# ریاضی عمومی ۲

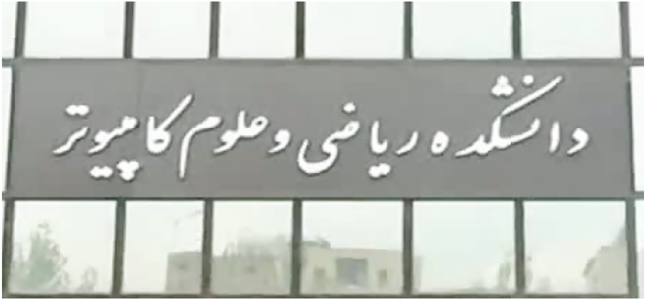
ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

# طرح درس


۱ یادآوری هندسه تحلیلی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$
۲ توابع برداری و خم‌ها (منحنی‌ها)
۳ معرفی توابع چندمتغیره
۴ حد و پیوستگی
۵ مشتقات جزئی
۶ مشتق‌پذیری
۷ مشتق جهتی
۸ توابع ضمنی
۹ کاربردهای مشتقات جزئی
۱۰ **انتگرال دوگانه**
۱۱ انتگرال سه‌گانه
۱۲ انتگرال روی خم (یا انتگرال خط)
۱۳ انتگرال روی سطح
۱۴ قضایای دیورژانس و استوکس
۱۵ مقدمه‌ای بر جبرخطی

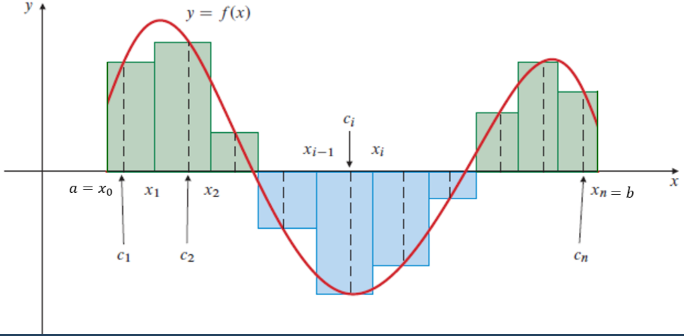



انتگرال دوگانه

# یادآوری

فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی کران‌دار و $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ یک افراز از $[a,b]$ باشد. قرار می‌دهیم:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$



# یادآوری



در این صورت، $f$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر انتخاب $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le n)$، حد زیر موجود و متناهی باشد:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

اگر $f$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه مقدار حد بالا برابر با انتگرال $f$ روی $[a,b]$ تعریف و با نماد $\int_a^b f(x)\, dx$ نمایش داده می‌شود.

# انتگرال دوگانه



فرض کنید که $R=[a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ یک مستطیل بسته و $f : R \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار باشد. افرازهای زیر را برای بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ در نظر می‌گیریم:

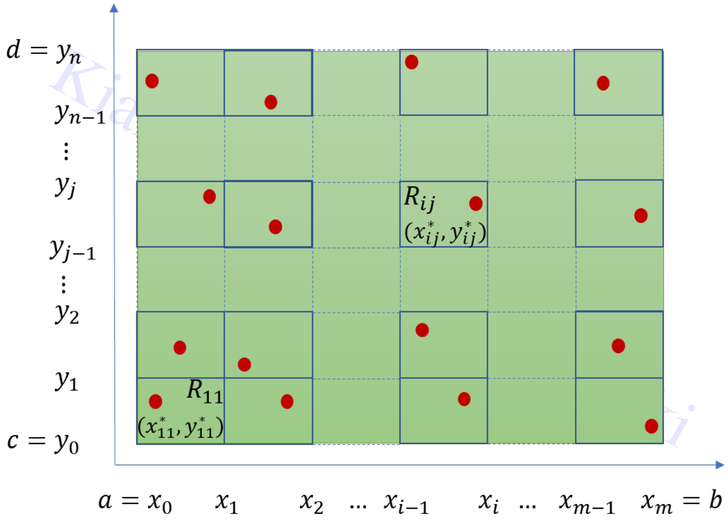
$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = b\}$$

$$P_2 = \{c = y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n = d\}$$

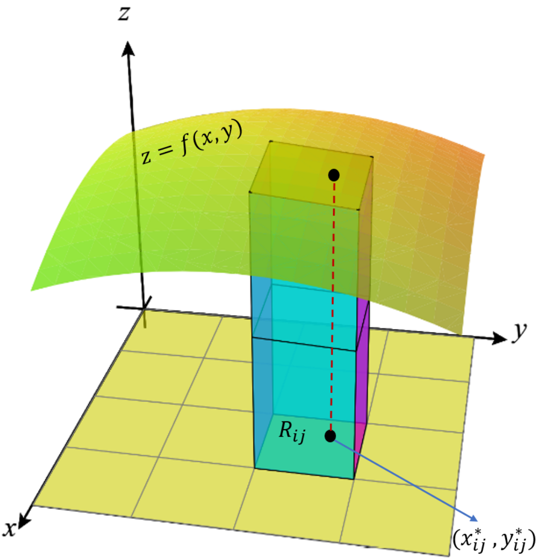
در این صورت، افراز $P$ از مستطیل $R$ را می‌توان متشکل از $mn$ مستطیل زیر در نظر گرفت:

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$$

همچنین، فرض کنید که به‌ازای هر $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$، $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$.



$d = y_n$
$y_{n-1}$
$\vdots$
$y_j$
$y_{j-1}$
$\vdots$
$y_2$
$y_1$
$c = y_0$
$R_{ij}$
$(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$
$R_{11}$
$(x_{11}^*, y_{11}^*)$
$a = x_0$
$x_1$
$x_2$
...
$x_{i-1}$
$x_i$
...
$x_{m-1}$
$x_m = b$


z
$z = f(x,y)$
y
x
$R_{ij}$
$(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$

قرار می‌دهیم:

$$R(P,f)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*,y_{ij}^*)A_{ij}$$

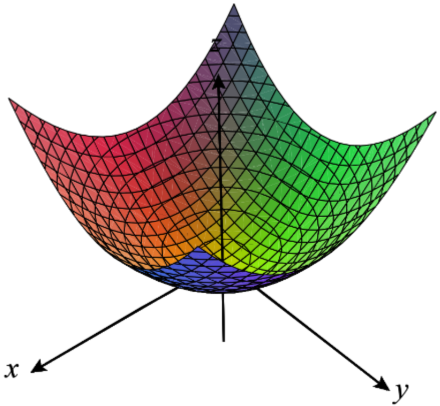
که در آن، به‌ازای هر $i$ و $j$، $A_{ij}$ مساحت $R_{ij}$ است. حال، فرض کنید که $\|P\|$ ماکسیمم قطرهای همهٔ مستطیل‌های $R_{ij}$ باشد؛ یعنی:

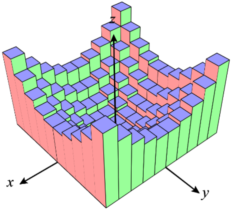
$$\|P\|=\max\left\{\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_j^2} : 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\right\}$$

چنانچه $\lim_{\|P\|\to 0} R(P,f)$ وجود داشته باشد، آنگاه قرار می‌دهیم:

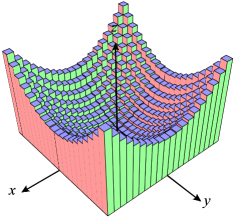
$$\iint_R f\ dA := \lim_{\|P\|\to 0} R(P,f)$$

در شکل زیر، نمودار $f(x,y) = x^2 + y^2$ به‌ازای $-1 \leq x, y \leq 1$ ترسیم شده است. در اسلایدهای بعدی، $R(P,f)$ به عنوان مجموع حجم‌های مکعب‌های نشان داده شده، به‌ازای چند افراز مختلف $P$ برای مستطیل $[-1,1] \times [-1,1]$ نمایش داده شده است.

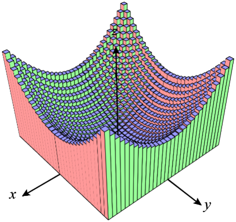




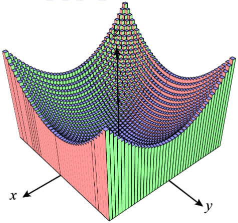

$m = n = 10$ (آ)



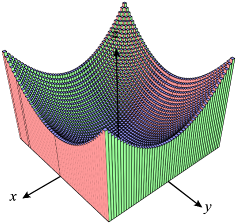

$m = n = 20$ (ب)




$m = n = 30$ (ج)

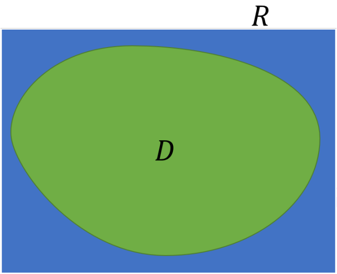



$m = n = 40$ (د)




$m = n = 50$ (ه)

در حالت کلی، فرض کنید که $D$ یک ناحیهٔ بسته و کران‌دار و $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار باشد. در این صورت مستطیل $R \subseteq \mathbb{R}^2$ وجود دارد که $D$ را در بر می‌گیرد.




حال، تعریف می‌کنیم:

$$\widehat{f} : R \to \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in D \\ 0 & ,(x,y) \in R \backslash D \end{cases}$$

در این صورت، انتگرال $f$ روی $D$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iint_D f \, dA := \iint_R \widehat{f} \, dA$$

## قضیه

فرض کنید که $D$ یک زیرمجموعهٔ بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}^2$ باشد، $f, g : D \to \mathbb{R}$ توابعی انتگرال‌پذیر باشند و $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. در این صورت:

۱ اگر مساحت $D$ صفر باشد، آنگاه داریم:

$$\iint_D f\, dA = 0$$

۲ اگر به‌ازای هر $(x, y) \in D$، داشته باشیم $f(x, y) = 1$، آنگاه داریم:

$$\iint_D f\, dA = \text{مساحت } D$$

۳ اگر به‌ازای هر $(x, y) \in D$، داشته باشیم $f(x, y) \geq 0$، آنگاه داریم:

$$V = \iint_D f\, dA$$

که در آن $V$ حجم ناحیه‌ای از فضا است که به‌طور قائم بالای $D$ و زیر نمودار $f(x,y)$ قرار می‌گیرد.

۴ اگر به‌ازای هر $(x,y) \in D$، داشته باشیم $f(x,y) \leq 0$، آنگاه داریم:

$$-V = \iint_D f\, dA$$

که در آن $V$ حجم ناحیه‌ای از فضا است که به‌طور قائم زیر $D$ و بالای نمودار $f(x,y)$ قرار می‌گیرد.

۵ تابع $c_1 f + c_2 g$ انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\iint_D (c_1 f + c_2 g)\, dA = c_1 \iint_D f\, dA + c_2 \iint_D g\, dA$$

۶ اگر به‌ازای هر $(x,y) \in D$ داشته باشیم $f(x,y) \leq g(x,y)$، آنگاه داریم:

$$\iint_D f\,dA \leq \iint_D g\,dA$$

۷ داریم:

$$\left|\iint_D f\,dA\right| \leq \iint_D |f|\,dA$$

۸ اگر $D_1, \ldots, D_n$ ناحیه‌هایی در $\mathbb{R}^2$ باشند که حداکثر در مرزهایشان اشتراک دارند، آنگاه داریم:

$$\iint_{\bigcup_{i=1}^n D_i} f\,dA = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f\,dA$$

۹ فرض کنید که $D$ نسبت به مبدأ متقارن باشد و به‌ازای هر $(x, y) \in D$، داریم $f(-x, -y) = -f(x, y)$. در این صورت، داریم:

$$\iint_D f\, dA = 0$$

۱۰ فرض کنید که $D$ نسبت به محور $x$ متقارن باشد و به‌ازای هر $(x, y) \in D$، داریم $f(x, -y) = -f(x, y)$. در این صورت، داریم:

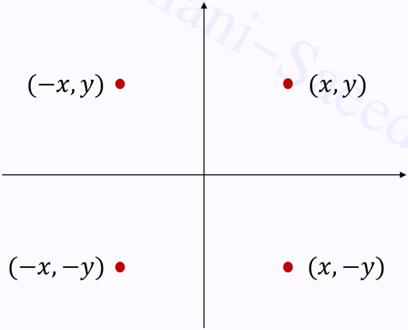
$$\iint_D f\, dA = 0$$

۱۱ فرض کنید که $D$ نسبت به محور $y$ متقارن باشد و به‌ازای هر نقطهٔ $(x, y) \in D$، داریم:

$$f(-x, y) = -f(x, y).$$

در این صورت، داریم:

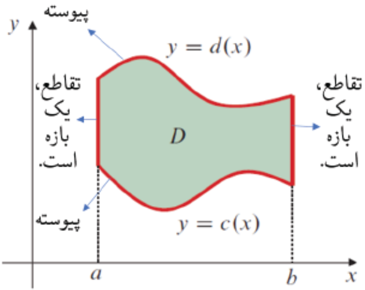
$$\iint_D f \, dA = 0$$



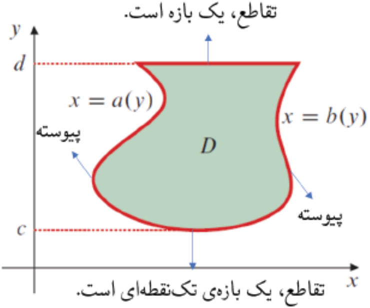
قضیه

فرض کنید که $D$ ناحیه‌ای بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، آنگاه $f$ انتگرال‌پذیر است.

# نواحی $x$–ساده و $y$–ساده در صفحه



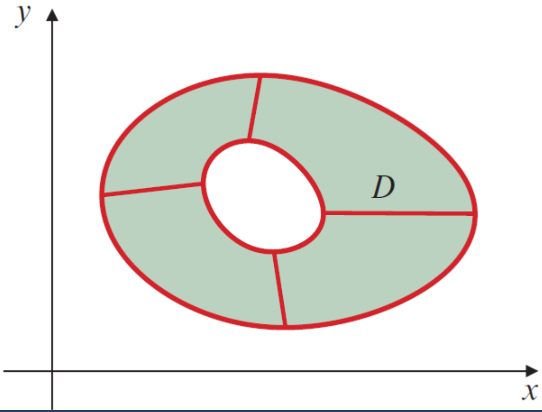

ناحیهٔ $y$–ساده




ناحیهٔ $x$–ساده

# نواحی منتظم در صفحه

ناحیهٔ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را منتظم گوییم، هرگاه اجتماعی از ناحیه‌هایی باشد که هر یک $x$ـساده و $y$ـساده هستند و این ناحیه‌ها حداکثر در مرزهای‌شان اشتراک دارند.



## قضیهٔ فوبینی

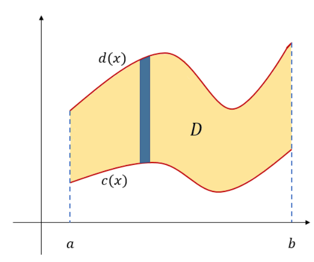
فرض کنید که $D$ یک ناحیهٔ بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}^2$ باشد و $f : D \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد.

۱ اگر

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c(x) \le y \le d(x)\}$$

که در آن $c, d : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته هستند، آنگاه داریم:

$$\iint_D f\, dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dydx$$



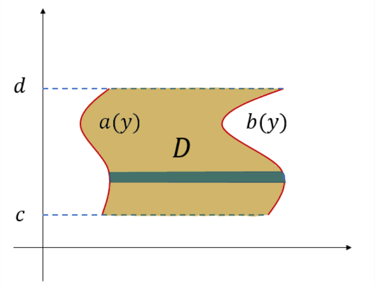

(توجه کنید که ناحیهٔ $D$ یک ناحیهٔ $y$ـساده است.)

۲ اگر

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

که در آن $a, b : [c,d] \to \mathbb{R}$ پیوسته هستند، آنگاه داریم:

$$\iint_D f\, dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx dy$$



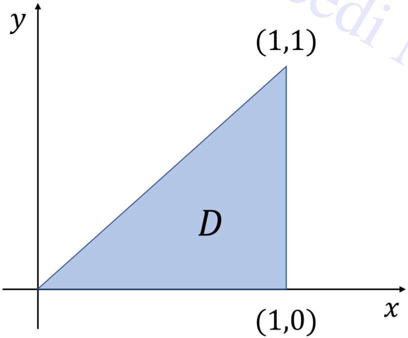

(توجه کنید که ناحیهٔ $D$ یک ناحیهٔ $x$ـساده است.)

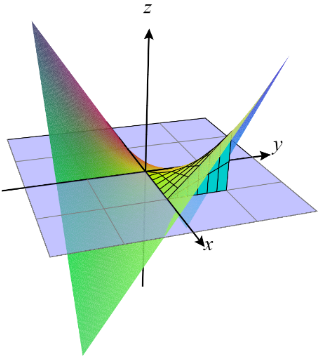
## مثال

فرض کنید که $D$ یک ناحیهٔ مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ است. انتگرال $\iint_D xy\,dA$ را حساب کنید.

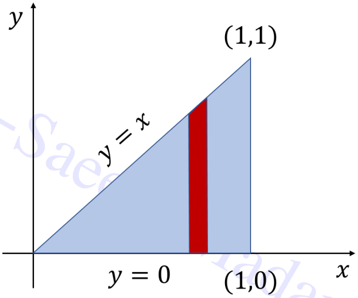


پاسخ:



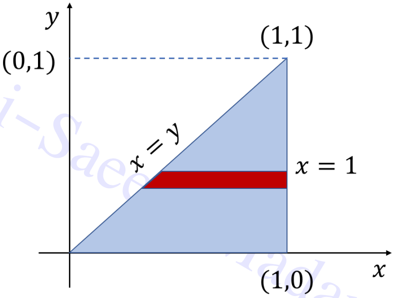
راه اول:




$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \int_0^x xy\,dydx = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \left(\frac{x^4}{8}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}$$

راه دوم:




$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \int_y^1 xy\,dx dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2 y}{2}\right)\Bigg|_{x=y}^{x=1} dy$$

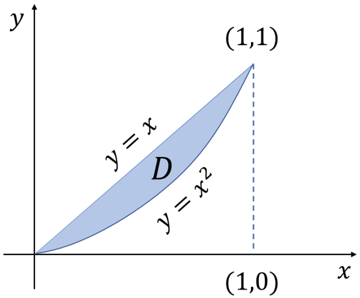
$$= \int_0^1 \frac{y-y^3}{2}\,dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{8}$$

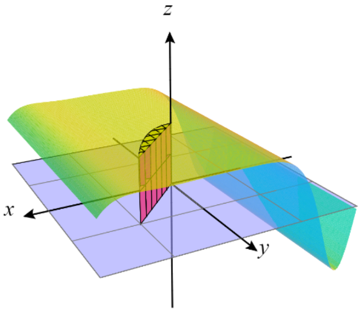
## مثال

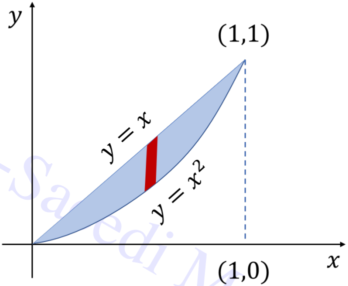
اگر $D$ ناحیهٔ بین $x = \sqrt{y}$ و $x = y$ باشد، آنگاه مطلوب است مقدار انتگرال زیر:

$$I = \iint_D \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\, dA$$

پاسخ:






$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\, dy dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\left(y\right)\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2) \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\, dx$$

حال، تغییر متغیر $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ را اعمال می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} du = (x - x^2)\, dx \\ x = 0 \implies u = 0 \\ x = 1 \implies u = \frac{1}{6} \end{cases}$$

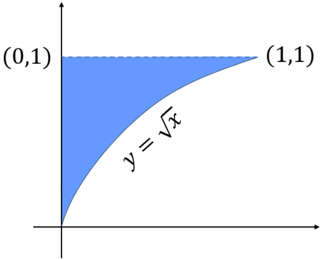
بنابراین، داریم:

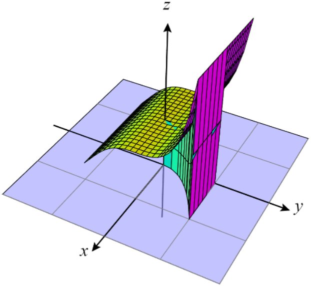
$$I = \int_0^{\frac{1}{6}} \cos(u)\, du = \Big(\sin(u)\Big)\Big|_{u=0}^{u=\frac{1}{6}} = \sin\left(\frac{1}{6}\right)$$

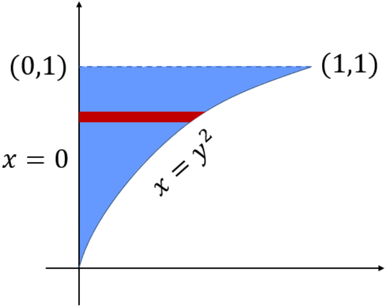
مطلوب است محاسبهٔ انتگرال زیر:

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dydx$$

پاسخ: با توجه به اینکه $e^{y^3}$ تابع اولیهٔ متعارفی ندارد، انتگرال داخلی به راحتی قابل محاسبه نیست. از این‌رو، با مشخص کردن ناحیهٔ انتگرال‌گیری در صفحه، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.






بنابراین، داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3}\, dxdy = \int_0^1 e^{y^3} \left( x \right) \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3}\, dy$$

$$= \left( \frac{e^{y^3}}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{e-1}{3}$$

## انتگرال‌های ناسره (مجازی)



فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. اگر $D$ ناحیه‌ای بی‌کران باشد یا $f$ تابعی بی‌کران باشد، آنگاه $\iint_D f\, dA$ را یک انتگرال ناسره یا مجازی می‌گوییم. در این صورت، اگر مقدار این انتگرال، عددی حقیقی باشد، آنگاه انتگرال ناسره را همگرا و در غیر این صورت، واگرا گوییم.

**توجه**

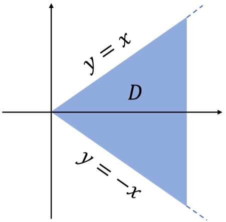
- اگر به‌ازای هر $(x, y) \in D$ داشته باشیم $f(x, y) \geq 0$، آنگاه $\iint_D f\, dA$ همگرا به عددی حقیقی و نامنفی است یا واگرا به $+\infty$.
- اگر به‌ازای هر $(x, y) \in D$ داشته باشیم $f(x, y) \leq 0$، آنگاه $\iint_D f\, dA$ همگرا به عددی حقیقی و نامثبت است یا واگرا به $-\infty$.

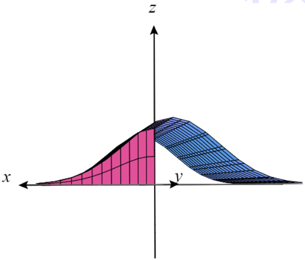
## مثال

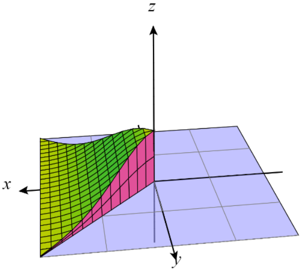
فرض کنید $D$ ناحیه‌ای است که در آن، $x \geq 0$ و $-x \leq y \leq x$. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

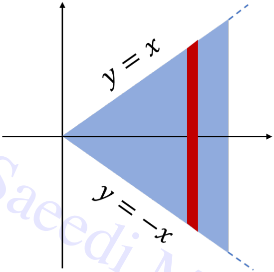
$$I = \iint_D e^{-x^2}\, dA$$

پاسخ:






توجه کنید که $D$ ناحیه‌ای بی‌کران است. بنابراین، $I$ یک انتگرال ناسره است. داریم:

$$I = \int_0^\infty \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\, dy dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \left( y \right)\Big|_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^\infty 2xe^{-x^2}\, dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R 2xe^{-x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \left( -e^{-x^2} \right)\Big|_{x=0}^{x=R} = \lim_{R\to\infty} 1 - e^{-R^2} = 1$$

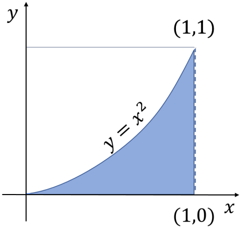
## مثال

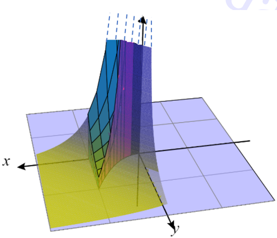
فرض کنید $D$ ناحیه‌ای است که در آن، $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq x^2$. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

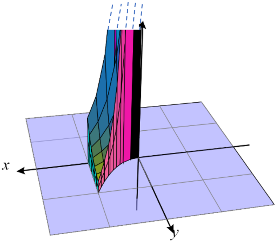
$$I = \iint_D \frac{dA}{(x+y)^2}$$



پاسخ:



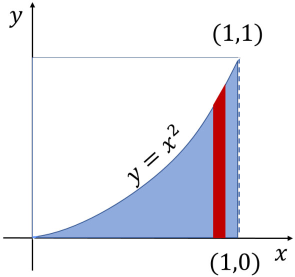



توجه کنید که $D$ ناحیه‌ای کران‌دار است، اما داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{(x+y)^2} = \infty$$

پس، $I$ یک انتگرال ناسره است. داریم:



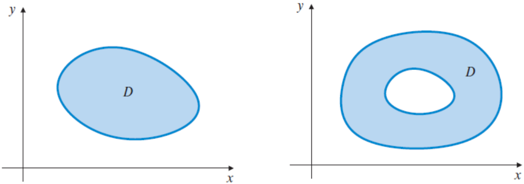

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dydx$$

$$= \int_0^1 \left( -\frac{1}{x+y} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{x(x+1)}\, dx$$

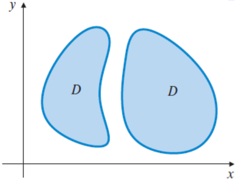
$$= \lim_{\epsilon\to0^+} \int_\epsilon^1 \frac{x}{x(x+1)}\, dx = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x+1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= \Big(\ln(x+1)\Big)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \ln(2)$$

# نواحی همبند و ناهمبند در صفحه




مثال‌هایی از نواحی همبند در صفحه




مثالی از یک ناحیهٔ ناهمبند در صفحه

قضیهٔ مقدار میانگین انتگرال‌های دوگانه

فرض کنید که $D$ یک ناحیهٔ بسته، کران‌دار و هم‌بند در صفحه باشد. اگر $f : D \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه $(x_0, y_0) \in D$ وجود دارد که

$$\iint_D f \, dA = \text{مساحت } D \times f(x_0, y_0)$$

# تبدیل‌های یک‌به‌یک در صفحه

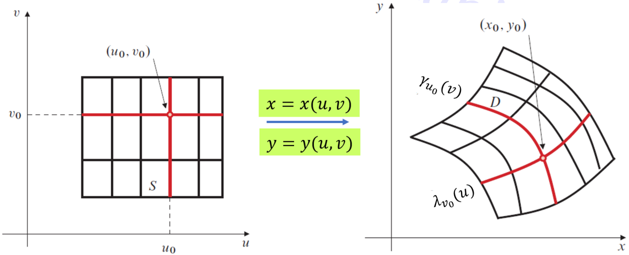


فرض کنید که $S, D \subseteq \mathbb{R}^2$. یک تبدیل یک‌به‌یک بین $S$ و $D$، تابعی دوسویی مثل $\Phi : S \to D$ است. فرض کنید که $(u_0, v_0) \in S$. قرار می‌دهیم:

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)), \quad \Phi(u_0,v_0) = (x_0,y_0)$$

همچنین، خم‌های $\lambda_{v_0}$ و $\gamma_{u_0}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_{v_0}(u) = \Phi(u, v_0), \quad \gamma_{u_0}(v) = \Phi(u_0, v)$$

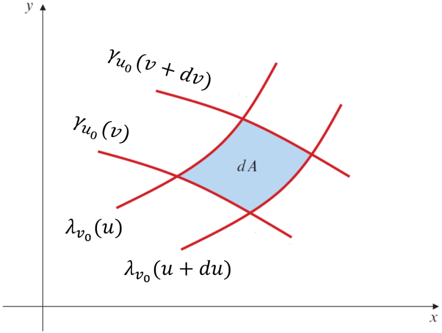


حال، المان سطح $dA = dxdy$ را برحسب المان سطح $dudv$ می‌یابیم. با توجه به شکل، به‌ازای $du$ و $dv$ کوچک، $dA$ را می‌توان متوازی‌الاضلاع در نظر گرفت. پس، داریم:

$$dA = |d\lambda_{v_0} \times d\gamma_{u_0}|.$$

توجه کنید که:

$$\lambda_{v_0}(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0)), \quad \gamma_{u_0}(v) = (x(u_0, v), y(u_0, v))$$



بنابراین، داریم:

$$d\lambda_{v_0} = (dx_{|_{v=v_0}}, dy_{|_{v=v_0}}) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du, \frac{\partial y}{\partial u}du\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) du$$

$$d\gamma_{u_0} = (dx_{|_{u=u_0}}, dy_{|_{u=u_0}}) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}dv, \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

پس، می‌توان نوشت:

$$|d\lambda_{v_0} \times d\gamma_{u_0}| = \left|\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{bmatrix}\right| dudv = \left|\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| dudv$$

از این‌رو، داریم:

$$dA = |d\lambda_{v_0} \times d\gamma_{u_0}| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

### قضیهٔ تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه

فرض کنید که $S, D \subseteq \mathbb{R}^2$. همچنین، فرض کنید که $\Phi : S \to D$ یک تبدیل یک‌به‌یک به‌صورت $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ باشد و مشتقات جزئی اول توابع $x(u,v)$ و $y(u,v)$ موجود و پیوسته باشند. اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد و $g : S \to \mathbb{R}$ به‌صورت $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ تعریف شود، آنگاه $g$ نیز تابعی انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_S g(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

## مثال

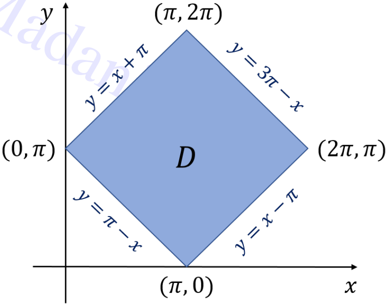
فرض کنید که $D$ متوازی‌الاضلاعی با رئوس $(0,\pi)$، $(\pi,2\pi)$، $(2\pi,\pi)$ و $(\pi,0)$ باشد. حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$I=\iint_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dxdy$$

پاسخ:

ناحیهٔ $D$ مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ است که:

$$\pi\le x+y\le 3\pi,\quad -\pi\le y-x\le\pi$$



حال، تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u = x + y, \qquad v = y - x$$

بنابراین، تحت این تغییر متغیر، ناحیهٔ $D$ به مستطیل زیر تصویر می‌شود:

$$S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \pi \leq u \leq 3\pi,\ -\pi \leq v \leq \pi\}$$

حال، بنابر قضیهٔ تابع وارون، داریم:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین، با فرض $f(x, y) = (x - y)^2 \sin^2(x + y)$، از قضیهٔ تغییر متغیر نتیجه می‌شود که

$$I = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 \sin^2(u)\, dvdu$$

در نتیجه، داریم:

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_{\pi}^{3\pi} \sin^2(u)\,du\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} v^2\,dv\right)$$

در حالی که

$$\int_{\pi}^{3\pi} \sin^2(u)\,du = \int_{\pi}^{3\pi} \frac{1-\cos(2u)}{2}\,du = \left(\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right)\Bigg|_{u=\pi}^{u=3\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} v^2\,dv = \left(\frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_{v=-\pi}^{v=\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$$

از این‌رو، داریم:

$$I = \frac{1}{2}(\pi)\left(\frac{2\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^4}{3}$$

مثال

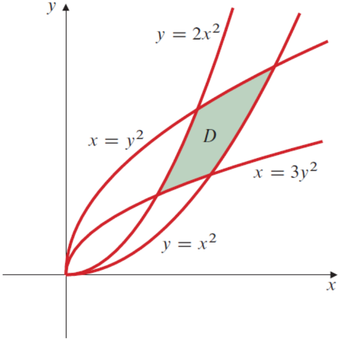
مساحت ناحیهٔ محدود به چهار سهمی $y = x^2$، $y = 2x^2$، $x = y^2$ و $x = 3y^2$ را بیابید.

پاسخ:

تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u = \frac{y}{x^2}, \quad v = \frac{x}{y^2}$$

حال، اگر $D$ ناحیهٔ محدود به چهار سهمی داده‌شده باشد، آنگاه فرض می‌کنیم که تحت $D$ تغییر متغیر بالا به ناحیهٔ $S$ تبدیل می‌شود. توجه کنید که $S$ مجموعهٔ همهٔ نقاط $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ است که $1 \le u \le 2$ و $1 \le v \le 3$.



داریم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}} = \frac{x^2y^2}{3}$$

توجه کنید که $\frac{1}{x^2y^2} = u^2v^2$. بنابراین، $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3u^2v^2}$. در نهایت، داریم:

$$D \text{ مساحت} = \iint_D dxdy = \iint_S \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_1^2 \int_1^3 \frac{dvdu}{3u^2v^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_1^2 u^{-2}\,du\right)\left(\int_1^3 v^{-2}\,dv\right) = \frac{1}{3}\left(-u^{-1}\right)\Big|_{u=1}^{u=2}\left(-v^{-1}\right)\Big|_{v=1}^{v=3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

## تغییر متغیر قطبی

فرض کنید که $D$ ناحیه‌ای در صفحه با مختصات دکارتی باشد و تحت تغییر متغیر قطبی به ناحیهٔ $S$ با مختصات قطبی تبدیل می‌شود. داریم:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} = r$$

بنابراین، از قضیهٔ تغییر متغیر نتیجه می‌شود که

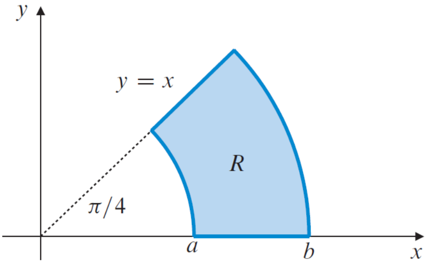
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_S f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,rdrd\theta$$

## مثال

فرض کنید که $0 < a < b$ و $R$ بخشی از ناحیهٔ $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ باشد که زیر خط $y = x$ و در ربع اول قرار می‌گیرد. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \iint_R \frac{y^2}{x^2}\, dA$$

پاسخ:




فرض کنید که $R$ در مختصات قطبی به ناحیهٔ $S$ تبدیل می‌شود. توجه کنید که $S$ مجموعهٔ همهٔ نقاط $(r, \theta)$ است که:

$$a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

بنابراین، داریم:

$$I=\iint_S \frac{(r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2}\, r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_a^b r\tan^2(\theta)\, dr d\theta$$
$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(\theta)\, d\theta\right)\left(\int_a^b r\, dr\right)$$

در حالی که

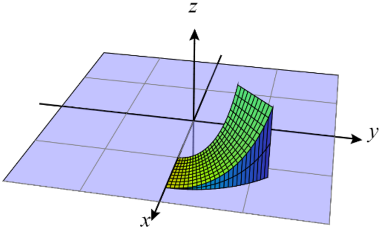
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(1+\tan^2(\theta)\right)-1\right)\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(\theta))\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\, d\theta = (\tan(\theta))\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}$$
$$= 1-\frac{\pi}{4}$$

همچنین، داریم:

$$\int_a^b r\,dr = \left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_{r=a}^{r=b} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

در نهایت، داریم:

$$I = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)$$



# مثال‌های تکمیلی

تاکنون مثال‌های **مفهومی** و **کاربردی** مختلفی را از این مبحث دیدیم. در ادامه، به مثال‌های بیشتری از این مبحث توجه فرمایید. برای درک بهتر، ابتدا به مسائل فکر کنید و سعی کنید که آن‌ها را حل بفرمایید. سپس پاسخ‌ها را با دقت مطالعه و بررسی نمایید.

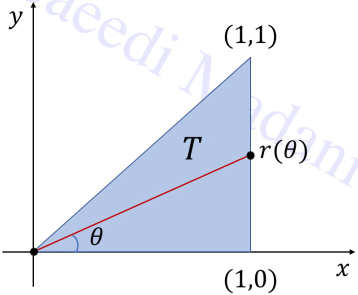
مثال

فرض کنید که $T$ یک ناحیهٔ مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ باشد. کران‌های انتگرال $I = \iint_T g(x,y)\,dA$ را در مختصات قطبی،

۱ به‌صورت $I = \iint g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, rdrd\theta$ بیان کنید.

۲ به‌صورت $I = \iint g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, rd\theta dr$ بیان کنید.

پاسخ ۱: فرض کنید که $T$ در مختصات قطبی به ناحیهٔ $D$ تبدیل می‌شود. در این قسمت از سؤال، باید کران‌های $\theta$ را ثابت و کران‌های $r$ را بر حسب $\theta$ تعیین کنیم. وتر $T$ نیم‌ساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات دکارتی است، پس داریم $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.



توجه کنید که بنابر شکل، $r$ از $0$ تا $r(\theta)$ تغییر می‌کند، در حالی که $r(\theta)$ به‌ازای $x = 1$ به‌دست آمده است. بنابراین، داریم:

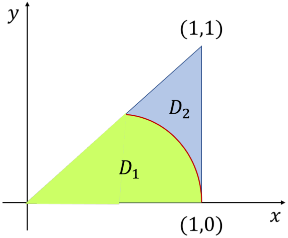
$$1 = x = r(\theta)\cos(\theta) \implies r(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

از این‌رو، داریم:

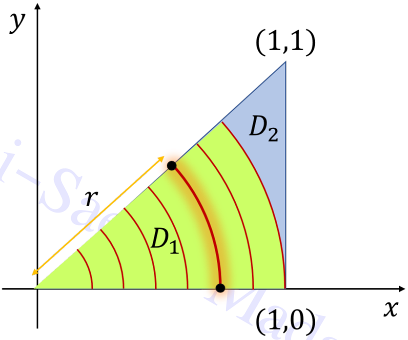
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)}} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r dr d\theta$$

پاسخ ۲:

باید کران‌های $r$ را ثابت و کران‌های $\theta$ را بر حسب $r$ تعیین کنیم. با توجه به توضیحاتی که در ادامه خواهد آمد، لازم است که مطابق شکل ۱ ناحیهٔ $D$ را به دو ناحیهٔ $D_1$ و $D_2$ تقسیم کنیم.

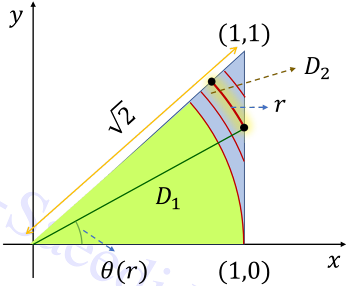



شکل ۱: $D = D_1 \cup D_2$




شکل ۲: تعیین کران‌های $\theta$ بر حسب $r$ در ناحیهٔ $D_1$

مطابق با شکل ۲، در ناحیهٔ $D_1$ داریم $0 \leq r \leq 1$ و به‌ازای یک مقدار ثابت $r$، مقدار $\theta$ از $0$ تا $\frac{\pi}{4}$ تغییر می‌کند.




شکل ۳: تعیین کران‌های $\theta$ بر حسب $r$ در ناحیهٔ $D_2$

مطابق با شکل ۳ در ناحیهٔ $D_2$، داریم $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ و به‌ازای یک مقدار ثابت $r$، اگر $\theta(r)$ به‌ازای $x = 1$ به‌دست آید، آنگاه داریم $\theta(r) \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. حال، $\theta(r)$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x = 1 \implies r\cos(\theta(r)) = 1 \implies \theta(r) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)$$

بنابراین، داریم:

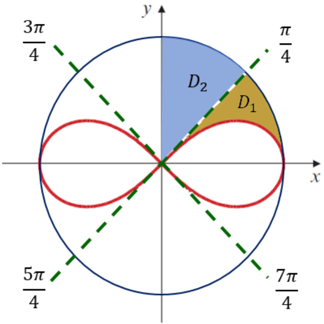
$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r d\theta dr + \iint_{D_2} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r d\theta dr \\
&+ \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\cos^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)}^{\frac{\pi}{4}} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r d\theta dr
\end{aligned}
$$

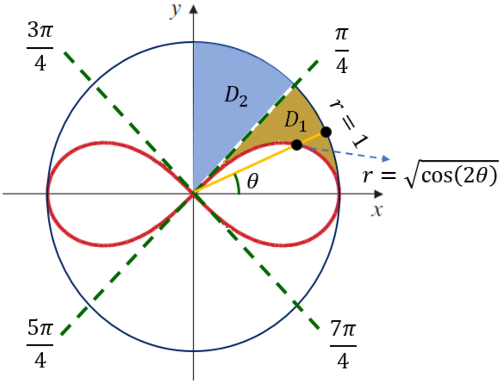
## مثال

فرض کنید که $D$ ناحیهٔ درون دایرهٔ $r=1$، بیرون $r^2=\cos(2\theta)$ و در ربع اول باشد. در این صورت، کران‌های انتگرال $I=\iint_D xy\,dA$ را در مختصات قطبی به هر دو صورت ممکن بیابید.

پاسخ:

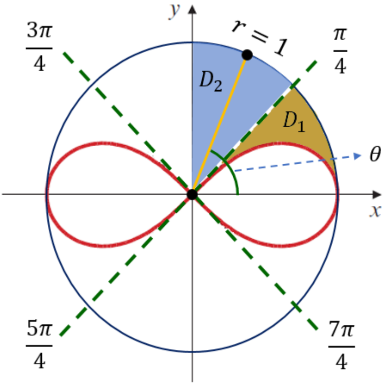
ابتدا کران‌های $\theta$ را ثابت در نظر می‌گیریم و کران‌های $r$ را بر حسب $\theta$ می‌یابیم. با توجه به توضیحاتی که در ادامه خواهد آمد، لازم است که مطابق با شکل، ناحیهٔ $D$ را به دو ناحیهٔ $D_1$ و $D_2$ تقسیم کنیم.






مطابق با شکل، در ناحیهٔ $D_1$ داریم $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ و به‌ازای هر مقدار ثابت $\theta$، داریم:

$$\sqrt{\cos(2\theta)} \leq r \leq 1.$$

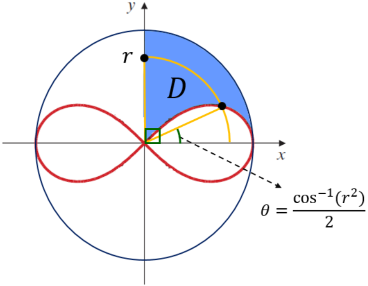



مطابق با شکل، در ناحیهٔ $D_2$ داریم $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و به‌ازای هر مقدار ثابت $\theta$، داریم $0 \leq r \leq 1$.

بنابراین، داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1} xy\,dA + \iint_{D_2} xy\,dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{\cos(2\theta)}}^1 (r\cos(\theta))(r\sin(\theta))\, rdrd\theta \\
&+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r\cos(\theta))(r\sin(\theta))\, rdrd\theta
\end{aligned}
$$

حال، کران‌های $r$ را ثابت در نظر می‌گیریم و کران‌های $\theta$ را بر حسب $r$ می‌یابیم.




مطابق با شکل، در ناحیهٔ $D$ داریم $0 \leq r \leq 1$ و به‌ازای هر مقدار ثابت $r$، داریم:

$$\frac{\cos^{-1}(r^2)}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

بنابراین، داریم:

$$I = \iint_D xy\, dA = \int_0^1 \int_{\frac{\cos^{-1}(r^2)}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r\cos(\theta)(r\sin(\theta))\, r d\theta dr$$

## مثال

حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم که انتگرال داده‌شده همگرا است. توجه می‌کنیم که:

$$I = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

بنابراین، کافی است نشان دهیم که هر دوی انتگرال‌های بالا همگرا هستند. از آنجا که انتگرال اول با تغییر متغیر $t = -x$ از انتگرال دوم به‌دست می‌آید، کافی است که نشان دهیم انتگرال دوم همگرا است. داریم:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\, dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

انتگرال اول یک انتگرال معین است و لذا به دلیل پیوستگی تابع زیر انتگرال، همگرا است.
همچنین، به‌ازای $x \geq 1$ داریم $-x^2 \leq -x$ و از این‌رو $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. اما داریم:

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{x=1}^{x=M}$$
$$= \lim_{M\to\infty}\left(e^{-1} - e^{-M}\right) = e^{-1}$$

پس، بنابر آزمون مقایسه برای انتگرال‌های یک متغیره، انتگرال $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ نیز همگرا است.
در نهایت، نشان دادیم که $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ یک انتگرال همگرا است. حال، مقدار این انتگرال را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که:

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy$$

بنابراین، داریم:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

حال، با استفاده از تغییر متغیر قطبی و توجه به این مطلب که ناحیهٔ انتگرال‌گیری کل صفحه است، داریم:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,drd\theta = 2\pi \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} re^{-r^2}\,dr \\ &= 2\pi \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=M} = 2\pi \lim_{M\to\infty}\frac{1-e^{-M^2}}{2} = \pi \end{aligned}$$

بنابراین، $I = \pm\sqrt{\pi}$. از آنجا که $e^{-x^2}$ همواره مثبت است، $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ نامنفی است. پس، نتیجه می‌گیریم که $I = \sqrt{\pi}$.