

توزیع های توام، شرطی و استقلال متغیرهای تصادفی

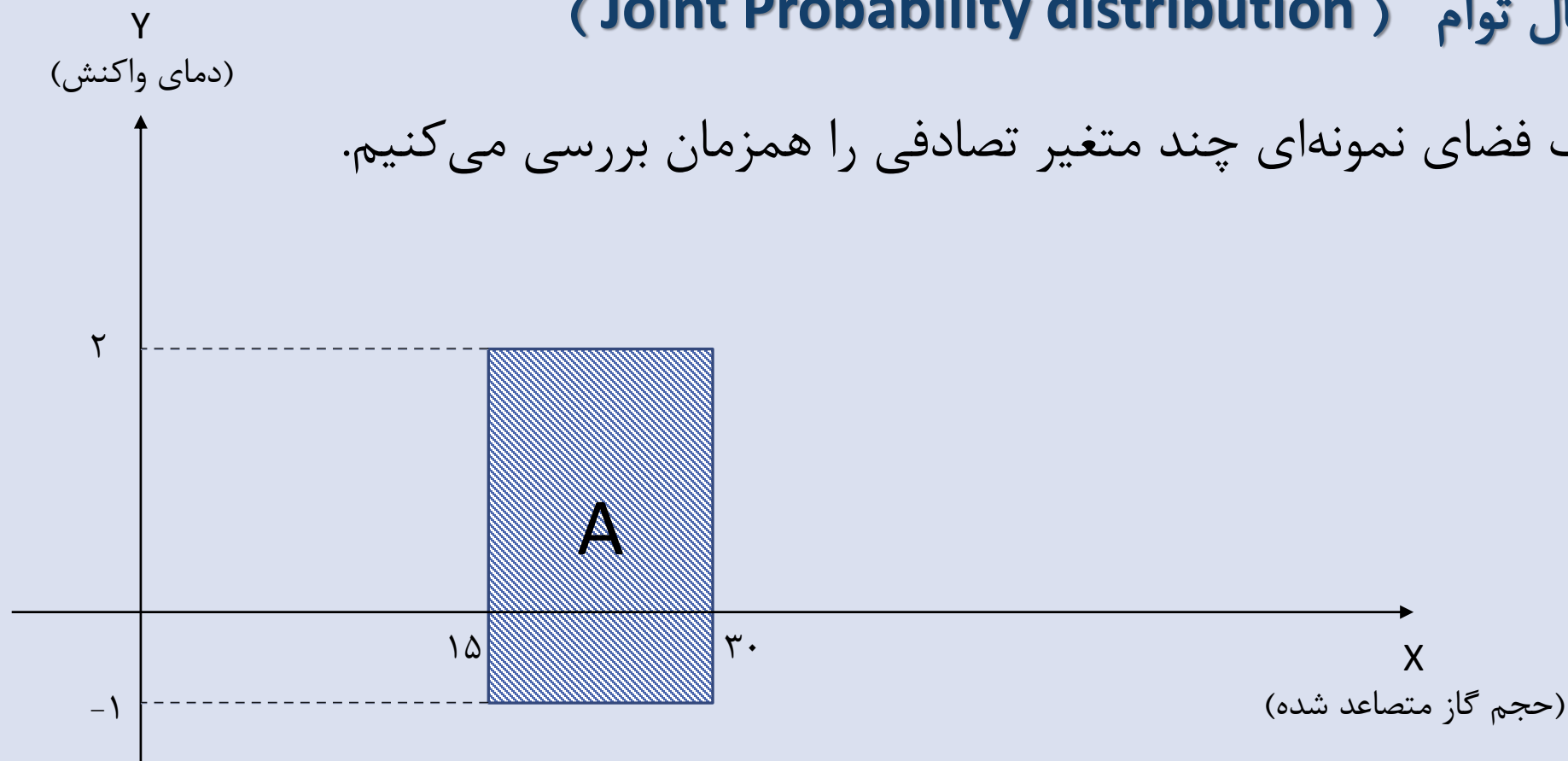
فردوس گرگی

➤ توزیع احتمال توأم (Joint Probability distribution)

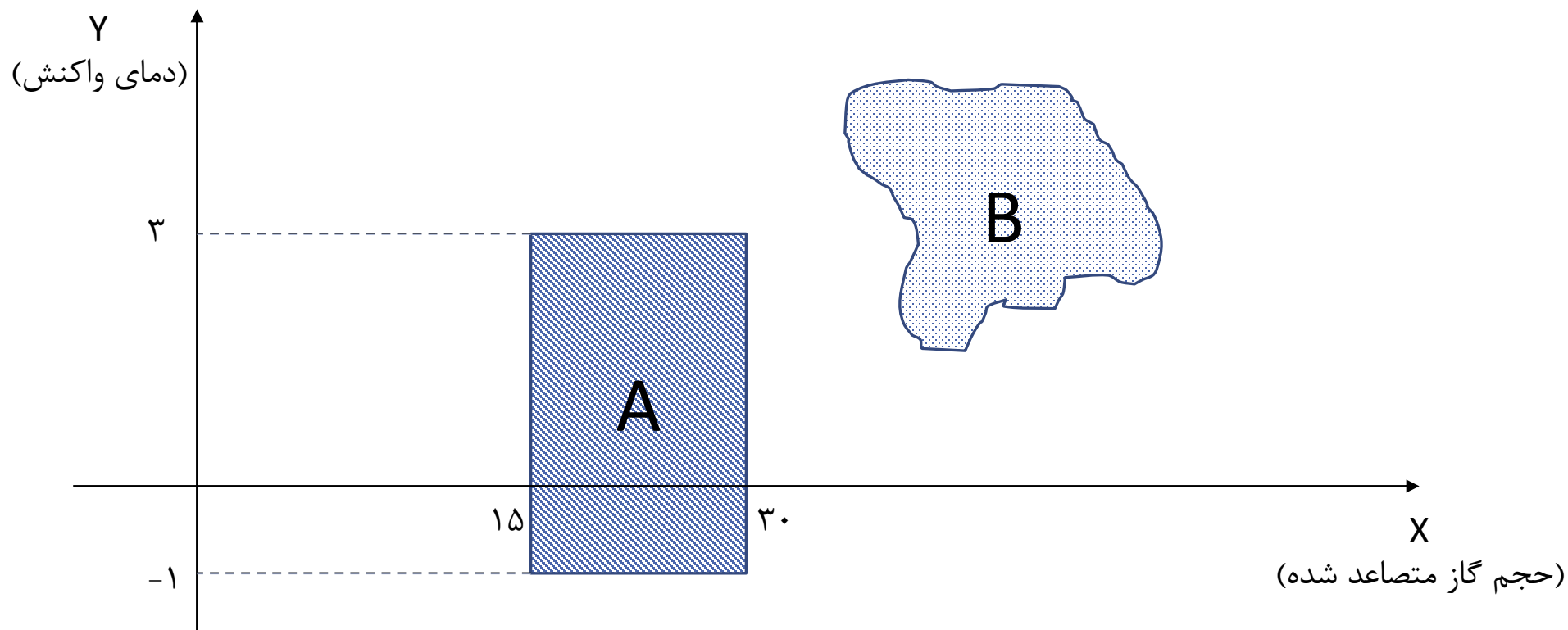
گاهی اوقات در یک فضای نمونه‌ای می‌خواهیم همزمان چند متغیر تصادفی را بررسی کنیم. مثلاً در یک آزمایش شیمیایی، حجم گاز متصاعد شده و دمای واکنش را با هم در نظر می‌گیریم. در چنین حالتی، مثلاً متغیر تصادفی X ، حجم گاز متصاعد شده و متغیر تصادفی Y ، دمای واکنش را نشان می‌دهد. در اغلب موارد، بررسی تک تک این متغیرها اطلاعات کافی بدست نمیدهد. زیرا به یکدیگر وابسته بوده و روی هم اثر دارند. در این حالت از تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y استفاده می‌کنیم که آن را به صورت $f(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

➤ توزیع احتمال توأم (Joint Probability distribution)

وقتی در یک فضای نمونه‌ای چند متغیر تصادفی را همزمان بررسی می‌کنیم.



قسمت هاشورخورده پیشآمد A را نشان می‌دهد که در آن همزمان حجم گاز متصاعد شده بین ۱۵ تا ۳۰ لیتر و دمای واکنش بین ۱- تا ۳ درجه سانتی‌گراد می‌باشد.



➤ تابع احتمال توأم

تعریف : تابع $f(x,y)$ را توزیع احتمال توأم یا تابع جرم احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X و Y گویند اگر:

- 1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x,y) \geq 0$
- 2) $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$
- 3) $P(X = x, Y = y) = f(x,y) \quad (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$

به این ترتیب داریم:

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad : \quad P((x,y) \in A) = \sum \sum_{(x,y) \in A} f(x,y)$$

➤ جدول توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X و Y :

$X \backslash Y$	b_1	b_2	b_r
a_1	$f(a_1, b_1)$	$f(a_1, b_2)$	$f(a_1, b_r)$
a_2	$f(a_2, b_1)$	$f(a_2, b_2)$	$f(a_2, b_r)$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_k	$f(a_k, b_1)$	$f(a_k, b_2)$	$f(a_k, b_r)$
				1

➤ توزیع احتمال حاشیه‌ای

تعریف : توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی گسسته X و Y عبارت است از:

$$f_X(x) = \sum_y f(x, y)$$

$$f_Y(y) = \sum_x f(x, y)$$

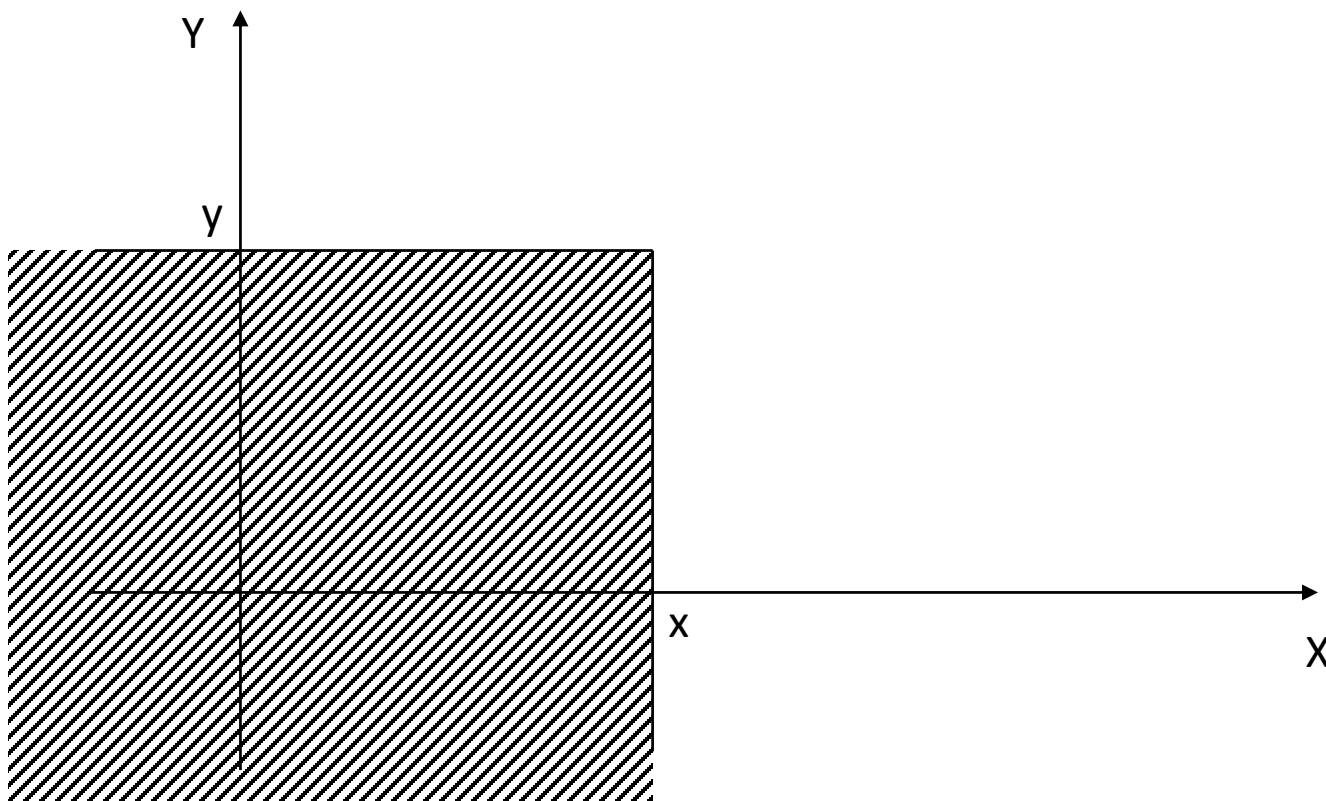
➤ جدول توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X و Y :

$X \backslash Y$	b_1	b_2	b_r	$f_X(x)$
a_1	$f(a_1, b_1)$	$f(a_1, b_2)$	$f(a_1, b_r)$	$f_X(a_1)$
a_2	$f(a_2, b_1)$	$f(a_2, b_2)$	$f(a_2, b_r)$	$f_X(a_2)$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
a_k	$f(a_k, b_1)$	$f(a_k, b_2)$	$f(a_k, b_r)$	$f_X(a_k)$
$f_Y(y)$	$f_Y(b_1)$	$f_Y(b_2)$	$f_Y(b_r)$	1

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \sum_x f(x, y) \\&= f(x_1, y) + f(x_2, y) + \cdots + f(x_k, y) \\&= P(X = x_1, Y = y) + P(X = x_2, Y = y) + \cdots \\&\quad + P(X = x_k, Y = y) \\&= P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y\}) + P(\{X = x_2\} \cap \{Y = y\}) \\&\quad + \cdots + P(\{X = x_k\} \cap \{Y = y\}) \\&= P((\{X = x_1\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}) \cap \{Y = y\})\end{aligned}$$

➤ تابع توزیع تجمعی توأم :

$$F(X,Y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{t \leq x} \sum_{s \leq y} f(t,s)$$



➤ **مثال ۱ :** عدد X را به تصادف از بین اعداد ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ انتخاب می‌کنیم و سپس عدد Y را به تصادف از بین اعداد X و ... و ۱ انتخاب می‌کنیم. تابع احتمال توأم (X, Y) را بیابید. توزیع‌های حاشیه‌ای X و Y را حساب کنید.

راه حل :

$$f(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$$

$$f(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{5} \times 0 = 0$$

$$f(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$f(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$f(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{5} \times 0 = 0$$

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	
						1

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	0	$\frac{1}{5}$
$f_Y(y)$	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{25}$	1

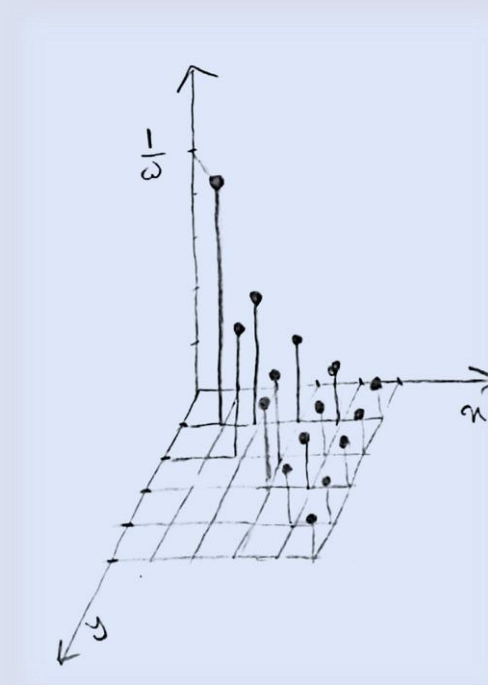
➤ مثال ۲: در مثال ۱، احتمال اینکه Y کمتر از نصف X باشد چقدر است؟

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$
$f_Y(y)$	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{25}$	1

$$P(Y < 1/2 x) = \sum_{x=1}^5 \sum_{y=1}^{\lceil \frac{1}{2}(x+1)-1 \rceil} f(x, y)$$

$$= f(X=3, Y=1) + f(X=4, Y=1) + f(X=5, Y=1) + f(X=5, Y=2)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{59}{300}$$



➤ **مثال ۳:** دوتاس سالم را همزمان پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد ۴ها و Y تعداد ۵های ظاهر شده باشد، تابع توزیع احتمال توأم X و Y را بیابید. با فرض $A = \{(x,y) | 2x + y < 3\}$ ، احتمال $P((x,y) \in A)$ چقدر است؟

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \\ f(0,1) &= \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{8}{36} \\ f(0,2) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \\ f(1,0) &= \frac{8}{36} \\ f(1,1) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36} \\ f(1,2) &= 0 \\ f(2,0) &= \frac{1}{36} \\ f(2,1) &= 0 \\ f(2,2) &= 0 \end{aligned}$$

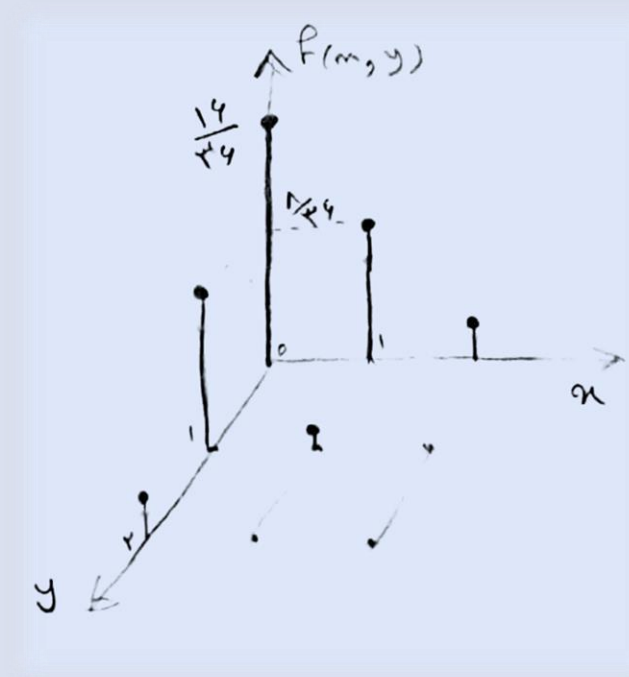
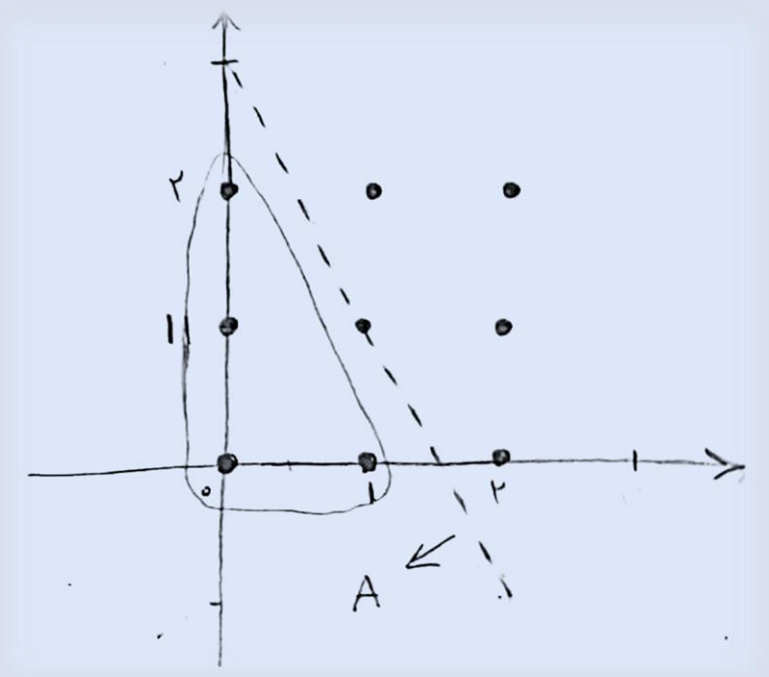
$x \backslash y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$f_Y(y)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$P(2X + Y < 3) = P(Y < 3 - 2X)$$

$x \backslash y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$f_Y(y)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$P(2X + Y < 3) = P(Y < 3 - 2X) = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^{3-2x-1} f(x, y)$$

$$= f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2) + f(1, 0) = \frac{16}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} + \frac{8}{36} = \frac{33}{36}$$



➤ تابع چگالی احتمال توأم:

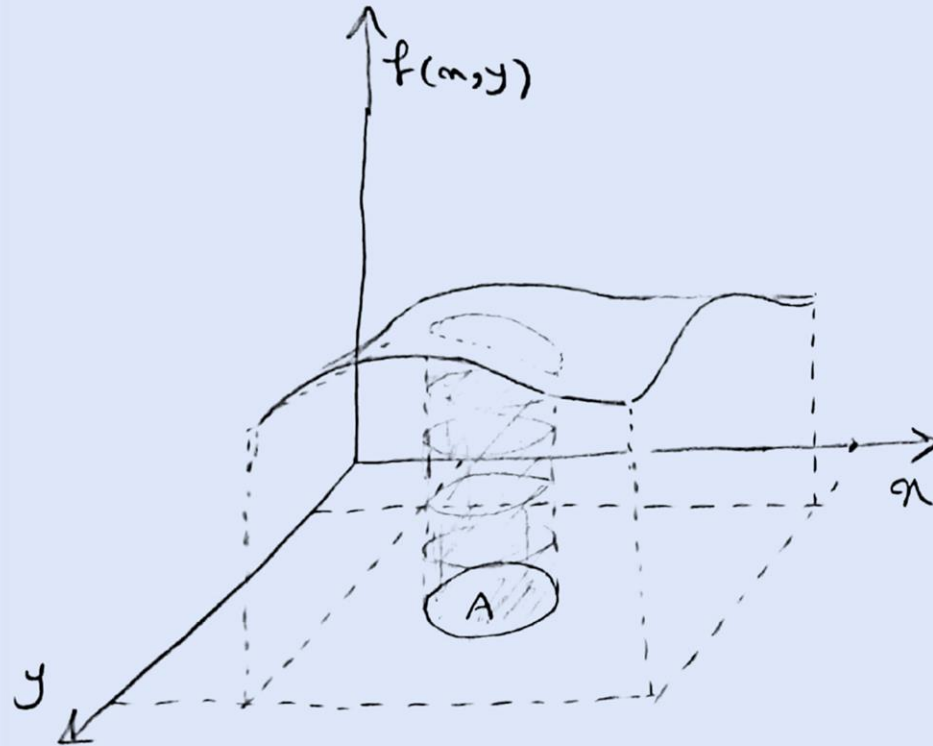
تابع $f(x,y)$ را تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y گوئیم هرگاه:

$$1) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$$

$$3) P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y) dx dy \quad \forall A \in \mathbb{R}^2$$

$$3) P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy \quad \forall A \in \mathbb{R}^2$$





مثال ۴: فرض کنید X زمان انجام یک واکنش شیمیایی و Y درجه حرارتی باشد که در آن واکنش شروع می شود و تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} axy & 0 < x < 1; \ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

الف) مقدار a را بیابید.

ب) احتمال $P(X < Y)$ را بیابید.

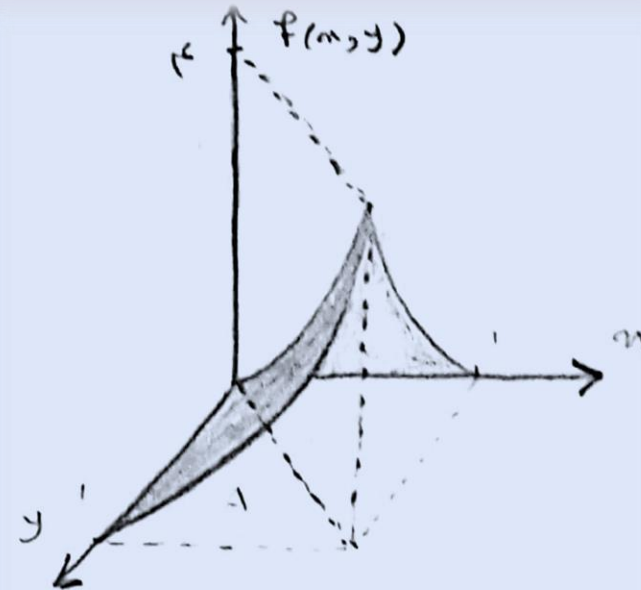
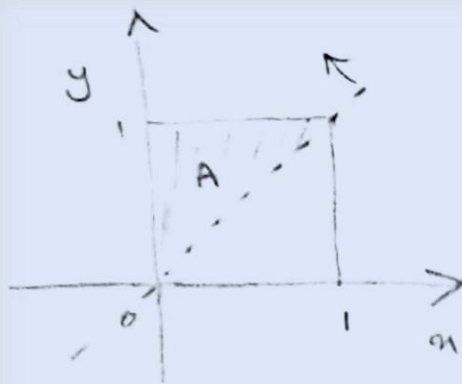
ج) احتمال $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leq Y \leq 1)$ را بیابید.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dx \, dy &= 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \int_0^1 axy \, dx \, dy = 1 \quad \Rightarrow \\ \int_0^1 \left[ay \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right] dy &= 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{ay}{2} \, dy = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{ay^2}{4} \Big|_0^1 = 1 \\ \Rightarrow \frac{a(1)}{4} - 0 &= 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a = 4} \end{aligned}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

➤ ادامه مثال ۴ :

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^y 4xy dx dy = \int_0^1 \left[4y \frac{x^2}{2} \Big|_0^y \right] dy \\ &= \int_0^1 2y^3 dy = \frac{2y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{2}{4} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



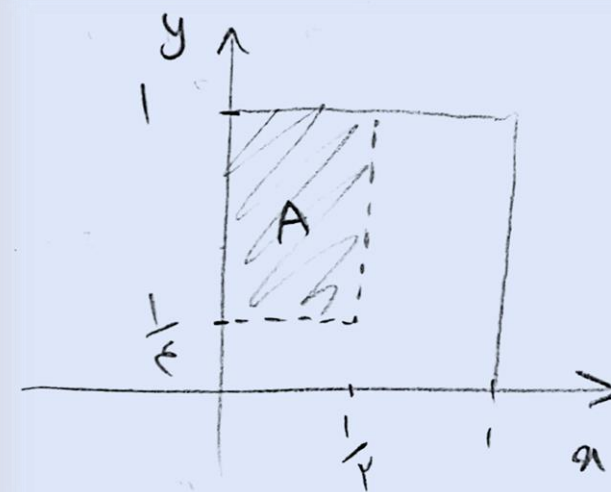
$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

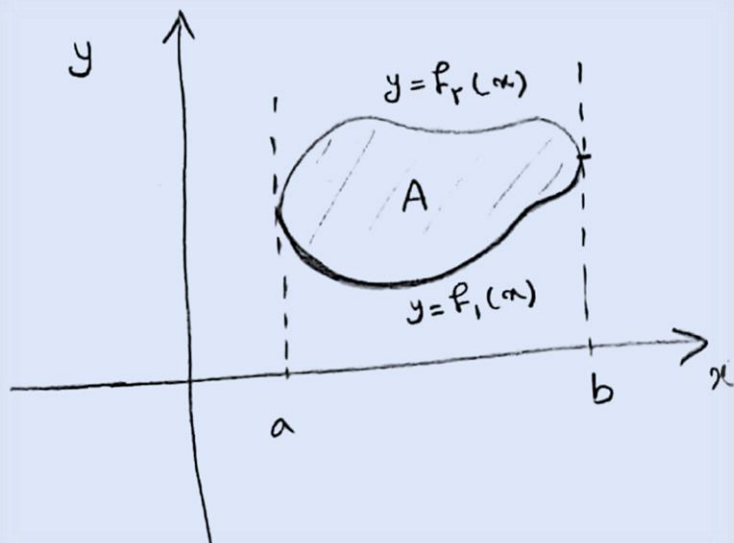
➤ ادامه مثال ۴ :

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leq Y \leq 1\right) = \int_{\frac{1}{4}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x,y) dx dy = \int_{\frac{1}{4}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} 4xy dx dy$$

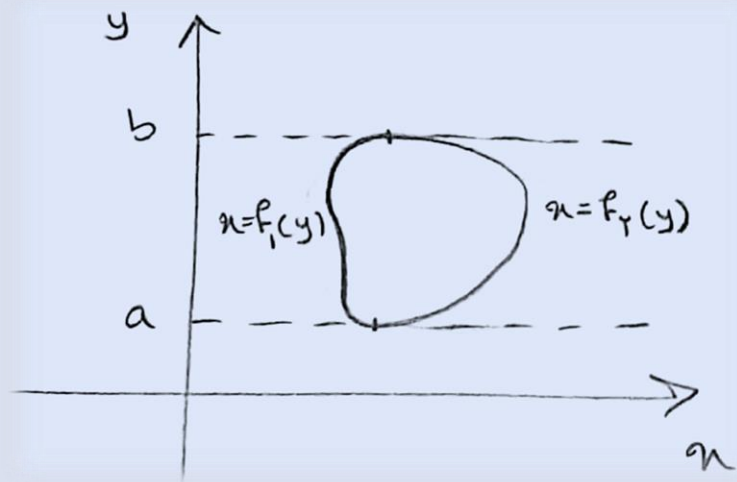
$$= \int_{\frac{1}{4}}^1 \left[4y \frac{x^2}{2} \bigg|_0^{\frac{1}{2}} \right] dy = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{y}{2} dy$$

$$= \frac{y^2}{4} \bigg|_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$





$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx$$



$$\int_a^b \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) dx dy$$

➤ **مثال ۵:** فرض کنید تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{5} + cy & 0 < x < 1; \quad 1 < y < 5 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

ثابت c را بیابید.

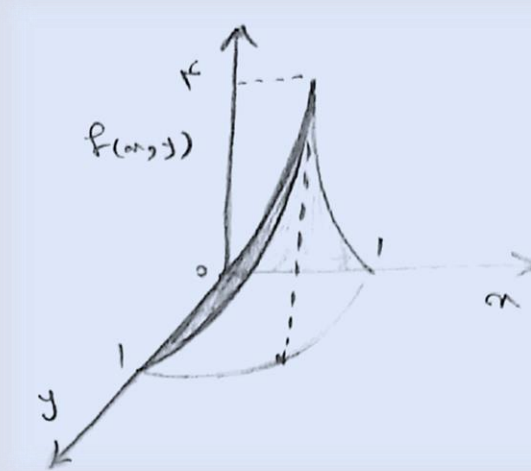
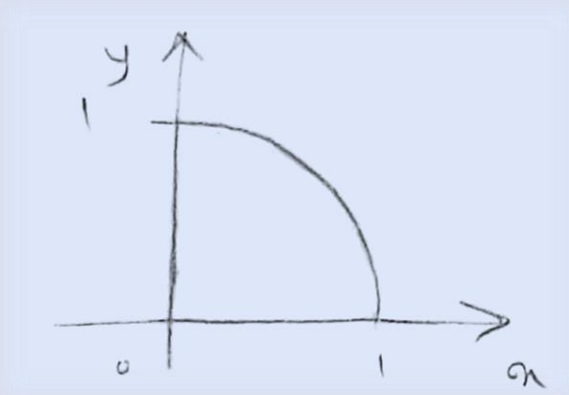
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dx dy &= 1 \quad \Rightarrow \quad \int_1^5 \int_0^1 \left(\frac{x}{5} + cy \right) \, dx dy = 1 \quad \Rightarrow \\ \int_1^5 \left[\frac{x^2}{10} + cxy \right]_0^1 \, dy &= 1 \quad \Rightarrow \quad \int_1^5 \left(cy + \frac{1}{10} \right) \, dy = 1 \quad \Rightarrow \\ \frac{cy^2}{2} + \frac{y}{10} \Big|_1^5 &= 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{25c}{2} + \frac{5}{10} - \frac{c}{2} - \frac{1}{10} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c = 0.05} \end{aligned}$$

➤ **مثال ۶:** فرض کنید تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy & x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

مقدار k را بیابید.

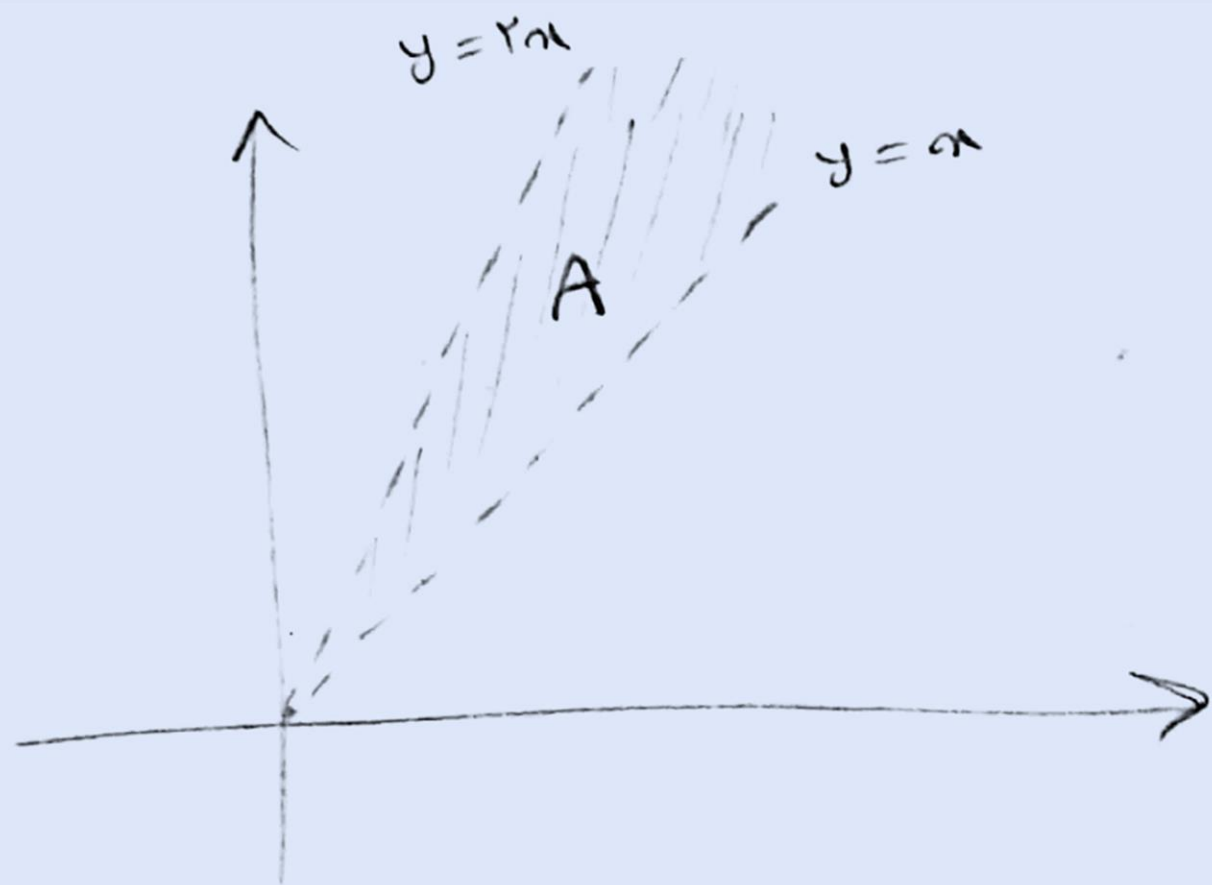
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy &= 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} kxy dx dy = 1 \quad \Rightarrow \\ \int_0^1 \left[ky \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy &= 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{2} (ky - ky^3) dy = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{ky^2}{4} \Big|_0^1 = 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{ky^2}{4} - \frac{ky^4}{8} \right) \Big|_0^1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = 8} \end{aligned}$$



➤ **مثال ۷:** اگر تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر باشد، احتمال $P(X < Y < 2X)$ را بیابید.

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X < Y < 2X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{2x} f(x,y) dy dx = \int_0^{\infty} \int_x^{2x} 4xye^{-(x^2+y^2)} dy dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_x^{2x} (-2x)(-2y)e^{-(x^2+y^2)} dy dx = \int_0^{\infty} (-2x) \left[e^{-(x^2+y^2)} \right]_x^{2x} dx \\ &= \int_0^{\infty} (-2x)(e^{-(x^2+4x^2)} - e^{-(x^2+x^2)}) dx = \int_0^{\infty} (-2x)(e^{-5x^2} - e^{-2x^2}) dx \\ &= \int_0^{\infty} -2xe^{-5x^2} dx - \int_0^{\infty} -2xe^{-2x^2} dx = \frac{1}{5} e^{-5x^2} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2} e^{-2x^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$



➤ تابع چگالی حاشیه‌ای:

توابع چگالی حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y عبارتند از:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

تابع توزیع تجمعی توأم متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y :

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, s) dt ds$$

➤ **مثال ۸:** در مثال ۴، چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y و تابع توزیع تجمعی توأم را بیابید.

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1 ; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 4xydy = \frac{4xy^2}{2} \Big|_0^1 = 2x \quad ; \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 4xydx = \frac{4x^2y}{2} \Big|_0^1 = 2y \quad ; \quad 0 < y < 1$$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(t,s)dt ds = \int_0^y \int_0^x 4ts dt ds = \int_0^y (2t^2s \Big|_0^x) ds = \int_0^y 2x^2s ds \\ &= x^2s^2 \Big|_0^y = x^2y^2 \end{aligned}$$

➤ **مثال ۹:** در مثال ۵، چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{5} + 0.05y & 0 < x < 1; 1 < y < 5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_1^5 \left(\frac{x}{5} + 0.05y\right)dy = \left(\frac{xy}{5} + \frac{0.05y^2}{2}\right) \Big|_1^5 \\ &= x + 0.62 - \frac{x}{5} - 0.025 = \frac{4}{5}x + 0.6 \quad ; \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{5} + 0.05y\right)dx = \left(\frac{x^2}{10} + 0.05xy\right) \Big|_0^1 \\ &= 0.05y + 0.1 \quad ; \quad 1 < y < 5 \end{aligned}$$

➤ **مثال ۱۰:** در مثال ۶، چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & x > 0, \ y > 0, \ x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 8xydy = \frac{8xy^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = 4x(1-x^2) \quad ; \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 8xydx = \frac{8x^2y}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} = 4y(1-y^2) \quad ; \quad 0 < y < 1$$

➤ توزیع شرطی (Conditional distribution) :

تعریف : فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته یا گسسته باشند. توزیع شرطی متغیر تصادفی Y به شرط $X=x$ عبارت است از :

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \quad ; \quad f_X(x) > 0$$

همچنین توزیع شرطی متغیر تصادفی X ، به فرض $Y=y$ عبارت است از :

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad ; \quad f_Y(y) > 0$$

$$P(a < X < b \mid Y = y) = \sum_{x \in (a,b)} f(x|y)$$

در حالت گسسته:

$$P(a < X < b \mid Y = y) = \int_a^b f(x|y) dx$$

در حالت پیوسته:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	0	$\frac{1}{5}$
$f_Y(y)$	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{25}$	1

➤ **مثال ۱۱:** در مثال ۱، توزیع شرطی Y به شرط $X=3$ را بیابید. همچنین $P(Y < 3|X = 3)$ و $f(x|4)$ را بیابید.

$$f(y|3) = \frac{f(3,y)}{f_X(3)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3} \quad ; \quad y = 1,2,3$$

$$P(Y < 3|X = 3) = \sum_{y=1}^2 f(y|3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$f(x|4) = \frac{f(x,4)}{f_Y(4)} = \frac{f(x,4)}{9/100} = \begin{cases} \frac{5}{9} & ; \quad x = 4 \\ \frac{4}{9} & ; \quad x = 5 \\ 0 & ; \quad o.w \end{cases}$$

➤ **مثال ۱۲:** در مثال ۴، توزیع شرطی $f(x|y)$ و $f(y|x)$ را بیابید.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4xy}{2y} = 2x \quad ; 0 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{4xy}{2x} = 2y \quad ; 0 < y < 1$$

مثال ۱۲: در مثال ۶، توزیع شرطی $f(x|y)$ و مقدار احتمال $P(X > \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{4})$ را حساب کنید.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2} \quad ; \quad 0 < x < \sqrt{1-y^2}$$

$$P\left(X > \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-(\frac{1}{4})^2}} f(x|\frac{1}{4}) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{15}{16}}} \frac{2x}{1-\frac{1}{16}} dx = \frac{16}{15} x^2 \bigg|_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{15}{16}}} = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

➤ استقلال آماری:

اگر $f(x|y)$ به Y ربطی نداشته باشد، آنگاه $f(x|y) = f_X(x)$.

از طرفی طبق تعریف داریم $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ و لذا $f(x,y) = f(x|y) f_Y(y)$.

بنابراین خواهیم داشت: $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.

در این حالت $f(y|x)$ نیز به X ربطی ندارد و داریم $f(y|x) = f_Y(y)$ و باز هم نتیجه فوق بدست می‌آید.

تعریف: فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته و یا پیوسته، با توزیع احتمال توأام $f(x,y)$ و به ترتیب دارای توزیع‌های حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند. متغیرهای تصادفی X و Y را به ازای تمام مقادیر (x,y) در دامنه‌شان مستقل آماری گویند اگر و فقط اگر:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

➤ مثال ۱۳ :

* در مثال ۱ و ۳ ، متغیرهای X و Y مستقل نیستند.

* در مثال ۴ ، متغیرهای X و Y مستقلند:

$$f(x, y) = 4xy = (2x)(2y) = f_X(x)f_Y(y)$$

* در مثال ۵ و ۶ ، متغیرهای X و Y مستقل نیستند.

➤ n متغیر تصادفی X_n, \dots, X_1 :

فرض کنید متغیرهای تصادفی X_n, \dots, X_1 دارای تابع احتمال توأم $f(x_1, \dots, x_n)$ باشند. تابع احتمال حاشیه ای هر متغیر تصادفی با جمع زدن یا انتگرال گرفتن تابع احتمال توأم روی بقیه متغیرها به دست می آید. به عنوان مثال داریم:

$$f_{X_1}(x) = \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{در حالت گسسته:}$$

$$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \quad \text{در حالت پیوسته:}$$

و برای توزیع های حاشیه ای توأم به عنوان مثال داریم:

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \sum_{x_3} \dots \sum_{x_n} f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{در حالت گسسته:}$$

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n \quad \text{در حالت پیوسته:}$$

و برای توزیع‌های شرطی توأم به عنوان مثال داریم:

$$\underbrace{f(x_1, x_2, x_3 | x_4, \dots, x_n)}_{\substack{\text{توزیع شرطی توأم متغیرهای تصادفی} \\ X_1, X_2, X_3 \\ \text{به شرط } X_n = x_n, \dots, X_4 = x_4}} = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\underbrace{f_{(x_4, \dots, x_n)}(x_4, \dots, x_n)}_{\substack{\text{توزیع حاشیه‌ای توأم متغیرهای تصادفی} \\ X_4, \dots, X_n}}}$$

تعریف: فرض کنید X_n, \dots, X_1 متغیرهای تصادفی گسسته یا پیوسته با تابع توزیع احتمال توأم $f(x_1, \dots, x_n)$ و به ترتیب دارای توابع توزیع حاشیه‌ای $f_{X_n}(x_n), \dots, f_{X_1}(x_1)$ باشند.

متغیرهای تصادفی X_n, \dots, X_1 را به طور آماری دو به دو مستقل گوییم اگر و فقط اگر به ازای تمام مقادیر (x_1, \dots, x_n) در دامنه‌شان داشته باشیم:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n)$$

➤ **مثال ۱۵:** طول عمر لامپ‌های تولیدشده توسط کارخانه‌ای دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

فرض کنید X_1, X_2, X_3 طول عمر سه لامپ از تولیدات این کارخانه هستند که به طور مستقل انتخاب شده‌اند. احتمال اینکه لامپ اول در کمتر از یک روز بسوزد و دو لامپ دیگر حداقل سه روز کار کنند چقدر است؟

چون X_1, X_2, X_3 از هم مستقلند، داریم:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)f_{X_3}(x_3) = \begin{cases} e^{-x_1}e^{-x_2}e^{-x_3} & x_1, x_2, x_3 > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-(x_1+x_2+x_3)} & x_1, x_2, x_3 > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$P(X_1 < 1, X_1 \geq 3, X_1 \geq 3) = \int_0^1 \int_3^\infty \int_3^\infty e^{-(x_1+x_2+x_3)} dx_3 dx_2 dx_1$$

$$= \int_0^1 \int_3^\infty e^{-(x_1+x_2)} (-e^{-x_3} \Big|_3^\infty) dx_2 dx_1 = e^{-6} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \mathbf{0.002}$$