* تحقیق اول: فضای زمانی و فرکانسی

* دانشجو: سید جواد اسدبید ۹۸۲۶۹۱۳

برای توصیف هر نقطه در یک فضای n بعدی، ما نیاز به حداقل n بردار داریم که نسبت به همدیگر، مستقل خطی باشند. (برای مثال i و j در فضای ۲ بعدی)

به همین ترتیب می‌توانیم توابع را هم در این فضا توصیف کنیم و از این طریق سیستم‌های مدنظر خود را نمایش دهیم. (بدین ترتیب که چیدمانی از این نقاط داریم که در t های مختلف پشت هم چیده شده‌اند)

حال می‌توان این پارامترهای توصیف کننده را به هر نحوی انتخاب کرد که بررسی و تحلیل سیستم برای ما راحت‌تر باشد. در اکثر سیستم‌ها، خصوصاً در مهندسی، ما با ورودی‌هایی از فرکانس‌های آشنا و مشخص سروکار داریم. فلذا دیدگاه توصیفی خود را از دید زمانی به دید فرکانسی می‌بریم تا درک و فهم و تحلیل سیستم برایمان راحت‌تر شود.

این تغییر فضای بررسی را می‌توان با یک مثال شهودی راحت‌تر درک کرد. فرض کنیم ما مسئول برج کنترل یک پیست اتوموبیل رانی هستیم و پیست‌ها به صورت دایره‌های متحدالمرکز، به دور برج کنترل ساخته شده‌اند. اتوموبیل‌ها نیز هر کدام با سرعت مشخصی (n دور بر ثانیه) در حال گردش در پیست هستند. دید فرکانسی، مانند یک صندلی جادویی است که بسته به اینکه ما در حال نگاه کردن به کدام پیست هستیم، سرعت گردش ما به دور خودمان را کم و زیاد می‌کند، به طوری که انگار اتوموبیل آن پیست، در جلوی چشم‌ها ثابت است و می‌توانیم به راحتی، اعداد نوشته شده روی اتوموبیل را قرائت کنیم. (مانند تابع در آن حوزه فرکانس)

به بیان دقیق و ریاضیاتی نیز، بدین ترتیب می‌توان نحوه تعریف پارامترهای توصیف کننده فضایمان را بیان کرد:

مثلاً مثال در یک فضای دو بعدی، به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\underline{a}.\underline{b} = a b^T$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}^T = [a_i]_{1\times N} = [a_1 \; a_2 \; \dots \; a_N]$$

$$\underline{b} = [b_i]_{1\times N}$$

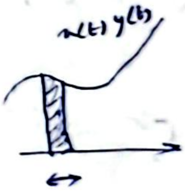
$$\underline{a}.\underline{b} = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$$

$$\underline{a}.\underline{b} = [a_i]_{1\times N} \times [b_i]_{N\times 1} = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i \quad \Delta$$

حال اگر به صورت تابع باشند:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) \, dt$$

$$= \lim_{\Delta i \to} \sum_{i} f(x_i) g(x_i) \Delta i$$



$$\text{if } \Delta i = 1 \Rightarrow \langle f(n), g(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) g(n) \Delta i$$

$$\Rightarrow \langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) \, dt$$

حال اگر: $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = 0 \quad \text{if } i \neq j$

$$= A(t) \quad \text{if } i = j$$

$\phi_n(t)$ باید تمام فضا را توصیف کند:

$$f(t) = \sum a_n . y_n(t) \qquad y_n(t) = \begin{cases} e^{j\frac{2\pi n t}{T}} \\ \vdots \end{cases}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \, \phi_{(s,t)} \, ds$$

در واقع مثلاً انتقال از یک فضا به فضای دیگر، (دیدگاه) یک تابع کرنل تعریف می‌شود.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$ برای ادامه دادن بسط های نمایی را انتخاب و استفاده کنیم)

در بحث تفاوت دو تبدیل فوریه و لاپلاس باید اینگونه گفت که تبدیل فوریه، برای تحلیل پاسخ حالت دائمی سیستم به کار می رود اما تبدیل لاپلاس، پاسخ گذرای سیستم را هم در بر دارد. این تفاوت، به فرمول های سنتز و آنالیز این دو تبدیل مربوط می‌شود که در تبدیل لاپلاس، ما علاوه بر $j\omega$، مقدار حقیقی σ را هم داریم که s را می‌سازند و در واقع σ به پاسخ حالت گذرای سیستم مربوط می‌شود و با گذشت زمان میرا شده و به صفر میل می‌کند. به همین علت هم هست که اگر قطبی در سمت راست محور $j\omega$ داشته باشیم، سیستم ناپایدار می‌شود. زیرا مقدار حقیقی آن میرا نشده و فزاینده خواهد بود و سیستم را ناپایدار می‌کند. اما در تبدیل فوریه فقط حالت دائمی سیستم را داریم. از تبدیل لاپلاس برای بررسی پایداری یا عدم پایداری سیستم‌ها می‌توان استفاده کرد. از فوریه برای پردازش سیگنال‌ها استفاده می‌شود.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad (s = \sigma + j\omega)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$