روش‌های انتگرال‌گیری

تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

پاییز ۱۴۰۲

هدف در روش تغییر متغیر این است که هر وقت با انتگرالی به شکل

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

برخورد کردیم، بتوان با تغییر متغیر $u = g(x)$ و $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$، این انتگرال را به حالت ساده‌تر $\int f(u)\,\mathrm{d}u$ تبدیل کنیم و با حل $\int f(u)\,\mathrm{d}u$، به حل $\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x$ برسیم.

مثال

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(۱) $$\int x^{3}\cos x^{4}\,\mathrm{d}x$$

(۲) $$\int \cos^{2} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

(۳) $$\int \frac{\sin(3\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

(۴) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arccos x)^{5}\sqrt{1-x^{2}}}$$

(۵) $$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

(۶) $$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^{2}}\,\mathrm{d}x$$

پاسخ:

(۱) با تغییر متغیر $u = x^۴$ و $\mathrm{d}u = ۴x^۳\,\mathrm{d}x$ داریم:

$$\int x^۳ \cos x^۴\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۴}\int \big(\cos x^۴\big)۴x^۳\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۴}\int \cos u\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{۱}{۴}\sin u + c = \frac{۱}{۴}\sin x^۴ + c$$

(۲) قرار می‌دهیم $u = \cos x$. در نتیجه $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$. داریم:

$$\int \cos^۲ x \sin x\,\mathrm{d}x = -\int (\cos x)^۲(-\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int u^۲\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{-u^۳}{۳} + c = \frac{-\cos^۳ x}{۳} + c$$

(۳) با تغییر متغیر $u = ۳\ln x$ و $\mathrm{d}u = \frac{۳}{x}\,\mathrm{d}x$ می‌توان نوشت:

$$\int \frac{\sin(۳\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۳}\int \sin(۳\ln x)\frac{۳}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۳}\int \sin u\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{۱}{۳}\cos u + c = \frac{-\cos(۳\ln x)}{۳} + c$$

(۴) قرار می‌دهیم $u = \arccos x$، بنابراین $\mathrm{d}u = \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{۱-x^۲}}$. داریم:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arccos x)^۵\sqrt{۱-x^۲}} = -\int \frac{۱}{(\arccos x)^۵} \times \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{۱-x^۲}} = -\int \frac{۱}{u^۵}\,\mathrm{d}u$$

$$= -\int u^{-۵}\,\mathrm{d}u = -\frac{u^{-۴}}{-۴} + c$$

$$= \frac{۱}{۴(\arccos x)^۴} + c$$

(۵) با استفاده از تغییر متغیر $u = \ln x$ و $\mathrm{d}u = \frac{۱}{x}\,\mathrm{d}x$ ، خواهیم داشت:

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\ln x^{\frac{۱}{۲}}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۲}\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۲}\int (\ln x)\frac{۱}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{۱}{۲}\int u\,\mathrm{d}u = \frac{۱}{۴}u^{۲} + c = \frac{۱}{۴}(\ln x)^{۲} + c$$

(۶) اگر قرار دهیم $u = \arctan x$، آن‌گاه $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^{۲}}$. در نتیجه:

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{۱+x^{۲}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\arctan x}\frac{\mathrm{d}x}{۱+x^{۲}} = \int e^{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= e^{u} + c = e^{\arctan x} + c$$

قضیه تغییر متغیر در انتگرال معین

فرض کنید تابع g بر بازه‌ی I مشتق پیوسته داشته باشد و تابع f بر برد g پیوسته باشد.
در این صورت به‌ازای هر $a, b \in I$ داریم:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

اثبات: فرض کنید F یک تابع اولیه‌ی f باشد؛ یعنی $F' = f$. در این صورت داریم:

$$\Big[F\big(g(x)\big)\Big]' = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big)\Big|_a^b = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$$

$$= F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

مثال

انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$(۱)\quad \int_{۲}^{۳} \frac{(x+۱)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۳}}$$

$$(۲)\quad \int_{۰}^{۸} \frac{\cos\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۱}}\,\mathrm{d}x$$

$$(۳)\quad \int_{۰}^{۱} \frac{\mathrm{d}x}{e^{x}+e^{-x}}$$

پاسخ:

(۱) قرار می‌دهیم $u = x^۲ + ۲x + ۳$. در نتیجه:

$$\mathrm{d}u = ۲(x+۱)\,\mathrm{d}x, \qquad x = ۲ \Rightarrow u = ۱۱, \qquad x = ۳ \Rightarrow u = ۱۸$$

$$\int_۲^۳ \frac{(x+۱)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^۲+۲x+۳}} = \frac{۱}{۲}\int_۲^۳ \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۲x+۳}} \times ۲(x+۱)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{۱}{۲}\int_{۱۱}^{۱۸} u^{-\frac{۱}{۲}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{u}\,\Big|_{۱۱}^{۱۸} = \sqrt{۱۸} - \sqrt{۱۱}$$

همین نتیجه را می‌توان مستقیم بر حسب x نیز به‌دست آورد:

$$\int_۲^۳ \frac{(x+۱)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^۲+۲x+۳}} = \sqrt{x^۲+۲x+۳}\,\Big|_۲^۳ = \sqrt{۱۸} - \sqrt{۱۱}$$

(۲) با استفاده از تغییر متغیر $u=\sqrt{x+۱}$، خواهیم داشت:

$$\mathrm{d}u=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}\,\mathrm{d}x,\qquad x=۰\Rightarrow u=۱,\qquad x=۸\Rightarrow u=۳$$

$$\int_{۰}^{۸}\frac{\cos\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۱}}\,\mathrm{d}x=۲\int_{۰}^{۸}\cos\sqrt{x+۱}\times\frac{\mathrm{d}x}{۲\sqrt{x+۱}}=۲\int_{۱}^{۳}\cos u\,\mathrm{d}u$$

$$=۲\sin u\,\Big|_{۱}^{۳}=۲\sin(۳)-۲\sin(۱)$$

همین نتیجه را می‌توان مستقیم برحسب x نیز به‌دست آورد:

$$\int_{۰}^{۸}\frac{\cos\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۱}}\,\mathrm{d}x=۲\sin\sqrt{x+۱}\,\Big|_{۰}^{۸}=۲\sin(۳)-۲\sin(۱)$$

(۳) اگر قرار دهیم $u = e^x$، آن‌گاه داریم:

$$\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x, \qquad x = ۰ \Rightarrow u = ۱, \qquad x = ۱ \Rightarrow u = e$$

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int_{۰}^{۱} \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^{۲x} + ۱} = \int_{۱}^{e} \frac{۱}{u^{۲} + ۱}\,\mathrm{d}u$$

$$= \tan^{-۱}\Big|_{۱}^{e} = \tan^{-۱} e - \tan^{-۱} ۱$$

مثال

انتگرال‌های زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

(۱) $\int x^x(۱ + \ln x)\, \mathrm{d}x$

(۲) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{۲x} - ۱}}$

(۳) $\int x(۲x + ۵)^{۱۰}\, \mathrm{d}x$

(۴) $\int \frac{a^x\, \mathrm{d}x}{۱ + a^{۲x}}$

پاسخ:

(۱) اگر تغییر متغیر $u = x^x$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\mathrm{d}u = (x^x)'\,\mathrm{d}x = \left(e^{x\ln x}\right)'\mathrm{d}x = e^{x\ln x}(1+\ln x)\,\mathrm{d}x = x^x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}u = u + c = x^x + c$$

(۲) قرار می‌دهیم $u = e^{-x}$، بنابراین $\mathrm{d}u = -e^{-x}\,\mathrm{d}x$. داریم:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{e^{-x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{e^{-x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}$$

$$= -\int \frac{-e^{-x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\sin^{-1}(u) + c = -\sin^{-1}\left(e^{-x}\right) + c$$

(۳) قرار می‌دهیم $u = 2x + 5$. در نتیجه $x = \dfrac{u-5}{2}$ و $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$. داریم:

$$\begin{aligned}\int x(2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{u-5}{2}\right) u^{10}\,\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{4}\int (u-5)u^{10}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\int \left(u^{11} - 5u^{10}\right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{12}}{12} - \frac{5u^{11}}{11}\right) + c \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right) + c\end{aligned}$$

(۴) با تغییر متغیر $u = a^x$ و $\mathrm{d}u = a^x \ln a\,\mathrm{d}x$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int \frac{a^x\,\mathrm{d}x}{1+a^{2x}} &= \frac{1}{\ln a}\int \frac{a^x \ln a\,\mathrm{d}x}{1+(a^x)^2} = \frac{1}{\ln a}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{\ln a}\left(\tan^{-1} u\right) + c = \frac{\tan^{-1}(a^x)}{\ln a} + c\end{aligned}$$

حالت اول. اگر m یا n فرد باشند، تغییر متغیر $u = \sin x$ یا $u = \cos x$ را به کار می‌بریم.

مثال

حاصل انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

(۱) $\int \sin^{10} x \cos^{3} x \,\mathrm{d}x$ (۲) $\int \sin^{5} ax \,\mathrm{d}x$

پاسخ: (۱) با استفاده از تغییر متغیر $u = \sin x$ و $\mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x$، می‌توان نوشت:

$$\int \sin^{10} x \cos^{3} x \,\mathrm{d}x = \int \sin^{10} x \left(1 - \sin^{2} x\right) \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int u^{10}\left(1 - u^{2}\right) \mathrm{d}u = \int \left(u^{10} - u^{12}\right) \mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^{11}}{11} - \frac{u^{13}}{13} + c = \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + c$$

(۲) برای حل از تغییر متغیر $u = \cos ax$ و $\mathrm{d}u = -a \sin x \, \mathrm{d}x$ استفاده می‌کنیم.
داریم:

$$\begin{aligned}
\int \sin^{۵}(ax)\,\mathrm{d}x &= \int \left(۱ - \cos^{۲}(ax)\right)^{۲} \sin(ax)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{۱}{a}\int \left(۱ - \cos^{۲}(ax)\right)^{۲} \left(-a\sin(ax)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{۱}{a}\int \left(۱ - u^{۲}\right)^{۲} \mathrm{d}u = -\frac{۱}{a}\int \left(۱ - ۲u^{۲} + u^{۴}\right)\mathrm{d}u \\
&= -\frac{۱}{a}\left(u - \frac{۲u^{۳}}{۳} + \frac{u^{۵}}{۵}\right) + c \\
&= -\frac{۱}{a}\left(\cos(ax) - \frac{۲\cos^{۳}(ax)}{۳} + \frac{\cos^{۵}(ax)}{۵}\right) + c
\end{aligned}$$

حالت دوم. اگر m و n هر دو زوج باشند، آن‌گاه از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(1+\cos(2x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin(2x)\right)+c$$

$$= \frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+c$$

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(1-\cos(2x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)+c$$

$$= \frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+c$$

مثال

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$(۱)\quad \int \sin^{۴} x \,\mathrm{d}x \qquad\qquad (۲)\quad \int \cos^{۲} x \,\sin^{۴} x \,\mathrm{d}x$$

پاسخ:

$$
\begin{aligned}
(۱)\quad \int \sin^{۴} x \,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{۱}{۲}(۱-\cos(۲x))\right)^{۲} \mathrm{d}x \\
&= \frac{۱}{۴}\int (۱-۲\cos(۲x)+\cos^{۲}(۲x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{۴}-\frac{۱}{۴}\sin(۲x)+\frac{۱}{۸}\int (۱+\cos(۴x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{۴}-\frac{۱}{۴}\sin(۲x)+\frac{x}{۸}+\frac{۱}{۳۲}\sin(۴x)+c \\
&= \frac{۳}{۸}x-\frac{۱}{۴}\sin(۲x)+\frac{۱}{۳۲}\sin(۴x)+c \qquad (*)
\end{aligned}
$$

$$(۲)\quad \int \cos^{۲} x\ \sin^{۴} x\,\mathrm{d}x = \int (۱ - \sin^{۲} x)\sin^{۴} x\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \sin^{۴} x\,\mathrm{d}x - \int \sin^{۶} x\,\mathrm{d}x = (*) - (**)$$

$$\int \sin^{۶} x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{۱ - \cos(۲x)}{۲}\right)^{۳} \mathrm{d}x \qquad (**)$$
$$= \frac{۱}{۸}\int \left(۱ - ۳\cos(۲x) + ۳\cos^{۲}(۲x) - \cos^{۳}(۲x)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x}{8} - \frac{3\sin(2x)}{16} + \frac{3}{16}\int \left(1+\cos(4x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{8}\int \cos(2x)\left(1-\sin^{2}(2x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{5x}{16} - \frac{3\sin(2x)}{16} + \frac{3\sin(4x)}{64} - \frac{1}{16}\int \left(1-u^{2}\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{5x}{16} - \frac{3\sin(2x)}{16} + \frac{3\sin(4x)}{64} - \frac{\sin(2x)}{16} + \frac{\sin^{3}(2x)}{48} + c
\end{aligned}
$$

با استفاده از اتحادهای $\sec^۲ x = ۱ + \tan^۲ x$ و $\csc^۲ x = ۱ + \cot^۲ x$ و یکی از تغییر متغیرهای $u = \sec x$، $u = \tan x$، $u = \csc x$ یا $u = \cot x$ می‌توانیم انتگرال‌هایی را که به‌صورت

$$\int \sec^m x \tan^n x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \csc^m x \cot^n x \, \mathrm{d}x$$

هستند محاسبه کنیم، مگر اینکه m فرد و n زوج باشد. (در این حالت، انتگرال‌ها را می‌توان با روش جزء‌به‌جزء حل کرد که در بخش‌های بعد خواهیم دید.)

مثال

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(۱) $\displaystyle\int \sec^{۴} x \,\mathrm{d}x$

(۲) $\displaystyle\int \tan^{۳} x \,\mathrm{d}x$

(۳) $\displaystyle\int \frac{\sin^{۳} x}{\cos^{۵} x}\,\mathrm{d}x$

(۵) $\displaystyle\int \sec^{۳} x \tan^{۳} x \,\mathrm{d}x$

(۶) $\displaystyle\int \frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۸} x}\,\mathrm{d}x$

پاسخ: (۱) با استفاده از تغییر متغیر $u = \tan x$ و $\mathrm{d}u = \sec^{۲} x \,\mathrm{d}x$ داریم:

$$\int \sec^{۴} x \,\mathrm{d}x = \int (۱ + \tan^{۲} x)\sec^{۲} x \,\mathrm{d}x = \int (۱ + u^{۲})\,\mathrm{d}u$$
$$= u + \frac{u^{۳}}{۳} + c = \tan x + \frac{\tan^{۳} x}{۳} + c$$

(۲) قرار می‌دهیم $u = \sec x$. در نتیجه $\mathrm{d}u = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$. داریم:

$$\begin{aligned}
\int \tan^{۳} x \, \mathrm{d}x &= \int \left(\sec^{۲} x - ۱\right) \tan x \, \mathrm{d}x \\
&= \int {\color{blue}\sec x} \, {\color{red}\sec x \tan x \, \mathrm{d}x} - \int \tan x \, \mathrm{d}x \\
&= \int u \, \mathrm{d}u + \ln|\cos x| \\
&= \frac{u^{۲}}{۲} + \ln|\cos x| + c = \frac{\sec^{۲} x}{۲} + \ln|\cos x| + c
\end{aligned}$$

(۳) برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $u = \tan x$ و $\mathrm{d}u = \sec^{۲} x \, \mathrm{d}x$ به‌شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int \frac{\sin^{۳} x}{\cos^{۵} x} \, \mathrm{d}x = \int \tan^{۳} x \, \sec^{۲} x \, \mathrm{d}x = \int u^{۳} \, \mathrm{d}u = \frac{u^{۴}}{۴} + c = \frac{\tan^{۴} x}{۴} + c$$

(۴) با اعمال تغییر متغیر $u=\sec x$ و $\mathrm{d}u=\sec x\tan x\,\mathrm{d}x$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \sec^{۳} x\ \tan^{۳} x\,\mathrm{d}x &= \int \tan^{۲} x\ \sec^{۲} x\ \sec x\ \tan x\,\mathrm{d}x\\ &= \int (\sec^{۲} x - ۱)\sec^{۲} x\ \sec x\ \tan x\,\mathrm{d}x\\ &= \int u^{۲}(u^{۲}-۱)\,\mathrm{d}u = \int (u^{۴}-u^{۲})\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{u^{۵}}{۵} - \frac{u^{۳}}{۳} + c = \frac{\sec^{۵} x}{۵} - \frac{\sec^{۳} x}{۳} + c\end{aligned}$$

(۵) از تغییر متغیر $u = \tan x$ و $\mathrm{d}u = \sec^{۲} x \,\mathrm{d}x$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۸} x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}\frac{۱}{\cos^{۶} x}\,\mathrm{d}x = \int \tan^{۲} x \sec^{۶} x \,\mathrm{d}x \\
&= \int \tan^{۲} x \sec^{۴} x \sec^{۲} x \,\mathrm{d}x \\
&= \int \tan^{۲} x (۱ + \tan^{۲} x)^{۲} \sec^{۲} x \,\mathrm{d}x \\
&= \int u^{۲}(۱ + u^{۲})^{۲}\,\mathrm{d}u = \int u^{۲}(۱ + ۲u^{۲} + u^{۴})\,\mathrm{d}u \\
&= \int (u^{۲} + ۲u^{۴} + u^{۶})\,\mathrm{d}u = \frac{u^{۳}}{۳} + \frac{۲u^{۵}}{۵} + \frac{u^{۷}}{۷} + c \\
&= \frac{\tan^{۳} x}{۳} + \frac{۲\tan^{۵} x}{۵} + \frac{\tan^{۷} x}{۷} + c
\end{aligned}$$

برای محاسبه‌ی این نوع انتگرال‌ها از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin x \sin y = \frac{۱}{۲}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$$

$$\cos x \cos y = \frac{۱}{۲}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)$$

$$\sin x \cos y = \frac{۱}{۲}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big)$$

مثال

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(۱) $\displaystyle\int \sin(۳x)\sin(۲x)\,\mathrm{d}x$

(۲) $\displaystyle\int \cos\left(\frac{x}{۲}\right)\cos\left(\frac{x}{۳}\right)\mathrm{d}x$

پاسخ:

$$(۱)\ \int \sin(۳x)\sin(۲x)\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۲}\int \big(\cos(۳x-۲x)-\cos(۳x+۲x)\big)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{۱}{۲}\int \cos x\,\mathrm{d}x - \frac{۱}{۲}\int \cos(۵x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\sin x}{۲} - \frac{\sin(۵x)}{۱۰} + c$$

$$(۲)\ \int \cos\left(\frac{x}{۲}\right)\cos\left(\frac{x}{۳}\right)\mathrm{d}x = \frac{۱}{۲}\int \left(\cos\left(\frac{x}{۲}-\frac{x}{۳}\right)+\cos\left(\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}\right)\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{۱}{۲}\int \cos\left(\frac{x}{۶}\right)\mathrm{d}x + \frac{۱}{۲}\int \cos\left(\frac{۵x}{۶}\right)\mathrm{d}x$$
$$= ۳\sin\left(\frac{x}{۶}\right) + \frac{۳}{۵}\sin\left(\frac{۵x}{۶}\right) + c$$

فرض کنید $a > ۰$. در صورت وجود عبارات $\sqrt{a^۲ - x^۲}$، $\sqrt{a^۲ + x^۲}$ یا $\sqrt{x^۲ - a^۲}$ در انتگرال‌گیری مورد نظر، استفاده از تغییر متغیرهای زیر می‌تواند مفید باشد:

$$\sqrt{a^۲ - x^۲}: \begin{cases} \theta = \sin^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) & \Rightarrow x = a\sin(\theta) \\ \theta = \tanh^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) & \Rightarrow x = a\tanh(\theta) \end{cases}$$

$$\sqrt{a^۲ + x^۲}: \begin{cases} \theta = \tan^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) & \Rightarrow x = a\tan(\theta) \\ \theta = \sinh^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) & \Rightarrow x = a\sinh(\theta) \end{cases}$$

$$\sqrt{x^۲ - a^۲}: \begin{cases} \theta = \sec^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) & \Rightarrow x = a\sec(\theta) \\ \theta = \cosh^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) & \Rightarrow x = a\cosh(\theta) \end{cases}$$

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{۴ - x^۲ + \sqrt{۴ - x^۲}}$.

پاسخ: اگر از تغییر متغیر $x = ۲\sin\theta$ و $\mathrm{d}x = ۲\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ استفاده کنیم، آن‌گاه داریم:

$$\sin\theta = \frac{x}{۲} \implies \cos\theta = \frac{\sqrt{۴ - x^۲}}{۲}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{۴ - x^۲ + \sqrt{۴ - x^۲}} = \int \frac{(۲\sin\theta)(۲\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta}{۴ - ۴\sin^۲\theta + \sqrt{۴ - ۴\sin^۲\theta}}$$

$$= \int \frac{۴\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{۴\cos^۲\theta + ۲\cos\theta}$$

$$= 2\int \frac{\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{2\cos\theta + 1} = -\int \frac{-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\cos\theta + \frac{1}{2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + c$$

$$= -\ln\left|\cos\theta + \frac{1}{2}\right| + c = -\ln\left|\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} + \frac{1}{2}\right| + c$$

$$= -\ln\left|\frac{\sqrt{4 - x^2} + 1}{2}\right| + c = -\ln\left|\sqrt{4 - x^2} + 1\right| + \ln 2 + c$$

$$= -\ln\left|\sqrt{4 - x^2} + 1\right| + c_1 = -\ln(1 + \sqrt{4 - x^2}) + c_1$$

مثال

$\int \frac{\sqrt{۹+x^۲}}{x^۴}\,\mathrm{d}x$ را محاسبه کنید.

پاسخ: قرار می‌دهیم $x = ۳\tan\theta$ و $\mathrm{d}x = ۳\sec^۲\theta\,\mathrm{d}\theta$. داریم:

$$\tan\theta = \frac{x}{۳},\quad \cos\theta = \frac{۳}{\sqrt{۹+x^۲}},\quad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{۹+x^۲}},\quad \sec\theta = \frac{\sqrt{۹+x^۲}}{۳}$$

$$\int \frac{\sqrt{۹+x^۲}}{x^۴}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{۹+۹\tan^۲\theta}\times ۳\sec^۲\theta}{۳^۴\tan^۴\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int \frac{۳\sqrt{۱+\tan^۲\theta} \times ۳\sec^۲\theta}{۳^۴\tan^۴\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{۱}{۹}\int \frac{\sec^۳\theta}{\tan^۴\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{۱}{۹}\int \frac{\cos\theta}{\sin^۴\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{۱}{۹}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^۴} = \frac{۱}{۹}\int u^{-۴}\,\mathrm{d}u = -\frac{۱}{۲۷}u^{-۳} + c = -\frac{۱}{۲۷u^۳} + c$$

$$= -\frac{۱}{۲۷\sin^۳\theta} + c = -\frac{۱}{۲۷}\frac{۱}{\left(\frac{x}{\sqrt{۹+x^۲}}\right)^۳} + c = -\frac{(۹+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۲۷x^۳} + c$$

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی $\int \frac{x^۲}{(۱+x^۲)^۲}\,\mathrm{d}x$.

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^۲}{(۱+x^۲)^۲}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\tan^۲\theta \times \sec^۲\theta}{(۱+\tan^۲\theta)^۲}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\tan^۲\theta \times \sec^۲\theta}{(\sec^۲\theta)^۲}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \frac{\tan^۲\theta}{\sec^۲\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \sin^۲\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{۱}{۲}\int \big(۱-\cos(۲\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta = \frac{۱}{۲}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + c \\
&= \frac{۱}{۲}\left(\tan^{-۱} x - \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \times \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\right) + c \\
&= \frac{۱}{۲}\tan^{-۱} x - \frac{x}{۲(۱+x^۲)} + c
\end{aligned}$$

مثال

$I = \int \sec x \, \mathrm{d}x$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$I = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) \mathrm{d}x = \int \frac{\sec^{2} x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \mathrm{d}x$$

حال از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = \sec x + \tan x \implies \mathrm{d}u = (\sec x \tan x + \sec^{2} x) \, \mathrm{d}x$$

$$I = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln |u| + c = \ln |\sec x + \tan x| + c$$

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{۲} - ۴}}$

پاسخ: از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$\theta = \sec^{-۱}(\frac{x}{۲}) \implies x = ۲\sec\theta, \qquad \mathrm{d}x = ۲\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{۴\sec^{۲}\theta - ۴}}\,\mathrm{d}\theta &= \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c \\ &= \ln\left|\frac{x}{۲} + \frac{\sqrt{x^{۲} - ۴}}{۲}\right| + c \end{aligned}$$

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی $I = \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

پاسخ: قرار می‌دهیم $\theta = \sinh^{-1}(x)$. در نتیجه $x = \sinh\theta$ و $\mathrm{d}x = \cosh\theta\,\mathrm{d}\theta$.

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{1+\sinh^2\theta}\cosh\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int \cosh^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int \frac{1+\cosh(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{\sinh(2\theta)}{4} + c \\ &= \frac{\sinh^{-1}(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + c \end{aligned}$$

حالت‌های کلی‌تر

برای محاسبه‌ی انتگرال‌های شامل عبارات زیر، می‌توان از تغییر متغیرهای مثلثاتی استفاده کرد؛

$$\int \sqrt{a^۲ - (cx+d)^۲}\,\mathrm{d}x : \begin{cases} cx + d = a\sin\theta \\ c\,\mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

$$\int \sqrt{a^۲ + (cx+d)^۲}\,\mathrm{d}x : \begin{cases} cx + d = a\tan\theta \\ c\mathrm{d}x = a\sec^۲\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

$$\int \sqrt{(cx+d)^۲ - a^۲}\,\mathrm{d}x : \begin{cases} cx + d = a\sec\theta \\ c\,\mathrm{d}x = a\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

یک تغییر متغیر مناسب دیگر

درصورتی که عبارت $Ax^2 + Bx + C$ در انتگرال‌گیری موردنظر وجود داشته باشد، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= A\Big(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\Big) \\ &= A\Big(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A}\Big) \\ &= A\Big(\big(x + \frac{B}{2A}\big)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\Big) \end{aligned}$$

در این حالت تغییر متغیر $u = x + \dfrac{B}{2A}$ می‌تواند مفید باشد.

مثال

انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$(۱)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^۲+۶x+۱۳}$$

$$(۲)\quad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{۴x^۲+۱۲x+۱۳}$$

پاسخ:

(۱) قرار می‌دهیم $u=x+۳$. در نتیجه $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. داریم:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^۲+۶x+۱۳}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+۳)^۲+۴}=\int \frac{\mathrm{d}u}{u^۲+۴}$$

$$=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\left(\frac{u}{۲}\right)+c=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\left(\frac{x+۳}{۲}\right)+c$$

(۲)

$$I = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{۴x^۲ + ۱۲x + ۱۳} = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{۴\left(x^۲ + ۳x + \frac{۱۳}{۴}\right)}$$
$$= \frac{۱}{۴}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x + \frac{۳}{۲}\right)^۲ + ۱}$$

اگر تغییر متغیر $x + \frac{۳}{۲} = \tan\theta$ را به کار گیریم، آن‌گاه داریم:

$$\mathrm{d}x = \sec^۲\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۱ + (x + \frac{۳}{۲})^۲}}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{۱}{۴}\int \frac{(\tan\theta - \frac{۳}{۲})\cancel{\sec^{۲}\theta}}{\cancel{\tan^{۲}\theta + ۱}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{۱}{۴}\int \tan\theta\,\mathrm{d}\theta - \frac{۳}{۸}\int \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{۱}{۴}\ln|\cos\theta| - \frac{۳}{۸}\theta + c_{۱} \\
&= -\frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{۱}{\sqrt{۱+(x+\frac{۳}{۲})^{۲}}}\right| - \frac{۳}{۸}\tan^{-۱}\left(x+\frac{۳}{۲}\right) + c_{۱} \\
&= \frac{۱}{۸}\ln\left(۴x^{۲} + ۱۲x + ۱۳\right) - \frac{۳}{۸}\tan^{-۱}\left(x+\frac{۳}{۲}\right) + c
\end{aligned}
$$

در انتگرال‌هایی که شامل عبارت $\sqrt[n]{ax+b}$ هستند، می‌توان با استفاده از تغییر متغیر $ax+b=u^n$ و $a\,\mathrm{d}x = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u$ به حالت ساده‌تری رسید. اگر انتگرال همزمان حاوی $\sqrt[n]{ax+b}$ و $\sqrt[m]{ax+b}$ باشد، از تغییر متغیر $ax+b=u^{[m,n]}$ (منظور از $[m,n]$ کوچکترین مضرب مشترک m و n می‌باشد) استفاده می‌کنیم.

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})}$.

پاسخ: قرار می‌دهیم $x=u^6$. در نتیجه $\mathrm{d}x = 6u^5\,\mathrm{d}u$. داریم:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)} = \int \frac{6u^5\,\mathrm{d}u}{u^3\left(1+u^2\right)} = 6\int \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= 6\int (1-\frac{1}{1+u^2})\,\mathrm{d}u = 6\left(u-\tan^{-1}u\right)+c$$

$$= 6\left(x^{\frac{1}{6}}-\tan^{-1}(x^{\frac{1}{6}})\right)+c$$

انتگرال‌هایی به‌شکل $\int f(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ که در آن‌ها f یک تابع گویا می‌باشد (یعنی عبارتی که به‌صورت نسبت دو چندجمله‌ای برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ است) را می‌توان با تغییر متغیر $x=\tan\frac{\theta}{2}$ به انتگرال‌هایی به شکل $\int r(x)\,\mathrm{d}x$ تبدیل کرد، که در آن r یک تابع گویای یک متغیره است. طبق این تغییر متغیر، موارد زیر را داریم:

$$x=\tan\frac{\theta}{2} \qquad \mathrm{d}\theta=\frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} \qquad \sin\theta=\frac{2x}{1+x^2} \qquad \cos\theta=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$x = \tan\frac{\theta}{2} \implies \theta = 2\tan^{-1}x \implies \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sec^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \implies \mathrm{d}\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

مثال

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\theta}{۲+\cos\theta}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: قرار می‌دهیم $x=\tan\frac{\theta}{۲}$. در نتیجه $\mathrm{d}\theta=\dfrac{۲\,\mathrm{d}x}{۱+x^۲}$ و $\cos\theta=\dfrac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$.

داریم:

$$\int\frac{۱}{۲+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int\frac{\frac{۲}{۱+x^۲}}{۲+\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}}\,\mathrm{d}x=۲\int\frac{\frac{۱}{۱+x^۲}}{\frac{۲+۲x^۲+۱-x^۲}{۱+x^۲}}\,\mathrm{d}x$$

$$=۲\int\frac{۱}{۳+x^۲}\,\mathrm{d}x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}\frac{x}{\sqrt{۳}}+c$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\tan\frac{\theta}{۲}\right)+c$$

انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء

فرض کنید f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند. در این صورت داریم:

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \\
\Longrightarrow \int (f(x)g(x))'\,\mathrm{d}x &= \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad (*)
\end{aligned}
$$

اگر در رابطه‌ی $(*)$ از تغییر متغیرهای $u = f(x)$ و $v = g(x)$ استفاده کنیم، آن‌گاه $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$ و $\mathrm{d}v = g'(x)\,\mathrm{d}x$. بنابراین دستور انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$
\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u}
$$

مثال

انتگرال‌های زیر را به روش جزءبه‌جزء محاسبه کنید.

(۱) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

(۲) $\int x^{۲}\sin x\,\mathrm{d}x$

(۳) $\int x\sin^{۲} x\,\mathrm{d}x$

(۴) $\int x\sec^{-۱} x\,\mathrm{d}x$

(۵) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$

(۶) $\int \sin^{-۱} x\,\mathrm{d}x$

(۷) $\int (\sin^{-۱} x)^{۲}\,\mathrm{d}x$

(۸) $\int x(\tan^{-۱} x)^{۲}\,\mathrm{d}x$

پاسخ: (۱)

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x \,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$$

$$\int x\cos x \,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$$

(۲)

$$\begin{cases} u = x^{۲} \Rightarrow \mathrm{d}u = ۲x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x \,\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^{۲}\sin x \,\mathrm{d}x = -x^{۲}\cos x + ۲\int x\cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\stackrel{(۱)}{=\!=} -x^{۲}\cos x + ۲x\sin x + ۲\cos x + c$$

(۳)

$$I=\int x\sin^{2}x\,\mathrm{d}x=\int x\left(\frac{1}{2}(1-\cos(2x))\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

حال قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\cos(2x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin(2x) \end{cases}$$

$$I=\frac{x^{2}}{4}-\frac{1}{4}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^{2}}{4}-\frac{x\sin(2x)}{4}-\frac{\cos(2x)}{8}+c$$

(۴)

$$\begin{cases} u = \sec^{-1} x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int \sec^{-1}(x)\, x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \sec^{-1} x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2 \sec^{-1} x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{|x|\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2 \sec^{-1} x}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c, & x > 1 \\ \dfrac{x^2 \sec^{-1} x}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c, & x < -1 \end{cases}$$

(۵)

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{۱}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c$$

(۶)

$$\begin{cases} u = \sin^{-۱} x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^{-۱} x\,\mathrm{d}x &= x\sin^{-۱} x - \int \frac{x}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sin^{-۱} x + \frac{۱}{۲}\int y^{-\frac{۱}{۲}}\,\mathrm{d}y \qquad (y = ۱ - x^{۲}) \\ &= x\sin^{-۱} x + y^{\frac{۱}{۲}} + c = x\sin^{-۱} x + \sqrt{۱ - x^{۲}} + c \end{aligned}$$

(۷) ابتدا قرار می‌دهیم $\theta = \sin^{-1} x$. در نتیجه $\sin\theta = x$ و $\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}x$. داریم:

$$I = \int \left(\sin^{-1} x\right)^{2} \, \mathrm{d}x = \int \theta^{2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta$$

حال قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = \theta^{2} \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\theta \, \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}v = \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \Rightarrow v = \sin\theta \end{cases}$$

$$I = \int \theta^{2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \theta^{2} \sin\theta - 2 \int \theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$$

$$\begin{cases} U = \theta \Rightarrow \mathrm{d}U = \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}V = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \Rightarrow V = -\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \theta^{۲}\sin\theta - ۲\int \theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \theta^{۲}\sin\theta - ۲\Big(-\theta\cos\theta - \int -\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\Big) \\ &= \theta^{۲}\sin\theta + ۲\theta\cos\theta - ۲\sin\theta + c \\ &= x\left(\sin^{-۱} x\right)^{۲} + ۲\sqrt{۱ - x^{۲}}\left(\sin^{-۱} x\right) - ۲x + c \end{aligned}$$

(۸) روش اول:

$$\begin{cases} u = (\tan^{-1} x)^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{2\tan^{-1} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I = \int (\tan^{-1} x)^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}(\tan^{-1} x)^2 - \int \frac{x^2 \tan^{-1} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}(\tan^{-1} x)^2 - \int \frac{\theta \sec^2\theta \tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{x^2}{2}(\tan^{-1} x)^2 - \int \theta \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

که در تساوی دوم از تغییر متغیر زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\theta = \tan^{-1} x \implies \tan\theta = x \implies \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}x$$

همچنین، توجه می‌کنیم که اگر $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$. قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = \theta \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}v = \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta \Rightarrow v = \tan\theta - \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{x^2}{2}\left(\tan^{-1}x\right)^2 - \left(\theta\tan\theta - \theta^2 - \int(\tan\theta - \theta)\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \frac{x^2}{2}\left(\tan^{-1}x\right)^2 + \theta^2 - \theta\tan\theta - \int\theta\,\mathrm{d}\theta + \int\tan\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{x^2}{2}\left(\tan^{-1}x\right)^2 + \theta^2 - \theta\tan\theta - \frac{\theta^2}{2} + \ln|\sec\theta| + c \\
&= \frac{x^2}{2}\left(\tan^{-1}x\right)^2 + \frac{\left(\tan^{-1}x\right)^2}{2} - x\tan^{-1}x + \ln\left|\sqrt{1+x^2}\right| + c \\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)\left(\tan^{-1}x\right)^2 - x\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c
\end{aligned}$$

روش دوم: ابتدا از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$\theta = \tan^{-1} x \implies \tan\theta = x \implies \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}x$$

سپس قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = \theta^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\theta \,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}v = \tan\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta \Rightarrow v = \dfrac{\tan^2\theta}{2} \end{cases}$$

$$I = \int x\left(\tan^{-1} x\right) \mathrm{d}x = \int \theta^2 \tan\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{\theta^2 \tan^2\theta}{2} - \int \theta \tan^2\theta \,\mathrm{d}\theta$$

برای حل انتگرال موجود در آخرین تساوی، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = \theta \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}v = \tan^۲\theta\,\mathrm{d}\theta \Rightarrow v = \tan\theta - \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\theta^۲\tan^۲\theta}{۲} - \left(\theta\tan\theta - \theta^۲ - \int(\tan\theta-\theta)\mathrm{d}\theta\right) \\ &= \frac{\theta^۲}{۲}\tan^۲\theta + \theta^۲ - \theta\tan\theta - \int\theta\,\mathrm{d}\theta + \int\tan\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{x^۲}{۲}\left(\tan^{-۱}x\right)^۲ + \frac{۱}{۲}\left(\tan^{-۱}x\right)^۲ - x\tan^{-۱}x + \ln\left|\sqrt{۱+x^۲}\right| + c \end{aligned}$$

نکته

دستور انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء برای انتگرال‌های معین به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

مثال

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$(۱)\quad \int_۰^۱ \sqrt{x}\sin\left(\pi\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \qquad\qquad (۲)\quad \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} (۱ + x - \frac{۱}{x})e^{x+\frac{۱}{x}}\,\mathrm{d}x$$

(۱) ابتدا از تغییر متغیر $x = y^۲$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$۲y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x, \qquad x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \quad , \quad x = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

$$\int_۰^۱ \sqrt{x}\sin(\pi\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = ۲\int_۰^۱ y^۲\sin(\pi y)\,\mathrm{d}y$$

قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = y^۲ \Rightarrow \mathrm{d}u = ۲y\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = \sin(\pi y)\,\mathrm{d}y \Rightarrow v = -\dfrac{\cos(\pi y)}{\pi} \end{cases}$$

$$\int_{۰}^{۱} \sqrt{x}\sin(\pi\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = ۲\int_{۰}^{۱} y^{۲}\sin(\pi y)\,\mathrm{d}y$$

$$= ۲\left(\frac{-y^{۲}\cos(\pi y)}{\pi}\Big|_{۰}^{۱} + \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{۱} \underbrace{y}_{U}\,\underbrace{\cos(\pi y)\,\mathrm{d}y}_{dV} \right)$$

$$= \frac{۲}{\pi} + \frac{۴}{\pi}\left(\frac{y\sin(\pi y)}{\pi}\Big|_{۰}^{۱} - \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۱} \sin(\pi y)\,\mathrm{d}y \right)$$

$$= \frac{۲}{\pi} + \frac{۴}{\pi^{۳}}\cos(\pi y)\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۲}{\pi} + \frac{۴}{\pi^{۳}}(-۲) = \frac{۲}{\pi} - \frac{۸}{\pi^{۳}}$$

(۲) قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \left(۱ - \frac{۱}{x^۲}\right) e^{x+\frac{۱}{x}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = e^{x+\frac{۱}{x}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \left(۱ + x - \frac{۱}{x}\right) e^{x+\frac{۱}{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} e^{x+\frac{۱}{x}}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} x\left(۱ - \frac{۱}{x^۲}\right) e^{x+\frac{۱}{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} e^{x+\frac{۱}{x}}\,\mathrm{d}x + x e^{x+\frac{۱}{x}}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۲} - \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} e^{x+\frac{۱}{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= x e^{x+\frac{۱}{x}}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۲} = ۲e^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۱}{۲}e^{\frac{۵}{۲}} = \frac{۳}{۲}e^{\frac{۵}{۲}} \end{aligned}$$

ممکن است بعد از چندبار انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، انتگرال اولیه مجددا در طرف راست ظاهر شود. اگر ضریب آن یک نباشد، معادله‌ای حاصل می‌شود که از حل آن می‌توان انتگرال مفروض را به‌دست آورد.

مثال

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$(۱)\quad I = \int \sec^{۳} x \, \mathrm{d}x$$

$$(۲)\quad I = \int e^{۲x} \sin ۳x \, \mathrm{d}x$$

$$(۳)\quad I = \int_e^{e^{۴}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$$

پاسخ: (۱)

$$\begin{cases} u = \sec x \Rightarrow \mathrm{d}u = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sec^{۲} x \, \mathrm{d}x \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I = \int \sec^{۳} x \, \mathrm{d}x &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^{۲} x \, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^{۲} x - ۱) \, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x \, \mathrm{d}x - \int \sec^{۳} x \, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - I \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad ۲I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int \sec^{۳} x \, \mathrm{d}x = \frac{۱}{۲} \sec x \tan x + \frac{۱}{۲} \ln|\sec x + \tan x| + c$$

(۲)

$$\begin{cases} u = e^{۲x} \Rightarrow \mathrm{d}u = ۲e^{۲x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin(۳x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{-۱}{۳}\cos(۳x) \end{cases}$$

$$I = \int e^{۲x}\sin(۳x)\,\mathrm{d}x = \frac{-e^{۲x}\cos(۳x)}{۳} + \frac{۲}{۳}\int e^{۲x}\cos(۳x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{cases} U = e^{۲x} \Rightarrow \mathrm{d}U = ۲e^{۲x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}V = \cos(۳x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow V = \dfrac{۱}{۳}\sin(۳x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{-e^{۲x}\cos(۳x)}{۳} + \frac{۲}{۳}\left(\frac{e^{۲x}\sin(۳x)}{۳} - \frac{۲}{۳}\int e^{۲x}\sin(۳x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{-e^{۲x}\cos(۳x)}{۳} + \frac{۲e^{۲x}\sin(۳x)}{۹} - \frac{۴}{۹}I \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{۱۳}{۹}I = \frac{-e^{۲x}\cos(۳x)}{۳} + \frac{۲e^{۲x}\sin(۳x)}{۹}$$

$$\Longrightarrow I = \frac{-۳e^{۲x}\cos(۳x)}{۱۳} + \frac{۲e^{۲x}\sin(۳x)}{۱۳} + c$$

(۳)

$$\begin{cases} u = (\ln x)^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \mathrm{d}u = -\frac{۱}{۲}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\frac{۳}{۲}}} \\ \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow v = \ln x \end{cases}$$

$$I = \int_e^{e^۴} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}} = \sqrt{\ln x}\,\Big|_e^{e^۴} + \frac{۱}{۲}\int_e^{e^۴}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}} = ۱ + \frac{۱}{۲}I$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{۲}I = ۱ \Longrightarrow I = ۲$$

به‌ازای $n \geq 0$ قرار می‌دهیم $I_n = \int x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$. می‌خواهیم I_3 را محاسبه کنیم. با روش جزء‌به‌جزء می‌توان فرمولی برای I_n برحسب I_{n-1} به‌دست آورد. برای این منظور قرار می‌دهیم $u = x^n$ و $\mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x$. در نتیجه $\mathrm{d}u = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$ و $v = -e^{-x}$.
داریم:

$$I_n = \int x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$$

$$\Longrightarrow\ I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$$

$$I_0 = \int x^0 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + c_0$$

$$I_1 = -xe^{-x} + I_0 = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1 = -e^{-x}(x+1) + c_1$$

$$I_2 = -x^2 e^{-x} + 2I_1 = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + c_2$$

$$I_3 = -x^3 e^{-x} + 3I_2 = -e^{-x}\left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right) + c_3$$

مثال

به‌ازای $n \geq ۲$، یک فرمول بازگشتی برای $I_n = \int \sec^n x \, \mathrm{d}x$ بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} u = \sec^{n-۲} x \Rightarrow \mathrm{d}u = (n-۲) \sec^{n-۲} x \tan x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sec^{۲} x \, \mathrm{d}x \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

$$I_n = \int \sec^n x \, \mathrm{d}x = \sec^{n-۲} x \tan x - (n-۲) \int \sec^{n-۲} x \tan^{۲} x \, \mathrm{d}x$$

$$= \sec^{n-۲} x \tan x - (n-۲) \int \sec^{n-۲} x \left(\sec^{۲} x - ۱\right) \, \mathrm{d}x$$

$$= \sec^{n-۲} x \tan x - (n-۲) I_n + (n-۲) I_{n-۲}$$

$$\Longrightarrow (n-۱)I_n = \sec^{n-۲}\tan x + (n-۲)I_{n-۲}$$

$$\Longrightarrow I_n = \frac{۱}{n-۱}\left(\sec^{n-۲} x \tan x\right) + \frac{n-۲}{n-۱} I_{n-۲},$$

با استفاده از فرمول فوق $I_۳ = \int \sec^۳(x)\,\mathrm{d}x$ را محاسبه می‌کنیم؛

$$I_۱ = \int \sec x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + c_۱$$

$$I_۲ = \int \sec^۲ x \,\mathrm{d}x = \tan x + c_۲$$

$$\Longrightarrow \quad I_۳ = \int \sec^۳ x \,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۳-۱}\sec^{۳-۲} x \tan x + \frac{۳-۲}{۳-۱} I_{۳-۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\sec x \tan x + \frac{۱}{۲}\ln|\sec x + \tan x| + c_۳$$

مثال

یک فرمول بازگشتی برای $I_n = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x^n \sin x \, \mathrm{d}x$ بیابید و با استفاده از آن $I_۶$ را محاسبه کنید. $(n \geq ۲)$

پاسخ:

$$\begin{cases} u = x^n \Rightarrow \mathrm{d}u = nx^{n-۱}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_n = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x^n \sin x \, \mathrm{d}x = -x^n \cos x \Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} + n \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x^{n-۱} \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= n\left(x^{n-۱} \sin x \Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} - (n-۱) \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x^{n-۲} \sin x \, \mathrm{d}x \right)$$

$$= n\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{n-۱} - n(n-۱) I_{n-۲}$$

همچنین داریم:

$$I_۰ = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = ۱$$

$$\Longrightarrow\ I_۲ = ۲\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۲-۱} - ۲(۲-۱)I_۰ = \pi - ۲$$

$$\Longrightarrow\ I_۴ = ۴\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۳} - ۴(۴-۱)I_۲ = ۴\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۳} - ۱۲(\pi - ۲)$$

$$\Longrightarrow\ I_۶ = ۶\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۵} - ۶(۶-۱)I_۴$$

$$= ۶\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۵} - ۳۰\left(۴\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۳} - ۱۲(\pi - ۲)\right)$$

$$= \frac{۳\pi^۵}{۱۶} - ۱۵\pi^۳ + ۳۶۰\pi - ۷۲۰$$

یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n تابعی مانند $P(x)$ به‌صورت زیر است:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

تقسیم دو چندجمله‌ای مانند $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یک **تابع گویا** نام دارد. در این بخش به بررسی روش‌هایی خواهیم پرداخت که با آن بتوان انتگرال‌هایی به‌صورت $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ را حل کرد. کافی است به بررسی انتگرال توابع گویایی بپردازیم که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر باشد. چون اگر درجه‌ی $P(x)$ از درجه‌ی $Q(x)$ کمتر نباشد (یا به عبارت دیگر $\deg P \geq \deg Q$)، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad (\deg R < \deg Q)$$

$$\Longrightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

طبق یک قضیه‌ی کلی در جبر، هر تابع گویای حقیقی مانند $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را که $\deg P < \deg Q$، می‌توان به‌صورت مجموع تعداد متناهی از کسرهایی به شکل

$$\frac{A}{(x+a)^k}, \qquad \frac{Bx+C}{(x^۲+bx+c)^m}$$

بیان کرد که در آن‌ها k و m اعداد صحیح مثبتی هستند و A، B، C، a، b و c ثابت‌هایی با شرط $b^۲ - ۴c < ۰$ می‌باشند. شرط $b^۲ - ۴c < ۰$ بیان می‌کند که چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $x^۲ + bx + c$ تحویل‌ناپذیر است؛ یعنی قابل تجزیه به عوامل خطی نمی‌باشد. زمانی که یک تابع گویا به این صورت بیان شود، می‌گوییم تابع مورد نظر به کسرهای جزئی تجزیه شده است.

حالت اول

مخرج به‌صورت حاصل‌ضربی از عوامل خطی متمایز باشد. یعنی:

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m)$$

اگر بتوان A_iها را طوری پیدا کرد که

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \cdots + \frac{A_m}{(x - x_m)}$$

آن‌گاه

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} A_i \ln|x - x_i| + c$$

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی $\mathrm{d}x$ $\int \frac{۲x^۴ - ۷x^۳ + ۲x^۲ + ۳x + ۱}{x^۳ - ۴x^۲ + ۳x}$.

پاسخ:

$$\frac{۲x^۴ - ۷x^۳ + ۲x^۲ + ۳x + ۱}{x^۳ - ۴x^۲ + ۳x} = ۲x + ۱ + \frac{۱}{x^۳ - ۴x^۲ + ۳x}$$

$$\frac{۱}{x^۳ - ۴x^۲ + ۳x} = \frac{۱}{x(x-۱)(x-۳)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-۱} + \frac{C}{x-۳}$$

$$= \frac{A(x-۱)(x-۳) + Bx(x-۳) + Cx(x-۱)}{x(x-۱)(x-۳)}$$

$$\Longrightarrow (A+B+C)x^۲ + (-۴A - ۳B - C)x + ۳A = ۱$$

$$\begin{cases} A+B+C=۰ \\ -۴A-۳B-C=۰ \\ ۳A=۱ \implies A=\frac{۱}{۳} \end{cases} \implies B=-\frac{۱}{۲}, C=\frac{۱}{۶}$$

$$\int \frac{۲x^{۴}-۷x^{۳}+۲x^{۲}+۳x+۱}{x^{۳}-۴x^{۲}+۳x}\,\mathrm{d}x = \int (۲x+۱)\,\mathrm{d}x + \frac{۱}{۳}\int \frac{۱}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{x-۱}\,\mathrm{d}x + \frac{۱}{۶}\int \frac{۱}{x-۳}\,\mathrm{d}x$$

$$= x^{۲}+x+\frac{۱}{۳}\ln|x| - \frac{۱}{۲}\ln|x-۱|$$

$$+\frac{۱}{۶}\ln|x-۳|+k$$

حالت دوم

مخرج به‌صورت حاصل‌ضربی از عوامل خطی باشد که برخی از آن‌ها تکرار شده‌اند؛

$$\frac{P(x)}{(x-x_۰)^m} = \frac{A_۱}{(x-x_۰)} + \frac{A_۲}{(x-x_۰)^۲} + \cdots + \frac{A_m}{(x-x_۰)^m}$$

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال $\int \frac{x^۲+۲x+۳}{(x-۱)(x+۱)^۲}\,\mathrm{d}x$.

پاسخ:

$$\frac{x^۲+۲x+۳}{(x-۱)(x+۱)^۲} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۱} + \frac{C}{(x+۱)^۲}$$
$$= \frac{A(x+۱)^۲ + B(x-۱)(x+۱) + C(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)^۲}$$

$$x^۲+۲x+۳ = A(x+۱)^۲ + B(x-۱)(x+۱) + C(x-۱) \qquad (*)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=۱ \implies ۴A=۶ \implies A=\frac{۶}{۴} \\ x=-۱ \implies -۲C=۲ \implies C=-۱ \end{cases}$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$۲x + ۲ = ۲A(x+۱) + B(x-۱) + B(x+۱) + C$$

$$x = -۱ \implies -۲B + C = ۰ \implies -۲B = -C = +۱ \implies B = -\frac{۱}{۲}$$

$$\int \frac{x^۳ + ۲x + ۳}{(x-۱)(x+۱)^۲}\,\mathrm{d}x = \frac{۶}{۴}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-۱} - \frac{۱}{۲}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+۱} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+۱)^۲}$$
$$= \frac{۶}{۴}\ln|x-۱| - \frac{۱}{۲}\ln|x+۱| + \frac{۱}{x+۱} + K$$

حالت سوم

مخرج به‌صورت حاصل‌ضربی از عوامل درجه‌ی دوم تحویل‌ناپذیر متمایز باشد. یعنی:

$$\frac{P(x)}{(x^۲+b_۱x+c_۱)(x^۲+b_۲x+c_۲)\cdots(x^۲+b_mx+c_m)} = $$
$$= \frac{A_۱x+B_۱}{(x^۲+b_۱x+c_۱)} + \frac{A_۲x+B_۲}{(x^۲+b_۲x+c_۲)} + \cdots + \frac{A_mx+B_m}{(x^۲+b_mx+c_m)}$$

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال $\int \frac{۱}{x^۴ - a^۴}\,\mathrm{d}x$ را محاسبه کنید. $(a \neq ۰)$

پاسخ:

$$\frac{۱}{x^۴ - a^۴} = \frac{۱}{\left(x^۲ - a^۲\right)\left(x^۲ + a^۲\right)} = \frac{۱}{(x-a)(x+a)\left(x^۲ + a^۲\right)}$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} + \frac{Cx + D}{x^۲ + a^۲}$$

$$= \frac{A(x+a)\left(x^۲ + a^۲\right) + B(x-a)\left(x^۲ + a^۲\right)}{x^۴ - a^۴}$$

$$+ \frac{(Cx + D)(x-a)(x+a)}{x^۴ - a^۴}$$

$$= \frac{A\left(x^{۳}+ax^{۲}+a^{۲}x+a^{۳}\right)+B\left(x^{۳}-ax^{۲}+a^{۲}x-a^{۳}\right)}{x^{۴}-a^{۴}} + \frac{C\left(x^{۳}-a^{۲}x\right)+D\left(x^{۲}-a^{۲}\right)}{x^{۴}-a^{۴}}$$

$$\Rightarrow ۱ = (A+B+C)x^{۳} + (aA-aB+D)x^{۲} + \left(a^{۲}A+a^{۲}B-a^{۲}C\right)x + \left(a^{۳}A-a^{۳}B-a^{۲}D\right)$$

$$\begin{cases} A+B+C=۰ \\ aA-aB+D=۰ \\ a^{۲}A+a^{۲}B-a^{۲}C=۰ \\ a^{۳}A-a^{۳}B-a^{۲}D=۱ \end{cases} \xRightarrow{a\neq ۰} \begin{cases} A+B+C=۰ & (۱) \\ a(A-B)+D=۰ & (۲) \\ A+B-C=۰ & (۳) \\ a(A-B)-D=\dfrac{۱}{a^{۲}} & (۴) \end{cases}$$

$$(۱),(۳) \implies C = ۰ \qquad (*)$$

$$(۲),(۴) \implies D = -\frac{۱}{۲a^۲} \qquad (**)$$

$$(۱),(*) \implies A = -B \qquad (***)$$

$$(۲),(**) \implies a(A-B) = \frac{۱}{۲a^۲} \implies A - B = \frac{۱}{۲a^۳}$$

$$\xRightarrow{(***)} ۲A = \frac{۱}{۲a^۳} \implies A = \frac{۱}{۴a^۳} \xRightarrow{(***)} B = -\frac{۱}{۴a^۳}$$

$$\int \frac{۱}{x^۴ - a^۴}\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۴a^۳}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} - \frac{۱}{۴a^۳}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} - \frac{۱}{۲a^۲}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^۲ + a^۲}$$

$$= \frac{۱}{۴a^۳}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) - \frac{۱}{۲a^۳}\tan^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

$$= \frac{۱}{۴a^۳}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{۱}{۲a^۳}\tan^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

حالت چهارم

مخرج حاوی عوامل درجه‌ی دوم تحویل‌ناپذیری باشد که برخی از آن‌ها تکرار شده‌اند؛

$$\frac{P(x)}{(x^۲+bx+c)^m}=\frac{A_۱x+B_۱}{x^۲+bx+c}+\frac{A_۲x+B_۲}{(x^۲+bx+c)^۲}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(x^۲+bx+c)^m}$$

نکته

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^n(x-x_2)(x^2+b_1x+c_1)^m(x^2+b_2x+c_2)}=$$

$$=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\cdots+\frac{A_n}{(x-x_1)^n}+\frac{A_{n+1}}{(x-x_2)}+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+b_1x+c_1)}$$

$$+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+b_1x+c_1)^m}+\frac{B_{m+1}x+C_{m+1}}{(x^2+b_2x+c_2)}$$

مثال

$\int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{A\left(x^2+2\right)^2+(Bx+C)(x-1)\left(x^2+2\right)+(Dx+E)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2} \qquad (*)$$

$$=\frac{A(x^4+4x^2+4)+B\left(x^4-x^3+2x^2-2x\right)}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2}$$

$$+\frac{C\left(x^3-x^2+2x-2\right)+D\left(x^2-x\right)+E(x-1)}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x^4-x^3+2x^2-x+2 &= (A+B)x^4+(-B+C)x^3\\ &+(4A+2B-C+D)x^2\\ &+(-2B+2C-D+E)x\\ &+(4A-2C-E)\end{aligned}$$

اگر در رابطه‌ی $(*)$ و با مقایسه‌ی صورت کسرها، قرار دهیم $x = 1$، آن‌گاه:

$$1 - 1 + 2 - 1 + 2 = A(1+2)^2 + 0 + 0 \implies 3 = 9A \implies A = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \xRightarrow{A=\frac{1}{3}} B = \frac{2}{3} \\ -B + C = -1 \xRightarrow{B=\frac{2}{3}} C = -\frac{1}{3} \\ 4A + 2B - C + D = 2 \implies D = -1 \\ -2B + 2C - D + E = -1 \\ 4A - 2C - E = 2 \xRightarrow{A=\frac{1}{3},C=-\frac{1}{3}} E = 0 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x^{۴} - x^{۳} + ۲x^{۲} - x + ۲}{(x-۱)\left(x^{۲}+۲\right)^{۲}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{۱}{۳}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-۱} + \int \frac{\frac{۲}{۳}x - \frac{۱}{۳}}{x^{۲}+۲}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x^{۲}+۲\right)^{۲}} \\
&= \frac{۱}{۳}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-۱} + \frac{۱}{۳}\int \frac{۲x\,\mathrm{d}x}{x^{۲}+۲} - \frac{۱}{۳}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{۲}+۲} - \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x\,\mathrm{d}x}{\left(x^{۲}+۲\right)^{۲}} \\
&= \frac{۱}{۳}\ln|x-۱| + \frac{۱}{۳}\ln|x^{۲}+۲| - \frac{۱}{۳\sqrt{۲}}\tan^{-۱}\left(\frac{x}{\sqrt{۲}}\right) + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{x^{۲}+۲} + K
\end{aligned}
$$

مثال

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$(۱)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(۳+x^{۲}\right)\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

$$(۲)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{e^{۲x}-۴e^{x}+۴}$$

$$(۳)\quad \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta+۲}\,\mathrm{d}\theta$$

پاسخ: (۱) ابتدا از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$u^{۲}=۱-x^{۲} \implies ۲u\,\mathrm{d}u=-۲x\,\mathrm{d}x \implies u\,\mathrm{d}u=x\,\mathrm{d}x$$

داریم:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(۳ + x^۲)\sqrt{۱ - x^۲}} = -\int \frac{-x\,\mathrm{d}x}{x^۲\,(۳ + x^۲)\sqrt{۱ - x^۲}}$$

$$= -\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{(۱ - u^۲)\,(۴ - u^۲)\,u}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}u}{(۱ - u^۲)\,(۴ - u^۲)}$$

$$\frac{۱}{(۱ - u^۲)\,(۴ - u^۲)} = \frac{A}{(۱ - u)} + \frac{B}{(۱ + u)} + \frac{C}{(۲ - u)} + \frac{D}{(۲ + u)}$$

$$\Longrightarrow\ ۱ = A(۱ + u)(۲ - u)(۲ + u) + B(۱ - u)(۲ - u)(۲ + u) + C(۱ - u)(۱ + u)(۲ + u) + D(۱ - u)(۱ + u)(۲ - u)$$

$$u = ۱ \ \Longrightarrow\ ۱ = A(۱ + ۱)(۲ - ۱)(۲ + ۱) \ \Longrightarrow\ A = \frac{۱}{۶}$$

$$u=-۱ \implies ۱=B(۱+۱)(۲+۱)(۲-۱) \implies B=\frac{۱}{۶}$$

$$u=۲ \implies ۱=C(۱-۲)(۱+۲)(۲+۲) \implies C=-\frac{۱}{۱۲}$$

$$u=-۲ \implies ۱=D(۱+۲)(۱-۲)(۲+۲) \implies D=-\frac{۱}{۱۲}$$

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(۱-u^۲\right)\left(۴-u^۲\right)} \\
&= -\left(\frac{۱}{۶}\int \frac{\mathrm{d}u}{۱-u}+\frac{۱}{۶}\int \frac{\mathrm{d}u}{۱+u}-\frac{۱}{۱۲}\int \frac{\mathrm{d}u}{۲-u}-\frac{۱}{۱۲}\int \frac{\mathrm{d}u}{۲+u}\right) \\
&= \frac{۱}{۶}\ln|۱-u|-\frac{۱}{۶}\ln|۱+u|-\frac{۱}{۱۲}\ln|۲-u|+\frac{۱}{۱۲}\ln|۲+u|+K \\
&= \frac{۱}{۶}\ln\left|\frac{۱-u}{۱+u}\right|+\frac{۱}{۱۲}\ln\left|\frac{۲+u}{۲-u}\right|+K
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+\sqrt{1-x^2}}{2-\sqrt{1-x^2}}\right| + K$$

(۲) قرار می‌دهیم $u = e^x$. در این صورت $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$ و $\mathrm{d}x = \frac{1}{e^x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x} - 4e^x + 4} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(e^x - 2)^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u(u-2)^2}$$

$$\frac{1}{u(u-2)^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{(u-2)^2}$$

$$= \frac{A(u-2)^2 + Bu(u-2) + Cu}{u(u-2)^2}$$

$$\Longrightarrow\ 1 = (A+B)u^2 + (-2B + C - 4A)u + 4A$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4A = 1 \\ -2B + C - 4A = 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\mathrm{d}u}{u(u-2)^2} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u-2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u-2)^2} \\ &= \frac{1}{4}\ln|u| - \frac{1}{4}\ln|u-2| - \frac{1}{2}\frac{1}{u-2} + K \\ &= \frac{1}{4}\ln|e^x| - \frac{1}{4}\ln|e^x - 2| + \frac{1}{2}\frac{1}{e^x-2} + K \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\ln|e^x - 2| - \frac{1}{2e^x - 4} + K \end{aligned}$$

(۳) با به‌کارگیری تغییر متغیر $x = \tan\frac{\theta}{2}$ داریم:

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}, \qquad \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$I = \int \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\cos\theta + \sin\theta + 2} = \int \frac{\frac{2x}{1+x^2}\,\frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} + 2}$$

$$= \int \frac{\frac{4x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1-x^2+2x+2+2x^2}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{4x}{(1+x^2)(x^2+2x+3)}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{۴x}{(۱+x^۲)(x^۲+۲x+۳)} = \frac{Ax+B}{۱+x^۲} + \frac{Cx+D}{x^۲+۲x+۳}$$

$$= \frac{Ax(x^۲+۲x+۳) + B(x^۲+۲x+۳) + Cx(۱+x^۲) + D(۱+x^۲)}{(۱+x^۲)(x^۲+۲x+۳)}$$

$$\begin{cases} A+C=۰ \\ ۲A+B+D=۰ \\ ۳A+۲B+C=۴ \\ ۳B+D=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=۱ \\ B=۱ \\ C=-۱ \\ D=-۳ \end{cases}$$

$$I = \int \frac{x}{۱+x^۲}\,\mathrm{d}x + \int \frac{۱}{۱+x^۲}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-x-۳}{x^۲+۲x+۳}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x\,\mathrm{d}x}{۱+x^۲} + \int \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲} - \int \frac{\frac{۱}{۲}(۲x+۲)+۲}{x^۲+۲x+۳}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{x^{2}+2x+3}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^{2}+2}$$

$$= \frac{\ln\left(1+x^{2}\right)}{2}+\tan^{-1}x-\frac{\ln\left|x^{2}+2x+3\right|}{2}-\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+K$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\ln^{2}\left|\tan^{2}\frac{\theta}{2}+2\tan\frac{\theta}{2}+3\right|-\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}+1}{\sqrt{2}}\right)+K$$

مثال

تابع مشتق‌پذیر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ طوری تعریف شده که

$$f(۱) = ۱, \qquad f'(x) = e^{-x^۲}$$

مقدار $\int_۰^۱ f(x)\,\mathrm{d}x$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\int_۰^۱ \underbrace{f(x)}_{u}\,\underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = xf(x)\Big|_۰^۱ - \int_۰^۱ xe^{-x^۲}\,\mathrm{d}x$$

$$= f(۱) + \frac{۱}{۲}e^{-x^۲}\Big|_۰^۱ = ۱ + \frac{۱}{۲}\left(e^{-۱} - ۱\right) = \frac{۱}{۲}\left(e^{-۱} + ۱\right)$$

مثال

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر $[۰,۱]$ دارای مشتقات دوم پیوسته باشند و

$$f(۰)=f(۱)=g(۰)=g(۱)=۰$$

نشان دهید:

$$\int_۰^۱ f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x=\int_۰^۱ f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

پاسخ:

$$\int_۰^۱ \underbrace{f(x)}_{u}\,\underbrace{g''(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v}=f(x)g'(x)\Big|_۰^۱-\int_۰^۱ \underbrace{f'(x)}_{u}\,\underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v}$$

$$=۰-\left(f'(x)g(x)\Big|_۰^۱-\int_۰^۱ f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_۰^۱ f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

مثال

اگر تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ دو بار مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$، آنگاه نشان دهید:

$$I=\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

پاسخ:

$$\begin{cases} u=(x-a)(x-b) \\ \mathrm{d}v=f''(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=(2x-a-b)\,\mathrm{d}x \\ v=f'(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I=\underbrace{(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b}_{0}-\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int_a^b (2x-a-b)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

بار دیگر از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = ۲x - a - b \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \implies v = f'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \mathrm{d}u = ۲\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \underbrace{-(۲x - a - b) f(x)\Big|_a^b}_{۰} + ۲\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = ۲\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

تمرین

اگر $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = A$ ، آن‌گاه

$$\int_{\pi}^{2\pi} (\ln x)(\cos x)\, \mathrm{d}x$$

را بر حسب A بیابید.

تمرین

مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \sin x\, \mathrm{d}x$$

تمرین

تمرین: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(۱) $$\int (\tan^{21} x + \tan^{23} x)\, \mathrm{d}x$$

(۲) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x(1+\tan x)}$$

(۳) $$\int (1+\ln x)^2\, \mathrm{d}x$$

(۴) $$\int \frac{2+\ln x}{x(\ln x)((\ln x)^2 - 1)}\, \mathrm{d}x$$

(۵) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3\sin x + 5\cos x}$$

(۶) $$\int x\sin^2(2x)\, \mathrm{d}x$$

(۷) $$\int e^{-x}\ln(e^x+1)\, \mathrm{d}x$$

(۸) $$\int x\sin(\sqrt{1+x^2})\, \mathrm{d}x$$

(۹) $$\int x\sqrt{1+e^{x^2}}\, \mathrm{d}x$$

(۱۰) $$\int \frac{e^x}{(x^x+1)(e^{2x}+1)}\, \mathrm{d}x$$

تمرین

فرض کنید $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x$.

الف) نشان دهید به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم:

$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$$

ب) ابتدا نشان دهید $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ و به کمک این رابطه ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

ج) به کمک قسمت‌های قبل نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$