کاربردهای انتگرال

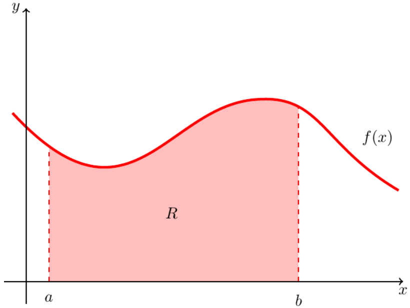
تهیه و تدوین: دکتر مهدی رستمی، دکتر مصطفی ایمان‌فر

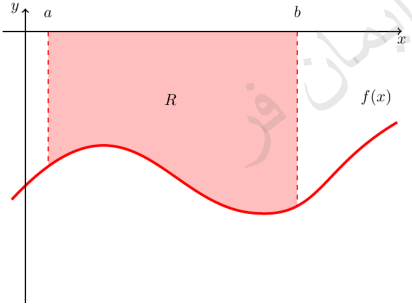
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

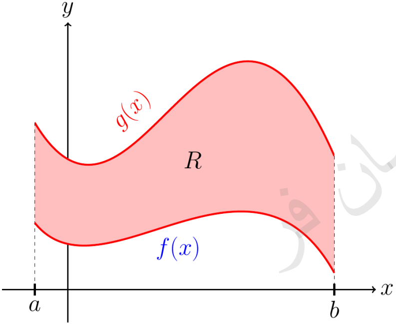
پاییز ۱۴۰۲

فرض کنیم $f(x)$ تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد و $a<b$. همان‌طور که قبلا دیدیم، اگر $f(x) \geq 0$، آن‌گاه $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ برابر است با مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار $y=f(x)$ و محور xها، از $x=a$ تا $x=b$. اگر $f(x) \leq 0$، آن‌گاه $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ برابر است با منفی مساحت ناحیه‌ی محصور.

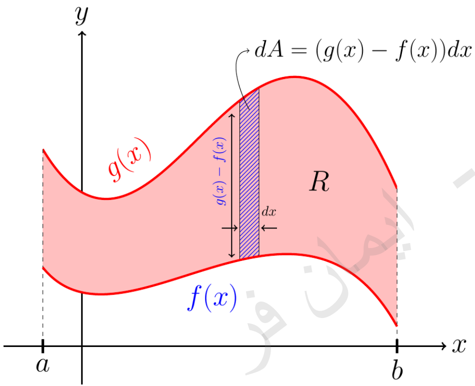




اگر $g(x)$ نیز بر $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد و $0 \le f(x) \le g(x)$، آن‌گاه مساحت ناحیه‌ی محصور R بین نمودارهای $y=g(x)$ و $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$، برابر است با مساحت زیر نمودار $y=g(x)$ منهای مساحت زیر نمودار $y=f(x)$. یعنی:



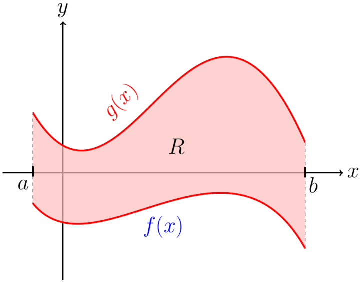
$$
\text{مساحت } R = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(g(x) - f(x)\Big)\,\mathrm{d}x
$$



می‌توان این‌طور تصور کرد که این فرمول، مساحت R را به‌صورت مجموع نامتناهی المان (عنصر) سطح

$$\mathrm{d}A = \Big(g(x) - f(x)\Big)\mathrm{d}x$$

یعنی $\int_a^b \mathrm{d}A$ بیان می‌کند.

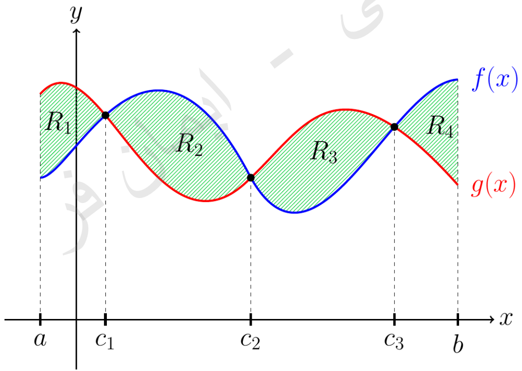


اکنون حالتی را که $f(x)$ و $g(x)$ لزوما نامنفی نیستند، در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل مقابل، می‌توانیم ناحیه‌ی R را آنقدر به طرف بالا حرکت دهیم تا کاملا بالای محور x قرار گیرد. یعنی عدد مثبت k را آنقدر بزرگ اختیار می‌کنیم، تا مطمئن شویم که به‌ازای هر $x \in [a,b]$ داریم $0 \leq f(x)+k \leq g(x)+k$.

ناحیه‌ی جدید که بین نمودارهای $y=g(x)+k$ و $y=f(x)+k$ قرار دارد، مساحتش با ناحیه‌ی اولیه برابر است. پس داریم:

$$
\begin{aligned}
\text{مساحت } R &= \int_a^b \Big(g(x)+k\Big)\mathrm{d}x - \int_a^b \Big(f(x)+k\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \Big(g(x)-f(x)\Big)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

در پایان، فرض کنیم نمودارهای توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در تعداد متناهی نقطه یکدیگر را قطع کنند. طبق شکل، برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودارهای این دو تابع، می‌توان بازه‌ی $[a, b]$ را به تعداد متناهی زیربازه تقسیم کرد، به‌طوری که بر هر زیربازه داشته باشیم $f(x) \le g(x)$ یا $g(x) \le f(x)$.



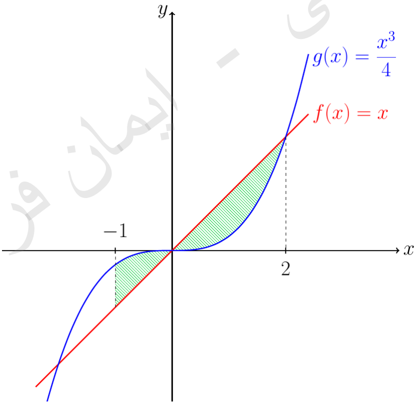
$$
\begin{aligned}
\text{مساحت } R &= \text{مساحت } R_1 + \text{مساحت } R_2 + \text{مساحت } R_3 + \text{مساحت } R_4 \\
&= \int_a^{c_1} \Big(g(x) - f(x)\Big)\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} \Big(f(x) - g(x)\Big)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{c_2}^{c_3} \Big(g(x) - f(x)\Big)\mathrm{d}x + \int_{c_3}^{b} \Big(f(x) - g(x)\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \Big|g(x) - f(x)\Big|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

بنابراین مساحت کل ناحیه‌ی R، محصور بین نمودارهای $y = f(x)$، $y = g(x)$ و خطوط قائم $x = a$ و $x = b$، برابر است با:

$$
\boxed{\text{مساحت } R = \int_a^b \Big|g(x) - f(x)\Big|\,\mathrm{d}x \qquad (a \le b)}
$$

مثال

مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودارهای توابع $f(x) = x$ و $g(x) = \frac{x^۳}{۴}$ را روی بازه‌ی $[-۱, ۲]$ حساب کنید.

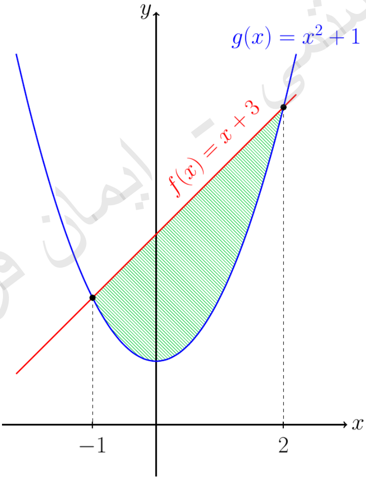


پاسخ: بر بازه‌ی $[-1, 0]$ داریم $f(x) \leq g(x)$ و بر بازه‌ی $[0, 2]$ داریم $g(x) \leq f(x)$.
بنابراین:

$$
\begin{aligned}
\text{مساحت } R &= \int_{-1}^{2} \Big| f(x) - g(x) \Big| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \Big(g(x) - f(x) \Big) \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \Big(f(x) - g(x) \Big) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \Big(\frac{x^3}{4} - x \Big) \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \Big(x - \frac{x^3}{4} \Big) \mathrm{d}x \\
&= \Big(\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} \Big) \Big|_{-1}^{0} + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16} \Big) \Big|_{0}^{2} \\
&= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - \frac{16}{16} = \frac{23}{16}
\end{aligned}
$$

مثال

مساحت ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $y = x^۲ + ۱$ و $y = x + ۳$ را محاسبه کنید.



پاسخ:

$$x^{۲}+۱=x+۳ \Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰ \Rightarrow x=-۱,۲$$

$$\Rightarrow x+۳ \geq x^{۲}+۱ \qquad \forall x \in [-۱,۲]$$

بنابراین:

$$\text{مساحت} = \int_{-۱}^{۲} \left| x+۳-(x^{۲}+۱) \right| \mathrm{d}x = \int_{-۱}^{۲} \Big(x+۳-x^{۲}-۱ \Big) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-۱}^{۲} \Big(-x^{۲}+x+۲ \Big) \mathrm{d}x = \Big[\frac{-x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۲}}{۲} + ۲x \Big]_{-۱}^{۲}$$

$$= -\frac{۸}{۳}+۲+۴-(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}-۲) = \frac{۹}{۲}$$

مثال

فرض کنید $A(r)$ نشان‌دهنده‌ی مساحت یک قرص مستدیر به شعاع r باشد. نشان دهید $A(r) = r^2 A(1)$.

پاسخ: فرض کنیم $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. داریم:

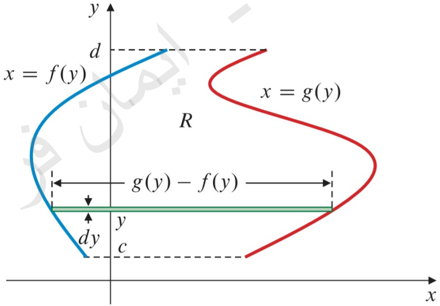
$$A(r) = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2r\int_{-1}^{1} f(rx)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2r\int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - (rx)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= r^2\left(2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x\right) = r^2 A(1).$$

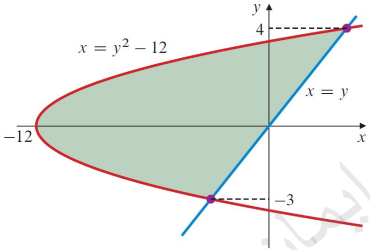
به‌طور مشابه، اگر f و g توابعی برحسب y باشند؛ یعنی $x = f(y)$ و $x = g(y)$، آن‌گاه ناحیه‌ی محصور بین دو منحنی از $y = c$ تا $y = d$ عبارت است از:

$$R \text{ مساحت} = \int_c^d \Big| f(y) - g(y) \Big| \,\mathrm{d}y$$



مثال

مساحت ناحیه‌ی محصور بین خط $y = x$ و سهمی $x = y^{۲} - ۱۲$ را محاسبه کنید.



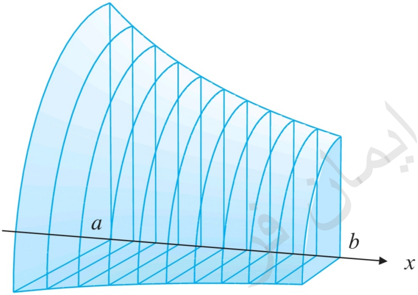
پاسخ:

$$y^{۲} - ۱۲ = y$$
$$\Longrightarrow y^{۲} - ۱۲ - y = ۰$$
$$\Longrightarrow (y - ۴)(y + ۳) = ۰$$
$$\Longrightarrow y = -۳, ۴$$

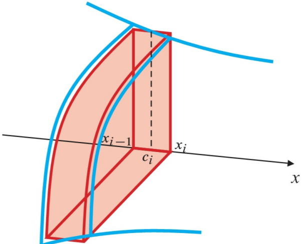
بنابراین اگر $-۳ \leq y \leq ۴$، آنگاه $y^{۲} - ۱۲ \leq y$. در نتیجه:

$$\text{مساحت} = \int_{-۳}^{۴} \left| y - (y^{۲} - ۱۲) \right| \mathrm{d}y = \int_{-۳}^{۴} \Big(y - (y^{۲} - ۱۲) \Big) \mathrm{d}y$$
$$= \left(\frac{y^{۲}}{۲} - \frac{y^{۳}}{۳} + ۱۲y \right) \Big|_{-۳}^{۴} = \frac{۳۴۳}{۶}$$

محاسبه‌ی حجم با استفاده از برش:



فرض کنیم جسم S، بین دو صفحه‌ی عمود بر محور xها به معادله‌های $x = a$ و $x = b$ قرار داشته باشد و $a < b$. یک روش برای محاسبه‌ی حجم جسم S این است که حجم آن را به‌طور تقریبی حساب کرده و سعی کنیم تقریب را به مقدار واقعی نزدیک کنیم. برای این منظور می‌توان جسم را به برش‌های نازک تقسیم کرد و با جمع حجم این برش‌ها، تقریبی برای حجم جسم S به‌دست آورد.



اگر مساحت مقطع عرضی هر برش را داشته باشیم و برش‌ها به اندازه‌ی کافی نازک باشند، آن‌گاه با ضرب مساحت مقطع عرضی در ضخامت هر برش، یعنی Δx_i، می‌توان برای حجم هر برش یک مقدار تقریبی به‌دست آورد.

فرض کنیم مساحت مقطع عرضی S واقع در صفحه‌ی عمود بر محور xها در نقطه‌ی x، (مقطع عرضی در این حالت، یعنی اشتراک صفحه‌ی عمود بر محور xها در نقطه‌ی x با جسم S) تابع معینی مانند $A(x)$، که $a \leq x \leq b$، باشد. همچنین، فرض کنیم $A(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد. اگر افراز $P = \{x_۰, x_۱, \ldots, x_n\}$ از $[a, b]$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه این افراز صفحاتی عمود بر محور xها در نقاط $x_۱$، $x_۲$، ... ، $x_{n-۱}$ مشخص می‌کند، که این

صفحات جسم S را به n برش تقسیم می‌کند. ضخامت برش iـام برابر $\Delta x_i = x_i - x_{i-۱}$ است. فرض کنیم حجم این برش ΔV_i باشد. در این صورت داریم:

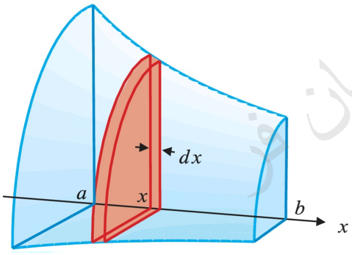
$$A\left(m_i\right)\Delta x_i \leq \Delta V_i \leq A\left(M_i\right)\Delta x_i$$

که m_i و M_i نقاطی در بازه‌ی $[x_{i-۱}, x_i]$ می‌باشند به‌طوری که، به‌ترتیب $A(m_i)$ مینیمم و $A(M_i)$ ماکسیمم تابع $A(x)$ در این بازه می‌باشد. بنا بر قضیه‌ی مقدار میانی برای توابع پیوسته، $c_i \in [x_{i-۱}, x_i]$ وجود دارد که $\Delta V_i = A(c_i)\Delta x_i$. اگر حجم جسم را با V نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$V = \sum_{i=۱}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=۱}^{n} A\left(c_i\right)\Delta x_i \qquad (*)$$

چون فرض کرده‌ایم تابع $A(x)$ پیوسته باشد، طبق تعریف انتگرال داریم:

$$V = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} A\left(c_i\right) \Delta x_i = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



با توجه به رابطه‌ی $(*)$، وقتی $\Delta x_i \to 0$ داریم $\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$ که در اینجا $\mathrm{d}V$ را المان حجم یا عنصر حجم نیز می‌نامیم. همچنین، داریم:

$$\boxed{V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x}$$

محاسبه‌ی حجم با استفاده از برش‌های مقاطع عرضی

فرض کنیم جسم S بین دو صفحه‌ی عمود بر محور xها به معادله‌های $x = a$ و $x = b$ قرار داشته و حجم آن برابر V باشد. همچنین، فرض کنیم مساحت مقطع عرضی S واقع در صفحه‌ی عمود بر محور xها در نقطه‌ی x، (مقطع عرضی در این حالت، یعنی اشتراک صفحه‌ی عمود بر محور xها در نقطه‌ی x با جسم S) تابع پیوسته‌ای مانند $A(x)$ باشد که $a \leq x \leq b$. در این صورت داریم:

$$\boxed{V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x}$$

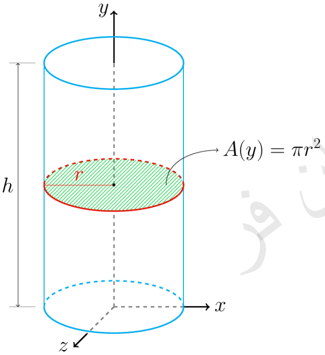
محاسبه‌ی حجم با استفاده از برش‌های مقاطع عرضی

فرض کنیم جسم S بین دو صفحه‌ی عمود بر محور yها به معادله‌های $y = c$ و $y = d$ قرار داشته و حجم آن برابر V باشد. همچنین، فرض کنیم مساحت مقطع عرضی S واقع در صفحه‌ی عمود بر محور yها در نقطه‌ی y، (مقطع عرضی در این حالت، یعنی اشتراک صفحه‌ی عمود بر محور yها در نقطه‌ی y با جسم S) تابع پیوسته‌ای مانند $A(y)$ باشد که $c \leq y \leq d$. در این صورت داریم:

$$\boxed{V = \int_c^d \mathrm{d}V = \int_c^d A(y)\,\mathrm{d}y}$$

مثال

حجم یک استوانه‌ی مستدیر به شعاع r و ارتفاع h را محاسبه کنید.

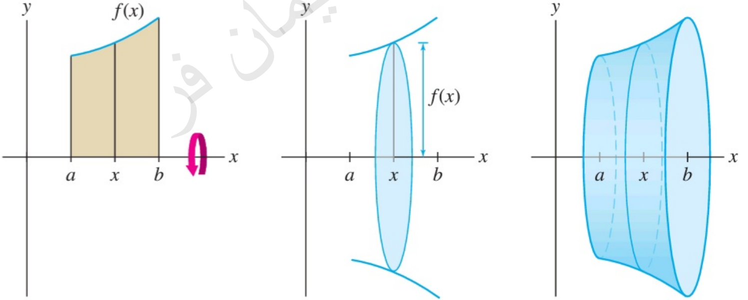


پاسخ:

$$V = \int_0^h A(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^h \pi r^2\,\mathrm{d}y = \pi r^2 h$$

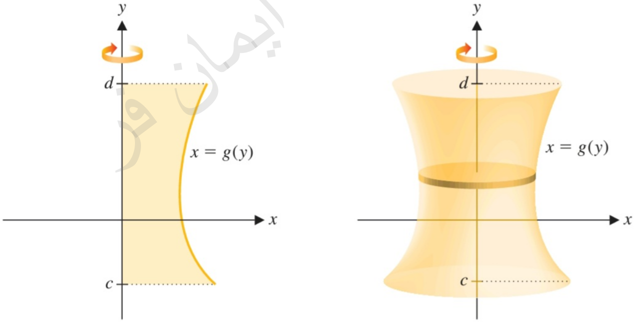
روش برش‌های دایره‌ای: (۱) حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی بین نمودار تابع پیوسته‌ی $y=f(x)$ و خطوط $y=0$، $x=a$ و $x=b$ را حول محور xها در نظر بگیرید. مقطع عرضی جسم حاصل در نقطه‌ی x، قرصی به شعاع $|f(x)|$ می‌باشد. پس مساحت مقطع عرضی برابر است با $A(x)=\pi\big(f(x)\big)^2$. بنابراین حجم جسم حاصل عبارت است از:

$$\boxed{V=\int_a^b \mathrm{d}V=\int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}$$



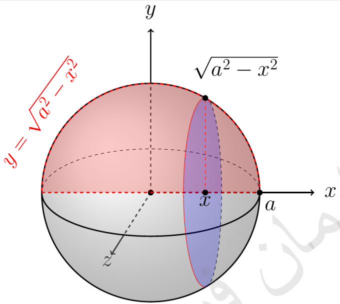
به‌طور مشابه، اگر حجم جسم مورد نظر از دوران ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع پیوسته‌ی $x = g(y)$ و خطوط $x = ۰$، $y = c$ و $y = d$ حول محور yها حاصل شود، آن‌گاه حجم جسم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \int_c^d \mathrm{d}V = \int_c^d \pi\big(g(y)\big)^۲\,\mathrm{d}y$$



مثال

حجم کره به شعاع a را محاسبه کنید.



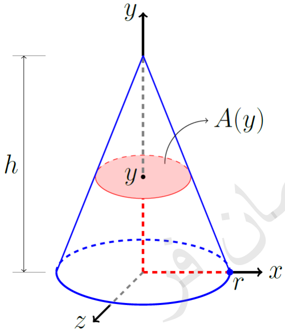
پاسخ: یک کره به شعاع a را می‌توان از دوران ناحیه‌ی محصور به نمودار تابع $y=\sqrt{a^۲-x^۲}$ و خطوط $y=۰$، $x=a$ و $x=-a$ حول محور xها به‌دست آورد. داریم:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{a^۲-x^۲}\right)^۲\mathrm{d}x=۲\pi\int_{۰}^{a}\left(a^۲-x^۲\right)\mathrm{d}x$$

$$=۲\pi\left[a^۲x-\frac{x^۳}{۳}\right]_{۰}^{a}=\frac{۴}{۳}\pi a^۳$$

مثال

حجم مخروط دایره‌ای قائم به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h را محاسبه کنید.



پاسخ: خطی که از نقاط $(r, 0)$ و $(0, h)$ می‌گذرد را در نظر بگیرید. مخروط مورد نظر از دوران ناحیه‌ی محصور به این خط و خطوط $x = 0$، $y = 0$ و $y = h$ حول محور yها به‌دست می‌آید. معادله‌ی خطی که از $(r, 0)$ و $(0, h)$ می‌گذرد، عبارت است از:

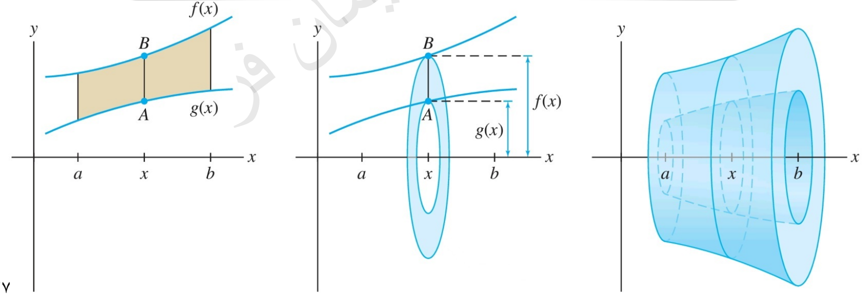
$$\frac{y-h}{x-0} = \frac{h}{-r} \implies y = -\frac{h}{r}x + h \implies x = -\frac{r}{h}y + r$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} V = \int_0^h A(y)\,\mathrm{d}y &= \pi \int_0^h \left(-\frac{r}{h}y + r\right)^2 \mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^h \left(\frac{r^2}{h^2}y^2 - \frac{2r^2}{h}y + r^2\right) \mathrm{d}y \\ &= \pi \left(\frac{r^2}{3h^2}y^3 - \frac{r^2y^2}{h} + r^2y\right)\Bigg|_0^h \\ &= \pi \left(\frac{r^2h}{3} - r^2h + r^2h\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$

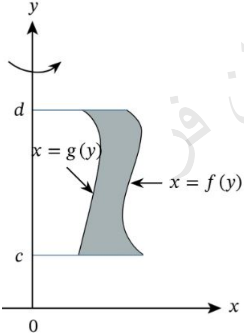
(۲) حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور بین نمودارهای توابع پیوسته‌ی $y = f(x)$، $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ را حول محور xها در نظر بگیرید. مساحت مقطع عرضی در نقطه‌ی دلخواه x (با این فرض که نمودارهای توابع f و g هر دو بالا یا هر دو پایین محور xها قرار بگیرند)، برابر است با $A(x) = \pi \left| (f(x))^۲ - (g(x))^۲ \right|$.
بنابراین حجم جسم حاصل عبارت است از:

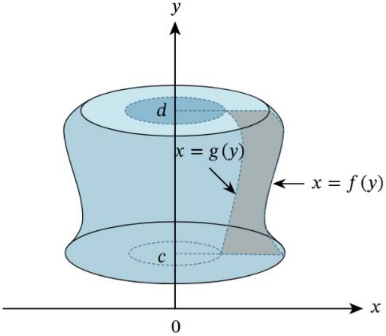
$$V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b \pi \left| (f(x))^۲ - (g(x))^۲ \right| \mathrm{d}x$$



به‌طور مشابه، حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور بین نمودارهای توابع پیوسته‌ی $x = f(y)$، $x = g(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$ حول محور yها (با این فرض که نمودارهای توابع f و g هر دو سمت راست یا هر دو سمت چپ محور yها قرار بگیرند)، عبارت است از:

$$V = \int_c^d \mathrm{d}V = \int_c^d \pi \left| (f(y))^{۲} - (g(y))^{۲} \right| \mathrm{d}y$$

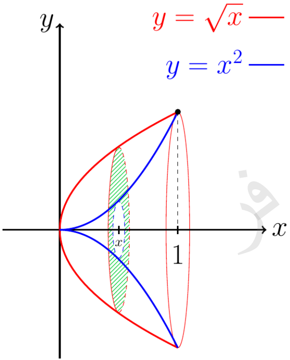




مثال

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور بین نمودارهای $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$، از $x = 0$ تا $x = 1$ را حول محور xها محاسبه کنید.

پاسخ:



$$V = \int_0^1 \pi \left| (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right| \mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4)\, \mathrm{d}x$$

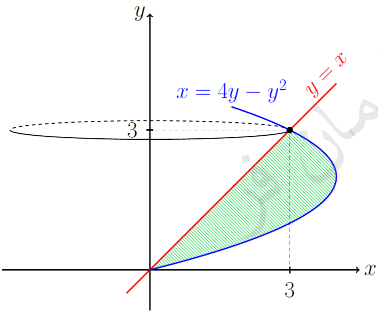
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}$$

مثال

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی کراندار محصور بین نمودارهای $x = y$ و $x = ۴y - y^۲$ را حول محور yها محاسبه کنید.

پاسخ:

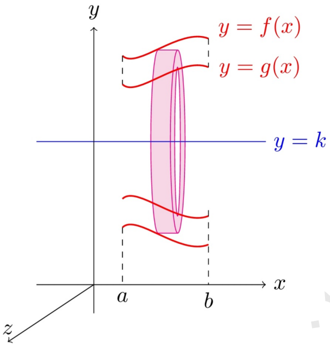


$$V = \int_۰^۳ \pi \left| y^۲ - (۴y - y^۲)^۲ \right| \mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_۰^۳ \left((۴y - y^۲)^۲ - y^۲ \right) \mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_۰^۳ (۱۵y^۲ + y^۴ - ۸y^۳)\, \mathrm{d}y$$

$$= \pi \left[۵y^۳ + \frac{y^۵}{۵} - ۲y^۴ \right]_۰^۳ = \frac{۱۰۸\pi}{۵}$$

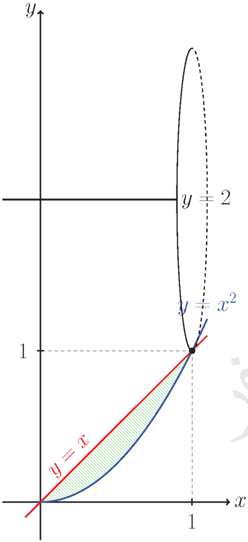


(۳) حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به نمودارهای توابع پیوسته‌ی $y = f(x)$، $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$، حول خط $y = k$ (با این فرض که نمودارهای توابع f و g هر دو بالا یا هر دو پایین خط $y = k$ قرار بگیرند)، عبارت است از:

$$V = \int_a^b \pi \left| (f(x) - k)^2 - (g(x) - k)^2 \right| \mathrm{d}x$$

به‌طور مشابه، حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به نمودارهای توابع پیوسته‌ی $x = f(y)$ و $x = g(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$، حول خط $x = k$ (با این فرض که نمودارهای توابع f و g هر دو سمت راست یا هر دو سمت چپ خط $x = k$ قرار بگیرند)، عبارت است از:

$$V = \int_c^d \pi \left| (f(y) - k)^2 - (g(y) - k)^2 \right| \mathrm{d}y$$



مثال

ناحیه‌ی کراندار محصور به منحنی‌های $y = x$ و $y = x^2$ را حول خط $y = 2$ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید.

پاسخ:

$$V = \int_0^1 \pi \left| (x-2)^2 - \left(x^2-2\right)^2 \right| \mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\left(x^2-2\right)^2 - (x-2)^2 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 - 5x^2 + 4x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 = \frac{8\pi}{15}$$

مثال

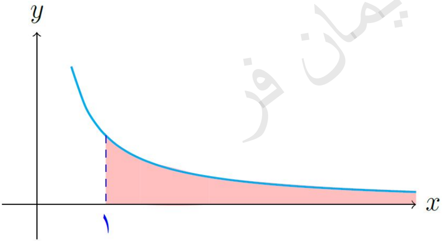
(۱) مساحت ناحیه‌ی محصور به $y = \dfrac{۱}{x}$ و $y = ۰$ را به‌ازای $x \geq ۱$ بیابید.

(۲) ناحیه‌ی محصور به $y = \dfrac{۱}{x}$ و $y = ۰$ را به‌ازای $x \geq ۱$، حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید.

پاسخ: (۱) مساحت ناحیه‌ی مورد نظر نامتناهی است، زیرا:

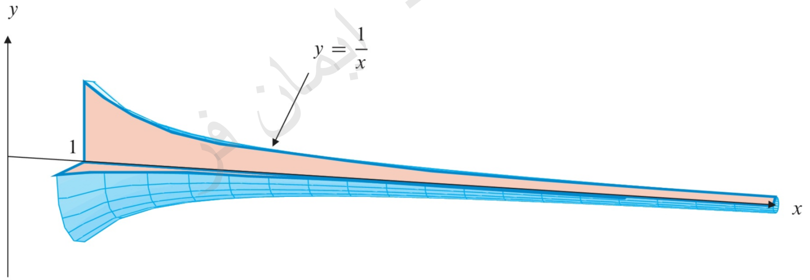
$$\int_{۱}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

واگرا می‌باشد.



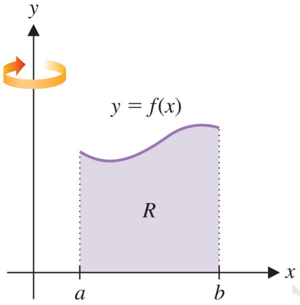
$$(۲)\ V = \int_{۱}^{+\infty} \pi\big(f(x)\big)^{۲}\,\mathrm{d}x = \int_{۱}^{+\infty} \frac{\pi}{x^{۲}}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{۱}^{R} \frac{\pi}{x^{۲}}\,\mathrm{d}x$$

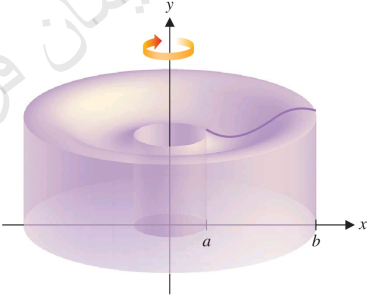
$$= \pi \lim_{R\to+\infty} \left.\frac{-۱}{x}\right|_{۱}^{R} = \pi$$



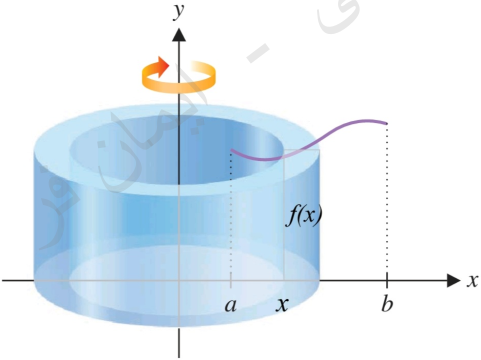
روش برش‌های استوانه‌ای (پوسته‌های استوانه‌ای):

فرض کنید $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و ناحیه‌ی R، محصور بین نمودار $y=f(x)$ و خطوط $y=0$، $x=a\geq 0$ و $x=b>a$، حول محور yها دوران کند و جسم دوار S پدید آید. برای محاسبه‌ی حجم S به روش برش‌های دایره‌ای لازم است که معادله‌ی $y=f(x)$ حل شود، که ممکن است یک یا چند جواب به‌صورت $x=g(y)$



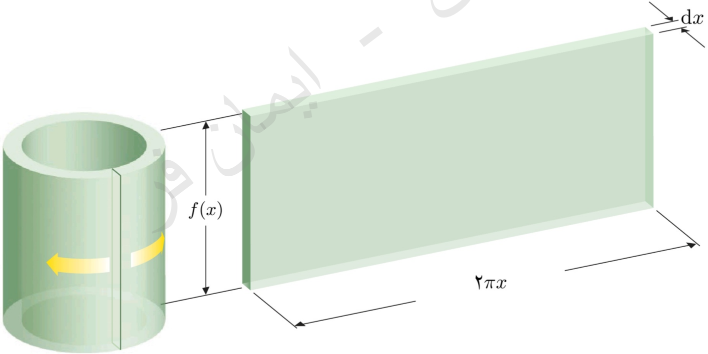


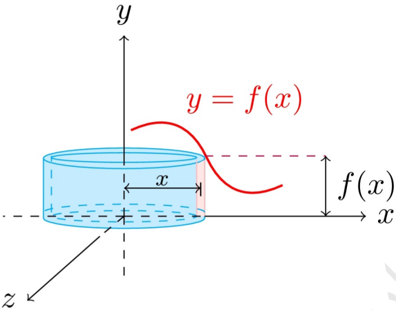
به‌دست آید. این عمل ممکن است نامناسب یا محال باشد. به همین دلیل از روش دیگری، به نام پوسته‌های استوانه‌ای یا برش‌های استوانه‌ای، استفاده می‌کنیم که در ادامه شرح می‌دهیم. برای محاسبه‌ی حجم جسم S، برش‌هایی استوانه‌ای در جسم S ایجاد می‌کنیم و آن را به پوسته‌های استوانه‌ای باریک و تودرتویی تقسیم می‌کنیم.



حال المان حجم را در این روش محاسبه می‌کنیم. مطابق شکل، روشن است که حجم یکی از این پوسته‌های استوانه‌ای با حجم یک مکعب مستطیل برابر است، و در نتیجه داریم:

$$\mathrm{d}V = ۲\pi x f(x)\,\mathrm{d}x \implies V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b ۲\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$$





(۱) حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به نمودار تابع $y = f(x)$ و خطوط $y = ۰$، $x = a$ و $x = b$ حول محور y، عبارت است از:

$$V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b ۲\pi |x|\, |f(x)|\, \mathrm{d}x$$

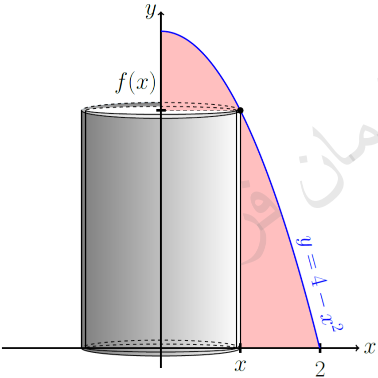
به‌طور مشابه، حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به نمودار تابع $x = f(y)$ و خطوط $x = ۰$، $y = c$ و $y = d$ حول محور x، عبارت است از:

$$V = \int_c^d \mathrm{d}V = \int_c^d ۲\pi |y|\, |f(y)|\, \mathrm{d}y$$

مثال

سطح محصور به منحنی $f(x) = ۴ - x^۲$ و خطوط $y = ۰$ و $x = ۰$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از دوران را محاسبه کنید.

پاسخ:

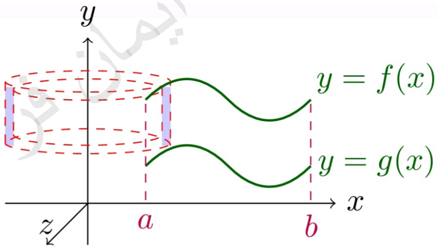


$$\mathrm{d}V = ۲\pi|x||f(x)|\,\mathrm{d}x = ۲\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} V &= \int_۰^۲ \mathrm{d}V = \int_۰^۲ ۲\pi x f(x)\mathrm{d}x \\ &= ۲\pi \int_۰^۲ x\left(۴ - x^۲\right)\mathrm{d}x \\ &= ۲\pi\left(۲x^۲ - \frac{x^۴}{۴}\right)\Big|_۰^۲ \\ &= ۲\pi\left(۸ - \frac{۱۶}{۴}\right) = ۸\pi \end{aligned}$$

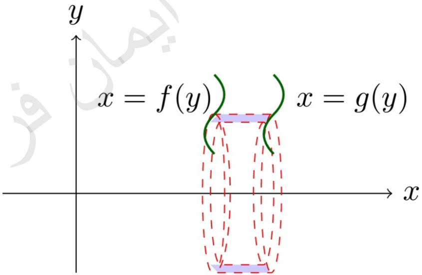
(۲) حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به دو منحنی $y = f(x)$، $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور y، عبارت است از:

$$V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b ۲\pi |x| \, |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$



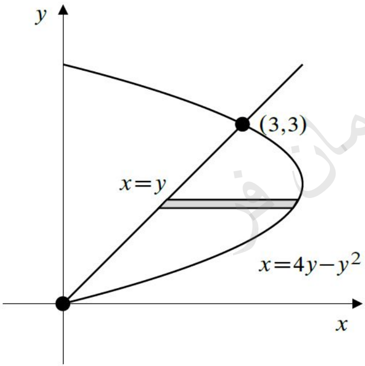
به‌طور مشابه، حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به دو منحنی $x = f(y)$، $x = g(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$ حول محور x، عبارت است از:

$$\boxed{V = \int_c^d \mathrm{d}V = \int_c^d ۲\pi |y| \, |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y}$$



مثال

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به منحنی‌های $x = y$ و $x = ۴y - y^۲$ را حول محور x محاسبه کنید.



پاسخ:

$$V = \int_۰^۳ ۲\pi|y|\,\left|y - (۴y - y^۲)\right|\,\mathrm{d}y$$

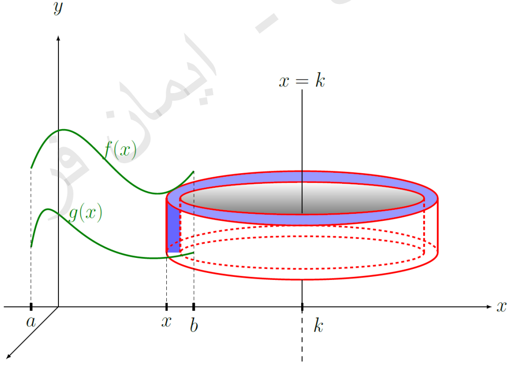
$$= ۲\pi \int_۰^۳ y((۴y - y^۲) - y)\mathrm{d}y$$

$$= ۲\pi \int_۰^۳ \left(۴y^۲ - y^۳ - y^۲\right)\mathrm{d}y$$

$$= ۲\pi \int_۰^۳ \left(۳y^۲ - y^۳\right)\mathrm{d}y = \frac{۲۷\pi}{۲}$$

(۳) حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به دو منحنی $y = f(x)$، $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول خط $x = k$، عبارت است از:

$$V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b ۲\pi|x - k|\,|f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$



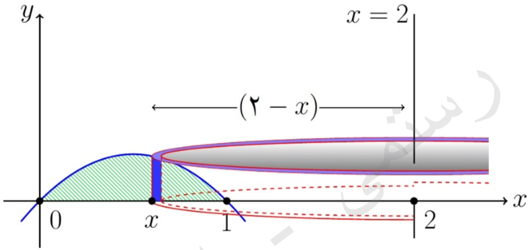
به‌طور مشابه، حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به دو منحنی $x = f(y)$، $x = g(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$ حول خط $y = k$، عبارت است از:

$$\boxed{V = \int_c^d \mathrm{d}V = \int_c^d ۲\pi |y-k|\, |f(y) - g(y)|\, \mathrm{d}y}$$

مثال

حجم جسمی که از دوران ناحیه‌ی محصور به $y = x - x^۲$ و $y = ۰$، حول خط $x = ۲$ به‌دست می‌آید را محاسبه کنید.

پاسخ:



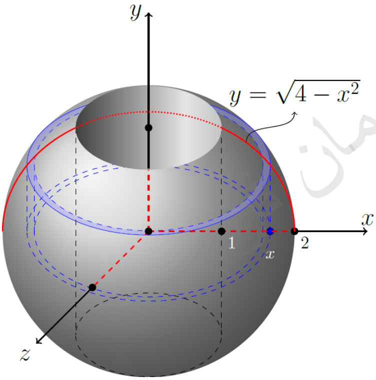
$$\mathrm{d}V = ۲\pi |x - ۲| \left| x - x^{۲} \right| \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad V = \int_{۰}^{۱} \mathrm{d}V = ۲\pi \int_{۰}^{۱} (۲ - x)\left(x - x^{۲}\right) \mathrm{d}x$$

$$= ۲\pi \int_{۰}^{۱} \left(x^{۳} - ۳x^{۲} + ۲x\right) \mathrm{d}x = \cdots = \frac{\pi}{۲}$$

مثال

درکره‌ای به شعاع ۲، سوراخی استوانه‌ای شکل به شعاع ۱ و گذرنده از مرکز ایجاد می‌کنیم. حجم قسمت باقیمانده‌ی کره را محاسبه کنید.



پاسخ: روش پوسته‌های استوانه‌ای:

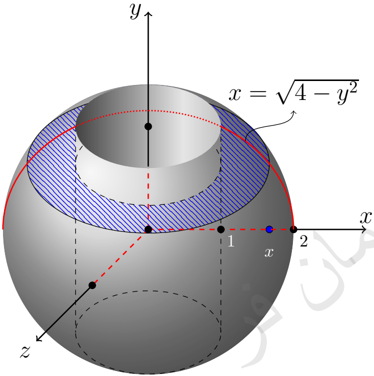
$$\frac{۱}{۲}V = ۲\pi \int_{۱}^{۲} x\sqrt{۴ - x^{۲}}\, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{۲\pi}{-۲} \int_{۱}^{۲} -۲x\sqrt{۴ - x^{۲}}\, \mathrm{d}x$$

$$= -\pi \int_{۳}^{۰} u^{\frac{۱}{۲}}\, \mathrm{d}u = \pi \int_{۰}^{۳} u^{\frac{۱}{۲}}\, \mathrm{d}u$$

$$= ۲\pi\sqrt{۳} \implies V = ۴\pi\sqrt{۳}$$

روش برش‌های دایره‌ای:



$$\frac{۱}{۲}V = \pi \int_{۰}^{\sqrt{۳}} \left(\left(\sqrt{۴ - y^{۲}} \right)^{۲} - ۱^{۲} \right) \mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_{۰}^{\sqrt{۳}} \left(۴ - y^{۲} - ۱ \right) \mathrm{d}y$$

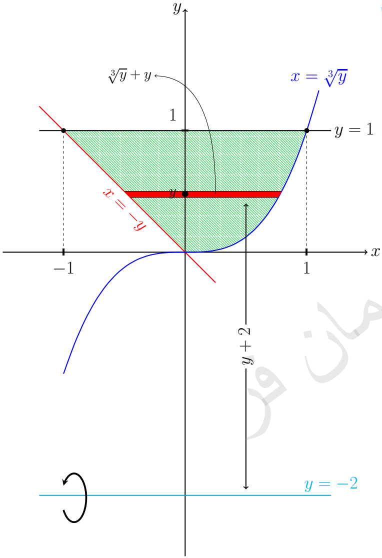
$$= \pi \left(۳y - \frac{y^{۳}}{۳} \right) \Big|_{۰}^{\sqrt{۳}}$$

$$= \pi \left(۳\sqrt{۳} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۳} \right) = ۲\pi\sqrt{۳}$$

$$\Longrightarrow \quad V = ۴\pi\sqrt{۳}$$

مثال

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $y = x^۳$، $y = -x$ و $y = ۱$، حول خط $y = -۲$ را محاسبه کنید.

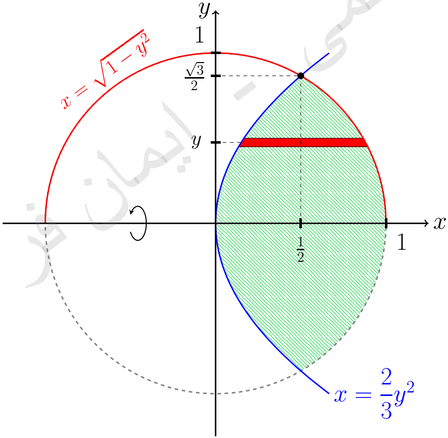


پاسخ:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{۰}^{۱} ۲\pi|y-(-۲)||\sqrt[۳]{y}-(-y)|\mathrm{d}y \\
&= ۲\pi \int_{۰}^{۱} (y+۲)\left(y^{\frac{۱}{۳}}+y\right)\mathrm{d}y \\
&= ۲\pi \int_{۰}^{۱} \left(y^{۲}+y^{\frac{۴}{۳}}+۲y+۲y^{\frac{۱}{۳}}\right)\mathrm{d}y \\
&= ۲\pi\left(\frac{y^{۳}}{۳}+\frac{۳}{۷}y^{\frac{۷}{۳}}+y^{۲}+\frac{۳}{۲}y^{\frac{۴}{۳}}\right)\Bigg|_{۰}^{۱} \\
&= \frac{۱۳۷\pi}{۲۱}
\end{aligned}
$$

مثال

ناحیه‌ی محدود به دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ و سهمی $y^۲ = \frac{۳}{۲}x$ را حول محور x دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید.

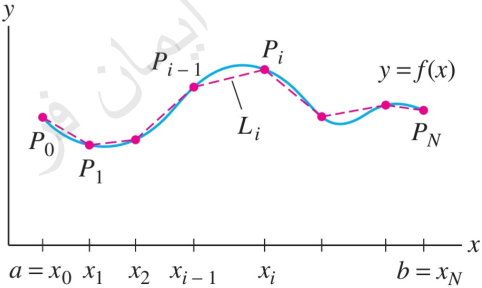


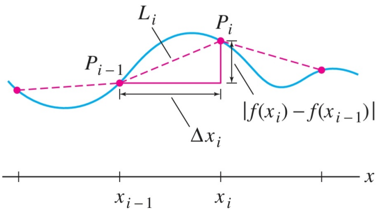
پاسخ:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{۰}^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} ۲\pi y\left(\sqrt{۱-y^{۲}}-\frac{۲}{۳}y^{۲}\right)\mathrm{d}y\\
&= ۲\pi\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} y\sqrt{۱-y^{۲}}\,\mathrm{d}y-\frac{۴}{۳}\pi\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} y^{۳}\,\mathrm{d}y\\
&= -\pi\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\sqrt{۱-y^{۲}}\times(-۲y)\,\mathrm{d}y-\frac{۴}{۳}\pi\times\left(\frac{y^{۴}}{۴}\right)\Bigg|_{۰}^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\\
&= -\pi\int_{۱}^{\frac{۱}{۴}} u^{\frac{۱}{۲}}\,\mathrm{d}u-\frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{۹}{۶۴}\right)=\pi\int_{\frac{۱}{۴}}^{۱} u^{\frac{۱}{۲}}\,\mathrm{d}u-\frac{۳\pi}{۱۶}\\
&= \pi\left(\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right)\Bigg|_{\frac{۱}{۴}}^{۱}-\frac{۳\pi}{۱۶}=\pi\left(\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۱۲}\right)-\frac{۳\pi}{۱۶}=\frac{۷\pi}{۱۲}-\frac{۳\pi}{۱۶}=\frac{۱۹\pi}{۴۸}
\end{aligned}$$

طول قوس (طول منحنی):

تابع $f(x)$ که روی بازه بسته $[a,b]$ تعریف شده است را در نظر بگیرید. در این قسمت، هدف ما این است که طول منحنی $y=f(x)$ را از $x=a$ تا $x=b$ محاسبه کنیم. برای این منظور، می‌توان نقاطی روی نمودار تابع انتخاب کرد و با محاسبه‌ی طول پاره‌خط شکسته‌ای که به‌وسیله‌ی این نقاط مشخص می‌شود، تقریبی برای طول منحنی یافت و با زیاد کردن نقاط، این تقریب را به مقدار واقعی نزدیک کرد.





بنابراین، افراز $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ را از $[a,b]$ در نظر گرفته و نقاط

$$P_i=(x_i,f(x_i))$$

را روی نمودار تابع $y=f(x)$ مشخص می‌کنیم. طول خط شکسته‌ی $P_0P_1P_2\dots P_n$ عبارت است از:

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\left(f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right)^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)}{x_i-x_{i-1}}\right)^2}\,\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'\left(c_i\right)\right)^2}\,\Delta x_i$$

که در آن $\Delta x_i = x_i - x_{i-۱}$ و $c_i \in (x_{i-۱}, x_i)$ از قضیه‌ی مقدار میانگین به‌دست می‌آیند. بنابراین، $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ \max\Delta x_i\to ۰}} L_n$ را در صورت وجود، می‌توان به‌عنوان طول منحنی تابع $y = f(x)$، از $x = a$ تا $x = b$ تعریف کرد. در صورتی که $f'(x)$ پیوسته باشد، طبق تعریف انتگرال، این حد وجود دارد و داریم:

$$\ell = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \max\Delta x_i\to ۰}} L_n = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \max\Delta x_i\to ۰}} \sum_{i=۱}^{n} \sqrt{۱ + \big(f'(c_i)\big)^{۲}}\,\Delta x_i$$

$$= \int_a^b \sqrt{۱ + \big(f'(x)\big)^{۲}}\,\mathrm{d}x$$

تعریف

- فرض کنید $y = f(x)$ تابعی با مشتق پیوسته بر $[a, b]$ باشد. طول منحنی $y = f(x)$ روی بازه‌ی $[a, b]$ برابر است با:

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{۱ + \left(f'(x)\right)^۲}\, \mathrm{d}x}$$

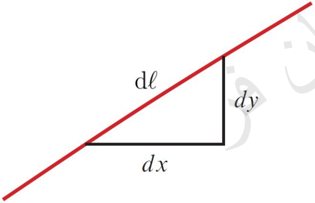
- فرض کنید $x = g(y)$ تابعی با مشتق پیوسته بر $[c, d]$ باشد. طول منحنی $x = g(y)$ روی بازه‌ی $[c, d]$ برابر است با:

$$\boxed{\ell = \int_c^d \sqrt{۱ + \left(g'(y)\right)^۲}\, \mathrm{d}y}$$

طبق توضیحات قبل، المان (عنصر) طول قوس $\mathrm{d}\ell$ به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{۱ + \left(f(x)\right)^{۲}}\,\mathrm{d}x, \qquad \ell = \int_{x=a}^{x=b} \mathrm{d}\ell$$

المان طول قوس $\mathrm{d}\ell$ را به‌صورت زیر نیز می‌توان به یاد آورد؛



$$(\mathrm{d}\ell)^{۲} = (\mathrm{d}x)^{۲} + (\mathrm{d}y)^{۲}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}x}\right)^{۲} = ۱ + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}x} = \sqrt{۱ + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{۲}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\ell = \sqrt{۱ + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{۲}}\,\mathrm{d}x$$

مثال

محیط دایره به شعاع R را حساب کنید.

پاسخ:

$$x^۲ + y^۲ = R^۲ \implies y^۲ = R^۲ - x^۲ \implies y = \pm\sqrt{R^۲ - x^۲}$$

اگر قرار دهیم $f(x) = \sqrt{R^۲ - x^۲}$، آن‌گاه داریم: (توجه شود که انتگرال‌ها ناسره هستند)

$$\text{محیط دایره} = ۲\int_{-R}^{R} \sqrt{۱ + \left(f'(x)\right)^۲}\,\mathrm{d}x$$

$$= ۲\int_{-R}^{R} \sqrt{۱ + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^۲ - x^۲}}\right)^۲}\,\mathrm{d}x = ۲\int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^۲}{R^۲ - x^۲}}\,\mathrm{d}x$$

$$= ۲R\int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{۱}{R^۲ - x^۲}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\Big|_{-R}^{R} = ۲\pi R$$

مثال

طول نمودار تابع $f(x)=\int_{۰}^{x}\sqrt{|\sin t|}\,\mathrm{d}t$ را در فاصله‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ بیابید.

پاسخ:

$$\ell=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱+\left(f'(x)\right)^{۲}}\,\mathrm{d}x=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱+\left(\sqrt{|\sin x|}\right)^{۲}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\sin^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)+\cos^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)+۲\sin\left(\frac{x}{۲}\right)\cos\left(\frac{x}{۲}\right)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\left(\sin\left(\frac{x}{۲}\right)+\cos\left(\frac{x}{۲}\right)\right)^{۲}}\,\mathrm{d}x=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\sin\left(\frac{x}{۲}\right)+\cos\left(\frac{x}{۲}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(-۲\cos\left(\frac{x}{۲}\right)+۲\sin\left(\frac{x}{۲}\right)\right)\Bigg|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=۲$$

مثال

طول منحنی $y=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ را در بازه‌ی $[a,b]$ بدست آورید ($a>0$).

پاسخ:

$$\ell=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\sqrt{\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}\,\mathrm{d}x$$

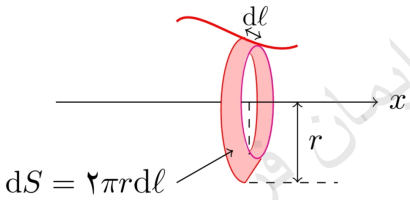
$$=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$$

با تغییر متغیر $t = e^{2x}$ داریم:

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2e^{2x}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t, \qquad x = a \to t = e^{2a}, \qquad x = b \to t = e^{2b}$$

$$\begin{aligned}
\ell &= \frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}} \frac{t+1}{(t-1)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}} \left(\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|t-1|\Big|_{e^{2a}}^{e^{2b}} - \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{e^{2a}}^{e^{2b}} \\
&= \ln\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right| - (b-a)
\end{aligned}$$

سطح دوار، سطحی است که از دوران یکی منحنی حول یک محور پدید آید. برای محاسبه‌ی سطح رویه‌ی دوار، می‌توان از مفهوم انتگرال استفاده کرد. نمودار $y = f(x)$ را در نظر بگیرید.



اگر آن را حول محور x دوران دهیم و مساحت سطح دوار حاصل را با S نمایش دهیم، آن‌گاه مطابق با شکل، المان (عنصر) سطح به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{d}S = ۲\pi r \,\mathrm{d}\ell$$

فرض کنید تابع $y = f(x)$ روی $[a,b]$ دارای مشتق پیوسته باشد.

(۱) اگر منحنی $y = f(x)$ را حول محور x دوران دهیم، آن‌گاه $r = |y| = |f(x)|$ و در نتیجه مساحت سطح دوار به‌دست آمده، عبارت است از:

$$S = \int_a^b ۲\pi|y|\,\mathrm{d}\ell = \int_a^b ۲\pi|f(x)|\sqrt{۱ + \left(f'(x)\right)^۲}\,\mathrm{d}x$$

(۲) اگر منحنی $y = f(x)$ را حول محور y دوران دهیم، آن‌گاه $r = |x|$ و در نتیجه مساحت سطح دوار به‌دست آمده، عبارت است از:

$$S = \int_a^b ۲\pi|x|\,\mathrm{d}\ell = \int_a^b ۲\pi|x|\sqrt{۱ + \left(f'(x)\right)^۲}\,\mathrm{d}x$$

به‌طور مشابه، فرض کنید تابع $x = g(y)$ روی $[c, d]$ مشتق پیوسته داشته باشد.

(۱) اگر منحنی $x = g(y)$ را حول محور y دوران دهیم، آن‌گاه $r = |x| = g(y)$ و در نتیجه مساحت سطح دوار به‌دست آمده، عبارت است از:

$$S = \int_c^d ۲\pi|x|\,\mathrm{d}\ell = \int_c^d ۲\pi|g(y)|\sqrt{۱ + \left(g'(y)\right)^۲}\,\mathrm{d}y$$

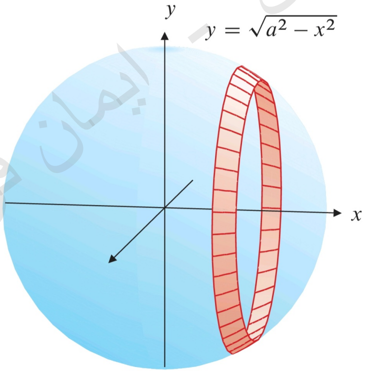
(۲) اگر منحنی $x = g(y)$ را حول محور x دوران دهیم، آن‌گاه $r = |y|$ و در نتیجه مساحت سطح دوار به‌دست آمده، عبارت است از:

$$S = \int_c^d ۲\pi|y|\,\mathrm{d}\ell = \int_c^d ۲\pi|y|\sqrt{۱ + \left(g'(y)\right)^۲}\,\mathrm{d}y$$

مثال

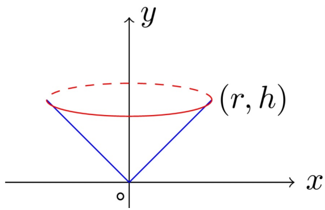
مساحت کره‌ای به شعاع R را بیابید.

پاسخ: چنین کره‌ای را می‌توان از دوران دایره‌ی $y = \sqrt{R^۲ - x^۲}$ حول محور x تولید کرد $(-R \leq x \leq +R)$.



داریم:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-R}^{R} 2\pi |y| \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi R \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \\
&= 2\pi R\big(R - (-R)\big) = 4\pi R^2
\end{aligned}
$$



مثال

مساحت جانبی مخروط به ارتفاع h و شعاع r را بیابید.

پاسخ: این مخروط را می‌توان از دوران پاره‌خط $y = \frac{h}{r}x$ حول محور y تولید کرد ($\circ \le x \le r$). داریم:

$$S = \int_{\circ}^{r} ۲\pi|x|\sqrt{۱ + \left(\frac{h}{r}\right)^{۲}}\,\mathrm{d}x = ۲\pi \int_{\circ}^{r} x\sqrt{\frac{r^{۲} + h^{۲}}{r^{۲}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{۲\pi\sqrt{r^{۲} + h^{۲}}}{r}\,\frac{x^{۲}}{۲}\bigg|_{\circ}^{r} = \pi r\sqrt{r^{۲} + h^{۲}}$$

مثال

فرض کنید $f(x) = \int_{0}^{x} \sinh\left(t^{2}\right)\, \mathrm{d}t$ که در آن $2 \leq x \leq 1$. نمودار تابع $y = f(x)$ را حول محور y دوران می‌دهیم. مساحت جانبی شکل حاصل را به‌دست آورید.

پاسخ: چون $\sinh(t^{2})$ پیوسته است، بنابر قضیه‌ی اساسی داریم $f'(x) = \sinh(x^{2})$.
در نتیجه می‌توان نوشت:

$$S = \int_{1}^{2} 2\pi|x|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} 2\pi x\sqrt{1+\sinh^{2}\left(x^{2}\right)}\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_{1}^{2} 2x\cosh\left(x^{2}\right)\,\mathrm{d}x = \pi\int_{1}^{4}\cosh(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \pi\sinh(u)\Big|_{1}^{4} = \pi\Big(\sinh(4)-\sinh(1)\Big)$$

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد. افراز P_n از این بازه را در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

در این صورت، اگر $a + \frac{(i-1)(b-a)}{n} \leq c_i \leq a + \frac{i(b-a)}{n}$ یا به عبارت دیگر $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$، آن‌گاه داریم:

$$R\left(f, p_n, c\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\left(\frac{b-a}{n}\right), \qquad \begin{cases} c_1 \xrightarrow{n\to\infty} a \\ c_n \xrightarrow{n\to\infty} b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} R\left(f, P_n, c\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

مثال

حدود زیر را محاسبه کنید:

(۱) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^{5}+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^{5}\right)$$

(۲) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$$

(۳) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^{2}+1}+\frac{n}{n^{2}+4}+\cdots+\frac{n}{2n^{2}}\right)$$

(۴) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}}{3^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{2}{n}}+\cdots+3^{\frac{n}{n}}}$$

(۵) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

(۱)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^5+\left(1+\frac{2}{n}\right)^5+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^5=\int_0^1(1+x)^5\,\mathrm{d}x$$

$$=\left.\frac{(1+x)^6}{6}\right|_0^1=\frac{1}{6}\left(2^6-1\right)=\frac{1}{6}\times 63=\frac{21}{2}$$

(۲)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\big|_0^{\pi}=2$$

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{n}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{n}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\tan^{-1}(x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

$$(۴)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{۲^{\frac{۱}{n}} + ۲^{\frac{۲}{n}} + \cdots + ۲^{\frac{n}{n}}}{۳^{\frac{۱}{n}} + ۳^{\frac{۲}{n}} + \cdots + ۳^{\frac{n}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n}\left(۲^{\frac{۱}{n}} + ۲^{\frac{۲}{n}} + \cdots + ۲^{\frac{n}{n}}\right)}{\frac{۱}{n}\left(۳^{\frac{۱}{n}} + ۳^{\frac{۲}{n}} + \cdots + ۳^{\frac{n}{n}}\right)}$$

$$= \frac{\int_{۰}^{۱} ۲^x \,\mathrm{d}x}{\int_{۰}^{۱} ۳^x \,\mathrm{d}x} = \frac{\left.\frac{۲^x}{\ln ۲}\right|_{۰}^{۱}}{\left.\frac{۳^x}{\ln ۳}\right|_{۰}^{۱}} = \frac{\frac{۱}{\ln ۲}}{\frac{۲}{\ln ۳}} = \frac{\ln ۳}{۲\ln ۲} = \frac{\ln ۳}{\ln ۴}$$

$$(۴)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{۱}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{۱}{n}}$$

قرار می‌دهیم $a_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{۱}{n}}$. در نتیجه داریم:

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1\times 2\times\cdots\times n}{n\times n\times\cdots\times n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{R\to 0^+}\int_R^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to 0^+}(x\ln x - x)\Big|_R^1 = -1$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$$

تمرین

فرض کنید a عددی حقیقی باشد. حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na}{n^۲+a^۲}+\frac{na}{n^۲+۴a^۲}+\frac{na}{n^۲+۹a^۲}+\cdots+\frac{na}{n^۲+n^۲a^۲}\right)$$

جواب: $\tan^{-۱}(a)$.

تمرین (پایان‌ترم ۱۴۰۰)

طول قوس منحنی $y=\sqrt{x^۳}$ را از نقطه‌ی $(۰,۰)$ تا $(۱,۱)$ محاسبه کنید.

جواب: $\frac{۸}{۲۷}\left(\sqrt{\left(\frac{۱۳}{۴}\right)^۳}-۱\right)$.

تمرین

مساحت ناحیه‌ای از صفحه که پایین نمودار تابع $y = x^{-۲}e^{\frac{۱}{x}}$، بالای محور x و سمت راست محور y قرارگرفته است را بیابید.

جواب: ۱

تمرین

طول خم $y = \sinh^{۲} x$ را در بازه‌ی $[۰, ۱]$ محاسبه کنید.

جواب: $\frac{۱}{۲}\sinh(۲)$

تمرین

فرض کنید R ناحیه‌ی محصور به $y=\frac{x}{۱+x^{۲}}$، $y=۳$، $x=۰$ و $x=۱$ باشد. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی R حول محور y را بیابید.

جواب: $\pi+\frac{\pi^{۲}}{۲}$

تمرین

فرض کنید R ناحیه‌ی محصور به منحنی $y=\ln x$ و خطوط $x=۱$ و $x=e$ و محور xها باشد. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی R حول خط $x=۳$ را بیابید.

جواب: $\frac{\pi}{۲}(۱۱-e^{۲})$

تمرین

مساحت سطح حاصل از دوران قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2$ از $x = 0$ تا $x = 1$ حول خط $y = 2$ را محاسبه کنید.

جواب: $\frac{\pi}{9}(2\sqrt{2} - 1)$

تمرین

ناحیه‌ی محصور بین نمودار دو تابع $y = 1$ و $y = 1 + \sin x$ را از $x = 0$ تا $x = \pi$ در نظر می‌گیریم. موارد زیر را بیابید.

الف) حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی مذکور حول محور x

ب) حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی مذکور حول محور y

جواب: الف) $4\pi + \frac{\pi^2}{2}$ ب) $2\pi^2$