ریاضی عمومی ۲

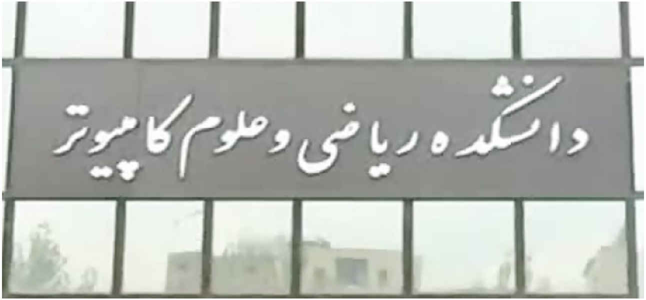
ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

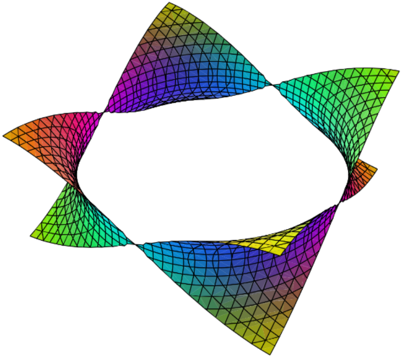
طرح درس



انتگرال روی سطح

رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$

یک رویه یا سطح در $\mathbb{R}^3$ به طور شهودی حاصل از تغییر شکل دادن (مثل کشیدن یا خم کردن) یک ناحیهٔ همبند، کران‌دار و بسته از صفحه است.

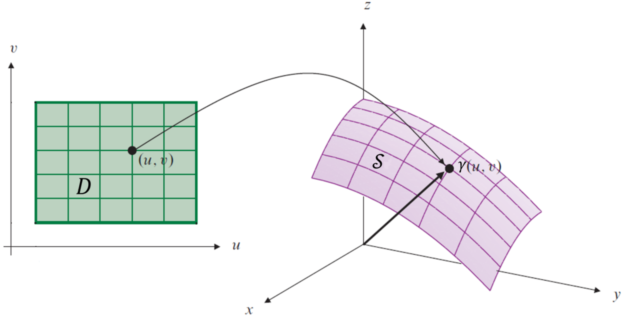


قبلاً با رویه‌هایی که به فرم مجموعه‌های تراز توابعی تعریف‌شده روی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ هستند، آشنا شدیم. به‌خصوص، اگر $G : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، آنگاه مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ که $G(x, y, z) = 0$، تشکیل یک رویه در $\mathbb{R}^3$ می‌دهند. در ادامه، با ردهٔ دیگری از رویه‌ها با عنوان رویه‌های پارامتری آشنا می‌شویم.

رویه‌های پارامتری در $\mathbb{R}^3$

مجموعهٔ $\mathbb{R}^3 \supseteq S$ را یک رویهٔ پارامتری یا سطح پارامتری می‌نامیم، هرگاه تابع پیوستهٔ $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ موجود باشد که $\operatorname{Im}(\gamma) = S$. در این صورت، γ را یک نمایش پارامتری یا یک پارامتری‌سازی برای S می‌نامیم. توجه کنید که داریم:

$$\gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



مثال

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد. در این صورت، نشان دهید که نمودار f یک رویهٔ پارامتری در $\mathbb{R}^3$ است.

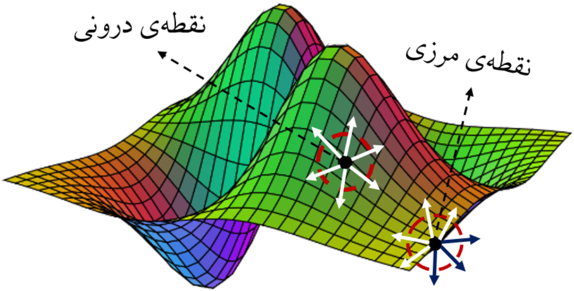
پاسخ: تابع $\gamma : D \to \mathbb{R}^3$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

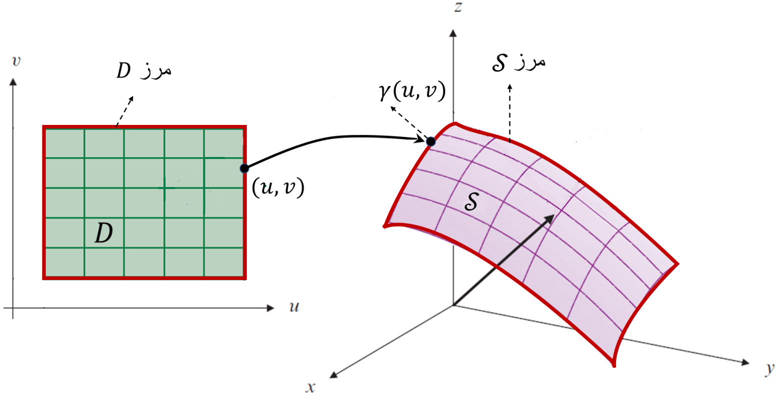
در این صورت، از پیوستگی تابع f و توابع $x(u, v) = u$ و $y(u, v) = v$ ، پیوستگی γ نتیجه می‌شود. پس، تصویر γ یعنی نمودار f یک رویهٔ پارامتری در $\mathbb{R}^3$ است.

نقاط مرزی و درونی یک رویه در $\mathbb{R}^3$

فرض کنید S رویه‌ای در $\mathbb{R}^3$ باشد و $P \in S$. در این صورت، P را یک نقطهٔ درونی S می‌نامیم، هرگاه وقتی در نقطهٔ P روی S ایستاده‌ایم، بتوانیم در هر طرف روی S حرکت کنیم. نقطهٔ P را یک نقطهٔ مرزی S می‌نامیم، هرگاه یک نقطهٔ درونی S نباشد. مجموعهٔ همهٔ نقاط مرزی و مجموعهٔ همهٔ نقاط درونی S به‌ترتیب مرز و درون S نامیده می‌شوند.

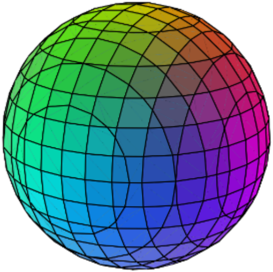


فرض کنید S رویه‌ای پارامتری در $\mathbb{R}^3$ و $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای S باشد. در این صورت، نقاط مرزی S تصاویر نقاط مرزی D تحت γ هستند.



رویه‌های بسته در $\mathbb{R}^3$

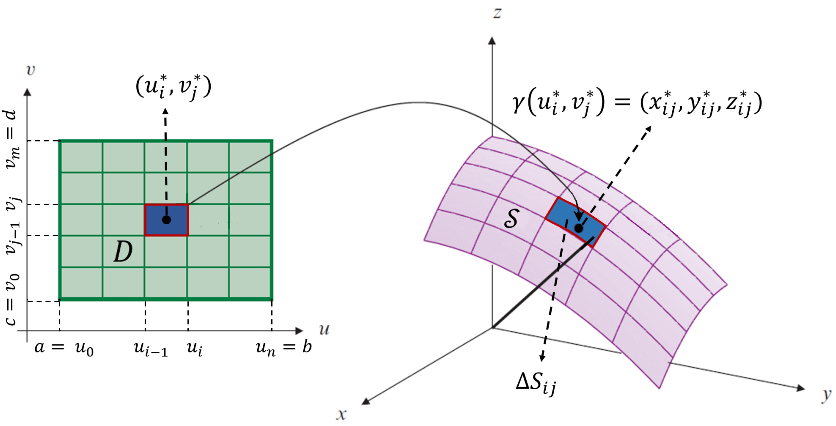
- رویهٔ S در $\mathbb{R}^3$ یک رویهٔ بسته نامیده می‌شود، هرگاه هیچ نقطهٔ مرزی نداشته باشد.
- به‌عنوان مثال، کره یک رویهٔ بسته است.



سطوح هموار و قطعه‌به‌قطعه هموار در $\mathbb{R}^3$

- رویهٔ S در $\mathbb{R}^3$ را هموار می‌نامیم، هرگاه S در هر نقطهٔ درونی خود دارای یک صفحهٔ مماس منحصربه‌فرد باشد. به‌ویژه، به‌ازای هر نقطهٔ درونی P از یک رویهٔ هموار، بردار ناصفر $n(P)$ موجود است که بر رویه در نقطهٔ P عمود است.
- رویهٔ S در $\mathbb{R}^3$ را قطعه‌به‌قطعه هموار می‌نامیم، هرگاه بتوان S را به صورت اجتماع رویه‌هایی هموار در $\mathbb{R}^3$ نوشت که حداکثر در مرزهای‌شان با هم اشتراک دارند.

انتگرال روی سطح



فرض کنید S یک رویهٔ پارامتری با نمایش پارامتری $\gamma : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ باشد که در آن، $R = [a,b] \times [c,d]$ یک مستطیل است. همچنین، فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ یک تابع کران‌دار باشد، به‌طوری که $\mathrm{Im}(\gamma) = S \subseteq U$. افرازهای زیر را به‌ترتیب برای $[a,b]$ و $[c,d]$ در نظر می‌گیریم:

$$P_1 = \{a = u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n = b\}$$

$$P_2 = \{c = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m = d\}$$

حال، افراز P از مستطیل R را متشکل از mn مستطیل زیر در نظر می‌گیریم:

$$R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j], \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $1 \leq j \leq m$، فرض کنید که نقطهٔ (u_i^*, v_j^*) از R_{ij} انتخاب شده باشد و داریم:

$$\gamma(u_i^*, v_j^*) = (x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*)$$

به‌ازای هر $1 \le i \le n$ و هر $1 \le j \le m$، فرض کنید:

$$\Delta S_{ij} = \gamma(R_{ij}) = \{\gamma(u,v) \in \mathbb{R}^3 : (u,v) \in R_{ij}\}$$

قرار می‌دهیم:

$$\|P\| = \max\{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2} : 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m\}$$

مجموع زیر را در نظر بگیرید:

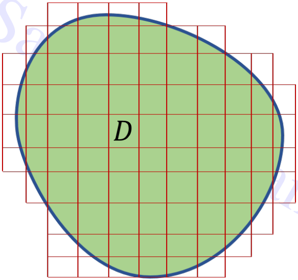
$$R(P,f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*)\Delta S_{ij}$$

حال، اگر $\lim_{\|P\| \to 0} R(P,f)$ موجود باشد، آنگاه تابع f را بر رویهٔ S انتگرال‌پذیر گوییم و مقدار آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\iint_S f\, dS$$

اگر S بسته باشد، آنگاه انتگرال f روی S را با $\oiint_S f\, dS$ نیز نمایش می‌دهیم.

حال، فرض کنید که $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک نمایش پارامتری از رویهٔ S باشد که در آن، D بسته و کران‌دار است و لزوماً یک مستطیل بسته در $\mathbb{R}^2$ نیست. در این صورت، می‌توان یک تقسیم‌بندی مانند شکل زیر برای D در نظر گرفت:



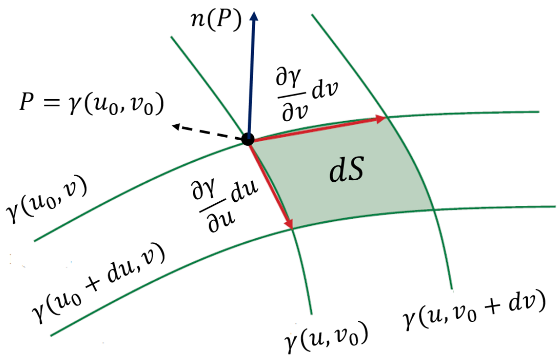
اگر تقسیم‌بندی بالا را کوچک و کوچک‌تر کنیم، به نحوی که مساحت‌های نواحی کوچک به صفر میل کنند، آنگاه می‌توان به طور مشابه با قبل، انتگرال روی سطح را به‌ازای γ نیز تعریف کرد.

قرارداد

از این پس، همهٔ نمایش‌های پارامتری که از یک رویهٔ پارامتری در نظر گرفته می‌شوند، دارای مشتقات جزئی اول پیوسته هستند.

محاسبهٔ المان سطح (dS)

فرض کنید که S یک رویهٔ پارامتری در $\mathbb{R}^3$ باشد و $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای S باشد.



فرض کنید $(u_0, v_0) \in D$ و $P = \gamma(u_0, v_0)$. با محاسبهٔ دیفرانسیل خم‌های $\gamma(u, v_0)$ و $\gamma(u_0, v)$، داریم:

$$d\gamma(u, v_0) = \frac{\partial \gamma}{\partial u} du, \qquad d\gamma(u_0, v) = \frac{\partial \gamma}{\partial v} dv$$

مطابق با شکل، می‌توان dS را یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع قاعدهٔ $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)du$ و $\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)dv$ در نظر گرفت. پس، با فرض اینکه $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ و $\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$ موازی نیستند، داریم:

$$\begin{aligned} dS &= \left| \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) du \right) \times \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) dv \right) \right| \\ &= \left| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \right| du dv \end{aligned}$$

توجه کنید که $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ و $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ در نقطهٔ P بر S مماس هستند. بنابراین، بردار زیر در نقطهٔ P بر S عمود است:

$$n(P) = \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$$

حال، فرض کنید که $\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. در این صورت، داریم:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}
\gamma_u \times \gamma_v &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} i - \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} j + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} k \\
&= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} i - \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} j + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} k
\end{aligned}$$

در نتیجه، داریم:

$$\gamma_u \times \gamma_v = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

بنابراین، داریم:

$$|\gamma_u \times \gamma_v| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(-\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$

از این‌رو، داریم:

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, dudv$$

قضیه

فرض کنید که S یک رویهٔ پارامتری در $\mathbb{R}^3$ باشد و $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری برای S باشد، به‌طوری که

$$\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

همچنین، فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ روی S انتگرال‌پذیر باشد و $S \subseteq U$. در این صورت، داریم:

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) |\gamma_u \times \gamma_v|\, dudv$$

قضیه

فرض کنید که S یک رویهٔ پارامتری در $\mathbb{R}^3$ باشد و $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ توابعی باشند که انتگرال هر یک از آن‌ها روی سطح S موجود است. در این صورت:

۱ $\iint_S f\,dS$ به نمایش پارامتری در نظر گرفته‌شده برای S بستگی ندارد؛ یعنی چنانچه $\gamma : D_1 \to \mathbb{R}^3$ و $\eta : D_2 \to \mathbb{R}^3$ دو نمایش پارامتری از S باشند، داریم:

$$\begin{aligned}\iint_S f\,dS &= \iint_{D_1} f(\gamma(u,v))|\gamma_u \times \gamma_v|\,dudv\\ &= \iint_{D_2} f(\eta(u,v))|\eta_u \times \eta_v|\,dudv\end{aligned}$$

۲ داریم:

$$\iint_S dS = S \text{ مساحت}$$

۳ به‌ازای هر $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$، انتگرال $c_1 f + c_2 g$ روی سطح S وجود دارد و داریم:

$$\iint_S (c_1 f + c_2 g)\, dS = c_1 \iint_S f\, dS + c_2 \iint_S g\, dS$$

۴ داریم:

$$\left| \iint_S f\, dS \right| \leq \iint_S |f|\, dS$$

۵ اگر به‌ازای هر $(x, y, z) \in S$، داشته باشیم $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$، آنگاه:

$$\iint_S f\, dS \leq \iint_S g\, dS$$

۶ اگر $M=\max\{f(x,y,z):(x,y,z)\in\mathcal{S}\}$، آنگاه داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} f\,dS \leq M \times (\text{مساحت } \mathcal{S})$$

۷ فرض کنید که $\mathcal{S}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{S}_i$ که $\mathcal{S}_1,\ldots,\mathcal{S}_n$ حداکثر در مرزهای‌شان اشتراک دارند. در این صورت، تابع f روی $\mathcal{S}$ انتگرال‌پذیر است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $1\leq i\leq n$، تابع f روی $\mathcal{S}_i$ انتگرال‌پذیر باشد و در این صورت، داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} f\,dS=\sum_{i=1}^{n}\iint_{\mathcal{S}_i} f\,dS$$

مثال

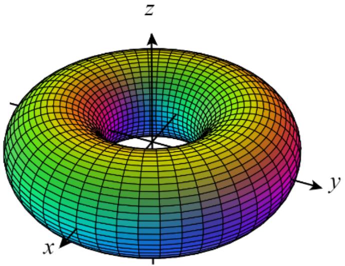
یک چنبرهٔ دوار S با پارامترهای $0 < b < a$، با نمایش پارامتری زیر به‌دست می‌آید:

$$r(u,v) = ((a + b\cos(u))\cos(v), (a + b\cos(u))\sin(v), b\sin(u))$$

که در آن، $0 \leq u, v \leq 2\pi$. مساحت جانبی S را به‌دست آورید.

پاسخ:

باید $\iint_S dS$ را به‌دست آوریم.



داریم:

$$r_u = (-b\sin(u)\cos(v), -b\sin(u)\sin(v), b\cos(u))$$

$$r_v = (-(a+b\cos(u))\sin(v), (a+b\cos(u))\cos(v), 0)$$

و در نتیجه:

$$r_u \times r_v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -b\sin(u)\cos(v) & -b\sin(u)\sin(v) & b\cos(u) \\ -(a+b\cos(u))\sin(v) & (a+b\cos(u))\cos(v) & 0 \end{bmatrix}$$

از این‌رو، $r_u \times r_v$ برابر است با:

$$b(a+b\cos(u))\det \underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ -\sin(u)\cos(v) & -\sin(u)\sin(v) & \cos(u) \\ -\sin(v) & \cos(v) & 0 \end{bmatrix}}_{A}$$

داریم:

$$A = \det\begin{bmatrix} -\sin(u)\sin(v) & \cos(u) \\ \cos(v) & 0 \end{bmatrix} i - \det\begin{bmatrix} -\sin(u)\cos(v) & \cos(u) \\ -\sin(v) & 0 \end{bmatrix} j$$
$$+ \det\begin{bmatrix} -\sin(u)\cos(v) & -\sin(u)\sin(v) \\ -\sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} k$$
$$= -(\cos(u)\cos(v))i - (\cos(u)\sin(v))j - \sin(u)k$$

بنابراین، داریم:

$$|A| = \sqrt{(-\cos(u)\cos(v))^2 + (-\cos(u)\sin(v))^2 + (-\sin(u))^2} = 1$$

در نتیجه:

$$|r_u \times r_v| = |b(a + b\cos(u))| = b(a + b\cos(u))$$

در نهایت، داریم:

$$\iint_{S} dS = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |r_u \times r_v| \, dudv = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} b(a + b\cos(u)) \, dudv$$

$$= 2\pi \left(b(au + b\sin(u)) \right) \Big|_{u=0}^{u=2\pi} = 4\pi^2 ab$$

المان سطح نمودار یک تابع دو متغیره

فرض کنید که $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی اول پیوسته باشد. می‌دانیم نمایش پارامتری زیر برای نمودار f وجود دارد:

$$\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

داریم:

$$\gamma_u = (1, 0, f_1), \qquad \gamma_v = (0, 1, f_2)$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\gamma_u \times \gamma_v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \end{bmatrix} = (-f_1, -f_2, 1)$$

لذا، داریم:

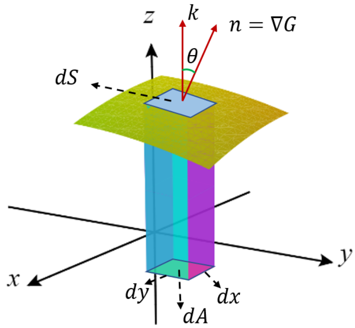
$$dS = \sqrt{(-f_1)^2 + (-f_2)^2 + 1^2}\, dudv = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 1}\, dudv$$

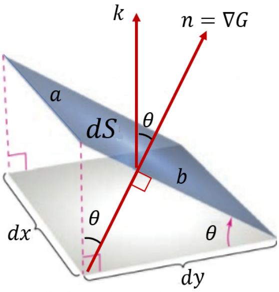
توجه

در اسلاید قبل، به منظور به‌دست آوردن بردار نرمال n، می‌توانستیم بردار گرادیان تابع $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ را به‌دست آوریم؛ زیرا از قبل می‌دانیم که ∇g بر نمودار f عمود است و در واقع بردار نرمال صفحهٔ مماس بر نمودار f است.

المان سطح برای ردهٔ گسترده‌ای از رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$

فرض کنید $G : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی اول پیوسته باشد. می‌دانیم همهٔ نقاط $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ که $G(x, y, z) = 0$، تشکیل یک رویهٔ S در $\mathbb{R}^3$ می‌دهند. فرض کنید n بردار نرمال S باشد.





فرض کنید که dS المان سطح رویهٔ یادشده باشد، به‌طوری که تقریباً مستطیل‌شکل است و یکی از اضلاع آن (که با طول a مشخص شده است) با محور x موازی است. فرض کنید که طول ضلع دیگر برابر با b باشد. در این صورت، داریم $dS = ab$. حال، با فرض اینکه θ زاویهٔ حادهٔ بین n و k است، داریم:

$$dy = b|\cos(\theta)| \implies b = \frac{dy}{|\cos(\theta)|}$$

اما توجه کنید که:

$$n \cdot k = |n||k|\cos(\theta) = |n|\cos(\theta) \implies \cos(\theta) = \frac{n \cdot k}{|n|}$$

می‌دانیم بردار نرمال رویهٔ $G(x, y, z) = 0$، همان ∇G است. بنابراین، داریم:

$$n = \nabla G = (G_x, G_y, G_z)$$

که نتیجه می‌دهد $|n| = |\nabla G|$ و $n.k = G_z$. از این‌رو، اگر $G_z \neq 0$، آنگاه داریم:

$$dS = ab = dx\frac{dy}{|\cos(\theta)|} = \frac{|\nabla G|}{|G_z|}dxdy$$

به طور مشابه، داریم:

$$G_x \neq 0 \implies dS = \frac{|\nabla G|}{|G_x|} dydz$$

$$G_y \neq 0 \implies dS = \frac{|\nabla G|}{|G_y|} dxdz$$

توجه

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشد. علاوه بر روشی که قبلاً به منظور به‌دست آوردن المان سطح نمودار f توضیح داده شد، می‌توانیم با در نظر گرفتن توصیف $G(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$ از نمودار f نیز المان سطح نمودار f را به صورت زیر به‌دست آوریم:

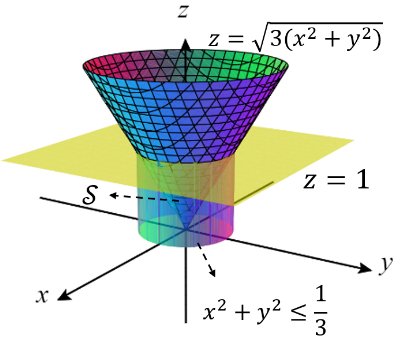
$$dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|} dxdy = |(-f_1, -f_2, 1)| dxdy = \left(\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 1}\right) dxdy$$

مثال

فرض کنید S سطح مخروط $\phi = \frac{\pi}{6}$ به‌ازای $0 \leq z \leq 1$ باشد. حاصل $\iint_S z\, dS$ را بیابید.

پاسخ:

راه اول:



می‌دانیم که در مختصات کروی، داریم:

$$\tan(\phi) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

بنابراین، S برابر با نمودار تابع زیر است:

$$z = f(x,y) = \sqrt{3(x^2+y^2)}$$

که در آن f بر تصویر S روی صفحهٔ xy تعریف شده است.

از این‌رو، المان سطح S برابر است با:

$$
\begin{aligned}
dS &= \left(\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 1}\right) dxdy \\
&= \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\right) dxdy = 2dxdy
\end{aligned}
$$

حال، فرض کنید که D تصویر S بر صفحهٔ xy باشد. در واقع، D فضای داخل خم فصل مشترک مخروط یادشده و صفحهٔ $z = 1$ است. داریم:

$$
\begin{cases} z = \sqrt{3(x^2+y^2)} \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{3}
$$

بنابراین، D مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است که $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{3}$.

از این‌رو، داریم:

$$\iint_S z\,dS = \iint_D z(x,y)\,2dxdy = 2\iint_D \sqrt{3(x^2+y^2)}\,dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2\sqrt{3}r^2\,drd\theta = 4\sqrt{3}\pi\left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4\pi}{9}$$

راه دوم:

توجه کنید که هر نقطه در مختصات دکارتی بر حسب مختصات کروی دارای نمایش زیر است:

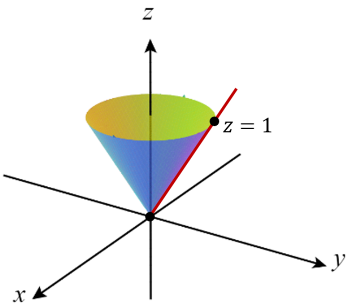
$$(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi))$$

بنابراین، نقاط مخروط داده‌شده، با توجه به $\phi = \frac{\pi}{6}$، به صورت زیر هستند:

$$\left(\frac{1}{2}\rho\cos(\theta), \frac{1}{2}\rho\sin(\theta), \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$$

واضح است که برای مخروط داده‌شده، داریم $0 \le \theta \le 2\pi$. حال، محدودهٔ ρ را به‌دست می‌آوریم.
واضح است که $\rho_{\min} = 0$، در حالی‌که $\rho_{\max}$ در محل تقاطع مخروط داده‌شده و صفحهٔ $z = 1$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$z = 1, \quad \phi = \frac{\pi}{6} \implies 1 = \rho_{\max} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho_{\max} \implies \rho_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



بنابراین، نمایش پارامتری زیر از مخروط S را می‌توان در نظر گرفت:

$$\gamma(\rho, \theta) = \left(\frac{1}{2}\rho\cos(\theta), \frac{1}{2}\rho\sin(\theta), \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)$$

که در آن $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. داریم:

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\rho,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(\rho,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right)^2}\, d\rho d\theta$$

در حالی‌که داریم:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\rho,\theta)} = \det\begin{bmatrix} y_\rho & y_\theta \\ z_\rho & z_\theta \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin(\theta) & \frac{1}{2}\rho\cos(\theta) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\rho\cos(\theta)$$

همچنین، داریم:

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(\rho,\theta)} = \det\begin{bmatrix} x_\rho & x_\theta \\ z_\rho & z_\theta \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos(\theta) & -\frac{1}{2}\rho\sin(\theta) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4}\rho\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \det\begin{bmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos(\theta) & -\frac{1}{2}\rho\sin(\theta) \\ \frac{1}{2}\sin(\theta) & \frac{1}{2}\rho\cos(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\rho$$

بنابراین، داریم:

$$dS = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\rho\cos(\theta)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\rho\sin(\theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\rho\right)^2}\, d\rho d\theta = \frac{\rho}{2} d\rho d\theta$$

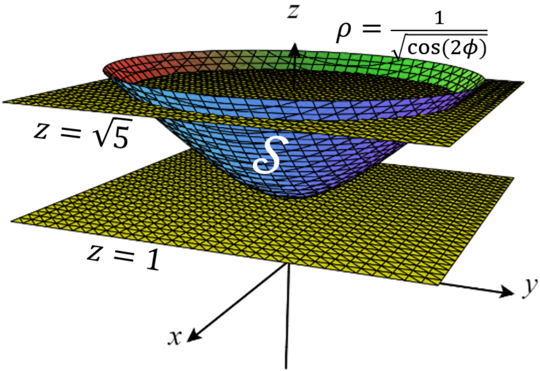
در نهایت، داریم:

$$\iint_S z\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}\rho}{2}\,\frac{\rho}{2} d\rho d\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{4\pi}{9}$$

مثال

فرض کنید رویهٔ S با معادلهٔ $\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}$ به‌ازای $1 \leq z \leq \sqrt{5}$ داده شده است. حاصل $\iint_S z\,dS$ را بیابید.

پاسخ:



راه اول: با استفاده از مختصات دکارتی و تبدیل به $G(x, y, z) = 0$:

داریم:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}} \implies \rho^2 = \frac{1}{\cos(2\phi)} = \frac{1}{2\cos^2(\phi) - 1}$$

بنابراین، داریم:

$$2\rho^2\cos^2(\phi) - \rho^2 = 1 \implies 2z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

لذا رویهٔ S بخشی از رویهٔ زیر است:

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$$

از این‌رو، داریم:

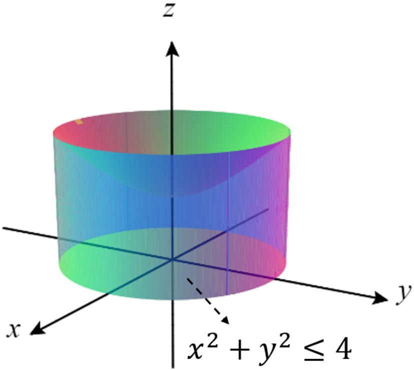
$$\nabla G = (G_x, G_y, G_z) = (2x, 2y, -2z)$$

پس، داریم:

$$\underbrace{|G_z| = 2z}_{\neq 0}, \quad |\nabla G| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-2z)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

حال، تصویر S را بر صفحهٔ xy به‌دست می‌آوریم و آن را D می‌نامیم. داریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2-1 \\ 1\le z\le \sqrt{5} \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2\le 4$$



بنابراین، داریم:

$$\iint_{\mathcal{S}} z\, dS = \iint_{D} z\, \frac{|\nabla G|}{|G_z|}\, dA_{x,y} = \iint_{x^2+y^2\leq 4} z\, \frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2z}\, dA_{x,y}$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{2x^2+2y^2+1}\, dA_{x,y}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2r^2+1}\, r dr d\theta = 2\pi\left(\frac{(2r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{6}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} = \frac{26\pi}{3}$$

راه دوم: با استفاده از نمایش پارامتری کروی $\mathcal{S}$:

با توجه به اینکه $\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}$، نمایش پارامتری زیر با استفاده از مختصات کروی برای $\mathcal{S}$ قابل تعریف است:

$$\gamma(\phi,\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}\sin(\phi)\cos(\theta), \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}\sin(\phi)\sin(\theta), \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}}\cos(\phi)\right)$$

حال، کران‌های ϕ و θ را برای S می‌یابیم. توجه کنید که توصیف داده‌شده از S در صورت مثال، مستقل از θ است. بنابراین، از آنجا که در مختصات کروی داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$، می‌توان گفت که برای S نیز داریم $0 \leq \theta \leq 2\pi$. حال، کران‌های ϕ را می‌یابیم. داریم:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}} \implies \cos(2\phi) > 0 \iff 0 \leq \phi < \frac{\pi}{4}$$

حال، داریم:

$$1 \leq z \leq \sqrt{5} \iff 1 \leq \rho\cos(\phi) \leq \sqrt{5} \iff 1 \leq \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{\cos(2\phi)}} \leq \sqrt{5}$$

که معادل است با:

$$1 \leq \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{2\cos^2(\phi) - 1}} \leq \sqrt{5} \iff 9\cos^2(\phi) - 5 \geq 0,\ \cos^2(\phi) \leq 1$$

و از این‌رو، داریم:

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \leq \cos(\phi) \leq 1 \iff 0 \leq \phi \leq \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

در نهایت، کران‌های ϕ و θ را به صورت زیر به‌دست آوردیم:

$$0 \leq \phi \leq \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

حال، باید $|\gamma_\phi \times \gamma_\theta|$ را بیابیم. با توجه به اینکه $x_\theta = -y$ و $y_\theta = x$، داریم:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\phi,\theta)} = \det\begin{bmatrix} y_\phi & y_\theta \\ z_\phi & 0 \end{bmatrix} = -y_\theta z_\phi = -x z_\phi$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(\phi,\theta)} = \det\begin{bmatrix} x_\phi & x_\theta \\ z_\phi & 0 \end{bmatrix} = -x_\theta z_\phi = y z_\phi$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)} = \det\begin{bmatrix} x_\phi & x_\theta \\ y_\phi & y_\theta \end{bmatrix} = y_\theta x_\phi - x_\theta y_\phi = x x_\phi + y y_\phi$$

از طرفی داریم $y = x\tan(\theta)$، که نتیجه می‌دهد $y_\phi = x_\phi \tan(\theta)$.

بنابراین، داریم:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)} = xx_\phi + (x\tan(\theta))(x_\phi\tan(\theta)) = xx_\phi(1+\tan^2(\theta)) = \frac{xx_\phi}{\cos^2(\theta)}$$

از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} dS &= \left(\sqrt{(-xz_\phi)^2 + (yz_\phi)^2 + \left(\frac{xx_\phi}{\cos^2(\theta)}\right)^2}\right) d\phi d\theta \\ &= \left(\sqrt{\left(\frac{xz_\phi}{\cos(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{xx_\phi}{\cos^2(\theta)}\right)^2}\right) d\phi d\theta \\ &= \left(\frac{|x|}{\cos^2(\theta)}\sqrt{\cos^2(\theta)z_\phi^2 + x_\phi^2}\right) d\phi d\theta \end{aligned}$$

توجه کنید که:

$$z_\phi = \rho' \cos(\phi) - \rho \sin(\phi), \quad x_\phi = (\rho' \sin(\phi) + \rho \cos(\phi)) \cos(\theta)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\cos^2(\theta) z_\phi^2 + x_\phi^2 = \cos^2(\theta)(\rho^2 + \rho'^2)$$

پس، داریم:

$$dS = \left(\rho \sin(\phi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\right) d\phi d\theta$$

در حالی که داریم:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\phi)}} \implies \rho' = \frac{\sin(2\phi)}{\sqrt{\cos^3(2\phi)}} \implies \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{1}{\sqrt{\cos^3(2\phi)}}$$

لذا، می‌توان نوشت:

$$dS = \left(\frac{\sin(\phi)}{\cos^2(2\phi)}\right) d\phi d\theta$$

در نهایت، داریم:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} z\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} \frac{\cos(\phi)\sin(\phi)}{\cos^{\frac{5}{2}}(2\phi)}\, d\phi d\theta \\
&= \pi \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} \frac{\sin(2\phi)}{\cos^{\frac{5}{2}}(2\phi)}\, d\phi \\
&= \frac{\pi}{3}\left(\cos^{-\frac{3}{2}}(2\phi)\right)\Bigg|_{\phi=0}^{\cos^{-1}\left(\phi=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} \\
&= \frac{\pi}{3}\left(\cos^{-\frac{3}{2}}\left(2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

حال، فرض کنید که $0 \leq \alpha \leq \pi$ چنان است که $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. باید $\cos(2\alpha)$ را بیابیم.

داریم:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = \frac{1}{9}$$

از این‌رو، داریم:

$$\iint_S z\, dS = \frac{\pi}{3}(27 - 1) = \frac{26\pi}{3}$$

المان سطح در مختصات کروی به‌ازای ρ ثابت

فرض کنید رویهٔ S در $\mathbb{R}^3$، قسمتی از سطح کرهٔ به شعاع a باشد. در این صورت، می‌توان نمایش پارامتری زیر را برای S در نظر گرفت:

$$\gamma : D \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(\phi, \theta) = (a \sin(\phi)\cos(\theta), a\sin(\phi)\sin(\theta), a\cos(\phi))$$

با محاسباتی ساده، می‌توان دید که:

$$dS = |\gamma_\phi \times \gamma_\theta| d\phi d\theta = (a^2 \sin(\phi)) d\phi d\theta$$

البته در خلال راه دوم از مثال قبل هم نشان دادیم که:

$$dS = \left(\rho \sin(\phi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\right) d\phi d\theta$$

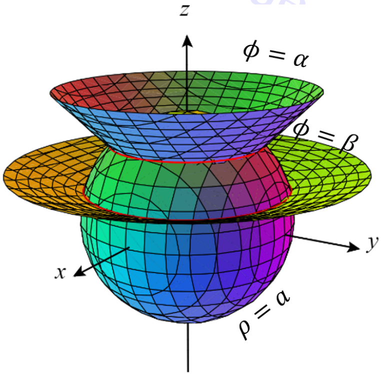
که در آن فرض شده است ρ تابعی از ϕ است. پس، به‌ازای $\rho = a$، داریم $\rho' = 0$ و لذا داریم:

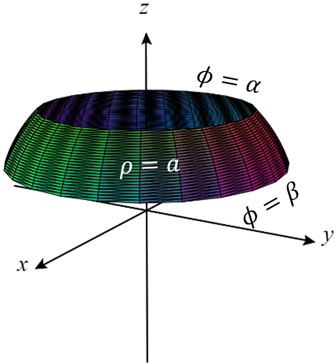
$$dS = (a^2 \sin(\phi)) d\phi d\theta$$

مثال

فرض کنید $0 < \alpha < \beta$. مساحت رویهٔ محصور بین مدارهای $\phi = \alpha$ و $\phi = \beta$ را در کرهٔ $\rho = a$ بیابید.

پاسخ:





فرض کنید که S رویهٔ یادشده در صورت مثال است. از آنجا که S بخشی از کرهٔ $\rho = a$ است، المان سطح برای S به صورت $dS = \rho^2 \sin(\phi) d\phi d\theta$ است. پس، در مختصات (ϕ, θ)، رویهٔ S به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\alpha \le \phi \le \beta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

بنابراین، داریم:

$$\text{مساحت } S = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta a^2 \sin(\phi)\, d\phi d\theta$$
$$= 2\pi a^2 \left(-\cos(\phi)\right)\Big|_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} = 2\pi a^2 \left(\cos(\alpha) - \cos(\beta)\right)$$

المان سطح یک استوانه

فرض کنید رویهٔ S بخشی از استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ باشد. در ادامه، dS را به دو روش به‌دست می‌آوریم.

روش اول:

قرار می‌دهیم $G(x,y,z)=x^2+y^2-a^2=0$. داریم $G_x\neq 0$ و از این‌رو، داریم:

$$dS=\frac{|\nabla G|}{|G_x|}dydz=\frac{|(2x,2y,0)|}{|2x|}dydz=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|}dydz=\frac{a}{|x|}dydz$$

بنابراین، داریم:

$$dS=\begin{cases}\dfrac{a}{x}\,dydz, & x>0\\ -\dfrac{a}{x}\,dydz, & x<0\end{cases}$$

روش دوم:

می‌دانیم که هر نقطه در مختصات دکارتی بر حسب مختصات استوانه‌ای نمایشی به صورت $(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ دارد. استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$، دارای معادلهٔ $r=a$ در مختصات استوانه‌ای است. پس، استوانهٔ یادشده دارای نمایشی پارامتری به صورت زیر است:

$$\gamma : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(\theta, z) = (a\cos(\theta), a\sin(\theta), z)$$

داریم $dS = |\gamma_\theta \times \gamma_z| d\theta dz$، که در آن:

$$\gamma_\theta \times \gamma_z = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -a\sin(\theta) & a\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (a\cos(\theta), a\sin(\theta), 0)$$

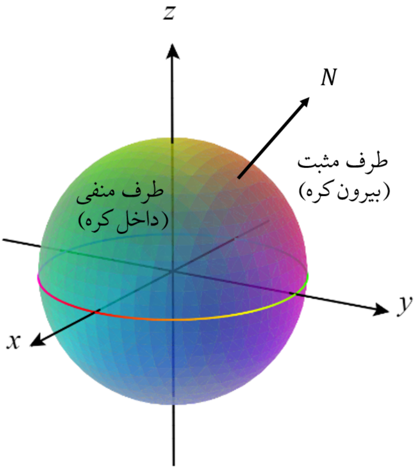
پس، $|\gamma_\theta \times \gamma_z| = a$، که نتیجه می‌دهد:

$$dS = a d\theta dz$$

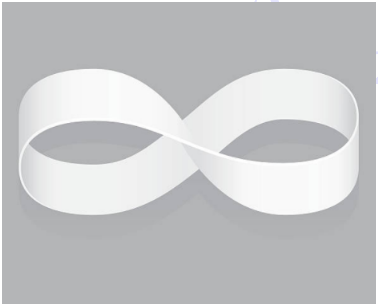
رویه‌های جهت‌دار

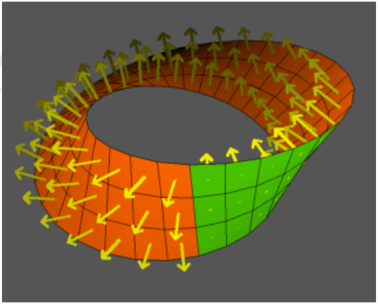
- فرض کنید S یک رویهٔ هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد. در این صورت، S را جهت‌پذیر گوییم، هرگاه یک میدان برداری یکه مثل $N(P)$ بر S موجود باشد که با تغییر P روی S، به طور پیوسته تغییر کند، و همه‌جا بر S عمود باشد، (یعنی میدان برداری پیوستهٔ $N : S \to \mathbb{R}^3$ موجود باشد، که به‌ازای هر $P \in S$، بردار $N(P)$ بر S عمود باشد).
- فرض کنید S یک رویهٔ جهت‌پذیر در $\mathbb{R}^3$ باشد. در این صورت، در یک همسایگی از هر نقطهٔ $P \in S$، رویهٔ S دارای دو طرف خواهد بود؛ طرفی که $N(P)$ به آن اشاره دارد و طرف مخالف آن. طرفی که $N(P)$ به آن اشاره دارد را طرف مثبت و طرف مخالف آن را طرف منفی S در همسایگی یادشده می‌نامیم.

- کره مثالی از یک رویهٔ جهت‌پذیر است.



- نوار موبیوس مثالی از یک رویهٔ جهت‌ناپذیر است.





شار یک میدان برداری (انتگرال میدان برداری روی سطح)

- فرض کنید $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری پیوسته و S یک رویهٔ جهت‌دار باشد، به‌طوری که $S \subseteq U$. شار F عبوری از S یا انتگرال مؤلفهٔ قائم F روی S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iint_S F \cdot N \, dS$$

که در آن، N بردار قائم یکه بر سطح S است.

- با قرارداد $d\sigma = N dS$، شار F عبوری از S به صورت زیر خواهد بود:

$$\iint_S F \cdot d\sigma$$

$d\sigma$ برای رویه‌هایی که مجموعهٔ تراز یک تابع هموار سه متغیره هستند

فرض کنید S یک رویه در $\mathbb{R}^3$ و $G : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی اول پیوسته باشد که $G_z \neq 0$ و $S \subseteq U$. همچنین، فرض کنید که نقاط S در معادلهٔ $G(x, y, z) = 0$ صدق می‌کنند. می‌دانیم:

$$dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|} dA_{x,y}$$

از طرفی، بردار قائم یکه بر S به صورت زیر است:

$$N = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

بنابراین، داریم:

$$d\sigma = N dS = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \left(\frac{|\nabla G|}{|G_z|} dA_{x,y} \right) = \pm \frac{\nabla G}{|G_z|} dA_{x,y}$$

در صورتی که جهت رویهٔ S رو به بالا (به سمت جهت مثبت محور z) باشد، آنگاه می‌گوییم که شار عبوری از S رو به بالا است. در غیر این صورت، اگر جهت رویهٔ S رو به پایین (به سمت جهت منفی محور z) باشد، آنگاه می‌گوییم که شار عبوری از S رو به پایین است.

در جدول زیر، چهار حالت ممکن به منظور انتخاب علامت $+$ یا $-$ برای N و در نتیجه $d\sigma$ آورده شده است:

G_z / شار	$+$	$-$
رو به بالا	$+$	$-$
رو به پایین	$-$	$+$

به طور مشابه، فرمول‌های زیر را داریم:

$$d\sigma = \pm \frac{\nabla G}{|G_x|} dA_{y,z}, \qquad G_x \neq 0$$

$$d\sigma = \pm \frac{\nabla G}{|G_y|} dA_{x,z}, \qquad G_y \neq 0$$

علامت $+$ یا $-$ در فرمول‌های بالا به طور مشابه با حالت $G_z \neq 0$ تعیین می‌شود.

$d\sigma$ برای نمودار یک تابع دو متغیره

فرض کنید که رویهٔ جهت‌دار S نمودار تابع دو متغیره $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ باشد. در این صورت، نقاط S در معادلهٔ $G(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ صدق می‌کنند. پس، داریم:

$$d\sigma = \pm \frac{\nabla G}{|G_z|} dA_{x,y} = \pm (-f_1, -f_2, 1) dA_{x,y}$$

در فرمول بالا، با توجه به اینکه $G_z = 1 > 0$، در صورتی که شار رو به بالا خواسته شده باشد، علامت $+$ و در صورتی که شار رو به پایین خواسته شده باشد، علامت $-$ را انتخاب می‌کنیم.

$d\sigma$ برای یک رویهٔ پارامتری جهت‌دار

فرض کنید که S یک رویهٔ پارامتری جهت‌دار در $\mathbb{R}^3$ باشد. نمایش پارامتری زیر از S را در نظر می‌گیریم:

$$\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

می‌دانیم که:

$$dS = |\gamma_u \times \gamma_v| dudv, \qquad N = \pm \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{|\gamma_u \times \gamma_v|}$$

بنابراین، داریم:

$$d\sigma = NdS = \pm \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{|\gamma_u \times \gamma_v|} (|\gamma_u \times \gamma_v| dudv) = \pm (\gamma_u \times \gamma_v) dudv$$

فرض کنید که L مؤلفهٔ سوم $\gamma_u \times \gamma_v$ باشد. در جدول زیر، چهار حالت ممکن به منظور انتخاب علامت $+$ یا $-$ برای N و در نتیجه $d\sigma$ آورده شده است:

L / شار	$+$	$-$
رو به بالا	$+$	$-$
رو به پایین	$-$	$+$

مثال

شار رو به بالای میدان برداری $F = (z, 0, x^2)$ گذرنده از رویهٔ $z = x^2 + y^2$ را برای $-1 \le x, y \le 1$ بیابید.

پاسخ:

داریم:

$$d\sigma = \pm(-f_1, -f_2, 1)dA_{x,y}$$

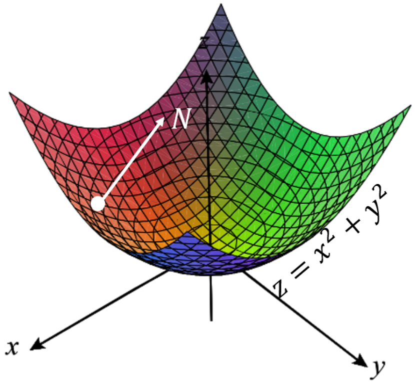
توجه کنید که شار رو به بالا خواسته شده است،

پس علامت $+$ را انتخاب می‌کنیم. از این‌رو،

داریم:

$$d\sigma = (-f_1, -f_2, 1)dA_{x,y}$$

$$= (-2x, -2y, 1)dA_{x,y}$$



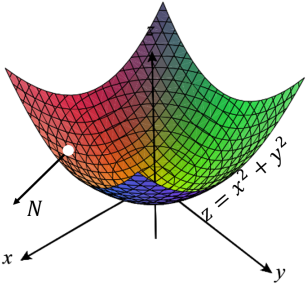
فرض کنید که D مستطیل $-1 \leq x, y \leq 1$ باشد. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} F \cdot d\sigma &= \iint_D (z, 0, x^2) \cdot (-2x, -2y, 1)\, dA_{x,y} \\
&= \iint_D \left(-2xz + x^2\right)\, dA_{x,y} \\
&= \iint_D \left(-2x(x^2 + y^2) + x^2\right)\, dA_{x,y} \\
&= \iint_D (-2\underbrace{x^3}_{\text{فرد}} - 2\underbrace{xy^2}_{\text{فرد}} + x^2)\, dA_{x,y} \\
&= \iint_D x^2\, dA_{x,y} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} x^2\, dy dx = 2\int_{-1}^{1} x^2\, dx \\
&= 2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

مثال

شار رو به پایین میدان برداری $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ که در آن، $F = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right)$، گذرنده از رویهٔ S با نمایش پارامتری زیر را بیابید:

$$\gamma : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), u^2)$$



پاسخ:

داریم:

$$\gamma_u = (\cos(v), \sin(v), 2u)$$

$$\gamma_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0)$$

پس، داریم:

$$
\begin{aligned}
\gamma_u \times \gamma_v &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos(u) & \sin(v) & 2u \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} \sin(v) & 2u \\ u\cos(v) & 0 \end{bmatrix} i - \det \begin{bmatrix} \cos(u) & 2u \\ -u\sin(v) & 0 \end{bmatrix} j \\
&+ \det \begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(v) \\ -u\sin(v) & u\cos(v) \end{bmatrix} k \\
&= (-2u^2\cos(v), -2u^2\sin(v), u)
\end{aligned}
$$

توجه کنید که:

$$d\sigma = \pm(\gamma_u \times \gamma_v)dudv = \pm(-2u^2\cos(v), -2u^2\sin(v), u)dudv$$

حال، از آنجا که مؤلفهٔ سوم $\gamma_u \times \gamma_v$ مثبت است و شار رو به پایین خواسته شده است، در رابطهٔ بالا علامت $-$ را انتخاب می‌کنیم. روی S، داریم:

$$F = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right) = \left(\frac{2\cos(v)}{u}, \frac{2\sin(v)}{u}, 1\right)$$

بنابراین، با فرض $D = [0,1] \times [0,2\pi]$، داریم:

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot d\sigma &= \iint_D \left(\frac{2\cos(v)}{u}, \frac{2\sin(v)}{u}, 1\right) \cdot (2u^2\cos(v), 2u^2\sin(v), -u)\, dudv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4u\cos^2(v) + 4u\sin^2(v) - u)\, dudv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3u\, dudv = 2\pi\left(\frac{3u^2}{2}\right)\Big|_{u=0}^{u=1} = 3\pi\end{aligned}$$

تذکر

در مثال قبل، به‌ازای $0 \leq u \leq 1$ و $0 \leq v \leq 2\pi$، نمایش پارامتری زیر را داشتیم:

$$\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (u\cos(v), u\sin(v), u^2)$$

بنابراین، داریم $z = x^2 + y^2$ که $0 \leq z \leq 1$. از این‌رو، رویهٔ S نمودار تابع $f(x,y) = x^2 + y^2$ تعریف‌شده روی دیسک $x^2 + y^2 \leq 1$ است. پس، می‌توان با فرمولی که برای المان سطح نمودار یک تابع دو متغیره داشتیم نیز مثال قبل را حل کرد.

نمایشی برای شار یک میدان برداری گذرنده از یک رویه

فرض کنید S یک رویهٔ پارامتری در $\mathbb{R}^3$ و $\gamma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ یک نمایش پارامتری از S به صورت زیر باشد:

$$\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

همچنین، فرض کنید $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری پیوسته باشد، به‌طوری که $F = (P,Q,R)$ و $S \subseteq U$. در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot d\sigma &= \iint_S (P,Q,R) \cdot \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv \\ &= \iint_S P \tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\, dudv + \iint_S Q \tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\, dudv + \iint_S P \tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv \\ &= \iint_S P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy \end{aligned}$$

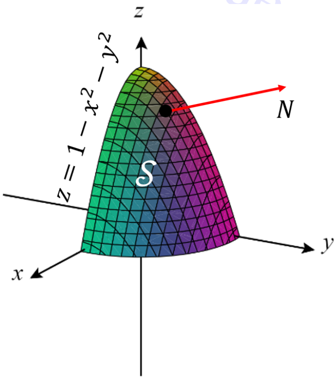
مثال‌های تکمیلی

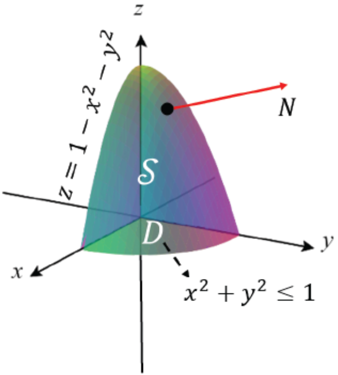
تاکنون مثال‌های **مفهومی** و **کاربردی** مختلفی را از این مبحث دیدیم. در ادامه، به مثال‌های بیشتری از این مبحث توجه فرمایید. برای درک بهتر، ابتدا به مسائل فکر کنید و سعی کنید که آن‌ها را حل بفرمایید. سپس پاسخ‌ها را با دقت مطالعه و بررسی نمایید.

مثال

شار رو به بالای میدان برداری $F=(y,-x,4)$، گذرنده از رویهٔ S با معادلهٔ $z=1-x^2-y^2$ در یک‌هشتم اول دستگاه مختصات را بیابید.

پاسخ:





رویهٔ S، نمودار تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ است که در آن، D بخشی از دیسک یکهٔ بسته است که در ربع اول دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. پس، داریم:

$$d\sigma = \pm(-f_1, -f_2, 1)dA_{x,y} = \pm(2x, 2y, 1)dA_{x,y}$$

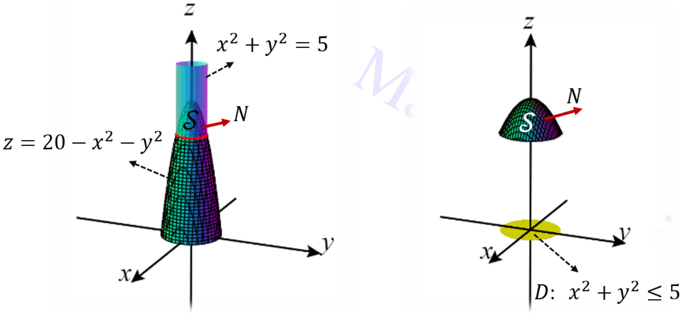
از آنجا که شار رو به بالا خواسته شده است، در رابطهٔ بالا علامت $+$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین، داریم:

$$\iint_S F \cdot d\sigma = \iint_D (y, -x, 4) \cdot (2x, 2y, 1)\, dA_{x,y} = 4 \iint_D dA_{x,y}$$
$$= 4 \times (D \text{ مساحت}) = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

مثال

فرض کنید که S بخشی از رویهٔ $z = 20 - x^2 - y^2$ باشد که داخل استوانهٔ $x^2 + y^2 = 5$ قرار می‌گیرد. اگر $F(x, y, z) = (x, y, 2z)$، آنگاه شار رو به بالای F گذرنده از رویهٔ S را بیابید.

پاسخ: در شکل (آ)، مقیاس‌های واحدهای x و y بزرگ‌تر شده‌اند.



(ب) (آ)

رویهٔ $\mathcal{S}$، نمودار تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y) = 20 - x^2 - y^2$ است که در آن، D تصویر $\mathcal{S}$ بر صفحهٔ xy است. بنابراین، D دیسک بستهٔ $x^2 + y^2 \leq 5$ است. پس، داریم:

$$d\sigma = \pm(-f_1, -f_2, 1)dA_{x,y} = \pm(2x, 2y, 1)dA_{x,y}$$

از آنجا که شار رو به بالا خواسته شده است، در رابطهٔ بالا علامت $+$ را انتخاب می‌کنیم. با استفاده از مختصات قطبی و توجه به این نکته که روی D داریم $z = 20 - x^2 - y^2$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} F \cdot d\sigma &= \iint_D (x, y, 2z) \cdot (2x, 2y, 1)\, dA_{x,y} \\ &= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 2z)\, dA_{x,y} = 40 \iint_D dA_{x.y} \\ &= 40 \times (D \text{ مساحت}) = 40(5\pi) = 200\pi\end{aligned}$$

در ادامه، دو سؤال تستی آورده می‌شوند که از مثال قبل استخراج شده‌اند.

مثال

فرض کنید که S بخشی از رویهٔ $z = 20 - x^2 - y^2$ باشد که داخل استوانهٔ $x^2 + y^2 = 5$ قرار می‌گیرد. اگر $F(x, y, z) = (x, y, 2z)$، آنگاه مقدار شار رو به بالای F گذرنده از رویهٔ S در کدام گزینه آمده است؟

۱ 2π

۲ 50π

۳ 100π

۴ 200π

مثال

فرض کنید که S بخشی از رویهٔ $z = 20 - x^2 - y^2$ است که داخل استوانهٔ $x^2 + y^2 = 5$ قرار می‌گیرد. اگر N میدان برداری قائم یکهٔ S و رو به بالا باشد، آنگاه $d\sigma = N\, dS$ برابر با عبارت آورده‌شده در کدام گزینه است؟

۱ $(x, y, 1)\, dA_{x,y}$

۲ $(-x, -y, -1)\, dA_{x,y}$

۳ $(-2x, -2y, -1)\, dA_{x,y}$

۴ $(2x, 2y, 1)\, dA_{x,y}$