فصل ۲ – اصول بنیادی منطق

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

2

Fundamentals of Logic

تمرین ۴ - (تمرینات ۲.۲) ص ۷۹

به ازای گزاره‌های اولیه p، q، r و s گزاره مرکب زیر را ساده کنید:

$$\Big[\big[[(p\wedge q)\wedge r]\vee[(p\wedge q)\wedge(\neg r)]\big]\vee\neg q\Big]\rightarrow s$$

	دلایل
$\Big[\big[[(p\wedge q)\wedge r]\vee[(p\wedge q)\wedge(\neg r)]\big]\vee\neg q\Big]\rightarrow s$	
$\Leftrightarrow \big[[(p\wedge q)\wedge(r\vee\neg r)]\vee\neg q\big]\rightarrow s$	قانون پخش‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\Leftrightarrow \big[[(p\wedge q)\wedge(T_0)]\vee\neg q\big]\rightarrow s$	قانون وارون $\vee$
$\Leftrightarrow [(p\wedge q)\vee\neg q]\rightarrow s$	قانون همانی $\wedge$
$\Leftrightarrow [\neg q\vee(p\wedge q)]\rightarrow s$	قانون تعویض‌پذیری $\vee$
$\Leftrightarrow [(\neg q\vee p)\wedge(\neg q\vee q)]\rightarrow s$	قانون پخش‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$
$\Leftrightarrow [(\neg q\vee p)\wedge(q\vee\neg q)]\rightarrow s$	قانون تعویض‌پذیری $\vee$
$\Leftrightarrow [(\neg q\vee p)\wedge T_0]\rightarrow s$	قانون وارون $\vee$
$\Leftrightarrow [(\neg q\vee p)]\rightarrow s$	قانون همانی $\wedge$
$\Leftrightarrow (q\rightarrow p)\rightarrow s$	با استفاده از هم‌ارزی منطقی $(\neg q\vee p)\Leftrightarrow(q\rightarrow p)$

تمرین ۱۹ - (تمرینات ۱.۲) ص ۶۲

خانمی پس از پختن یک کلوچه برای دو دختر خواهرش و دو پسر خواهرش که به دیدن او رفته‌اند، کلوچه را روی میز آشپزخانه می‌گذارد تا سرد شود و آنگاه برای خرید به بازار می‌رود. در بازگشت ملاحظه می‌کند که کسی یک چهارم کلوچه را خورده است (و حتی جرأت کرده است که بشقاب کثیف خود را کنار باقیمانده کلوچه بگذارد). چون آن روز کسی - جز آن چهار نفری که به دیدن او آمده‌اند - در خانه نبوده است، او هر یک از خواهرزاده‌هایش را درباره اینکه چه کسی آن تکه از کلوچه را خورده است، مورد پرسش قرار می‌دهد.

چهار مظنون پاسخ‌های زیر را به او می‌دهند:

پسر بزرگتر: خواهر بزرگم آن تکه کلوچه را خورد. (I)

پسر کوچکتر: من آن تکه کلوچه را خوردم. (II)

دختر بزرگتر: خواهر کوچکم کلوچه را خورد. (III)

دختر کوچکتر: خواهرم دروغ گفت که من کلوچه را خوردم. (IV)

اگر فقط یکی از چهار گزاره راست باشد و فقط یکی از این چهار نوجوان مرتکب جرم شده باشد، مجرم کیست؟

ابتدا فرض می‌کنیم جمله (I) تنها جمله درست باشد و بقیه جملات نادرست باشند.

در این صورت با توجه به صحت جمله (I) و نادرستی جملات (II)، (III)، (IV) ←

جملات (III) و (IV) با یکدیگر در تناقض قرار می‌گیرند!

حال فرض کنیم (II) درست و بقیه جملات نادرست باشند:

جملات (III) و (IV) با هم در تناقض قرار می‌گیرند.

حال فرض کنیم (III) درست و بقیه جملات نادرست باشند.

در اینصورت متهمان عبارتند از: { پسر کوچک (چون نقیض جمله (II) درست است)
خواهر کوچک (چون جمله (III) فرض شده که درست است)
(و همچنین نقیض جمله (IV) که فرض شده درست است)

حال فرض کنیم (IV) درست و بقیه نادرست باشند.

در اینصورت تنها متهم طبق درست بودن نقیض گزاره II، پسر کوچک خواهد بود.

پس با توجه به فرضیات، تنها متهم، پسر کوچک خواهد بود.

دو نکته در حل این مسئله وجود دارد:

① اینکه جملات همدیگر را نقض نکنند.

② اینکه هر فرضی که می‌کنیم منجر به این شود که در نهایت فقط و فقط یک نفر متهم داشته باشیم.

ارزش گزاره زیر را برحسب ارزش اتم های آن بیابید.

$$((\neg p \to (q \to r)) \Rightarrow (q \to (p \vee r))) \to p$$

استفاده از $\Rightarrow$ در بخشی از گزاره فوق بیانگر این است که ادعا شده بخش زیرین گزاره همیشه درست است.

$$(\neg p \to (q \to r)) \to (q \to (p \vee r))$$

حال باید ببینیم که آیا واقعاً گزاره بالا همیشه درست است؟ سمت چپ گزاره بالا را در نظر میگیریم وسعی می‌کنیم به سمت راست برسیم:

	دلایل
$(\neg p \to (q \to r))$	
$\Leftrightarrow (\neg\neg p \vee (q \to r))$	با استفاده از هم ارزی $\neg p \to (q \to r) \Leftrightarrow \neg\neg p \to (q \to r$
$\Leftrightarrow (p \vee (q \to r))$	با استفاده از قانون نقیض مضاعف
$\Leftrightarrow (p \vee (\neg q \vee r))$	با استفاده از هم ارزی $(q \to r) \Leftrightarrow (\neg q \vee r)$
$\Leftrightarrow ((p \vee \neg q) \vee r)$	قانون شرکت پذیری $\vee$
$\Leftrightarrow ((\neg q \vee p) \vee r)$	قانون تعویض پذیری $\vee$
$\Leftrightarrow (\neg q \vee (p \vee r))$	قانون شرکت پذیری $\vee$
$\Leftrightarrow (q \to (p \vee r))$	با استفاده از هم ارزی $\neg q \vee (p \vee r) \Leftrightarrow q \to (p \vee r)$

بنابراین $(\neg p \to (q \to r)) \Leftrightarrow (q \to (p \vee r))$ برقرار است. و در نتیجه

$(\neg p \to (q \to r)) \Rightarrow (q \to (p \vee r))$ نیز برقرار است و می‌توان به جای این گزاره، T (درست) لذا

$$\Big(\underbrace{(\neg p \to (q \to r)) \Rightarrow (q \to (p \vee r))}_{T_0}\Big) \to p$$

پس حال می‌توان ارزش گزاره $T_0 \to p$ را برحسب اتم‌های آن حساب کرد:

$$v^*(T_0 \to p) = 1 - v^*(T_0)\big(1 - v^*(p)\big)$$

$$= 1 - 1 \times \big(1 - v^*(p)\big) = v^*(p) = v(p)$$

بنابراین:

$$v^*\Big(((\neg p \to (q \to r)) \Rightarrow (q \to (p \vee r))) \to p\Big) = v^*(p)$$

$$= v(p)$$

نکته: گاهی به جای T_0 از نماد $\top$ (خوانده می‌شود Top) و به جای F_0 از نماد $\bot$ (خوانده می‌شود Bottom) استفاده می‌شود.

بنابراین

$$v^*(\bot) = 0$$

$$v^*(\top) = 1$$

Quantifiers with restricted domains

For every $x \in R-\{0\}$, $x^2 > 0$

$$\forall x. \left[(x \in R - \{0\}) \rightarrow (x^2 > 0) \right]$$ ← درست (*)

$$\cancel{\forall x. \left[(x \in R - \{0\}) \wedge (x^2 > 0) \right]}$$ ← نادرست (**)

(**) از (*) سخت‌گیرتر است.

There is some $x < 0$ such that $x^2 < 0$

$$\exists x. \left[(x \in R^-) \wedge (x^2 < 0) \right]$$ ← درست (I)

$$\cancel{\exists x. \left[(x \in R^-) \rightarrow (x^2 < 0) \right]}$$ ← نادرست (II)

(II) از (I) آسان‌گیرتر است. (هر عدد حقیقی مثبت، II را برآورده می‌کند، در حالی که نباید چنین باشد.)

(مشکل Vacuously True بودن دارد.)

Every A is B.	$\forall x. (A(x) \rightarrow B(x))$

Some A is B.	$\exists x. (A(x) \wedge B(x))$

فرض کنید گزاره‌های باز زیر را داشته باشیم:

$P(x)$: عدد طبیعی x اول است.

$E(x)$: عدد طبیعی x زوج است.

حاصل عبارت "تنها یک عدد طبیعی زوج اول وجود دارد" را به زبان منطق مرتبه اول بنویسید.

$$\exists m.\left(m \in \mathbb{N} \wedge P(m) \wedge E(m)\right)$$

$$\wedge$$

$$\forall x.\forall y.\left\{(x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}) \rightarrow \left[\left(P(x) \wedge E(x) \wedge P(y) \wedge E(y)\right) \longrightarrow (x = y)\right]\right\}$$

یا

$$\exists m.\left[m \in \mathbb{N} \wedge P(m) \wedge E(m)\right]$$

$$\wedge$$

$$\left[\forall x.\forall y.\left(\left(x \in \mathbb{N} \wedge P(x) \wedge E(x)\right) \wedge \left(y \in \mathbb{N} \wedge P(y) \wedge E(y)\right)\right) \rightarrow x = y\right]$$

نکته: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$

$\mathcal{U} = \mathbb{R}$

تمرین ۲۳ - (تمرینات ۴.۲) - صـ ۱۳۴

الف) هر عدد حقیقی دارای وارون جمعی است.

$$\forall x . \exists y . (x + y = y + x = 0)$$

ب) گزاره‌ای مسور برای وجود عضو همانی ضربی در $\mathbb{R}$ بنویسید.

$$\exists i \, \forall x . (i \times x = x \times i = x)$$

* نکته در مورد جابجایی سورهای غیر هم‌نوع

پ) گزاره‌ای مسور برای وجود وارون‌های ضربی اعداد حقیقی ناصفر بنویسید. (در هیچ جای گزاره‌ای که می‌نویسید نماد $^{-1}$ را بکار نبرید).

$$\forall x . \exists y . (x \neq 0 \rightarrow x \times y = y \times x = 1)$$

$$\forall x \neq 0 . \exists y . (x \times y = y \times x = 1)$$

دقیقاً دو عدد صحیح وجود دارد که برقراری خاصیت P در مورد یکی خاصیت Q را در مورد دیگری ایجاب می‌کند.

$$\exists n.\exists y.\,(P(n) \rightarrow Q(y))$$

$$\wedge$$

$$\forall m,n,m',n'.\,\big((P(m) \rightarrow Q(n)) \wedge (P(m') \rightarrow Q(n')) \longrightarrow [(m=m') \wedge (n=n')]\big)$$

اگر یک عدد طبیعی را بر عدد طبیعی دیگری تقسیم کنیم، حاصل ممکن است طبیعی نباشد.

$$\exists n.\exists y.\,(x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \frac{x}{y} \notin \mathbb{N})$$

تمرین ۱۸ - تمرینات تکمیلی - ص ۱۵۶

هر یک از گزاره‌های زیر را در قالب نمادی بیان کنید. عالم سخن همه اعداد حقیقی مثبت است.

الف) کوچکترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد.

$$\forall x .\ \exists y .\ \ 0 < y < x$$

یا

$$\forall x \in R^{+} .\ \exists y \in R^{+} .\ \ 0 < y < x$$

ب) عدد حقیقی مثبت یکتایی وجود دارد که با مجذور خود برابر است.

$$\exists ! x ,\ \ x = x^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists x .\ \ x = x^2 \wedge [\forall x . \forall y . (x = x^2 \wedge y = y^2 \rightarrow (x = y)]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists x . \{x = x^2 \wedge [\forall y .\ (y = y^2 \rightarrow y = x)]\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists x . \{x = x^2 \wedge [\neg \exists y . (y = y^2 \wedge (x \neq y))]\}$$

پ) هر عدد حقیقی مثبت دارای وارون ضربی یکتاست.

$$\forall x ,\ \exists ! y .\ xy = yx = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall x .\ \exists y . \{xy = yx = 1 \wedge [\forall m . \forall n .\ (mx = xm = 1) \wedge (nx = xn = 1) \rightarrow m = n]\}$$

در بین هر سه عدد صحیح متوالی فقط و فقط یک عدد بر سه بخش پذیر است .

$$\forall m \in \mathbb{Z} . \left[\left(\exists k \in \{0,1,2\} . \ 3 \mid m+k \right) \right.$$

$$\wedge$$

$$\left. \left(\forall k', k'' \in \{0,1,2\} . \left(\left(3 \mid m+k' \wedge 3 \mid m+k'' \right) \rightarrow k' = k'' \right) \right) \right]$$

اگر عددی از یک عدد دیگر کوچکتر باشد ، در اینصورت عددی وجود دارد که بین این دو قرار دارد (ومتفاوت با آنهاست) $(\mathcal{U} = \mathbb{N})$

$$\forall x . \forall y . \left((x<y) \rightarrow \exists z . \left((x<z) \wedge (z<y) \right) \right)$$

برای هر عدد ، عددی بزرگتر از آن وجود دارد ($\mathcal{U} = \mathbb{N}$)

$$\forall x . \exists y . (x<y)$$

عددی وجود دارد که از هر عدد دیگری بزرگتر است ($\mathcal{U} = \mathbb{N}$)

$$\exists y . \forall x . (x<y)$$

حداکثر یک عدد وجود دارد که تابع $f(x)$ مقدار true برای آن برمی‌گرداند. $(\mathcal{U} = \mathbb{N})$

$$\forall x . \forall y . \left(\left(f(x) \wedge f(y) \right) \rightarrow (x=y) \right)$$

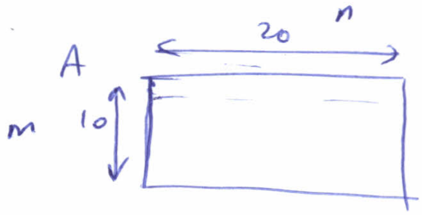
بیشمار عدد وجود دارد که به ازای آن تابع $f(x)$ مقدار true برای آن‌ها برمی‌گرداند. $(\mathcal{U} = \mathbb{N})$

$$\forall x . \exists y . \left((x<y) \wedge f(y) \right)$$

تمرین ۱۰ (تمرینات ۴.۲) ص ۱۲۸

در قطعه برنامه پاسکال زیر m و n متغیرهای صحیح هستند. متغیر A یک آرایه ۲ بعدی با ۱۰ سطر (از ۱ تا ۱۰) و ۲۰ ستون (از ۱ تا ۲۰) تشکیل شده است:

```
for m=1 to 10 do
    for n=1 to 20 do
        A[m,n] = m + 3 * n
```



گزاره‌های زیر را در قالب نماد ریاضی بنویسید: (عالم برای متغیر m، فقط شامل اعداد صحیح ۱ تا ۱۰ و برای n، شامل اعداد صحیح ۱ تا ۲۰ است)

ت) درایه‌های هر سطر A به طور (اکیداً) افزایشی مرتب شده‌اند.

$$\forall m.\ \forall n.\ \left[(1 \leq n \leq 19) \rightarrow (A[m,n] < A[m,n+1])\right]$$

ج) درایه‌های هر سه سطر متوالی دلخواه A متمایز اند.

$$\forall m,i,j,k,l,\ \Big\{\big[(1 \leq m \leq 8) \wedge (m \leq i \leq m+2) \wedge (m \leq j \leq m+2) \wedge (1 \leq k \leq 20) \wedge (1 \leq l \leq 20)\big] \longrightarrow \Big(\big[(i,k) \neq (j,l)\big] \rightarrow \big[A[i,k] \neq A[j,l]\big]\Big)\Big\}$$

ح) به ازای دو سطر متوالی دلخواه A، حاصل جمع درایه‌های سطر آخر (یعنی سطری که شماره سطر آن بیشتر است) ۲۰ تا بیشتر از حاصل جمع درایه‌های سطر قبلی است.

$$\forall m.\ \forall n.\ \left((1 \leq m \leq 9) \longrightarrow \left\{\left(\sum_{i=1}^{20} A[m,i]\right) + 20 = \sum_{i=1}^{20} A[m+1,i]\right\}\right)$$

تمرین ۱۵ - (تمرینات ۴.۲) ص ۱۳۰ :

به ازای هر یک از جملات گزاره‌های زیر تعیین کنید که آیا نقیض پیشنهادی صحیح است یا نه؟
اگر صحیح است تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های اصلی یا نقیض پیشنهادی راست است.
اگر نقیض پیشنهادی غلط است یک بیان صحیح نقیض را بنویسید.

الف) گزاره : به ازای همه اعداد حقیقی x و y، اگر $x^2>y^2$، آنگاه $x>y$

$$\forall x\in R.\ \forall y\in R.\ (x^2>y^2 \longrightarrow x>y)$$

نقیض پیشنهادی : اعداد حقیقی همانند x و y وجود دارند به طوریکه $x^2>y^2$ در حالیکه $x\leq y$.

ابتدا نقیض گزاره بالا را بدست می‌آوریم :

$$\neg\Big(\forall x\in R.\ \forall y\in R.\ (x^2>y^2 \rightarrow x>y)\Big) \Leftrightarrow$$

$$\exists x\in R.\ \exists y\in R.\ \neg(x^2>y^2 \rightarrow x>y) \Leftrightarrow$$

$$\exists x\in R.\ \exists y\in R.\ \neg(\neg(x^2>y^2) \vee x>y) \Leftrightarrow$$

$$\exists x\in R.\ \exists y\in R.\ (x^2>y^2 \wedge x\leq y)$$

و این همان گزاره‌ای است که در نقیض پیشنهادی گفته شده است

بنابراین نقیض پیشنهادی صحیح بیان شده است.

ارزش گزاره نقیض پیشنهادی : درست است. (مثال $\begin{matrix} x=-2 \\ y=1 \end{matrix}$)

ب) گزاره: اعدادی حقیقی مانند x و y وجود دارند بطوریکه x و y گویا هستند ولی $x+y$ گنگ است.

$$\exists x \in R.\ \exists y \in R.\ (x \in Q \wedge y \in Q \wedge x+y \in \mathbb{R}-Q)$$

نقیض پیشنهادی: به ازای همه اعداد حقیقی x و y اگر $x+y$ گویا باشد، آنگاه هم x و هم y گویا است.

محاسبه نقیض گزاره فوق

$$\neg(\exists x \in R.\ \exists y \in R.\ (x \in Q \wedge y \in Q \wedge x+y \in \mathbb{R}-Q)) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall y \in R.\ \neg(x \in Q \wedge y \in Q \wedge x+y \in R-Q) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ (x \notin Q \vee y \notin Q \vee x+y \notin \mathbb{R}-Q) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ (x+y \notin R-Q \vee x \notin Q \vee y \notin Q) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in R.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ (\neg(x+y \in R-Q) \vee (x \notin Q \vee y \notin Q)) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ (x+y \in R-Q \longrightarrow (x \notin Q \vee y \notin Q)) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in R.\ \forall y \in \mathbb{R}(\neg(x \notin Q \vee y \notin Q) \longrightarrow \neg(x+y \in R-Q)) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in R.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ ((x \in Q \wedge y \in Q) \rightarrow x+y \in Q)$$

بنابراین نقیض پیشنهادی صحیح نیست!

ارزش گزاره نقیضی که بدست آوردیم درست است.

ادامه تمرین ۱۵ (تمرینات ۴۰۲) ص ۱۳۰

پ) گزاره: به ازای همه اعداد حقیقی x، اگر x صفر نباشد، آنگاه x وارون ضربی دارد.

$$\forall x \in R.\ \exists y \in R.\ (x \neq 0 \rightarrow (xy=1 \wedge yx=1))$$

نقیض پیشنهادی: عدد حقیقی ناصفری وجود دارد که دارای وارون ضربی نیست.

محاسبه نقیض گزاره فوق

$$\neg(\forall x \in R.\ \exists y \in R.\ (x \neq 0 \rightarrow (xy=1 \wedge yx=1)))$$

$$\exists x \in R.\ \forall y \in R.\ \neg(\neg(x \neq 0) \vee (xy=1 \wedge yx=1))$$

$$\exists x \in R.\ \forall y \in R.\ (x \neq 0 \wedge (xy \neq 1 \vee yx \neq 1))$$

بنابراین نقیض پیشنهادی صحیح است.

ارزش گزاره اصلی درست است.

ت) اعداد صحیح فردی وجود دارند بطوریکه حاصلضربشان فرد است.

$odd(x)$: x عدد صحیح فرد است.

$$\exists x.\ \exists y.\ (odd(x) \wedge odd(y) \wedge odd(xy))$$

نقیض پیشنهادی: حاصلضرب هر ۲ عدد صحیح فرد گزاره فرد است.

محاسبه نقیض گزاره فوق

$$\neg(\exists x.\ \exists y.\ (odd(x) \wedge odd(y) \wedge odd(xy))) \Leftrightarrow$$

$$\forall x.\ \forall y.\ (\neg(odd(x) \wedge odd(y)) \vee \neg odd(xy))$$

$$\forall x.\ \forall y.\ ((odd(x) \wedge odd(y)) \rightarrow \neg odd(xy))$$

بنابراین نقیض پیشنهادی صحیح نیست، گزاره اصلی درست است.

ش) گزاره: مجذور هر عدد گویا، عددی گویا است.

$$\forall x \in Q . (x^2 \in Q)$$

نقیض پیشنهادی: عددی حقیقی مانند x وجود دارد بطوریکه اگر x گنگ باشد، آنگاه x^2 گنگ است.

نقیض گزاره خودمان

$$\neg (\forall x \in Q . (x^2 \in Q)) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in Q . (x^2 \notin Q) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in Q . (x^2 \in \mathbb{R} - Q)$$

بنابراین نقیض پیشنهادی صحیح نیست!

گزاره اصلی درست است.

فرض کنید برای بیان جملهٔ "دقیقاً یک عنصر در مجموعهٔ A وجود دارد که خاصیت P را برآورده می‌کند" از عبارت q به شکل $\exists x. \forall y. [y \neq x \rightarrow (P(x) \wedge \neg P(y))]$ در منطق مرتبه اول و با فرض عالم سخن A استفاده کرده‌ام. کدام گزینه زیر درست است؟

الف) q همواره معادل منطقی جملهٔ داده شده است. (نادرست)

اگر مجموعهٔ A فقط یک عضو داشته باشد که آن هم P را برآورده نکند در این صورت q برقرار خواهد بود. در حالیکه نباید برقرار باشد.

ب) فقط در صورتی q معادل جمله داده شده است که A مجموعه‌ای نامتناهی باشد. (نادرست)

اگر $A=\{a,b\}$ باشد در حالیکه P برای a ارزش true و P برای b ارزش false داشته باشد، در این صورت A مجموعهٔ درستی خواهد بود. (توجه کنیم در اینجا A متناهی است و q هم معادل جمله داده شده است)

ج) هیچ گاه q معادل منطقی جمله داده شده نیست. (نادرست)

استدلال مثل ب

د) در صورتی که A بیش از یک عضو داشته باشد، q معادل منطقی جملهٔ داده شده است.

درست است.

$A = \{a, b, \dots\}$ $\longrightarrow$ q به درستی در مورد مجموعهٔ A تصمیم می‌گیرد.

a: P را برآورده کند

b: P را برآورده نکند

$A = \{\underbrace{a, b, \dots}\}$

هیچ عضوی P را برآورده نمی‌کند.

$A = \{a, b, \dots\}$

لااقل ۲ عضو P را برآورده کنند.