تمرینات سری پنجم: انتگرال سطح و خم و کاربردها

۲۸ اردیبهشت ۱۴۰۳

سوال۱

(آدامز بخش ۴ − ۱۵ سوال ۱۰) فرض کنید
$F = (axy + z)\vec{i} + x^{۲}\vec{j} + (bx + ۲z)\vec{k}$ میدان نیروی پایستار باشد.
الف) a, b و پتانسیلی برای F بیابید.
ب) کار انجام شده توسط میدان نیرو را بر خم C که فصل مشترک رویه های
$۲x + y + z = ۳$ و $۹x^{۲} + ۹y^{۲} + ۲z^{۲} = ۱۸$ است و نقطه $(۱, ۱, ۰)$ را به
$(۳, ۰, ۰)$ متصل می کند و در یک هشتم اول قرار دارد ، محاسبه کنید.

الف) میدان F پایستار است پس کرل آن صفر است.

$$F = (axy + z)\vec{i} + x^{۲}\vec{j} + (bx + ۲z)\vec{k}$$

$$P(x, y, z) = axy + z$$

$$Q(x, y, z) = x^{۲}$$

$$R(x, y, z) = bx + ۲z$$

$$curl\left(\vec{F}\right) = \vec{o} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow ax = ۲x \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \Longrightarrow ۱ = b \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \Longrightarrow ۰ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow a = ۲\,, b = ۱$$

فرض کنیم φ تابع پتانسیل باشد، داریم:

$$F = \nabla\varphi \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R \end{cases}$$

پاسخ سوال ۱

$$\varphi=\int(2xy+z)dx\Longrightarrow\varphi=x^2y+xz+g\left(y,z\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q\Longrightarrow x^2+\frac{\partial g}{\partial y}=x^2\Longrightarrow\frac{\partial g}{\partial y}=0\Longrightarrow g\left(y,z\right)=h\left(z\right)$$

$$\varphi=x^2y+xz+h(z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=R\Longrightarrow x+h'(z)=x+2z\Longrightarrow h'(z)=2z\Longrightarrow h\left(z\right)=z^2+c$$

$$\varphi(x,y,z)=x^2y+xz+z^2+c$$

ب) کار میدان پایستار مستقل از مسیر حرکت است و فقط به نقاط ابتدا و انتهای خم بستگی دارد.

$$\int_C F\cdot dr=\varphi(\text{انتها})-\varphi(\text{ابتدا})=\varphi\left(0,0,3\right)-\varphi\left(1,1,0\right)=9-1=8$$

سوال۲

(آدامز بخش ۴ − ۱۵ سوال ۱۲) کار انجام شده به وسیله میدان نیروی

$$F = \left(y^{۲} \cos x + z^{۳}\right) \vec{i} + (۲y \sin x - ۴)\vec{j} + \left(۳xz^{۲} + ۲\right) \vec{k}$$

در حرکت دادن ذره ای در امتداد خم
$x = \sin^{-۱} t, y = ۱ - ۲t, z = ۳t - ۱, (۰ \leq t \leq ۱)$ را بیابید.

ابتدا کرل میدان F را محاسبه می‌کنیم.

$$F = \left(y^{۲}\text{cos}x + z^{۳}\right)\vec{i} + \left(۲y\text{sin}x - ۴\right)\vec{j} + \left(۳xz^{۲} + ۲\right)\vec{k}$$

$$P\left(x,y,z\right) = y^{۲}\text{cos}x + z^{۳}$$

$$Q\left(x,y,z\right) = ۲y\text{sin}x - ۴$$

$$R\left(x,y,z\right) = ۳xz^{۲} + ۲$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = ۲y\text{cos}x \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = ۳z^{۲} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = ۰ \end{cases}$$

پس $curl\left(\vec{F}\right) = \vec{o}$ درنتیجه میدان F پایستار است. فرض کنیم φ تابع پتانسیل باشد، داریم:

$$F = \nabla\varphi \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = R \end{cases}$$

پاسخ سوال ۲

$$\varphi = \int \left(y^{۲}\cos x + z^{۳}\right)dx \to \varphi = y^{۲}\sin x + xz^{۳} + g\left(y,z\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \to ۲y\sin x + \frac{\partial g}{\partial y} = ۲y\sin x - ۴ \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = -۴$$

$$\to g\left(y,z\right) = -۴y + h\left(z\right) \Longrightarrow \varphi = y^{۲}\sin x + xz^{۳} - ۴y + h\left(z\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R \Longrightarrow ۳xz^{۲} + h'(z) = ۳xz^{۲} + ۲ \Longrightarrow h'(z) = ۲ \Longrightarrow h\left(z\right) = ۲z + c$$

$$\varphi(x,y,z) = y^{۲}\sin x + xz^{۳} - ۴y + ۲z + c$$

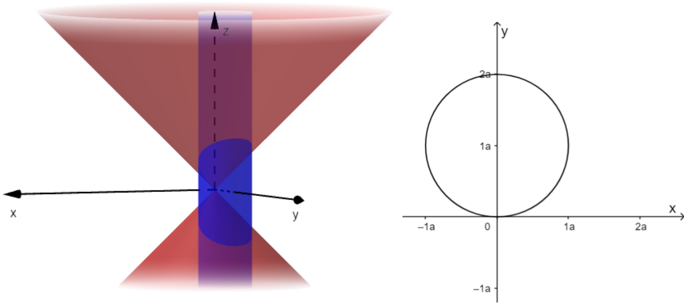
$$x\left(\circ\right) = \circ \,,\; y\left(\circ\right) = ۱ \,, z\left(\circ\right) = -۱\, x\left(۱\right) = \frac{\pi}{۲} \,, y\left(۱\right) = -۱ \,, z\left(۱\right) = ۲$$

$$\int_C F \cdot dr = \varphi(\text{انتها}) - \varphi(\text{ابتدا}) = \varphi\left(\frac{\pi}{۲}, -۱, ۲\right) - \varphi\left(\circ, ۱, -۱\right)$$

$$= ۱ + ۴\pi + ۴ + ۴ - \circ - \circ + ۴ + ۲ = ۱۵ + ۴\pi$$

سوال۳

(آدامز بخش ۵ − ۱۵ سوال ۹) مساحت آن قسمت از مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ را که درون استوانه $x^۲ + y^۲ = ۲ay$ قرار دارد بیابید.



شکل:

ابتدا عنصر سطح را بدست می‌آوریم.

$$g(x,y,z) = x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$$

$$dS = \frac{|\overrightarrow{\nabla g}|}{|g_z|}dxdy = \frac{|(۲x, ۲y, -۲z)|}{|-۲z|}dxdy = \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴z^۲}}{|-۲z|}dxdy$$

$$= \frac{۲\sqrt{x^۲ + y^۲ + x^۲ + y^۲}}{۲\sqrt{x^۲ + y^۲}}dxdy = \sqrt{۲}dxdy$$

تصویر رویه مورد نظر روی صفحه XoY ناحیه D است که این ناحیه همان قاعده استوانه است. لذا مطابق شکل زیر برای محاسبه نیمه بالایی مخروط داریم:

$$x^۲ + y^۲ \leq ۲ay \Rightarrow r^۲ \leq ۲ar\sin\theta \Rightarrow ۰ \leq r \leq ۲a\sin\theta$$

پاسخ سوال ۳

$$S=\iint_S dS=\iint_D \sqrt{۲}dxdy=\sqrt{۲}\int_۰^\pi\int_۰^{۲a\sin\theta} rdrd\theta$$

$$=\sqrt{۲}\int_۰^\pi \left.\frac{r^۲}{۲}\right|_۰^{۲a\sin\theta} d\theta$$

$$=\sqrt{۲}\int_۰^\pi \frac{۴a^۲\sin^۲\theta}{۲}d\theta$$

$$=۲\sqrt{۲}a^۲\int_۰^\pi \sin^۲\theta\, d\theta$$

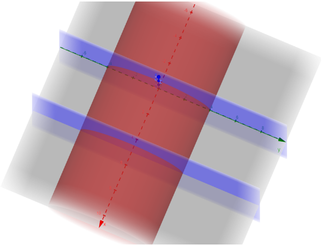
$$=۲\sqrt{۲}a^۲\int_۰^\pi \frac{۱-\cos۲\theta}{۲}d\theta$$

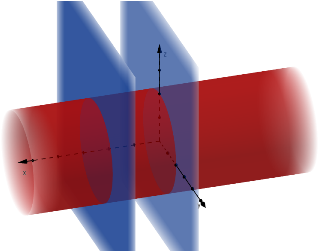
$$=\sqrt{۲}a^۲\left.\left(\theta-\frac{\sin۲\theta}{۲}\right)\right|_۰^\pi=\sqrt{۲}\pi a^۲$$

پس مساحت کل برابر است با: $۲\sqrt{۲}\pi a^۲$

سوال۴

(آدامز بخش تمرینات دوره ای فصل 15 سوال ۱۲) شار گذرنده از میدان نیروی $F = (۳xz^۲, -x, -y)$ در عبور از S، که قسمتی از استوانه $y^۲ + z^۲ = ۱۶$ است که در یک هشتم اول و بین صفحات $x = ۰$ و $x = ۵$ قرار دارد را در جهتی که از محور x دور می شود، محاسبه کنید .





شکل:

$$F = \left(۳xz^{۲}, -x, -y\right) \quad (x, y, z) = y^{۲} + z^{۲} - ۱۶ = ۰$$

$$\vec{n} = \pm \frac{\overrightarrow{\nabla g}}{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|} \qquad dS = \frac{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|}{|g_z|} dxdy$$

$$\vec{n} dS = \pm \frac{\overrightarrow{\nabla g}}{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|} \frac{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|}{|g_z|} dxdy = \pm \frac{\overrightarrow{\nabla g}}{|g_z|} dxdy$$

$$\vec{n} dS = \pm \frac{(۰, ۲y, ۲z)}{|۲z|} dxdy$$

علامت مثبت و منفي پشت ndS به اين دليل قرار مى گيرد که وقتى جهت دور شونده است يعني قايم به سمت بيرون استوانه، علامت مثبت از n را در نظر مي گيريم.
با توجه به شكل سمت چپ، ناحيه D يک هشتم استوانه روى صفحه xoy يک مستطيل است که $۰ \le x \le ۵, ۰ \le y \le ۴$.

$$\iint_S F\cdot\vec{n}dS = \iint_D (3xz^2, -x, -y)\cdot\frac{(0, 2y, 2z)}{2z}dxdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{-xy}{z} - y\right)dxdy = \int_0^5\int_0^4 \left(\frac{-xy}{\sqrt{16-y^2}} - y\right)dydx$$

$$u = 16 - y^2 \Longrightarrow du = -2ydy \Longrightarrow$$

$$\int \frac{-xydy}{\sqrt{16-y^2}} = \int \frac{xdu}{2\sqrt{u}} = x\sqrt{u} = x\sqrt{16-y^2}$$

$$= \int_0^5 x\sqrt{16-y^2} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 dx$$

$$= \int_0^5 (-8-4x)dx = -8x - 2x^2\Big|_0^5 = -40 - 50 = -90$$

سوال۵

(پایانترم ۹۸ − ۹۷) فرض کنید S رویه پارامتری

$$r\left(u,v\right)=\left(e^{u}\cos v, e^{u}\sin v, u\right), \quad ۰\leq u\leq ۱, ۰\leq v\leq \pi.$$

باشد. انتگرال $\iint_S \sqrt{۱+x^{۲}+y^{۲}}dS$ را محاسبه کنید.

ابتدا عنصر سطح را به دست می‌آوریم.

$$r(u,v) = (e^u\cos v\,, e^u\sin v\,, u)$$

$$dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| dudv$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (e^u\cos v\,, e^u\sin v\,, ۱)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-e^u\sin v\,, e^u\cos v\,, ۰)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^u\cos v & e^u\sin v & ۱ \\ -e^u\sin v & e^u\cos v & ۰ \end{vmatrix} = \left(-e^u\cos v\,, -e^u\sin v\,, e^{۲u}\right)$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| = \sqrt{e^{۲u}\cos^{۲} v + e^{۲u}\sin^{۲} v + e^{۴u}} = \sqrt{e^{۲u} + e^{۴u}} = e^u\sqrt{۱ + e^{۲u}}$$

$$\sqrt{۱+x^{۲}+y^{۲}}=\sqrt{۱+e^{۲u}\cos^{۲}v+e^{۲u}\sin^{۲}v}=\sqrt{۱+e^{۲u}}$$

$$\iint\limits_{S}\sqrt{۱+x^{۲}+y^{۲}}dS=\iint\limits_{D}e^{u}\sqrt{۱+e^{۲u}}\sqrt{۱+e^{۲u}}dudv$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۱}e^{u}\left(۱+e^{۲u}\right)dudv=\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۱}\left(e^{u}+e^{۳u}\right)dudv$$

$$=\int_{۰}^{\pi}\left(e^{u}+\frac{۱}{۳}e^{۳u}\right)\Big|_{۰}^{۱}dv=\pi\left(e+\frac{۱}{۳}e^{۳}-\frac{۴}{۳}\right)$$

سوال۶

(آدامز بخش ۵ − ۱۵ سوال ۱۴) مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_S x\, dS$ که در آن S آن قسمت از مخروط $z = \sqrt{۲\left(x^{۲} + y^{۲}\right)}$ است که زیر صفحه $z = ۱ + y$ قرار دارد.

$$\begin{cases} z = ۱ + y \\ z = \sqrt{۲(x^۲ + y^۲)} \end{cases} \longrightarrow ۱ + y = \sqrt{۲(x^۲ + y^۲)}$$

$$\longrightarrow (۱ + y)^۲ = ۲x^۲ + ۲y^۲ \longrightarrow x^۲ + \frac{(y - ۱)^۲}{۲} = ۱$$

یک بیضی به مرکز $(۰, ۱)$

اکنون ds را برای مخروط به دست می‌آوریم

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}} dxdy$$

$$= \sqrt{۱ + \frac{۴x^{۲} + ۴y^{۲}}{۲x^{۲} + ۲y^{۲}}} dxdy = \sqrt{۳} dxdy$$

$$\iint_S x \, dS = \sqrt{۳} \int_{۱-\sqrt{۲}}^{۱+\sqrt{۲}} \int_{-\sqrt{۱-\frac{(y-۱)^{۲}}{۲}}}^{\sqrt{۱-\frac{(y-۱)^{۲}}{۲}}} x dxdy = ۰$$

سوال۷

(آدامز بخش ۳ − ۱۶ مثال۳) فرض کنید C خم بسته ساده پادساعتگرد در صفحه xy باشد که ناحیه ای مانند R را احاطه کرده است و از مبدا نمی گذرد. نشان دهید

$$\oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \begin{cases} 0 & \text{اگر مبدا بیرون } C \text{ باشد} \\ 2\pi & \text{اگر مبدا درون } C \text{ باشد} \end{cases}$$

$$P = -\frac{y}{x^۲ + y^۲} \quad Q = \frac{x}{x^۲ + y^۲}$$

ابتدا فرض می‌کنیم که مبدأ بیرون C است؛ در این صورت P و Q روی R پیوسته هستند و لذا بنابر قضیه‌ی گرین، انتگرال داده شده برابر است با:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \iint_R \underbrace{\left(\frac{x^۲ + y^۲ - ۲x^۲}{x^۲ + y^۲} - \frac{-x^۲ - y^۲ + ۲y^۲}{x^۲ + y^۲}\right)}_{\frac{y^۲ - x^۲ + x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲} = ۰} dxdy = ۰$$

حال فرض می‌کنیم که مبدأ داخل C است. اگر بخواهیم از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم باید ناحیه‌ای که در آن مبدأ وجود دارد را جدا کنیم. پس $\varepsilon > 0$ موجود است که

$$B_\varepsilon(0) = \left\{(x,y) \,|x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2\right\} \subseteq R$$

$$C_\varepsilon : \gamma(t) = (\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\int_C F.dr - \int_{C_\varepsilon} F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

که D مساحت بین دو منحنی C و C_ε است و انتگرال دوگانه بالا، روی D برابر با صفر است.

$$\Rightarrow \int_C F.dr = \int_{C_\varepsilon} F.dr = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\varepsilon \sin t}{\varepsilon^2}(-\varepsilon \sin t dt) + \frac{\varepsilon \cos t}{\varepsilon^2}(\varepsilon \cos t dt)\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

سوال۸

(پایانترم ۹۷ − ۹۶) اگر $F = \left(y + z\cos\left(xz\right), x, x\cos\left(xz\right)\right)$ باشد، مقدار انتگرال $\int_C F.dr$ را محاسبه کنید که در آن C خم پارامتری زیر است:

$$\gamma\left(t\right) = \left(e^{\cos\left(\pi t^۲\right)}, e^{\cos(\pi t)+\sin(\pi t)}, \cos\left(\pi t\right)\right), \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_۳}{\partial y} - \frac{\partial F_۲}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_۱}{\partial z} - \frac{\partial F_۳}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y}\right)\hat{k}$$
$$= (۰ - ۰)\hat{i} + (\cos xz - xz\sin xz - \cos xz + xz\sin xz)\hat{j} + (۱ - ۱)\hat{k}$$
$$= ۰$$

پس میدان F پایستار است و داریم:

$$\int_C F.dr = \int \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$$

در اصل تابع f تابع پتانسیل F است. حال f را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z\cos xz \Rightarrow f(x,y,z) = xy + \sin xz + g(y,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow x + \frac{\partial g}{\partial y} = x \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ۰$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\cos xz \Rightarrow x\cos xz + \frac{\partial g}{\partial z} = x\cos xz \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = ۰$$

$$f(x,y,z) = xy + \sin xz$$
$$\gamma(۱) = (e^{-۱}, e^{-۱}, -۱) \quad \gamma(۰) = (e, e, ۱)$$

$$\int_C F.dr = \int_{t=۰}^{t=۱} \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = f(\gamma(۱)) - f(\gamma(۰))$$
$$= e^{\cos\pi}.e^{\cos\pi} + \sin(-۱.e^{\cos\pi}) - (e^{۲} + \sin e)$$
$$= \boxed{e^{-۲} - \sin e^{-۱} - e^{۲} - \sin e}$$

سوال۹

(آدامز بخش ۳ − ۱۶ سوال 5) با استفاده از انتگرال خم، مساحت محصور به خم زیر را بیابید.

$$r = a\cos^{۳} t\,\vec{i} + b\sin^{۳} t\,\vec{j},\ ۰ \leq t \leq ۲\pi$$

اگر D ناحیه‌ی محصورشده‌ای به‌وسیله‌ی خم C باشد و شرایط قضیه‌ی گرین برقرار باشد، آن‌گاه داریم:

$$\int_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

حال F را به صورت زیر در نظر گرفته تا از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم:

$$F = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

$$\int_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y}\right) dxdy = ۲ \iint_D dxdy$$

$$\Longrightarrow \iint_D dxdy = \frac{۱}{۲}\int_C F.dr = \frac{۱}{۲}\oint_C (-y,x)\cdot(dx,dy) = \frac{۱}{۲}\oint_C -ydx+xdy$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi}\Big(-(b\sin^۳ t)(-۳a\cos^۲ t)(\sin t)+(a\cos^۳ t)(۳b\sin^۲ t)(\cos t)\Big)dt$$

$$= \frac{۳ab}{۲}\int_۰^{۲\pi}\sin^۲ t\cos^۲ t\,dt = \frac{۳ab}{۸}\int_۰^{۲\pi}\sin^۲ ۲t\,dt$$

$$= \frac{۳ab}{۸}\int_۰^{۲\pi}\left(\frac{۱-\cos ۴t}{۲}\right)dt$$

$$= \frac{۳ab}{۸}\left(\frac{t}{۲}\Big|_۰^{۲\pi}\right) = \boxed{\frac{۳ab\pi}{۸}}$$

همچنین دقت شود که انتگرال‌های $\sin kt$ و $\cos kt$ از ۰ تا ۲π، که k عددی صحیح است، صفر هستند.

سوال ۱۰

(پایانترم ۹۸ − ۹۷)

الف) فرض کنید C خم $r(t) = (1-t)e^{t}\vec{i} + t\vec{j} + 2t\vec{k}$ باشد که در آن $0 \leq t \leq 1$. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_C (1+x)e^{x+y}dx + (xe^{x+y} + 2y)dy - 2zdz$$

ب) مطلوبست محاسبه $\oint_C x^2ydx - xy^2dy$ که در آن منحنی C متشکل از نیم دایره بالایی $x^2 + y^2 = 9$ و پاره خط واصل بین $(-3, 0)$ و $(3, 0)$ است که در جهت مثلثاتی پیموده می شود.

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_۱ & F_۲ & F_۳ \end{vmatrix}$$

$$= (۰ - ۰)\vec{i} - (۰ - ۰)\vec{j} + \left(e^{x+y} + xe^{x+y} - (۱ + x)e^{x+y}\right)\vec{k} = ۰$$

پس F پایستار است. حال تابع پتانسیل F که f باشد را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (۱ + x)e^{x+y} \Longrightarrow f(x,y,z) = \int (۱ + x)e^{x+y}\mathrm{d}x + g(y,z)$$

$$= e^y \int (۱ + x)e^x \mathrm{d}x + g(y,z)$$

$$= e^y \left(e^x(۱ + x) - e^x\right) + g(y,z)$$

$$= xe^{x+y} + g(y,z)$$

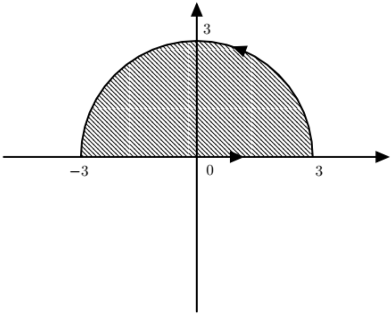
که در این‌جا از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء، به صورت زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\begin{cases} u = ۱ + x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

اکنون داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{x+y} + ۲y \Rightarrow xe^{x+y} + \frac{\partial g}{\partial y} = xe^{x+y} + ۲y \Rightarrow g(y,z) = y^۲ + h(z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -۲z \Rightarrow h'(z) = -۲z \Rightarrow h(z) = -z^۲$$
$$f(x,y,z) = xe^{x+y} + y^۲ - z^۲ + c$$

$$\int_C F.dr = \int \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t).dt$$
$$= f(\gamma(۱)) - f(\gamma(۰)) = f((۰, ۱, ۲)) - f((۱, ۰, ۰))$$
$$= ۱ - ۴ - e = -۳ - e$$



شکل:

حل ب:

شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است، لذا داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y}\right) dxdy \qquad dxdy = rdrd\theta$$

$$= \iint (-y^۲ - x^۲) dxdy = \int_۰^\pi \int_۰^۳ -r^۲ rdrd\theta$$

$$= -\int_۰^\pi \int_۰^۳ r^۳ drd\theta = \left.\frac{-r^۴}{۴}\right|_۰^۳ \times \theta|_۰^\pi = \boxed{\frac{-۸۱\pi}{۴}}$$

سوال۱۱

(پایانترم ۹۶ − ۹۵)میدان برداری $F = \left(x - y^3, y^3 + x^3\right)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^2 + y^2 \leq a^2$ و $x \geq 0, y \geq 0$ و C مرز ناحیه D باشد و بطور مثبت جهت دهی شده است. انتگرال $\int_C F.dr$ را با استفاده از

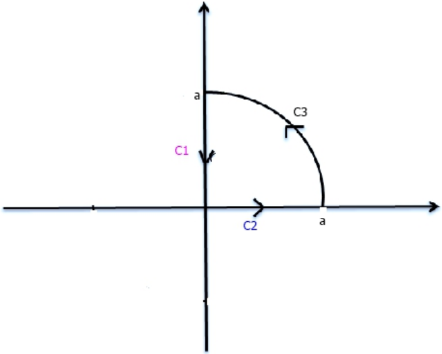
الف)قضیه گرین

ب) بطور مستقیم محاسبه کنید.

حل (الف) طبق قضیه گرین داریم

$$\begin{aligned}\int_C F.dr &= \iint \left(\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y}\right) dxdy = \iint (۳x^۲ + ۳y^۲) \\ &= \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \int_۰^a ۳r^۳ dr d\theta = \frac{۳\pi}{۸} a^۴.\end{aligned}$$

(ب) مسیرهای زیر را جداگانه بررسی میکنیم



$$C_{۱}: r(t) = (۰, a - t) \qquad ۰ \leq t \leq a,$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_{۱}} F.dr &= \int F(r(t)).r(t)'dt = \int_{۰}^{a} \left(-(a-t)^{۳}, (a-t)^{۳}\right).(۰, -۱)dt \\
&= \int_{۰}^{a} -(a-t)^{۳}dt = -\frac{a^{۴}}{۴}.
\end{aligned}$$

$$C_{۲}: r(t) = (t, ۰) \qquad ۰ \leq t \leq a,$$

$$\int_{C_{۲}} F.dr = \int F(r(t)).r(t)'dt = \int_{۰}^{a} \left(t, t^{۳}\right).(۱, ۰)dt = \int_{۰}^{a} tdt = \frac{a^{۲}}{۲}.$$

$$C_{۳} : r(t) = (a\cos t, a\sin t) \qquad ۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲},$$

$$\int_{C_{۳}} F.dr = \int F(r(t)).r(t)'dt$$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \left(a\cos t - a^{۳}\sin^{۳} t, a^{۳}\sin^{۳} t + a^{۳}\cos^{۳} t\right).(-a\sin t, a\cos t)dt$$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \left(-a^{۲}\sin t\cos t + a^{۴}\sin^{۴} t + a^{۴}\cos^{۴} t + a^{۴}\sin^{۳} t\cos t\right) dt$$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} -a^{۲}\sin t\cos t dt + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} a^{۴}\left(\sin^{۴} t + \cos^{۴} t\right) dt + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} a^{۴}\sin^{۳} t\cos$$

$$= -\frac{a^{۲}}{۲} + \frac{۳\pi}{۸}a^{۴} + \frac{a^{۴}}{۴}$$

$$\int_C F.dr = \int_{C_۱} F.dr + \int_{C_۲} F.dr + \int_{C_۳} F.dr = \frac{۳\pi}{۸} a^۴.$$

$$u = \sin t \to du = \cos t dt \to \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \cos t dt = \int_۰^۱ u du = \frac{۱}{۲}.$$

$$u = \sin t \to du = \cos t dt \to \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۳ t \cos t dt = \int_۰^۱ u^۳ du = \frac{۱}{۴}.$$

$$\sin^۲ t = \frac{۱ - ۲\cos ۲t}{۲}, \ \cos^۲ t = \frac{۲\cos ۲t - ۱}{۲},$$

$$\sin^۴ t = (\sin^۲ t)^۲ = (\frac{۱ - \cos ۲t}{۲})^۲ = \frac{۱ - ۲\cos ۲t + \cos^۲ ۲t}{۴}$$

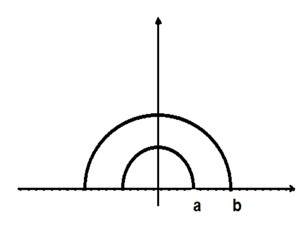
$$= \frac{۱ - ۲\cos ۲t + (\frac{۱ + \cos ۴t}{۲})}{۴} = \frac{۳ - ۴\cos ۲t + \cos ۴t}{۸}.$$

$$
\begin{aligned}
\cos^{۴} t &= (\cos^{۲} t)^{۲} = (\frac{۱+\cos ۲t}{۲})^{۲} = \frac{۱+۲\cos ۲t+\cos^{۲} ۲t}{۴} \\
&= \frac{۱+۲\cos ۲t+(\frac{۱+\cos ۴t}{۲})}{۴} = \frac{۳+۴\cos ۲t+\cos ۴t}{۸}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۴} t+\cos^{۴} t &= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۳+\cos ۴t}{۴} dt = \frac{۳}{۴}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} dt + \frac{۱}{۴}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} cos۴tdt \\
&= \frac{۳}{۸}\pi + \frac{۱}{۱۶}(\sin ۲\pi - \sin ۰) = \frac{۳}{۸}\pi.
\end{aligned}
$$

سوال۱۲

در صورتی که C مرز ناحیه بین دو نیم دایره به شعاع های a و b و آن بخشی روی محور x است که این دو مرز را به هم متصل کند و بطور مثبت جهت دهی شده و مطابق شکل زیر باشد.



حاصل انتگرال زیر را بدست آورید

$$\oint_C (۴x + \sin(x))dx + (e^{\cos(y)} + ۳x^۲)dy.$$

چون خم C قطعه قطعه هموار، ناحیه داخل آن بسته و میدان برداری
$F = \left(۴x + \sin(x), +e^{\cos(y)} + ۳x^۲\right)$ هموار است، لذا بنابه قضیه گرین داریم

$$\begin{aligned}
\oint_C F.dr &= \iint \left(\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \iint_R (۶x)\, dA \\
&= \int_۰^{\pi} \int_a^b ۶r^۲ \cos\theta dr d\theta \\
&= ۶ \int_۰^{\pi} \cos\theta d\theta \int_a^b r^۲ dr \\
&= ۰
\end{aligned}$$

سوال۱۳

(آدامز بخش ۴ $-$ ۱۶ سوالات ۴,۸) با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری

الف)$F = (x^۳, ۳yz^۲, ۳y^۲z + x^۲)$ را در خروج از کره S به معادله $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ که در آن $a > ۰$، محاسبه کنید.

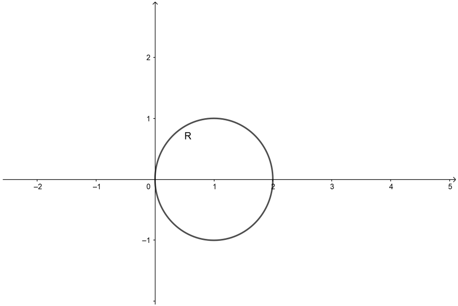
ب) $F = (x^۲, y^۲, z^۲)$ را در خروج از مرز ناحیه محصور به استوانه $x^۲ + y^۲ \leq ۲y$ و $۰ \leq z \leq ۴$ محاسبه کنید.

پاسخ سوال ۱۳

(الف) داریم $divF = ۳x^۲ + ۳z^۲ + ۳y^۲$، فرض کنیم D گویی به مرکز مبدا و شعاع a باشد، سپس بنابه قضیه دیورژانس شار میدان برداری را محاسبه میکنیم:

$$\oiint_S F.\hat{N} dS = \iiint_D divF dV = ۳ \iiint_D (x^۲ + y^۲ + z^۲) dV$$

$$= ۳ \int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{\pi} \sin\Phi \int_۰^{a} \rho^۴ d\rho = \frac{۱۲}{۵}\pi a^۵.$$



(ب) داریم $divF = ۲x + ۲y + ۲z$، فرض کنیم D ناحیه داخل استوانه باشد، حال با قضیه دیورژانس شار میدان برداری را محاسبه میکنیم

$$\oiint_S F.\hat{N}dS = \iiint_D divFdV = ۲\iiint_D (x+y+z)dV$$
$$= ۲\iiint_D xdV + ۲\iiint_D ydV + ۲\iiint_D zdV,$$

چون ناحیه D نسبت به x متقارن است و x تابعی فرد است پس

$$\iiint_D xdV = ۰$$

و

$$\iiint_D y dV = \int_۰^۴ \int_۰^\pi \int_۰^{۲\sin\theta} r^۲ \sin\theta dr d\theta dz$$
$$= \int_۰^۴ \int_۰^\pi \sin\theta \frac{(۲\sin\theta)^۳}{۳} d\theta dz$$
$$= \frac{۸}{۳} \int_۰^۴ dz \int_۰^\pi \sin^۴\theta d\theta$$
$$= \frac{۸}{۳} \int_۰^۴ dz \int_۰^\pi \frac{۳ - ۴\cos ۲t + \cos ۴t}{۸} d\theta$$
$$= ۴\pi.$$

و از طرف دیگر

$$\iiint_D zdV = \int_{۰}^{۴} zdz \iint_R dA = (\frac{z^{۲}}{۲})\Big|_{۰}^{۴} \pi = ۸\pi,$$

که R دایره $x^{۲} + (y-۱)^{۲} = ۱$ هست. در نتیجه

$$\oiint_S F.\hat{N}dS = ۲۴\pi.$$

یادآوری: مختصات استوانه ای

$$x^{۲} + y^{۲} = r^{۲}, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

سوال۱۴

(آدامز بخش ۴ − ۱۶ سوال13) فرض کنیم D حجم محصور به $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴a^۲$ و $x^۲ + y^۲ \geq a^۲$ باشد. مرز D، یعنی S، از یک قسمت استوانه ای به نام $S_۱$ و یک قسمت کروی به نام $S_۲$ تشکیل شده است. شار $F = (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$ را در خروج از D و عبور از رویه های زیر محاسبه کنید.

الف) کل رویه S ب) رویه $S_۱$ ج) رویه $S_۲$

حل (الف): $divF = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$. شرایط قضیه دیورژانس برقرار است. لذا داریم:

$$\begin{aligned} \oiint_S F.NdS &= \iiint_D divFdV = ۳\int_۰^{۲\pi}\int_a^{۲a}\int_{-\sqrt{۴a^۲-r^۲}}^{\sqrt{۴a^۲-r^۲}} rdzdrd\theta \\ &= ۶\int_۰^{۲\pi} d\theta \int_a^{۲a} r\sqrt{۴a^۲-r^۲}dr = ۱۲\sqrt{۳}\pi a^۳. \end{aligned}$$

(ب) در ابتدا فصل مشترک $S_۱$ و $S_۲$ را پیدا می کنیم. در مختصات استوانه ای داریم

$$x^۲+y^۲=r^۲, \quad x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad z=z$$

لذا معادله استوانه $x^۲+y^۲=a^۲$ و کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴a^۲$ در مختصات استوانه ای به ترتیب به فرم $r=a$ و $r^۲+z^۲=۴a^۲$ می شود. اگر $\alpha=(r,\theta,z)$ یک نقطه بر فصل مشترک $S_۱$ و $S_۲$ باشد آنگاه $\alpha=(a,\theta,\pm\sqrt{۳}a)$.

فرض کنیم

$$f(\theta, z) = (a \cos\theta, a \sin\theta, z).$$

ناحیه $T = \left\{(\theta, z);\ \ \circ \le \theta \le \text{۲}\pi,\ -\sqrt{\text{۳}}a \le z \le \sqrt{\text{۳}}a\right\} \subset \mathrm{R}^{\text{۲}}$ را در نظر گرفته، واضح است که

$$S_{\text{۱}} = \{f(\theta, z);\ \ (\theta, z) \in T\}.$$

حال المان سطح $S_{\text{۱}}$ را حساب میکنیم.

$$f_\theta = (-a \sin\theta, a\cos\theta, \circ), \quad f_z = (\circ, \circ, \text{۱})$$

$$f_\theta \times f_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & \circ \\ \circ & \circ & \text{۱} \end{vmatrix} = a\cos\theta i + a\sin\theta j$$

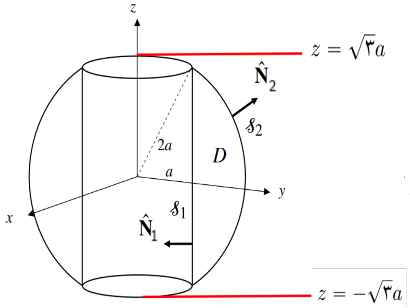
$$|f_\theta \times f_z| = a,$$

$$dS = |f_\theta \times f_z| d\theta dz = a d\theta dz, \quad N_{\text{۱}} = -\frac{f_\theta \times f_z}{|f_\theta \times f_z|} = \frac{-\text{۱}}{a}(x, y, \circ).$$

(شار خروجی از سطح مورد نظر که محدود به کره و استوانه هست را محاسبه میکنیم. لذا بردار عمود و به سمت خارج به این سطح از طرف چپ به سمت داخل استوانه است.)

$$\iint_{S_۱} F.N_۱ dS = \iint_T \frac{-x^۲ - xyz - y^۲ + xyz}{a} a d\theta dz$$

$$= -a^۲ \int_۰^{۲\pi} d\theta \int_{-\sqrt{۳}a}^{\sqrt{۳}a} dz = -۴\sqrt{۳}\pi a^۳.$$



(ج) حال شار خروجی از بخش کروی یعنی $S_۲$ به صورت زیر است

$$\oiint_{S_۲} F.NdS = \oiint_{S} F.NdS - \oiint_{S_۱} F.N_۱dS$$
$$= ۱۲\sqrt{۳}\pi a^۳ + ۴\sqrt{۳}\pi a^۳$$
$$= ۱۶\sqrt{۳}\pi a^۳.$$

سوال۱۵

(آدامز بخش ۵ — ۱۶ سوال 4) انتگرال $\iint_S (curlF).N\, dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه $x^۲+y^۲+۲(z-۱)^۲=۶$ است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F=\left(xz-y^۳cosz, x^۳e^z, xyze^{x^۲+y^۲+z^۲}\right)$$

بیضیگون $D: x^{۲}+y^{۲}+۲(z-۱)^{۲}=۶$ را در نظر میگیریم. رویه S بخشی از بیضیگون D است که بالای صفحه $z=۰$ قرار دارد. فرض کنیم C خم حاصل از فصل مشترک بیضیگون D و صفحه $z=۰$ باشد. واضح است که خم C مرز رویه S هست.

$$z=۰ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۲=۶ \Rightarrow C: \begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=۴, \\ z=۰. \end{cases}$$

واضح است که رویه S جهت دار است و خم C که یک دایره است هموار است. از طرفی میدان برداری F نیز به وضوح هموار است. لذا شرایط قضیه استوکس برقرار است و داریم:

$$\iint_S (curlF).N\, dS = \oint_C F.dr$$

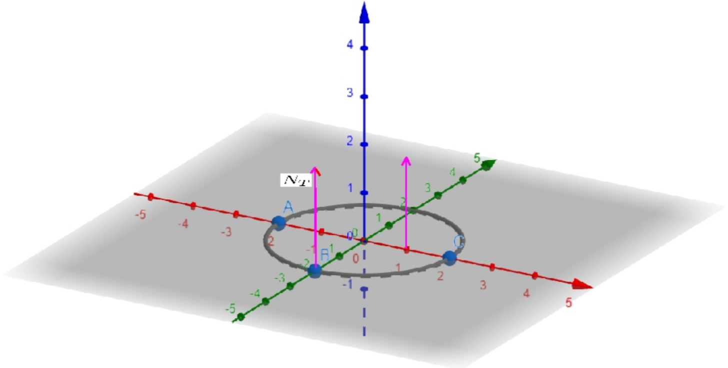
از طرفی خم C مرز قرص T به مرکز مبدا و شعاع 2 در صفحه $z = ۰$ نیز هست.

$$T : \begin{cases} x^۲ + y^۲ \leq ۴, \\ z = ۰. \end{cases}$$

که T سطحی جهت پذیر و ساده تر از S هست زیرا میدان برداری قائم آن N_T ثابت $k = (۰, ۰, ۱)$ است. حال با استفاده دوباره از قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_T (curlF).k \; dA$$

پاسخ سوال ۱۵



قرار دهید

$$F = \left(xz - y^{۳}cosz, x^{۳}e^{z}, xyze^{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}\right) = (P, Q, R)$$

سپس

$$curlF = \left(h, g, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(h, g, ۳x^{۲}e^{z} + ۳y^{۲}\cos z.\right)$$

بر سطح T داریم:

$$curlF.k = (۳x^{۲}e^{z})\Big|_{z=۰} + (۳y^{۲}\cos z)\Big|_{z=۰} = ۳(x^{۲} + y^{۲})$$

$$\oint_C F.dr = \iint_T ۳(x^{۲} + y^{۲})dA = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۲} ۳r^{۲}rdrd\theta = ۲۴\pi.$$

سوال۱۶

(پایانترم ۹۶ — ۹۵) فرض کنید
$f(x,y,z) = a_1x^4 + a_2y^4 + a_3z^4 + 3a_4x^2y^2 + 3a_5y^2z^2 + 3a_6x^2z^2$ و S کره $\rho = 1$ است. اگر N بردار قائم یکه روبه بیرون بر S باشد. در اینصورت
الف) میدان برداری $F(x,y,z)$ را چنان بیابید که داشته باشیم $F.N = f(x,y,z)$.
ب) با استفاده از قضیه دیورژانس نشان دهید: $\displaystyle\int\int_S f\, dS = \frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^{6} a_i$

الف) برای کره $x^2+y^2+z^2=1$ داریم: $N=(x,y,z)$
اگر فرض کنیم

$$F=(a_1x^3+3a_4xy^2, a_2y^3+3a_5yz^2, a_3z^3+3a_6zx^2)$$

داریم

$$F\cdot N=f(x,y,z)$$

ب)

$$\int\int_S fdS = \int\int_S F\cdot NdS = \int\int\int_V divFdV$$
$$= \int\int\int_V (۳(a_۱+a_۶)x^۲ + ۳(a_۴+a_۲)y^۲ + ۳(a_۳+a_۵)z^۲)dV$$

با توجه به تقارن نسبت به x و y و z داریم:

$$\int\int\int_V x^۲dV = \int\int\int_V y^۲dV = \int\int\int_V z^۲dV$$
$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۰^۱ \rho^۲\cos(\varphi)\rho^۲\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\theta$$
$$= ۲\pi(\int_۰^۱ \rho^۴ d\rho)(\int_۰^{\pi}\cos^۲(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi)$$
$$= ۲\pi\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۲}{۳} = \frac{۴\pi}{۱۵}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\int\int_S f dS &= (۳(a_۱ + a_۶)\int\int\int_V x^۲ dV + \\ &+ ۳(a_۴ + a_۲)\int\int\int_V y^۲ dV + ۳(a_۳ + a_۵)\int\int\int_V z^۲ dV \\ &= \frac{۴\pi}{۵}(a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ + a_۶)\end{aligned}$$

سوال۱۷

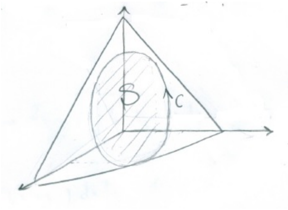
(آدامز بخش ۵ − ۱۶ سوال 8) فرض کنید $F = ye^x\vec{i} + \left(x^2 + e^x\right)\vec{j} + z^2 e^z\vec{k}$.

مطلوبست محاسبه $\oint_C F.dr$ که C خم

$$r(t) = (1+\cos t)\vec{i} + (1+\sin t)\vec{j} + (1-\cos t-\sin t)\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

است. راهنمایی: قضیه استوکس را بکار ببرید و توجه داشته باشید که Cبر صفحه معینی قرار دارد و تصویر آن بر صفحه xy یک دایره است.

حل: از اینکه $r(\circ) = r(2\pi)$، C یک منحنی بسته است، و همچنین از $x(t) + y(t) + z(t) = 3$، نتیجه می‌شود که خم C روی صفحه $x(t) + y(t) + z(t) = 3$ قرار دارد. با توجه به این‌که $\circ \leq t \leq 2\pi$ است می‌توان دید که منحنی در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود.



D: تصویر S در صفحه xy

تغییر متغیر: $u = x - 1$ و $v = y - 1$

$D^+ : u^2 + v^2 \leq 1$

$$x(t)+y(t)+z(t)=۳ \Rightarrow f(x,y,z)=x+y+z-۳=۰$$

$$ds=\sqrt{۱+z_x^۲+z_y^۲}dxdy=\sqrt{۳}dxdy$$

$$n=\frac{(۱,۱,۱)}{\sqrt{۳}}$$

$$curlF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ye^x & x^۲+e^x & z^۲e^z \end{vmatrix}=(۰,۰,۲x+e^x-e^x)=(۰,۰,۲x)$$

$$curlF\cdot n=\frac{۲x}{\sqrt{۳}}$$

$$\oint_C F\cdot dr=\int\int_S curlF\cdot nds = \int\int_D \frac{۲x}{\sqrt{۳}}(\sqrt{۳}dxdy)$$
$$= \int\int_D ۲xdxdy=\int\int_{D^+} ۲(u+۱)dudv$$
$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۲(r^۲\cos\theta+r)drd\theta=۲\pi$$

سوال۱۸

(پایانترم ۹۸ − ۹۷)

الف) $\int\int_S (curlF).N\, dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه $x^۲ + y^۲ + (z-۲)^۴ = ۱۷$ است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و $F = \left(x^۲ - y^۲, y^۲ - z^۲, z^۲ - x^۲\right)$.

ب) فرض کنید D ناحیه خارج استوانه $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و داخل کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴a^۲$ باشد و S مرز ناحیه D باشد. مطلوبست $\int\int_S F.N\, dS$ که در آن

$$F = (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$$

و N قائم یکه بر S و روبه خارج S است.

حل: الف) با دو بار استفاده از قضیه‌ی استوکس، داریم:

$$\int\int_S curlF \cdot NdS = \int_C F \cdot dr = \int\int_D curlF \cdot NdS$$

S رویه داده شده، C مرز S و D رویه $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ می‌باشند.
N روی رویه D برابر است با $N = (۰, ۰, ۱)$.

$$curlF = (۲z, ۲x, ۲y)$$

محاسبه انتگرال:

$$\int\int_{x^۲+y^۲\leq ۱} ۲ydxdy = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۲r^۲ \sin\theta drd\theta = ۰$$

ب) فرض کنید D ناحیه خارج استوانه $x^۲+y^۲=a^۲$ و داخل کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴a^۲$ باشد و S مرز ناحیه D باشد. مطلوبست $\int\int_S F\cdot NdS$ که در آن

$$F=(x+yz, y-xz, z-e^x\sin y)$$

و N قائم یکه بر S و روبه خارج S است.

$$divF=۳$$

$$\begin{aligned}
\int\int_S F\cdot NdS=\int\int\int_D divFdV &= ۳\int\int\int_D dV\\
&= ۳\int_a^{۲a} r\int_۰^{۲\pi}\int_{-\sqrt{۴a^۲-r^۲}}^{\sqrt{۴a^۲-r^۲}} dzd\theta dr\\
&= -۴\pi(۴a^۲-r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_a^{۲a}\\
&= ۴\pi(۳a^۲)^{\frac{۳}{۲}}
\end{aligned}$$

سوال۱۹

(پایانترم ۹۷ − ۹۶) فرض کنید $F = \left(x^{۲} + y + ۲ + z^{۲}, e^{x^{۲}} + y^{۲}, ۳ + x\right)$. اگر $a > ۰$ و S آن قسمت از رویه کروی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۲az + ۳a^{۲}$ باشد که بالای صفحه xy قرار دارد و اگر N قائم یکه رو به بالا بر S ، (روبه خارج کره شامل S) باشد، شار میدان برداری F را که از S در جهت N می گذرد حساب کنید.

حل: سطح S قسمتی از کره $x^2+y^2+(z-a)^2=4a^2$ است که بالای صفحه xy قرار دارد. برای استفاده از قضیه دیورژانس سطح S_1، قسمتی از صفحه $z=0$ که به کره محدود شده است، را اضافه می‌کنیم. از طرفی برای استفاده از قضیه دیورژانس قائم یکه باید رو به خارج سطح بسته‌ی مورد نظر باشد. بردار N روی S که طبق فرض این گونه است. بنابراین بردار N_1 را روی سطح S_1 رو به پایین می‌گیریم، در واقع داریم: $N_1=-k$ به علاوه ناحیه مشخص شده توسط S_1 عبارت است از تمام نقاط صفحه ی xy در $\mathcal{R}^2$ که $x^2+y^2\leq 3a^2$ (در واقع قرار می‌دهیم $z=0$ و از رابطه $x^2+y^2+(z-a)^2=4a^2$ استفاده می‌کنیم.)

حال برای میدان برداری F روی ناحیه D (محدود شده به سطح $S\cup S_1$) از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\int\int_S F\cdot Nds+\int\int_{S_1} F\cdot Nds=\int\int\int_D div(F)dV$$

داریم:

$$\begin{aligned} F &= \left(x^{۲} + y + ۲ + z^{۲}, e^{x^{۲}} + y^{۲}, ۳ + x\right) = (F_{۱}, F_{۲}, F_{۳}) \\ \Rightarrow div(F) &= \frac{\partial F_{۱}}{\partial x} + \frac{\partial F_{۲}}{\partial y} + \frac{\partial F_{۳}}{\partial z} = ۲x + ۲y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\int\int_D div(F)dV &= \int\int\int_D (۲x + ۲y)dV \\ &= ۲\int\int\int_D xdV + \int\int\int_D ydV = ۰ \end{aligned}$$

زیرا هر دو انتگرال هایی از توابع فرد روی دامنه متقارن هستند.

$$
\begin{aligned}
\int\int_S F\cdot N ds &= -\int\int_{S_۱} F\cdot N ds\\
&= -\int\int_{x^۲+y^۲\leq ۳a^۲} F\cdot(-k)ds\\
&= \int\int_{x^۲+y^۲\leq ۳a^۲}(۳+x)dxdy\\
&= ۳\int\int_{x^۲+y^۲\leq ۳a^۲} dxdy+\int\int_{x^۲+y^۲\leq ۳a^۲} xdxdy\\
&= ۳(۳\pi a^۲)=۹\pi a^۲
\end{aligned}
$$

زیرا انتگرال اول سه برابر مساحت دایره $x^۲+y^۲=۳a^۲$ و دومی انتگرال یک تابع فرد روی دامنه متقارن است.

سوال۲۰

(آدامز بخش ۵ — ۱۶سوال ۵) با استفاده از قضیه استوکس نشان دهید

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = \sqrt{۳}\pi a^{۲}$$

که در آن C خم فصل مشترک رویه های $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = a^{۲}$ و $x + y + z = ۰$ با جهت دهی مناسب است.

S را قسمتی از صفحه $x+y+z=0$ در نظر می‌گیریم که به منحنی فصل مشترک محدود شده است. با فرض اینکه معادله این رویه را g بنامیم می توان قائم یکه بر S را $\vec{n}=-\frac{\overrightarrow{\nabla g}}{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|}=-\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ در نظر گرفت. (توجه داشته باشید بردار مثبت هم میتوان در نظر گرفت اما با انتخاب جهت مثبت برای خم و انتخاب بردار مثبت تساوی آخر منفی خواهد شد.) اگر از معادله صفحه z را بیابیم و در معادله کره قرار دهیم، تصویر محل تلاقی در صفحه xy به معادله $x^2+y^2+xy=a^2/2$ است.

$$dS=\frac{\left|\overrightarrow{\nabla g}\right|}{|g_z|}dxdy=\sqrt{3}dxdy$$

$$F=(y,z,x)\Rightarrow Curl(F)=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}=(-1,-1,-1)$$

$$\oint_C F.dr = \int\int_S curl(F).nds = \frac{۳}{\sqrt{۳}}\int\int_S ds = ۳\int\int_{x^۲+y^۲+xy\leq a^۲/۲} dxdy$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(u-v), y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(u+v) \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{vmatrix}$$

با این تغییر متغیر محل تلاقی بیضی $۱ = \frac{u^۲}{a^۲} + \frac{v^۲}{a^۲/۳}$ است. بنابراین

$$\oint_C F\cdot dr = ۳\int\int_{\frac{v^۲}{a^۲/۳}+\frac{u^۲}{a^۲}\leq ۱} dudv = ۳\pi(\frac{a}{\sqrt{۳}}a) = \sqrt{۳}\pi a^۲$$

نکته: مساحت بیضی به معادله $۱ = \left(\frac{x}{a}\right)^۲ + \left(\frac{y}{b}\right)^۲$ برابر πab است.

متشکر از توجه شما