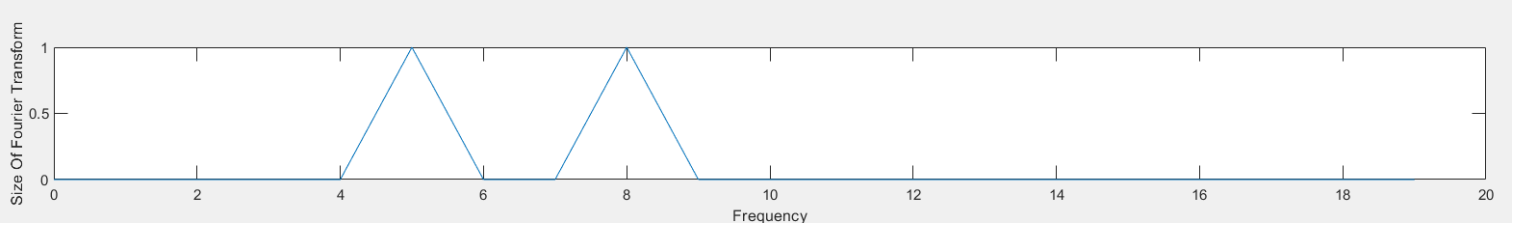
تمرین ۱-۰ :

```
clc;
clear;
close all;

%0-1
%%
tstart=0;
tend=1;
fs=20;
ts=1/fs;

t=tstart:ts:tend-ts;
N=length(t);
x1=exp(1j*2*pi*5*t) + exp(1j*2*pi*8*t);
x2=exp(1j*2*pi*5*t) + exp(1j*2*pi*5.1*t);
```

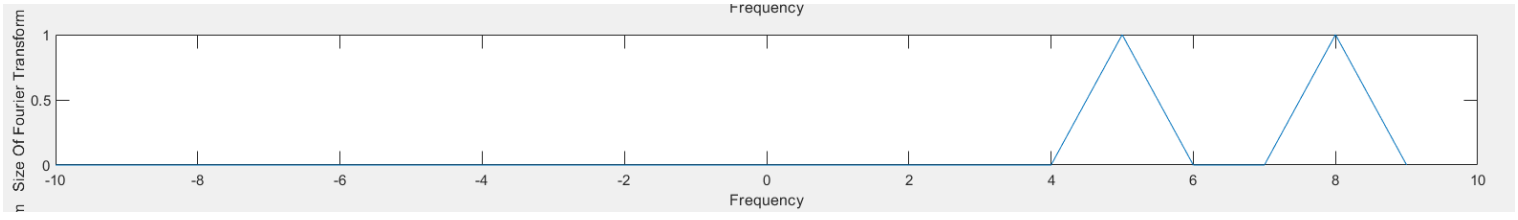
- رسم نمودار سیگنال $x_1(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 8 * t)$ با دستور fft :

```
subplot(4, 1, 1)
freq1=0:fs/N:(N-1)*fs/N;
x1f=fft(x1);
z1f=abs(x1f)/max(abs(x1f));
plot(freq1, z1f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
```



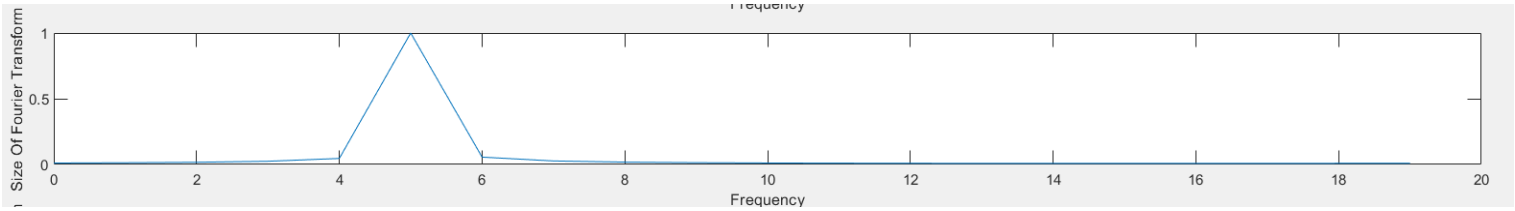
- رسم نمودار سیگنال $x_1(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 8 * t)$ با دستور fftshift :

```
subplot(4, 1, 2)
freq2=-fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
x2f=fftshift(x1f);
z2f=abs(x2f)/max(abs(x2f));
plot(freq2, z2f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
```



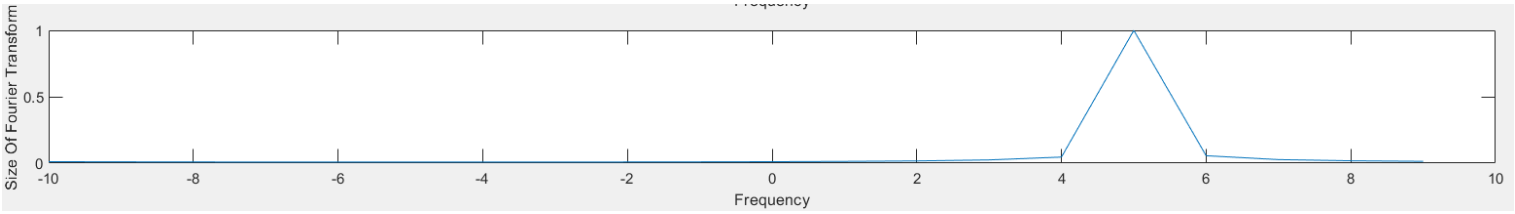
- رسم نمودار سیگنال $x_2(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 5.1 * t)$ با دستور fft :

```
subplot(4, 1, 3)
x3f=fft(x2);
z3f=abs(x3f)/max(abs(x3f));
plot(freq1, z3f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
```



- رسم نمودار سیگنال $x_2(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 5.1 * t)$ با دستور fftshift :

```
subplot(4, 1, 4)
x4f=fftshift(x3f);
z4f=abs(x4f)/max(abs(x4f));
plot(freq2, z4f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
%%
```

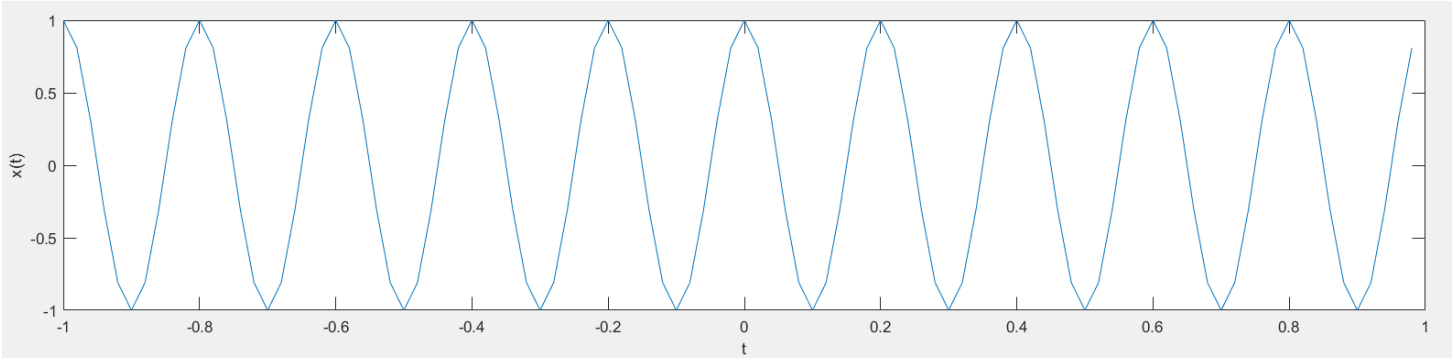


از آن جایی که اختلاف فرکانس دو سیگنال تک تُن کمتر از $\delta_f = 1Hz$ است، فقط یک قله در فرکانس 5 هرتز داریم و توانایی تفکیک این دو سیگنال در حوزه فوریه را نداریم. پس می‌توان گفت δ_f قدرت تفکیک پذیری فرکانسی را در حوزه فوریه نشان می‌دهد.

تمرین ۱-۱:

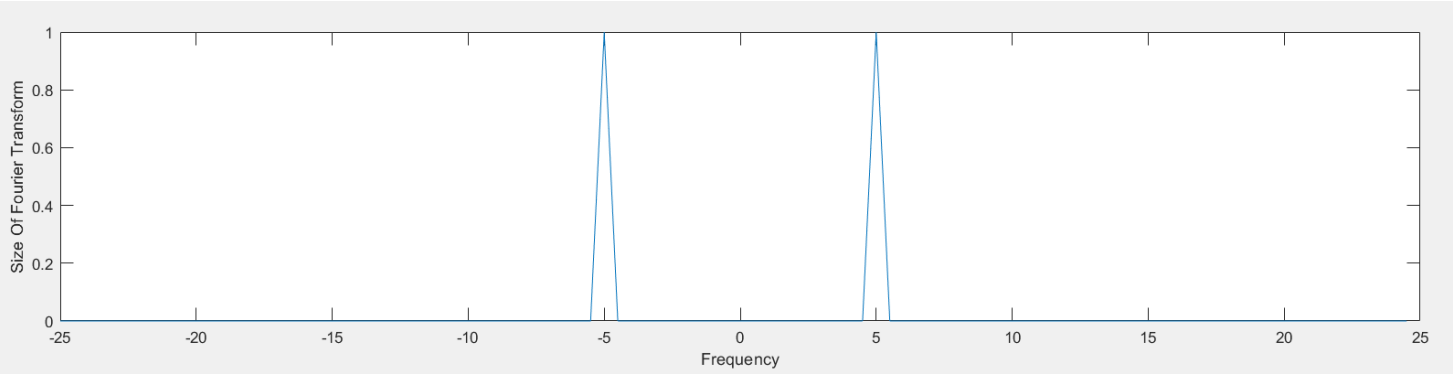
الف) رسم نمودار سیگنال $x_1(t) = \cos(10\pi t)$:

```
%1-1
tstart=-1;
tend=1;
fs=50;
ts=1/fs;

t=tstart:ts:tend-ts;
N=length(t);
x1=cos(2*pi*5*t);

subplot(2, 1, 1)
plot(t, x1)
xlabel 't'
ylabel 'x(t)'
```



ب) رسم نمودار اندازه تبدیل فوریه سیگنال $x_1(t) = \cos(10\pi t)$:

```
subplot(2, 1, 2)
freq=-fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
x1f=fftshift(fft(x1));
z1f=abs(x1f)/max(abs(x1f));
plot(freq, z1f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
%%
```



ج) محسابه تبدیل فوریه پیوسته سیگنال $x_1(t) = \cos(10\pi t)$ به صورت تئوری :

از آن جایی که سیگنال $x_1(t) = \cos(10\pi t)$ یک سیگنال متناوب است، پس تبدیل فوریه آن از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\hat{x}(\omega) = \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k)$$

که a_k ضرایب سری فوریه $x_1(t)$ هستند. از طرفی می‌دانیم سری فوریه $x_1(t)$ به شکل زیر است :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}e^{j10\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j10\pi t}$$

هم چنین می‌دانیم $\omega = 2\pi f$ پس داریم :

$$2\pi f_1 = 10\pi \Longrightarrow f_1 = 5, 2\pi f_2 = -10\pi \Longrightarrow f_2 = -5$$

پس تبدیل فوریه $x_1(t)$ برابر است با : $\pi(\delta(\omega - 10\pi) + \delta(\omega + 10\pi))$ دقت شود چون محور افقی، به جای ω، f است، پس تبدیل فوریه بر حسب f به این صورت می‌شود : $\pi(\delta(f - 5) + \delta(f + 5))$ و چون نمودار $\frac{|\hat{x}(\omega)|}{\max(|\hat{x}(\omega)|)}$ را رسم کرده‌ایم پس مقدار بیشینه نمودار به جای π، 1 است.

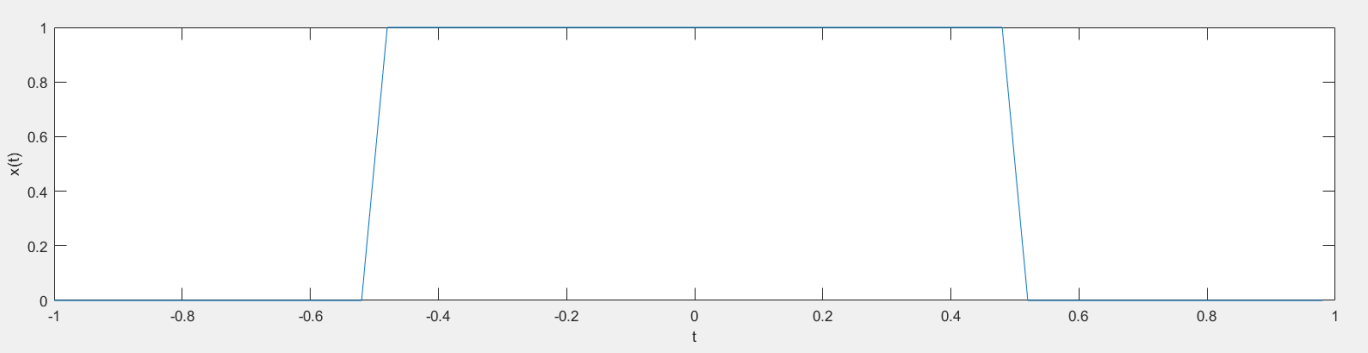
تمرین ۱-۲:

می‌دانیم که :

$$x_2(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1; & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}; & |t| = \frac{1}{2} \\ 0; & otherwise \end{cases}$$

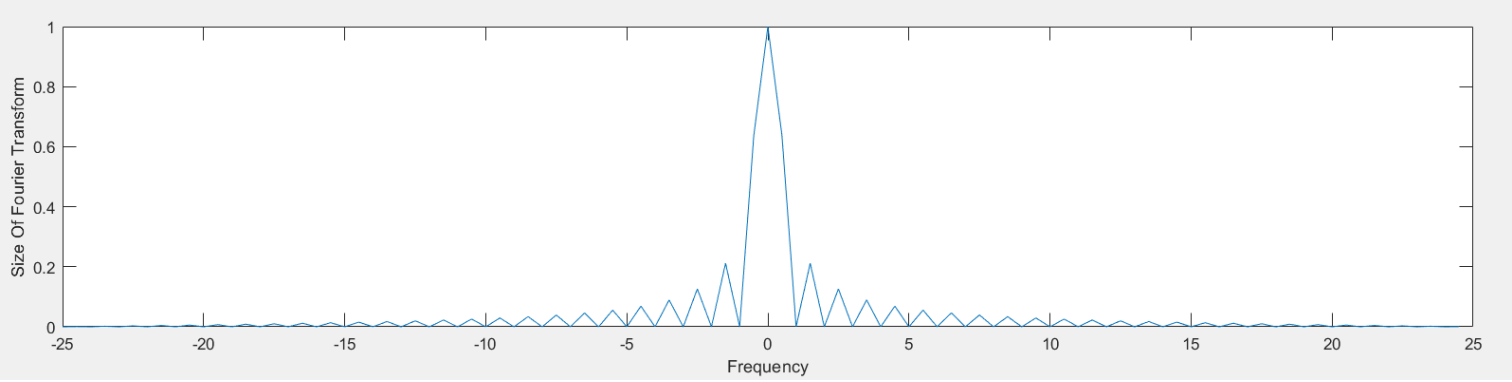
الف) رسم نمودار سیگنال $x_2(t)$:

```
%1-2
tstart=-1;
tend=1;
fs=50;
ts=1/fs;

t=tstart:ts:tend-ts;
N=length(t);
x2=rectangularPulse(-1/2, 1/2, t);
subplot(2, 1, 1)
plot(t, x2)
xlabel 't'
ylabel 'x(t)'
```



ب) رسم نمودار اندازه تبدیل فوریه سیگنال $x_2(t)$:

```
subplot(2, 1, 2)
freq=-fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
x2f=fftshift(fft(x2));
z2f=abs(x2f)/max(abs(x2f));
plot(freq, z2f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
%%
```



ج) محاسبه تبدیل فوریه پیوسته $x_2(t)$ به شکل تئوری :

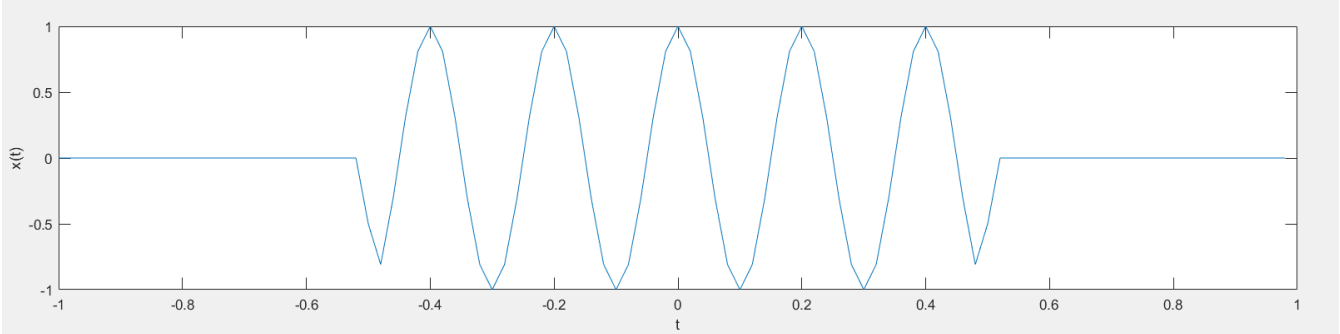
$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t}dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}}{j\omega} = \frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}$$

```
%1-3
tstart=-1;
tend=1;
fs=50;
ts=1/fs;

t=tstart:ts:tend-ts;
N=length(t);
x3=cos(2*pi*5*t).*rectangularPulse(-1/2, 1/2, t);
subplot(2, 1, 1)
plot(t, x3)
xlabel 't'
ylabel 'x(t)'
```

تمرین ۱-۳ :

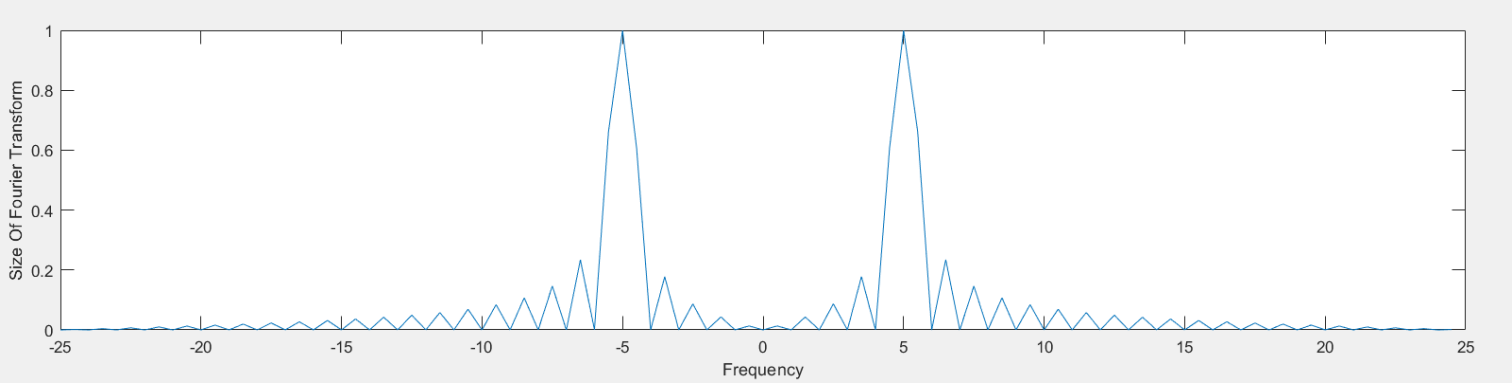
الف) رسم نمودار سیگنال

$$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) = \cos(10\pi t)\Pi(t) :$$



ب) رسم نمودار اندازه تبدیل فوریه سیگنال $x_3(t)$:

```
subplot(2, 1, 2)
freq=-fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
x3f=fftshift(fft(x3));
z3f=abs(x3f)/max(abs(x3f));
plot(freq, z3f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
```



ج) محاسبه تبدیل فوریه پیوسته سیگنال $x_3(t)$ به شکل تئوری :

با توجه به خواص تبدیل فوریه می‌دانیم تبدیل فوریه، ضرب دو تابع را به کانولوشون آن دو تابع تبدیل می‌کند :

$$\hat{x}_3(\omega) = \mathcal{F}\{x_3(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}\{x_1(t)\} * \mathcal{F}\{x_2(t)\}) = \frac{1}{2\pi}\hat{x}_1(\omega) * \hat{x}_2(\omega)$$

از طرفی در دو سؤال قبلی مقادیر $\hat{x}_1(\omega)$ و $\hat{x}_2(\omega)$ محاسبه شده است و داریم :

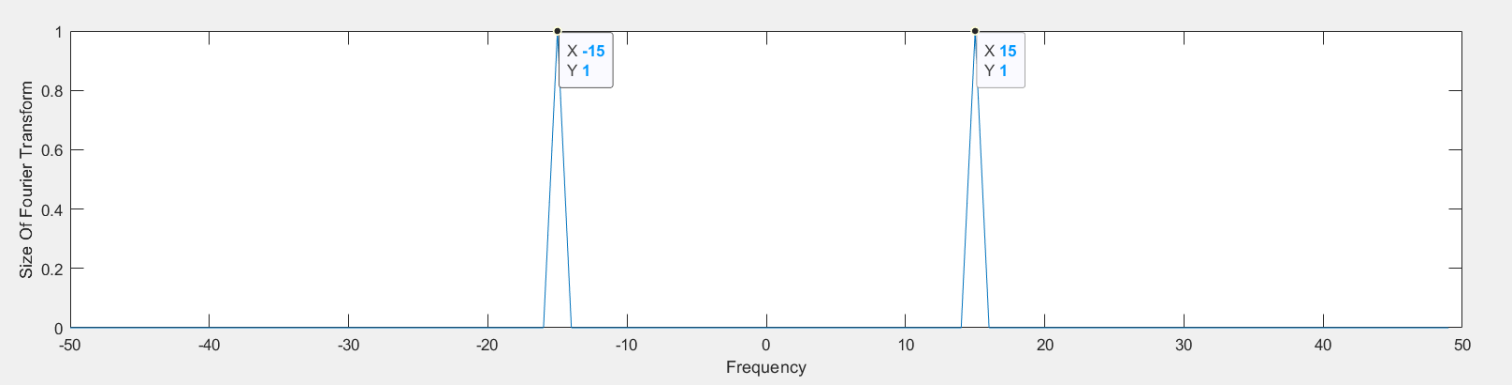
$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_1(\omega) &= \pi\big(\delta(\omega-10\pi)+\delta(\omega+10\pi)\big)\\ \hat{x}_2(\omega) &= \frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \hat{x}_3(\omega) = \frac{2\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\delta(\tau-\omega-10\pi)+\delta(\tau-\omega+10\pi)\big)\frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\tau}d\tau$$

$$\Longrightarrow \hat{x}_3(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}+5\pi\right)}{\omega+10\pi} + \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}-5\pi\right)}{\omega-10\pi} = \frac{2\omega\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{100\pi^2-\omega^2}$$

تمرین ۱-۴ :

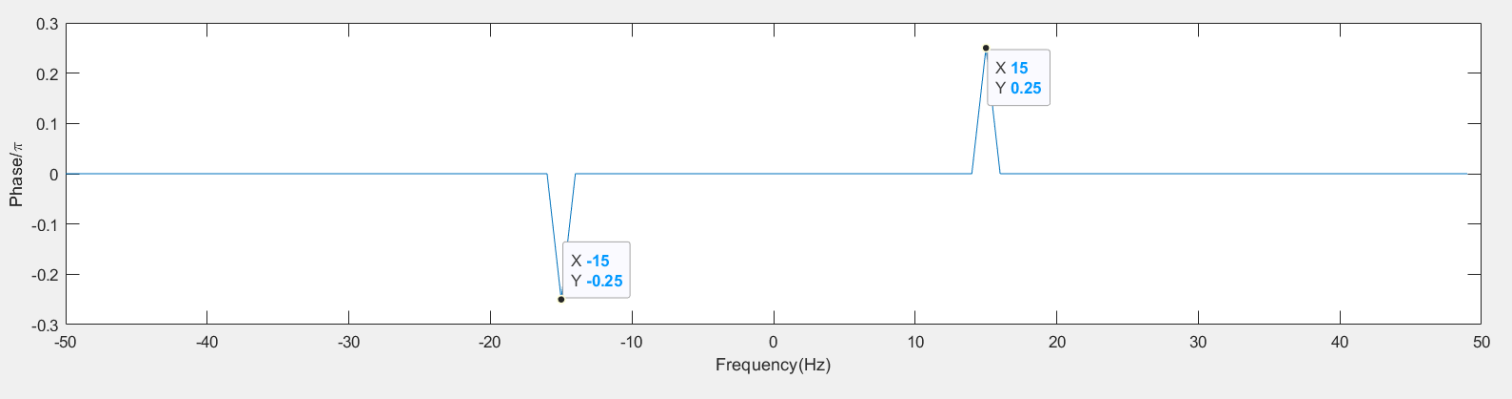
الف) رسم نمودار اندازه تبدیل فوریه سیگنال $x_4(t) = \cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$:

```
%1-4
tstart=0;
tend=1;
fs=100;
ts=1/fs;

t=tstart:ts:tend-ts;
N=length(t);
freq=-fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
x4=cos(2*pi*15*t+pi/4);
x4f=fftshift(fft(x4));
z4f=abs(x4f)/max(abs(x4f));
subplot(2, 1, 1)
plot(freq, z4f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
```



ب) رسم نمودار فاز تبدیل فوریه $x_4(t)$:

```
subplot(2, 1, 2)
tol=6;
x4f(abs(x4f)<tol)=0;
theta=angle(x4f);
plot(freq, theta/pi)
xlabel 'Frequency(Hz)'
ylabel 'Phase/\pi'
```



ج) محاسبه تبدیل فوریه $x_4(t)$ به صورت تئوری :

از آن جایی که سیگنال $x_4(t) = \cos(30\pi t + \frac{\pi}{4})$ یک سیگنال متناوب است، پس تبدیل فوریه آن از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\hat{x}(\omega) = \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k)$$

که a_k ضرایب سری فوریه $x_4(t)$ هستند. از طرفی می‌دانیم سری فوریه $x_4(t)$ به شکل زیر است :

$$x_4(t) = \frac{1}{2}e^{j(30\pi t+\frac{\pi}{4})} + \frac{1}{2}e^{-j(30\pi t+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}(e^{\frac{j\pi}{4}}e^{j(30\pi t)} + e^{\frac{-j\pi}{4}}e^{-j(30\pi t)})$$

هم چنین می‌دانیم $\omega = 2\pi f$ پس داریم :

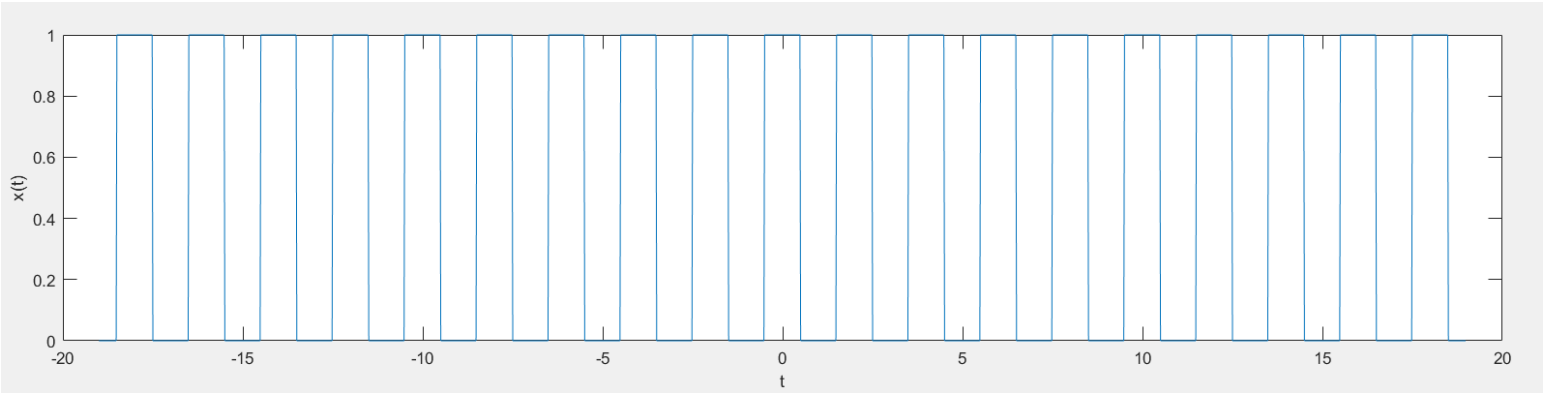
$$2\pi f_1 = 30\pi \Longrightarrow f_1 = 15, 2\pi f_2 = -30\pi \Longrightarrow f_2 = -15$$

پس تبدیل فوریه $x_1(t)$ برابر است با : $\pi(\delta(\omega - 30\pi) + \delta(\omega + 30\pi))$. دقت شود چون محور افقی، به جای ω، f است، پس تبدیل فوریه بر حسب f به این صورت می‌شود : $\pi(\delta(f - 15) + \delta(f + 15))$ و چون نمودار $\frac{|\hat{x}(\omega)|}{\max(|\hat{x}(\omega)|)}$ را رسم کرده‌ایم پس مقدار بیشینه نمودار به جای π، 1 است. و فاز تابع $x_4(t)$ بنا بر تبدیل فوریه اش که در بالا محاسبه شد، در فرکانس 15 هرتز برابر $\frac{\pi}{4}$ و در فرکانس 15- هرتز برابر $-\frac{\pi}{4}$ که چون نمودار $\frac{phase}{\pi}$ را بر حسب فرکانس رسم کرده‌ایم، $\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$ به $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{4}$ تبدیل می‌شوند. مقادیری که به شکل تئوری محاسبه شده است با نمودار های رسم شده در قسمت های الف و ب تطابق دارد.

تمرین ۱-۵ :

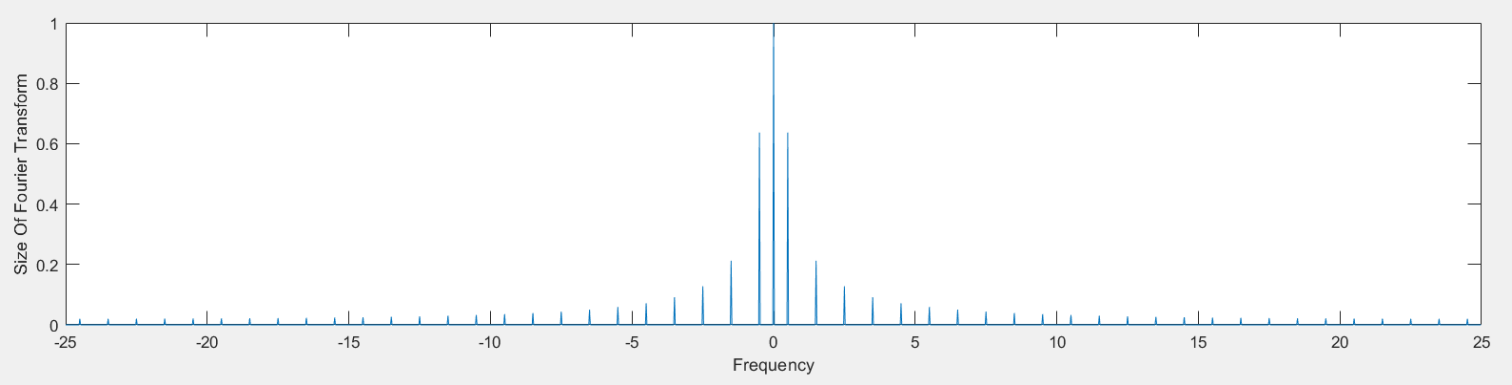
الف) رسم نمودار سیگنال $x_5(t) = \sum_{k=-9}^{k=+9} \Pi(t - 2k)$:

```
%1-5
tstart=-19;
tend=19;
fs=50;
ts=1/fs;
n=9;
t=tstart:ts:tend-ts;
N=length(t);

tmpx5=0;

for k=-n:n
    tmpx5=tmpx5+rectpuls(t-2*k);
end

x5=tmpx5;
subplot(2, 1, 1)
plot(t, x5)
xlabel 't'
ylabel 'x(t)'
```



ب) رسم نمودار اندازه تبدیل فوریه سیگنال $x_5(t)$:

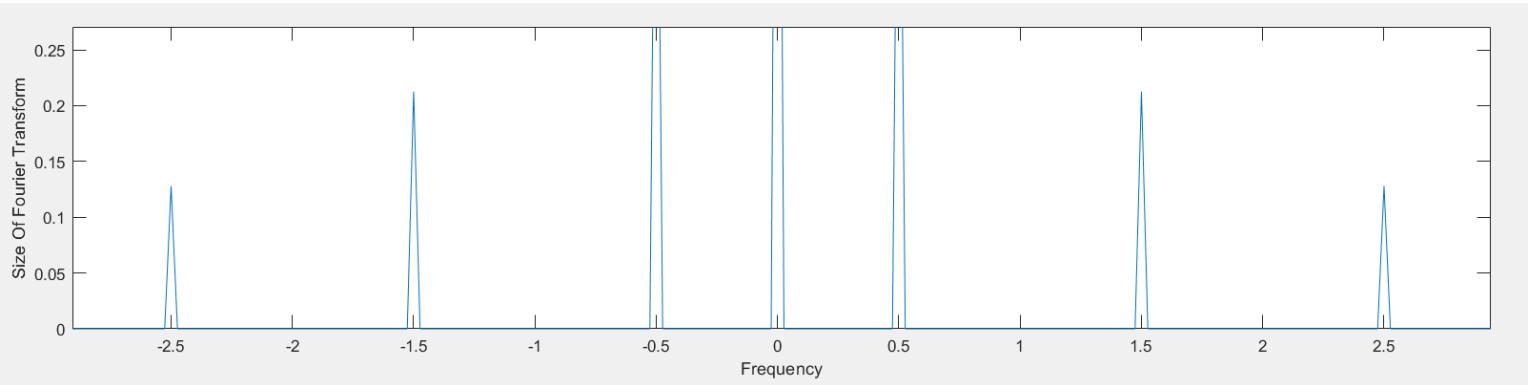
```
subplot(2, 1, 2)
freq=-fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
x5f=fftshift(fft(x5));
z5f=abs(x5f)/max(abs(x5f));
plot(freq, z5f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
```



ج)

- به این علت تعدادی ضربه در نمودار اندازه تبدیل فوریه $x_5(t)$ داریم که این سیگنال یک سیگنال متناوب است و تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب به شکل $\hat{x}(\omega) = \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k)$ است که a_k ضرایب سری فوریه سیگنالند و همان طور که می‌بینیم تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب به شکل مجموع تعدادی تابع ضربه است.

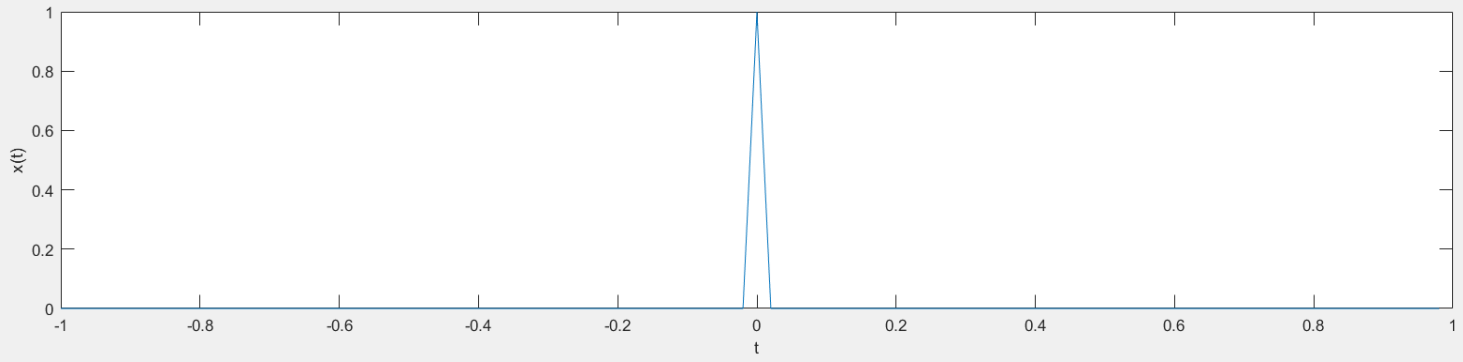
- فواصل هر ضربه طبق شکل زیر که بزرگ نمایی شده نمودار اندازه تبدیل فوریه سیگنال $x_5(t)$ است، برابر 1 است :



تمرین ۲-۱ :

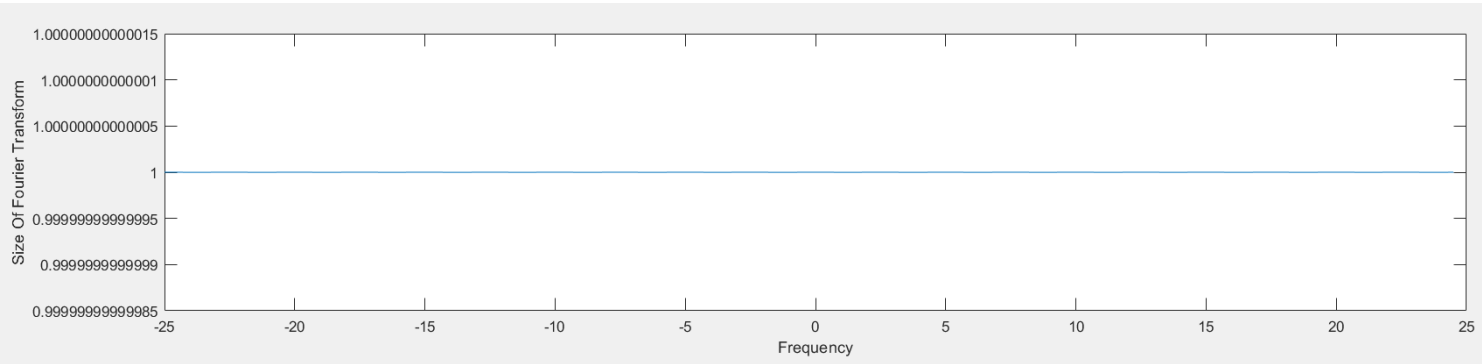
الف) رسم نمودار سیگنال $x_6(t) = \delta(t)$:

```
%2-1
tstart=-1;
tend=1;
fs=50;
ts=1/fs;

t=tstart:ts:tend-ts;
N=length(t);
x6=dirac(t)>0;
subplot(2, 1, 1)
plot(t, x6)
xlabel 't'
ylabel 'x(t)'
```



ب) رسم نمودار اندازه تبدیل فوریه سیگنال $x_6(t)$:

```
subplot(2, 1, 2)
freq=-fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
x6f=fftshift(fft(x6));
z6f=abs(x6f)/max(abs(x6f));
plot(freq, z6f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
```



ج) محاسبه تبدیل فوریه $x_6(t)$ به صورت تئوری :

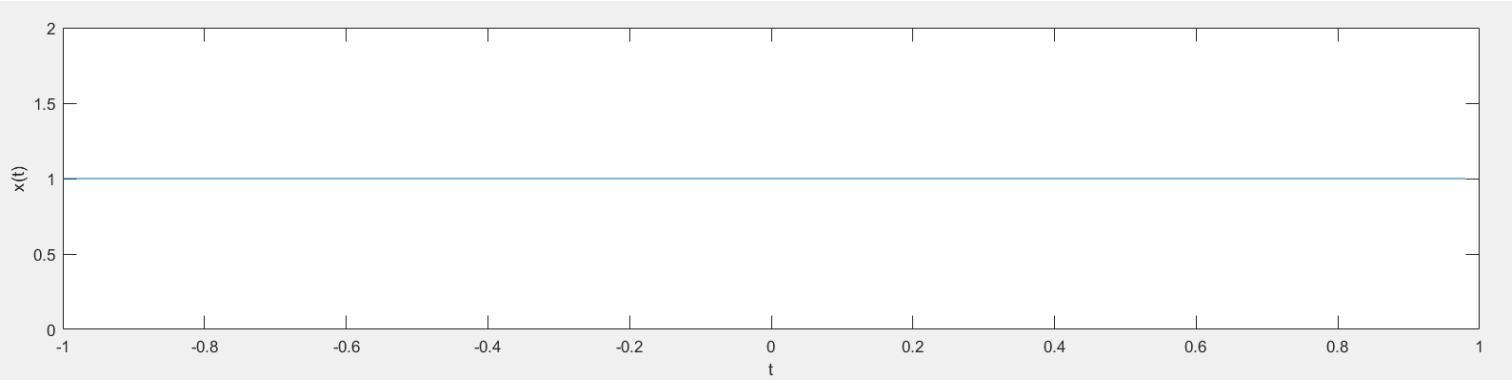
$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

با توجه به خواص تبدیل فوریه می‌دانیم هر چقدر در حوزه زمان، انبساط بیشتری داشته باشیم، در حوزه فرکانس، انقباض (فشردگی) بیشتری خواهیم و فرکانس های کمتری در ساخت تبدیل فوریه مشارکت دارند. هم چنین هر چقدر در حوزه زمان، انقباض (فشردگی) بیشتری داشته باشیم در حوزه فرکانس، انبساط بیشتری خواهیم داشت و فرکانس های بیشتری در ساخت تبدیل فوریه مشارکت می‌کنند. تابع ضربه، در یک نقطه، فشرده شده است. پس بیشترین فشردگی ممکن را دارد. پس در حوزه فرکانس برای توصیف تابع ضربه به بیشترین انبساط نیاز داریم به همین علت تمامی فرکانس‌ها در ساخت تبدیل فوریه تابع ضربه مشارکت می‌کنند و تبدیل فوریه آن مقدار ثابت ۱ را دارد.

تمرین ۲-۲ :

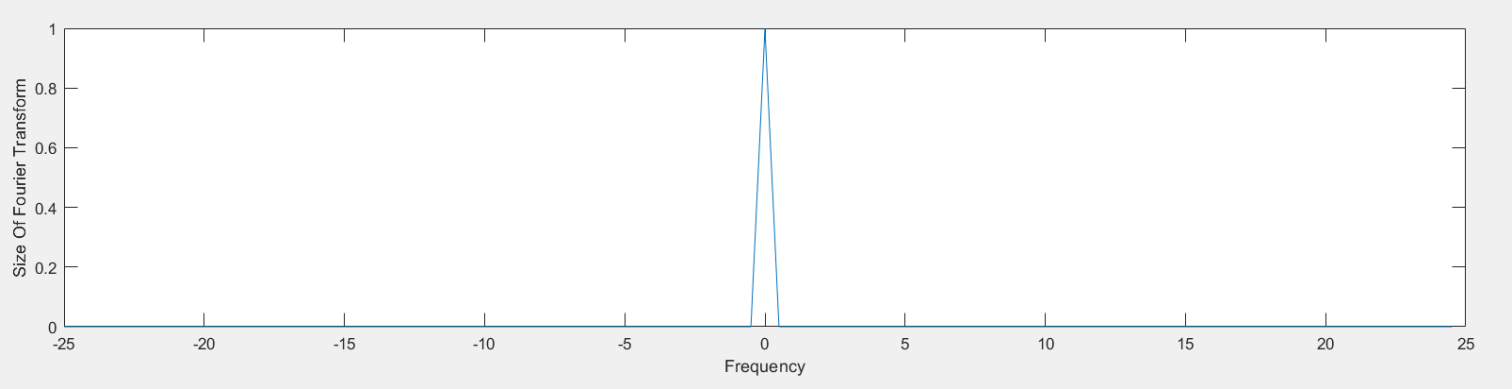
الف) رسم نمودار سیگنال $x_7(t) = 1$:

```
%2-2
tstart=-1;
tend=1;
fs=50;
ts=1/fs;

t=tstart:ts:tend-ts;
N=length(t);
x7=ones(1, N);
subplot(2, 1, 1)
plot(t, x7)
xlabel 't'
ylabel 'x(t)'
```



ب) رسم نمودار اندازه تبدیل فوریه سیگنال $x_7(t)$:

```
subplot(2, 1, 2)
freq=-fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
x7f=fftshift(fft(x7));
z7f=abs(x7f)/max(abs(x7f));
plot(freq, z7f)
xlabel 'Frequency'
ylabel 'Size Of Fourier Transform'
```



ج) محاسبه تبدیل فوریه $x_7(t)$ به صورت تئوری :

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{-j\omega t}dt$$

در سؤال قبل محاسبه کردیم که تبدیل فوریه تابع ضربه برابر ۱ می‌شود پس می‌توان نوشت :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Longrightarrow \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{j\omega t}d\omega \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}d\omega = 2\pi\delta(t)$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}dt = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$ (چون تابع ضربه یک تابع زوج است!)

با توجه به خواص تبدیل فوریه می‌دانیم هر چقدر در حوزه زمان، انبساط بیشتری داشته باشیم، در حوزه فرکانس، انقباض (فشردگی) بیشتری خواهیم و فرکانس‌های کمتری در ساخت تبدیل فوریه مشارکت دارند. هم چنین هر چقدر در حوزه زمان، انقباض (فشردگی) بیشتری داشته باشیم در حوزه فرکانس، انبساط بیشتری خواهیم داشت و فرکانس های بیشتری در ساخت تبدیل فوریه مشارکت می‌کنند. تابع ثابت $x_7(t) = 1$، یک تابع با بیشترین انبساط ممکن است. پس در حوزه فرکانس برای توصیف این تابع به کمترین انبساط نیاز داریم به همین علت کافی است یک فرکانس در ساخت تبدیل فوریه مشارکت کند و در نتیجه تبدیل فوریه آن برابر تابع ضربه می‌شود.

تمرین ۳-۱ :

درست کردن سلول $Mapset$ با استفاده از کد مقابل:

```
%3-1
charactersCount=32;
characters=['a':'z' ' ' '.' ',' '!' ';' '"'];
Mapset=cell(2, charactersCount);
for i=0:charactersCount-1
    Mapset{1, i+1}=characters(i+1);
    Mapset{2, i+1}=dec2bin(i, 5);
end
```

تمرین ۳-۲ :

کد مربوط به تابع $coding\_amp$ در صفحه بعد آورده شده است ولی ورودی ها و خروجی هایش تغییراتی نسبت به آن چه در صورت پروژه گفته شده دارد که در ادامه به توضیح این تغییرات می‌پردازیم:

- به ورودی ها $Mapset$، $noisePower$ و پرچم $test$ هم اضافه شده اند که :
- از $Mapset$ برای تشخیص کد باینری هر کاراکتر استفاده می‌شود. (می‌توانستیم از $Mapset$ به شکل سراسری هم استفاده کنیم ولی طبق هشدار خود متلب و قواعد برنامه‌نویسی بهتر است از متغیر های سراسری استفاده نشود. به همین خاطر آن را به تابع پاس می‌دهیم.)
- اضافه کردن $nosiePower$ به ورودی‌ها به این علت بود که در قسمت های بعدی که می‌خواهیم سیگنال کد شده را $noisy$ کنیم، خود تابع $coidng\_amp$ این کار را برای ما انجام دهد و وقتی نمی‌خواهیم سیگنال کد شده را $noisy$ کنیم، کافی است $noisePower$ را صفر کنیم.
- اضافه کردن $test$ هم به این خاطر است که وقتی می‌خواهیم در بخش های بعدی آستانه وارایانس را به دست آوردیم، صد بار آزمایش می‌کنیم و خب در این صد بار نمی‌خواهیم نموداری بکشیم و با این پرچم به تابع اطلاع می‌دهیم که نمودار را بکشد یا خیر.
- به خروجی‌ها طول پیام و این که تعداد بیت های استفاده شده در پیام کد شده به سرعت ارسال بیت ها در هر ثانیه بخش پذیر است یا خیر اضافه شده است که از این دو ویژگی برای تشخیص پیام کد شده در تابع $decoding\_amp$ به ازای هر سرعت ارسال بیت دلخواهی استفاده می‌شود.(برای آن که تابع $decoding\_amp$ به درستی پیام را تشخیص دهد به طول پیام نیاز دارد از طرفی در هنگام کد کردن پیام چون در هر ثانیه تعداد بیت های ارسالی مقدار گسسته دارند، ممکن است تعداد بیت های تشکیل دهنده پیام به ۵ بخش پذیر نباشد. به عنوان مثال اگر همین کلمه $signal$ پیام باشد. میدانیم با ۳۰ بیت کد می‌شود ولی اگر مثلا سرعت ارسال بیت‌ها ۱۳ بیت در هر ثانیه باشد، برای کد کردن آن از ۳۹ بیت استفاده می‌کنیم. حال در تابع $decoding\_amp$ برای تشخیص پیام به طول آن احتیاج داریم که اگر ۳۹ را به ۵ تقسیم کنیم، به طول اشتباهی می‌رسیم! به همین خاطر طول پیام ارسالی را در اینجا خروجی می‌دهیم و در تابع $decoding\_amp$ از آن استفاده می‌کنیم.)

شیوه کد کردن پیام: با توجه به توضیحاتی که در مقدمه سوم آورده شده است، تابعی که پیام را کد می‌کند به شکل زیر است:

$$\sum_{i=0}^{tend} \frac{bin2dec(bits)}{2^{bitRate}-1} \sin(2\pi t)\,[u(t-i)-u(t-i-1)]$$

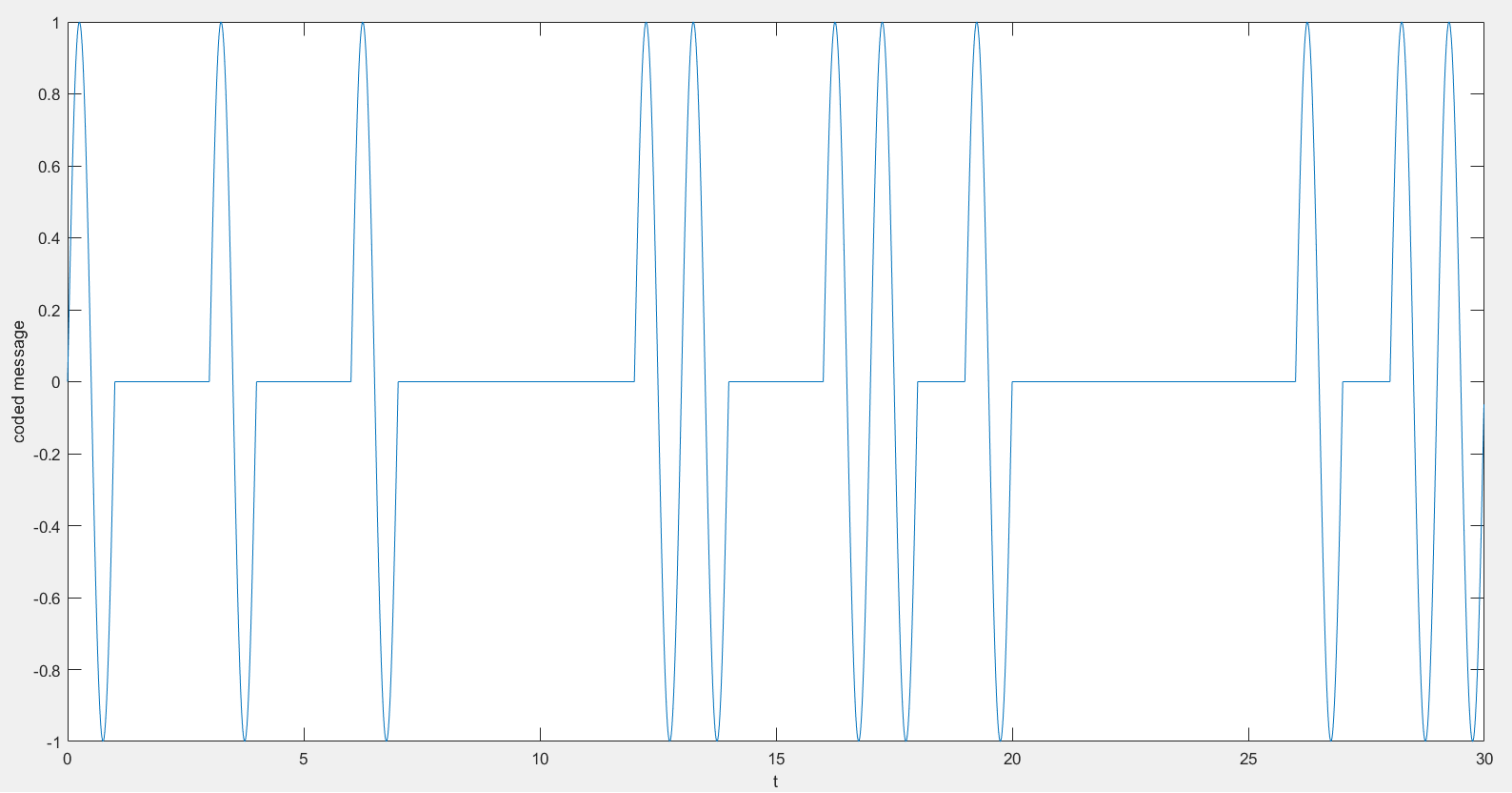
$$tend = \left\lceil \frac{totalBits}{bitRate} \right\rceil$$

که $bits$ در هر ثانیه روی ۵ بیت از تعداد بیت های تشکیل دهنده پیام کد شده جلو می‌رود. خطوط ۳۳ تا ۴۰ کد صفحه بعد پیاده سازی این تابع در متلب است.

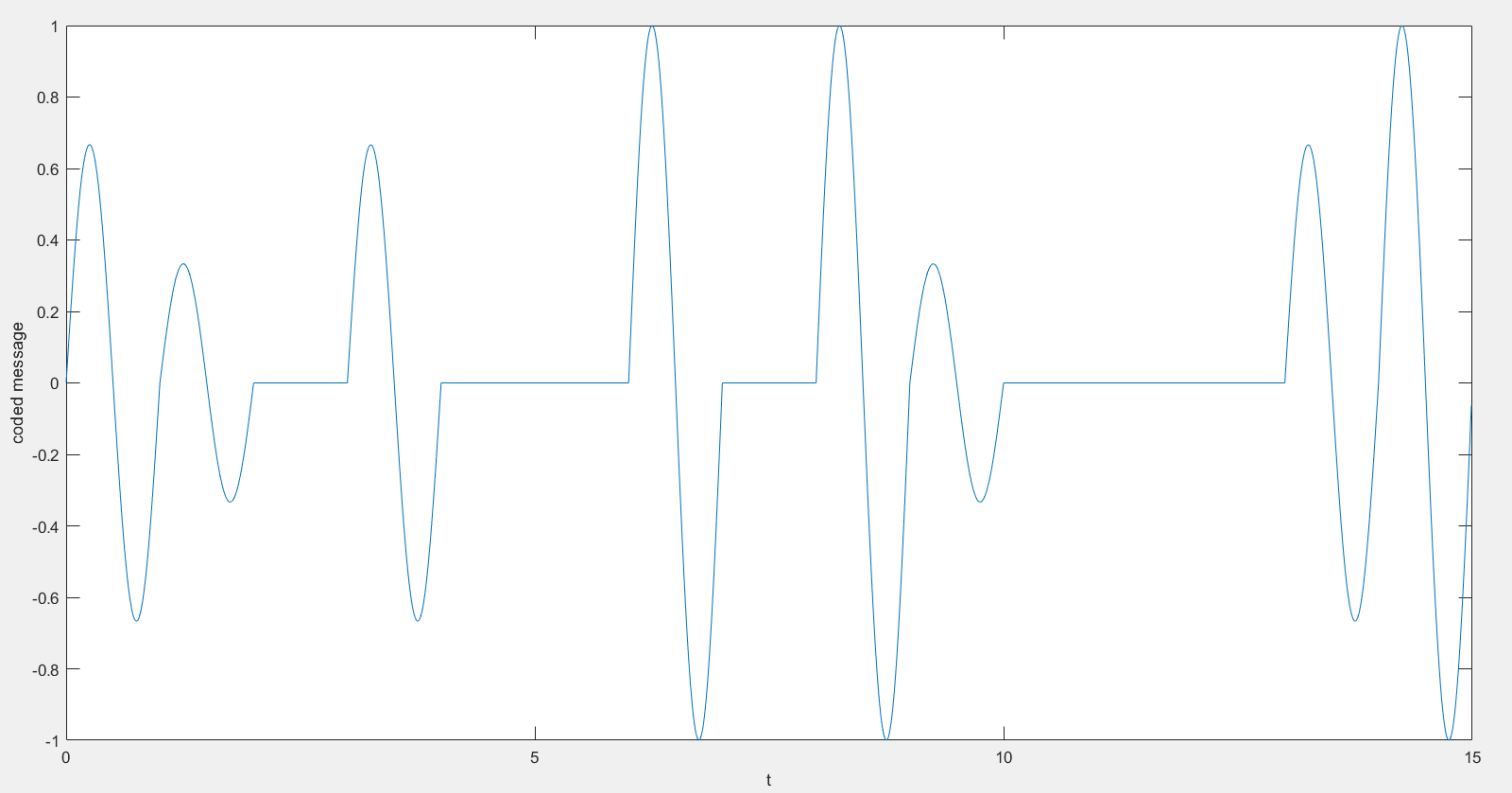
```
function [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength] = coding_amp(message, bitRate, Mapset, noisePower, test)
    charactersCount = 32;
    messageLength = strlength(message);
    totalBitsCount = 5*messageLength;

    if rem(totalBitsCount, bitRate)==0
        divisibleByBitRate=true;
    else
        divisibleByBitRate=false;
    end

    charactersToBits = strings(1, messageLength);
    signalsCount = 2^bitRate;

    for i=1:messageLength
        for j=1:charactersCount
            if message(i) == Mapset{1, j}
                charactersToBits(i) = Mapset(2, j);
                break;
            end
        end
    end

    charactersToBits=join(charactersToBits, '');
    charactersToBits=char(charactersToBits);
    tstart=0;
    tend=ceil(totalBitsCount/bitRate);
    fs=100;
    ts=1/fs;
    t=tstart:ts:tend-ts;

    codedMessage=0;
    for i=0:tend-1
        if (i+1)*bitRate<=totalBitsCount
            bits=charactersToBits(i*bitRate+1:(i+1)*bitRate);
        else
            bits = charactersToBits(i*bitRate+1:totalBitsCount);
        end
        codedMessage=codedMessage+(bin2dec(bits)/(signalsCount-1))*sin(2*pi*t).*(heaviside(t-i)-heaviside(t-i-1));
    end

    codedMessage=codedMessage+noisePower*randn(1, length(codedMessage));

    if ~test
        plot(t, codedMessage)
        xlabel 't'
        ylabel 'coded message'
    end

end
```

تمرین ۳-۳ :

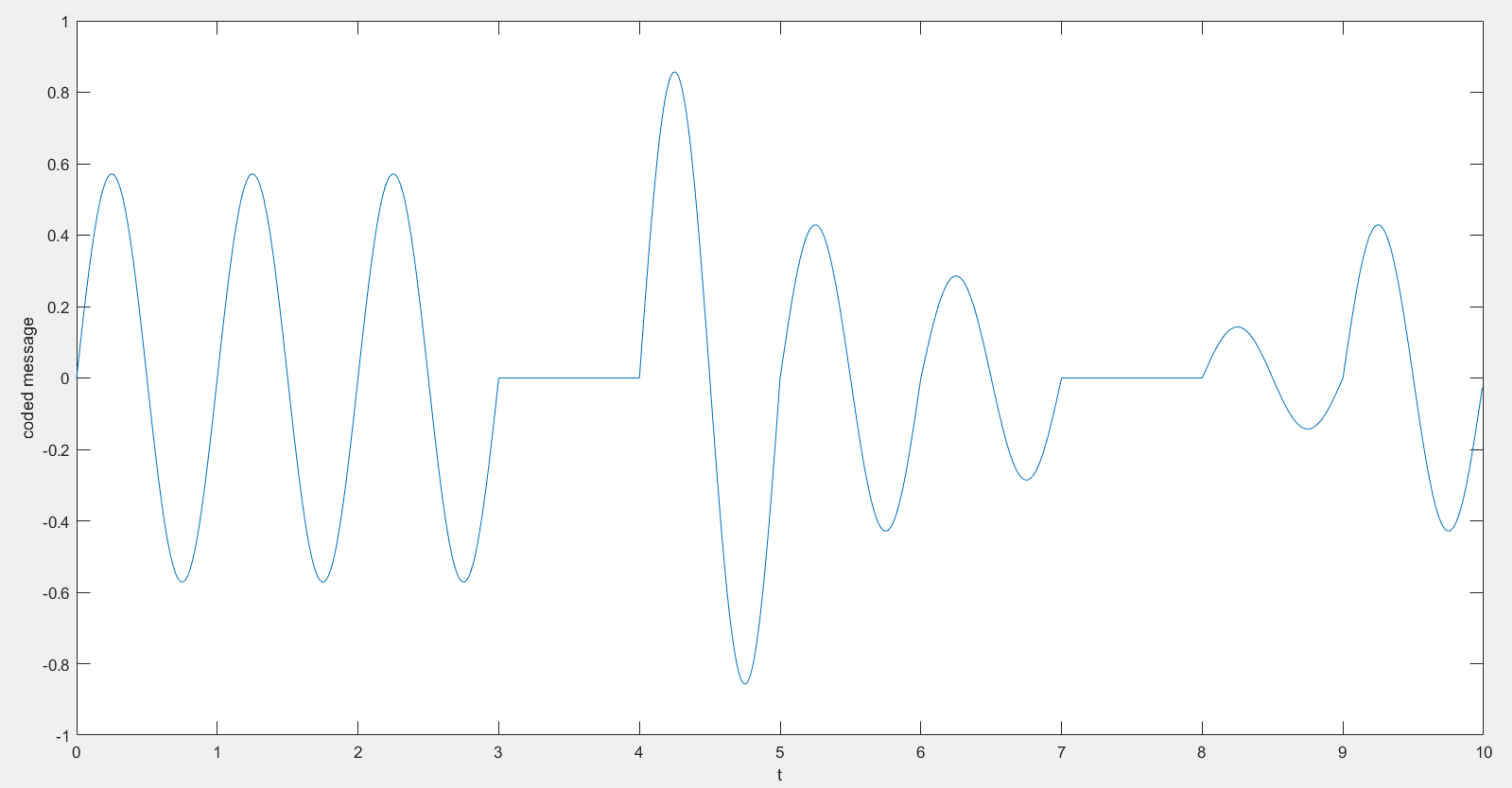
خروجی تابع $coding\_amp$ برای کلمه $signal$ با سرعت ارسال اطلاعات یک بیت بر ثانیه :



خروجی تابع $coding\_amp$ برای کلمه $signal$ با سرعت ارسال اطلاعات دو بیت بر ثانیه :



خروجی تابع $coding\_amp$ برای کلمه $signal$ با سرعت اطلاعات سه بیت بر ثانیه :



تمرین ۳-۴ :

کد مربوط به تابع $decoding\_amp$ در ۳ صفحه بعدی آورده شده است ولی ورودی ها تغییراتی نسبت به آن چه در صورت پروژه گفته شده دارد که به توضیح این تغییرات می‌پردازیم:

- به ورودی‌ها $Mapset$، $divisibleByBitRate$، $messageLength$ و $noisePower$ اضافه شده است. که مشابه با توضیحاتی که در تمرین ۳-۲ آورده شده است، اضافه شدن $messageLength$ و $divisibleByBitRate$ برای این است که بتوانیم سرعت ارسال بیت در ثانیه دلخواه داشته باشیم.
- اضافه کردن $Mapset$ برای تشخیص پیام از روی بیت هاست.
- اضافه کردن $noisePower$ برای این است که بدانیم پیام $noise$ دارد یا خیر. چون در ازای $noise$ داشتن یا نداشتن پیام تعریف threshold فرق می‌کند.

```
function decodedMessage = decoding_amp(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower)
    fs=100;
    tend=length(codedMessage)/fs;
    tstart=0;
    ts=1/fs;
    t=tstart:ts:tend-ts;
    coefficientsCount=2^bitRate;
    charactersCount=32;

    xt=2*sin(2*pi*t);

    product=codedMessage.*xt;
    correlationResults=zeros(1, tend);

    for i=1:tend
        correlationResults(i)=0.01*sum(product(((i-1)*fs)+1:i*fs));
    end

    coefficients=zeros(1, coefficientsCount);

    for i=0:coefficientsCount-1
        coefficients(i+1)=i/(coefficientsCount-1);
    end

    messageBits=strings(1, tend);
    decodedMessage=strings(1, messageLength);
```

```
if noisePower==0
   treshold=1/(((2^bitRate)-1)*2);
   for i=1:tend
        for j=1:coefficientsCount
            if abs(correlationResults(i)-coefficients(j))<treshold
                if ~divisibleByBitRate && i==tend
                    messageBits(i)=dec2bin(j-1, 5*messageLength-bitRate*(i-1));
                else
                    messageBits(i)=dec2bin(j-1, bitRate);
                end
                break;
            end
        end
    end
else
    for i=1:tend
        diff=1000;
        isEmpty=true;
        for j=1:coefficientsCount-1
            tmpdiff1=abs(correlationResults(i)-coefficients(j));
            tmpdiff2=abs(correlationResults(i)-coefficients(j+1));
            if tmpdiff2<tmpdiff1 && tmpdiff2<diff
                default=j;
                diff=tmpdiff2;
            end
            if tmpdiff1<tmpdiff2 && tmpdiff1<diff
                default=j-1;
                diff=tmpdiff1;
            end
            treshold=(coefficients(j)+coefficients(j+1))/2;
            if correlationResults(i)>=coefficients(j) && correlationResults(i)<=treshold
                if ~divisibleByBitRate && i==tend
                    messageBits(i)=dec2bin(j-1, 5*messageLength-bitRate*(i-1));
                else
                    messageBits(i)=dec2bin(j-1, bitRate);
                end
                isEmpty=false;
                break;
            end
            if correlationResults(i)<=coefficients(j+1) && correlationResults(i)>treshold
                if ~divisibleByBitRate && i==tend
                    messageBits(i)=dec2bin(j, 5*messageLength-bitRate*(i-1));
                else
                    messageBits(i)=dec2bin(j, bitRate);
                end
                isEmpty=false;
                break;
            end
        end
        if isEmpty
            if ~divisibleByBitRate && i==tend
                messageBits(i)=dec2bin(default, 5*messageLength-bitRate*(i-1));
            else
                messageBits(i)=dec2bin(default, bitRate);
            end
        end
    end
end
```

```
    messageBits=join(messageBits, '');
    messageBits=char(messageBits);

    for i=1:messageLength
        for j=1:charactersCount
            if Mapset{2, j} == messageBits((i-1)*5+1:(i*5))
                decodedMessage(i)=Mapset{1, j};
                break;
            end
        end
    end

end
```

خروجی تابع به ازای هر سه سرعت یک، دو و سه بیت بر ثانیه یکسان و صحیح بود:

- $bitRate = 1$

```
bitRate=1;
noisePower=0;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength]=coding_amp(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    decodedMessage = decoding_amp(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %d\n', accuracyRate);
end
```

Command Window

```
decoded message is:
signal
>>
```

- $bitRate = 2$

```
bitRate=2;
noisePower=0;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength]=coding_amp(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    decodedMessage = decoding_amp(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %d\n', accuracyRate);
end
```

Command Window

```
decoded message is:
signal
fx >>
```

- $bitRate = 3$

```
bitRate=3;
noisePower=0;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength]=coding_amp(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    decodedMessage = decoding_amp(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %d\n', accuracyRate);
end
```

Command Window

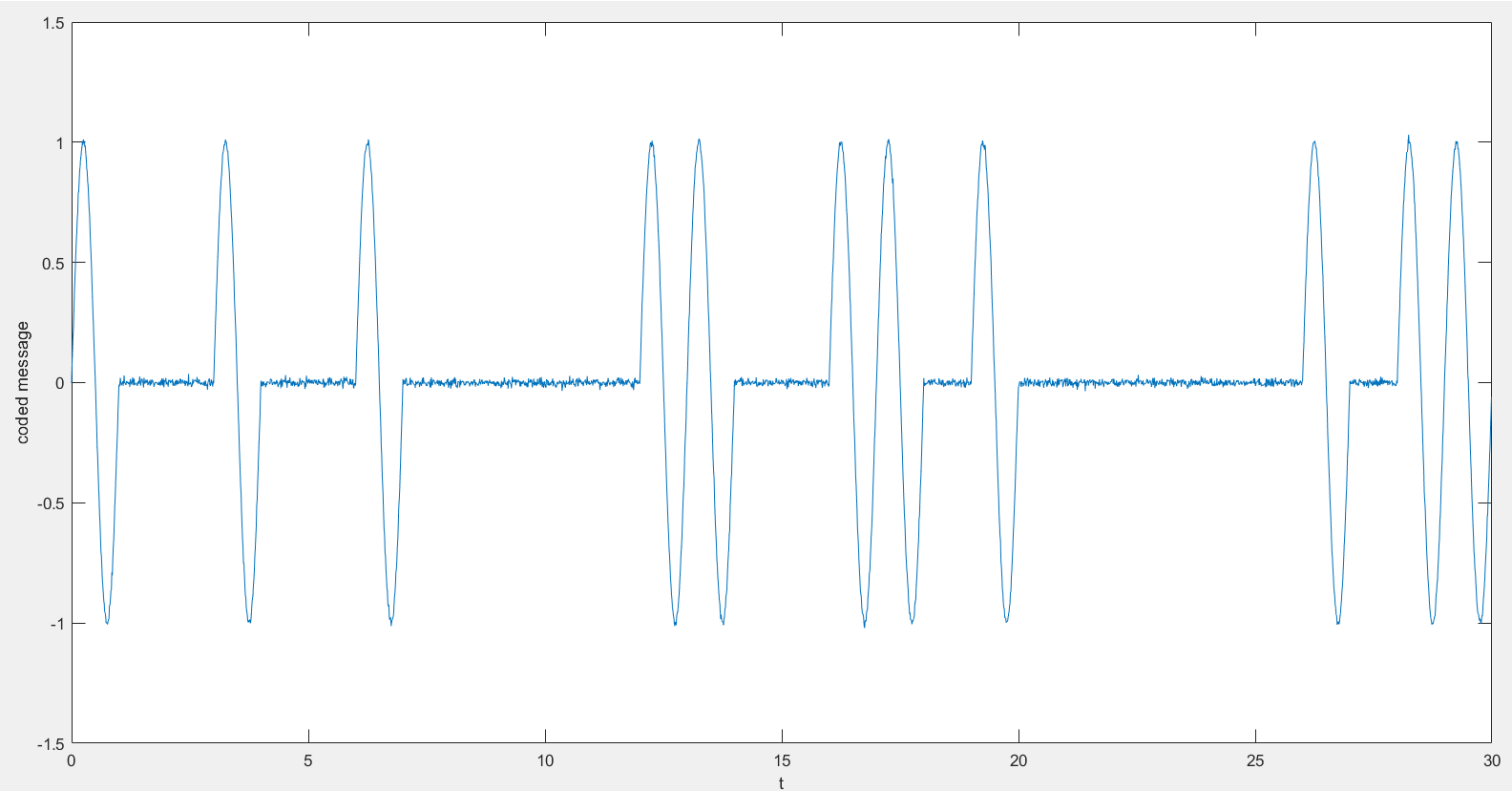
```
decoded message is:
signal
fx >>
```

تمرین ۲-۵ :

اضافه کردن نویز گوسی با واریانس 0.0001 و میانگین 0 به ازای سرعت ارسال بیت در ثانیه:

- $bitRate = 1$

```
bitRate=1;
noisePower=0.01;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength]=coding_amp(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    decodedMessage = decoding_amp(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %d\n', accuracyRate);
end
```

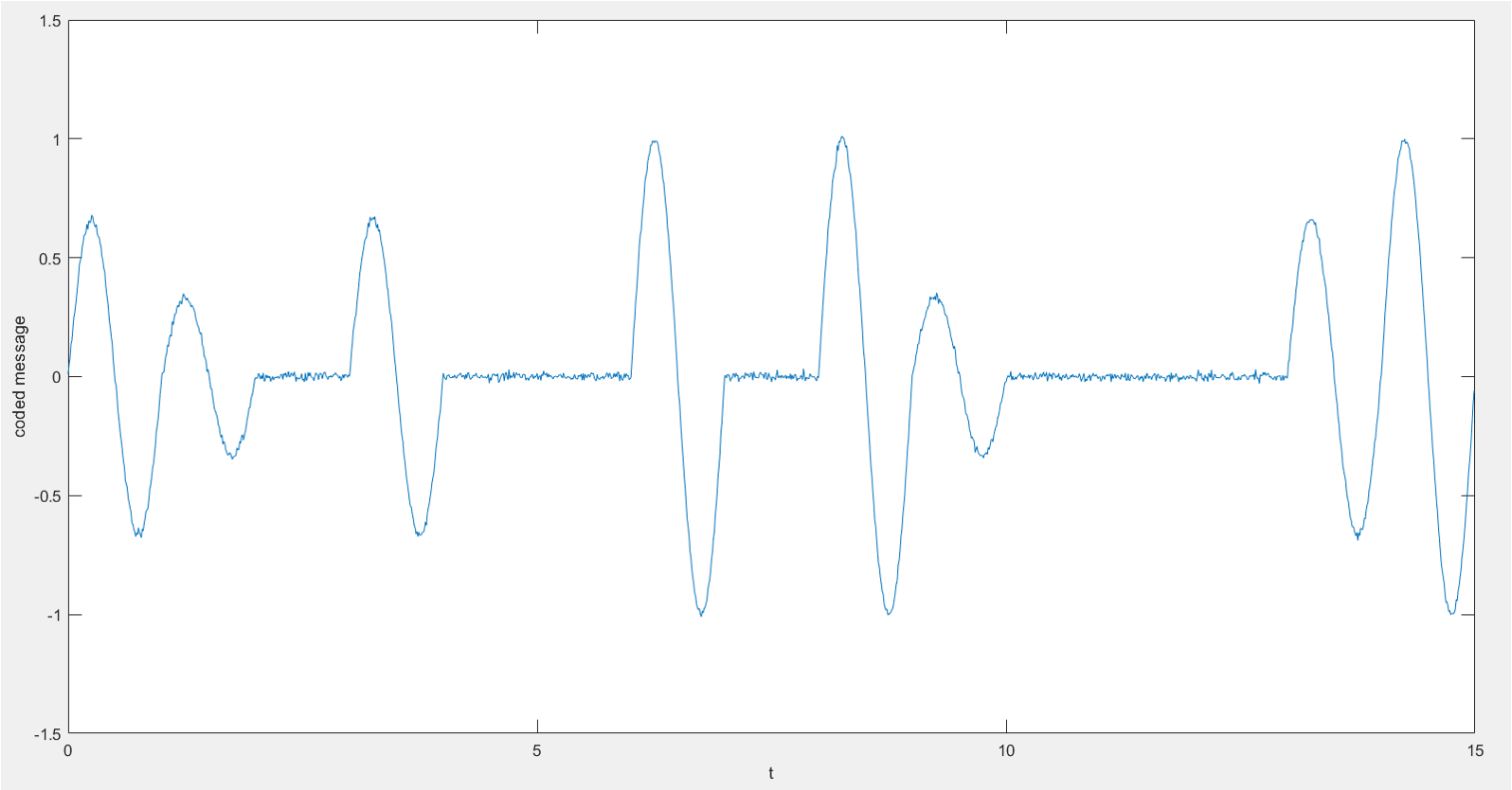


Command Window

```
decoded message is:
signal
>>
```

- $bitRate = 2$

```
bitRate=2;
noisePower=0.01;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength]=coding_amp(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    decodedMessage = decoding_amp(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %d\n', accuracyRate);
end
```

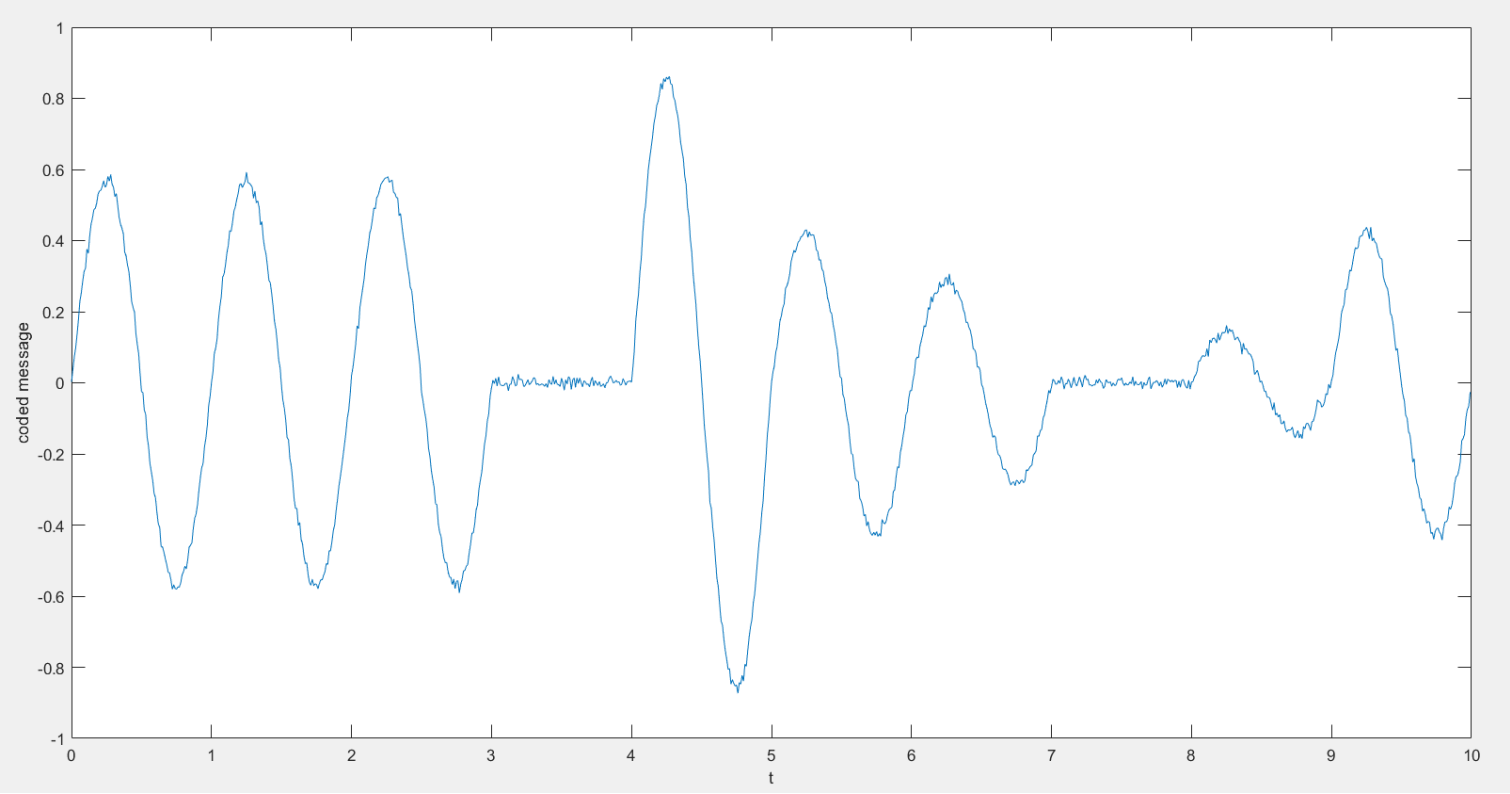


Command Window

```
decoded message is:
signal
>>
```

- $bitRate = 3$

```
bitRate=3;
noisePower=0.01;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength]=coding_amp(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    decodedMessage = decoding_amp(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %d\n', accuracyRate);
end
```



Command Window

```
decoded message is:
signal
>>
```

تمرین ۲-۶ :

نحوه به دست آوردن مقدار بیشترین واریانس : در این قسمت به ازای یک مقدار $noise$، ۱۰۰ بار کد را اجرا می‌کنیم تا ببینیم در این ۱۰۰ بار، چند بار پیام را به درستی تشخیص می‌دهد. ابتدا با یک $noise$ کم شروع به آزمایش کردیم و در ادامه مقدار $noise$ را زیاد کردیم تا وقتی که در ۱۰۰ بار اجرای کد، حداقل یک بار پیام به اشتباه تشخیص داده شد. این که در هر ۱۰۰ بار آزمایش چند بار پیام به اشتباه تشخیص داده می‌شود، توسط تابع $calc\_accuracy$ انجام می‌شود و برای اجرای ۱۰۰ بار آزمایش همان طور که پیش‌تر در تمرین ۳-۲ اشاره شد، کافی است در ابتدای کد، پرچم $test$ را $true$ کنیم :

```
bitRate=1;
noisePower=0;
message='signal';
test=true;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength]=coding_amp(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    decodedMessage = decoding_amp(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %d\n', accuracyRate);
end
```

```
function accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test)
    mistakesCount=0;
    for i=1:100
        [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength]=coding_amp(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
        decodedMessage = decoding_amp(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower);
        decodedMessage=join(decodedMessage, '');
        decodedMessage=char(decodedMessage);
        if decodedMessage~=message
            mistakesCount=mistakesCount+1;
        end
    end
    accuracyRate=(100-mistakesCount);
end
```

برای $bitRat = 1$ در $noisePower = 2.5$ به اولین جایی رسیدیم که $accuracy \neq 100$ بود. (کد را به شکل دستی اجرا کردیم و در هر مرحله با شروع از $noisePower = 0$، $nosiePower$ را 0.1 زیاد کردیم. به علت زیاد بودن تعداد مراحل، عکس آن ها را در گزارش نمی‌آوریم و اگر مایل بودید، خودتان می‌توانید تست کنید 😊) در ادامه $accuracy$ را به ازای همین $noisePower = 2.5$ برای $bitRate$ های متفاوت به دست می آوریم تا نشان دهیم، هر چه سرعت ارسال بیت ها کمتر باشد، مقاومت نسبت به $noise$ بیشتر خواهد بود و سرعت های بیشتر، $accuracy$ کمتری دارند. هم چنین برای به دست آوردن مقدار بیشترین واریانس در دیگر سرعت ها از همین روش استفاده می‌کنیم. یعنی با شروع از $noisePower = 0$، $nosiePower$ را در هر مرحله 0.1 زیاد می‌کنیم تا به $accuracy$ کمتر از ۱۰۰ برسیم. دقت شود عددی که به عنوان بیشترین واریانس اعلام می‌شود تقریبی است و در آزمایش های متفاوت ممکن است به اعداد دیگری برسیم ولی با تقریب خوبی در همین حدود است.

```
Command Window
  noise power = 2.50
  bit rate = 1
  accuracy = 99
fx >>
```

```
Command Window
  noise power = 2.50
  bit rate = 2
  accuracy = 81
fx >>
```

```
Command Window
  noise power = 2.50
  bit rate = 3
  accuracy = 47
fx >>
```

مطابق انتظار در سرعت های بالاتر، $accuracy$ کم‌تر می‌شود و پیام‌های بیشتری اشتباه تشخیص داده می‌شوند.

در ادامه با استفاده از روشی که در پایین صفحه قبلی بیان شد، بیشترین واریانس ها را برای سرعت های دو و سه به دست می‌آوریم :

```
Command Window
  noise power = 1.30
  bit rate = 2
  accuracy = 97
fx >>
```

```
Command Window
  noise power = 0.40
  bit rate = 3
  accuracy = 98
fx >>
```

همان طور که مشاهده می‌شود و طبق انتظاری که با توجه به مقدمه داشتیم، $bitRate$ یک نسبت به $noise$ مقاوم تر است و نتایج به دست آمده با مقدمه همخوانی دارند. یعنی هر چه $bitRate$ افزایش یابد، مقاومت نسبت به $noise$ کمتر خواهد شد.

تمرین ۳-۷ :

با توجه به محاسبات و نتایج به دست آمده از تمرین ۳-۶ می‌توان گفت بیشترین واریانس نویز برای هر $bitRate$ به شکل زیر است:

$$for\ bitRate = 1 :\ \sigma_{max} \cong 2.5 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 = (2.5)^2 \cong 6.25$$

$$for\ bitRate = 2 :\ \sigma_{max} \cong 1.3 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 \cong (1.3)^2 \cong 1.69$$

$$for\ bitRate = 3 :\ \sigma_{max} \cong 0.4 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 \cong (0.4)^2 \cong 0.16$$

تمرین ۳-۸ :

اگر قدرت فرستنده بیشتر بود، می‌توانستیم دامنه سیگنال بیشتری داشته باشیم. در نتیجه فاصله $tresold$ هایی که برای تصمیم‌گیری در نظر گرفته بودیم، بیشتر می‌شد. پس حساسیت کم‌تری نسبت به $noise$ ایجاد می‌شد. به عنوان مثال برای ارسال اطلاعات با سرعت $2\frac{bit}{sec}$، اگر قدرت فرستنده به گونه‌ای می‌بود که بیشترین دامنه سیگنال 3 می‌شد، شرایط بهتر می‌شد. در این صورت برای ارسال 00، سیگنال $x_0(t) = 0$ را به مدت ۱ ثانیه، برای ارسال 01، سیگنال $x_1(t) = \sin(2\pi t)$ را به مدت ۱ ثانیه، برای ارسال 10، سیگنال $x_2(t) = 2\sin(2\pi t)$ را به مدت ۱ ثانیه و برای ارسال 11، سیگنال $x_3(t) = 3\sin(2\pi t)$ را به مدت ۱ ثانیه می‌فرستادیم.

پس در روش کدگذاری دامنه اگر بخواهیم سرعت ارسال اطلاعات را افزایش دهیم، باید $power$ بیشتری مصرف کنیم تا نسبت به $noise$ مقاوم بمانیم.

تمرین ۴-۱ :

کاملا مشابه با تمرین ۳-۱ است.

```
%4-1
charactersCount=32;
characters=['a':'z' ' ' '.' ',' '!' ';' '"'];
Mapset=cell(2, charactersCount);
for i=0:charactersCount-1
    Mapset{1, i+1}=characters(i+1);
    Mapset{2, i+1}=dec2bin(i, 5);
end
```

تمرین ۴-۲ :

کد مربوط به تابع $coding\_freq$ در دو صفحه بعد آورده شده است ولی ورودی ها و خروجی هایش تغییراتی نسبت به آن چه در صورت پروژه گفته شده دارد که در ادامه به توضیح این تغییرات می‌پردازیم:

- به ورودی ها $Mapset$، $noisePower$ و پرچم $test$ هم اضافه شده اند که :
- از $Mapset$ برای تشخیص کد باینری هر کاراکتر استفاده می‌شود. (می‌توانستیم از $Mapset$ به شکل سراسری هم استفاده کنیم ولی طبق هشدار خود متلب و قواعد برنامه‌نویسی بهتر است از متغیر های سراسری استفاده نشود. به همین خاطر آن را به تابع پاس می‌دهیم.)
- اضافه کردن $nosiePower$ به ورودی‌ها به این علت بود که در قسمت های بعدی که می‌خواهیم سیگنال کد شده را $noisy$ کنیم، خود تابع $coidng\_freq$ این کار را برای ما انجام دهد و وقتی نمی‌خواهیم سیگنال کد شده را $noisy$ کنیم، کافی است $noisePower$ را صفر کنیم.
- اضافه کردن $test$ هم به این خاطر است که وقتی می‌خواهیم در بخش های بعدی آستانه وارایانس را به دست آوردیم، صد بار آزمایش می‌کنیم و خب در این صد بار نمی‌خواهیم نموداری بکشیم و با این پرچم به تابع اطلاع می‌دهیم که نمودار را بکشد یا خیر.
- به خروجی‌ها طول پیام، این که تعداد بیت های استفاده شده در پیام کد شده به سرعت ارسال بیت ها در هر ثانیه بخش پذیر است یا خیر، فرکانس های انتخاب شده برای هر عدد و کد باینری پیام اضافه شده است که از سه ویژگی اول برای تشخیص پیام کد شده در تابع $decoding\_freq$ به ازای هر سرعت ارسال بیت دلخواهی استفاده می‌شود و از کد باینری پیام برای سنجش دقت سرعت های مختلف ارسال بیت در تابع $calc\_accuracy$ استفاده می‌شود. نکته قابل توجه در این قسمت این است که چون فرکانس ها را به شکل گسسته انتخاب می‌کنیم پس کلا ۵۰ تا فرکانس داریم. در نتیجه به ازای سرعت های ارسال بیت بیشتر از ۵ بیت در هر ثانیه، به ناچار به برخی اعداد، فرکانس یکسان نسبت داده خواهد شد. به عنوان مثال وقتی سرعت ارسال بیت ها ۶ بیت در هر ثانیه باشد، ۶۴ حالت داریم و ۵۰ فرکانس مختلف. پس به ناچار به ۱۴ عدد، فرکانس تکراری نسبت خواهیم داد که این کار باعث می‌شود در سرعت های بالاتر حتی اگر $noise$ نداشته باشیم، نتوانیم همیشه پیام را به درستی تشخیص دهیم! (برای آن که تابع $decoding\_freq$ به درستی پیام را تشخیص دهد به طول پیام نیاز دارد از طرفی در هنگام کد کردن پیام چون در هر ثانیه تعداد بیت های ارسالی مقدار گسسته دارند، ممکن است تعداد بیت های تشکیل دهنده پیام به ۵ بخش پذیر نباشد. به عنوان مثال اگر همین کلمه $signal$ پیام باشد. میدانیم با ۳۰ بیت کد می‌شود ولی اگر مثلا سرعت ارسال بیت‌ها ۴ بیت در هر ثانیه باشد، برای کد کردن آن از ۳۲ بیت استفاده می‌کنیم. حال در تابع $decoding\_freq$ برای تشخیص پیام به طول آن احتیاج داریم که اگر ۳۲ را به ۵ تقسیم کنیم، به طول اشتباهی می‌رسیم! به همین خاطر طول پیام ارسالی را در اینجا خروجی می‌دهیم و در تابع $decoding\_freq$ از آن استفاده می‌کنیم.)

شیوه کد کردن پیام: با توجه به توضیحاتی که در مقدمه چهارم آورده شده است، تابعی که پیام را کد می‌کند به شکل زیر است:

$$\sum_{i=0}^{tend} \sin(2\pi f_k t)\,[u(t-i)-u(t-i-1)]\,, f_k = bitsFrequencies(bin2dec(bits)+1)$$

$$tend = \left\lceil \frac{totalBits}{bitRate} \right\rceil$$

که $bits$ در هر ثانیه روی ۵ بیت از تعداد بیت های تشکیل دهنده پیام کد شده جلو می‌رود. خطوط ۴۷ تا ۵۵ کد صفحه بعد پیاده سازی این تابع در متلب است.

نحوه انتخاب فرکانس‌ها :

اگر تعداد فرکانس های مورد نیاز برای کد کردن پیام کمتر از ۵۰ باشد ($bitRate < 6$) از رابطه زیر برای انتخاب فرکانس ها انتخاب می‌کنیم :

$$step = \left\lfloor \frac{49}{frequenciesCount} \right\rfloor$$

که $frequenciesCount$ همان تعداد فرکانس‌های مورد نیاز برای ساخت سیگنال مورد نظر است که از مشخصا از رابطه $2^{bitRate}$ به دست می‌آید. در ادامه از رابطه زیر اولین فرکانس را انتخاب می‌کنیم و در هر مرحله برای انتخاب فرکانس بعدی، به اندازه $step$ جلو می‌رویم.

$$startFrequency = \left\lfloor \frac{49-(frequenciesCount-1)step}{2} \right\rfloor$$

و در غیر این صورت، به هر عدد، فرکانس باقی مانده آن عدد به ۵۰ را نسبت می‌دهیم.

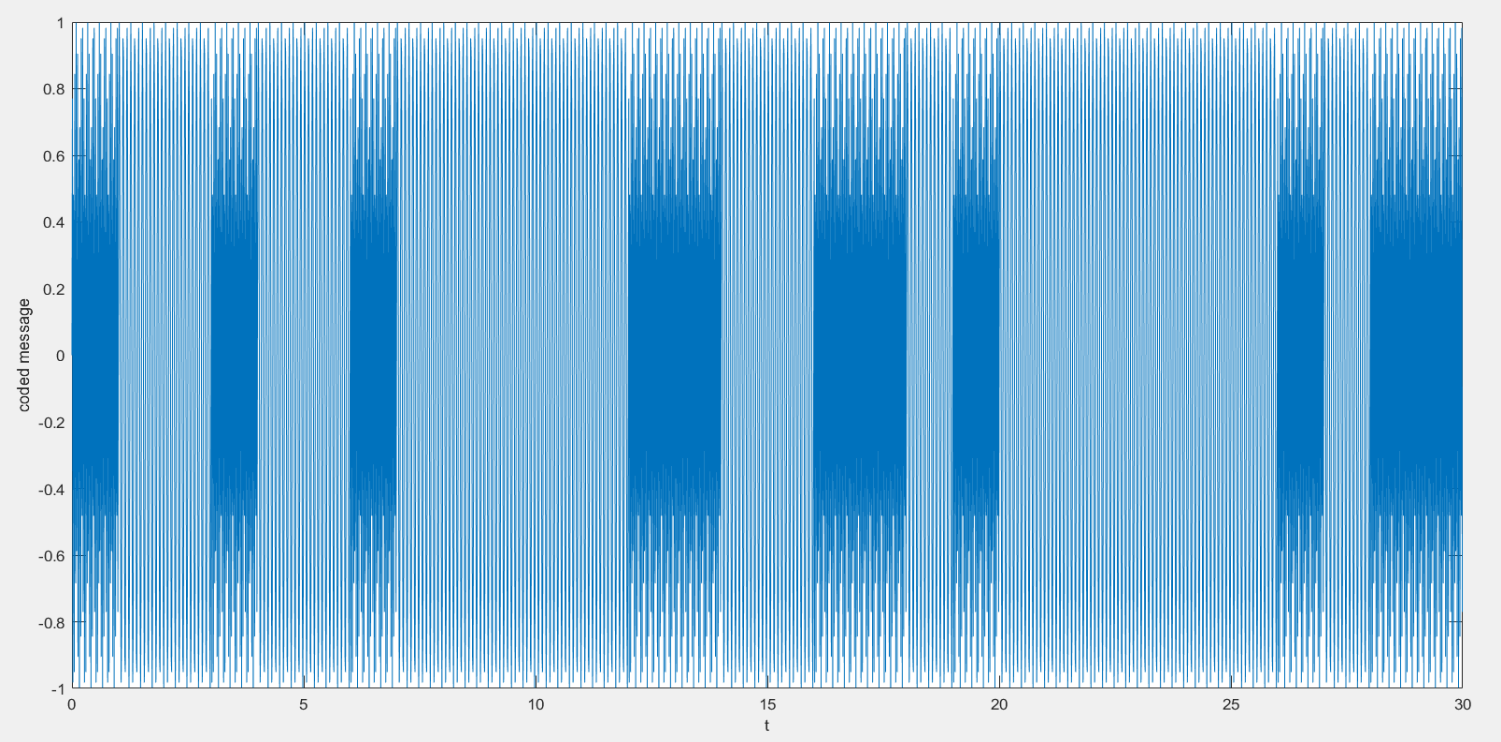
```
if frequenciesCount<50
    step=floor(49/frequenciesCount);
    startFrequency=floor((49-(frequenciesCount-1)*step)/2);
    for i=1:frequenciesCount
        bitsFrequencies(i)=startFrequency+(i-1)*step;
    end
else
    for i=1:frequenciesCount
        bitsFrequencies(i)=rem(i, 50);
    end
end
```

در ادامه کد تابع $coding\_freq$ را می‌آوریم.

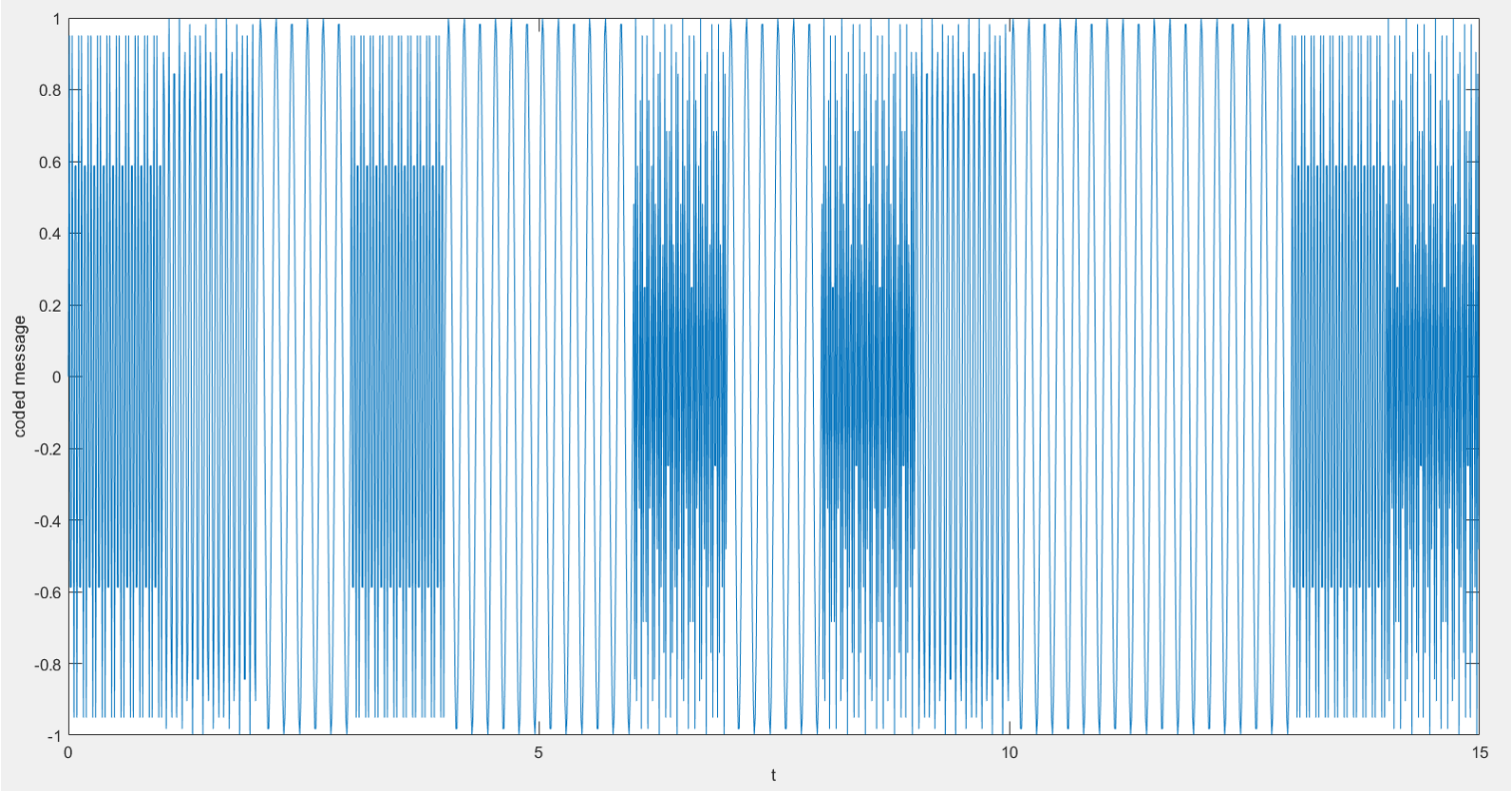
```
function [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength, bitsFrequencies, charactersToBits] = coding_freq(message, bitRate, Mapset, noisePower, test)
    charactersCount = 32;
    messageLength = strlength(message);
    totalBitsCount = 5*messageLength;

    if rem(totalBitsCount, bitRate)==0
        divisibleByBitRate=true;
    else
        divisibleByBitRate=false;
    end

    charactersToBits = strings(1, messageLength);
    frequenciesCount = 2^bitRate;

    for i=1:messageLength
        for j=1:charactersCount
            if message(i) == Mapset{1, j}
                charactersToBits(i) = Mapset(2, j);
                break;
            end
        end
    end

    charactersToBits=join(charactersToBits, '');
    charactersToBits=char(charactersToBits);
    bitsFrequencies=zeros(1, frequenciesCount);

    if frequenciesCount<50
        step=floor(49/frequenciesCount);
        startFrequency=floor((49-(frequenciesCount-1)*step)/2);
        for i=1:frequenciesCount
            bitsFrequencies(i)=startFrequency+(i-1)*step;
        end
    else
        for i=1:frequenciesCount
            bitsFrequencies(i)=rem(i, 50);
        end
    end

    tstart=0;
    tend=ceil(totalBitsCount/bitRate);
    fs=100;
    ts=1/fs;
    t=tstart:ts:tend-ts;

    codedMessage=0;
    for i=0:tend-1
        if (i+1)*bitRate<=totalBitsCount
            bits=charactersToBits(i*bitRate+1:(i+1)*bitRate);
        else
            bits = charactersToBits(i*bitRate+1:totalBitsCount);
        end
        f=bitsFrequencies(bin2dec(bits)+1);
        codedMessage=codedMessage+sin(2*pi*f*t).*(heaviside(t-i)-heaviside(t-i-1));
    end

    codedMessage=codedMessage+noisePower*randn(1, length(codedMessage));

    if ~test
        plot(t, codedMessage)
        xlabel 't'
        ylabel 'coded message'
    end

end
```

تمرین ۴-۳ :

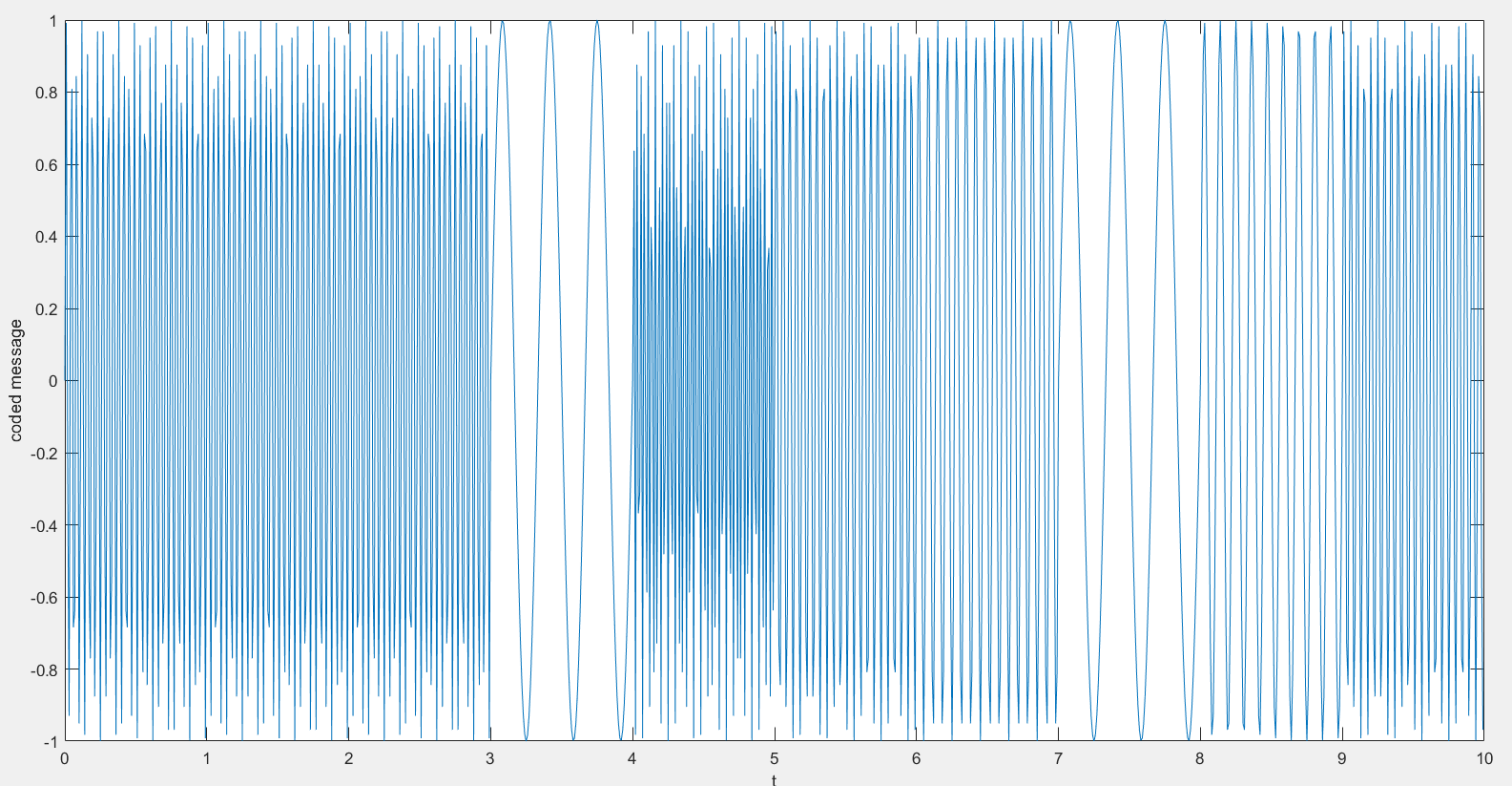
- خروجی تابع $coding\_freq$ برای کلمه $signal$ با سرعت ارسال اطلاعات یک بیت بر ثانیه:



- خروجی تابع $coding\_freq$ برای کلمه $signal$ با سرعت ارسال اطلاعات دو بیت بر ثانیه:



- خروجی تابع $coding\_freq$ برای کلمه $signal$ با سرعت ارسال اطلاعات سه بیت بر ثانیه:



تمرین ۴-۴ :

کد مربوط به تابع $decoding\_freq$ در ۳ صفحه بعدی آورده شده است ولی ورودی ها و خروجی‌ها تغییراتی نسبت به آن چه در صورت پروژه گفته شده دارد که به توضیح این تغییرات می‌پردازیم:

- به ورودی‌ها $Mapset$، $divisibleByBitRate$، $messageLength$، $noisePower$ و $bitsFrequencies$ اضافه شده است. که مشابه با توضیحاتی که در تمرین ۴-۲ آورده شده است، اضافه شدن $messageLength$ و $divisibleByBitRate$ برای این است که بتوانیم سرعت ارسال بیت در ثانیه دلخواه تا سقف ۵ بیت در ثانیه داشته باشیم.
- اضافه کردن $Mapset$ برای تشخیص پیام از روی بیت هاست.
- اضافه کردن $noisePower$ برای این است که بدانیم پیام $noise$ دارد یا خیر. چون در ازای $noise$ داشتن یا نداشتن پیام تعریف threshold فرق می‌کند.
- اضافه کردن $bitsFrequencies$ برای این است که بدانیم به هر عدد در دامنه 0 تا $2^{bitRate} - 1$ چه فرکانسی اختصاص داده شده است و از تعریف دوباره آن جلوگیری کنیم. (چون در تابع $coding\_freq$ یک بار تعریفش کرده‌ایم.)
- به خروجی‌ها $messgeBits$ (همان کد باینری پیام است بعد از این که پیام را $decode$ کردیم) اضافه شده است که از $messageBits$ برای سنجش دقت سرعت های مختلف ارسال بیت در تابع $calc\_accuracy$ استفاده می‌شود.

```
function [decodedMessage, messageBits] = decoding_freq(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower, bitsFrequencies)
    fs=100;
    tend=length(codedMessage)/fs;
    frequenciesCount=2^bitRate;
    charactersCount=32;

    correlationResults=zeros(1, tend);

    for i=1:tend
        [maxfft, fmax]=max(abs(fftshift(fft(codedMessage((i-1)*fs+1:i*fs)))));
        correlationResults(i)=abs(fmax-51);
    end

    messageBits=strings(1, tend);
    decodedMessage=strings(1, messageLength);

    if noisePower==0
       for i=1:tend
            for j=1:frequenciesCount
                if correlationResults(i)==bitsFrequencies(j)
                    if ~divisibleByBitRate && i==tend
                        messageBits(i)=dec2bin(j-1, 5*messageLength-bitRate*(i-1));
                    else
                        messageBits(i)=dec2bin(j-1, bitRate);
                    end
                    break;
                end
            end
        end
```

```
else
    for i=1:tend
        diff=1000000000000;
        isEmpty=true;
        for j=1:frequenciesCount-1
            tmpdiff1=abs(correlationResults(i)-bitsFrequencies(j));
            tmpdiff2=abs(correlationResults(i)-bitsFrequencies(j+1));
            if tmpdiff2<tmpdiff1 && tmpdiff2<diff
                default=j;
                diff=tmpdiff2;
            end
            if tmpdiff1<tmpdiff2 && tmpdiff1<diff
                default=j-1;
                diff=tmpdiff1;
            end
            treshold=(bitsFrequencies(j)+bitsFrequencies(j+1))/2;
            if correlationResults(i)>=bitsFrequencies(j) && correlationResults(i)<=treshold
                if ~divisibleByBitRate && i==tend
                    messageBits(i)=dec2bin(j-1, 5*messageLength-bitRate*(i-1));
                else
                    messageBits(i)=dec2bin(j-1, bitRate);
                end
                isEmpty=false;
                break;
            end
            if correlationResults(i)<=bitsFrequencies(j+1) && correlationResults(i)>treshold
                if ~divisibleByBitRate && i==tend
                    messageBits(i)=dec2bin(j, 5*messageLength-bitRate*(i-1));
                else
                    messageBits(i)=dec2bin(j, bitRate);
                end
                isEmpty=false;
                break;
            end
        end
        if isEmpty
            if ~divisibleByBitRate && i==tend
                messageBits(i)=dec2bin(default, 5*messageLength-bitRate*(i-1));
            else
                messageBits(i)=dec2bin(default, bitRate);
            end
        end
    end
end
```

```
    messageBits=join(messageBits, '');
    messageBits=char(messageBits);

    for i=1:messageLength
        for j=1:charactersCount
            if Mapset{2, j} == messageBits((i-1)*5+1:(i*5))
                decodedMessage(i)=Mapset{1, j};
                break;
            end
        end
    end

end
```

خروجی تابع به ازای هر سه سرعت یک، دو و سه بیت بر ثانیه یکسان و صحیح بود:

- $bitRate = 1$:

```
bitRate=1;
noisePower=0;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength, bitsFrequencies, charactersToBits]=coding_freq(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    [decodedMessage, messageBits] = decoding_freq(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower, bitsFrequencies);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %.2f\n', accuracyRate);
end
```

Command Window

```
decoded message is:
signal
fx >>
```

- $bitRate = 2$:

```
bitRate=2;
noisePower=0;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength, bitsFrequencies, charactersToBits]=coding_freq(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    [decodedMessage, messageBits] = decoding_freq(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower, bitsFrequencies);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %.2f\n', accuracyRate);
end
```

Command Window

```
decoded message is:
signal
fx >>
```

- $bitRate = 3$:

```
bitRate=3;
noisePower=0;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength, bitsFrequencies, charactersToBits]=coding_freq(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    [decodedMessage, messageBits] = decoding_freq(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower, bitsFrequencies);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %.2f\n', accuracyRate);
end
```

Command Window

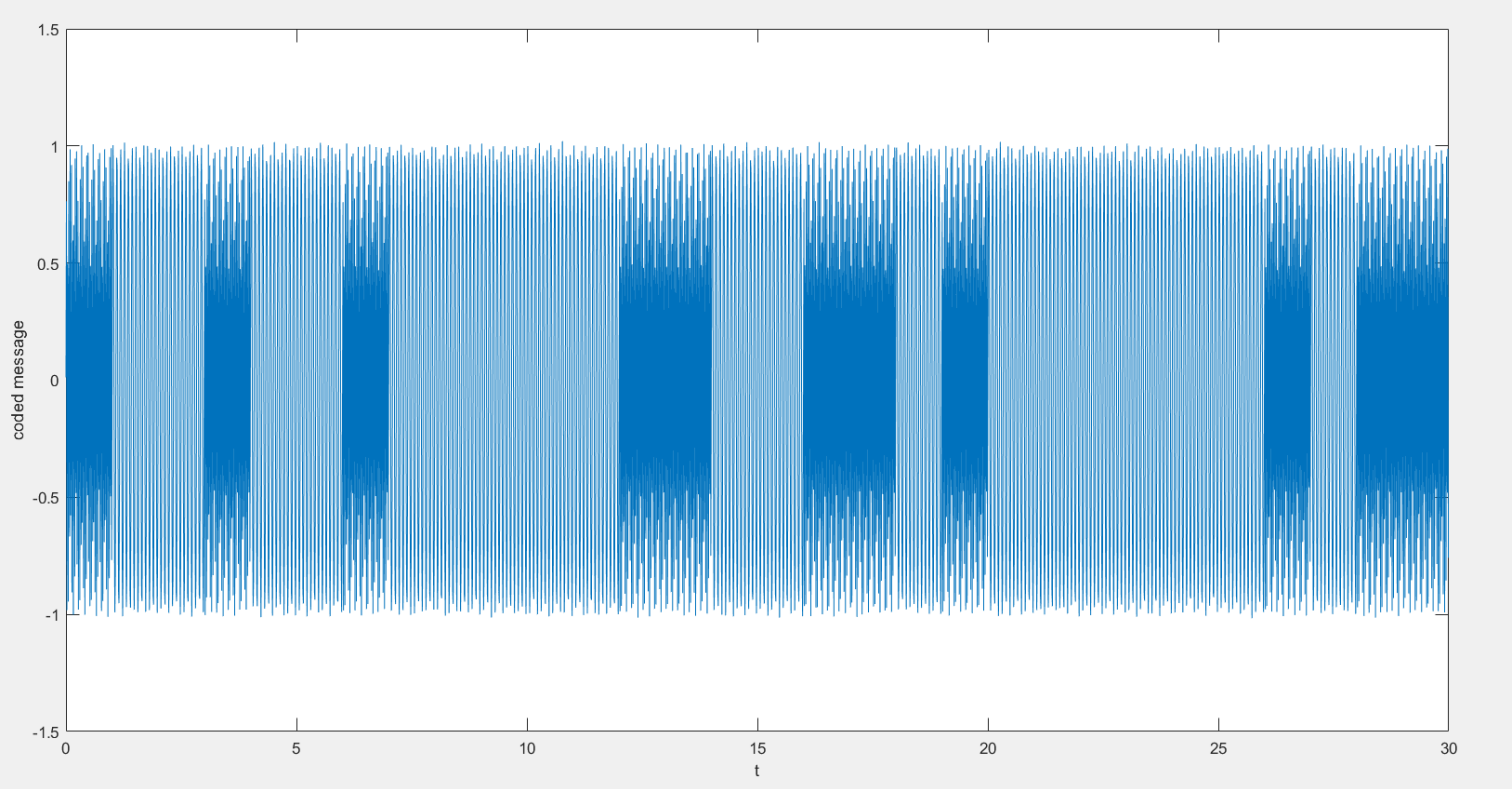
```
decoded message is:
signal
fx >>
```

تمرین ۴-۵ :

اضافه کردن نویز گوسی با واریانس 0.0001 و میانگین 0 به ازای سرعت ارسال بیت در ثانیه:

- $bitRate = 1$:

```
bitRate=1;
noisePower=0.01;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength, bitsFrequencies, charactersToBits]=coding_freq(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    [decodedMessage, messageBits] = decoding_freq(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower, bitsFrequencies);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %.2f\n', accuracyRate);
end
```

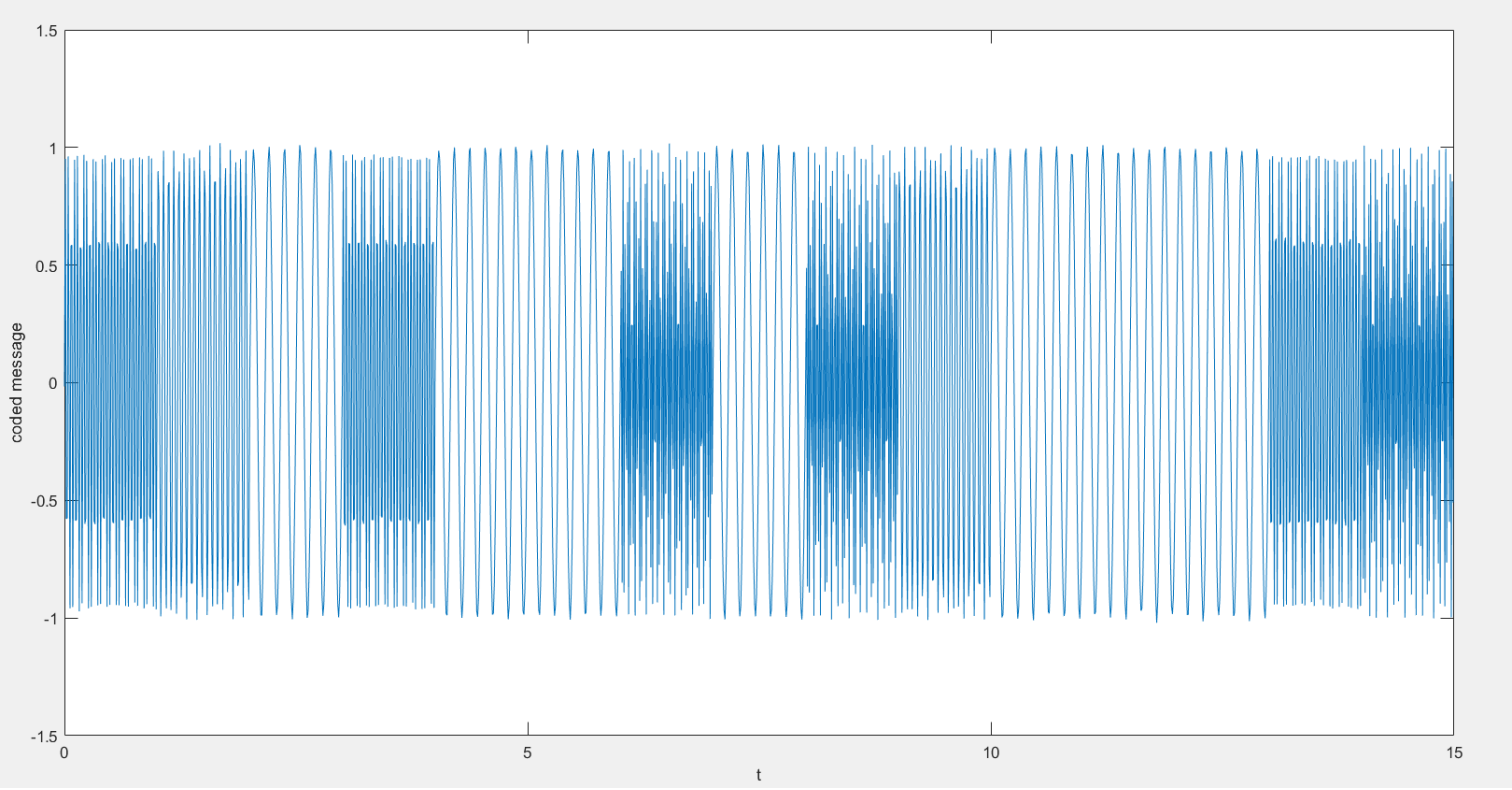


Command Window

```
decoded message is:
signal
fx >>
```

- $bitRate = 2$:

```
bitRate=2;
noisePower=0.01;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength, bitsFrequencies, charactersToBits]=coding_freq(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    [decodedMessage, messageBits] = decoding_freq(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower, bitsFrequencies);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %.2f\n', accuracyRate);
end
```

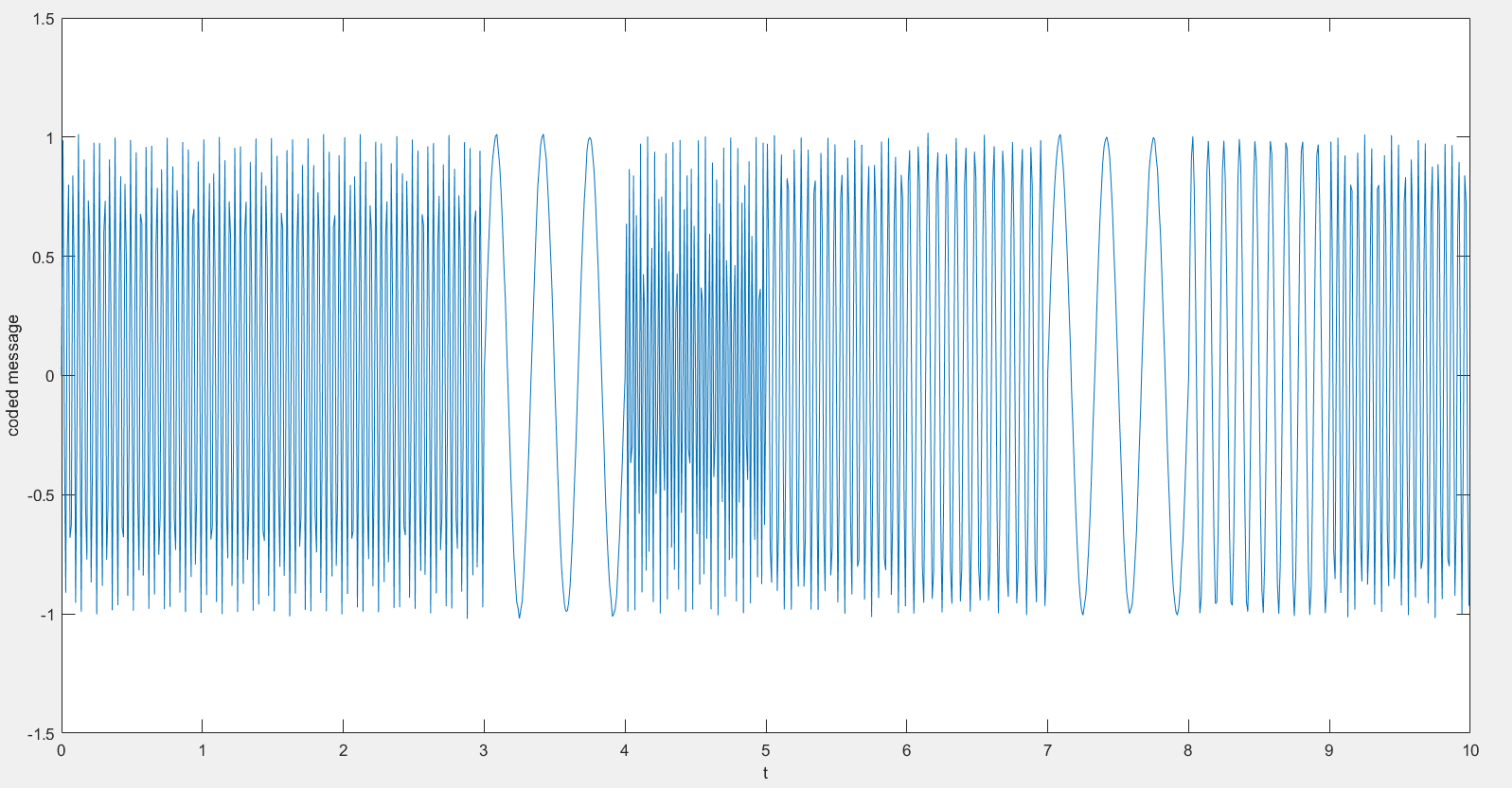


Command Window

```
decoded message is:
signal
fx >>
```

- $bitRate = 3$:

```
bitRate=3;
noisePower=0.01;
message='signal';
test=false;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength, bitsFrequencies, charactersToBits]=coding_freq(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    [decodedMessage, messageBits] = decoding_freq(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower, bitsFrequencies);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %.2f\n', accuracyRate);
end
```



Command Window

```
decoded message is:
signal
>>
```

تمرین ۴-۶ :

نحوه به دست آوردن مقدار بیشترین واریانس : در این قسمت به ازای یک مقدار $noise$، ۱۰۰ بار کد را اجرا می‌کنیم و در هر بار بررسی می‌کنیم که چه تعداد از بیت‌های کل پیام را به درستی تشخیص داده‌ایم. در ادامه میزان دقت را برابر میانگین تمام مراحل در نظر می‌گیریم. ابتدا با یک $noise$ کم شروع به آزمایش کردیم و در ادامه مقدار $noise$ را زیاد کردیم تا وقتی که در ۱۰۰ بار اجرای کد، حداقل یک بار پیام به اشتباه تشخیص داده شد. تابعی که این کار ها را برای مان انجام می‌دهد، تابع $calc\_accuracy$ است و برای اجرای ۱۰۰ بار آزمایش همان طور که پیش‌تر در تمرین ۴-۲ اشاره شد، کافی است در ابتدای کد، پرچم $test$ را $true$ کنیم :

```
bitRate=1;
noisePower=0;
message='signal';
test=true;

if ~test
    [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength, bitsFrequencies, charactersToBits]=coding_freq(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    [decodedMessage, messageBits] = decoding_freq(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower, bitsFrequencies);
    fprintf('decoded message is:\n')
    fprintf('%s', decodedMessage{:});
    fprintf('\n')
else
    accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
    fprintf('noise power = %.2f\n', noisePower);
    fprintf('bit rate = %d\n', bitRate);
    fprintf('accuracy = %.2f\n', accuracyRate);
end
```

```
function accuracyRate = calc_accuracy(message, bitRate, Mapset, noisePower, test)
    accuraciesSum=0;
    for i=1:100
        mistakesCount=0;
        [codedMessage, divisibleByBitRate, messageLength, bitsFrequencies, charactersToBits]=coding_freq(message, bitRate, Mapset, noisePower, test);
        [decodedMessage, messageBits] = decoding_freq(codedMessage, bitRate, Mapset, divisibleByBitRate, messageLength, noisePower, bitsFrequencies);
        n=length(messageBits);
        m=length(charactersToBits);
        for j=1:min(n, m)
            if messageBits(j)~=charactersToBits(j)
                mistakesCount=mistakesCount+1;
            end
        end
        accuraciesSum=accuraciesSum+(n-mistakesCount)/n;
    end
    accuracyRate=accuraciesSum/100;
end
```

برای $bitRat = 1$ در $noisePower = 1.3$ به اولین جایی رسیدیم که $accuracy \neq 1$ بود. (کد را به شکل دستی اجرا کردیم و در هر مرحله با شروع از $noisePower = 0$، $nosiePower$ را 0.1 زیاد کردیم. به علت زیاد بودن تعداد مراحل، عکس آن ها را در گزارش نمی‌آوریم و اگر مایل بودید، خودتان می‌توانید تست کنید 😊) در ادامه $accuracy$ را به ازای همین $noisePower = 1.3$ برای $bitRate$ های متفاوت به دست می آوریم تا نشان دهیم، هر چه سرعت ارسال بیت ها کمتر باشد، مقاومت نسبت به $noise$ بیشتر خواهد بود و سرعت های بیشتر، $accuracy$ کمتری دارند. هم چنین برای به دست آوردن مقدار بیشترین واریانس در دیگر سرعت ها از همین روش استفاده می‌کنیم. یعنی با شروع از $noisePower = 0$، $nosiePower$ را در هر مرحله 0.1 زیاد می‌کنیم تا به $accuracy$ کمتر از ۱ برسیم. دقت شود عددی که به عنوان بیشترین واریانس اعلام می‌شود تقریبی است و در آزمایش های متفاوت ممکن است به اعداد دیگری برسیم ولی با تقریب خوبی در همین حدود است.

Command Window
```
noise power = 1.30
bit rate = 1
accuracy = 0.99
fx >>
```

Command Window
```
noise power = 1.30
bit rate = 2
accuracy = 0.99
fx >>
```

Command Window
```
noise power = 1.30
bit rate = 3
accuracy = 0.99
fx >>
```

همان طور که مشاهده می‌شود این بار تفاوت $bitRate$ های یک، دو و سه زیاد نیست که علت آن به خود کلمه $signal$ مربوط می‌شود. پس آزمایش را برای $bitRate$ های پنج، شش، هفت و هشت تکرار می‌کنیم تا ببینیم باز هم اوضاع همین است یا فرق می‌کند :

```
Command Window
  noise power = 1.30
  bit rate = 5
  accuracy = 0.99
fx >>
```

```
Command Window
  noise power = 1.30
  bit rate = 6
  accuracy = 0.89
fx >>
```

```
Command Window
  noise power = 1.30
  bit rate = 7
  accuracy = 0.83
fx >>
```

```
Command Window
  noise power = 1.30
  bit rate = 8
  accuracy = 0.70
fx >>
```

همان طور که مشاهده می‌شود و طبق انتظاری که با توجه به مقدمه داشتیم، $bitRate$ های کمتر خطای کمتری دارند و به احتمال بیشتری به درستی پیام را تشخیص می‌دهند پس نسبت به $noise$ مقاوم ترند. نتایج به دست آمده هم با مقدمه همخوانی دارند. یعنی هر چه $bitRate$ افزایش یابد، مقاومت نسبت به $noise$ کمتر خواهد شد. نکته قابل توجه در این بخش این است که قدرت مقاومت $bitRate$ های دو، سه و پنج نسبت به حوزه زمان افزایش یافته و به یکدیگر نزدیک شده اند. که می‌توان گفت شاید علت آن این است که در حوزه فرکانس، فرکانس هایی که انتخاب می‌کنیم نسبت به حوزه زمان برای $bitRate$ های دو، سه و پنج فاصله بیشتری دارند (فاصله فرکانس ها برای $bitRate$ های دو، سه و پنج به ترتیب 12، 6 و 1 است. در حالی که در حوزه زمان این فاصله کمتر از 1 است!) در نتیجه احتمال خطا کمتر می‌شود.

تمرین ۴-۷ :

با توجه به نمودار ها و نتایج تمرین ۴-۶ می‌توان گفت بیشترین واریانس نویز برای هر $bitRate$ به شکل زیر است:

$$for\ bitRate = 1 :\ \sigma_{max} \cong 1.3 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 = (1.3)^2 \cong 169$$

$$for\ bitRate = 2 :\ \sigma_{max} \cong 1.3 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 \cong (1.3)^2 \cong 1.69$$

$$for\ bitRate = 3 :\ \sigma_{max} \cong 1.3 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 \cong (1.3)^2 \cong 1.69$$

$$for\ bitRate = 5 :\ \sigma_{max} \cong 1.3 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 \cong (1.3)^2 \cong 1.69$$

$$for\ bitRate = 6 :\ \sigma_{max} \cong 0 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 \cong (0)^2 \cong 0$$

$$for\ bitRate = 7 :\ \sigma_{max} \cong 0 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 \cong (0)^2 \cong 0$$

$$for\ bitRate = 8 :\ \sigma_{max} \cong 0 \Longrightarrow \sigma_{max}^2 \cong (0)^2 \cong 0$$

دقت شود که چون در $bitrate = 6$ ، $bitrate = 7$ و $bitrate = 8$ فرکانس های تکراری داریم از همان اول و به ازای $noise$ های کم هم دقت 1 نداشتیم.

تمرین ۴-۸ :

هر چقدر فاصله بین فرکانس‌های انتخابی بیشتر باشد، کدگذاری انجام شده نسبت به نویز مقاوم‌تر خواهد بود. پس هر چه پهنای باند بیشتری مصرف کنیم می‌توانیم با سرعت بیشتری اطلاعات را ارسال کنیم و در عین حال نسبت به نویز مقاوم باشیم.