مثال – تابع مولد تعداد *composition*های اعداد طبیعی

- تابع مولد تولیدکنندهٔ تعداد *composition*های اعداد طبیعی را به دست آورید. ضریب x^n در این تابع باید نشان‌دهندهٔ تعداد *composition*های عدد n باشد.

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^1 = (x^1 + x^2 + x^3 + \cdots)^1$$
ضریب x^n نشان‌دهندهٔ تعداد *composition*های عدد n که دارای ۱ جمعوند است:

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 = (x^1 + x^2 + x^3 + \cdots)^2$$
ضریب x^n نشان‌دهندهٔ تعداد *composition*های عدد n که دارای ۲ جمعوند است:

… … …   … … …

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = (x^1 + x^2 + x^3 + \cdots)^n$$
ضریب x^n نشان‌دهندهٔ تعداد *composition*های عدد n که دارای n جمعوند است:

… … …   … … …

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^i = \cdots + \boldsymbol{A}x^n + \ \ldots$$

بنابراین تابع مولد مورد نظر برابر خواهد بود با: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^i$

مثال - تابع مولد تعداد $composition$های اعداد طبیعی – ادامه

البته می‌توان تابع به‌دست آمده را ساده‌تر کرد:

f(x) = $\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{x}{1-x})^i$

$y = \frac{x}{1-x}$ ⟹

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} y^i = y\sum_{i=0}^{\infty} y^i = y\left(\frac{1}{1-y}\right) \\ &= \left(\frac{x}{1-x}\right)\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x}{1-x}\right)}\right] = \left(\frac{x}{1-x}\right)\left[\frac{1}{\frac{1-x-x}{1-x}}\right] \\ &= x/(1-2x) = x[1+(2x)+(2x)^2+(2x)^3+\cdots] \\ &= 2^0x + 2^1x^2 + 2^2x^3 + 2^3x^4 + \cdots . \end{aligned}$$

ضریب x^n که نشان‌دهندهٔ تعداد کل $composition$های عدد n است، برابر با 2^{n-1} خواهد بود.

مثال

- با استفاده از مفهوم تابع مولد، تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $S = \{1,2,3,\ldots,15\}$ را تعیین کنید با این شرط که هر یک از زیرمجموعه‌ها فاقد دو عضو متوالی از S باشند.

هر زیرمجموعهٔ ۴ عضوی از S، همانند $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ خواهد بود. از آن‌جایی‌که این ۴ عضو متفاوت با یکدیگر هستند می‌توان آن‌ها را به‌صورت مرتب شده و به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$1 \le a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \le 15$$

حال، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\underbrace{(a_1 - 1)}_{c_1} + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{c_2} + \underbrace{(a_3 - a_2)}_{c_3} + \underbrace{(a_4 - a_3)}_{c_4} + \underbrace{(15 - a_4)}_{c_5} = 14$$

و به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 14$$

$$c_1, c_5 \ge 0 \quad \boxed{c_2, c_3, c_4 \ge 2}$$

این شرط تضمین می‌کند که هیچ دو عضو متوالی در یک زیرمجموعه قرار نمی‌گیرند.

بین پاسخ‌های معادله فوق و زیرمجموعه‌های چهار عضوی (فاقد اعضای متوالی) تناظر یک‌به‌یک وجود دارد.

مثال - ادامه

حال، باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 14$$

$$c_1, c_5 \geq 0 \quad c_2, c_3, c_4 \geq 2$$

تابع مولد متناظر با حل معادلهٔ فوق عبارت است از:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^3(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= x^6(1 - x)^{-5}. \end{aligned}$$

حال باید در عبارت $x^6(1-x)^{-5}$ ضریب x^{14}، و یا در عبارت $(1-x)^{-5}$ ضریب x^8 را پیدا کرد:

ضریب x^8 در عبارت $(1-x)^{-5}$ برابر است با:

$$\binom{-5}{8}(-1)^8 = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = 495$$