تمرینات سری دوم: حد و پیوستگی

۱۴ اسفند ۱۴۰۲

سوال1

(آدامز بخش 1-12 سوال 4و5)دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

آ) $f(x,y) = \sqrt{۴x^۲ + ۹y^۲ - ۳۶}$

ب) $f(x,y) = \frac{xy}{x^۲ - y^۲}$

پاسخ سول 1 قسمت (آ)

توابع زیررادیکال همواره مقدار نامنفی دارند، بنابراین $۴x^۲ + ۹y^۲ - ۳۶ \geq ۰$. که نتیجه می‌شود $۴x^۲ + ۹y^۲ \geq ۳۶$ و در نتیجه با تقسیم طرفین بر ۳۶ داریم $\frac{x^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۴} \geq ۱$.
بنابراین دامنه‌ی تابع $f(x,y)$ روی بیضی $\frac{x^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$ و خارج از آن است.

پاسخ سوال 1 قسمت (ب)

یک کسر هنگامیکه مخرجش صفر باشد تعریف نمی‌شود. از آنجا که ریشه‌های مخرج نقاطی هستند که مخرج تابع در آن نقاط صفر می‌شود، دامنه‌ی تعریف چنین توابعی هیچگاه شامل ریشه‌های مخرج نخواهد بود. از حل معادله‌ي $x^۲ - y^۲ = ۰$ داریم:

$$x^۲ = y^۲ \Rightarrow x = y \text{ or } x = -y$$

بنابراین دامنه‌ی تابع $f(x,y)$ برابر است با کل فضای $\mathbb{R}^۲$ به جز نیمساز های ربع اول و سوم و ربع دوم و چهارم.

سوال2

آ) (آدامز بخش 1-12 سوال 34)اگر $z \geq ۰$ و معادله $۴z^۲ = (x-z)^۲ + (y-z)^۲$ متغیر z را به عنوان تابعی از x, y تعریف کند، خم های تراز این تابع را توصیف کنید.

ب) (آدامز بخش 1-12 سوال 37) رویه های تراز تابع $f(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ را توصیف کنید.

پاسخ سوال 2 قسمت (آ)

برای $z(x,y) \geq ۰$ به معادله‌ی دایره‌ای به مرکز (c,c) و شعاع $۲c$ می‌رسیم. دایره‌ای در صفحه‌ی xy که با تغییرz مرکز و مقدار شعاعش نیز تغییر می‌کند. لذا عملا بیضی هایی در صفحات xy با ارتفاع‌های متفاوت داریم. بنابراین خم‌های تراز عملا نیمه‌ی بالایی یک مخروط بیضوی است که محور آن خط $x = y$ است.

پاسخ سوال 2 قسمت (ب)

$x^۲ + y^۲ + z^۲ = c$ ها کره‌هایی به مرکز $(۰,۰,۰)$ و شعاع $\sqrt{c}$ هستند.

سوال3

(آدامز بخش ۲ − ۱۲ سوالات5،6،7،9،10) در هر یک از حد های زیر حد خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید چرا حد وجود ندارد.

آ) $\lim\limits_{(x,y)\to(۱,\pi)} \frac{\cos(xy)}{۱-x-\cos y}$

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,۱)} \frac{x^۲(y-۱)^۲}{x^۲+(y-۱)^۲}$

ج) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \frac{y^۳}{x^۲+y^۲}$

د) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \frac{\sin(xy)}{x^۲+y^۲}$

ه) $\lim\limits_{(x,y)\to(۱,۲)} \frac{۲x^۲-xy}{۴x^۲-y^۲}$

نکته

برای محاسبه‌ی حد توابع از گام‌های زیر پیروی می‌کنیم.
گام اول: نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ داده شده را در تابع جایگذاری می‌کنیم و در صورتیکه پس از انجام تمام ساده سازی‌ها به یک مقدار ثابت رسیدیم، آن مقدار ثابت همان مقدار حد است.
گام دوم: در صورتیکه به یکی از حالت‌های مبهم حدی رسدیم باید رفع ابهام کنیم. برای رفع ابهام در حالت حد توابع یک متغیره می‌توان از قضیه‌ی هوپیتال بهره گرفت. اما در حالت حد توابع دو متغیره یا به اثبات وجود حد پرداخته و یا با آوردن مثال نقض(حداقل 2 مسیر دلخواه که مقادیر حد به ازای آنها متفاوت باشد) می‌پردازیم.
گام سوم: پس از انتخاب مسیر حل سوال در صورتیکه هدف اثبات وجود حد باشد می‌توان از قضیه‌ی فشردگی و یا تعریف ریاضی حد توابع دو متغیره بهره گرفت. همچنین برای راحتی میتوان عبارت حدی داده شده را به کمک انتقال به یک عبارت حدی جدید که در آن $(x_\circ, y_\circ) = (\circ, \circ)$ باشد تبدیل کرد.

یادآوری

در مسیر اثبات حد می‌توان از نامساوی‌های زیر بهره برد.

آ) $|x| \leq \sqrt{x^۲+y^۲}, \ |y| \leq \sqrt{x^۲+y^۲}$

ب) $\frac{x^۲}{x^۲+y^۲} \leq ۱, \ \frac{y^۲}{x^۲+y^۲} \leq ۱$

ج) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$

د) $\sin x \leq ۱, \ \cos x \leq ۱$

ه) $|x \pm y| \leq |x| + |y|, |x \pm y| \geq |x| - |y|$

پاسخ سوال 3 قسمت (آ)

گام اول:

$$\text{I} = \lim_{(x,y)\to(۱,\pi)} \frac{\cos(xy)}{۱-x-\cos y} = \lim_{(x,y)\to(۱,\pi)} \frac{\cos(\pi)}{۱-۱-\cos\pi} = \frac{-۱}{۱-۱-(-۱)} = -۱$$

پاسخ سوال 3 قسمت (ب)

گام اول:

$$I = \lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{x^{۲}(y-۱)^{۲}}{x^{۲}+(y-۱)^{۲}} = \lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{۰^{۲}(۱-۱)^{۲}}{۰^{۲}+(۱-۱)^{۲}} = \frac{۰}{۰}$$

گام دوم: به اثبات وجود حد می‌پردازیم.

گام سوم: از قضیه‌ی فشردگی استفاده می‌کنیم. به کمک انتقال $x = X\ ,\ y-۱ = Y$ داریم:

$$I = \lim_{(X,Y)\to(۰,۰)} \frac{X^{۲}(Y)^{۲}}{X^{۲}+Y^{۲}}$$

همچنین به کمک نامساوی (ب) داریم:

$$۰ \leq \left| \frac{X^{۲}Y^{۲}}{X^{۲}+Y^{۲}} \right| = \left| \frac{X^{۲}}{X^{۲}+Y^{۲}} \right| \left| Y^{۲} \right| \leq \left| Y^{۲} \right|$$

ادامه‌ی پاسخ سوال 3 قسمت (ب)

از طرفین نامساوی فوق وقتیکه (X,Y) به $(0,0)$ میل می‌کند حد می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{(X,Y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} |Y|^{2} = 0.$$

درنتیجه به کمک قضیه‌ی فشردگی $\lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X^{2}Y^{2}}{X^{2}+Y^{2}} = 0$ که نتیجه می‌دهد $l = 0$.

پاسخ سوال 3 قسمت (ج)

گام اول:

$$\text{I} = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y^۳}{x^۲+y^۲} = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{۰^۳}{۰^۲+۰^۲} = \frac{۰}{۰}$$

گام دوم: به اثبات وجود حد می‌پردازیم.
گام سوم: به کمک نامساوی (ب) داریم:

$$۰ \leq \left| \frac{y^۳}{x^۲+y^۲} \right| = \left| \frac{y^۲}{x^۲+y^۲} \right| |y| \leq |y|$$

ادامه‌ی پاسخ سوال 3 قسمت (ج)

از طرفین نامساوی فوق وقتیکه (X, Y) به $(0, 0)$میل می‌کند حد می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0.$$

درنتیجه به کمک قضیه‌ی فشردگی $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0$ که نتیجه می‌دهد $1 = 0$.

پاسخ سوال 3 قسمت (د)

گام اول:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{\sin(xy)}{x^۲+y^۲} = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{\sin(۰)}{۰^۲+۰^۲} = \frac{۰}{۰}$$

گام دوم: به نظر می‌رسد که حد تابع فوق وجود نداشته باشد. اینکه بتوانیم تشخیص دهیم حد تابع وجود دارد یا خیر تنها با تمرین زیاد و دقت به ابزارهای موجود میسر می‌شود. لذا باید حداقل دو مسیر دلخواه متفاوت ارائه دهیم که مقادیر حد برای این دو مسیر متفاوت باشد.

ادامه‌ی پاسخ سوال 3 قسمت (د)

مسیر اول: مسیر $y = x$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$l = \lim_{(x)\to(\circ)} \frac{\sin(x^{۲})}{x^{۲}+x^{۲}} = \lim_{(x)\to(\circ)} \frac{\sin(x^{۲})}{۲x^{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

نکته: در محاسبه‌ی حد فوق از $\lim_{(x)\to(\circ)} \frac{\sin(x)}{x} = ۱$ استفاده کردیم.

مسیر دوم: این بار مسیر $-y = x$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$l = \lim_{(x)\to(\circ)} \frac{\sin(-x^{۲})}{x^{۲}+-x^{۲}} = \lim_{(x)\to(\circ)} \frac{\sin(-x^{۲})}{۲x^{۲}} = \frac{-۱}{۲}$$

بنابراین حد تابع $f(x,y)$ وجود ندارد.

پاسخ سوال 3 قسمت (ه)

گام اول:

$$I = \lim_{(x,y)\to(۱,۲)} \frac{۲x^۲-xy}{۴x^۲-y^۲} = \lim_{(x,y)\to(۱,۲)} \frac{x(۲x-y)}{(۲x-y)(۲x+y)} = \lim_{(x,y)\to(۱,۲)} \frac{x}{۲x+y} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(۱,۲)} \frac{۱}{۲(۱)+۲} = \frac{۱}{۴}$$

سوال4

(آدامز بخش ۲ − ۱۲ سوال 13) تابع $f(x,y) = \frac{x^{۲}+y^{۲}-x^{۳}y^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}}$ را در مبدا چگونه تعریف کنیم تا در همه نقاط صفحه $\mathbb{R}^{۲}$ پیوسته باشد.

پاسخ سوال 4

تابع $f(x,y)$ را در نقطه‌ی (x_0, y_0) پیوسته گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

لذا مقدار تابع در نقطه‌ی $(0,0)$ برابر با حد تابع $f(x,y)$ باشد هنگامیکه (x_0, y_0) به $(0,0)$ میل می‌کند. داریم:

$$1 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} - \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$$

ادامه‌ی پاسخ سوال 4

$$I = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 1 - \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$$

که $I_1 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0$ لذا $f(0,0) = 1$. زیرا:

$$0 \leq \left| \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \left| xy^3 \right| \leq 1.\left| xy^3 \right| = \left| xy^3 \right|$$

ادامه‌ي پاسخ سوال 4

از طرفین نامساوی فوق وقتیکه (x, y) به $(0, 0)$میل می‌کند حد می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy^3 = 0$$

درنتیجه به کمک قضیه‌ی فشردگی $0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} \right|$ که نتیجه می‌دهد $I_1 = 0$.

سوال5

(آدامز بخش ۲ − ۱۲ سوال 14) تابع

$$f(x,y) = \frac{x^{3} - y^{3}}{x - y} \quad (x \neq y)$$

را چگونه بر خط $x = y$ تعریف کنیم که تابع حاصل بر کل صفحه $\mathbb{R}^{2}$ پیوسته باشد.

پاسخ سوال 5

مانند سوال 4 داریم:

$$I=\lim_{y\to x}\frac{x^{۳}-y^{۳}}{x-y}=\lim_{y\to x}\frac{(x-y)\left(x^{۲}+xy+y^{۲}\right)}{x-y}=x^{۲}+x^{۲}+x^{۲}=۳x^{۲}$$

لذا $f(x,x)=۳x^{۲}$.

سوال6

(آدامز بخش ۲ − ۱۲ سوال 20) آیا می توان تابع

$$f(x,y)=\frac{\sin x \sin^{۳} y}{(۱-\cos(x^{۲}+y^{۲}))}$$

را در $(۰,۰)$ طوری تعریف کرد که تابع حاصل در این نقطه پیوسته شود؟ اگر پاسخ مثبت است، این مقدار کدام است؟

پاسخ سوال 6

مسیر$(t, 0) = \gamma_1$ را در نظر بگیرید که حد تابع برابر صفر است. زیرا:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t \times 0}{1 - \cos(t^2)} = \frac{0_{\text{motlagh}}}{0_{\text{hadi}}} = 0.$$

سپس مسیر $(t, t) = \gamma_2$ را در نظر میگیریم و به بررسی حد می پردازیم. برای این منظور:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t \sin^3 t}{(1 - \cos(t^2 + t^2))} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^4 t}{1 - \cos(2t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^4 t}{2\sin^2(t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$

لذا چون حد تابع روی دو مسیر مختلف، متفاوت است، پس تابع در این نقطه حد ندارد و لذا پیوسته هم نیست.

سوال7

در مورد پیوستگی تابع زیر در مبدا بحث کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۳}y^{۲}}{x^{۶}+y^{۴}} & (x,y)\neq(۰,۰),\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰).\end{cases}$$

پاسخ سوال 7

مسیر $\gamma_1 = (t, 0)$ را در نظر بگیرید که حد تابع برابر صفر است . حال مسیر $\gamma_1 = (t, t^{\frac{3}{2}})$ را در نظر میگیریم و به محاسبه حد زیر میپردازیم:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3 t^3}{t^6 + t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{2t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

لذا چون حد تابع روی دو مسیر مختلف، متفاوت است، پس تابع در این نقطه حد ندارد و لذا پیوسته هم نیست.

سوال8

نشان دهید تابع زیر در مبدا پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲\sin^۲(y)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰),\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰).\end{cases}$$

پاسخ سوال 8

توجه داشته باشید که به ازای هر $y \in (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ داریم $\sin^۲ y \leq y^۲$. لذا رابطه زیر برقرار است:

$$\circ \leq \left|\frac{x^۲ \sin^۲ y}{x^۲ + y^۲}\right| \leq \left|\frac{x^۲ y^۲}{x^۲ + y^۲}\right| = \left|\frac{x^۲}{x^۲ + y^۲}\right| |y^۲| \leq |y^۲|$$

طبق قضیه فشردگی:

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} |y^۲| = \circ \to \lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \left|\frac{x^۲ \sin^۲ y}{x^۲ + y^۲}\right| = \circ$$

$$\to \lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \frac{x^۲ \sin^۲ y}{x^۲ + y^۲} = \circ = f(\circ, \circ)$$

لذا تابع فوق، در مبدا پیوسته می باشد.

سوال9

نشان دهید، تابع زیر پیوسته است

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{۱}{y}\right)+y\sin\left(\frac{۱}{x}\right) & x\neq ۰,\quad y\neq ۰, \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

پاسخ سوال 9

توجه داشته باشید که طبق نابرابری مثلثی داریم:$|a+b| \leq |a| + |b|$ و همچنین می دانیم $|\sin(a)| \leq ۱$.

لذا:

$$
\begin{aligned}
\circ \leq \left| x \sin\left(\frac{۱}{y}\right) + y \sin\left(\frac{۱}{x}\right) \right| &\leq \left| x \sin\left(\frac{۱}{y}\right) \right| + \left| y \sin\left(\frac{۱}{x}\right) \right| \\
&= |x| \left| \sin\left(\frac{۱}{y}\right) \right| + |y| \left| \sin\left(\frac{۱}{x}\right) \right| \\
&\leq |x| + |y|
\end{aligned}
$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x| + |y|) = 0 \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$$

$$\to \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

لذا تابع فوق در مبدا پیوسته می باشد.

سوال10

(میانترم نیمسال دوم 98-97) نشان دهید تابع زیر در $(۰,۰)$ پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases} \cos(xy)+\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۱ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

پاسخ سوال 10

از قسمت دوم شروع می کنیم.

$$\circ \leq \left|\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\right| \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\right| = |\sqrt{\frac{x^{۲}y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}}| = |\sqrt{\frac{x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}}||y| \leq |y|$$

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} |y| = \circ \to \lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \left|\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\right| = \circ$$

$$\to \lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} = \circ$$

در نتیجه داریم:

$$\to \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \left(\cos(xy) + \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}\right) = ۱ + ۰ = ۱ = f(۰, ۰)$$

بنابراین تابع در مبدا پیوسته است.

متشکر از توجه شما