«به نام خدا»

آخرین ویرایش: ۱۱ اردیبهشت ۹۴

فصل ۱: مقدمات (برخی دستورات و تکنیک‌های انتگرال‌گیری)

1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad n \neq -1$	2) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln\lvert ax+b\rvert + c$
۳) $\int \sin(ax)\, dx = \frac{-1}{a} \cos(ax) + c$	4) $\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$
۵) $\int \cos^n x \sin x\, dx = \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} x + c$	6) $\int \sin^n x \cos x\, dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + c$
۷) $\int \sec^2(ax) dx = \frac{1}{a} \tan(ax) + c$	8) $\int \csc^2(ax) dx = \frac{-1}{a} \cot(ax) + c$
۹) $\int \tan(x) dx = \ln\lvert\sec(x)\rvert + c$	10) $\int \cot(x) dx = \ln\lvert\sin(x)\rvert + c$
۱۱) $\int \sec(x).\tan(x) dx = \sec(x) + c$	12) $\int \csc(x).\cot(x) dx = -\csc(x) + c$
۱۳) $\int \sec x\, dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + c$	14) $\int \csc x\, dx = -\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert + c$ $= \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + c$
۱۵) $\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x + c \quad a \neq 1, \quad a > 0$	16) $\int e^x\, dx = e^x + c$
۱۷) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$	18) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$
۱۹) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + c$	20) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$

نکته (۱-۱): در هنگام انتگرال‌گیری باید تلاش نمود تا عبارت زیرانتگرال بصورت فرمول‌های بیان شده در فوق ساده شوند. مثلاً رادیکال‌ها را به صورت توان‌های کسری بنویسید و با توجه به خطی بودن انتگرال، ضرایب عددی را از داخل انتگرال به پشت انتگرال انتقال دهید، انتگرال مجموع چند تابع را به صورت مجموع انتگرال‌های هر کدام از آنها بنویسید. گاهی اوقات نیز با تقسیم صورت بر مخرج می‌توان تابع زیر انتگرال را از حالت کسری خارج نمود.

قاعده زنجیره‌ای و روش تغییر متغیر برای انتگرال‌گیری: فرض کنید $g(x)$ تابع مشتقپذیری از x بوده و برد g بازهٔ I باشد. همچنین فرض کنید تابع f بر I تعریف شده و دارای تابع اولیه F باشد. در این صورت اگر $u = g(x)$، آنگاه

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)\, du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

نکته (۱-۲): در روش تغییر متغیر(جانشانی)، با توجه به قاعده زنجیره‌ای همواره به دنبال تغییر متغیر $u = g(x)$ می‌باشیم، لذا باید $g'(x)$ و یا ضریب ثابتی از آن، در عبارت زیر انتگرال موجود باشد. معمولاً این تغییر متغیر یا [1]*عبارت تواندار* یا [2]*عبارت زیررادیکال* یا [3]*مخرج کسر* یا [4]*توان یک تابع نمایی* و یا [5]*عبارت داخل یک تابع مثلثاتی و لگاریتمی* می‌باشد، که پس از تغییر متغیر به صورت یکی از فرمول‌های جدول فوق درمی‌آید.

انتگرالگیری جزء به جزء: با توجه به ویژگی مشتق حاصلضرب دو تابع داریم $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$ یا معادلاً $udv = d(uv) - v \cdot du$. از آنجا که دیفرانسیل و انتگرال نامعین وارون یکدیگرند، با انتگرالگیری از رابطه اخیر دستور زیر موسوم به انتگرالگیری جزء به جزء داریم:

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

نکته (۱-۳) (جزء به جزء): معمولاً هرگاه تابعی چند جمله‌ای در [1]تابعی نمایی، [2]مثلثاتی، [3]لگاریتمی و یا [4]وارون مثلثاتی ضرب شود، در دوحالت اول با قرار دادن چندجمله‌ای و در دوحالت دوم با قراردادن تابع لگاریتمی یا وارون مثلثاتی به عنوان تابع u، از فرمول فوق به تعداد مرتبه چندجمله‌ای استفاده می‌شود. در دو حالت اول، به تعداد درجهٔ چند جمله‌ای باید از روش جزء به جزء استفاده نمود. در دو حالت اول، اگر درجه‌ی چند جمله‌ای بالا باشد بهتر است از جدولی استفاده نمود که در آن از u مشتق و از dv انتگرال می‌گیریم.

$$\int \underbrace{\text{چندجمله‌ای}}_{u} \times \underbrace{\left(\text{تابع نمایی}\right)dx}_{dv}, \quad \int \underbrace{\text{چندجمله‌ای}}_{u} \times \underbrace{\left(\text{تابع مثلثاتی}\right)dx}_{dv},$$

$$\int \underbrace{\text{تابع لگاریتمی}}_{u} \times \underbrace{\left(\text{چندجمله‌ای}\right)dx}_{dv}, \quad \int \underbrace{\text{تابع وارون مثلثاتی}}_{u} \times \underbrace{\left(\text{چندجمله‌ای}\right)dx}_{dv}$$

انتگرالگیری از توابع گویا: تابع کسری $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ را تابعی گویا می‌نامیم؛ هرگاه هر دو تابع $p(x)$ و $q(x)$ توابعی چندجمله‌ای باشند. این تابع یک کسر حقیقی است، هرگاه درجه صورت اکیدا کمتر از مخرج باشد در غیر این صورت آن را کسر مجازی می‌نامیم. به عنوان مثال $\frac{۳x^۲+۱}{x^۳-۳x+۲}$ کسری حقیقی بوده و کسرهای $\frac{۳x+۵}{x-۱}$ و $\frac{۲x^۳-x+۲}{x^۲-۱}$ کسرهای مجازی می‌باشند.

هرچندجمله‌ای با ضرایب حقیقی را می‌توان به صورت حاصلضربی از عوامل خطی(درجهٔ اول) و درجهٔ دوم که ریشهٔ حقیقی ندارند، نوشت که در آن ضرایب هر عامل، اعدادی حقیقی‌اند. در تجزیهٔ تابع گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ به مجموع چند کسر جزئی، بر حسب ریشه‌ها و عوامل تشکیل دهندهٔ مخرج تابع گویا، یعنی $q(x)$، چهار حالت مطابق جدول زیر روی می‌دهد.

حالت‌ها	عامل‌های تابع $q(x)$ در مخرج	کسرهای جزئی نظیر عامل‌ها
حالت اوّل	عامل خطی متمایز $ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$
حالت دوم	عامل خطی تکراری $(ax+b)^n$	$\frac{A_۱}{ax+b}+\frac{A_۲}{(ax+b)^۲}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$
حالت سوم	عامل درجه دوم متمایز $x^۲+ax+b$	$\frac{Ax+B}{x^۲+ax+b}$
حالت چهارم	عامل درجه دوم تکراری $\left(x^۲+ax+b\right)^n$	$\frac{A_۱x+B_۱}{x^۲+ax+b}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(x^۲+ax+b)^n}$

عوامل تشکیل دهندهٔ مخرج تابع گویا می‌توانند شامل چند حالت متفاوت و ترکیبی از آنها باشند. به عنوان مثال عوامل تشکیل دهندهٔ مخرج تابع گویای $\frac{x+۱}{(x-۲)(x+۳)^۳(x^۲+۱)}$ شامل سه حالت در جدول فوق است. حالت اوّل به دلیل وجود $(x-۲)$، حالت دوم به دلیل وجود $(x+۳)^۳$ و حالت سوم به دلیل وجود $(x^۲+۱)$ موجود می‌باشند.

نکته (۱-۴): تکنیک انتگرال‌گیری از توابع گویا در چهار مرحله زیر صورت می‌گیرد:

مرحله اول: **ابتدا حقیقی یا مجازی بودن کسر را بررسی نموده واگر کسر مجازی بود، با تقسیم صورت بر مخرج آن را حقیقی می‌کنیم.**

مرحله دوم: **مخرج کسر یعنی $q(x)$ را به صورت حاصلضرب توانهایی از عوامل درجه اول و دوم درآورده و سپس مطابق جدول فوق به صورت مجموع عوامل متناظر می‌نویسیم. که در آن A_i و B_i اعدادی حقیقی اند و باید تعیین شوند.**

مرحله سوم: **مخرج کسر را بر طرفین تساوی کسر با مجموع عواملش ضرب نموده و پس از ساده سازی با نسبت دادن مقادیری به x به یک دستگاه معادله برای یافتن A_i و B_i می‌رسیم.**

البته در دو حالت سوم و چهارم، به دلیل عدم وجود ریشه، بهتر است عبارات را هم‌مخرج کرده و به ضرایب عبارات با توان یکسان توجه کنیم.

مرحله چهارم: **با جایگذاری مقادیر A_i و B_i به طور مستقیم از عوامل انتگرال‌گیری می‌کنیم. در دو حالت اول و دوم جواب انتگرال به صورت لگاریتمی و یا کسری بوده و در دو حالت آخر به غیر از آن دو ممکن است، با مربع کامل نمودن، جوابی به صورت $\frac{۱}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ داشته باشیم.**

فصل ۲: معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول:

نوع معادله	صورت معادله	توضیحات
جداشدنی(تفکیک‌پذیر)	$y'=\frac{f(x)}{g(y)}$، یا $M(x)dx+N(y)dy=۰$	معادله را به صورت $f(x)dx=g(y)dy$ درآورده و سپس از طرفین آن انتگرال‌گیری می‌کنیم.

قابل تبدیل به جداشدنی	$y' = f(ax+by+c), \quad b \neq ۰$ $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right), \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = ۰$	این دو نوع معادله با تغییر متغیر $\boxed{v = ax+by+k}$ که در آن k عدد حقیقی دلخواهی است، **قابل تبدیل به معادله دیفرانسیل جداشدنی بوده** و در آن داریم: $\boxed{v' = a + by'}$
همگن	$y' = f(x,y)$ یا $M(x,y)dx + N(x,y)dy = ۰$	در این معادله $f(x,y)$ تابع همگن از درجهٔ صفر و توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ همگن از درجهٔ یکسانند. منظور از تابع همگن درجهٔ n، تابعی است که برای هر t در آن داریم: $\boxed{f(tx,ty) = t^n f(x,y)}$ با تغییر متغیر $\boxed{y = vx}$ و در نتیجه $\boxed{y' = v'x + v}$ به صورت جداشدنی درمی‌آید.
قابل تبدیل به همگن	$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right), \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \neq ۰$	اگر نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ محل تقاطع دو خط $\begin{cases} ax+by+c = ۰ \\ a'x+b'y+c' = ۰ \end{cases}$ باشد، با تغییر متغیر $\boxed{\begin{cases} y = Y + y_۰ \\ x = X + x_۰ \end{cases}}$، **قابل تبدیل به معادله دیفرانسیل همگن** زیر می‌باشد: $\boxed{Y' = \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)}$
معادله دیفرانسیل کامل	$M\,dx + N\,dy = ۰, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$	ابتدا $\boxed{f(x,y) = \int M\,dx + g(y)}$ قرار داده و سپس از تساوی $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = N}$ مقدار $g(y)$ را محاسبه می‌کنیم. و یا ابتدا $\boxed{f(x,y) = \int N\,dy + g(x)}$ قرار داده و سپس از تساوی $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = M}$ مقدار $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم.
خطی مرتبهٔ اول	$y' + p(x)y = q(x)$ یا $\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$	تابع $\boxed{u = e^{\int p(x)\,dx}}$، عامل انتگرال‌ساز معادله بوده و جواب آن به صورت زیر است: $y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int e^{\int p(x)\,dx} \cdot q(x)dx + c\right)$
معادلهٔ برنولی	$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq ۰,۱$ یا $\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)x^n, \quad n \neq ۰,۱$	با تغییر متغیر $\boxed{z = y^{۱-n}}$ به شکل خطی مرتبهٔ اول زیر درمی‌آید: $\boxed{z' + (۱-n)p(x)z = (۱-n)q(x)}$
معادلهٔ ریکاتی	$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^۲$	اگر $y_۱(x)$ جواب خاص معادله باشد، با جایگذاری $\boxed{y = y_۱ + \frac{۱}{u}}$ و در نتیجه $\boxed{y' = y_۱' - \frac{u'}{u^۲}}$ به شکل خطی مرتبهٔ اول درمی‌آید.
معادلهٔ کلرو	$y = xy' + f(y')$	با جایگذاری $\boxed{y' = c}$، جواب $\boxed{y = cx + f(c)}$ می‌شود.
معادله لاگرانژ	$y = xf(y') + g(y')$	ابتدا با فرض $y' = p$، از طرفین معادله مشتق گرفته و سپس طرفین معادله را بر $(p - f(p))\frac{dp}{dx}$ تقسیم کرده تا معادله خطی مرتبه اول نسبت به x با جواب $x = \varphi(p,c)$ حاصل می‌شود. جواب نهایی برابر $\boxed{\begin{cases} y = xf(y') + g(y') \\ x = \varphi(p,c) \end{cases}}$ است.

نکته (۲-۱): اگر در معادله‌ی لاگرانژ $p - f(p)$ ریشه داشته باشد، با توجه به ریشه‌ها معادله دارای جواب‌های غیرعادی است.

نکته ۲-۲(روش کاهش مرتبه): هر معادله به صورت $F(x,y',y'')=0$ را **مرتبهٔ دوم فاقد y** می‌نامیم، که با جایگذاری $p=y'$ به صورت معادلهٔ مرتبهٔ اول $\boxed{F\left(x,p,p'=\frac{dp}{dx}\right)=0}$ در می‌آید. همچنین هر معادله به صورت $F(y,y',y'')=0$ را **مرتبهٔ دوم فاقد x** می‌نامیم، که با جایگذاری $p=y'$ به صورت معادلهٔ مرتبهٔ اول $\boxed{F\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0}$ در می‌آید.

نکته ۲-۳: اگر بتوان یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول از درجه‌ی n را به n عامل خطی نسبت به y' به صورت زیر تجزیه نمود:

$$\boxed{\left(y'-q_1(x,y)\right)\left(y'-q_2(x,y)\right)\cdots\left(y'-q_n(x,y)\right)=0}$$

آنگاه با حل هر یک از معادلات $\boxed{\left(y'-q_i(x,y)\right)=0}$ جواب عمومی زیر حاصل می‌شود:

$$\boxed{\psi_1(x,y,c_1)\psi_2(x,y,c_2)\cdots\psi_n(x,y,c_n)=0}$$

نکته ۲-٤: جهت محاسبهٔ معادله دیفرانسیل متناظر با دستهٔ منحنی‌های $f(x,y,c)=0$، باید از این دستهٔ منحنی‌ها به گونه‌ای مشتق‌گیری نمود که پارامتر c حذف شود. همچنین جهت محاسبهٔ معادله دیفرانسیل دستهٔ منحنی‌های متعامد، پس از مشتق‌گیری به جای y'، مقدار $\frac{-1}{y'}$ و به جای $\frac{rd\theta}{dr}$، مقدار $\frac{-dr}{rd\theta}$ را جایگذاری می‌کنیم.

نکته ۲-۵: منحنی $y=\phi(x)$ را پوش دستهٔ منحنی‌های $f(x,y,c)=0$ می‌نامیم، هرگاه با هر منحنی از این خانواده در حداقل یک نقطه مماس باشد. منحنی پوش از حذف پارامتر c در دستگاه $\boxed{\begin{cases} f(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial c}(x,y,c)=0\end{cases}}$ حاصل می‌شود. پوش دسته منحنی‌ها در واقع به نوعی جواب منفرد (غیرعادی) است.

نکته ۲-٦: اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$، کامل نباشد، در حالات زیر، عامل انتگرال‌ساز $u=u(x,y)$ را داریم:

شرط وجود عامل انتگرال‌ساز	عامل انتگرال‌ساز
$\boldsymbol{\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=p(x)}$	$u=e^{\int p(x)\,dx}$
$\boldsymbol{\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=q(y)}$	$u=e^{\int q(y)\,dy}$
$\boldsymbol{\frac{1}{Ny-Mx}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=p(z),\qquad z=xy}$	$u=e^{\int p(z)\,dz}$
$\boldsymbol{\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=q(z),\qquad z=x+y}$	$u=e^{\int q(z)\,dz}$

نکته ۲-۷: گاهی اوقات معادله دیفرانسیل غیرکامل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$، دارای عامل انتگرال‌ساز $u=x^m y^n$ بوده که در آن مقادیر مجهول m و n ثابت‌های مناسبی هستند. این حالت معمولا زمانی که توابع M و N گویا و بویژه چندجمله‌ای باشند، رخ می‌دهد.

فصل ۳: معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر:

نکتهٔ ۳-۱(جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت همگن $\boldsymbol{ay''+by'+c=0}$):

الف) ابتدا معادلهٔ کمکی(مفسر، شاخصی) $aD^2+bD+c=0$ را حل کرده و ریشه‌های آن یعنی m_1 و m_2 را محاسبه می‌کنیم.

ب) با توجه به علامت $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$، سه حالت و سه جواب عمومی زیر رخ می‌دهد:

Δ	نوع ریشه‌ها	جواب عمومی
$\boldsymbol{\Delta>0}$	معادلهٔ کمکی دو ریشهٔ حقیقی و متمایز m_1 و m_2 دارد.	$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$
$\boldsymbol{\Delta=0}$	معادلهٔ کمکی ریشهٔ مضاعف $m_1=m_2=m$ دارد.	$y=c_1e^{mx}+c_2x\,e^{mx}=(c_1+c_2x)e^{mx}$
$\boldsymbol{\Delta<0}$	معادلهٔ کمکی دو ریشهٔ مختلط $\alpha\pm i\beta$ دارد.	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

سه روش برای حل معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن موجود است:
- ۱) روش ضرایب نامعین
- ۲) روش تغییر پارامتر
- ۳) روش عملگرهای معکوس

نکتهٔ ۳-۲(روش ضرایب نامعین): در این روش ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن یعنی $\boxed{y_c = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n}$ را محاسبه می‌کنیم. حال جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مرتبهٔ n-اُم $\boxed{a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0 = f(x)}$، در صورتی که $\boxed{f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]}$ و نیز $P_m(x)$ و $Q_n(x)$ به ترتیب چندجمله‌ای‌های درجهٔ m و n باشند، برابر است با:

$$\boxed{y_p = x^se^{\alpha x}[P_k(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x]}$$

که در آن $k = \max\{m, n\}$ و نیز s مرتبهٔ تکرار ریشهٔ $\alpha + \beta i$ در معادلهٔ کمکی معادله است.

تعریف: منظور از رونسکین(ورونسکی) توابع y_1، y_2، . . . ، y_n که با w و یا $w(y_1, \dots, y_n)$ نشان داده می‌شود، دترمینان زیر است:

$$w(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

توابع y_1، y_2، . . . ، y_n مستقل خطی‌اند، اگر و تنها اگر $w \neq 0$ باشد.

نکتهٔ ۳-۳(روش تغییر پارامتر): در این روش ابتدا جواب عمومی معادلهٔ همگن یعنی y_c را محاسبه می‌کنیم. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $\boxed{y'' + ay' + by = f(x)}$، اگر $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ و w رونسکین y_1 و y_2 باشد، برابر است با:

$$\boxed{y_p = -y_1\int \frac{f(x)y_2}{w}dx + y_2\int \frac{f(x)y_1}{w}dx}$$

همچنین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ n-اُم $\boxed{a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0 = f(x)}$، اگر $y_c = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ و w رونسکین توابع y_1، y_2، . . . ، y_n باشد، برابر است با:

$$\boxed{y_p = \sum_{i=1}^{n} y_i \int \frac{f(x)w_i}{w}dx}$$

که در آن w_i از جایگذاری بردار ستونی $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ در ستون i-اُم w حاصل می‌شود. در نهایت جواب معادله برابر $\boxed{y = y_c + y_p}$ است.

نکتهٔ ۳-٤(روش عملگرهای معکوس): در این روش ابتدا با جایگذاری عملگر $D = \frac{d}{dt}$ در معادله، عملگر مشتقگیری $F(D)$ مرتبط با معادله و در نتیجه عملگر معکوس $\boxed{F^{-1}(D) = \frac{1}{F(D)}}$ را محاسبه می‌کنیم. درواقع در معادله دیفرانسیل $\boxed{F(D)y = f(x)}$، جواب خصوصی برابر $\boxed{y_p = \frac{1}{F(D)}[f(x)]}$ بوده که به کمک قوانین مرتبط با عملگر معکوس که در جدول زیر آمده، قابل محاسبه است:

1) $\boldsymbol{F(D)[e^{ax}u(x)] = e^{ax}F(D+a)u(x)}$	2) $\boldsymbol{F(D)[ce^{ax}] = ce^{ax}F(a)}$	3) $\boldsymbol{\frac{1}{F(D)}[ce^{ax}] = \frac{ce^{ax}}{F(a)}}$
٤) $\frac{1}{F(D)}[e^{ax}u(x)] = e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}u(x)$	٥) $\frac{1}{F(D)}[c] = \frac{c}{F(0)}$	6) $\boldsymbol{\frac{1}{F(D^2)}[c\cos ax] = \frac{c\cos ax}{F(-a^2)}}$
٧) $\frac{1}{F(D^2)}[c\sin ax] = \frac{c\sin ax}{F(-a^2)}$	8) $\boldsymbol{\frac{1}{(D-a)^sg(D)}[ce^{ax}] = \frac{cx^se^{ax}}{s!\,g(a)},\quad g(a) \neq 0}$	

۹) $\frac{1}{F(D)}[x f(x)] = x\frac{1}{F(D)}f(x) - \frac{F'(x)}{[F(D)]^2}f(x)$	$\mathbf{10)}\ \boldsymbol{D^{-k}u = \frac{1}{D^k}u = \iint \cdots \int u\,(dx)^k}$

نکتهٔ ۳-۵: اگر در معادله دیفرانسیل $F(D)y = f(x)$ تابع $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی n باشد، جواب خصوصی برابر $y_p = \frac{1}{F(D)}[f(x)]$ بوده، که برای محاسبه‌ی آن لازم است عمل تقسیم $\frac{1}{F(D)}$ را تا جایی ادامه دهیم تا خارج قسمتی از درجه‌ی حداقل n حاصل شود.

نکتهٔ ۳-۶: منظور از **معادلهٔ کشی-اویلر (معادلهٔ همبُعد یا نقص بعد) مرتبهٔ n-اُم** همگن، معادله دیفرانسیل خطی به صورت زیر است:

$$(x-c)^n y^{(n)} + a_{n-1}(x-c)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x-c)y' + a_0 y = 0$$

بویژه در حالت مرتبهٔ دوم به صورت $\boxed{(x-c)^2y'' + a(x-c)y' + by = 0}$ درمی‌آید. این معادله با تغییر متغیر $\boxed{x-c=e^t}$ به صورت خطی با ضرایب ثابت نسبت به متغیر t درمی‌آید. بویژه در حالت مرتبهٔ دوم به صورت زیر درمی‌آید:

$$\big(D^2 + (a-1)D + b\big)Y(t) = 0, \qquad D = \frac{d}{dt}$$

در مراتب بالاتر، با تغییر متغیر $\boxed{x-c=e^t}$ کافی است جایگذاری $\boxed{(x-c)^n y^{(n)} = D(D-1)\cdots(D-n+1)Y(t)}$ انجام شود.

نکتهٔ ۳-۷: <u>معادلات کشی-اویلر ناهمگن</u> را می‌توان پس از تغییر متغیر $\boxed{x-c=e^t}$ به کمک روش تغییر پارامتر، ضرایب نامعین و یا عملگر معکوس حل نمود.

فصل ۴: تبدیل لاپلاس

تعریف: <u>**تابع گاما**</u> را برای $x > 0$ به صورت $\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt}$ تعریف نموده، که دارای ویژگی‌های زیر است:

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$	$\Gamma(n+1) = n!$	$\Gamma(1) = 1$	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

تعاریف: اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[0,\infty)$ تعریف شده و s عدد حقیقی نامنفی باشد، آنگاه <u>تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$</u> را با $F(s)$ و یا $\mathcal{L}\{f(x)\}$ نمایش داده و به صورت انتگرال زیر(در صورت وجود) تعریف می‌کنیم:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(x)$ باشد، آنگاه تابع $f(x)$ را <u>تبدیل معکوس (وارون) لاپلاس تابع $F(s)$</u> نامیده و آن را با $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ نشان می‌دهیم. اگر c عدد حقیقی نامنفی باشد، تابع $u_c(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < c \\ 1, & x \ge c \end{cases}$ را <u>تابع پله‌ای واحد</u> و یا <u>تابع هویساید</u> می‌نامیم. در برخی منابع تابع پله‌ای واحد را به صورت $u(x) = h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$ تعریف نموده و به کمک آن تساوی $u_c(x) = u(x-c)$ را داریم. <u>کانولوشِن</u> یا <u>پیچِش</u> دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با نماد $(f*g)(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x g(x-t)f(t)dt}$$

با فرض آنکه $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$ n عددی طبیعی، c و α اعداد حقیقی نامنفی و c_1 و c_2 ثابت‌هایی حقیقی باشند، روابط زیر را داریم:

$\boldsymbol{\mathcal{L}\{c_1f(x) + c_2g(x)\} = c_1\mathcal{L}\{f(x)\} + c_2\mathcal{L}\{g(x)\}}$	$\boldsymbol{\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0}$	$\boldsymbol{\mathcal{L}\{x^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad s > 0}$
$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F(s) + c_2G(s)\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$	$\mathcal{L}\{\sin \alpha x\} = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}, \quad \lvert s\rvert < \alpha$	$\boldsymbol{\mathcal{L}\{\sinh \alpha x\} = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}, \lvert s\rvert > \alpha}$
$\mathcal{L}\{e^{\alpha x}f(x)\} = F(s-\alpha), \qquad s > \alpha$	$\mathcal{L}\{\cos \alpha x\} = \frac{s}{s^2+\alpha^2}, \lvert s\rvert < \alpha$	$\boldsymbol{\mathcal{L}\left\{x^{-\frac{1}{2}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0}$
$\mathcal{L}\{u_c(x)f(x-c)\} = e^{-cs}F(s), \qquad s > 0$	$\mathcal{L}\{\cosh \alpha x\} = \frac{s}{s^2-\alpha^2}, \lvert s\rvert > \alpha$	$\boldsymbol{\mathcal{L}\{f*g\} = F(s)G(s)}$
$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{y\} - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$	$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)$	$\boldsymbol{\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)}$

$\mathcal{L}\{f(cx)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^\infty F(t)dt$	$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$	$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$

نکته ٤-١: جهت محاسبهٔ تبدیل لاپلاس توابع چندضابطه‌ای همچون $f(x) = \begin{cases} f_0(x), & 0 \le x < c_0 \\ f_1(x), & c_0 \le x \le c_1 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \ge c_n \end{cases}$، از تابع پله‌ای واحد به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(1 - u_{c_0}(x)\right)f_0(x) + \left(u_{c_0}(x) - u_{c_1}(x)\right)f_1(x) + \left(u_{c_1}(x) - u_{c_2}(x)\right)f_2(x) + \cdots + u_{c_n}(x)f_n(x)$$

$$= f_0(x) + \left(f_1(x) - f_0(x)\right)u_{c_0}(x) + \left(f_2(x) - f_1(x)\right)u_{c_1}(x) + u_{c_n}(x)f_n(x)$$

نکتهٔ ٤-٢: جهت محاسبهٔ تبدیل معکوس توابع می‌توان از تکنیک‌های انتگرال‌گیری، بویژه روش تجزیهٔ کسرها استفاده نمود.

نکتهٔ ٤-٣(حل معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه به کمک تبدیل لاپلاس):

١. ابتدا با فرض آنکه $\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s)$ است، از معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

٢. با جایگذاری شرایط اوّلیه، مقدار تابع $Y(s)$ را محاسبه می‌کنیم.

٣. از آنجا که $\boxed{y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}}$ است، با محاسبهٔ تبدیل معکوس لاپلاس تابع $Y(s)$، جواب معادله حاصل می‌شود.

فصل ۵: حل معادله دیفرانسیل با استفاده از سری‌های توانی:

هر سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ را سری توانی به مرکز x_0 می‌نامیم. سری $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ را بسط تیلور $f(x)$ حول x_0 می‌نامیم. اگر در این سری تیلور، $x_0 = 0$ باشد، آن را بسط مکلورن تابع $f(x)$ می‌نامیم. در زیر بسط مکلورن برخی توابع آمده است:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \lvert x\rvert < \infty$	$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \lvert x\rvert < \infty$	$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \lvert x\rvert < \infty$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \lvert x\rvert < 1$	$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \lvert x\rvert < \infty$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \lvert x\rvert < \infty$

اگر سری تیلور $f(x)$ حول x_0، یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$، در یک همسایگی از x_0 مانند $(x_0 - R, x_0 + R)$ موجود و به $f(x)$ همگرا باشد، تابع $f(x)$ را در نقطهٔ x_0 تحلیلی می‌نامیم. نقطهٔ x_0 را نقطهٔ معمولی(عادی) معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n-اُم زیر می‌نامیم، اگر ضرایب $f_i(x)$ و $g(x)$ در x_0 تحلیلی باشند:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

نقطه‌ای که معمولی نباشد، منفرد(غیرعادی، تکین) نامیده می‌شود.

نکتهٔ ٥-١(جواب سری معادلات دیفرانسیل در نقاط عادی): هر معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبهٔ n-اُم، حول نقطهٔ عادی x_0 دارای جوابی به صورت سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ است، که در آن باید ضرایب a_n را به صورت زیر محاسبه نمود:

الف) اگر $x_0 \neq 0$ است، با استفاده از تغییر متغیر $t = x - x_0$ سری را به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ درآورده و معادله را برحسب متغیر t بازنویسی کنید.

ب) مشتقات سری توانی را تا مرتبهٔ n-اُم محاسبه نموده و در معادله دیفرانسیل خطی داده شده قرار دهید:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \quad \cdots$$

پ) با بازی با اندیس سری‌های توانی در معادله دیفرانسیل، توان‌های $t = (x - x_0)$ در همهٔ سری‌ها را یکسان کنید.

ت) از بالاترین اندیس پایین سری‌های توانی فاکتورگیری نموده و معادله را بر حسب توان‌های مختلف $t = (x - x_0)$ مرتب نمایید.

ث) در صورت وجود توابعی به غیر از چندجمله‌ای در طرف راست معادله سری توانی آن را نوشته و سپس بر اساس تساوی ضرایب توان‌های مختلف $t = (x - x_۰)$ در طرفین معادله به مجموعه‌ای از معادلات، بویژه یک معادلهٔ بازگشتی می‌رسید.
ج) به کمک معادله بازگشتی به دست آمده در قسمت قبلی، ضرایب a_n را بر حسب ضرایبی با کمترین اندیس، همچون $a_۰$ و $a_۱$، محاسبه کنید.

تعاریف: اگر $x_۰$ نقطهٔ منفرد(تکین، غیرعادی) معادله دیفرانسیل خطی همگن $y'' + p(x)y' + q(x) = ۰$ باشد و توابع $(x - x_۰)p(x)$ و $(x - x_۰)^۲ q(x)$ در آن تحلیلی باشند، $x_۰$ را نقطهٔ منفرد منظّم نامیده و در غیر این صورت آن را منفرد غیرمنظّم می‌نامیم.

هر سری به صورت $y = (x - x_۰)^s \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x - x_۰)^n$ را که در آن s عددی حقیقی و یا مختلط است، سری فروبنیوس می‌نامند.

نکتهٔ ۵-۲(جواب سری معادلات دیفرانسیل در نقاط منفرد منظّم): هر معادله دیفرانسیل خطی همگن $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x) = ۰}$، حول نقطهٔ منفرد منظّم $x_۰$ دارای جوابی به صورت سری فروبنیوس $y = (x - x_۰)^s \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x - x_۰)^n$ است، که در آن باید ضرایب a_n را به صورت زیر محاسبه نمود:

الف) ابتدا پس از بررسی منفرد منظّم بودن نقطهٔ $x_۰$، حدود زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{p_۰ = \lim_{x \to x_۰} (x - x_۰)p(x) , \qquad q_۰ = \lim_{x \to x_۰} (x - x_۰)^۲ q(x)}$$

ب) معادله دارای معادلهٔ شاخص $\boxed{s^۲ + (p_۰ - ۱)s + q_۰ = ۰}$ بوده، که پس از تشکیل آن باید ریشه‌های آن موسوم به توان‌های شاخص $s_۱$ و $s_۲$ را محاسبه نمود.

پ) با توجه به توان‌های شاخص $s_۱$ و $s_۲$ و تفاضل آنها سه حالت زیر رخ می‌دهد:

۱. **اگر $s_۱ - s_۲$ عددی غیرصحیح و ناصفر باشد**، معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل به صورت زیر است:

$$y_۱(x) = (x - x_۰)^{s_۱} \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x - x_۰)^n , \qquad y_۲(x) = (x - x_۰)^{s_۱} \sum_{n=۰}^{\infty} b_n (x - x_۰)^n$$

۲. **اگر $s_۱ - s_۲$ عدد صحیح مثبتی باشد**، معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل به صورت زیر است:

$$\boxed{y_۱(x) = (x - x_۰)^{s_۱} \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x - x_۰)^n , \qquad y_۲(x) = K\, y_۱(x) \ln(x - x_۰) + (x - x_۰)^{s_۱} \sum_{n=۰}^{\infty} b_n (x - x_۰)^n}$$

۳. **اگر $s_۱ - s_۲$ صفر شود، یعنی $s_۱ = s_۲ = s$ ریشهٔ مضاعف باشد**، معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل به صورت زیر است:

$$\boxed{y_۱(x) = (x - x_۰)^{s} \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x - x_۰)^n , \qquad y_۲(x) = y_۱(x) \ln(x - x_۰) + (x - x_۰)^{s} \sum_{n=۱}^{\infty} b_n (x - x_۰)^n}$$

در تمامی این حالات، ضرایب a_n، b_n و یا K از جایگذاری این جواب‌ها در معادله دیفرانسیل محاسبه می‌شوند.

معادله دیفرانسیل $\boxed{(۱ - x^۲)y'' - ۲xy' + n(n + ۱)y = ۰}$ را **معادلهٔ لژاندر مرتبهٔ n** می‌نامیم. اگر n عدد صحیح مثبت و $N = \left[\frac{n}{۲}\right]$ باشد، یکی از دو جواب این معادله، چندجمله‌ای زیر موسوم به **چندجمله‌ای لژاندر** است:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=۰}^{N} \frac{(-۱)^k (۲n - ۲k)!}{۲^n k!\,(n - k)!\,(n - ۲k)!}\, x^{n-۲k}}$$

چندجمله‌ای لُژاندر دارای ویژگی‌های مختلفی است، که برخی از آنها در زیر آمده است:

$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n$	**فرمول رودریگز** $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right],$

$\int_{-1}^{1}\left(P_m(x)\right)^2 dx = \frac{2}{2m+1}$	$(\boldsymbol{n+1})\boldsymbol{P_{n+1}(x)} = (\boldsymbol{2n+1})\boldsymbol{xP_n(x)} - \boldsymbol{nP_{n-1}(x)}$

قضیه‌ی بسط لژاندر-فوریه: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-1,1]$ به طور قطعه‌ای پیوسته باشد، و در نقاط ناپیوستگی، مشتق چپ و راست آن موجود باشند، در این صورت در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ در فاصله‌ی $(-1,1)$ می‌توان آن را برحسب چندجمله‌ای لژاندر به صورت $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)}$ بسط داده که در آن ضرایب a_n از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx}$$

معادله دیفرانسیل $\boxed{x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \alpha^2\right)y = 0}$ را **معادلهٔ بِسِل مرتبهٔ $\boldsymbol{\alpha}$** می‌نامیم. جواب این معادله به صورت زیر است:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}$$

که تابع بِسِل نوع اول مرتبهٔ α می‌نامند. اگر α عدد مثبت ناصحیحی باشد، تابع $\boxed{Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}}$ نیز جوابی از معادلهٔ بِسِل است. اما اگر α عددی صحیح باشد، تابع زیر موسوم به تابع بِسِل نوع دوم مرتبهٔ n جوابی از معادلهٔ بِسِل است:

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x)\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

نکتهٔ ۵-۳(**جواب معادلهٔ بِسِل مرتبهٔ α**): اگر α عدد ناصحیحی باشد، جواب عمومی معادلهٔ بِسِل به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{y(x) = c_1J_\alpha(x) + c_2J_{-\alpha}(x)}$$

و اگر $\alpha = n$ عددی صحیح باشد، جواب عمومی معادلهٔ بِسِل به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{y(x) = c_1J_n(x) + c_2Y_n(x)}$$

نکتهٔ ۵-٤ (**ویژگی‌های تابع بِسِل نوع اول $(J_\alpha(x))$**): اگر α عددی حقیقی مثبت و $n = 0,1,2,\ldots$ باشد، داریم:

۱. اگر x_1 و x_2 دو صفر $J_n(x)$ باشند، در بازهٔ $x_1 < x < x_2$ صفری از $J_{n-1}(x)$ و $J_{n+1}(x)$ وجود دارد.

۲. تابع بِسِل $J_0(x)$ برای هر بازه‌ای به طول π، یک صفر دارد.

۳. توابع بِسِل $J_n(x)$ در بازهٔ $(0,\infty)$ بینهایت صفر مثبت حقیقی دارند. این توابع فقط صفرهای حقیقی داشته و نخستین صفر آنها بزرگتر از n است.

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$	$\frac{d}{dx}\left(x^\alpha J_\alpha(x)\right) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$	$\frac{d}{dx}\left(x^{-\alpha} J_\alpha(x)\right) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$

فصل ۶: دستگاه معادلات دیفرانسیل

نکته ٦-۱: هر معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n-اُم $\boxed{F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right) = 0}$ را می‌توان با قرار دادن $\begin{cases} u_1 = y \\ u_2 = y' \\ \vdots \\ u_n = y^{(n-1)} \end{cases}$ به **دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول** زیر تبدیل نمود:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1}' = u_n \\ F(x,u_1,u_2,\ldots,u_n,u_n') = 0 \end{cases}$$

نکته ٦-۲:اگر بتوان یکی از معادلات دستگاه معادلات دیفرانسیل را مستقل از سایر معادلات حل نمود، این معادلهٔ مستقل را حل نموده و جواب آن را در سایر معادلات قرار می‌دهیم.

نکتهٔ ٦-۳ (حل دستگاه دو معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت): دستگاه $\begin{cases} ① \\ ② \end{cases}$ شامل دو معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت را در نظر بگیرید:

۱. ابتدا از یکی از معادلات مشتقگیری نموده و معادلهٔ دوم را در آن قرار می‌دهیم. مثلاً دستگاهی به صورت $\begin{cases} ①' + ② \\ ① \end{cases}$ و یا $\begin{cases} ② \\ ②' + ① \end{cases}$ تشکیل می‌دهیم.

۲. حال ابتدا با ترکیب دو معادلهٔ حاصل به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم بر حسب یک متغیر رسیده و آن را حل می‌کنیم. مثلاً معادلهٔ مرتبهٔ دوم $① + ② + ①'$ و یا $② + ① + ②'$ را حل می‌کنیم.

۳. حال جواب این معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم را در معادله‌ای که از آن مشتقگیری نموده‌ایم قرار داده، تا جواب نهایی حاصل شود.

نکتهٔ ٦-٤(حل دستگاه معادلات به روش عملگرها): فرض کنید $D = \frac{d}{dt}$، عملگر مشتق‌گیری باشد، در این صورت

۱. ابتدا معادلات دستگاه را بر حسب این عملگر بازنویسی می‌کنیم.

۲. به روش حذفی گاوس دستگاه حاصل را ساده نموده و حل می‌کنیم.

لازم به ذکر است که اگر $W(D)$ دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد، آنگاه تعداد پارامترها در جواب عمومی دستگاه برابر با بیشترین توان D در $W(D)$ است، مشروط بر اینکه $W(D) \neq ۰$ باشد.