Diskrete Mathematik

David Jäggli

23. Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Allg

1.1 Grundlagen der Logik und Beweise

- Die Regeln der Logik geben mathematischen Aussagen eine präzise Bedeutung.
- Konstruktion korrekter mathematischer Argumente

1.2 Aussagen (Propositionen)

Propositionen:

- Bern ist die Bundesstadt
- $1 + 1 = 2$
- Goldbachsche Vermutung: sie ist entweder wahr oder falsch, man weis es noch nicht

Keine Propositionen:

- Wie spät ist es?
- $x + 1 = 2$
- Dieser Satz ist falsch.

Begründung: Es handelt sich hier nicht um Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind. Eine Aussage ist wahrheitsdefiniert. In einer Aussage darf nicht offen sein ob die Aussage wahr oder falsch sein kann. Sie darf sich auch nicht selbst widersprechen.

2 Operatoren

- Negotiationsoperator: $\neg$
- Konjunktion $\wedge$
- Disjunktion $\vee$
- Implikation $\rightarrow$
- Bikonditional $\leftrightarrow$

2.1 Diskunktion

$p \lor q$
Wenn p oder q wahr ist, ist die Aussage wahr (logic OR).

p	q	$p \lor q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

2.2 Implikation

$p \to q$
Wenn p dann q

p	q	$p \to q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

2.3 Bikonditional

$p \leftrightarrow q$
Wenn beide den gleichen Wahrheitswert haben ist die Aussage wahr.
Wahrheitstabelle:

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

2.4 Prioritäten

Operator	Priorität
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	2
$\rightarrow$	3
$\leftrightarrow$	3

3 Aussagen

3.1 Tautologie und Wiederspruch

Tautologie ist eine Aussage, welche immer wahr ist.
Ein Wiederspruch ist eine Aussage, welche immer falsch ist.

3.2 Logische Äquivalenzen

Die Aussage p und q heissen logisch äquivalent, falls $p \leftrightarrow q$ eine Tautologie ist. Man schreibt dann $p \Leftrightarrow q$ oder $p \equiv q$ bzw. $p \sim q$

3.3 Logische Äquivalenzregeln

$\mathrm{p} \wedge \mathbf{T} \equiv \mathrm{p}$ *)	$\mathrm{p} \vee \mathbf{F} \equiv \mathrm{p}$	Identität
$\mathrm{p} \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	$\mathrm{p} \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Dominanz
$\mathrm{p} \vee \mathrm{p} \equiv \mathrm{p}$	$\mathrm{p} \wedge \mathrm{p} \equiv \mathrm{p}$	Idempotenz
$\neg(\neg \mathrm{p}) \equiv \mathrm{p}$		Doppelnegation
$\mathrm{p} \vee \neg \mathrm{p} \equiv \mathbf{T}$	$\mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{p} \equiv \mathbf{F}$	Tautologie/Kontradiktion
$\mathrm{p} \vee \mathrm{q} \equiv \mathrm{q} \vee \mathrm{p}$	$\mathrm{p} \wedge \mathrm{q} \equiv \mathrm{q} \wedge \mathrm{p}$	Kommutativität
$\mathrm{p} \vee (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \equiv \mathrm{p}$	$\mathrm{p} \wedge (\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \equiv \mathrm{p}$	Absorption
$(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \vee \mathrm{r} \equiv \mathrm{p} \vee (\mathrm{q} \vee \mathrm{r})$ $(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \wedge \mathrm{r} \equiv \mathrm{p} \wedge (\mathrm{q} \wedge \mathrm{r})$		Assoziativgesetz 1 Assoziativgesetz 2
$\mathrm{p} \vee (\mathrm{q} \wedge \mathrm{r}) \equiv (\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{p} \vee \mathrm{r})$ $\mathrm{p} \wedge (\mathrm{q} \vee \mathrm{r}) \equiv (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \vee (\mathrm{p} \wedge \mathrm{r})$		Distributivgesetz 1 Distributivgesetz 2
$\neg(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \equiv \neg \mathrm{p} \vee \neg \mathrm{q}$ $\neg(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \equiv \neg \mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{q}$		De Morgan's Gesetz 1 De Morgan's Gesetz 2

Duale Regeln: $\wedge$ mit $\vee$ vertauschen u. umgekehrt und T mit F.

Beispiel angewandte logische Äquivalenzregeln
Beispiel 1:
$(p \vee \neg(q \wedge p)) \wedge (r \vee (s \vee r))$
$\equiv (p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (r \vee r \vee s)$
$\equiv (T \vee \neg q) \wedge (r \vee s)$
$\equiv T \wedge (r \vee s)$
$\equiv r \vee s$

Beispiel 2:
$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$
$\equiv (a \to (\neg b \vee c)) \to ((\neg a \vee b) \to (\neg a \vee c))$
$\equiv (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to (\neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee c))$
$\equiv (\neg a \vee \neg b \vee c) \to ((a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee c)$
$\equiv (\neg a \vee \neg b \vee c) \to ((a \vee \neg a) \wedge (\neg b \vee \neg a) \vee c)$
$\equiv (\neg a \vee \neg b \vee c) \to (\neg b \vee \neg a \vee c)$
$\equiv \mathrm{X} \to \mathrm{X}$
$\equiv \neg\mathrm{X} \vee \mathrm{X}$
$\equiv \mathrm{T}$

4 Quantoren

Wird ein Quantor auf die Variable x angewandt, dann nennt man diese Variable *gebunden*, ansonsten *frei*.

4.1 Prädikate

Ein Prädikat ist ein Wortkonstrukt, welches mindestens eine Variable enthält.
$P(x) =$ "$x > 3$"
Die Aussage $P(4) = 4 > 3$ ist wahr, während $P(2) = 2 > 3$ falsch ist.

4.2 Allquantor

Ist $P(x)$ wahr für alle x aus einer bestimmten Universalmenge, dann schreibt man $\forall x P(x)$. Gelesen wird dies, "für alle x gilt $P(x)$".
Falls es nur auf eine Bestimmte Zahlenmenge zutrifft (z.B. $\mathbb{Z}$) dann schreibt man:
$\forall x \in \mathbb{Z}$ ist wahr.

4.3 Existenzquantor

Ist $P(x)$ wahr für mindestens ein x aus einer bestimmten Universalmenge, dann schreibt man $\exists x P(x)$ und liest: ës existiert ein x für welches $P(x)$ wahr ist".

4.4 Verschachtelte Quantoren

Die Reihenfolge der Quantoren ist wesentlich; ausser alle Quantoren sind vom gleichen Typ (also Allquantoren oder Existenzquantoren)!

5 Beweise

- Ein Satz (Theorem) ist eine Aussage, von der man zeigen kann, dass sie wahr ist.
- Um zu zeigen, dass ein Satz wahr ist, verwendet man eine Abfolge (Sequenz) von Aussagen, die zusammen ein Argument, genannt Beweis ergeben.
- Aussagen können Axiome oder Postulate enthalten (grundlegende Annahmen der mathematischen Strukturen).
- Durch logisches (also gewissn Regeln gehorchendes) Schliessen werden Folgerungen gemacht, die zusammen den Beweis ergeben.
- Ein Lemma ist ein einfacher Satz, der in Beweisen von komplizierteren Sätzen verwendet wird.
- Ein Korollar ist eine einfache Folgerung eines Satzes.