ریاضی عمومی ۲

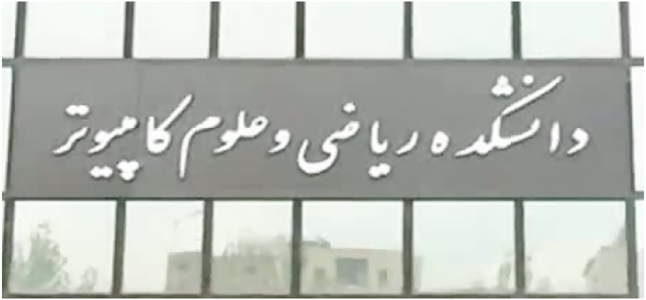
ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس

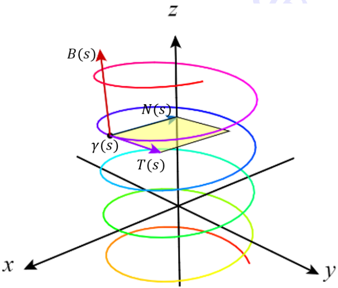


توابع برداری و خم‌ها (منحنی‌ها)ـ بخش سوم

صفحهٔ بوسان

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. به‌ازای هر $s \in [0, L]$، صفحهٔ گذرنده از $\gamma(s)$، $T(s)$ و $N(s)$ **صفحهٔ بوسان** منحنی در $\gamma(s)$ نامیده می‌شود.

- بردار $B(s)$، بردار نرمال صفحهٔ بوسان γ در $\gamma(s)$ است.
- اگر γ یک منحنی در $\mathbb{R}^2$ باشد، صفحهٔ بوسان منحنی در هر نقطه از آن منطبق بر صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ است.
- وقتی منحنی در $\mathbb{R}^3$ باشد و در یک صفحه قرار نگیرد، صفحهٔ بوسان در هر نقطه از منحنی ممکن است تغییر کند.



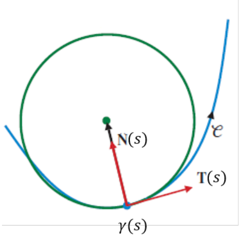
- اگر $\kappa(s) = 0$، آنگاه $N(s)$، و از این‌رو $B(s)$ و صفحهٔ بوسان در $\gamma(s)$ تعریف نمی‌شوند.

دایرهٔ بوسان

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای خم $\mathcal{C}$ است. دایرهٔ بوسان $\mathcal{C}$ در $\gamma(s)$، دایره‌ای است با شعاع $\rho(s)$ که از $\gamma(s)$ می‌گذرد، در صفحهٔ بوسان $\mathcal{C}$ در $\gamma(s)$ قرار دارد و مرکز آن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\gamma_c(s) = \gamma(s) + \rho(s)N(s)$$

- دایرهٔ بوسان در همسایگی $\gamma(s)$ رفتار نزدیکی با رفتار خم دارد.
- اگر $\mathcal{C}$ یک دایره باشد، آنگاه دایرهٔ بوسان در هر نقطهٔ $\gamma(s)$ از $\mathcal{C}$ منطبق بر خود $\mathcal{C}$ است.



$B'(s)$ با $N(s)$ موازی است.

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است.

- به‌ازای هر $s \in [0, L]$، $B'(s)$ و $B(s)$ بر هم عمودند؛ زیرا $|B(s)| = 1$، و لذا:

$$|B(s)|^2 = 1 \implies B(s).B(s) = 1 \xRightarrow{\text{مشتق‌گیری}} 2B(s).B'(s) = 0$$

- به‌ازای هر $s \in [0, L]$، $B'(s)$ و $T(s)$ بر هم عمودند؛ زیرا:

$$B(s) = T(s) \times N(s) \xRightarrow{\text{مشتق‌گیری}}$$

$$B'(s) = \underbrace{(T'(s) \times N(s))}_{\text{صفر است؛ چون } N(s)||T'(s)} + (T(s) \times N'(s))$$

پس $B'(s)$ بر $T(s)$ عمود است.

- بنابراین، $B'(s)$ با $N(s)$ موازی است.

تاب

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک خم و $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ نمایش پارامتری آن بر حسب طول قوس است، طوری که به‌ازای هر $s \in [0, L]$، $\kappa(s) \neq 0$. از آنجا که $B'(s)$ و $N(s)$ موازی هستند، به‌ازای هر s، اسکالر $\tau(s)$ وجود دارد که

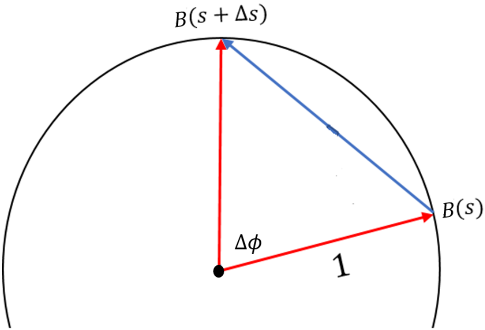
$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

در این صورت، $\tau(s)$ را تاب $\mathcal{C}$ در $\gamma(s)$ می‌نامیم.

- تاب خم $\mathcal{C}$ در $\gamma(s)$، به طور شهودی میزان پیچش خم را حول $\gamma(s)$ نشان می‌دهد. به عبارتی، $\tau(s)$، معیاری به منظور نشان‌دادن میزان ناکامی خم حول $\gamma(s)$ در قرارگرفتن در یک صفحه است.

■ با استدلالی مشابه با آنچه برای $T(s)$ انجام دادیم، می‌توان دید که

$$|\tau(s)| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta B}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta \phi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d}{ds}\phi(s)\right|$$



■ منحنی γ را مسطح یا مسطحه گوییم، هرگاه به‌ازای هر s، داشته باشیم $\tau(s)=0$.

مثال

فرض کنید $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ یک خم است. نشان دهید که اگر به‌ازای هر $s \in [0, L]$ داشته باشیم $\tau(s) = 0$، آنگاه خم در یک صفحه قرار دارد (راهنمایی: نشان دهید که خم در صفحهٔ گذرنده از $\gamma(0)$ با بردار نرمال $B(0)$ قرار دارد).

پاسخ:
توجه کنید که معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از $\gamma(0)$ با بردار نرمال $B(0)$ به صورت زیر است:

$$B(0).\left((x, y, z) - \gamma(0)\right) = 0$$

بنابراین، کافی است نشان دهیم که به‌ازای هر $s \in [0, L]$، داریم:

$$B(0).\left(\gamma(s) - \gamma(0)\right) = 0$$

از آنجا که به‌ازای هر s، $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ و $\tau(s) = 0$، داریم $B'(s) = 0$، که نتیجه می‌دهد B ثابت است؛ یعنی به‌ازای هر s، داریم $B(s) = B(0)$.

حال، تعریف می‌کنیم:

$$f:[0,L]\to\mathbb{R},\quad f(s)=B(0).\left(\gamma(s)-\gamma(0)\right)$$

کافی است نشان دهیم که f تابعی ثابت با مقدار 0 است. داریم:

$$f'(s)=B(0).\gamma'(s)=B(s).\gamma'(s)=B(s).T(s)=0$$

بنابراین، f تابعی ثابت است. از این‌رو، داریم:

$$\forall\ s\in[0,L],\ \ f(s)=f(0)=B(0).\left(\gamma(0)-\gamma(0)\right)=0$$

پس، خم γ در صفحهٔ گذرنده از $\gamma(0)$ با بردار نرمال $B(0)$ (یعنی صفحهٔ بوسان خم در $\gamma(0)$) قرار دارد.

مثال

مارپیچ مستدیر زیر را در نظر بگیرید، که در آن $c = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $a, b > 0$. مطلوب است انحنا، تاب، و همچنین بردارهای کنج فرنه در هر نقطهٔ $r(s)$ از منحنی.

$$r(s) = a\cos(cs)i + a\sin(cs)j + bcsk,$$

پاسخ: داریم:

$$T(s) = r'(s) = -ac\sin(cs)i + ac\cos(cs)j + bck$$

و از این‌رو:

$$T'(s) = -ac^2\cos(cs)i - ac^2\sin(cs)j$$

$$\kappa(s) = |T'(s)| = ac^2 = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = -\cos(cs)i - \sin(cs)j$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -ac\sin(cs) & +ac\cos(cs) & bc \\ -\cos(cs) & -\sin(cs) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= bc\sin(cs)i - bc\cos(cs)j + ack$$

بنابراین، داریم:

$$B'(s) = bc^2\cos(cs)i + bc^2\sin(cs)j = -bc^2 N(s)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\tau(s) = bc^2 = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

فرمول‌های فرنه

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}T(s) = \kappa(s)N(s) \\ \dfrac{d}{ds}N(s) = ? \\ \dfrac{d}{ds}B(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases}$$

N' بر حسب T و B

منحنی $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\begin{aligned} N'(s) &= (B(s) \times T(s))' = \big(B'(s) \times T(s)\big) + \big(B(s) \times T'(s)\big) \\ &= ((-\tau(s)N(s)) \times T(s)) + (B(s) \times (\kappa(s)N(s))) \\ &= \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s) \end{aligned}$$

فرمول‌های فرنه

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{ds}T(s) = \kappa(s)N(s) \\
\dfrac{d}{ds}N(s) = \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s) \\
\dfrac{d}{ds}B(s) = -\tau(s)N(s)
\end{cases}
$$

صورت ماتریسی:

$$
\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}
$$

شتاب قائم و مماسی

فرض کنید $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ یک منحنی است. داریم:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{\mathrm{v}(t)}{\nu(t)} \implies \mathrm{v}(t) = \nu(t)T(t)$$

$$\xRightarrow{\text{مشتق‌گیری}} a(t) = \nu'(t)T(t) + \nu(t)T'(t)$$

توجه می‌کنیم که:

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d}{dt}T(\alpha(s)) = \frac{d}{ds}T(\alpha(s))\frac{d}{dt}s(t)$$
$$= (\kappa(\alpha(s))N(\alpha(s)))\,\nu(t) = \kappa(t)N(t)\nu(t)$$

بنابراین، اگر

$$\text{شتاب مماسی} = a_T(t) = \nu'(t), \quad \text{شتاب قائم} = a_N(t) = \kappa(t)(\nu(t))^2$$

آنگاه داریم:

$$a(t) = \nu'(t)T(t) + \kappa(t)(\nu(t))^2 N(t) = a_T(t)T(t) + a_N(t)N(t)$$

قضیه

فرض کنید که $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ یک خم پارامتری با پارامتر دل‌خواه باشد، آنگاه داریم:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \quad N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}, \quad B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \,.\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

اثبات:

- $N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$:

داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}T(t) &= \frac{d}{dt}T(\alpha(s)) = \frac{d}{ds}T(\alpha(s))\frac{d}{dt}s(t) \\
&= (\kappa(\alpha(s))N(\alpha(s)))\,\nu(t) = \kappa(t)N(t)\nu(t)
\end{aligned}
$$

بنابراین:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\kappa(t)\nu(t)}$$

که نتیجه می‌دهد $N(t)$ مضرب اسکالر مثبتی از $T'(t)$ است. بنابراین، از آنجا که $N(t)$ یکه است، داریم:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

- $B(t) = \frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}$:

داریم:

$$a(t) = \nu'(t)T(t) + \kappa(t)(\nu(t))^2 N(t)$$

حال، دو طرف را در $\mathrm{v}(t)$ ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\mathrm{v}(t) \times a(t) = \nu'(t)(\mathrm{v}(t) \times T(t)) + \kappa(t)(\nu(t))^2(\mathrm{v}(t) \times N(t))$$

توجه کنید که $T(t)$ و $\mathrm{v}(t)$ موازی هستند، و لذا $\mathrm{v}(t) \times T(t) = 0$. از آنجا که $T(t) = \frac{\mathrm{v}(t)}{\nu(t)}$، داریم:

$$\mathrm{v}(t) \times a(t) = \kappa(t)(\nu(t))^3(T(t) \times N(t)) = \kappa(t)(\nu(t))^3 B(t)$$

پس، $B(t)$ مضرب اسکالر مثبتی از $\mathrm{v}(t) \times a(t)$ است. حال، از آنجا که $B(t)$ یکه است، داریم:

$$B(t) = \frac{\mathrm{v}(t) \times a(t)}{|\mathrm{v}(t) \times a(t)|} = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

- $\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$:

در اسلاید قبل نشان دادیم که:

$$\mathrm{v}(t) \times a(t) = \kappa(t)(\nu(t))^3 B(t)$$

حال اگر از دو طرف نرم بگیریم، داریم:

$$|\mathrm{v}(t) \times a(t)| = |\kappa(t)(\nu(t))^3 B(t)| = \kappa(t)\nu(t)^3$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\kappa(t) = \frac{|\mathrm{v}(t) \times a(t)|}{\nu(t)^3} = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

تمرین

طول قوس

$$r'''(t) = \,?\; \rightarrow a = r''(t) = \frac{dv}{dt}T + kv^2 N \rightarrow r'''(t) = \Big(\frac{dv}{dt}T + kv^2 N\Big)'$$

تابع اسکالر   تابع اسکالر

$$r'''(t) = \frac{d^2v}{dt^2}T + \frac{dv}{dt}\frac{dT}{dt} + \frac{dk}{dt}v^2 N + k\,2v\frac{dv}{dt}N + kv^2\frac{dN}{dt}$$

قاعده زنجیره‌ای $\frac{dN}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{ds}{dt} \rightarrow v$ ، $\frac{dN}{ds} \rightarrow zB - kT$

$$\rightarrow (*)\,T + (*)\,N + (kv^3 z)\,B = r'''(t)$$

چگونه؟ : روابط بالا

$$(r' \times r'')\cdot r''' = (kv^3)^2 z \rightarrow z = \frac{(r' \times r'')\cdot r'''}{|r' \times r''|^2}$$

فرمول محاسبه تاب منحنی مستقل از پارامتر طول قوس

مثال

انحنای یک خط در $\mathbb{R}^3$ را در هر نقطه از آن بیابید.

پاسخ: فرض کنید l یک خط در $\mathbb{R}^3$ است و $l \in (a,b,c) = P_0$. فرض کنید $u = (u_1, u_2, u_3)$ بردار هادی l است. در این صورت، یک نمایش پارامتری برای l به صورت زیر است:

$$\gamma(t) = P_0 + tu = (a + tu_1, b + tu_2, c + tu_3)$$

بنابراین، داریم $\gamma'(t) = u$، که نتیجه می‌دهد $\gamma''(t) = 0$. از این‌رو، می‌توان نوشت:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = 0$$

- توجه می‌کنیم که انحنای یک خم در یک نقطهٔ P از آن را می‌توان میزان انحراف خم (در اطراف P) از خط مماس در P تصور کرد.

مثال

انحنا، تاب و کنج فرنه را در یک نقطهٔ دل‌خواه از منحنی زیر بیابید:

$$r(t) = (t + \cos(t))i + (t - \cos(t))j + \sqrt{2}\sin(t)k$$

پاسخ:

$$r'(t) = (1 - \sin(t))i + (1 + \sin(t))j + \sqrt{2}\cos(t)k$$

$$r''(t) = -\cos(t)i + \cos(t)j - \sqrt{2}\sin(t)k$$

$$r'''(t) = \sin(t)i - \sin(t)j - \sqrt{2}\cos(t)k$$

$$r'(t) \times r''(t) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 - \sin(t) & 1 + \sin(t) & \sqrt{2}\cos(t) \\ -\cos(t) & \cos(t) & -\sqrt{2}\sin(t) \end{bmatrix}$$

$$= -\sqrt{2}(1 + \sin(t))i - \sqrt{2}(1 - \sin(t))i + 2\cos(t)k$$

همچنین، داریم:

$$|r'(t)| = 2, \qquad |r'(t) \times r''(t)| = 2\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{1}{2}\Big((1-\sin(t))i + (1+\sin(t))j + \sqrt{2}\cos(t)k\Big)$$

$$B(t) = \frac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|} = -\frac{1+\sin(t)}{2}i - \frac{1-\sin(t)}{2}j + \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}k$$

$$N(t) = B(t) \times T(t) = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ -\frac{1+\sin(t)}{2} & \frac{\sin(t)-1}{2} & \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sin(t)}{2} & \frac{1+\sin(t)}{2} & \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)i + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)j - \sin(t)k$$

در نهایت، داریم:

$$\kappa(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(r'(t) \times r''(t)).r'''(t) = -2\sqrt{2}$$

$$\tau(t) = \frac{(r'(t) \times r''(t)).r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

نتیجه (انحنای نمودار یک تابع اسکالر یک متغیره)

انحنای نمودار تابع اسکالر یک متغیرهٔ $y = f(x)$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اثبات: نمودار $y = f(x)$ دارای نمایش پارامتری $r(x) = (x, f(x))$ است. داریم:

$$r'(x) = (1, f'(x)), \quad r''(x) = (0, f''(x))$$

$$\Longrightarrow \; r'(x) \times r''(x) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, f''(x))$$

$$\Longrightarrow \; \kappa(x) = \frac{|r'(x) \times r''(x)|}{|r'(x)|^3} = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

قضیه اساسی منحنی‌های فضایی

فرض کنید $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ دو منحنی با انحنای یکسان ناصفر $\kappa(s)$ و تاب یکسان $\tau(s)$ باشند. در این صورت $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ را می‌توان با انتقال و دوران بر یکدیگر منطبق کرد.

مثال

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک منحنی باشد که در هر نقطه، تاب آن برابر با صفر و انحنای آن، برابر با عددی ناصفر مانند a است. در مورد این منحنی چه می‌توان گفت؟

پاسخ: از آنجایی که تاب منحنی در هر نقطه برابر صفر است، پس نتیجه می‌گیریم که این منحنی در یک صفحه قرار دارد. از طرفی می‌دانیم که انحنای یک دایره به شعاع $\frac{1}{a}$، در هر نقطه، برابر با a است. در نتیجه، طبق قضیهٔ قبل، منحنی $\mathcal{C}$ روی یک دایره به شعاع $\frac{1}{a}$ قرار دارد.