{5}}$$

$$\mu=E(X)=\int_0^1 6x^2(1-x)\,dx=2x^3-\frac{3}{2}x^4\Big|_0^1=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E(x^2)=\int_0^1 6x^3(1-x)\,dx=\frac{3}{2}x^4-\frac{6}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{3}{2}-\frac{6}{5}=\frac{3}{10}$$

$$Var(X)=E(x^2)-E^2(x)=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}\longrightarrow\sigma=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt5}{10}$$

$$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=P(-2\sigma<X-\mu<2\sigma)=P(|X-\mu|<2\sigma)$$

$$=1-P(|X-\mu|\geqslant2\sigma)\geqslant1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$$

یادآوری:

$$P(|X-\mu|\geqslant k\sigma)\leqslant\frac{1}{k^2}$$

(۱

X	$\cancel{0}$	1	2	3	4	5	6
$p(X=x)$	$\cancel{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\dots+6\times\frac{1}{6}=3.5$$

$$Y=\sum_{i=1}^{10}X_i\longrightarrow E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=10\times3.5=35$$

با استفاده از نامساوی چبیشف داریم:

$$P(30<Y<40)=P(-5<Y-35<5)=P(|Y-35|<5)$$

$$=1-P(|Y-35|\geqslant5)<1-\frac{1}{\left(5\times\sqrt{\frac{12}{35}}\right)^2}=\frac{53}{60}$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+\dots+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{91}{6}-(3.5)^2=\frac{35}{12}\longrightarrow\sigma=\sqrt{\frac{35}{12}}$$

2) ابتدا احتمال این که تعداد پسرها بیشتر از دخترها باشد را بدست می آوریم:

$X=x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P(X \geq 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

حال اکنون می دانیم در هر خانواده ی 3 فرزندی، یا تعداد پسرها بیشتر از دخترها هست یا نه
بنابراین یک آزمایش برنولی با شانس پیروزی $p(X \geq 2) = \frac{1}{2}$ داریم و چون این آزمایش
100 بار تکرار می شود بنابراین با استفاده از توزیع دوجمله ای خواهیم داشت:

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 100\,E(X_i) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

---

3) X : تعداد اتومبیل های که هر سال دچار نقص ترمز می شوند.

$$Var(X) = E(X) = \lambda = 5$$

$$X \sim P(\lambda = 5) \longrightarrow P(X=x) = \frac{e^{-5}5^x}{x!} \quad x = 0,1,2,\dots$$

الف)

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!} + \frac{e^{-5}5^2}{2!} + \frac{e^{-5}5^3}{3!} = \frac{118}{3}e^{-5}$$

ب)

$$P(X > 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$= 1 - \frac{e^{-5}5^0}{0!} - \frac{e^{-5}5^1}{1!} = 1 - 6e^{-5}$$

---

4) الف)

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{37}{3}}{\binom{40}{5}}, \quad P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{37}{5}}{\binom{40}{5}}, \quad P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{37}{2}}{\binom{40}{5}}$$

$X=x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	٠/30	٠/66	0.004	.0396

با استفاده از تعریف به راحتی می توان $E(X)$، $E(X^2)$ و سپس واریانس $Var(X)$ را محاسبه نمود

$$\int_0^1\int_0^2 cxy^2\,dx\,dy = \frac{c}{2}\int_0^1 x^2y^2\Big|_0^2 dy = 2c\int_0^1 y^2\,dy = \frac{2c}{3}\,y^3\Big|_0^1 = \frac{2c}{3}$$ (4

$$\frac{2}{3}c = 1 \longrightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$E(XY) = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^2 x^2y^3\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{3}x^3y^3\Big|_0^2 dy = 4\int_0^1 y^3\,dy = y^4\Big|_0^1 = 1$$

$$E(X) = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^2 x^2y^2\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{x^3}{3}y^2\Big|_0^2 dy = 4\int_0^1 y^2\,dy = \frac{4}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$E(Y) = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^2 xy^3\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{2}y^2\Big|_0^2 dy = 3\int_0^1 y^2\,dy = y^3\Big|_0^1 = \cancel{4}\,1$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - \frac{4}{3}\times 1 = -\frac{1}{3}$$

۱

«به نام آن که به شماره موجودات آگاه است»

«امتحان میان ترم آمار و احتمالات مهندسی»

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: مدت: ۱۰۰ دقیقه   زمان: یکشنبه ۸۸/۲/۶

۱- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $x=1,2,\ldots$ $f_X(x)=k(\frac{1}{2})^x$ است.

الف: مقدار ثابت k را محاسبه کنید.

ب: تابع مولد گشتاور X را تعیین کنید.

ج: میانگین، واریانس و انحراف معیار X را محاسبه کنید.

د: تابع احتمال $Y=X^2$ را تعیین کنید.

۲- X, Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 8xy & 0<y<x \ , \ 0<x<a \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

الف: مقدار ثابت a را محاسبه کنید.

ب: $E(Y|X)$ و $V(Y|X)$ را تعیین کنید.

ج: کوواریانس X, Y را محاسبه کنید.

۳- الف: تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X را تعریف کنید.

ب: تحقیق کنید که تابع $F_X(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$ یک تابع توزیع تجمعی است.

ج: تابع احتمال متغیر تصادفی X را تعیین کنید $(f_X(x)=?)$

۴- متغیر تصادفی گسسته X دارای تابع مولد گشتاور به صورت $M_X(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^t+\frac{1}{3}e^{-t}$

الف: تابع احتمال X را تعیین کنید.

ب: تابع احتمال $Y=|X|$ را تعیین کنید.

۵- تابع احتمال توام دو متغیر تصادفی X, Y به صورت زیر است.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \ , \ y>0 \\ 0 & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

الف: تحقیق کنید که $f_{X,Y}(x,y)$ یک تابع احتمال است.

ب: احتمال متغیر تصادفی $W=X^2$ را تعیین کنید. $(f_W(w)=?)$

۶- ظرفی که ۵ مهره سفید و ۹ مهره سیاه دارد، دو مهره را به تصادف و بطور همزمان خارج کرده و [illegible] مشاهده [illegible] کنار می گذاریم و سبس از این ظرف دو مهره به طور همزمان اختیار می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه:

الف: دو مهره سفید باشد، چیست؟

ب: دو مهره سیاه باشد، چیست؟

توضیح: سؤال پنجم ۵ امتیاز و بقیه سؤالات هرکدام ۷ امتیاز دارد. (جزئیات حل سؤالات را یادداشت کنید).

درخشان باشید

جواب سؤالات امتحان میان ترم آمار احتمالات مهندسی — ١٨٨/٣/١٦

۱)

$f_X(x) = K\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad x = 1, 2, \dots$

الف)

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x = 1, 2, \dots \longrightarrow \boxed{K \geq 0}$

2) $\sum_x f(x) = 1 \longrightarrow \sum_{x=1}^{\infty} K\left(\frac{1}{2}\right)^x = K \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \longrightarrow \boxed{K = 1}$

ب)

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x e^{tx} = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^x = \frac{\frac{e^t}{2}}{1 - \frac{e^t}{2}} = \frac{e^t}{2 - e^t}$$

if $\left|\frac{e^t}{2}\right| \leq 1 \longrightarrow \boxed{t < \ln 2}$

ج)

$$E(X) = \frac{dM_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{e^t(2-e^t) + e^t e^t}{(2-e^t)^2} = \frac{2e^t}{(2-e^t)^2}\bigg|_{t=0} = 2$$

$$E(X^2) = \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} = \frac{2e^t(2-e^t)^2 + 4e^{2t}(2-e^t)}{(2-e^t)^4}\bigg|_{t=0} = 6$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 6 - 4 = 2$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2}$$

د) $Y = X^2$

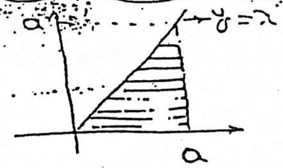
$Y=y$	1	4	9	16	...
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

$P(Y=y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{y}} \quad y = 1, 4, 9, \dots$

$P(Y=1) = P(X=1) \quad , \quad P(Y=4) = P(X=2) \quad \dots$

۲)

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 < y < x \quad , \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$



الف)

$$\int_0^a \int_0^x 8xy \, dy \, dx = 1$$

$$\int_0^a 4xy^2 \Big|_0^x dx = x^4 \Big|_0^a = a^4 = 1 \longrightarrow a = \pm 1 \longrightarrow \boxed{a = 1}$$

ب)

$$f(x) = \int_0^x 8xy \, dy = 4xy^2 \Big|_0^x = 4x^3 \quad 0 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{8xy}{4x^3} = \frac{2y}{x^2} \qquad 0<y<x \ , \ 0<x<1$$

$$E(y|x) = \int_0^x y \cdot \frac{2y}{x^2}\,dy = \frac{2}{x^2} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^x = \frac{2x}{3}$$

$$E(y^2|x) = \int_0^x y^2 \cdot \frac{2y}{x^2}\,dy = \frac{2}{x^2} \cdot \frac{y^4}{4}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

$$V(y|x) = E(y^2|x) - E^2(y|x) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{9x^2 - 8x^2}{18} = \frac{x^2}{18}$$

$$E(xy) = \int_0^1\int_0^x xy \cdot 8xy\,dy\,dx = \int_0^1 8x^2 \frac{y^3}{3}\Big|_0^x dx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^5\,dx = \frac{8}{3} * \frac{1}{6} = \boxed{\frac{4}{9}}$$ (ج

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{9} - \frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15} = \frac{100-96}{225} = \frac{4}{225}$$

$$E(X) = \int_0^1\int_0^x x \cdot 8xy\,dy\,dx = \int_0^1 8x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \int_0^1 4x^4\,dx = \frac{4}{5}$$

$$E(y) = \int_0^1\int_0^x y \cdot 8xy\,dy\,dx = \int_0^1 8x \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{8}{3}x^4\,dx = \frac{8}{15}$$

---

3) الف) میزان انباشتگی احتمال تا نقطه‌ی x را تابع توزیع متغیر تصادفی X گویند.

یعنی اگر داشته باشیم $f_X(x)$ تابع چگالی متغیر تصادفی X

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$$

و در حالت گسسته نیز داریم:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x' \leq x} P(X = x')$$

ب) ویژگی‌ها

1) غیر نزولی

2) از راست پیوسته

3) $F(+\infty)=1, F(-\infty)=0$

$$F_X(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \rightarrow \frac{dF}{dx} = \frac{e^x(e^x+e^{-x}) - e^x(e^x - e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2} > 0$$ غیر نزولی $\quad x \in R$

$$F(\infty) = \lim F(x) = \frac{e^x}{x} = 1 \ , \ F(-\infty) = \lim F(x) = \frac{0}{\infty} = 0$$

$0 \leq F(x) \leq 1$ ... $f(x) \geq 0$

(4 الف)

$$M_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-t}$$

$X=x$	0	1	-1
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} p(X=x)$$

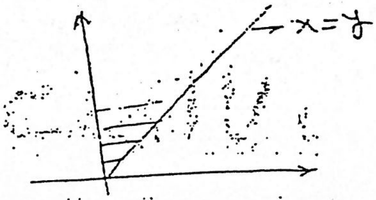
ب) $Y=|X|$

$$P(Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{2},\; P(Y=1) = P(X=1 \text{ یا } X=-1) = \frac{1}{2}$$

$$Y \sim Be(p)$$

(5 الف)

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0<x<y,\; y>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$



الف)

1) $f(x,y) > 0 \quad 0<x<y,\; y>0$

2) $\int_0^\infty \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy = 1$

①,② $\rightarrow$ f یک تابع احتمال است

$$\int_0^\infty\int_0^y e^{-y}\,dx\,dy = \int_0^\infty\int_x^\infty e^{-y}\,dy\,dx = \int_0^\infty -e^{-y}\Big|_x^\infty dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 \checkmark$$

ب) $W = X^2$

$$f(x) = \int_y f(x,y)\,dy = \int_x^\infty e^{-y}\,dy = -e^{-y}\Big|_x^\infty = e^{-x} \quad x>0$$

$$F_W(\omega) = P(W \leq \omega) = P(X^2 \leq \omega) = P(-\sqrt{\omega} \leq X \leq \sqrt{\omega}) = P(X \leq \sqrt{\omega}) - P(X < -\sqrt{\omega})$$

$$= F_X(\sqrt{\omega}) - F_X(-\sqrt{\omega})$$

$$f_W(\omega) = \frac{dF_\omega}{d\omega} = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} f_X(\sqrt{\omega}) + \frac{1}{2\sqrt{\omega}} f_X(-\sqrt{\omega}) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}}\left(e^{-\sqrt{\omega}} + e^{\sqrt{\omega}}\right) \quad \omega>0$$

(6 الف)

$$\boxed{\begin{array}{l} 5 - \omega \\ 9 - B \end{array}}$$

B_1: پیشامد اینکه دو مهره انتخابی از 12 مهره سفید باشند

A_1: " " [illegible] از 14 [illegible] " "

A_2: " " سیاه " "

A_3: " " یکی سیاه و دیگری سفید باشد " "

$$P(B_1) = P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2) + P(A_3)P(B_1|A_3)$$

$$= \frac{\binom{5}{2}\binom{9}{0}}{\binom{14}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}\binom{9}{0}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{5}{0}\binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}\binom{7}{0}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{9}{1}}{\binom{14}{2}} \cdot [illegible] = \frac{10}{91}$$

ج) B_2 : پیشامد اینکه دو مهره انتخابی از 12 مهره هر دو سیاه باشد.

$$P(B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(A_2)P(B_2|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \frac{\binom{5}{2}\binom{9}{0}}{\binom{14}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{5}{0}\binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{0}\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{9}{1}}{\binom{14}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{0}\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$$

$$= \frac{10*36}{91*66} + \frac{36*21}{91*66} + \frac{45*28}{91*66} \overset{?}{=} \frac{36}{91}$$

"به نام آنکه به شماره موجودات آگاه است."

امتحان میان ترم درس آمار و احتمالات مهندسی (آبان ۸۲)

✓ نام و نام خانوادگی:

✓ شماره دانشجویی:

وقت: ۱۲۰ دقیقه

۱- اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}k & |x|\le y\ ,\ \ 0\le y\le 2\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

الف) مقدار ثابت k را محاسبه کنید.

ب) ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

ج) $E(X|y=1)$ را محاسبه کنید.

۲- الف) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، ثابت کنید که تابع احتمال $Y=X^{2n}$ (که در آن n یک عدد طبیعی می باشد) برابر است با:

$$f_Y(y)=\frac{1}{2n}y^{\frac{1}{2n}-1}\left(f_X(-y^{\frac{1}{2n}})+f_X(y^{\frac{1}{2n}})\right)$$

ب) اگر X متغیری با تابع احتمال

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & -4\le x\le 4\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

تابع احتمال $Y=X^4$ کدام است؟

۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی است به طوریکه فقط برای اعداد صحیح و نامنفی تعریف شده باشد و داشته باشیم:

$$f_X(x+1)=\frac{1}{x+1}f_X(x)\qquad x=0,1,2,\ldots$$

الف) تابع احتمال X را تعیین کنید.

ب) $P(X\ge 1)$ را محاسبه کنید.

۴- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال به صورت زیر [illegible] $(\lambda>0)$

$$f_X(x)=\begin{cases}ke^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

الف) مقدار ثابت k را تعیین کنید.

ب) تابع مولد گشتاور X را تعیین و میانگین و واریانس آن [illegible] کنید.

ج) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $Y=X-\lambda$ را [illegible].

۵- جعبه ای حاوی ۶ گلوله سفید و ۴ گلوله سیاه است. [illegible] عددی از بین اعداد ۶،۵،۴،۳،۲،۱ انتخاب می کنیم و سپس از جعبه به تعداد عدد مشاهده شده و به طور [illegible] خارج می کنیم.

الف) احتمال اینکه تمام گلوله های خارج شده سیاه [illegible]؟

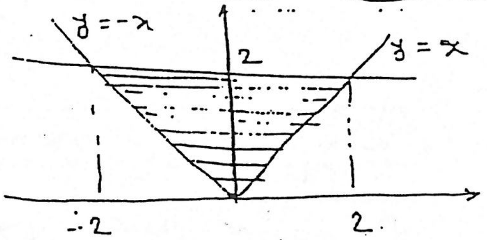
ب) اگر تمام گلوله های خارج شده سیاه باشند، احتمال [illegible] انتخاب شده باشد چیست؟

"موفق باشید"

جواب سؤالات امتحان میان ترم آمار و احتمال مهندسی — آبان 87

1)

$$f(x,y)=\begin{cases}K & |x|\le y \quad 0\le y\le 2\\ 0 & o.w\end{cases}$$



الف)

$$\int_0^2\int_{-y}^{y} K\,dx\,dy = K\int_0^2 2y\,dy = Ky^2\Big|_0^2 = 4K = 1 \qquad \boxed{K=\frac{1}{4}}$$

ب)

$$E(X)=\int_0^2\underbrace{\int_{-y}^{y}\frac{x}{4}\,dx}\,dy = 0 \quad , \quad E(Y)=\int_0^2\frac{1}{4}\int_{-y}^{y} y\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{y^2}{2}\,dy = \frac{4}{3}$$

$$E(XY)=\int_0^2\int_{-y}^{y}\frac{1}{4}xy\,dx\,dy = \int_0^2\frac{1}{4}y\underbrace{\int_{-y}^{y}x\,dx}_{0}\,dy = 0$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) = 0-0*\frac{4}{3}=0$$ X و y ناهمبسته‌اند

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{0}{\quad}=0$$

ج)

$$f(y)=\int_{-y}^{y}\frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_{-y}^{y} = \frac{y}{2} \qquad 0<y<2$$

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{y}{2}} = \frac{1}{2y} \qquad -y\le x\le y \ , \ 0\le y\le 2$$

$$f(x|y=1)=\frac{1}{2*1}=\frac{1}{2} \qquad -1<x<1$$

$$E(X|y=1)=\int_{-1}^{1}\frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

2)

$Y=X^{2n}$, $n\in N$, $f_X(x)$ پیوسته

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^{2n}\le y)=P(-y^{1/2n}\le X\le y^{1/2n})$$

$$=P(X\le y^{\frac{1}{2n}})-P(X\le -y^{\frac{1}{2n}})$$

$$=F_X(y^{1/2n})-F_X(-y^{1/2n}) \rightarrow f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{2n}y^{\frac{1}{2n}-1}\left(f_X(-y^{1/2n})+f_X(y^{\frac{1}{2n}})\right)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & -4 \leq x \leq 4 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad y = x^4 \;,\; n=2 \qquad (\text{الف}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\times 2} y^{\frac{1}{4}-1}\left(f_X(-y^{\frac{1}{4}}) + f_X(y^{1/4})\right) = \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16\sqrt[4]{y^3}}$$

$$0 \leq y \leq 256$$

(3

$$f_X(x+1) = \frac{\lambda}{x+1} f_X(x) \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

(ب)

$$X \sim P(\lambda) \longrightarrow P(X = x+1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}}{(x+1)!} = \frac{\lambda}{x+1} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= \frac{\lambda}{x+1} P(X = x)$$

$$X \sim P(\lambda = 1)$$

(الف

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{e^{-1} 1^0}{0!} = 1 - e^{-1}$$

(4

(ب)

$$f(x) = \begin{cases} k e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0$$

$$\int_0^\infty k e^{-\lambda x} dx = \frac{-k}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{k}{\lambda} = 1 \longrightarrow \boxed{k = \lambda}$$

(الف

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} dx = \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{-(\lambda-t)x}\Big|_0^\infty \qquad \begin{matrix}\lambda - t > 0 \\ \lambda > t\end{matrix}$$

$$= \frac{-\lambda}{t-\lambda} \qquad t < \lambda$$

$$E(X) = \frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{+\lambda}{(t-\lambda)^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{-2\lambda(t-\lambda)}{(t-\lambda)^4} = \frac{-2\lambda}{(t-\lambda)^3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

ج)

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(X-\lambda)}) = e^{-\lambda t}E(e^{tX}) = e^{-\lambda t} M_X(t)$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\lambda - t} \qquad t<\lambda$$

---

5) B : پیشامد اینکه تمام توپ‌ها خارج شده سیاه باشد.

الف) A_i : پیشامد اینکه عدد انتخابی i باشد.

$P(A_i)=\frac{1}{6} \quad i=1,2,\dots,6$

$$\boxed{\begin{matrix} 6-w \\ 4-B \end{matrix}}$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\dots+P(A_6)P(B|A_6)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{0}}{\binom{10}{1}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{6}{0}}{\binom{10}{4}} + \underbrace{0+0} \right)$$

تمام توپ‌های خارج شده سیاه نیست زیرا فقط 4 توپ سیاه داریم

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{4}{10} + \frac{6}{45} + \frac{4}{120} + \frac{1}{210} \right) \stackrel{?}{=}$$

ب)

$$P(i=4|B) = \frac{P(A_4 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_4)P(B|A_4)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{\binom{4}{4}\binom{6}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{210}}{\frac{1}{6}\left(\frac{4}{10}+\frac{6}{45}+\frac{4}{120}+\frac{1}{210}\right)}$$

به نام آنکه به شماره موجودات آگاه است

آزمون میان ترم آمار مهندسی

مدرس: عرب‌زاده – رضایی – محمدپور　　　دوشنبه ۳ اردیبشت ۱۳۸۶　　　وقت: ۲ ساعت

نام ونام خانوادگی　　　　　　شماره دانشجویی ....

---

۱) (۸ نمره) نشان دهید

$$F_X(x) = \frac{e^x}{e^{-x}+e^x},\quad x \in R$$

یک تابع توزیع تجمعی برای متغیر تصادفی X میباشد. اگر $Y = e^X$ تعریف کنیم، مطلوب است محاسبه تابع چگالی (احتمال) Y، یعنی $f_Y(y)$.

۲) (۸ نمره) اگر تابع چگالی توام (X,Y) به‌صورت زیر باشد

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه مقدار c، $E(X)$، $E(Y)$، $E(XY)$، $V(X)$، $V(Y)$، $Cov(X,Y)$.

۳) (۸ نمره) در ظرفی ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و یک مهره قرمز داریم. از این ظرف به تصادف، ۵ مهره (بطور همزمان) بیرون می‌آوریم. فرض کنید X تعداد مهره‌های سفید و Y تعداد مهره‌های سیاه در این ۵ مهره باشد. مطلوب است محاسبه تابع چگالی توام $f_{X,Y}(x,y)$ و تابع چگالی شرطی $f_{X|Y=1}(x|y=1)$. آیا X از Y مستقل است؟ چرا؟

۴) (۸ نمره) اگر تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به‌صورت زیر باشد

$$M_X(t) = \frac{1}{10}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}$$

مطلوب است محاسبه تابع احتمال متغیر تصادفی X و محاسبه میانگین وانحراف معیار متغیر تصادفی $Y = X^2 + 1$

۵) (۸ نمره) در ظرفی ۳ مهره سفید، ۵ مهره سیاه داریم. از این ظرف ۲ مهره بطور متوالی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید احتمال اینکه مهره اول با مهره دوم همرنگ باشند برابر است. اگر بدانیم مهره دوم سیاه است، احتمال اینکه مهره اول سیاه بوده باشد چقدر است؟

«موفق باشید»

۱۳۸۶،۲،۴ — جواب سؤالات امتحان میان‌ترم آمار و احتمال مهندسی

۱) ویژگی‌ها

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \qquad x \in R$$

۱) غیر نزولی

۲) از راست پیوسته

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{e^x(e^x+e^{-x}) - e^x(e^x - e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2} \geq 0$$ غیر نزولی

$F(-\infty)=0\,,\ F(+\infty)=1$ (3

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = \frac{e^a}{e^a + e^{-a}} = F(a) \quad \checkmark$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = 0$$

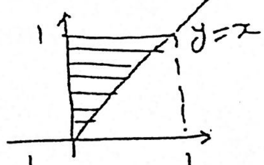
$$f(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2} \qquad x \in R$$

$$y = e^x \Rightarrow x = \ln y \longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$f_Y(y) = \left|\frac{dx}{dy}\right| f_X(\ln y) = \left|\frac{1}{y}\right| \cdot \frac{2}{(e^{\ln y} + e^{-\ln y})^2} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{(y+\frac{1}{y})^2} = \frac{y}{(y^2+1)^2}$$

(۲

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$



$$\int_0^1 \int_x^1 cxy\, dy\, dx = \int_0^1 cx \frac{y^2}{2}\Big|_x^1 dx = \frac{c}{2}\int_0^1 x - x^3\, dx = \frac{c}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{c}{8} = 1 \qquad \boxed{c = 8}$$

$$E(X) = \int_0^1 \int_x^1 8x^2 y\, dy\, dx = \int_0^1 8x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_x^1 dx = \int_0^1 4(x^2 - x^4)\, dx = \frac{8}{15}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \int_x^1 8xy^2\, dy\, dx = \int_0^1 8x \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_x^1 dx = \frac{8}{3}\int_0^1 x - x^4\, dx = \frac{4}{5}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_x^1 8x^2y^2\,dy\,dx=\int_0^1 8x^2\frac{y^3}{3}\Big|_x^1 dx=\frac{8}{3}\int_0^1 x^2-x^5\,dx=\frac{8}{3}*\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_x^1 8x^3y\,dy\,dx=\int_0^1 8x^3\frac{y^2}{2}\Big|_x^1 dx=4\int_0^1 x^3-x^5\,dx=\frac{1}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_0^1\int_x^1 8xy^3\,dy\,dx=\int_0^1 8x\frac{y^4}{4}\Big|_x^1 dx=2\int_0^1 x-x^5\,dx=\frac{2}{3}$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{3}-\frac{64}{225}=\frac{75-64}{225}=\frac{11}{225}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{50-48}{75}=\frac{2}{75}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\frac{8}{15}\cdot\frac{4}{5}=\frac{100-96}{225}=\frac{4}{225}$$

(3

B -- W
2 - B
1 - R

5

Y \ X	2	3	P(Y=y)
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
P(X=x)	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

$$P(Y=1,X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{2}}{\binom{6}{5}}=0\ ;\ P(Y=1,X=3)=\frac{\binom{\ }{\ }\binom{\ }{\ }\binom{\ }{\ }}{\binom{6}{5}}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=3,Y=2)=\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{6}{5}}=\frac{1}{6},\ P(X=2,Y=2)=\frac{\binom{\ }{2}\binom{\ }{2}\binom{\ }{\ }}{6}=\frac{3}{6}$$

$$P(X=2,Y=1)=0\neq P(X=2)P(Y=1)=\frac{3}{6}*\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$ X,Y مستقل نیستند

$f(x|y=1)=?$
$X|Y=1$

X|Y=1	2	3
P(X|Y=1)	0	1

اگر ... باشد X با احتمال یک 3 است

$$P(X=3|Y=1)=1$$

$$M_X(t) = \frac{1}{10}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}$$ (4

$X=x$	-3	-2	0	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

$Y = X^2+1 \rightarrow$

$Y=y$	10	5	1
$P(Y=y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$

$P(Y=10)=P(X=-3)$, $P(Y=5)=P(X=2 \vee X=-2) = \frac{1}{5}+\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$P(Y=1)=P(X=0)$

$$E(Y) = 10 * \frac{1}{10} + 5 * \frac{2}{5} + 1 * \frac{1}{2} = 3.5$$

$$E(Y^2) = 10^2 * \frac{1}{10} + 25 * \frac{2}{5} + 1 * \frac{1}{2} = 20.5$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 20.5 - (3.5)^2 = 8.25 \rightarrow \sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{8.25}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 3 - W \\ 5 - B \end{matrix}}$$

(1 A_1 : پیشامد اینکه مهره اول سفید باشد

A_2 : " " دوم " "

B_1 : " " اول سیاه "

B_2 : " " دوم " "

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1)$$
$$= \frac{3}{8} * \frac{2}{7} + \frac{5}{8} * \frac{3}{7} = \frac{3}{8} = P(A_1)$$

احتمال سفید بودن مهره اول و دوم برابرند.

$$P(B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(B_1)P(B_2|B_1)$$
$$= \frac{3}{8} * \frac{5}{7} + \frac{5}{8} * \frac{4}{7} = \frac{5}{8} = P(B_1)$$

احتمال سیاه بودن مهره اول و دوم برابرند.

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{5}{8} * \frac{4}{7}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{7}$$

به‌نام آنکه به شماره موجودات آگاه است

آزمون میان‌ترم درس آمار و احتمالات مهندسی — وقت: ۱۰۰ دقیقه — ۸۵/۸/۲۸

۱) اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) = ke^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

باشد

الف) مقدار k را محاسبه کنید. $\left(\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

ب) تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید.

---

۲) تابع احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت زیر است

$$f_X(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 1 \\ b(2 - x), & 1 \leq x < 2 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

الف) اگر $E(X) = 1$، آن‌گاه دومقدار ثابت a و b را محاسبه کنید.

ب) احتمال شرطی $P\left(X < \frac{3}{2} \mid X > \frac{1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

---

۳) اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توام زیر باشد

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{48}(x + y)^2, & x = 0,1,2, \ y = 0,1,2 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

آن‌گاه $E(Y \mid X = 1)$ و $V(Y \mid X = 1)$ را محاسبه کنید

---

۴) اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام زیر باشد

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx^2y, & 0 < x < y, \ 0 < y < 2 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

الف) مقدار ثابت k را محاسبه کنید

ب) ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید $(\rho = ?)$.

---

۵) یک دستگاه دروغ‌سنج به یک مظنون وصل می‌گردد. می‌دانیم اگر شخص گناهکار باشد با احتمال ۹۵٪ دستگاه دروغ او را مشخص می‌کند و اگر شخص بی‌گناه باشد با احتمال ۹۹٪ بی‌گناهی او را آشکار می‌کند. اگر یک مظنون از یک زندان که فقط ۰/۰۵ آنها تاکنون جنایتی مرتکب شده‌اند انتخاب گردد و دستگاه نشان دهد که او گناهکار است، احتمال این‌که او بی‌گناه باشد را بیابید.

توجه: هر پرسش ۸ نمره دارد.

موفق باشید

27

۸۵/۸/۲۸ جواب سوالات آزمون میان ترم آمار و احتمالات مهندسی:

۱) الف)

① $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in R \to Ke^{-\frac{1}{2}x^2}>0 \to K>0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\frac{1}{2}x^2}dx \overset{زوج}{=} 2K\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2K\int_{0}^{\infty}\sqrt{2}\,e^{-t^2}dt$
$\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2=t^2 \\ x\,dx=2t\,dt \\ x=\sqrt{2}\,t \end{cases}$

$=2\sqrt{2}K\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt = 2\sqrt{2}K * \frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{2\pi}K=1 \to K=\sqrt{2\pi}$

ب)

$Y=X^2 \to F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq +\sqrt{y})$

$=P(X\leq\sqrt{y})-P(X\leq-\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{d[F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})]}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})$

$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y}\right)$

$=\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y} \to Y\sim\chi^2_{(1)}$

② الف)

$f_X(x)=\begin{cases} ax & 0<x<1 \\ b(2-x) & 1\leq x<2 \\ 0 & o.w \end{cases}$

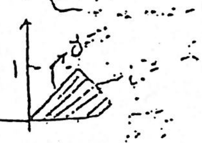
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1 \to \int_0^1 ax\,dx+\int_1^2 b(2-x)\,dx=1$ $\quad \boxed{a+b=2}$

$\to \frac{ax^2}{2}\Big|_0^1+2bx\Big|_1^2-\frac{bx^2}{2}\Big|_1^2=1 \to \frac{a}{2}+\frac{b}{2}=1$

ب) $E(X)=1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=1 \to \int_0^1 ax^2dx+\int_1^2 bx(2-x)\,dx=1$

$\to \frac{ax^3}{3}\Big|_0^1+bx^2\Big|_1^2-\frac{bx^3}{3}\Big|_1^2=\frac{a}{3}+3b-\frac{7b}{3}=1 \to$

$\xrightarrow{*,**}\begin{cases} a+b=2 \\ a+2b=3 \end{cases} \to a=1,\ b=1$



$P(X<\frac{3}{2}\mid X>\frac{1}{2})=\frac{P(X<\frac{3}{2}, X>\frac{1}{2})}{P(X>\frac{1}{2})}=\frac{P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})}{P(X>\frac{1}{2})}=$

$$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}(2-x)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+2x\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{3}{8}+1-\frac{5}{8}=\frac{3}{4}$$

$$P\left(X>\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)+P\left(\frac{3}{2}<X<2\right)=\frac{3}{4}+\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2-x)\,dx=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

(3

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{48}(x+y)^2 & x=0,1,2,\ y=0,1,2\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

$x \backslash y$	0	1	2	$P(X=x)$
0	0	$\frac{1}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{5}{48}$
1	$\frac{1}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{9}{48}$	$\frac{14}{48}$
2	$\frac{4}{48}$	$\frac{9}{48}$	$\frac{16}{48}$	$\frac{29}{48}$
	$\frac{5}{48}$	$\frac{14}{48}$	$\frac{29}{48}$	1

$y=y \mid x=1$	0	1	2	
$P(Y=y\mid X=1)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{9}{14}$	1

$$P(Y=0\mid X=1)=\frac{P(Y=0,X=1)}{P(X=1)}=\frac{\frac{1}{48}}{\frac{14}{48}}=\frac{1}{14}$$

$$P(Y=1\mid X=1)=\frac{P(Y=1,X=1)}{P(X=1)}=\frac{\frac{4}{48}}{\frac{14}{48}}=\frac{4}{14}\quad,\ P(Y=2\mid X=1)=\frac{P(Y=2,X=1)}{P(X=1)}=\frac{\frac{9}{48}}{\frac{14}{48}}$$

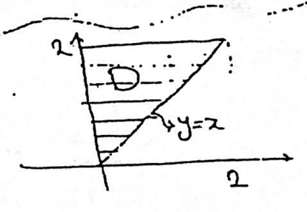
$$E(Y\mid X=1)=\sum_y y\,P(Y=y\mid X=1)=0*\frac{1}{14}+1*\frac{4}{14}+2*\frac{9}{14}=\frac{22}{14}=\frac{11}{7}$$

$$E(Y^2\mid X=1)=\sum_y y^2 P(Y=y\mid X=1)=0^2*\frac{1}{14}+1^2*\frac{4}{14}+2^2*\frac{9}{14}=\frac{40}{14}=\frac{20}{7}$$

$$Var(Y\mid X=1)=E(Y^2\mid X=1)-E^2(Y\mid X=1)=\frac{20}{7}-\frac{121}{49}=\frac{19}{49}$$

(4)

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}kx^2y & 0<x<y\ ,\ 0<y<2\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$



① $f(x,y)\geq 0\quad \forall x,y \rightarrow k>0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1 \rightarrow \int_0^2\int_0^y kx^2y\,dx\,dy=\int_0^2 ky\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^y\right)dy=\frac{k}{3}\int_0^2 y^4\,dy=\frac{32}{15}k=1$

$\rightarrow \boxed{k=\frac{15}{32}}$

$$E(XY)=\int_0^2\int_0^y xy\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^y \frac{15}{32}x^3y^2\,dx\,dy=\int_0^2 \frac{15}{32}y^2\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^y\right)dy=\frac{15}{32\times 4}*\frac{y^7}{7}\Big|_0^2=\boxed{\frac{15}{7}}$$

$$E(X)=\int_0^2\int_0^y x\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^y \frac{15}{32}x^3y\,dx\,dy=\int_0^2\frac{15}{32}y\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^y\right)dy=\frac{5}{4}\quad (4)$$

$$E(y)=\int_0^2\int_0^y y\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^y\frac{15}{32}y^2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^y\right)dy=\int_0^2\frac{15}{32*3}y^5\,dy=\frac{5}{3}$$

$$E(x^2)=\int_0^2\int_0^y x^2 f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\frac{15}{32}y\left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^y\right)dy=\int_0^2\frac{15}{32}*\frac{1}{5}y^6\,dy=\frac{12}{7}$$

$$E(y^2)=\int_0^2\int_0^y y^2 f(x,y)\,dx\,dy=\frac{15}{32}\int_0^2\int_0^y y^3x^2\,dx\,dy=\frac{15}{32}\int_0^2\frac{y^6}{3}dy=\frac{20}{7}$$

$$Cov(X,y)=E(Xy)-E(X)E(y)=\frac{15}{7}-\frac{5}{4}*\frac{5}{3}=\frac{180-175}{84}=\frac{5}{84}$$

$$Var(x)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{12}{7}-\frac{25}{16}=\frac{192-175}{112}=\frac{17}{112}$$

$$Var(y)=E(y^2)-E^2(y)=\frac{20}{7}-\frac{25}{9}=\frac{180-175}{63}=\frac{5}{63}$$

$$\rho_{x,y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{\frac{5}{84}}{\sqrt{\frac{17}{112}*\frac{5}{63}}}$$

(5

A: پیشامد گناهکار بودن شخص

B: پیشامد اینکه دستگاه شخص را گناهکار تشخیص دهد.

$P(B|A)=0.95$

$P(B'|A')=0.99 \rightarrow P(B|A')=0.01$

$P(A)=0.05 \longrightarrow P(A')=0.95$

$P(A'|B)=?$

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A')P(B|A')}{P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')}=\frac{0.95*0.01}{0.05*0.95+0.95*0.01}$$

$$=\frac{1}{6}$$

به نام آن که به شماره موجودات آگاه است

آزمون میان ترم درس آمار و احتمالات مهندسی، شنبه ۲/۲/ ۱۳۸۵، وقت: ۹۰ دقیقه

توجه: ۱) هر پرسش ۸ امتیاز دارد. ۲) جزئیات حل پرسش ها را یادداشت کنید. ۳) $o.w$ یعنی در سایر جاها.

---

۱) تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته X بصورت زیر تعریف شده است:

هم از راست و هم از چپ پیوسته

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -ke^{-x}(x+1) + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

الف): مقدار k را بدست آورید. ب): تابع مولد گشتاور X را تعیین کنید. ج): میانگین و انحراف معیار X را محاسبه کنید.

۲) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X بصورت زیر تعریف شده است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & -2 \leq x < 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال متغیر $Y = X^2$ را تعیین کنید.

۳) X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} kxy & x = 1,2,3, \;\; y = 1,2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف): مقدار k را محاسبه کنید. ب): ضریب همبستگی خطی بین X و Y را محاسبه کنید. ج): آیا این دو متغیر مستقلند یا وابسته؟ د): تابع احتمال $Z = XY$ را تعیین کنید.

۴) ده کیسه کاملاً یکسان که بترتیب از یک تا ده شماره گذاری شده است وجود دارد. در کیسه iام i مهره قرمز و $2i$ مهره آبی وجود دارد ($1 \leq i \leq 10$). یکی از این کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می کنیم. الف): مطلوبست احتمال اینکه مهره انتخاب شده قرمز باشد، چیست؟ ب): اگر مهره خارج شده قرمز باشد، احتمال اینکه از کیسه [illegible] خارج شده باشد، چیست؟

۵) یک سیستم مرکب از m جزء را موازی گوییم، اگر حداقل یکی از اجزای آن عمل کند، آنگاه تمام سیستم عمل می کند.

اگر در یک سیستم موازی m جزیی، احتمال اینکه جزء iام مستقل از اجزای دیگر عمل کند، p_i باشد ($i = 1,2,\ldots m$). مطلوبست احتمال اینکه: الف): این سیستم عمل کند چقدر است؟ ب): این سیستم عمل نکند چقدر است؟

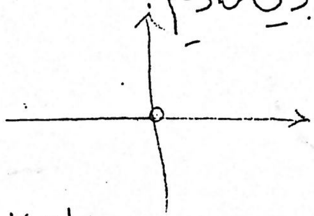
موفق و موید باشید

85/2/2 آزمون میان ترم درس آمار و احتمالات مهندسی

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ -ke^{-x}(x+1)+1 & x\geq 0 \end{cases}$$

$F(0) = -k+1$

چون متغیر تصادفی X پیوسته است پس $F_X(x)$ نیز باید پیوسته باشد بنابراین داریم:



$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$$

$$0 = F(0) = -ke^{-0}(0+1)+1 = 1-K \rightarrow K=1$$

ب) می‌دانیم: $\dfrac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$,

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = e^{-x}(x+1) - e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\begin{cases} x=u \rightarrow dx=du \\ e^{-x(1-t)}dx = dv \rightarrow v = \dfrac{-1}{1-t}e^{-x(1-t)} \end{cases}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}xe^{-x}dx = \int_0^\infty xe^{-x(1-t)}dx = \frac{-x}{1-t}e^{-x(1-t)}\Big|_0^\infty + \frac{1}{(1-t)}\int_0^\infty e^{-x(1-t)}dx$$

$$= 0 - \frac{1}{(1-t)^2}e^{-x(1-t)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{(1-t)^2}$$ برای اینکه انتگرال فوق موجود باشد باید $(1-t)>0$

ج)

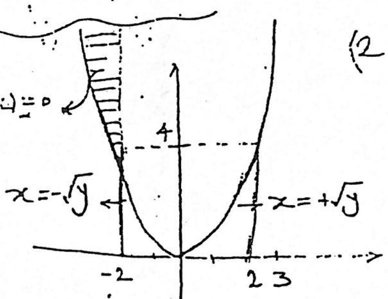
$$E(X) = \frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{2}{(1-t)^3}\Big|_{t=0} = 2$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X^2)-E^2(X)} = \sqrt{2}$$

$$E(X^2) = \frac{d^2M_X(t)}{dt^2} = \frac{6}{(1-t)^4}\Big|_{t=0} = 6$$

2)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & -2\leq x\leq 3 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad y=x^2$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-2}^{x}\frac{1}{5}dx = \frac{x+2}{5} \quad -2<x<3$$

$$F_Y(y) = P(Y\leq y) = P(X^2\leq y) = P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}) = P(X\leq\sqrt{y}) - P(X\leq-\sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}+2}{5} - \frac{-\sqrt{y}+2}{5} = \frac{2\sqrt{y}}{5} \quad 0<y<4$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} < X < -2) + P(-2 < X < \sqrt{y})$$

$$= 0 + P \text{ [illegible] } = \frac{\sqrt{y}+2}{5} - \frac{-2+2}{5} = \frac{\sqrt{y}+2}{5} \text{ [illegible]}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ \frac{2\sqrt{y}}{5} & 0<y<4 \\ \frac{\sqrt{y}+2}{5} & 4 \leq y < 9 \\ 1 & y \geq 9 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} \rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5\sqrt{y}} & 0 \leq y < 4 \\ \frac{1}{10\sqrt{y}} & 4 \leq y < 9 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

(3

$P(X=x, Y=y) = Kxy \qquad x=1,2,3 \quad , y=1,2$

$$\sum_{y=1}^{2}\sum_{x=1}^{3} P(X=x, Y=y) = 1 \rightarrow K + 2K + 3K + 2K + 4K + 6K = 1 \rightarrow K = \frac{1}{18}$$

X \ Y	1	2	P(X=x)
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$
2	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$
3	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{9}{18}$
P(Y=y)	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18}$	1

$$E(X) = 1 * \frac{3}{18} + 2 * \frac{6}{18} + 3 * \frac{9}{18} = \frac{7}{3}$$

$$E(X^2) = 1^2 * \frac{3}{18} + 2^2 * \frac{6}{18} + 3^2 * \frac{9}{18} = 6$$

$$E(Y) = 1 * \frac{6}{18} + 2 * \frac{12}{18} = \frac{5}{3}$$

$$E(Y^2) = 1^2 * \frac{6}{18} + 2^2 * \frac{12}{18} = 3$$

$$E(XY) = \sum_{y=1}^{2}\sum_{x=1}^{3} xy P(X=x, Y=y) = \frac{1}{18}\sum_{y=1}^{2}\sum_{x=1}^{3} x^2y^2 = \frac{1}{18}(1+4+9+4+16+36)$$

$$= \frac{70}{18} = \frac{35}{9}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{(E(X^2)-E^2(X))(E(Y^2)-E^2(Y))}} = \frac{\frac{35}{9} - \frac{7}{3} * \frac{5}{3}}{\sqrt{(6-\frac{49}{9})(3-\frac{25}{9})}}$$

$$= 0$$

چون $\forall x,y$ داریم $P(X=x)P(Y=y) = P(X=x, Y=y)$ پس X, Y مستقل هستند

$P(Z=1) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{18}$, $P(Z=2) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) = \frac{4}{18}$

$P(Z=3) = P(X=3, Y=1) = \frac{3}{18}$, $P(Z=4) = P(X=2, Y=2) = \frac{4}{18}$

$P(Z=6) = P(X=3, Y=2) = \frac{6}{18}$

Z = z	1	2	3	4	6
P(Z=z)	1/18	4/18	3/18	4/18	6/18

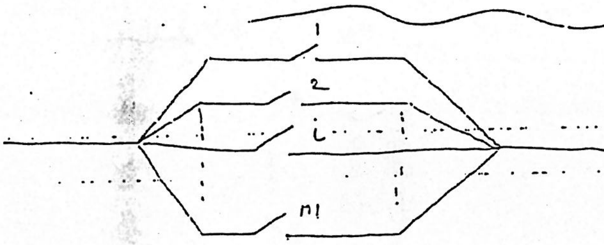
4) A_i : پیشامد اینکه کیسه‌ی iام انتخاب شود.

B : پیشامد اینکه مهره‌ی انتخابی از کیسه‌ی iام قرمز باشد.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{10} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} * \frac{i}{i+2i} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_5|B) = \frac{P(A_5 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_5)P(B|A_5)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10} * \frac{5}{5+10}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{10}$$

5) A_i : پیشامد اینکه جزء iام عمل کند.



$P($سیستم عمل نکند$) = P($هیچ‌یک از اجزا عمل نکند$)$

$= (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_m) = \prod_{i=1}^{m}(1-p_i)$

$P($سیستم عمل کند$) = P($حداقل یکی از اجزا عمل کند$) = 1 - P($هیچ‌یک از اجزا عمل نکند$) = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1-p_i)$

$$f_X(x) = k e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 \Rightarrow \int_{-\infty} k e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \int_0 k e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx =$$

$$t^2 = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}x \Rightarrow x = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)t, \quad dx = \frac{2}{\sqrt{2}}\,dt$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-t^2}\,dt}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times 2} = 1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} k \times \sqrt{\pi} = 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}k = 1 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$Y = X^2 \rightarrow \pm\sqrt{y} = X \Rightarrow f_X(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} \times \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} = |J|$$

$$P\left(X < \tfrac{3}{2} \mid X > \tfrac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X < \frac{3}{2}, X > \frac{1}{2}\right)}{P\left(X > \frac{1}{2}\right)} = \frac{\int_{1/2}^{3/2}}{\int_{1/2}^{\infty}}$$

به‌نام آنکه به شماره موجودات آگاه است

آزمون میان‌ترم درس آمار و احتمالات مهندسی | **وقت: ۱۰۰ دقیقه** | **۸۵/۸/۲۸**

۱) اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) = ke^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

باشد

الف) مقدار k را محاسبه کنید. $\left(\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

ب) تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = X^2$ را تعیین کنید.

---

۲) تابع احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت زیر است

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & , \quad 0 < x < 1 \\ b(2-x), & 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

الف) اگر $E(X) = 1$، آن‌گاه دومقدار ثابت a و b را محاسبه کنید.

ب) احتمال شرطی $P\left(X < \frac{3}{2} \mid X > \frac{1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

---

۳) اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توام زیر باشد

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{48}(x+y)^2, & x = 0,1,2, \ y = 0,1,2 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

آن‌گاه $E(Y \mid X = 1)$ و $V(Y \mid X = 1)$ را محاسبه کنید

---

۴) اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام زیر باشد

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx^2y, & 0 < x < y, \ 0 < y < 2 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

الف) مقدار ثابت k را محاسبه کنید

ب) ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید($\rho = ?$).

---

۵) یک دستگاه دروغ‌سنج به یک مظنون وصل می‌گردد. می‌دانیم اگر شخص گناهکار باشد با احتمال ٪۹۵ دستگاه دروغ او را مشخص می‌کند و اگر شخص بی‌گناه باشد با احتمال ٪۹۹ بی‌گناهی او را آشکار می‌کند. اگر یک مظنون از یک زندان که فقط ۰/۰۵ آنها تاکنون جنایتی مرتکب شده‌اند انتخاب گردد و دستگاه نشان دهد که او گناهکار است، احتمال این‌که او بی‌گناه باشد را بیابید.

توجه: هر پرسش ۸ نمره دارد.

موفق باشید

میان‌ترم ـ آمار احتمال مهندسی (۸۵/۸/۲۸)

۱

الف) $f_x(x)=ke^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad x\in R$

با توجه به خواص تابع چگالی احتمال داریم:

۱) $f_x(x)\geq 0$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,d_x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x^2}\,d_x=1\\ \frac{x}{\sqrt{2}}=t\Rightarrow dx=\sqrt{2}dt\end{array}\right\}\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-t^2}\sqrt{2}dt=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=1\Rightarrow 2\sqrt{2}k\int_0^{\infty}\underbrace{e^{-t^2}dt}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ (\text{با توجه به فرض مسئله})}=1\Rightarrow 2\sqrt{2}k\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ب) برای به دست آوردن تابع احتمال $y=x^2$ از تابع توزیع تجمعی استفاده می‌کنیم.

$$G(y)=p(y\leq y)=p(x^2\leq y)=p(-\sqrt{y}\leq x\leq\sqrt{y})$$

اما با توجه به این که $f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}x^2} \quad x\in R$ مقدار احتمال فوق را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$G(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

$$G^2(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{y}}\int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+u^2)}\, dx\, du \xrightarrow[\text{تغییر مختصات به قطبی}]{\text{با استفاده از}} G^2(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$\Rightarrow G^2(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{-\frac{1}{2}r^2}\Big|_0^{\sqrt{y}}\right)d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{-\frac{y}{2}}+1\right)d\theta$$

$$\Rightarrow G^2(y)=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-\frac{y}{2}}\right)\Rightarrow \underbrace{G(y)=\left(1-e^{-\frac{y}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{تابع توزیع جمعی}}$$

برای به دست آوردن تابع احتمال کافیست به صورت زیر عمل کنیم:

$$g_y(y)=\frac{dG_y(y)}{dy}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right)\left(1-e^{-\frac{y}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

۲

....

الف)

$$f_x(x)=\begin{cases} ax & 0<x<1 \\ b(2-x) & 1\le x<2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\,dx=1\Rightarrow\begin{cases}\int_0^1 x\,ax\,dx=1\\ \int_1^2 x b(2-x)dx=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a\int_0^1 x^2\,dx=1\Rightarrow b\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)=1\Rightarrow\frac{a}{3}=1\Rightarrow a=3\\ b\int_1^2 (2x-x^2)dx=1\Rightarrow b\left(x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right)=1\Rightarrow b\left(4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=1\Rightarrow b=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$p\left(x<\frac{3}{2}\middle|x>\frac{1}{2}\right)=\frac{p\left(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right)}{p\left(x>\frac{1}{2}\right)}$$

ب) حال کافیست هر یک از احتمالات فوق را محاسبه کنیم:

$$p\left(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right)=\int_{1/2}^{3/2}f_x(x)dx=\int_{1/2}^{1}3x\,dx+\int_{1}^{3/2}\frac{3}{2}(2-x)dx$$

$$=\frac{3}{2}x^2\Big|_{1/2}^{1}+\left(3x-\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_{1}^{3/2}=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{9}{2}-\frac{27}{16}-3+\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{24-6+72+27-48+12}{16}=\frac{27}{16}$$

$$p\left(x>\frac{1}{2}\right)=\int_{1/2}^{2}f_x(x)dx=\int_{1/2}^{1}3x\,dx=\int_{1}^{2}\frac{3}{2}(2-x)dx$$

$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\right)+\left(6-3-3+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{8}=\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$$

$$p\left(x<\frac{3}{2}\middle|x>\frac{1}{2}\right)=0.9$$

۳

$$f_{x/y}(x/y)=\begin{cases}\frac{1}{48}^{(x+y)^2} & x=0/1/2,\ y=0/1/2\\ 0 & \text{O.w}\end{cases}$$

$$E(y|x=1)=\sum_y yf(y|x=1)$$

پس باید ابتدا $f(y|x)$ را محاسبه کنیم.

$$f(y|x)=\frac{f_{x/y}(y\,|\,x)}{f_x(x)}=\frac{\frac{1}{48}(x+y)^2}{\frac{1}{48}\left[x^2+(x+1)^2+(x+2)^2\right]}$$

$$f_x(x)=\sum_y f_{x/y}(x\,|\,y)=\sum_{y=0}^{2}\frac{1}{48}(x+y)^2=\frac{1}{48}\left[(x+0)^2+(x+1)^2+(x+2)\right]$$

حال $f_{y|x=1}(y \mid x=1)$ را حساب می‌کنیم (یعنی هر جا x داریم، به جای آن ۱ قرار می‌دهیم):

$$f(y|x=1)=\frac{(1+y)^2}{1+(1+1)^2+(1+2)^2}=\frac{1}{14}(y+1)^2$$

حال می‌توانیم E(y|x=۱) را حساب کنیم:

$$E(y \mid x=1)=\sum_{y=0}^{2} y\frac{1}{14}(y+1)^2=\frac{1}{14}\left[0(0+1)^2+1(1+1)^2+2(2+1)^2\right]$$

$$=\frac{1}{14}[4+18]=\frac{22}{14}=\frac{11}{7}$$

$$\operatorname{var}(y \mid x=1)=E(y^2 \mid x=1)-[E(y \mid x=1)]^2$$

کافیست $E(y^2 \mid x=1)$ را حساب کنیم.

$$E(y^2 \mid x=1)=\sum_{y} y^2 f(y \mid x=1)=\sum_{y=0}^{2} y^2\times\frac{1}{14}(y+1)^2$$

$$=\frac{1}{14}\left[0^2(1+0)^2+1^2(1+1)^2+2^2(2+1)^2\right]=\frac{1}{14}[4+36]=\frac{40}{14}=\frac{20}{7}$$

$$\operatorname{var}(y \mid x=1)=\frac{20}{7}-\left(\frac{11}{7}\right)^2=\frac{20}{7}-\frac{121}{49}=\frac{140-121}{49}=\frac{19}{49}$$

۴.

$$f_{x/y}(x/y)=\begin{cases}kx^2y & 0<x<y\ ,\ 0<y<2\\ 0 & 0.w\end{cases}$$

الف) از خصوصیات تابع چگالی احتمال استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x|y}(x \mid y)dx\,dy=1 \Rightarrow \int_0^2\int_0^y kx^2y=1$$

$$\Rightarrow k\int_0^2 y\left(\frac{x^3}{x}\Big|_0^y\right)dy=1 \Rightarrow \frac{k}{3}\int_0^2 y^4\,dy=1 \Rightarrow \frac{k}{3}\left(\frac{y^5}{5}\Big|_0^2\right)=1 \Rightarrow k=\frac{15}{32}$$

ب) $$f_{x|y} = \frac{\text{cov}(x/y)}{\sqrt{\text{var}(x)\,\text{var}(y)}}$$

برای به دست آوردن cov و var باید علاوه بر تابع چگالی توام، تابع چگالی

حاشیه‌ای هر یک از متغیرهای y/x را داشته باشیم. برای این منظور داریم:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x|y}(x|y)dy = \int_0^2 \frac{15}{32} x^2 y\,dy = \frac{15}{32} x^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^2 \right)$$

$f_x(x) = \frac{15}{16} x^2 \quad x \in (0.2)$ ×حاشیه‌ای $\quad 0 \xrightarrow{y} 2$

$$0 < x < y \Rightarrow 0 \xrightarrow{x} 2$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x|y}(x|y)dx = \int_0^y \frac{15}{32} x^2 y\,dx = \frac{15}{32} y \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^y \right)$$

$\Rightarrow f_y(y) = \frac{5}{32} y^4 \quad y \in (0.2) \quad$ yحاشیه‌ای

اما می‌دانیم cov(x|y)=E(xy)-E(x) E(y) پس با توجه به فرمول‌ها داریم:

$$E(xy) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{x|y}(x|y)\,dx\,dy = \int_0^2$$

$$= \int_0^2 \frac{15}{32} y^2 \left(x^4\!\!/_4 \Big|_0^y \right) dy = \frac{15}{128} \int_0^2 y^6 dy \, \frac{15}{128} \times \left(y^7\!\!/_7 \Big|_0^2 \right) = \frac{15}{7}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_x(x)dx = \int_0^2 x \frac{15}{16} x^2 dx = \frac{15}{16} \left(x^4\!\!/_4 \Big|_0^2 \right) = \frac{15}{4}$$

$$E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_y(y)dy = \int_0^2 y \frac{5}{32} y^4 .dy = \frac{5}{32} \left(y^6\!\!/_6 \Big|_0^2 \right) = \frac{5}{3}$$

$$\text{cov}(x|y) = \frac{15}{7} - \frac{\overset{5}{15}}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{7} - \frac{25}{4} = \frac{60-175}{28} = \frac{-115}{28}$$

برای به دست آوردن var کافیست $E(x^2)$ را حساب کنیم.

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)dx=\int_0^2 x^2\,\frac{15}{16}x^2dx=\frac{15}{16}\left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right)=6$$

$$\mathrm{var}(x)=6-\frac{225}{16}=\frac{96-225}{16}=\frac{-129}{16}$$

$$\mathrm{var}(y)=E(y^2)-\left(E(y)\right)^2$$

$$E(y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_y(y)dy=\int_0^2 y^2\,\frac{5}{32}y^2dy=\frac{5}{32}\left(\frac{y^7}{7}\Big|_0^2\right)=\frac{20}{7}$$

$$\mathrm{var}(y)=\frac{20}{7}-\frac{25}{9}=\frac{180-175}{63}=\frac{5}{63}$$

عبارت زیر رادیکال منفی درمی‌آید.

داده‌های مسئله ممکن است غلط باشد.

$$p_{x|y}=\frac{\frac{-115}{28}}{\sqrt{\frac{5}{63}}\times\sqrt{\frac{-129}{16}}\binom{1}{0}}$$

۵

اگر شخص گناهکار باشد
- ۹۵٪ دروغ را مشخص می‌کند
- ۵٪ دروغ را مشخص نمی‌کند

اگر شخص بی‌گناهکار باشد
- ۹۵٪ بی‌گناهی آشکار می‌شود
- ۱٪ گناهکاری را آشکار می‌کند

$$p(\underbrace{\text{شخص بي گناه}}_{x} \mid \underbrace{\text{دستگاه نشان‌دهد او گناهکار است}}_{y}) = \frac{p(xy)}{p(y)}$$

p(y)=p (شخص بی‌گناه و نشان دهد گناهکار) + P

(شخص گناهکار و دستگاه نشان دهد گناهکار) = $0.01\times0.95+0.95\times0.05$

+

p(y)=p (شخص بی‌گناه و گناهکار را نشان دهد) =

$$p(y)=0.95\times0.06=\frac{570}{10000}=0.057$$

$$p(xy)=\frac{95}{10000}=0.0095(0.01\times0.95)$$

$$p(x \mid y)=\frac{0.0095}{0.057}=\frac{95}{570}=\frac{19}{114}$$