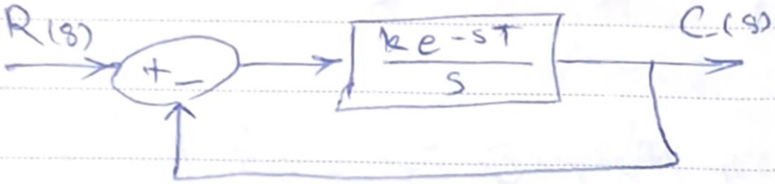
تمرین ۵ کنترل خطی

دانشجو: سید جواد اسدپور ۹۸۲۴۹۱۳

سوال ۱



تابع تبدیل حلقه باز : $G(s) = \frac{k e^{-sT}}{s}$

این یک سیستم نوع یک با تاخیر زمانی T است.

عبارت e^{-sT} ایجاد یک تاخیر در فاز سیستم کرده و در فرکانس ω، مقدار این تاخیر برابر $-\omega T$ خواهد بود.

همچنین تا زمانی که بهره‌ی سیستم، تاخیر فاز را به $-180°$ نرسانده، سیستم پایدار خواهد بود.

$$|G(j\omega)| = 1 \xrightarrow{|G(j\omega)| = \frac{k}{\omega}} \omega_{gc} = k$$

بنابراین در فرکانس $\omega_{gc} = k$:

$$Phase = -90° - \omega_{gc} T = -90° - kT$$

بنابراین حد فاز سیستم بدین صورت خواهد بود:

$$\Phi_m = 180° + (-90° - kT) = \boxed{90° - kT}$$

Subject:
Date

همچنین حد بهره سیستم همانگونه که گفته شده بدین صورت باید باشد:

$$-90^\circ - \omega T = -180^\circ \implies \omega = \frac{90^\circ}{T} = \frac{\pi}{2T}$$

$$\text{حد بهره} = \frac{1}{|G(\text{اساس})|} = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{\pi}{2T}}{k}$$

لذا شرایط پایداری سیستم به شرح زیر خواهد بود:

۱- حد فاز سیستم باید $\Phi_m > 0^\circ$ باشد، یعنی $kT < \frac{\pi}{2} \Leftarrow kT < 90^\circ$

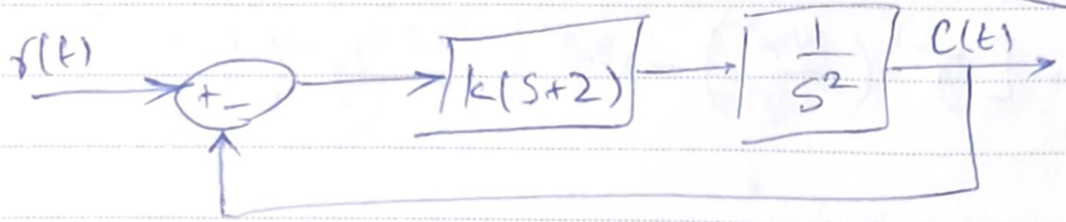
۲- حد بهره نیز باید مقدار مثبت داشته باشد. $\text{حد بهره} > 0 \implies k > 0$

$\boxed{\text{حد فاز}: \quad T < \frac{\pi}{2k}}$

$\boxed{\text{حد بهره}: \quad k < \frac{\pi}{2T}}$

$\boxed{\text{شرایط پایداری}: \quad kT < \frac{\pi}{2}}$

سوال 2



تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = k(s+2) \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{k(s+2)}{s^2}$

$$|G(j\omega_{gc})| = \left| \frac{k(j\omega_{gc}+2)}{(j\omega_{gc})^2} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k\sqrt{\omega_{gc}^2+4}}{\omega_{gc}^2} = 1 \Rightarrow k = \frac{\omega_{gc}^2}{\sqrt{\omega_{gc}^2+4}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(k) + \angle(j\omega+2) - \angle((j\omega)^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle(k) = 0^\circ \\ \angle(j\omega+2) = tg^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \angle((j\omega)^2) = 2 \times 90^\circ = 180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle G(j\omega) = tg^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 180^\circ$$

Subject:
Date

حد فاز سیستم $PM = 180^\circ + \angle G(j\omega_{gc})$

$$= 180^\circ + \left[tg^{-1}\left(\frac{\omega_{gc}}{2}\right) - 180^\circ \right] = tg^{-1}\left(\frac{\omega_{gc}}{2}\right)$$

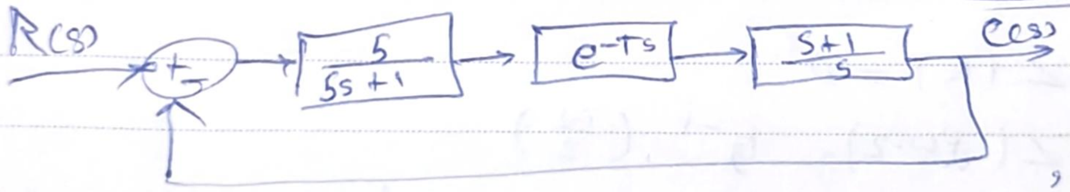
حال به ازای : $PM = 45^\circ$

$$tg^{-1}\left(\frac{\omega_{gc}}{2}\right) = 45^\circ$$

$$\frac{\omega_{gc}}{2} = 1 \Longrightarrow \omega_{gc} = 2$$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega_{gc}^2}{\sqrt{\omega_{gc}+4}} \xrightarrow{\omega_{gc}=2} \boxed{k = \frac{2^2}{\sqrt{2^2+4}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}}$$

سوال 3



, $T = 2s$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم : $G(s) = \frac{5(s+1)}{s(5s+1)} \cdot e^{-2s}$

Subject :
Date

$$G(s) : \underbrace{\frac{5}{5s+1}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{s+1}{s}}_{2} \cdot \underbrace{e^{-2s}}_{3}$$

• یک فیلتر پایین‌گذر است با
$\omega_c = \frac{1}{5} = 0.2\ rad/s$

• بهره نیز در $20\log_{10}(5)$
یعنی 13.98 dB آغاز شده و
تا بعد از ω_c، به میزان
-20dB در هر بازه کاهش پیدا می‌کند

• فاز این هم نیز در 0°
شروع شده و تا -90°
بعد از ω_c کاهش می‌یابد

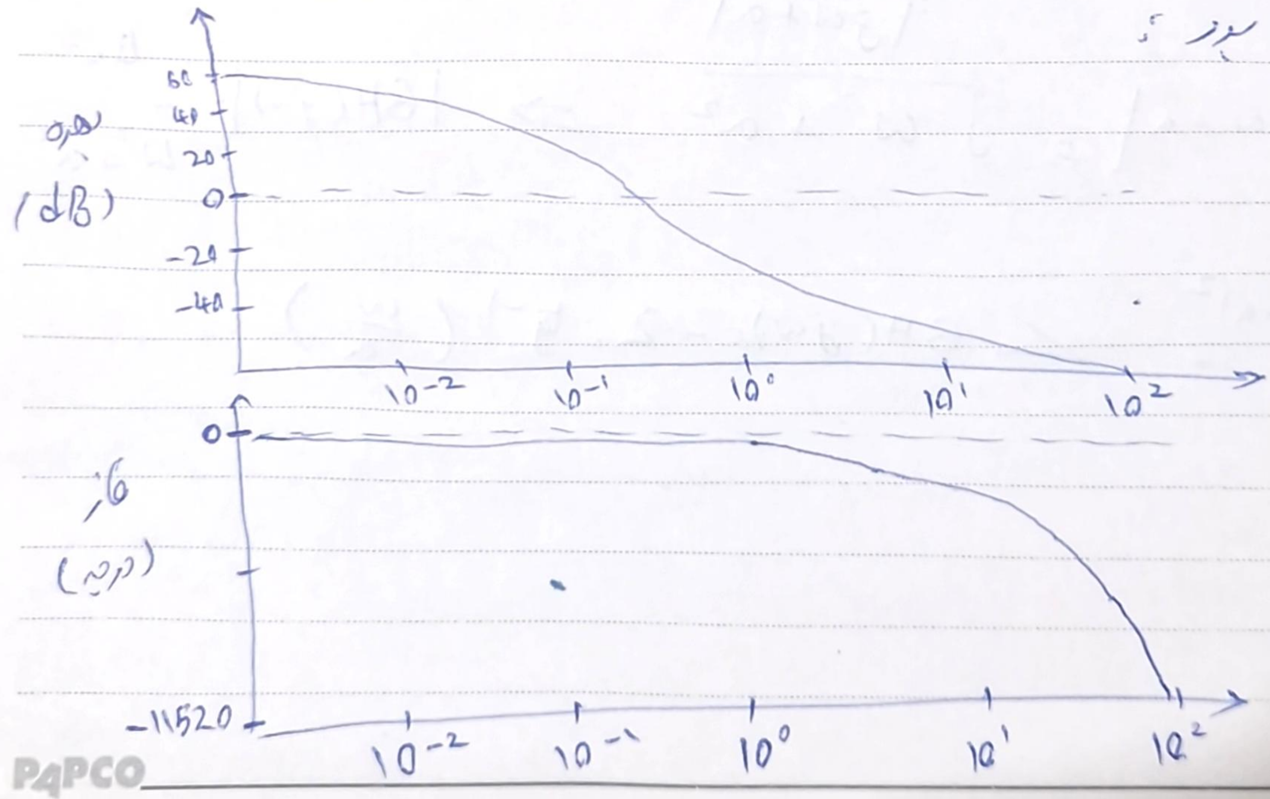
• یک ترکیب صفر و قطب
با Z = 1 و P = 0
است.

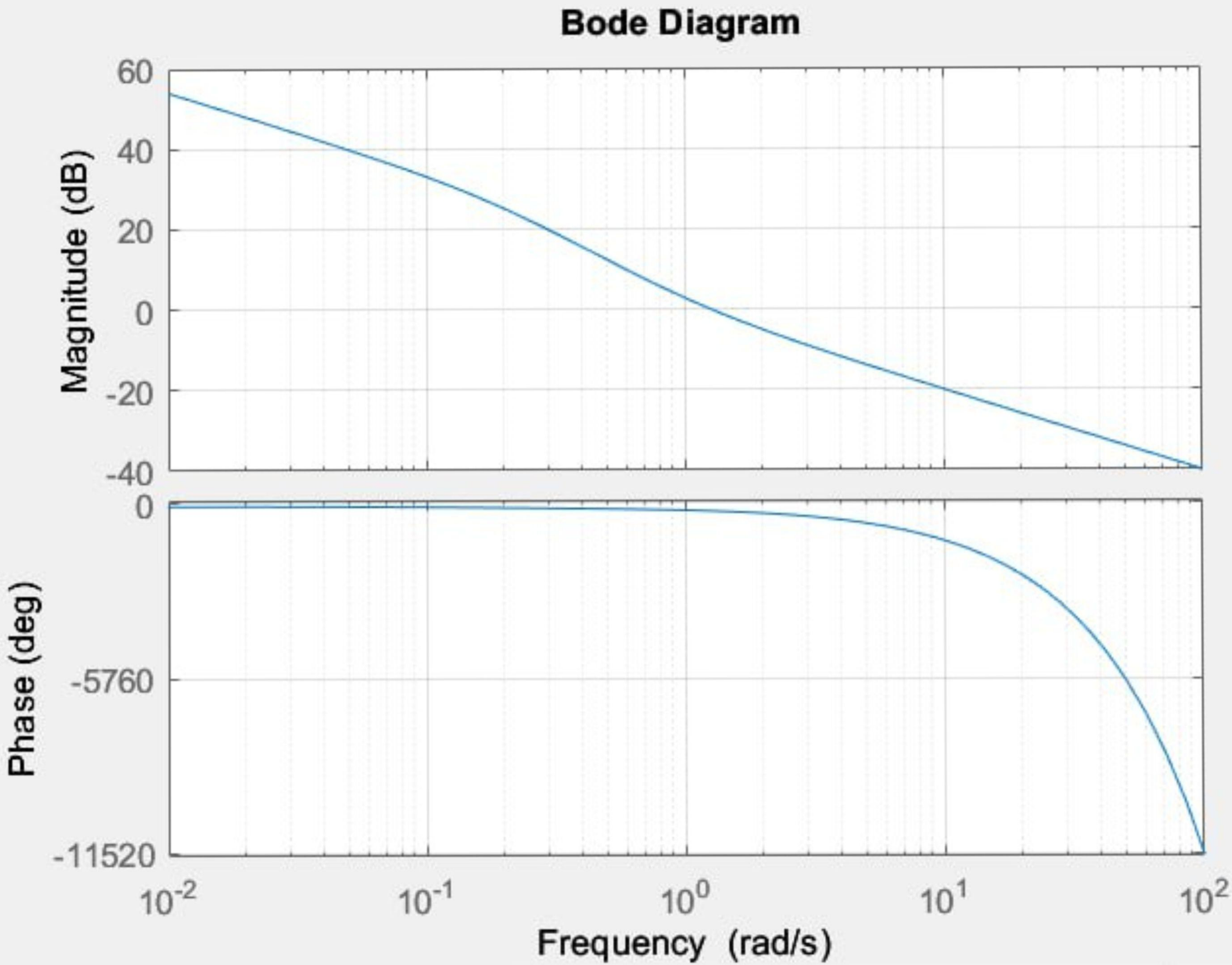
• بهره 20 dB در هر بازه افزایش می‌یابد

• فاز در -90° شروع شده
به 0° افزایش می‌یابد (بعد از ω_z)

• این بخش یک
شیفت در زمان (تأخیر زمانی)
است.
Phase lag = -2ω radians

* نمودار بود سیستم، به صورت زیر، به این شکل
خواهد بود :





Bode Diagram
60
40
20
0
-20
-40
Magnitude (dB)
0
-5760
-11520
Phase (deg)
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

مطابق پایداری سیستم نیز، اگر $PM>0^\circ$ و $GM>0\,dB$ باشد

سیستم پایدار خواهد بود. مقادیر PM هرچه به صفر نزدیک تر باشد، سیستم به حالت

ناپایداری نزدیک تر خواهد شد.

سوال 4

$$GH(s)=\frac{4a^2}{(s+a)^2}\quad,\quad a>0$$

دو قطب تکراری در $s=-a$

بعد:

$$|GH(j\omega)|=\frac{4a^2}{|j\omega+a|^2}$$

$$|j\omega+a|=\sqrt{\omega^2+a^2}\Rightarrow |GH(j\omega)|=\frac{4a^2}{\omega^2+a^2}$$

$$(j\omega+a)^2 \longrightarrow \angle GH(j\omega)=-2\,tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

* حد بهره سیستم:

- در فرکانس های پایین ($\omega = 0$)

$$|GH(j0)| = \frac{4a^2}{a^2} = \boxed{4}$$

- در فرکانس های بالا ($\omega \to \infty$)

$$|GH(j\infty)| = \frac{4a^2}{\infty} = \boxed{0}$$

* حد فاز:

- ($\omega \to 0$) : $\angle GH(j0) = -2 \cdot tg^{-1}\left(\frac{0}{a}\right) = 0^\circ$

- ($\omega \to \infty$) : $\angle GH(j\infty) = -2 \cdot tg^{-1}\left(\frac{\infty}{a}\right) = -180^\circ$

بنابراین بهره ی سیستم در بیشترین حالت در فرکانس صفر برابر 4 و در کمترین حالت در $\omega \to \infty$ برابر 0 خواهد بود.

همچنین فاز سیستم نیز در $\omega = 0$ در مقدار 0° شروع شده و با $\omega \to \infty$ به -180° ختم میشود.