دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

فصل ۹ – توابع مولد
بخش سوم

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

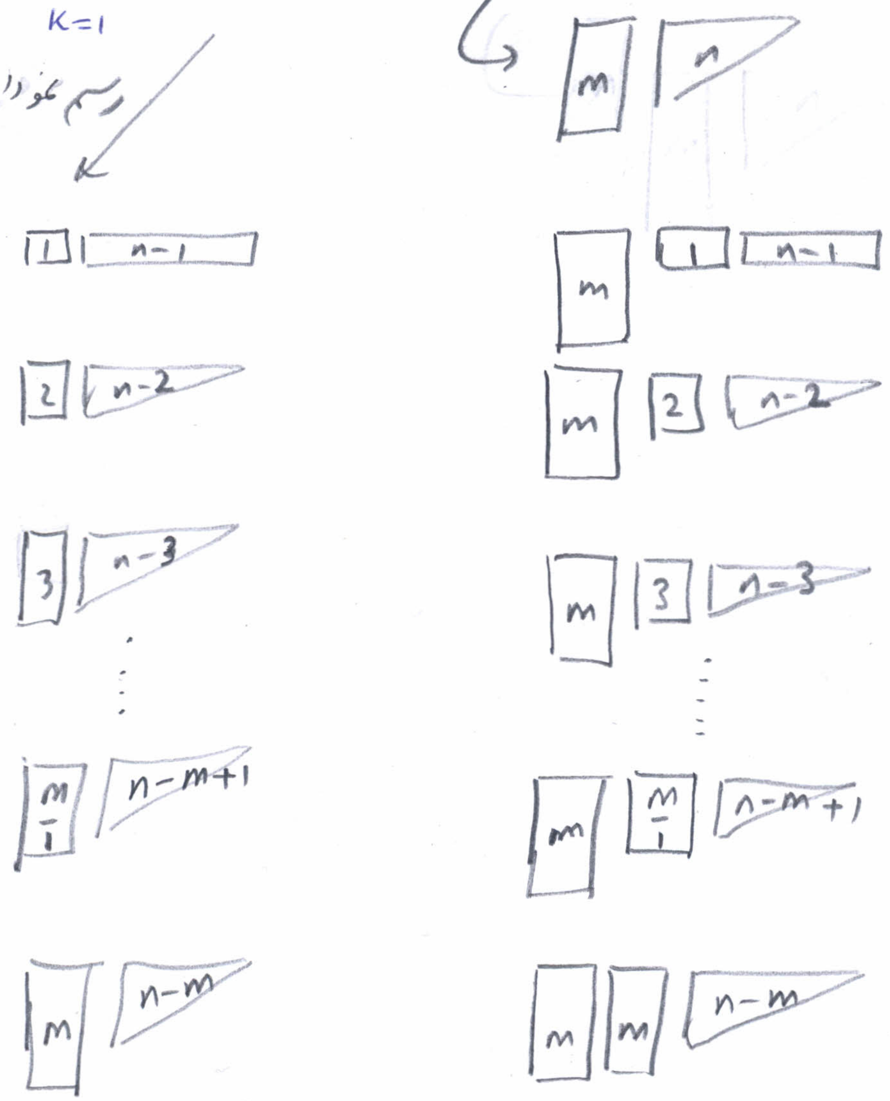
9

Generating Functions

به ازای $n,k \in \mathbb{N}$ و $k \le n$ ، فرض کنید $p(n,k)$ تعداد پارتیشن های عدد n دقیقاً به k جمع وند را نشان دهد ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^{m} p(n,k) = p(n+m,m)$$

رسم نمودار فرز



$p(n,1)$

$p(n,2)$

$p(n,3)$

$\vdots$

$p(n,m-1)$

$p(n,m)$

نمودارهای فرز در سمت راست با سمت چپ در تناظر یک به یک هستند پس تساوی برقرار است.

مثال: $p(5,1)+p(5,2)+p(5,3)=p(8,3)$

سوال ۱۲ تمرینات تکمیلی – صفحهٔ ۵۸۰
(فصل ۹)

فرض کنیم S مجموعهٔ حاوی n شیء متمایز باشد. تحقیق کنید که $\frac{e^x}{(1-x)^k}$ تابع مولد نمایی برای تعداد طرق انتخاب m شیء ($0 \le m \le n$) از اشیای S و توزیع این اشیا بین k ظرف متمایز است درصورتیکه ترتیب اشیا در هر ظرف مهم باشد.

$$S = \{o_1, o_2, \dots, o_m, o_{m+1} \cdots o_n\}$$

فرض کنید m را فعلاً ثابت بگیریم. در اینصورت به $\binom{n}{m}$ طریق می‌توان m شیء را از میان n شیء انتخاب کرد. بعد شیء اول را به k طریق، شیء دوم را به k+1 طریق ... و شیء mام را به k+m-1 طریق می‌توان در k ظرف قرار داد بطوریکه ترتیب اشیا در ظرف مهم باشد.

پس کل حالات می‌شود:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \underbrace{k(k+1)\cdots(k+m-1)}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \times \frac{(k+m-1)!}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m)!} \times \frac{(k+m-1)!}{(k-1)!\,m!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m)!} \times \binom{m+k-1}{m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k-1}{m} \frac{n!}{(n-m)!} \qquad \text{I}$$

حال ضریب $\frac{x^n}{n!}$ را در تابع $\frac{e^x}{(1-x)^k}$ محاسبه می‌کنیم

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right)$$

$$(1-x)^{-k} = \left(\binom{-k}{0}(-x)^0 + \binom{-k}{1}(-x)^1 + \binom{-k}{2}(-x)^2 + \cdots \right)$$

پس ضریب $\frac{x^n}{n!}$ در تابع $\frac{e^x}{(1-x)^k}$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\binom{-k}{0}(-1)^0(1) + \binom{-k}{1}(-1)^1(n) + \binom{-k}{2}(-1)^2(n)(n-1) + \cdots$$

$$+ \binom{-k}{n}(-1)^n n! = \sum_{m=0}^{n} \binom{-k}{m} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{k+m-1}{m} (-1)^m (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{k+m-1}{m} \frac{n!}{(n-m)!} \quad \text{II}$$

$$\text{I} = \text{II}$$

به ازای $n \geq 0$ ، سکه‌ای را $2n$ بار پرتاب می‌کنیم .

الف) اگر a_n تعداد دنباله‌های مرکب از $2n$ پرتاب باشد که در آن‌ها n رو و n پشت است ، a_n را برحسب n بیابید.

$$a_n = \binom{2n}{n}$$

ب) ثابت‌های r ، s و t را چنان بیابید که $(r+sx)^t = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$(r+sx)^t = r^t\left(1+\frac{s}{r}x\right)^t = r^t\left(\binom{t}{0}\left(\frac{s}{r}x\right)^0 + \binom{t}{1}\left(\frac{s}{r}x\right)^1 + \cdots + \binom{t}{n}\left(\frac{s}{r}x\right)^n + \cdots\right)$$

$$= f(x)$$

$$= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$= \binom{2(0)}{0} + \binom{2}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \cdots + \cdots$$

$$= 1 + 2x + 6x^2 + \cdots$$

$\Rightarrow r^t\binom{t}{0}\left(\frac{s}{r}\right)^0 = 1 \leftarrow$ ضرایب جملهٔ صفرم با یکدیگر برابر هستند

$\Rightarrow \boxed{r=1}$

$\Rightarrow r^t\binom{t}{1}\left(\frac{s}{r}\right)^1 = 2 \leftarrow$ ضرایب جملهٔ یکم با یکدیگر برابر هستند

$\Rightarrow r^t t \frac{s}{r} = 2 \Rightarrow ts = 2$ (I)

$\Rightarrow r^t\binom{t}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2 = 6 \leftarrow$ ضرایب جملهٔ دوم با یکدیگر برابر هستند

$\Rightarrow r^t \frac{t(t-1)}{2}\frac{s^2}{r^2} = 6 \Rightarrow t(t-1)s^2 = 12 \Rightarrow s(t-1) = 6$ (II)

$$\frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{s(t-1)}{ts} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow t-1 = 3t \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{2}}, \boxed{s=-4}$$

با جایگذاری r و s و t در $(r+sx)^t$ داریم:

$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ تابع مولد دنباله $\binom{2n}{n}$ است. $(n\geq 0)$

پ) فرض کنیم b_n تعداد دنباله های مرکب از $2n$ پرتاب باشد که در آنها فقط پس از آنکه هر $2n$ پرتاب انجام گرفت، تعداد روها و پشت ها برای نخستین بار برابر شوند.
(مثلاً اگر $n=3$ باشد، در اینصورت HHHTTT و HHTHTT در b_n به حساب می‌آیند، ولی HTHHTT و HHTTHT به حساب نمی‌آیند.)
تعریف می‌کنیم $b_0=0$.

نشان دهید به ازای هر $n\geq 1$ داریم:

$$a_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

منظور از a_n: تعداد دنباله های مرکب از $2n$ پرتاب که در آنها n رو و n پشت است.

می‌توان تعداد این دنباله ها را برحسب زمانی که تعداد روها و پشت ها برای نخستین بار با هم برابر می‌شود افراز کرد:

تعداد حالات بقیه پرتاب ها $\leftarrow a_0 \times b_n \leftarrow$ بعد از $2n$ بار پرتاب برای بار اول یکی شوند

تعداد حالات دو پرتاب دیگر $\leftarrow a_1 \times b_{n-1} \leftarrow$ " " $2(n-1)$ " "

$\vdots \qquad \vdots$

$\leftarrow a_n \times b_0 \leftarrow$ (توجه کنید $b_0=0$ فرض شد)

$$\Longrightarrow a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

ت) فرض کنیم $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. نشان دهید $g(x) = 1-\frac{1}{f(x)}$ ، سپس b_n را به دست آورید برای $n \geq 1$

ابتدا $f(x)\,g(x)$ را محاسبه می‌کنیم

$$f(x) \longrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \cdots\cdots a_n \cdots$$

$$g(x) \longrightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty} \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \cdots\cdots b_n \cdots$$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)\, x^n$$

برای $n \geq 1$ داریم: $a_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$

پس داریم:

$$f(x)\,g(x) = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)\, x^n$$

$$= 0 + \sum_{n=1} a_n x^n$$

$$= 0 + f(x) - a_0$$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x) = f(x) - a_0 = f(x) - 1$$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x) = f(x) - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = 1 - \frac{1}{f(x)}$$

$$g(x) = 1 - \frac{1}{f(x)} = 1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

حال باید به دنبال یافتن ضریب x^n در $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ باشیم.

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \left(\binom{\frac{1}{2}}{0}(-4x)^0 + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-4x)^1 + \dots + \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n + \dots \right)$$

$\Rightarrow$ ضریب جمله nام: $\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n$ $\Rightarrow$ باید ساده شود

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}(-4)^n$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2n}{2}\right)}{n!}(-4)^n$$

$$= \frac{(-1)(1)(3)\cdots(2n-3)}{n!}2^n$$

قبلاً راجع به ساده‌سازی کسر روبرو بحث شده است.

$$\vdots$$

$$= \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}$$

پس ضریب جمله nام در $g(x)$ (یا همان $1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}$) برابر است با:

ضریب جمله x^n در $g(x)$ برابر است با: $\leftarrow$

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n} & n \geq 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$$