Analysis Differenzialrechnung

David Jäggli

16. Dezember 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Ableitung

1.1 Ziele der Ableitungen

Die folgenden drei Punkte werden mittels einer Differenzialrechnung erreicht.

1. Das Bestimmen der Tangente in einem Punkt der Kurve $y = f(x)$
2. Das Linearisieren einer Funktion $y = f(x)$ (siehe Kapitel 4)
3. Mit einer neuen Funktion $f'(x)$ (1. Ableitung von $f(x)$ die Steigung an jedem Punkt x von der ursprünglichen Funktion $f(x)$ zu ermitteln.
4. Mit einer neuen Funktion $f''(x)$ (2. Ableitung von $f(x)$) zu bestimmen, ob sich die ursprüngliche Funktion $f(x)$ an jeder beliebigen Stelle x in einer Links- resp. Rechtskrümmung befindet

2 Differenzierbarkeit

Eine Funktion ist immer dann differenzierbar, wenn sie stetig ist und keinen Knick hat.

2.1 Regeln

2.1.1 Potenzregeln

Ursprungsfunktion	Ableitung	Beispiel
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$	$x^2 \Rightarrow 2x$
$f(x) = c = 2$ (konst.)	$f'(x) = 0$	$5 \Rightarrow 0$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$e^x \Rightarrow e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = ln(a) \cdot a^x$	$5^x \Rightarrow ln(5) \cdot 5^x$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$ln(x) \Rightarrow \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{a}{(x+n)}$	$f'(x) = -\frac{a}{(x+n)^2}$	$\frac{500}{x+5} \Rightarrow -\frac{500}{(x+5)^2}$
$f(x) = log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$	$log_3(x) \Rightarrow \frac{1}{x * ln(3)}$

2.1.2 Weiterführende Regeln

Faktorregel & Beispiel:

$$f(x) = a \cdot g(x) = a \cdot g'(x)$$

$$f(x) = 2 \cdot x^3 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 = \underline{6x^2}$$

Summenregel & Beispiel:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$x^2 + x^3 \Rightarrow \underline{2x + 3x^2}$$

Produktregel & Beispiel:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$x^3 \cdot x^3 \Rightarrow 3x^2 \cdot x^3 + x^3 \cdot 3x^2 = 3x^5 + 3x^5 = \underline{6x^5}$$

Quotientenregel & Beispiel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x}{(2x)^2} = \frac{20x^5 - 4x^5}{4x^2} = \frac{16x^5}{4x^2} = \underline{4x^3}$$

Kettenregel & Beispiel:

$$f(g(x)) \Rightarrow (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = ln(x^4) = ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \Rightarrow \frac{4x^3}{x^4} = \frac{4}{x}$$

3 Tangente & Normale

3.1 Tangente einer Funktion

Die Tangente an einem Punkt x_0 in einer Funktion lautet folgendermassen:
$f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$ wobei $y_0 = f(x_0)$

Der Winkel einer Geraden (Tangente) zur x-Achse kann mit der Tangens resp. Arcustangens Funktion berechnet werden: $\alpha = arctan(f'(x_0)) \rightarrow$ an der Stelle x_0 hat die Tangente einen Winkel von α zur x-Achse.

3.2 Normale

Die Normale oder senkrechte Funktion lässt sich folgendermassen berechnen:
Aus $g_1 \perp g_2$ folgt, dass $m_1 \cdot m_2 = -1$
resp. $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Eine Gerade ist definiert durch: $y = mx + q$. Die Steigung m der Normalen ist wie oben beschrieben einfach der negative Kehrwert der Steigung der Tangente. Den y-Wert kann man durch Einsetzen des Punktes berechnen.

Beispiel:
Gegeben: $f(x) = x^2 - 2x + 1$
Gesucht: Tangente und Normale bei $x = 0$
Steigung der Tangente: $m_1 = f'(x = 0) = -2$
Steigung der Normale: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = 0.5$

Für q einfach die Steigung in der Gleichung einsetzen.
Durch $f(x)$ ist definiert, dass bei $x = 0 \rightarrow y = 1$, heisst:
Für die Tangente: $1 = m_1x + q \Rightarrow 1 = -2x + q \Rightarrow q = 1$ weil $x = 0$
Für die Normale: $1 = m_2x + q \Rightarrow 1 = 0.5x + q \Rightarrow q = 1$ weil $x = 0$

Tangente = $\underline{f(x) = -2x + 1}$
Normale = $\underline{f(x) = 0.5x + 1}$

4 Annäherungen

Oftmals ist es nicht nötig (zu aufwändig/schwierig) oder gar nicht möglich die exakte Funktion zu berechnen (z.B. ln(x)). Um dieses Problem zu beheben, erstellt man eine Annäherungsfunktion in einem gewissen Bereich, welche genügend nah an die ursprüngliche Funktion herankommt.

4.1 Lineare Approximation

Eine lineare Annäherung an einem Punkt x_0 ist die Tangente der Funktion am Punkt x_0, welche mit der Tangentenformel berechnet werden kann:

$$\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \Rightarrow f'(x_0)(x - x_0)$$

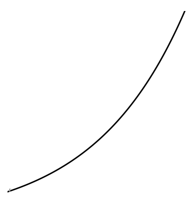
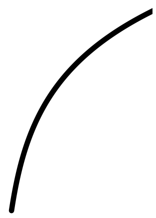
4.2 Höhere Approximation (Taylorpolynom)

Eine quadratische oder kubische Annäherung (Taylorpolynom) einer Funktion kommt viel näher an die tatsächliche Funktion heran, da sie die Krümmung berücksichtigt. Sofern die Ursprungsfunktion $f(x)$ n-mal differenzierbar ist, kann ein Taylorpolynom wie folgt gebildet werden:

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + ... + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

5 Die Monotonie und Krümmung

Ob eine Funktion $f(x)$ am Punk x_0 links oder rechtsgekrümmt ist, kann man mit der 2. Ableitung bestimmen.
$f''(x) > 0 \Rightarrow$ **linksgekrümmt/konvex**
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ **rechtsgekrümmt/konkav**
$f''(x) = 0 \Rightarrow$ **Wendepunkt**

	$f'(x) > 0 \Rightarrow$ wachsend	$f'(x) < 0 \Rightarrow$ fallend
$f''(x) > 0$ konvex		
$f''(x) < 0$ konkav		

6 Kurvendiskussion

6.1 Berechnungen ohne Differenzialrechnung

Eigenschaft	Mathematische Bedingung
Schnittpunkt mit der y-Achse	Die Funktion $y = f(x)$ an $x = 0$ resp. $f(0)$ ausrechnen $\Rightarrow P = (0, f(x))$
Nullstellen	Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.
Vertikale Asymptote (ein Pol)	In diesem Fall lautet die Gleichung $y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ und beim Pol ist $h(x) = 0$
Symmetrien (gerade resp. ungerade Funktionen)	Für **gerade** Funktionen $f(x) = f(-x)$ Für **ungerade** Funktionen $f(x) = -f(-x)$ resp. $-f(x) = f(-x)$

6.2 Lokale Extremwerte

6.2.1 Extremalwert

Ein Extremalwert ist immer dort, wo keine Steigung herrscht, also $f'(x) = 0$
Ein Minimalwert ist bei einer Linkskurve, also $f''(x) > 0$. Und ein Maximalwert bei einer Rechtskurve, also $f''(x) < 0$.

Eigenschaft	99 % Regel	100 % resp. Ausnahmeregel
Generel:	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = f''(x_0) \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0$
Maximum:	$f''(x_0) < 0$	für n gerade ist $f^{(n)}(x_0) < 0$
Minimum:	$f''(x_0) > 0$	für n gerade ist $f^{(n)}(x_0) > 0$

6.2.2 Wendepunkte

Ein Wendepunkt ist dort wo die Kurve keine Krümmung hat, also $f''(x) = 0$.

Eigenschaft	99 % Regel	100 % resp. Ausnahmeregel
Generel:	$f''(x_0) = 0$	$f''(x_0) = \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0$
Zusätzlich:	$f'''(x_0) \neq 0$	für n ungerade ist $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

6.2.3 Terrassenpunkte

Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente an der Stelle x_0.

Eigenschaft	**99 % Regel**	**100 % resp. Ausnahmeregel**
Generel:	$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$	$f'(x_0) = f''(x_0) \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0$
Zusätzlich:	$f'''(x_0) \neq 0$	für n ungerade ist $f^{(n)}(x_0) \neq 0$