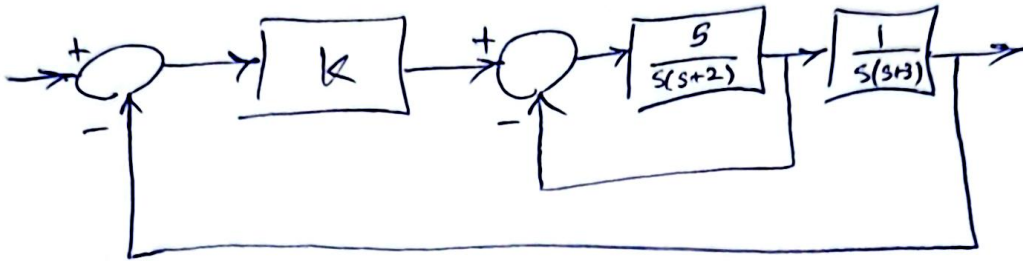


تمرین ۶ درس سیستم‌های کنترل خطی - دکتر تقی‌پور - ترم ۱۴۰۳

دانشجو: سید جواد اسدی ۹۸۲۹۹۱۳

سوال ۱



تابع انتقال

$$G(s) = \frac{5}{s(s+2)}, \quad H(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{5}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{s(s+3)}$$

حاصل عدد

$$OS = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

برای کاهش دقت ماندگار سیستم، نیاز به طراحی کنترل PI یا PID داریم

خود سیستم مرتبه ۲ است. (اقلب در مبدأ دارد) برای عدد بده به سیستم، عملکرد دقت ماندگار، مغز خواهد بود.

اگر ورودی به سیستم را سیب دانه (ramp) در نظر بگیریم، همین گونه خواهم بود:

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s), \quad G(s) = k \cdot \frac{5}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{s(s+3)}$$

$$\underline{b=2} \quad G(s) = 2 \cdot \frac{5}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{s(s+3)} = \frac{10}{s^2(s+2)(s+3)}$$

$$\Rightarrow K_v = \frac{10}{(0+2)(0+3)} = \frac{10}{6} = 1.67$$

$$K_v^{\text{new}} = 30 \cdot K_v = 30 \times 1.67 = 50.1$$

$$G_c(s) = \frac{s+2}{s+p}, \quad z < p \quad \leftarrow \text{نصف مستقر}$$

$$\text{DC Gain of } G_c(s) = \frac{z}{p} = \frac{K_v^{\text{new}}}{K_v} = \frac{50.1}{1.67} = 30$$

$$P = 0.1 \rightarrow z = \frac{p}{30} = \frac{0.1}{30} = 0.0033$$

$$G_c(s) = \frac{s+0.0033}{s+0.1}$$

$$G_{OL}^{\text{new}}(s) = G_c(s) \cdot G(s) = \frac{s+0.0033}{s+0.1} \times 2 \times \frac{5}{s(s+2)} \times \frac{1}{s(s+3)}$$

الف) بهای نامده حاضر سیستم حدود  $0.246$  (در  $3$  dB)

که چو سیستم حدود  $10$  برسانیم

بسیار

$$P_M = 180^\circ - |Phase \text{ at } \omega_{gc}| = 180 - 168 = 12^\circ$$

$$\Delta P_M = 32 - 12 = 20^\circ \quad \leftarrow \text{حداقل ضرورت}$$

$$\phi_{\text{res}} = \sin^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \quad ; \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$\phi_{\text{res}} = \frac{20\pi}{180} = 0.349 \text{ rad}$$

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \sin(0.349) \Rightarrow \alpha = \frac{1-0.349}{1+0.349} = 0.49$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{r}}$$

$$\omega_m = 10 \text{ rad/s}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\frac{1}{\alpha}}} \quad \xrightarrow[\omega_m=10]{\alpha=0.49}$$

$$\tau = \frac{1}{10 \times \sqrt{\frac{1}{0.49}}} = \frac{1}{10 \times 1.428} = 0.07 \text{ s}$$

$$C(s) = k_c \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} = k_c \frac{0.07s + 1}{0.0343s + 1}$$

با توجه به خواص مورد نیاز، باید سیستم در  $\omega = 10$  برابر  $40.2$  dB است. پس:

$$k_c = 10^{\frac{-(-40.2)}{20}} = 10^{2.01} \approx 102$$

بنابراین، کنترلر پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود:

$$C(s) = 102 \times \frac{0.07s + 1}{0.0343s + 1}$$

$$G(s) = \frac{e^{-Ts}}{Ts+1}, \quad T=0.4, \quad \tau=0.2$$

$$G(s) = K_P + \frac{k_I}{s} \quad \leftarrow \text{کنترلر PI}$$

$$PM = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} \right) \quad \zeta > 0.6 \quad \leftarrow \text{فاز بیشتر از 70 درجه}$$

$$\zeta = 0.6 \rightarrow \tan^{-1} \left( \frac{2(0.6)}{\sqrt{-2(0.6)^2 + \sqrt{1+4(0.6)^4}}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1.2}{\sqrt{-0.72 + 1.08}} \right)$$

$$\Rightarrow PM = \tan^{-1} \left( \frac{1.2}{0.6} \right) \approx \tan^{-1}(2) \approx 63.4^\circ$$

تا یک مقدار دیگر

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j0.4\omega}}{1+j0.2\omega} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(0.2\omega)^2}} \\ \angle G(j\omega) = -0.4\omega - \tan^{-1}(0.2\omega) \end{cases}$$

$$\text{کنترلر PI} \quad G_c(s) = K_P + \frac{k_I}{s} = \frac{k_P s + k_I}{s}$$

$\omega_c = 5$  در یک فرکانس (مقاله خوب)

$$\Rightarrow \angle G(j5) = -0.4(5) - \tan^{-1}(0.2(5)) = -2 - \tan^{-1}(1)$$

$$\angle G(j5) = -2 - 45^\circ = -135^\circ$$

$$\angle (G(j\omega_c) + G_c(j\omega_c)) = -180^\circ + 63.4^\circ = -116.6^\circ$$

$$\Rightarrow \angle G_c(j\omega_c) = -116.6 - (-135^\circ) = 18.4^\circ$$

$$\text{کنترلر PI} \quad G_c(j\omega) = k_P + \frac{k_I}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |G_c(j\omega)| = \sqrt{k_P^2 + \left(\frac{k_I}{\omega}\right)^2} \\ \angle G_c(j\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{k_I}{\omega k_P} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{k_I}{s k_p}\right) = 18.4 \Rightarrow \frac{k_I}{s k_p} = \tan(18.4) = 0.333$$

$$\Rightarrow \frac{k_I}{s k_p} = 0.333 \Rightarrow k_I = 1.665 k_p$$

$$|G(j\omega)| \cdot |G_c(j\omega)| = 1$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(0.2(s))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

$$\Rightarrow |G_c(j\omega)| = \frac{1}{G(j\omega)} = \sqrt{k_p^2 + \left(\frac{k_I}{s}\right)^2}$$

$$k_I = 1.665 k_p \Rightarrow 1.414 = \sqrt{k_p^2 + \left(\frac{1.665 k_p}{s}\right)^2}$$

$$\Rightarrow k_p = \frac{1.414}{\sqrt{1.111}} \approx \frac{1.414}{1.054} \approx 1.34$$

$$k_I = 1.665(1.34) = 2.23$$

$$G_c(s) = 1.34 + \frac{2.23}{s}$$

شکل PT سیر

$$\omega_n \approx \frac{\omega_c}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \Rightarrow \omega_n \approx \frac{5}{\sqrt{1-2(0.6)^2}} \approx 9.46$$

$$T_s \approx \frac{4}{0.6(9.46)} \approx 0.705 \text{ s}$$



$$G(s) = \frac{2500 k}{s(s+25)}$$

4 11

$$P_m > 45^\circ$$

$$\frac{1}{s^2} < 1$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

$$\xrightarrow{s \rightarrow 0} k_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2500}{s+25} = 100 k$$

$$k_v > 100 \rightarrow 100k > 100 \rightarrow k > 1$$

در فرکانس‌های پایین  $\omega \rightarrow 0$

$$|G(j\omega)| \approx \frac{2500 k}{\omega \cdot 25}$$

در فرکانس‌های بالا  $\omega \rightarrow \infty$

$$|G(j\omega)| \propto \frac{1}{\omega^2}$$

$$G_c(s) = k_c \frac{s+z}{s+p}, \quad z < p$$

$$|G(j\omega_c) \cdot G_c(j\omega_c)| = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{25}\right) \xrightarrow{\omega = \omega_c} \angle G(j\omega) \approx -90 - 21.8 = -111.8^\circ$$

ببار 45  $P_m > 45$

نگار کلی به فرکانس بالا  $\rightarrow -180^\circ + P_m = -135^\circ$

$$\phi_{lead} = -135 - (-111.8) = 23.2^\circ$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{p}\right) = \phi_{lead}$$

$$\frac{10}{2} \rightarrow t^{-1}\left(\frac{10}{3}\right) - t^{-1}\left(\frac{10}{P}\right) = 23.2$$

$$\Rightarrow P \approx 20$$

$$G_c(s) = k_c \frac{s+3}{s+20}$$

$$G_{OL}(s) = G_c(s) G(s) = k_c \frac{s+3}{s+20} \cdot \frac{2500 k}{s(s+25)}$$

در مکان های پایین  
 $s \rightarrow 0$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{OL}(s) = k_c k \frac{2500}{25} = 100 k_c k$$

$$k_c k > 1 \leftarrow \text{بر شرط } 100 k_c k > 1$$

پایین  $k_c = 1$  ,  $k = 1.5$  در نظر داریم تا شرط ارضاء شود.

$$\Rightarrow G_c(s) = \frac{s+3}{s+20} \quad \checkmark$$

$$k_v = 100 k_c k = 100(1)(1.5) = 150 \quad \checkmark$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{150} \approx 0.67\% (< 1\%) \quad \checkmark$$

حاشیه فاز بیشتر در مقابل بزرگتر شد.  $40.03^\circ \leftarrow$

$$G(s) = \frac{10N}{s(s+1)(s+10)} = \frac{10 \times 20}{s(s+1)(s+10)}$$

(الف)

$$C(s) = k_p + k_D s$$

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

مقدار  $\zeta$  را حدود 0.7 در نظر میگیریم (معالجه خوب)

$$T_s \leq 3s$$

$$\rightarrow T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

$$\Rightarrow \omega_n \approx \frac{4}{T_s \cdot \zeta} \approx \frac{4}{3 \times 0.7} \approx 1.9 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$k_p + k_D \frac{10N}{s^2} \rightarrow k_p + k_D (2)$$

(ب)

$$k_p + k_D \times 20 = 1$$

با رسم نمودار میوین در قطب،  $k_D$  را در حدود 0.5 میبایم (باید در اطراف نقطه میوین را در نظر بگیریم)

فشاردهی به سیستم در قطب: poles of open loop system: 0, -10, -1

$$\text{Optimal } k_D: 0.08$$

$$\text{Max. Phase Margin: } 163.87^\circ$$

$$GM = \infty$$

$$BW = \infty$$