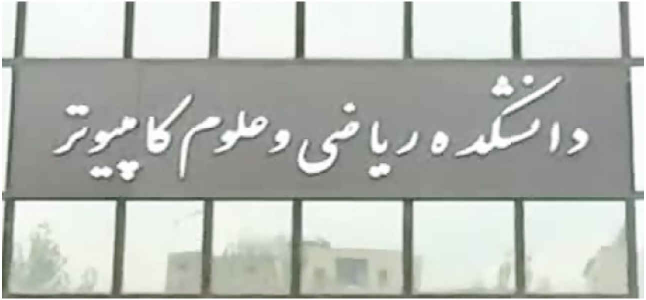
ریاضی عمومی ۲

ارائه دهنده:

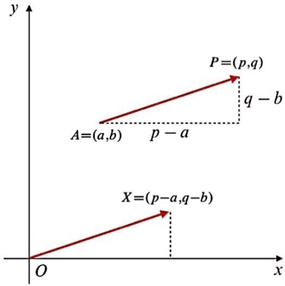
دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



یادآوری هندسه تحلیلی در فضای دوبعدی $\mathbb{R}^2$ و سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$

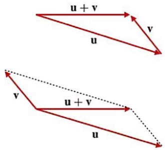


بردار با نقطهٔ ابتدایی A
و نقطهٔ انتهایی P:

جمع برداری:

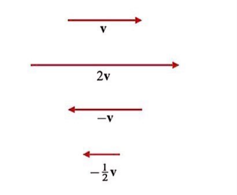
$$\vec{u}=\overrightarrow{(x_1,y_1)}$$
$$\vec{v}=\overrightarrow{(x_2,y_2)}$$

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{(x_1+x_2,y_1+y_2)}$$



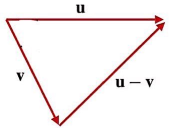
ضرب اسکالر:

$$t \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{(x_1, y_1)}$$
$$t\vec{v} = \overrightarrow{(tx_1, ty_1)}$$



تفاضل بردارها:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



فاصلهٔ دو نقطه $P_0=(x_0,y_0)$ و $P_1=(x_1,y_1)$:

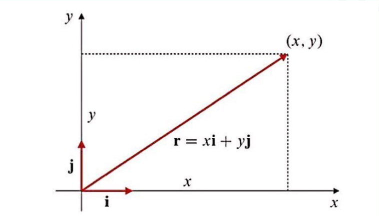
$$|P_0P_1| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

$$|tu| = |t||u|$$

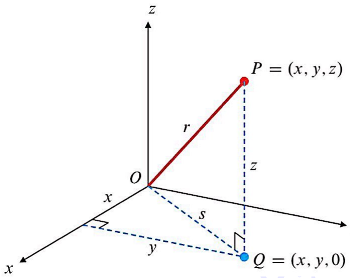
بردار یکه برداری است که طول آن برابر ۱ است. مثل i، $-j$ و $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

اگر $\vec{v}\neq 0$، آنگاه $\hat{v}=\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ برداری یکه است.

$$\vec{r} = (\overrightarrow{x,y}) = x\underbrace{(\overrightarrow{1,0})}_{i}+y\underbrace{(\overrightarrow{0,1})}_{j}$$



یک نقطه مانند P با سه مؤلفه، در $\mathbb{R}^3$ و بردار مکان آن، یعنی r مطابق شکل است.



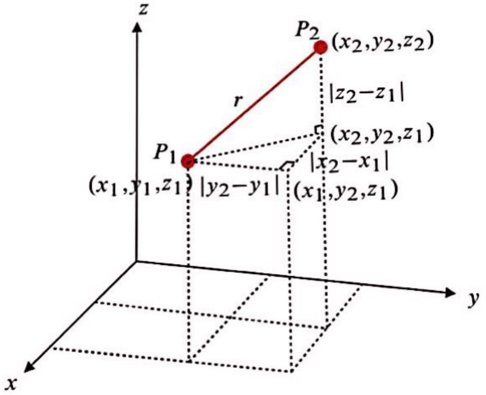
جمع برداری و ضرب اسکالر در $\mathbb{R}^3$ به‌صورت زیر است:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

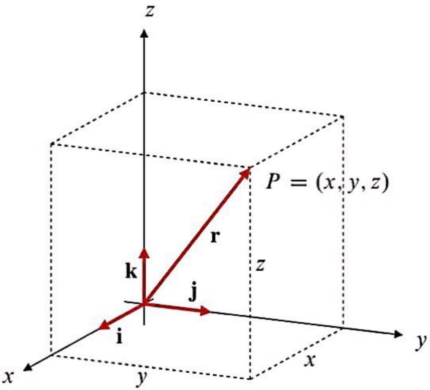
$$t(x, y, z) = (tx, ty, tz); \quad t \in \mathbb{R}$$

فاصلهٔ دو نقطهٔ P_1 و P_2 (مانند شکل) در $\mathbb{R}^3$ عبارتست از:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



در $\mathbb{R}^3$، مطابق شکل، بردارهای یکهٔ $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را داریم:



$$\vec{i} = (1,0,0)$$

$$\vec{j} = (0,1,0)$$

$$\vec{k} = (0,0,1)$$

$$P = xi + yj + zk$$

مثال:

$$\begin{cases} \vec{u} = i - j + 2k \\ \vec{v} = j - k \end{cases}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = i + k$$

$$-2\vec{v} = -2j + 2k$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{6}$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(j - k)$$

ضرب داخلی (یا درونی یا نقطه‌ای):

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

خواص:

1. $u.v = v.u$
2. $u.(v+w) = u.v + u.w$
3. $(t \in \mathbb{R}) \quad (tu).v = t(u.v) = u.(tv)$
4. $u.u = |u|^2$

گزاره

فرض کنید u و v دو بردار در $\mathbb{R}^2$ (یا $\mathbb{R}^3$) باشند و فرض کنید θ زاویهٔ بین آن‌ها باشد $(0 \leq \theta \leq \pi)$. آنگاه:

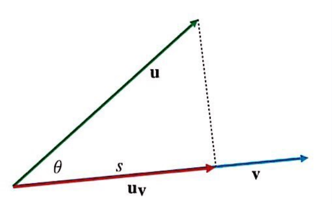
$$u.v = |u||v| \cos\theta$$

بردارهای u و v بر هم عمودند $\Leftrightarrow u.v = 0$.

تصویر بردار:

تصویر بردار $\vec{u}$ بر بردار $\vec{v}$ که آن را با $\vec{u}_v$ نمایش می‌دهیم، با توجه به شکل، به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_v &= (|u|\cos\theta)\frac{\vec{v}}{|v|} \\
&= (|v||u|\cos\theta)\frac{\vec{v}}{|v|^2} \\
&= \left(\frac{u.v}{|v|^2}\right)\vec{v}
\end{aligned}
$$



بنابراین، داریم:

$$\vec{u}_v = \left(\frac{u.v}{|v|^2}\right)\vec{v}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \underset{i=1,\ldots,n}{x_i \in \mathbb{R}}\}$$

فرض کنید $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ و $X = (x_1, \ldots, x_n)$ و $t \in \mathbb{R}$.

$$X + Y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$tX = (tx_1, \ldots, tx_n)$$

$$|Y - X| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

$$X.Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

بردارهای یکه در $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$

(پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$)

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

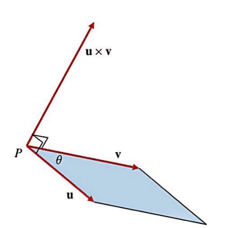
ضرب خارجی:

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) i + (u_3 v_1 - u_1 v_3) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k$$



خواص:

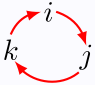
۱) $u.(u \times v) = v.(u \times v) = 0$

۲) $|u \times v| = |u||v| \sin\theta$ (مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط u و v)

به‌ویژه توجه کنید که u و v موازی هستند $\Leftrightarrow u \times v = 0$.

۳) بردارهای u، v، $u \times v$ یک سه وجهی راست دست تشکیل می‌دهند.

۴) $i \times i = j \times j = k \times k = 0$



۵) $i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$

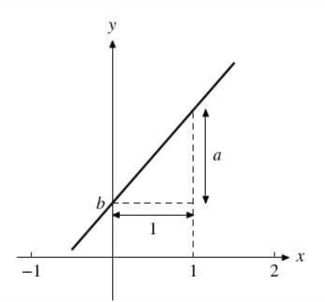
۶) $u \times v = -v \times u$ پادجابه‌جایی

۷) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$

$(v + w) \times u = v \times u + w \times u$

۸) $(tu) \times v = u \times (tv) = t(u \times v)$

خط و صفحه در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$:



$$
\begin{aligned}
L &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\} \\
&= \{(x, ax + b) : x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\underbrace{(x, ax)}_{x(1,a)} + (0, b) : x \in \mathbb{R}\} \\
&= (0, b) + \underbrace{\{x(1, a) : x \in \mathbb{R}\}}_{<(1,a)>}
\end{aligned}
$$

صفحه در $\mathbb{R}^3$:

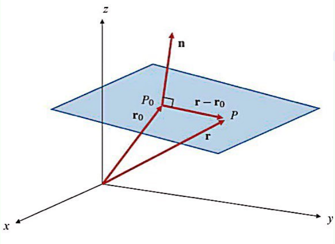
$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{n} = Ai + Bj + Ck$$

صفحهٔ گذرنده از P_0 و عمود بر $\vec{n}$ مجموعهٔ نقاطی مانند $P = (x, y, z)$ است که:

$$(\overrightarrow{P - P_0}).\vec{n} = 0$$

بردار n را بردار نرمال صفحه گوییم.



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$Ax + By + Cz = D$$

که $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

اگر T و R و Q سه نقطه در صفحه‌ای باشند که روی یک خط راست نیستند، آنگاه داریم:

$$u = Q - T \qquad \vec{n} = u \times v$$
$$v = R - T$$

و صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ T و R و Q عبارت است از مجموعهٔ نقاطی مانند P به‌طوری‌که:

$$\vec{n}.(P - Q) = 0$$

مثال

الف) معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از نقطهٔ $P_0 = (1, 0, 1)$ با بردار نرمال $\vec{n} = (1, -2, -1)$:

$$1(x-1) + (-2)(y-0) + (-1)(z-1) = 0 \implies x - 2y - z = 0$$

ب) معادلهٔ صفحهٔ شامل نقاط $Q = (1, 1, 0)$، $R = (1, 0, 1)$ و $T = (0, 1, 1)$:

$$u = Q - T = (1, 0, -1), \quad v = R - T = (1, -1, 0) \implies$$

$$\vec{n} = u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} i$$

$$- \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} j + \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} k = -i - j - k$$

بنابراین، $\vec{n}.((x, y, z) - Q) = 0$، یعنی $-(x-1) - (y-1) - (z-0) = 0$

معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر است.

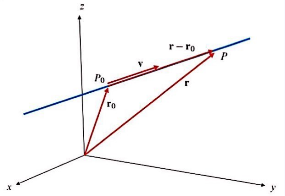
خط در $\mathbb{R}^3$:

می‌خواهیم معادلهٔ خط ℓ، گذرنده از نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ و موازی بردار ناصفر $\vec{v} = ai + bj + ck$ را به‌دست آوریم.

$$P - P_0 = tv$$

$$P = P_0 + tv$$

$$\ell = \{P : P = P_0 + tv; t \in \mathbb{R}\} = P_0 + < v >$$



بردار v را بردار هادی خط گوییم.

معادلهٔ پارامتری خط:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

- اگر $a, b, c \neq 0$ آنگاه:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- اگر $c = 0$، $a, b \neq 0$ داریم:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad z = z_0$$

مثال

الف) معادلهٔ خط گذرنده از $P_0 = (1, 0, -1)$ با بردار هادی $u = (0, 1, -1)$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{یا} \quad x = 1, \frac{y-0}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{یا} \quad P = (1, 0, -1) + t(0, 1, -1)$$

ب) معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $P_0 = (1, 0, -1)$ و $P_1 = (1, 0, 1)$:

$$u = P_1 - P_0 = (0, 0, 2) \implies$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{یا} \quad P = (1, 0, -1) + t(0, 0, 2)$$

مفهوم پایه در $\mathbb{R}^2$:

- بردارهایی ناصفر که هم‌راستا نیستند در $\mathbb{R}^2$ را مستقل خطی گوییم.
- نمادگذاری:

$$< A, B >= \{tA + sB : t, s \in \mathbb{R}\}$$

- اگر A, B دو بردار مستقل خطی باشند، آنگاه:

$$< A, B >= \mathbb{R}^2$$

- به هر دو بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^2$ یک پایه گفته می‌شود.
- مثال: i, j یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

مفهوم پایه در $\mathbb{R}^2$:

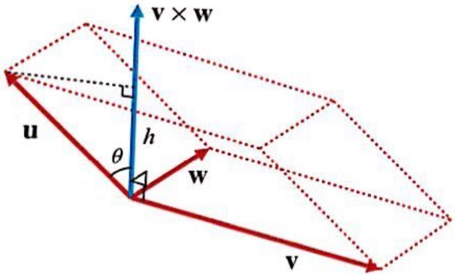
- می‌توان دید که گزاره‌های زیر معادلند:
  1. A و B دو بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^2$ هستند.
  2. اگر $xA + yB = 0$، که x و y اعدادی حقیقی هستند، آنگاه $x = y = 0$.

مفهوم پایه در $\mathbb{R}^3$:

- سه بردار ناصفر $u = (u_1, u_2, u_3)$، $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $w = (w_1, w_2, w_3)$ را در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی گوییم، هرگاه حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط این سه بردار ناصفر باشد یا معادلاً دترمینان ماتریس زیر ناصفر باشد:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

مفهوم پایه در $\mathbb{R}^3$:



- مطابق شکل، دترمینان ماتریس مذکور، برابر است با:

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = |u.(v \times w)|$$

- سه بردار ناصفر مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ را یک **پایه** برای $\mathbb{R}^3$ نیز می‌نامیم.

مفهوم پایه در $\mathbb{R}^3$:

- نمادگذاری:

$$< A, B, C >= \{tA + sB + rC : t, s, r \in \mathbb{R}\}$$

- ثابت می‌شود که اگر A, B, C مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشند، آنگاه:

$$< A, B, C >= \mathbb{R}^3$$

- می‌توان دید که گزاره‌های زیر معادلند:
  1. A, B, C سه بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ هستند.
  2. اگر $xA + yB + zC = 0$، که x, y, z اعدادی حقیقی هستند، آنگاه

$$x = y = z = 0.$$

مثال

نشان می‌دهیم که بردارهای $A = (1,1,0)$، $B = (1,0,1)$ و $C = (0,1,1)$ مستقل خطی (و بنابراین پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$) هستند.

روش اول: کافی است نشان دهیم که دترمینان ماتریس زیر ناصفر است:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

روش دوم: فرض کنید $x, y, z \in \mathbb{R}$ طوری هستند که $xA + yB + zC = \vec{0}$. باید نشان دهیم که $x = y = z = 0$. داریم:

$$xA + yB + zC = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1) = (x+y, x+z, y+z)$$

پس باید $x + y = x + z = y + z = 0$ که نتیجه می‌دهد $x = y = z = 0$.