

تجزیه LU

دستگاه معادله $Ax = b$ را فرض کنید. همان طور که می دانید حل این دستگاه با روش کاهش سطری در زمان $O(n^3)$ انجام می شود. اما اگر تجزیه LU ماتریس A را در اختیار داشته باشیم، حل معادله می تواند در زمان $O(n^2)$ انجام شود. همچنین می دانیم که محاسبه ماتریس های L و U خود در زمان $O(n^3)$ صورت می گیرد. در نتیجه حل یک دستگاه با محاسبه تجزیه LU ماتریس آن و پیدا کردن جواب دستگاه از روی آن روش به صرفه ای نیست.

حال فرض کنید می خواهیم تعداد زیادی معادله به شکل $Ax = b$ که در آن ها A ثابت و تنها b ها متفاوت هستند را حل کنیم (مثلا برای محاسبه وارون یک ماتریس). در این شرایط اگر در ابتدا، یک بار تجزیه LU ماتریس A را در زمان $O(n^3)$ حساب کنیم، می توانیم دستگاه را به ازای b های مختلف در زمان $O(n^2)$ حل کنیم که بسیار بهینه تر است.

در این تمرین می خواهیم با استفاده از کتابخانه `numpy` در پایتون، دستگاه $Ax = b$ را به ازای b های مختلف به کمک تجزیه LU حل کنیم (برای سادگی فرض کنید ماتریس A مربعی است، تجزیه LU آن وجود دارد و دستگاه های خواسته هر کدام تنها یک جواب دارند). برای این کار:

۱. تابعی بنویسید که با دریافت ماتریس A ، ماتریس های L و U را محاسبه کرده و خروجی دهد.
۲. تابعی بنویسید که با انجام forward substitution دستگاه $Ly = b$ را حل کند و y را خروجی دهد.
۳. تابعی بنویسید که با انجام backward substitution دستگاه $Ux = y$ را حل کند و x را خروجی دهد.
۴. به کمک این توابع دستگاه های خواسته شده در ورودی را حل کنید.

ورودی

در خط اول n ، اندازه ماتریس $A_{n \times n}$ و m ، تعداد بردارهای b مختلف که به ازای آن ها می خواهیم معادله $Ax = b$ را حل کنیم، با فاصله از هم آمده اند.

در n خط بعدی، سطرهای ماتریس A وارد می شوند.

در هر یک از m خط بعدی، درایه های هر یک از بردارهای b در فضای \mathbb{R}^n با فاصله از هم آمده اند.

خروجی

خروجی برنامه‌ی شما باید شامل n خط باشد که در هر خط جواب معادله به ازای b های مختلف (به ترتیبی که وارد شده‌اند) چاپ شود. اعداد خروجی را با استفاده از `np.around` ، تا ۲ رقم اعشار چاپ کنید.

مثال

ورودی نمونه ۱

```
3 5
5 6 2
4 5 2
2 4 8
18 7 2
4 5 8
15 7 6
11 9 5
13 12 12
```

در این مثال تجزیه‌ی LU به شکل زیر می‌باشد. توجه کنید که تجزیه‌ی LU را نباید به عنوان خروجی چاپ کنید.

```
L =
1.0 0.0 0.0
0.8 1.0 0.0
0.4 8.0 1.0
```

```
U =
5.0 6.0 2.0
0.0 0.2 0.4
0.0 0.0 4.0
```

خروجی نمونه ۱

```
75.0 -64.0 13.5
-14.0 13.0 -2.0
```

53.0 -45.0 10.0
0.5 1.5 -0.25
-10.0 11.0 -1.5