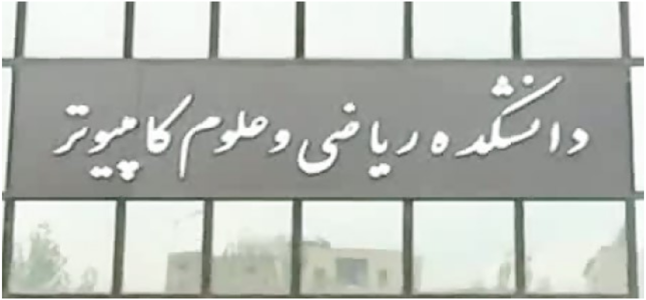
ریاضی عمومی ۲

ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



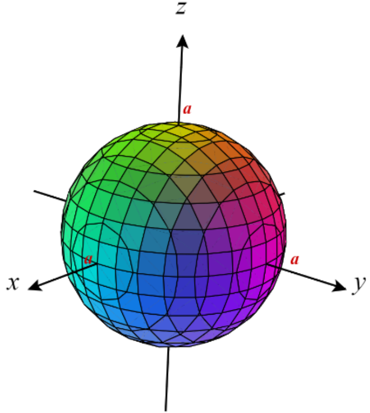
توابع چندمتغیره

قبل از تعریف دقیق یک تابع چندمتغیره، برخی سطوح (رویه‌های) درجهٔ دوم را مرور می‌کنیم.

کره

کره با مرکز (x_0, y_0, z_0) و شعاع a: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$

کره با مرکز مبدأ و شعاع a: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



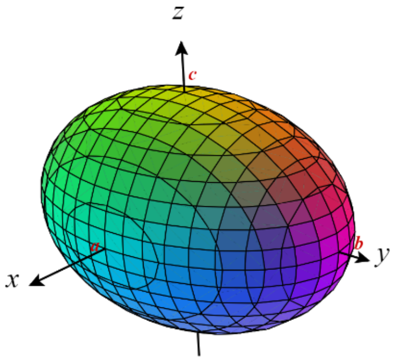
بیضی‌گون

بیضی‌گون با مرکز (x_0, y_0, z_0):

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

بیضی‌گون با مرکز مبدأ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



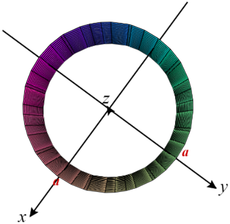
استوانه

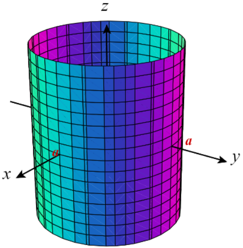
استوانهٔ قائم با متغیر آزاد z که مقطع آن دایره‌ای به شعاع a و مرکز (x_0, y_0) است:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

استوانهٔ قائم با متغیر آزاد z که مقطع آن دایره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ است:

$$x^2 + y^2 = a^2$$





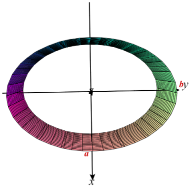
استوانه

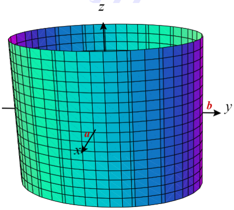
استوانهٔ بیضوی با متغیر آزاد z که مقطع آن یک بیضی با مرکز (x_0, y_0) است:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

استوانهٔ بیضوی با متغیر آزاد z که مقطع آن یک بیضی با مرکز مبدأ است:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$





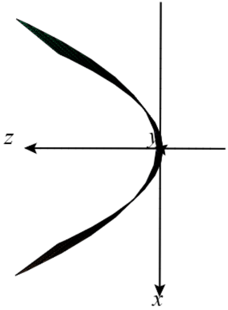
استوانه

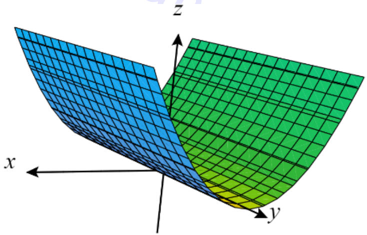
استوانهٔ سهموی با متغیر آزاد y که مقطع آن یک سهمی با رأس (x_0, z_0) است :

$$z - z_0 = \alpha(x - x_0)^2, \quad \alpha \neq 0$$

استوانهٔ سهموی با متغیر آزاد y و $\alpha = 1$، که مقطع آن یک سهمی با رأس مبدأ است:

$$z = x^2$$

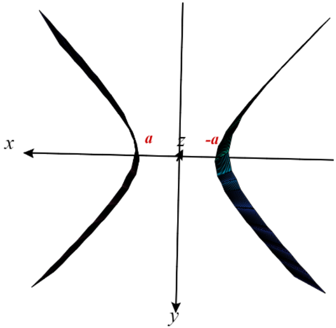


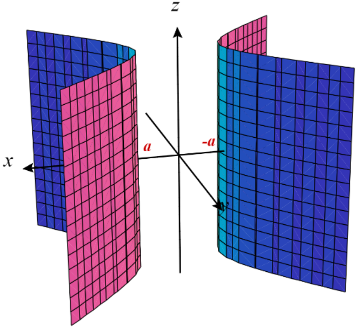


استوانه

استوانهٔ هذلولوی با متغیر آزاد z که مقطع آن یک هذلولی با مرکز مبدأ است :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

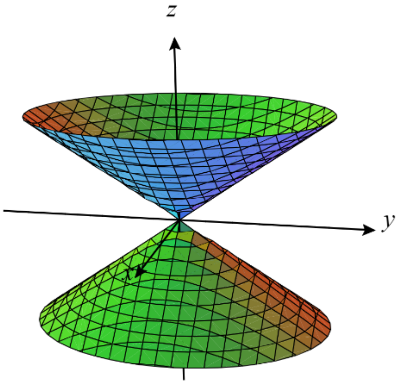




مخروط

مخروط با قاعدهٔ بیضی: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

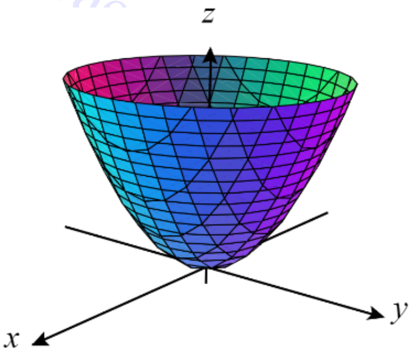
مخروط با قاعدهٔ دایره: $z^2 = x^2 + y^2$



سهمی‌گون

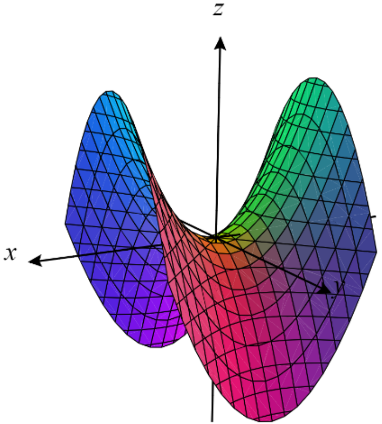
سهمی‌گون بیضوی:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



سهمی‌گون

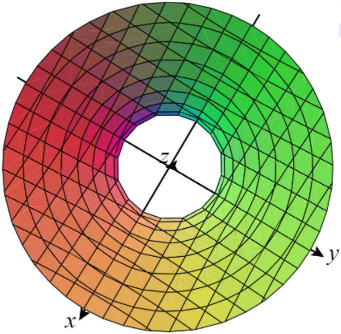
سهمی‌گون هذلولی:
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

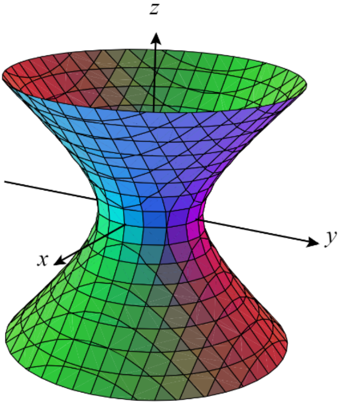


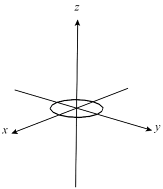
هذلولی‌گون

هذلولی‌گون یک‌پارچه:

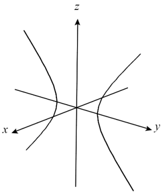
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



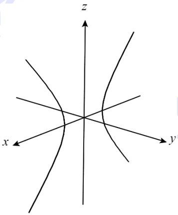




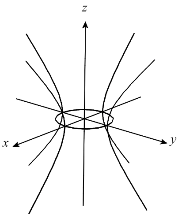
(آ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



(ب) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



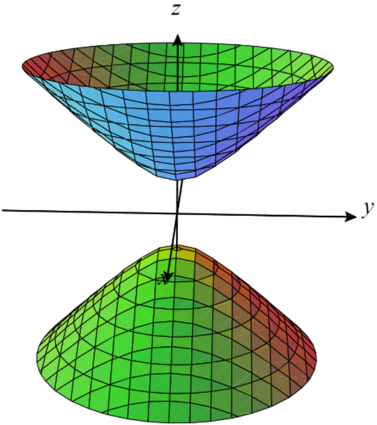
(ج) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

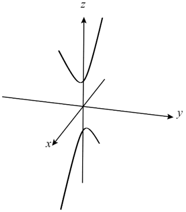


(د) مقاطع درکنار هم

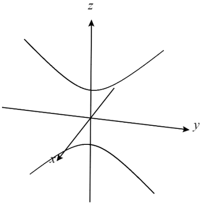
هذلولی‌گون

هذلولی‌گون دوپارچه: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ یا $$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

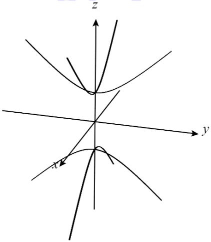




(آ) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



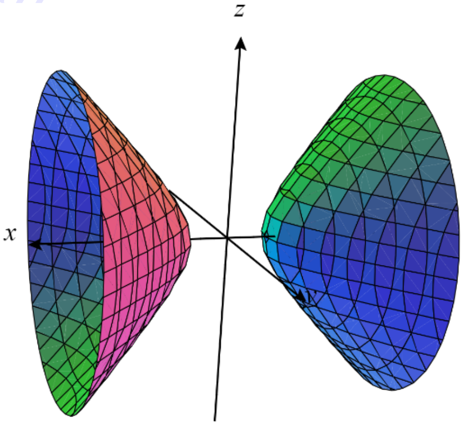
(ب) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



(ج) هر دو مقطع بالا کنار هم

هذلولی‌گون

هذلولی‌گون دوپارچه: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ یا $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$



تعریف توابع چندمتغیره

فرض کنید $1 \leq m$ و $2 \leq n$. تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را یک **تابع چندمتغیره** می‌نامیم، که در آن

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

و به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$، $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- با توجه به اینکه تحلیل f_iها به تحلیل f کمک می‌کند، غالب اوقات حالت $m = 1$ را در نظر می‌گیریم.

مجموعه‌های تراز و نمودار توابع چندمتغیره

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع است.

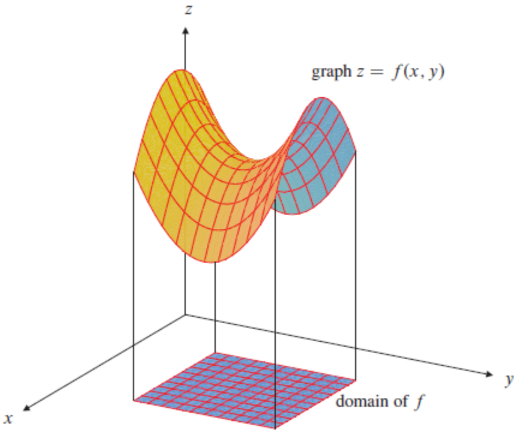
- به‌ازای هر $c \in \mathbb{R}$، **مجموعهٔ تراز** منسوب به c را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in D : f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$$

- **نمودار** f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in D \times \mathbb{R} : x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

مثالی از نمودار یک تابع دو متغیره:



مثال

مجموعه‌های تراز تابع زیر را بیابید:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad z=f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\quad a,b>0$$

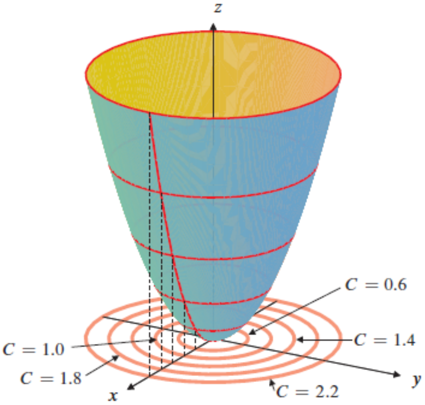
پاسخ: داریم:

$$f^{-1}(c)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=c\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c\right\}$$

بنابراین، به‌ازای $c<0$، $f^{-1}(c)=\emptyset$. واضح است که به‌ازای $c=0$، داریم $f^{-1}(c)=\{(0,0)\}$. اما به‌ازای $c>0$، $f^{-1}(c)$ یک بیضی است. همچنین، نمودار f به‌صورت زیر است:

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right\}$$

نمودار و بعضی از مجموعه‌های تراز f:



مثال

مجموعه‌های تراز تابع زیر را بیابید:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad z = f(x, y) = x^2 - y^2$$

پاسخ: داریم:

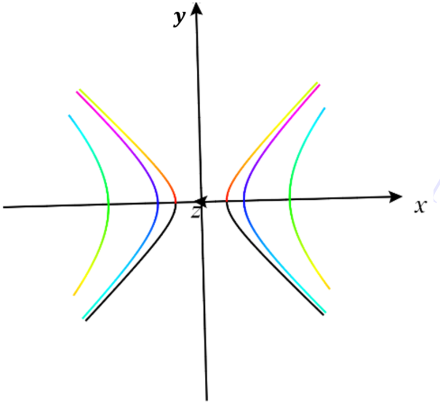
$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = c\right\}$$

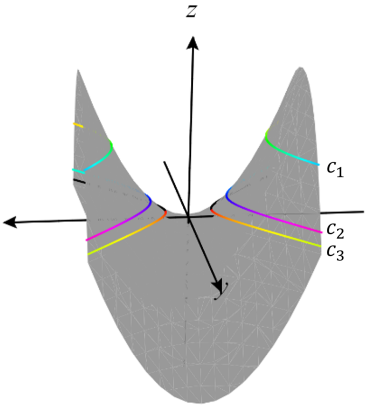
سه حالت مختلف به‌ازای c در نظر می‌گیریم.

- حالت اول: $c > 0$

در این صورت، مجموعه‌های تراز، همگی هذلولی‌هایی هستند که محور xها را در $\pm\sqrt{c}$ قطع می‌کنند.

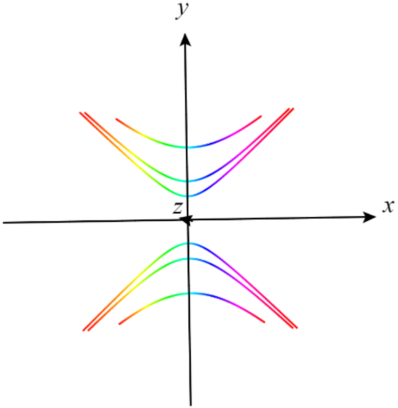
بعضی از مجموعه‌های تراز f به‌ازای $c > 0$:

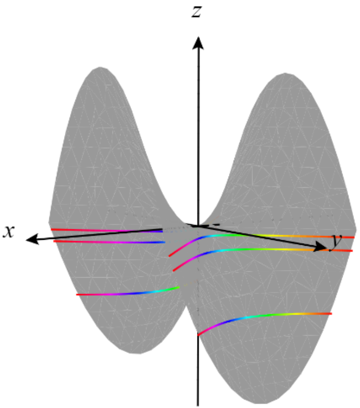




■ حالت دوم: $c < 0$

در این صورت، مجموعهٔ تراز منسوب به c، هذلولی $y^2 - x^2 = -c$ است.



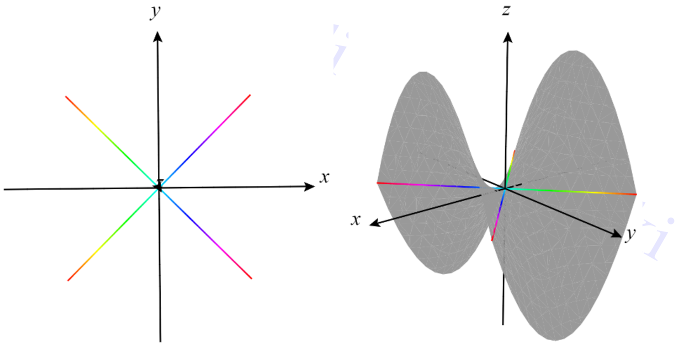


- حالت سوم: $c = 0$

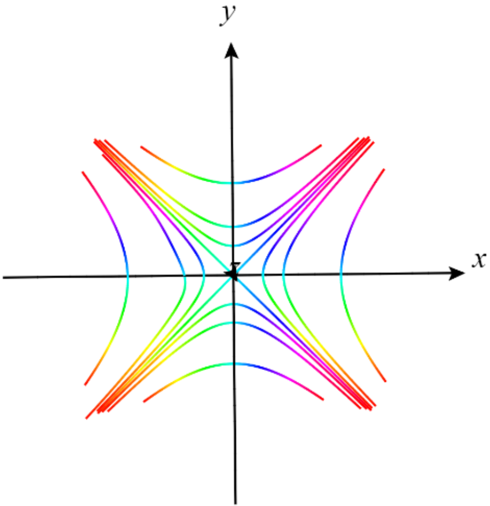
در این صورت، مجموعهٔ تراز، به‌صورت زیر است:

$$f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$$

و از این‌رو، این مجموعه اجتماع نقاط دو خط $y = x$ و $y = -x$ در صفحه است.



مجموعه‌های تراز به‌ازای هر سه حالت $c > 0$، $c < 0$ و $c = 0$:



تمرین

مجموعه‌های تراز توابع زیر را به‌دست آورید:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=3\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)$$

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$$