انتگرال

ویژگی‌ها، فرمول‌ها و قوانین حاکم

$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\vert_a^b = F(b) - F(a)$ $F(x) = \int f(x)dx$
$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

انتگرال توابع چند جمله‌ای و کسری

$\int kdx = kx + c$	$\int dx = x + c$
$\int \frac{1}{x}dx = ln\,\vert x\vert + c$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$
$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}ln\,\vert ax+b\vert + c$	$\int x^{-n}dx = \frac{1}{1-n}x^{1-n} + c, n \neq 1$
$\int (ax+b)\,dx = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$	$\int x^{\frac{p}{q}}dx = \frac{1}{\frac{p}{q}+1}x^{(\frac{p}{q}+1)} + c = \frac{q}{q+p}x^{\frac{p+q}{q}} + c$

انتگرال توابع مثلثاتی

$\int \csc u \cot u\,du = -csc\,u + c$	$\int \cos u\,du = \sin u + c$
$\int \csc^2 u \quad du = -cot\,u + c$	$\int \sin u\,du = -\cos u + c$
$\int \tan u\,du = \ln\vert\sec u\vert + c$	$\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$
$\int \cot u\,du = \ln\vert\sin u\vert + c$	$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c$
$\int \sec^3 u du = \frac{1}{2}(\sec u\,tan\,u + ln\,\vert sec\,u + tan\,u\vert) + c$	$\int \sec u\,du = \ln\vert\sec u + \tan u\vert + c$
$\int \csc^3 u du = \frac{1}{2}(-\csc u\,cot\,u + ln\,\vert csc\,u - cot\,u\vert) + c$	$\int \csc u\,du = \ln\vert\csc u - \cot u\vert + c$

انتگرال توابع لگاریتمی و نمایی

$\int e^u du = e^u + c$	$\int \ln u \, du = u \ln u - u + c$
$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$	$\int ue^u du = (u-1)e^u + c$
$\int \frac{1}{u\, lnu} du = ln\,\lvert ln\, u\rvert + c$	$\int e^{au} \sin(bu) = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\, sin\,(bu) - bcos\,(bu)) + c$
$\int ue^{cu} du = \frac{e^{cu}(cu-1)}{c^2} + c$	$\int e^{au} \cos(bu) = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\, cos\,(bu) + bsin\,(bu)) + c$

انتگرال توابع معکوس مثلثاتی

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du = \sin^{-1}\frac{u}{a} + c$	$\int \tan^{-1} u \, du = u\, tan^{-1} u - \frac{1}{2} ln(1+u^2) + c$
$\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$	$\int \cos^{-1} u \, du = u\, cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + c$
$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$	$\int \sin^{-1} u \, du = u\, sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + c$

انتگرال توابع هایپربولیکی

$\int \sinh u \, du = \cosh u + c$	$\int \text{sech}\, u \tanh u \; du = -\text{sech}\, u + c$
$\int \cosh u \, du = \sinh u + c$	$\int \text{csch}\, u \coth u \; du = -\text{csch}\, u + c$
$\int \tanh u \, du = ln\, cosh\, u + c$	$\int \text{sech}\, u \, du = \tan^{-1}\lvert\sinh u\rvert + c$
$\int \text{sech}^2 u \, du = \tanh u + c$	$\int \text{csch}^2 u \, du = -\coth u + c$

انتگرال چند تابع پرکاربرد

$\int \frac{1}{a^2-u^2} du = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u+a}{u-a}\right\rvert + c$	$\int \frac{1}{u^2-a^2} du = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + c$
$\int \sqrt{a^2+u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\lvert u+\sqrt{a^2+u^2}\rvert + c$	$\int \sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\lvert u+\sqrt{u^2-a^2}\rvert + c$
$\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + c$	$\int \sqrt{2au-u^2}\, du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\frac{a-u}{a} + c$

روش‌های انتگرال‌گیری

حاصل انتگرالی به صورت $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ با استفاده از روش تغییر متغیر، برابر با $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$ است. در ابتدا تغییر متغیر $u = g(x)$ در نظر گرفته شده و با جایگذاری آن در انتگرال مفروض، پاسخ به دست آمده است.

فرمول استاندارد انتگرال جز به جز به صورت زیر است.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

بنابراین، در ابتدا u و dv را شناسایی کرده و با جایگذاری آن‌ها در رابطه فوق، حاصل انتگرال محاسبه می‌شود.

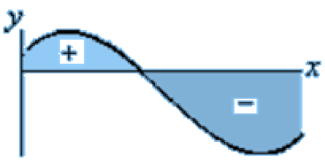
تغییر متغیر مثلثاتی

$\sqrt{b^2x^2 - a^2} \ \rightarrow \ x = \frac{a}{b}\sec\theta$	$\sqrt{a^2 - b^2x^2} \ \rightarrow \ x = \frac{a}{b}\sin\theta$
$\sqrt{a^2 - x^2} \ \rightarrow \ x = a\sin\theta$	$\sqrt{a^2 + b^2x^2} \ \rightarrow \ x = \frac{a}{b}\tan\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2} \ \rightarrow \ x = a\sec\theta$	$\sqrt{a^2 + x^2} \ \rightarrow \ x = a\tan\theta$

کاربردهای انتگرال

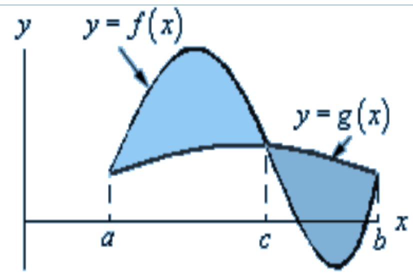
مساحت سطح

حاصل $\int_a^b f(x)\,dx$ برابر با مساحت سطح زیر نمودار تابع $f(x)$ از x = a تا x = b است. بخش قرار گرفته زیر محور x، منفی و بخش بالای محور مثبت است.

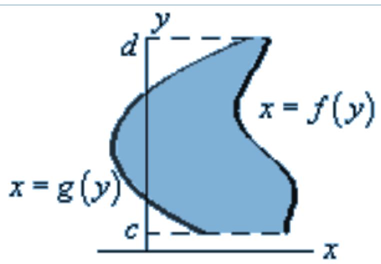


مساحت بین دو نمودار

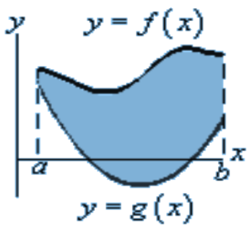
مساحت بین دو نمودار در یک بازه برابر با انتگرال اختلاف دو تابع است. اشکال زیر سه حالت مختلفِ محاسبه مساحت بین نمودار را نشان می‌دهند.



$$A = \int_a^c f(x) - g(x)\,dx + \int_c^b g(x) - f(x)\,dx$$



$$A = \int_c^d f(y) - g(y)\,dy$$



$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

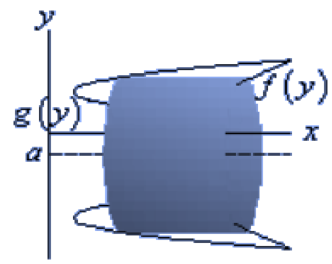
حجم ایجاد شده در نتیجه دوران

دو فرمول اصلی به منظور محاسبه حجم، $V = \int_a^b A(x)\,dx$ و $V = \int_a^b A(y)\,dy$ هستند. در ادامه روش‌هایی به منظور محاسبه A (مساحت) ارائه شده است.

استوانه‌ها

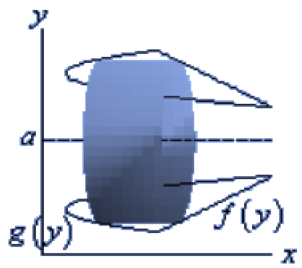
فرمول محاسبه مساحت جانبی یک استوانه برابر است با:

$$A = 2\pi \times \text{شعاع} \times \text{عرض}$$



شعاع : $|a| + y$

عرض : $f(y) - g(y)$



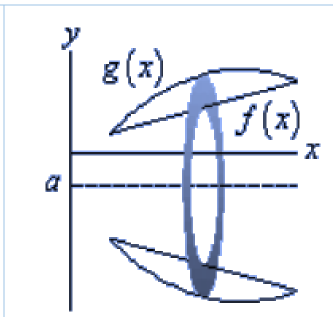
شعاع : $a - y$

عرض : $f(y) - g(y)$

حلقه‌ها

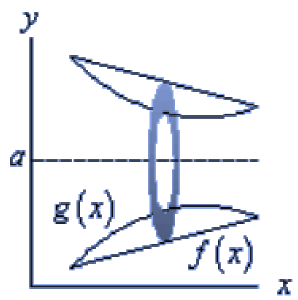
فرمول محاسبه مساحت یک حلقه با شعاع‌های داخلی و خارجی برابر است با:

$$A = \pi(\text{شعاع خارجی}^2 - \text{شعاع داخلی}^2)$$



شعاع خارجی: $|a| + g(x)$

شعاع داخلی: $|a| + f(x)$



شعاع خارجی: $a - f(x)$

شعاع داخلی: $a - g(x)$

کار

اگر نیروی $F(x)$ جسمی را در بازه $a < x < b$ جابه‌جا کند، کار انجام شده برابر است با:

$$w = \int_a^b F(x)\,dx$$

مقدار متوسط تابع

مقدار متوسط تابع $f(x)$ در بازه $a \le x \le b$ برابر است با:

$$F_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

انتگرال ناسره

انتگرال ناسره به انتگرالی گفته می‌شود که یک یا دو سر بازه انتگرال‌گیری در آن بینهایت باشد. به انتگرال ناسره‌ای که مقدار مشخصی داشته باشد، همگرا و در غیراینصورت واگرا گفته می‌شود.

حد بینهایت

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

انتگرال ناپیوسته

اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ در نقطه a ناپیوسته باشد، آنگاه انتگرال به صورت $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$ محاسبه می‌شود.

اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ در نقطه b ناپیوسته باشد، آنگاه انتگرال به صورت $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$ محاسبه می‌شود.

تقریب انتگرال معین

انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ و عدد n مفروض است (در روش سیمپسون n بایستی فرد باشد). با استفاده از تعریف $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و تقسیم کردن بازه $[a,b]$ به بازه‌های $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]$ که در آن $x_0 = a$ و $x_n = b$ بوده، می‌توان حاصل انتگرال تابع f را در بازه مذکور با استفاده از روش‌های زیر محاسبه کرد. x_i^* نیز برابر با نقطه میانی بازه iام در نظر گرفته می‌شود.

روش نقطه میانی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)]$$

روش ذوزنقه‌ای

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) \ldots + 2f(x_{n-1}) + 2f(x_n)]$$

روش سیمپسون (Simpson's Rule)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

مجموعه آموزش‌های جامع ریاضیات فرادرس (+کلیک کنید)

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.

جهت آگاهی از آخرین تقلب‌نامه‌های منتشر شده، در کانال تلگرام مجله فرادرس عضو شوید.

تهیه و تنظیم: مجله فرادرس

منبع

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.