ریاضی عمومی ۲

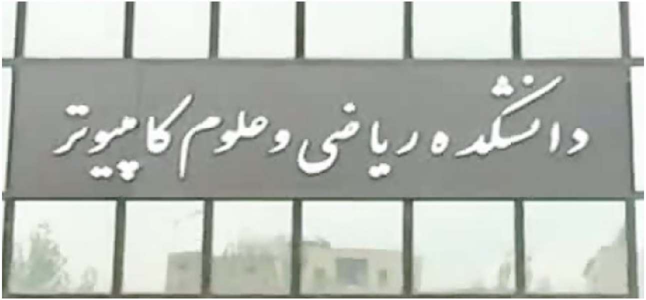
ارائه دهنده:

دکتر داریوش کیانی

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

طرح درس



مشتق‌پذیری توابع چندمتغیره

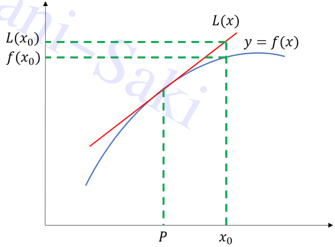
یادآوری تقریب خطی توابع اسکالر تک‌متغیره

فرض کنید تابع $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $P \in I$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، تقریب خطی f حول P به‌صورت زیر است:

$$f(x) \approx L(x) = f(P) + f'(P)(x - P)$$

که البته این همان معادلهٔ خط مماس بر نمودار f در $x = P$ است.

به‌ازای $x = x_0$ در نزدیکی نقطهٔ P، مانند شکل داریم $f(x_0) \approx L(x_0)$.



تقریب خطی توابع اسکالر چندمتغیره

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ دارای مشتقات جزئی اول باشد. تقریب خطی یا خطی‌سازی f حول نقطهٔ P به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, \ldots, a_n)(x_i - a_i)$$

به عنوان یک تقریب، حول نقطهٔ P داریم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx L(x_1, \ldots, x_n)$$

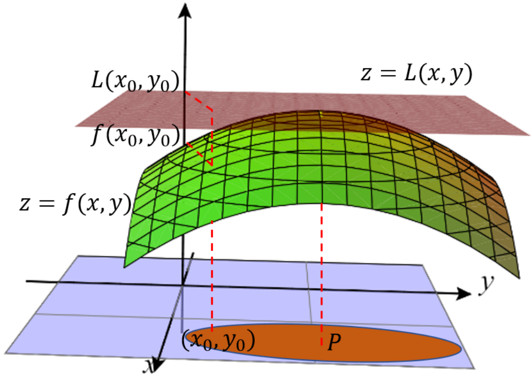
توجه کنید که ـ همان‌طور که بعداً خواهیم دید ـ $L(x_1, \ldots, x_n)$ معادلهٔ ابرصفحهٔ مماس بر نمودار f در نقطهٔ P است. می‌توان ضابطهٔ $L(x_1, \ldots, x_n)$ را به‌صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$L(x) = f(P) + \nabla f(P) \cdot (x - P)$$

که در آن $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

در حالت خاص دو متغیره، با فرض $z = f(x,y)$ و $P = (a,b)$، داریم:

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx L(x,y) &= f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) \\ &= f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b) \end{aligned}$$



مثال

با استفاده از تقریب خطی، یک مقدار تقریبی برای تابع $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ در نقطهٔ $(2.2, -0.2)$ بیابید.

پاسخ: باید تقریب خطی f را حول نقطه‌ای نزدیک به $(2.2, -0.2)$ در نظر بگیریم که در آن نقطه محاسبهٔ f دشوار نیست. بنابراین، تقریب خطی f را حول نقطهٔ $P = (2, 0)$ می‌نویسیم. داریم:

$$f_1(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}, \quad f_2(x,y) = \frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}$$

از این‌رو، داریم:

$$\begin{aligned} f(2.2, -0.2) &\approx f(2,0) + f_1(2,0)(2.2 - 2) + f_2(2,0)(-0.2 - 0) \\ &= 3 + \left(\frac{4}{3}\right)(0.2) + \left(\frac{1}{3}\right)(-0.2) = 3 + 0.2 = 3.2 \end{aligned}$$

یادآوری

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $x = P$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، با فرض اینکه L تقریب خطی f حول P است، داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(P+h)-L(P+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(P+h)-(f(P)+hf'(P))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(P+h)-f(P)}{h}\right)-f'(P)\\ &= f'(P)-f'(P)=0\end{aligned}$$

البته، داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(P+h)-L(P+h)}{h}=0 \iff \lim_{h\to 0}\frac{f(P+h)-L(P+h)}{|h|}=0$$

بنابراین

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P+h)-L(P+h)}{|h|}=0$$

در اینجا، $|h|$ را فاصلهٔ نقطهٔ P تا $P+h$ تفسیر کنید.

مشتق‌پذیری توابع دومتغیره

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع است که دارای مشتقات جزئی اول در نقطهٔ $P = (a,b) \in D$ باشد. همچنین، فرض کنید که L تقریب خطی f حول P است. در این صورت، f را در نقطهٔ P مشتق‌پذیر یا دیفرانسیل‌پذیر گوییم، هرگاه

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(P+(h,k)) - L(P+(h,k))}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

یا به‌طور معادل

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - hf_1(a,b) - kf_2(a,b) - f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

که در آن $\sqrt{h^2+k^2}$ را می‌توان فاصلهٔ دو نقطهٔ P و $P+(h,k)$ تفسیر کرد.

مشتق‌پذیری توابع چندمتغیرهٔ دلخواه

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد که دارای مشتقات جزئی اول در نقطهٔ $P = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ است. همچنین، فرض کنید که L تقریب خطی f حول P است. در این صورت، f را در نقطهٔ P مشتق‌پذیر یا دیفرانسیل‌پذیر گوییم، هرگاه

$$\lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{f(P + (h_1, \ldots, h_n)) - L(P + (h_1, \ldots, h_n))}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0$$

یا به‌طور معادل

$$\lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) - \sum_{i=1}^{n} h_i f_i(a_1, \ldots, a_n)}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0$$

که در آن $\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$ را می‌توان فاصلهٔ دو نقطهٔ P و $P + (h_1, \ldots, h_n)$ تفسیر کرد.

شرط مشتق‌پذیری برای تابع nـمتغیرهٔ f در نقطهٔ $P = (a_1, \dots, a_n)$ را می‌توانیم به‌صورت زیر نیز بنویسیم:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(P+h) - f(P) - h \cdot \nabla f(P)}{|h|} = 0}$$

که در آن $h = (h_1, \dots, h_n)$ و $|h| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$.

تعریف

اگر تابع nـمتغیرهٔ f در نقطهٔ P مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\nabla f(P)$ را مشتق f در P گوییم و آن را با $f'(P)$ نیز نمایش می‌دهیم.

قضیه

فرض کنید $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $P \in D$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت:

- $f \pm g$ در نقطهٔ P مشتق‌پذیر هستند.
- fg در نقطهٔ P مشتق‌پذیر است.
- در صورتی که $g(P) \neq 0$، آنگاه $\dfrac{f}{g}$ در نقطهٔ P مشتق‌پذیر است.

قضیه

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی باشند که $\mathrm{Im}(f) \subseteq I$. اگر f در $P \in U$ و g در $f(P) \in I$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $g \circ f$ در P مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(g \circ f)'(P) = g'(f(P))f'(P)$$

یا به‌طور معادل، داریم:

$$\nabla(g \circ f)(P) = g'(f(P))\nabla f(P)$$

قضیه

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ P مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، f در P پیوسته است.

اثبات: داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left(f(P+h)-f(P)\right) &= \lim_{h\to 0}\left(f(P+h)-f(P)-h\cdot\nabla f(P)+h\cdot\nabla f(P)\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(P+h)-f(P)-h\cdot\nabla f(P)}{|h|}|h|+h\cdot\nabla f(P)\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(P+h)-f(P)-h\cdot\nabla f(P)}{|h|}|h|+\lim_{h\to 0}\left(h\cdot\nabla f(P)\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(P+h)-f(P)-h\cdot\nabla f(P)}{|h|}\lim_{h\to 0}|h|+0\\
&= 0
\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{h\to 0} f(P+h)=f(P)$، که نتیجه می‌دهد f در P پیوسته است.

قضیه

فرض کنید $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد و $P \in D$. اگر به‌ازای هر $1 \le i \le n$، تابع $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ در یک همسایگی از نقطهٔ P موجود و پیوسته باشد، آنگاه $f(x_1, \ldots, x_n)$ در نقطهٔ P مشتق‌پذیر است.

توجه

عکس قضیهٔ قبل برقرار نیست. مثالی که در ادامه می‌آید، مؤید این مطلب است.

توجه

واضح است که مشتقات جزئی اول چندجمله‌ای‌ها مجدداً چندجمله‌ای و از این‌رو پیوسته هستند. پس، بنابر قضیه‌ای چندجمله‌ای‌ها همگی مشتق‌پذیر هستند. بنابراین، ترکیب یک تابع نمایی، مثلثاتی و یا لگاریتمی با یک چندجمله‌ای یا تحدیدیافتهٔ آن، مشتق‌پذیر است.

مثال

فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

۱ نشان دهید که f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

۲ آیا $f_1(x,y)$ در $(0,0)$ پیوسته است؟

پاسخ ۱: داریم:

$$f_1(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h^2+0^2}\right)-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}h\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)=0$$

$$f_2(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-hf_1(0,0)-kf_2(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

در حالی که داریم:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)}{r} = 0$$

که در آن از مختصات قطبی و روابط $h = r\cos(\theta)$ و $k = r\sin(\theta)$ استفاده کرده‌ایم (البته این حد را با استفاده از قضیهٔ فشردگی نیز می‌توانستیم به‌دست آوریم).

بنابراین، f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ ۲: داریم:

$$f_1(x,y)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

توجه کنید که $0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$. بنابراین، کافی است که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ با $g(x,y)=\frac{2x^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ را بررسی کنیم.

- مسیر $x=0$:

  واضح است که تابع $g(x,y)$ روی این مسیر برابر با 0 است.

- مسیر $y=x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{4x^4}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

حال، دنباله‌های زیر را (که هر دو همگرا به 0 هستند) در نظر می‌گیریم:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

فرض کنید $h(x) = \frac{1}{2x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$. در این صورت، داریم:

$$h(a_n) = \frac{1}{2a_n}\cos\left(\frac{1}{2a_n^2}\right) = \frac{1}{2\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}}\cos\left(\frac{1}{2\frac{1}{4n\pi}}\right) = \sqrt{n\pi}\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1}$$

پس، $\lim_{n\to\infty} h(a_n) = \infty$. به طور مشابه، داریم $\lim_{n\to\infty} h(b_n) = 0$. از این‌رو $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ وجود ندارد، که نتیجه می‌دهد $f_1(x,y)$ در $(0,0)$ پیوسته نیست.

Kiani-Saeedi Madani-Saki

قضیهٔ مقدار میانگین

فرض کنید تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی اول پیوسته در یک همسایگی نقطهٔ $P \in D$ باشد. اگر قدرمطلق‌های h و k به‌اندازهٔ کافی کوچک باشند، آنگاه اعداد $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ وجود دارند که

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = hf_1(a+\theta_1 h, b+k) + kf_2(a, b+\theta_2 k)$$

دیفرانسیل یک تابع اسکالر چندمتغیره

فرض کنید که تابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی اول باشد. در این صورت، دیفرانسیل تابع f، با نماد $\mathrm{d}f$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

یعنی به‌ازای هر $P \in D$، داریم:

$$\mathrm{d}f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\,\mathrm{d}x_n$$

توجه

با فرضیات تعریف قبل، اگر $P = (a_1, \ldots, a_n)$، آنگاه تقریب‌های زیر را داریم:

$$\mathrm{d}x_i \approx \Delta x_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\mathrm{d}f(P) \approx f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$$

مثال

فرض کنید $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. اگر L به اندازهٔ 2% افزایش و g به‌اندازهٔ 0.6% کاهش یابند، آنگاه درصد تغییر T را بیابید.

پاسخ: داریم $\mathrm{d}L=0.02L$ و $\mathrm{d}g=-0.006g$. توجه کنید که:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T=\frac{\partial T}{\partial L}\,\mathrm{d}L+\frac{\partial T}{\partial g}\,\mathrm{d}g&=\pi\sqrt{\frac{1}{Lg}}(0.02L)-\pi\sqrt{\frac{L}{g^3}}(-0.006g)\\&=0.02\pi\sqrt{\frac{L}{g}}+0.006\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\\&=0.013\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)=0.013T\end{aligned}$$

بنابراین، T به‌اندازهٔ 1.3% افزایش می‌یابد.

ماتریس ژاکوبی یک تابع چندمتغیره

تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را به‌صورت $f = (\underbrace{f^{(1)}}_{y_1}, \ldots, \underbrace{f^{(m)}}_{y_m})$ در نظر بگیرید. همچنین، فرض کنید که به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$، مشتقات جزئی y_i در $P \in U$ موجود هستند. در این صورت، ماتریس ژاکوبی یا ژاکوبین تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Df(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}(P) \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \nabla f^{(1)}(P) \\ \vdots \\ \nabla f^{(m)}(P) \end{bmatrix}_{m\times n}$$

مشتق یک تابع برداری چندمتغیره

- تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ که $f = (\underbrace{f^{(1)}}_{y_1}, \ldots, \underbrace{f^{(m)}}_{y_m})$ را در $P \in U$ مشتق‌پذیر گوییم، هرگاه به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$، تابع $f^{(i)}$ در P مشتق‌پذیر باشد.
- اگر $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $Df(P)$ را مشتق f در P گوییم و آن را با $f'(P)$ نمایش می‌دهیم.

مشتق ترکیب توابع برداری چندمتغیره

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و $g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ توابعی باشند که $\mathrm{Im}(f)$ در درون V قرار می‌گیرد. همچنین، فرض کنید $f = (y_1, \ldots, y_m)$ و $g = (z_1, \ldots, z_k)$. اگر f در $P \in U$ و g در $f(P)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $g \circ f$ در P مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\boxed{D(g \circ f)(P) = Dg\left(f(P)\right) Df(P)}$$

به‌طور معادل، داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{P \text{ در نقطهٔ }} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{bmatrix}}_{f(P) \text{ در نقطهٔ }} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{P \text{ در نقطهٔ }}$$

مثال

فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد. ماتریس ژاکوبی f در $(1,0)$، یعنی $Df(1,0)$، را بیابید.

$$f(x,y)=(xe^y+\cos(\pi y),x^2,x-e^y).$$

پاسخ: داریم:

$$f^{(1)}(x,y)=xe^y+\cos(\pi y),\ f^{(2)}(x,y)=x^2,\ f^{(3)}(x,y)=x-e^y$$

بنابراین:

$$Df(1,0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}\\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial y}\\ \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x} & \frac{\partial f^{(3)}}{\partial y}\end{bmatrix}_{(1,0)}=\begin{bmatrix}e^y & xe^y-\pi\sin(\pi y)\\ 2x & 0\\ 1 & -e^y\end{bmatrix}_{(1,0)}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

دیفرانسیل یک تابع چندمتغیره

فرض کنید ژاکوبین $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ که $f = (y_1, \ldots, y_m)$ قابل تعریف باشد. در این صورت، دیفرانسیل تابع f را در نقطهٔ $P \in U$، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{d}f(P) := \begin{bmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}y_m \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{bmatrix} = Df(P)\,\mathrm{d}x$$

که در آن:

$$\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{bmatrix}$$

تقریب خطی یک تابع چندمتغیره

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در $P \in U$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، در نزدیکی P تعریف می‌کنیم:

$$L(x) = f(P) + Df(P)(x - P)$$

همانند قبل، به منظور تقریب خطی f در نزدیکی P از $L(x)$ استفاده می‌کنیم. یعنی داریم $f(x) \approx L(x)$. به عبارتی دیگر، داریم:

$$f(x) \approx f(P) + \mathrm{d}f(P) = f(P) + Df(P)dx$$

مثال

فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد. مقدار تقریبی $f(1.02, 0.01)$ را با استفاده از تقریب خطی بیابید.

$$f(x, y) = (xe^y + \cos(\pi y), x^2, x - e^y)$$

پاسخ: با استفاده از مثال قبل داریم:

$$f(1.02,0.01)\approx f(1,0)+\mathrm{d}f(1,0)=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}1&1\\2&0\\1&-1\end{bmatrix}}_{Df(1,0)}\begin{bmatrix}\overbrace{1.02-1}^{\mathrm{d}x}\\\underbrace{0.01-0}_{\mathrm{d}y}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.03\\0.04\\0.01\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.03\\1.04\\0.01\end{bmatrix}$$

توجه

قبلاً قاعدهٔ زنجیره‌ای را با شرط پیوستگی مشتقات جزئی اول تعریف کردیم. با این‌حال، این قاعده با فرض مشتق‌پذیری نیز برقرار است.

قضیه

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی با متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ باشد که در $P \in U$ مشتق‌پذیر است. اگر $\nabla f(P) \neq 0$، آنگاه $\nabla f(P)$ بر مجموعهٔ تراز f گذرنده از P، در نقطهٔ P عمود است. به عبارت دیگر، اگر $c \in \mathbb{R}$ چنان باشد که $P \in f^{-1}(c)$، آنگاه به‌ازای هر منحنی $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to f^{-1}(c)$ که P در تصویر آن قرار دارد، با فرض $\gamma(t_0) = P$، داریم $\nabla f(P) \cdot \gamma'(t_0) = 0$.

اثبات: یادآوری می‌کنیم که:

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \dots, x_n) \in U : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

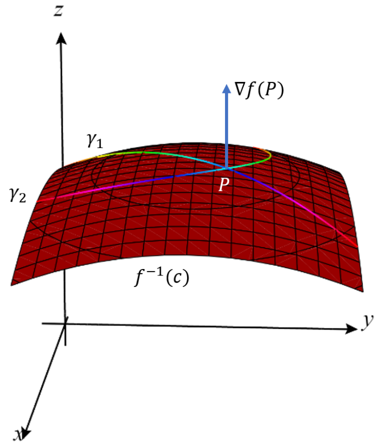
حال با توجه به اینکه γ یک منحنی در $f^{-1}(c)$ است، همواره داریم:

$$f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = f(\gamma(t)) = c$$

بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای، با مشتق‌گیری از رابطهٔ بالا در نقطهٔ $t = t_0$، داریم:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t_0))x_1'(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t_0))x_n'(t_0) = \nabla f(P) \cdot \gamma'(t_0)$$

شکل زیر متناظر با یک تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ است.



توجه

فرض کنید $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. می‌خواهیم بردار قائم بر نمودار تابع f را در هر نقطه از U بیابیم. تابع $g : U \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $g(x,y,z) = f(x,y) - z$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} g^{-1}(0) &= \{(x,y,z) \in U \times \mathbb{R} : g(x,y,z) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in U \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\} \end{aligned}$$

بنابراین، $g^{-1}(0)$ همان نمودار f است. از قضیهٔ قبل می‌دانیم که به‌ازای هر $P = (a,b) \in U$، $\nabla g(a,b,f(a,b))$ بر $g^{-1}(0)$ و در نتیجه نمودار f در $(a,b,f(a,b))$ عمود است. پس، بردار قائم بر نمودار f در P به‌صورت زیر است:

$$\nabla g(a,b,f(a,b)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$$

توجه

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. به عنوان تعمیمی از حالت قبل، به‌ازای هر $P = (a_1, \ldots, a_n) \in U$، بردار قائم بر نمودار f در نقطهٔ $(a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n))$ به‌صورت زیر است:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n), -1\right)$$

خطوط قائم بر نمودار یک تابع دومتغیره

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت معادلهٔ خط قائم بر نمودار f در $P = (a, b, f(a, b)) \in U \times \mathbb{R}$، به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x(t) = a + t\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ y(t) = b + t\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) & , t \in \mathbb{R} \\ z(t) = f(a, b) - t \end{cases}$$

یا به‌طور معادل:

$$(a, b, f(a, b)) + \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right) \right\rangle$$

صفحات مماس بر نمودار یک تابع دومتغیره

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. توجه کنید که بردار نرمال صفحهٔ مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(a, b, f(a, b))$، یعنی n، همان بردار قائم بر نمودار f در این نقطه است.

پس، معادلهٔ صفحهٔ مماس به‌صورت زیر است:

$$n \cdot ((x, y, z) - (a, b, f(a, b))) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right) \cdot (x - a, y - b, z - f(a, b)) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$z = \underbrace{f(a, b) + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}_{\text{تقریب خطی } f \text{ حول } (a,b)}$$

مثال

صفحهٔ مماس بر نمودار تابع $z = \sin(xy) - \cos(xy)$ را در نقطهٔ $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 1)$ بیابید.

پاسخ: قرار می‌دهیم $f(x,y) = \sin(xy) - \cos(xy)$. در این صورت، داریم:

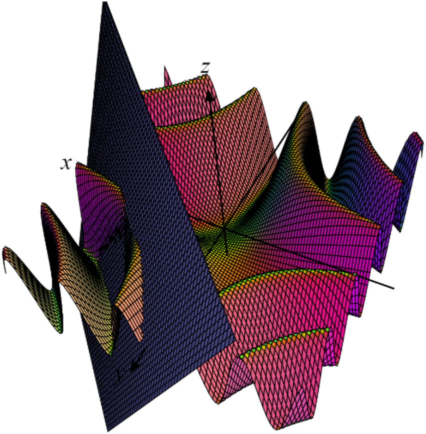
$$f_1(x,y) = y\cos(xy) + y\sin(xy), \quad f_2(x,y) = x\cos(xy) + x\sin(xy)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$f_1(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = f_2(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$$

بنابراین، معادلهٔ صفحهٔ مماس به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} z &= f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) + (x - \sqrt{\pi}) f_1(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) + (y - \sqrt{\pi}) f_2(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \\ &= 1 - \sqrt{\pi}(x - \sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi}(y - \sqrt{\pi}) \end{aligned}$$


z
x
y

صفحات مماس بر ردهٔ گسترده‌ای از رویه‌ها در $\mathbb{R}^3$

فرض کنید که $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، مجموعهٔ تراز $f^{-1}(0)$ یک رویه است. در واقع، $f^{-1}(0)$ مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, y, z) \in U$ است که $f(x, y, z) = 0$.
پس، بنابر قضیه‌ای که داشتیم، $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ بردار نرمال صفحهٔ مماس بر رویه در نقطهٔ $(x_0, y_0, z_0) \in U$ است. از این‌رو، معادلهٔ صفحه‌ی مماس بر رویه در (x_0, y_0, z_0) به‌صورت زیر است:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$

یعنی با فرض $P = (x_0, y_0, z_0)$، داریم:

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(P) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(P) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0$$

مثال

رویه‌ای که با معادلهٔ $\sin(z) = x^2 - 2xy + y^2x$ مشخص می‌شود را در نظر بگیرید. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر این رویه را در نقطهٔ $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{\pi}{4}\right)$ به‌دست آورید.

پاسخ: قرار می‌دهیم $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2x - \sin(z)$. در این صورت، رویهٔ مورد بحث با $f(x, y, z) = 0$ مشخص می‌شود. حال، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\cos(z)$$

بنابراین با فرض $P = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \frac{\pi}{4}\right)$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = -\frac{2}{\sqrt[4]{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نهایت، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویه در نقطهٔ P، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) - \frac{2}{\sqrt[4]{2}}y - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

مثال‌های تکمیلی

تاکنون مثال‌های **مفهومی** و **کاربردی** مختلفی را از این مبحث دیدیم. در ادامه، به مثال‌های بیشتری از این مبحث توجه فرمایید. برای درک بهتر، ابتدا به مسائل فکر کنید و سعی کنید که آن‌ها را حل بفرمایید. سپس پاسخ‌ها را با دقت مطالعه و بررسی نمایید.

مثال

معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $\sin(xy) + \sin(xz) + \cos(yz) = 2$ در نقطهٔ $P = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$، در کدام گزینه آمده است؟

۱ $x + y + z = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

۲ $x + y = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

۳ $x + z = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

۴ $y + z = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

پاسخ: با فرض $f(x,y,z) = \sin(xy) + \sin(xz) + \cos(yz) - 2$، رویهٔ مورد بحث با معادلهٔ $f(x,y,z) = 0$ داده خواهد شد. حال، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) + z\cos(xz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) - z\sin(yz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\cos(xz) - y\sin(yz)$$

از این‌رو، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

پس، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویه در نقطهٔ P برابر است با:

$$0 \times \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(y - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(z - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 0$$

بنابراین، $y + z = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ و گزینهٔ ۴ صحیح است.

مثال

فرض کنید $h(x, y) = x \sin(xy)$. مقدار تقریبی $h(1.01, -0.02)$ را محاسبه کنید.

پاسخ: برای (x, y)های در نزدیکی نقطهٔ $(1, 0)$، داریم:

$$h(x, y) \approx h(1, 0) + (x - 1)\frac{\partial h}{\partial x}(1, 0) + (y - 0)\frac{\partial h}{\partial y}(1, 0)$$

از طرفی، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = x^2\cos(xy) \end{cases}$$

در نتیجه، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(1, 0) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(1, 0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(1.01, -0.02) \approx -0.02$$