اعداد مختلط

تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
پاییز ۱۴۰۲

تعریف

فرض کنید x و y اعداد حقیقی باشند. زوج مرتب (x,y) را یک *عددمختلط* نامند، هرگاه جمع و ضرب این زوج‌ها به‌صورت زیر تعریف شده باشد؛

$$\begin{cases} (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \\ (x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2) \end{cases}$$

به عبارت دیگر، $\mathbb{R}^2=\{(x,y):\ x,y\in\mathbb{R}\}$ همراه با عمل‌های جمع و ضرب فوق، مجموعه‌ی اعداد مختلط نامیده می‌شود و با $\mathbb{C}$ نمایش داده می‌شود. معمولا یک عدد مختلط را با $z=(x,y)$ نمایش می‌دهیم. اعداد x و y را مولفه‌های z گوییم. مولفه‌ی اول یعنی x را قسمت حقیقی z می‌نامند و با $\mathrm{Re}(z)$ نمایش می‌دهند. مولفه‌ی دوم یعنی y را قسمت موهومی z می‌نامند و با $\mathrm{Im}(z)$ نمایش می‌دهند؛ یعنی

$$z=(x,y)\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}(z)=x \\ \mathrm{Im}(z)=y\end{cases}$$

ویژگی‌های اعداد مختلط

با استفاده‌ی مستقیم از تعریف جمع و ضرب اعداد مختلط، می‌توانیم روابط زیر را به‌دست آوریم.

ویژگی های اعداد مختلط

جابجایی	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1$	(۱)
شرکت‌پذیری	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$	(۲)
توزیع‌پذیری	$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	(۳)
عضو خنثی	$z + (0, 0) = (x, y) + (0, 0) = (x, y) = z$	(۴)
عضو همانی	$z(1, 0) = (x, y)(1, 0) = (x, y) = z$	(۵)
عضو قرینه	$z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$	(۶)
عضو وارون ضربی برای اعداد ناصفر	$(x, y)(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}) = (1, 0)$	(۷)

تذکر

وارون عدد مختلط ناصفر $z=(x,y)$ را با z^{-1} نمایش می‌دهیم. داریم:

$$z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

تقسیم دو عدد مختلط

فرض کنید z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند و $z_2\neq 0$. تعریف می‌کنیم:

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}$$

اگر عدد حقیقی x را به‌صورت عدد مختلط $(x, ۰)$ تصور کنیم، آن‌گاه جمع و ضرب بین این نوع از اعداد مختلط همان جمع و ضرب اعداد حقیقی است. به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{cases} (x_۱, ۰) + (x_۲, ۰) = (x_۱ + x_۲, ۰) \\ (x_۱, ۰)(x_۲, ۰) = (x_۱x_۲, ۰) \end{cases}$$

در نتیجه اعداد مختلط را می‌توان به‌عنوان توسیعی از اعداد حقیقی در نظر گرفت.

تعریف

عدد مختلط $(۰, ۱)$ را با نماد i نمایش می‌دهیم و **یکه‌ی موهومی** می‌نامیم. در صورتی که اعداد مختلط را به‌عنوان توسیعی از اعداد حقیقی در نظر گرفته و تمایزی بین x و $(x, ۰)$ قائل نشویم، آن‌گاه می‌توان عدد مختلط $z = (x, y)$ را به‌صورت

$$z = (x, y) = (x, ۰) + (۰, y) = (x, ۰) + (۰, ۱)(y, ۰) = x + iy$$

نمایش داد.

در واقع $i=(0,1)$ یک جواب معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+1=0$ می باشد؛ زیرا

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

به‌وضوح جواب دیگر این معادله $-i$ است.

تذکر

اگر $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه

(۱) $z_1=z_2 \iff x_1=x_2,\ \ y_1=y_2$

(۲) $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

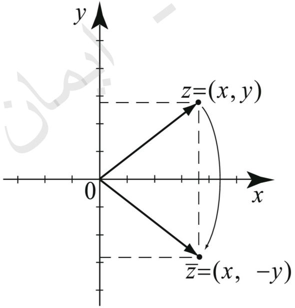
(۳) $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

(۴) $z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$

(۵) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

تعریف (مزدوج یک عدد مختلط)

مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ به‌صورت $\overline{z} = x - iy$ تعریف می‌شود. در واقع مزدوج یک عدد مختلط، قرینه‌ی آن نسبت به محور x است.



ویژگی‌های مزدوج یک عدد مختلط

فرض کنید z و w دو عدد مختلط باشند. در این صورت داریم:

(۱) $\overline{(\overline{z})} = z$

(۲) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$

(۳) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(۴) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \qquad (w \neq ۰)$

(۵) $z + \overline{z} = ۲\mathrm{Re}(z)$

(۶) $z - \overline{z} = ۲i\mathrm{Im}(z)$

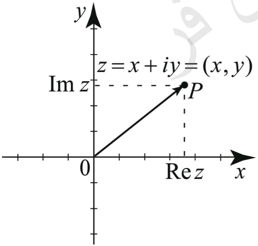
تعریف (قدرمطلق یک عدد مختلط)

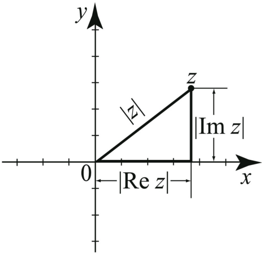
اندازه یا *قدرمطلق* عدد مختلط $z = x + iy$ را با $|z|$ نمایش داده و برابر با فاصله‌ی z تا مبدا تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر داریم:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اگر $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه $|z_1 - z_2|$ برابر است با فاصله‌ی z_1 تا z_2. یعنی

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$





ویژگی‌های قدرمطلق یک عدد مختلط

فرض کنید z و w دو عدد مختلط باشند. در این صورت داریم:

(۱) $|\overline{z}| = |z| = |-z| = |-\overline{z}|$

(۲) $z\overline{z} = |z|^2$

(۳) $|zw| = |z||w|$

(۴) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad (w \neq 0)$

(۵) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(۶) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

(۷) $|z^n| = |z|^n$

(۸) $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

(۹) $\overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}$

(۱۰) $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$

(۱۱) $\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

اثبات: (۲)

$$z\overline{z} = (x+iy)\overline{(x+iy)} = (x+iy)(x-iy) = x^{۲}+y^{۲} = |z|^{۲}$$

(۵)

$$\begin{aligned}
|z+w|^{۲} &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= |z|^{۲} + |w|^{۲} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} \\
&= |z|^{۲} + |w|^{۲} + ۲\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\
&\leq |z|^{۲} + |w|^{۲} + ۲|z\overline{w}| \\
&= |z|^{۲} + |w|^{۲} + ۲|z||w| \\
&= (|z|+|w|)^{۲}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad |z+w| \leq |z| + |w|$$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

(۱) $$\frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}$$

(۲) $$\frac{i^{36}-i^{27}}{i^{124}-i^{12}+i^{5}}$$

(۳) $$\frac{5+5i}{2-4i}+\frac{20}{4+3i}$$

پاسخ: (۱)

$$\frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}=\frac{1}{(2+i+2i+i^2)(3+i)}$$

$$=\frac{1}{(1+3i)(3+i)}=\frac{1}{10i}\times\frac{i}{i}=\frac{-i}{10}$$

(۲)

$$\frac{i^{۳۶}-i^{۲۷}}{i^{۱۲۴}-i^{۱۲}+i^{۵}}=\frac{(i^{۲})^{۱۸}-(i^{۲})^{۱۳}i}{(i^{۲})^{۶۲}-(i^{۲})^{۶}+i^{۴}i}=\frac{(-۱)^{۱۸}-(-۱)^{۱۳}i}{(-۱)^{۶۲}-(-۱)^{۶}+i}$$

$$=\frac{۱+i}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{i-۱}{-۱}=۱-i$$

(۳)

$$\frac{۵+۵i}{۲-۴i}+\frac{۲۰}{۴+۳i}=\frac{۵+۵i}{۲-۴i}\times\frac{۲+۴i}{۲+۴i}+\frac{۲۰}{۴+۳i}\times\frac{۴-۳i}{۴-۳i}$$

$$=\frac{(۱۰-۲۰)+i(۲۰+۱۰)}{۴+۱۶}+\frac{۸۰-۶۰i}{۱۶+۹}$$

$$=(\frac{-۱}{۲}+\frac{۳}{۲}i)+(\frac{۱۶}{۵}-\frac{۱۲}{۵}i)$$

$$=\frac{۲۷}{۱۰}-\frac{۹}{۱۰}i$$

مثال

نشان دهید معادله ی $|z| - z = i$ جواب ندارد.

پاسخ: اگر $z = x + iy$ یک جواب این معادله باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sqrt{x^۲ + y^۲} - (x + iy) = i \implies (\sqrt{x^۲ + y^۲} - x) - iy = ۰ + i$$

با مقایسه‌ی قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف تساوی، نتیجه می‌گیریم:

$$\sqrt{x^۲ + y^۲} - x = ۰, \qquad y = -۱$$

حال با حل این دو معادله خواهیم داشت:

$$\sqrt{x^۲ + (-۱)^۲} = x \Rightarrow x^۲ + ۱ = x^۲$$

که یک تناقض است. پس معادله‌ی فوق جوابی ندارد.

مثال

جواب‌های معادله‌ی زیر را بیابید.

$$z + ۱ + ۸i = |z|(۱ + i)$$

پاسخ: اگر قرار دهیم $z = x + iy$، آن‌گاه داریم:

$$x + iy + ۱ + ۸i = \sqrt{x^۲ + y^۲} + i\sqrt{x^۲ + y^۲}$$
$$\Longrightarrow (x + ۱) + i(y + ۸) = \sqrt{x^۲ + y^۲} + i\sqrt{x^۲ + y^۲}$$

با مقایسه‌ی قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف تساوی، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} x+۱=\sqrt{x^۲+y^۲} \\ y+۸=\sqrt{x^۲+y^۲} \end{cases} \quad {\color{red}(*)} \quad \Rightarrow x+۱=y+۸ \Rightarrow x=y+۷$$

$$\xRightarrow{{\color{red}(*)}} y+۸=\sqrt{(y+۷)^۲+y^۲}$$

$$\Rightarrow (y+۸)^۲=(y+۷)^۲+y^۲$$

$$\Rightarrow y^۲-۲y-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow y=-۳, \quad y=۵$$

بنابراین جواب‌های معادله عبارتند از $۴-۳i$ و $۱۲+۵i$.

مثال

اگر $|z| = 2$ باشد، نشان دهید

$$\left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leq \frac{1}{3}$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\left|z^4 - 4z^2 + 3\right| &= \left|(z^2 - 3)(z^2 - 1)\right| \\
&= \left|(z^2 - 3)\right| \left|(z^2 - 1)\right| \geq^{(*)} 1 \times 3 = 3 \\
&\Rightarrow \left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leq \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$(*)\ \text{دلیل:} \begin{cases} |z^2 - 3| \geq \left| |z^2| - |3| \right| = \left| |z|^2 - 3 \right| = 1 \\ |z^2 - 1| \geq \left| |z^2| - |1| \right| = \left| |z|^2 - 1 \right| = 3 \end{cases}$$

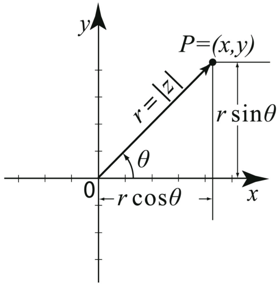
مثال

فرض کنید z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند. ثابت کنید

$$|1-\overline{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
|1-\overline{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= (1-\overline{z}_1 z_2)\overline{(1-\overline{z}_1 z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\
&= 1 + |z_1|^2|z_2|^2 - (\overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2) \\
&\quad - \left(|z_1|^2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2\right) \\
&= 1 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \\
&= \left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)
\end{aligned}$$



هر نقطه غیر از مبدا در صفحه‌ی مختصات را می‌توان با مختصات قطبی (r, θ) نمایش داد، که در آن r فاصله‌ی نقطه از مبدا و θ زاویه‌ای است که بردار مکان نقطه با قسمت مثبت محور x می‌سازد. بنابراین هر عدد مختلط ناصفر به‌شکل $z = x + iy = (x, y)$ را می‌توان با استفاده از مختصات قطبی به‌صورت زیر نمایش داد؛

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \quad z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

که در آن $r = |z|$ و θ، که زاویه بین قسمت مثبت محور x و نیم‌خط OP است، را آرگومان z می‌گوییم. بنابراین داریم:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

مقدار θ در نمایش قطبی عدد مختلط z یکتا نمی‌باشد. در واقع، اگر θ زاویه‌ی بین نیم‌خط OP و قسمت مثبت محور x باشد، آن‌گاه $\theta + ۲k\pi$، که $k \in \mathbb{Z}$، نیز زاویه‌ی بین نیم‌خط OP و قسمت مثبت محور x است. هر مقدار θ یک آرگومان z نام دارد و مجموعه‌ی همه‌ی این مقادیر را با $\arg z$ نمایش می‌دهیم. از بین این زوایا، زاویه‌ای که در بازه‌ی $(-\pi, \pi]$ قرار می‌گیرد را آرگومان اصلی می‌نامیم و با نماد $\operatorname{Arg} z$ نمایش می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$\boxed{\arg z = \operatorname{Arg} z + ۲k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})}$$

مثال

هر یک از اعداد مختلط زیر را به فرم قطبی بنویسید.

(۱) $z = ۱ - i$

(۲) $z = ۵i$

(۳) $z = -۱$

(۴) $z = \frac{۲}{i - ۱}$

پاسخ: (۱)

$$\theta = \operatorname{Arg} z = \tan^{-۱}\left(\frac{-۱}{۱}\right) = \tan^{-۱}(-۱) = -\frac{\pi}{۴} \text{ و } \frac{۳\pi}{۴}$$

چون z در ربع چهارم قرار دارد، پس $\theta = -\frac{\pi}{۴}$. داریم

$$r = |z| = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲}$$

بنابراین

$$z=\sqrt{۲}\Big(\cos\big(-\frac{\pi}{۴}\big)+i\sin\big(-\frac{\pi}{۴}\big)\Big)=\sqrt{۲}\Big(\cos\big(\frac{\pi}{۴}\big)-i\sin\big(\frac{\pi}{۴}\big)\Big)$$

(۲)

$$\theta=\operatorname{Arg}z=\operatorname{Arg}(۵i)=\frac{\pi}{۲},\qquad r=|z|=\sqrt{۰^۲+۵^۲}=۵$$

$$\Longrightarrow\ z=۵\Big(\cos\big(\frac{\pi}{۲}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{۲}\big)\Big)$$

(۳)

$$\theta=\operatorname{Arg}z=\tan^{-۱}\big(\frac{۰}{-۱}\big)=\tan^{-۱}(۰)=۰\ \text{و}\ \pi$$

از آنجا که z روی قسمت منفی محور x قرار دارد، داریم $\theta=\pi$.

$$r = |z| = \sqrt{(-۱)^۲ + ۰^۲} = ۱ \implies z = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

(۴)

$$z = \frac{۲}{i-۱} \times \frac{-i-۱}{-i-۱} = \frac{-۲-۲i}{۲} = -۱ - i$$

$$\theta = Arg\, z = \tan^{-۱}\left(\frac{-۱}{-۱}\right) = \tan^{-۱}(۱) = \frac{\pi}{۴} \text{ و } -\frac{۳\pi}{۴}$$

چون z در ربع سوم قرار دارد، پس $\theta = -\frac{۳\pi}{۴}$.

$$r = |z| = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲}$$

$$\implies z = \sqrt{۲}\left(\cos\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right) + i\sin\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right)\right)$$

نمادگذاری:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

با استفاده از نمادگذاری فوق، فرم قطبی عدد مختلط مانند $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ را می‌توان به‌صورت $z = |z|e^{i\theta}$ (شکل نمایی عدد مختلط z) نیز نمایش داد. به عبارت دیگر، هرگاه $\theta \in \arg z$ و $|z| = r$، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

به‌عنوان مثال عدد مختلط $z = ۲e^{i\frac{\pi}{۳}}$ را می‌توان به‌صورت زیر و به فرم دکارتی نوشت؛

$$z = ۲\Big(\cos\big(\frac{\pi}{۳}\big) + i\sin\big(\frac{\pi}{۳}\big)\Big) = ۲\big(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i\big) = ۱ + \sqrt{۳}i$$

قضیه

اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\\
&\quad + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big)\\
&= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)\\
&= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

نتیجه

اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

قضیه

اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

نتیجه

اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

تذکر

فرض کنید $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$. در این صورت $z_1 = z_2$ اگر و تنها اگر

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نکته

برای جمع و تفریق دو عدد مختلط، استفاده از فرم دکارتی ساده‌تر از استفاده از فرم نمایی یا قطبی می‌باشد؛ اما برای محاسبه‌ی ضرب و تقسیم دو عدد مختلط، استفاده از فرم قطبی ساده‌تر است. به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$. در این صورت داریم:

$$z_1 z_2 = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1} r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}}{r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

مثال

اگر $z_۱ = \cos(\frac{۴\pi}{۵}) + i\sin(\frac{۴\pi}{۵})$ و $z_۲ = \cos(\frac{\pi}{۵}) - i\sin(\frac{\pi}{۵})$، مقدار $\frac{z_۱}{z_۲}$ را بیابید.

پاسخ: از آنجا که $z_۲ = \cos(-\frac{\pi}{۵}) + i\sin(-\frac{\pi}{۵})$، لذا $|z_۲| = ۱$ و $\text{Arg}(z_۲) = -\frac{\pi}{۵}$.
همچنین، $|z_۱| = ۱$ و $\text{Arg}(z_۱) = \frac{۴\pi}{۵}$. در نتیجه

$$\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{e^{i\frac{۴\pi}{۵}}}{e^{i(-\frac{\pi}{۵})}} = e^{i(\frac{۴\pi}{۵} - (-\frac{\pi}{۵}))} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -۱$$

قضیه

اگر $z = re^{i\theta}$، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$\boxed{z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}}$$

به عبارت دیگر

$$\boxed{\Big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\Big)^n = r^n\Big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\Big)}$$

مثال

حاصل مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$(1)\ \left(\sqrt{3}+i\right)^{1500} \qquad (2)\ \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{8}}{2^{7}\left(-1+i\sqrt{3}\right)} \qquad (3)\ (1+i)^{102}+(1-i)^{102}$$

پاسخ: (۱)

$$r=\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^{2}+1^{2}}=2$$

$$\theta=\operatorname{Arg}\left(\sqrt{3}+i\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\overset{\text{ربع اول}}{=\!=}\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+i\right)^{1500}&=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1500}=2^{1500}e^{i\frac{1500\pi}{6}}\\&=2^{1500}\left(\cos(250\pi)+i\sin(250\pi)\right)\\&=2^{1500}(1+0i)=2^{1500}\end{aligned}$$

(۲)

$$\left|-۱+i\sqrt{۳}\right| = \left|۱+i\sqrt{۳}\right| = \sqrt{۱+(\sqrt{۳})^{۲}} = ۲$$

$$\operatorname{Arg}(۱+i\sqrt{۳}) = \tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۱}\right) = \tan^{-۱}(\sqrt{۳}) \overset{\text{ربع اول}}{=\!=} \frac{\pi}{۶}$$

$$\operatorname{Arg}(-۱+i\sqrt{۳}) = \tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}}{-۱}\right) = \tan^{-۱}(-\sqrt{۳}) \overset{\text{ربع دوم}}{=\!=} \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\frac{(۱+i\sqrt{۳})^{۸}}{۲^{۷}(-۱+i\sqrt{۳})} = \frac{\left(۲\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{۳}}\right)^{۸}}{۲^{۷}\left(۲\mathrm{e}^{i\frac{۲\pi}{۳}}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{۸\pi}{۳}}}{\mathrm{e}^{i\frac{۲\pi}{۳}}} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{۸\pi}{۳}-\frac{۲\pi}{۳}\right)}$$

$$= \mathrm{e}^{i\frac{۶\pi}{۳}} = \mathrm{e}^{i۲\pi} = \cos(۲\pi) + i\sin(۲\pi) = ۱$$

(۳)

$$|۱+i| = |۱-i| = \sqrt{۲}$$

$$\operatorname{Arg}(۱+i) = \tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۱}\right) = \tan^{-۱}(۱) \overset{\text{ربع اول}}{=\!=} \frac{\pi}{۴}$$

$$\operatorname{Arg}(۱-i) = \tan^{-۱}\left(\frac{-۱}{۱}\right) = \tan^{-۱}(-۱) \overset{\text{ربع چهارم}}{=\!=} -\frac{\pi}{۴}$$

$$(۱+i)^{۱۰۲} + (۱-i)^{۱۰۲} =$$

$$= \left(\sqrt{۲}\left[\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right]\right)^{۱۰۲} + \left(\sqrt{۲}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{۴}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{۴}\right)\right]\right)^{۱۰۲}$$

$$= (\sqrt{۲})^{۱۰۲}\left[\cos\left(\frac{۱۰۲\pi}{۴}\right) + i\sin\left(\frac{۱۰۲\pi}{۴}\right) + \cos\left(\frac{۱۰۲\pi}{۴}\right) - i\sin\left(\frac{۱۰۲\pi}{۴}\right)\right]$$

$$= (\sqrt{۲})^{۱۰۲}\left[\cos\left(۲۴\pi + \frac{۳\pi}{۲}\right) + i\sin\left(۲۴\pi + \frac{۳\pi}{۲}\right)\right.$$

$$\left. + \cos\left(۲۴\pi + \frac{۳\pi}{۲}\right) - i\sin\left(۲۴\pi + \frac{۳\pi}{۲}\right)\right] = ۰$$

تعریف

فرض کنید z یک عدد مختلط باشد. عدد مختلط w را یک ریشه‌ی nـام z می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم $w^n = z$

اگر $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$، $w = s\mathrm{e}^{i\alpha}$ و $w^n = z$، آن‌گاه داریم:

$$w^n = z \implies \left(s\mathrm{e}^{i\alpha}\right)^n = s^n\mathrm{e}^{in\alpha} = r\mathrm{e}^{i\theta}$$

$$\implies \begin{cases} s^n = r \\ n\alpha = \theta + ۲k\pi \end{cases} \implies \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{۲k\pi}{n} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین همه‌ی ریشه‌ها بر دایره‌ی $|z| = \sqrt[n]{r}$ حول مبدا و به فاصله‌های مساوی در هر $\frac{۲\pi}{n}$ رادیان و با شروع از $\frac{\theta}{n}$ قرار دارند.

در نتیجه ریشه‌های nـام متمایز $z = re^{i\theta}$ عبارتند از:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{۲k\pi}{n})} \qquad k = ۰, ۱, \dots, n-۱$$

ریشه‌های nـام متمایز $z = re^{i\theta}$ را به‌صورت زیر نیز می‌توان محاسبه کرد؛

$$z = re^{i(\theta+۲k\pi)} \Longrightarrow z^{\frac{۱}{n}} = \left(re^{i(\theta+۲k\pi)}\right)^{\frac{۱}{n}}$$
$$= r^{\frac{۱}{n}}\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{۲k\pi}{n})} \qquad (۰ \leq k \leq n-۱)$$

مثال

ریشه‌های سوم عدد مختلط $z = ۸i$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$z = ۸e^{i\frac{\pi}{۲}} \Rightarrow z^{\frac{۱}{۳}} = \left(۸e^{i(\frac{\pi}{۲}+۲k\pi)}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۸}e^{i(\frac{\pi}{۶}+\frac{۲k\pi}{۳})} \qquad (k = ۰, ۱, ۲)$$

$$k = ۰ \Rightarrow z_۰ = ۲\Big(\cos\big(\frac{\pi}{۶}\big) + i\sin\big(\frac{\pi}{۶}\big)\Big) = ۲\big(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + i\frac{۱}{۲}\big) = \sqrt{۳} + i$$

$$k = ۱ \Rightarrow z_۱ = ۲\Big(\cos\big(\frac{۵\pi}{۶}\big) + i\sin\big(\frac{۵\pi}{۶}\big)\Big) = ۲\big(\frac{-\sqrt{۳}}{۲} + \frac{i}{۲}\big) = -\sqrt{۳} + i$$

$$k = ۲ \Rightarrow z_۲ = ۲\Big(\cos\big(\frac{۳\pi}{۲}\big) + i\sin\big(\frac{۳\pi}{۲}\big)\Big) = ۲\big(۰ + i(-۱)\big) = -۲i$$

مثال

مقادیر z را چنان بیابید که $(۱+i\sqrt{۳})z^{۸}-(۱-i\sqrt{۳})=۰$.

پاسخ:

$$z^{۸}=\frac{۱-i\sqrt{۳}}{۱+i\sqrt{۳}}\times\frac{۱-i\sqrt{۳}}{۱-i\sqrt{۳}}=\frac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲}=-\frac{۱}{۲}-i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\left|-\frac{۱}{۲}-i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right|=۱,\quad \operatorname{Arg}\Big(-\frac{۱}{۲}-i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Big)=\tan^{-۱}(\sqrt{۳})\overset{\text{ربع سوم}}{=\!=}-\frac{۲\pi}{۳}$$

بنابراین باید جواب‌های معادله‌ی $z^{۸}=e^{i\frac{-۲\pi}{۳}}$ را به‌دست آوریم؛ یا به‌طور معادل، باید ریشه‌های هشتم عدد مختلط $e^{i\frac{-۲\pi}{۳}}$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$z_k=e^{i\left(\frac{\frac{-۲\pi}{۳}}{۸}+\frac{۲k\pi}{۸}\right)}=e^{i(\frac{-\pi}{۱۲}+\frac{k\pi}{۴})}$$

$$=\cos\Big(\frac{-\pi}{۱۲}+\frac{k\pi}{۴}\Big)+i\sin\Big(\frac{-\pi}{۱۲}+\frac{k\pi}{۴}\Big)\qquad(k=۰,۱,\dots,۷)$$

مثال

جواب‌های معادله‌ی $z^{۲} + ۲z + (۱ - i) = ۰$ را بیابید.

پاسخ:

$$b^{۲} - ۴ac = ۴ - ۴(۱ - i) = ۴i$$

$$(۴i)^{\frac{۱}{۲}} = \begin{cases} ۴^{\frac{۱}{۲}} e^{i\frac{\pi}{۴}} = ۲\left[\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right] = \sqrt{۲} + \sqrt{۲}i \\ ۴^{\frac{۱}{۲}} e^{i\frac{۵\pi}{۴}} = ۲\left[\cos\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) + i\sin\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)\right] = -\sqrt{۲} - \sqrt{۲}i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z_{۱} = \frac{-۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}i}{۲} = \left(-۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + \frac{\sqrt{۲}}{۲}i \\ z_{۲} = \frac{-۲-\sqrt{۲}-\sqrt{۲}i}{۲} = \left(-۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) - \frac{\sqrt{۲}}{۲}i \end{cases}$$

قضیه اساسی جبر

چند جمله‌ای درجه‌ی n زیر را در نظر بگیرید؛

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

که در آن $a_n \neq 0$، $n \geq 1$ و به‌ازای هر $0 \leq i \leq n$ داریم $a_i \in \mathbb{C}$. در این صورت $P(z)$ دارای دقیقا n ریشه (با احتساب تکرار) است و اگر z_1، z_2، ...، z_n ریشه‌های $P(z)$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$P(z) = w(z - z_1)(z - z_2)(z - z_n) \qquad (w \in \mathbb{C})$$

مثال

فرض کنید $P(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n با ضرایب حقیقی باشد. ثابت کنید که اگر z ریشه‌ی $P(z)$ باشد، آن‌گاه $\overline{z}$ نیز ریشه‌ی $P(z)$ است.

پاسخ:

$$P(z) = 0 \implies a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$$

$$\begin{aligned} P(\overline{z}) &= a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 (\overline{z})^2 + \cdots + a_n (\overline{z})^n \\ &= a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{(z^2)} + \cdots + a_n \overline{(z^n)} \\ &\overset{a_i \in \mathbb{R}}{=\!=} \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 (z^2)} + \cdots + \overline{a_n (z^n)} \\ &= \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} \\ &= \overline{P(z)} = 0 \end{aligned}$$

دایره در صفحه‌ی مختلط

فرض کنید $r > 0$ باشد. مکان هندسی نقاط z که در رابطه‌ی

$$|z - z_0| = 1$$

صدق می‌کنند، دایره‌ای است به مرکز z_0 و شعاع r. به‌طور دقیق‌تر، اگر $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$، آن‌گاه داریم:

$$|z - z_0| = 1 \implies \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

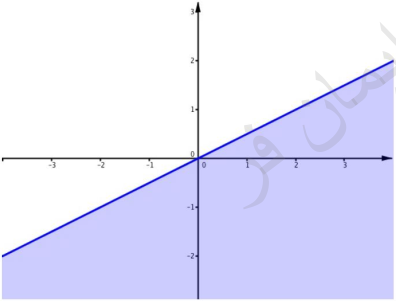
$$\implies (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

معادله‌ی آخر، معادله‌ی یک دایره به مرکز $z_0 = (x_0, y_0)$ و شعاع r است.

مثال

مکان‌های هندسی زیر را بیابید.

(۱) $\mathrm{Re}(z) \geq ۲\mathrm{Im}(z)$



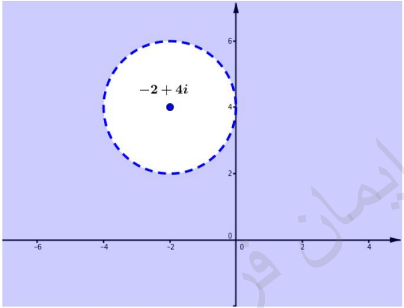
فرض کنیم $z = x + iy$. داریم:

$$\mathrm{Re}(z) = x \geq ۲y = ۲\mathrm{Im}(z)$$

$$\Longrightarrow \quad y \leq \frac{۱}{۲}x$$

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی است که پایین و روی خط $y = \frac{۱}{۲}x$ قرار دارند.

$$(۲)\ |z-۴i+۲|>۲$$



توجه می‌کنیم که معادله‌ی

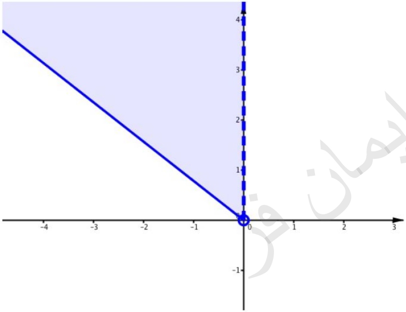
$$|z-۴i+۲|=۲$$

را می‌توان به‌صورت

$$|z-(-۲+۴i)|=۲$$

نوشت که معادله‌ی یک دایره با مرکز $-۲+۴i$ و شعاع ۲ در صفحه‌ی مختلط است. بنابراین نامساوی (۲) مکان هندسی نقاطی در صفحه‌ی مختلط را مشخص می‌کند که خارج دایره فوق قرار دارند.

$$(۳)\quad \frac{\pi}{۲} < \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{۳\pi}{۴}$$



مکان هندسی به‌شکل مقابل است. توجه می‌کنیم که مبدا و قسمت مثبت محور y در ناحیه قرار نمی‌گیرند، اما آن قسمت از خط $y = -x$ که واقع در ربع دوم است، در ناحیه قرار دارد.

مثال

مکان هندسی نقاطی از صفحه‌ی مختلط را بیابید که

$$z\bar{z} + (1+i)z + \overline{(1+i)z} + 1 = 0$$

پاسخ: فرض کنیم $z = x + iy$. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + x + iy + ix - y + x - iy - ix - y + 1 = 0 \\ \Longrightarrow\ & x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \\ \Longrightarrow\ & (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

که معادله‌ی یک دایره به مرکز $(-1, 1)$ و شعاع ۱ است.

مثال

مکان هندسی نقاطی از صفحه‌ی مختلط را بیابید که

$$\left|\frac{z+2}{z-1}\right| = \sqrt{2}$$

پاسخ: توجه می‌کنیم که $z \neq 1$. داریم:

۴

$$\begin{aligned}
&|z+2|^2 = 2|z-1|^2\\
\Rightarrow &(z+2)\overline{(z+2)} = 2(z-1)\overline{(z-1)}\\
\Rightarrow &(z+2)(\bar{z}+\bar{2}) = 2(z-1)(\bar{z}-\bar{1})\\
\Rightarrow &|z|^2 + 2(z+\bar{z}) + 4 = 2|z|^2 - 2(z+\bar{z}) + 2\\
\Rightarrow &|z|^2 - 4(z+\bar{z}) = 2 \Rightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 18\\
\Rightarrow &|z-4|^2 = 18
\end{aligned}$$

که معادله‌ی یک دایره به مرکز $(4, 0)$ و شعاع $\sqrt{18}$ است.

مثال

معادله‌ی $z^{۷} + \cdots + z^{۲} + z + ۱ = ۰$ را در $\mathbb{C}$ حل کنید.

پاسخ: عبارت $(z - ۱)$ را در طرفین تساوی ضرب می‌کنیم؛

$$(۱ - z)(۱ + z + z^{۲} + \cdots + z^{۷}) = ۱ - z^{۸} = ۰$$

بنابراین جواب‌های معادله‌ی $z^{۸} = ۱$ بجز $z = ۱$، همان جواب‌های معادله‌ی مسئله است.

$$z^{۸} = ۱ = \mathrm{e}^{i(۰+۲k\pi)} \Longrightarrow z_k = \mathrm{e}^{i(\frac{۲k\pi}{۸})} \qquad (۰ \leq k \leq ۷)$$

همان‌طور که اشاره شد، مقدار $z_۰ = ۱$ قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله‌ی مورد نظر عبارتند از:

$$z_k = \mathrm{e}^{i(\frac{۲k\pi}{۸})} \qquad (۱ \leq k \leq ۷)$$

مثال

مکان هندسی معادله‌ی زیر را مشخص کنید؛

$$\operatorname{Im}\left(۱+i+\frac{۱}{۱+z}\right)+\operatorname{Re}\left(۲i+\frac{۱}{۱+z}\right)=۱$$

پاسخ: توجه می‌کنیم که $z \neq -۱$. فرض کنیم $z = x+iy$. داریم:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(۱+i+\frac{۱}{۱+z}\right) &\overset{z\neq -۱}{=\!=} \operatorname{Im}\left(۱+i+\frac{۱}{۱+x+iy}\times\frac{۱+x-iy}{۱+x-iy}\right)\\
&=\operatorname{Im}\left(۱+i+\frac{۱+x-iy}{(۱+x)^۲+y^۲}\right)\\
&=\operatorname{Im}\left(۱+i+\frac{۱+x}{(۱+x)^۲+y^۲}-i\frac{y}{(۱+x)^۲+y^۲}\right)\\
&=۱-\frac{y}{(۱+x)^۲+y^۲}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\Big(۲i+\frac{۱}{۱+z}\Big)=\mathrm{Re}\Big(۲i+\frac{۱+x}{(۱+x)^۲+y^۲}-i\frac{y}{(۱+x)^۲+y^۲}\Big)$$
$$=\frac{۱+x}{(۱+x)^۲+y^۲}$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده در رابطه‌ی مسئله، نتیجه می‌گیریم:

$$\Rightarrow ۱-\frac{y}{(۱+x)^۲+y^۲}+\frac{۱+x}{(۱+x)^۲+y^۲}=۱$$
$$\Rightarrow \frac{۱+x}{(۱+x)^۲+y^۲}=\frac{y}{(۱+x)^۲+y^۲}\Rightarrow y=x+۱$$

بنابراین مکان هندسی، خط $y=x+۱$ است، به‌جز نقطه‌ی $z=-۱$ یا نقطه‌ی $(-۱,۰)$.

مثال

ریشه‌های سوم عدد مختلط $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{15}$ را بیابید.

پاسخ: فرض کنیم $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = r_2 e^{i\theta_2}$. در این صورت داریم:

$$r_1 = 2, \quad \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \overset{\text{ربع اول}}{=\!=} \frac{\pi}{3} \implies z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$r_2 = 2, \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \overset{\text{ربع چهارم}}{=\!=} \frac{-\pi}{4} \implies z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$z = \left(\frac{z_۱}{z_۲}\right)^{۱۵} = \left(\frac{۲\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{۳}}}{۲\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{۴}}}\right)^{۱۵} = \left(\mathrm{e}^{i[\frac{\pi}{۳}-(\frac{-\pi}{۴})]}\right)^{۱۵}$$

$$= \mathrm{e}^{i\frac{۳۵\pi}{۴}} = \mathrm{e}^{i(۸\pi+\frac{۳\pi}{۴})} = \mathrm{e}^{i\frac{۳\pi}{۴}}$$

ریشه‌های سوم z عبارتند از $w_۰, w_۱, w_۲$ که

$$w_k = \mathrm{e}^{i(\frac{۳\pi}{۱۲}+\frac{۲k\pi}{۳})}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۲k\pi}{۳}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۲k\pi}{۳}\right) \qquad (k = ۰, ۱, ۲)$$

مثال

ریشه‌های معادله‌ی زیر را بیابید.

$$z^8 - z^4 - 2 = 0$$

پاسخ:

$$z^8 - z^4 - 2 = (z^4 - 2)(z^4 + 1) = 0 \Rightarrow z^4 = 2 \text{ یا } z^4 = -1$$

بنابراین معادله‌ی طرح شده در مسئله، ۸ ریشه دارد که به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند؛

$$\begin{cases} z^4 = 2 \quad (r = 2,\ \theta = 0) \implies z_k = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{k\pi}{2}} & (k = 0, 1, 2, 3) \\ z^4 = -1 \quad (r = 1,\ \theta = \pi) \implies z_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})} & (k = 0, 1, 2, 3) \end{cases}$$

مثال

مطلوب است محاسبه‌ی $\sin(۳\theta)$ و $\cos(۳\theta)$.

پاسخ:

$$\begin{aligned}\cos(۳\theta) + i\sin(۳\theta) &= e^{i(۳\theta)} = \left(e^{i\theta}\right)^{۳} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{۳}\\ &= \cos^{۳}\theta + ۳i\cos^{۲}\theta\sin\theta - ۳\cos\theta\sin^{۲}\theta - i\sin^{۳}\theta\\ &= (\cos^{۳}\theta - ۳\cos\theta\sin^{۲}\theta) + i(۳\cos^{۲}\theta\sin\theta - \sin^{۳}\theta)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}\cos(۳\theta) = \cos^{۳}\theta - ۳\cos\theta\sin^{۲}\theta\\ \sin(۳\theta) = ۳\cos^{۲}\theta\sin\theta - \sin^{۳}\theta\end{cases}$$

مثال

معادله‌ی $z^{۴} = \frac{۱ - i}{۱ + i\sqrt{۳}}$ را حل کنید.

پاسخ: فرض کنیم $z_{۱} = ۱ - i = r_{۱}e^{i\theta_{۱}}$ و $z_{۲} = ۱ + i\sqrt{۳} = r_{۲}e^{i\theta_{۲}}$. داریم:

$$r_{۱} = \sqrt{۲}, \qquad \theta_{۱} = \tan^{-۱}\left(\frac{-۱}{۱}\right) \overset{\text{ربع چهارم}}{=\!=} -\frac{\pi}{۴} \implies z_{۱} = \sqrt{۲}e^{-i\frac{\pi}{۴}}$$

$$r_{۲} = ۲, \qquad \theta_{۲} = \tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۱}\right) \overset{\text{ربع اول}}{=\!=} \frac{\pi}{۳} \implies z_{۲} = ۲e^{i\frac{\pi}{۳}}$$

$$\Rightarrow z^{۴} = \frac{z_{۱}}{z_{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{-i(\frac{۷\pi}{۱۲})}$$

بنابراین ریشه‌های معادله عبارتند از:

$$z_k = \sqrt[۴]{\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{i(\frac{\frac{-۷\pi}{۱۲}}{۴} + \frac{۲k\pi}{۴})}} \qquad (k = ۰, ۱, ۲, ۳)$$

تمرین

تمرین

ریشه‌های پنجم عدد مختلط $\frac{1+i}{8}$ را بیابید.

تمرین

ریشه‌های سوم متمایز عدد مختلط $\left(\frac{20\sqrt{7}}{\sqrt{1400}-\sqrt{1400}i}\right)^{1400}$ را بیابید.

تمرین

مکان هندسی اعداد مختلط z را تعیین کنید که در معادله‌ی $\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\bar{z}+1}\right)=-1$ صدق می‌کنند.

تمرین

مکان هندسی نقاطی که در رابطه‌ی $|iz+۲| \geq |z+۳i|$ صدق می‌کنند را بیابید.

تمرین

جواب‌های معادله‌ی $i = \dfrac{۱+z^۲}{۱-z^۲}$ را بیابید.

تمرین

ریشه‌های سوم متمایز عدد مختلط $۱ - i\sqrt{۳}$ را بیابید.