Diskrete Mathematik

David Jäggli

25. Mai 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Allg

1.1 Grundlagen der Logik und Beweise

- Die Regeln der Logik geben mathematischen Aussagen eine präzise Bedeutung.
- Konstruktion korrekter mathematischer Argumente

1.2 Aussagen (Propositionen)

Propositionen:

- Bern ist die Bundesstadt
- $1 + 1 = 2$
- Goldbachsche Vermutung: sie ist entweder wahr oder falsch, man weis es noch nicht

Keine Propositionen:

- Wie spät ist es?
- $x + 1 = 2$
- Dieser Satz ist falsch.

Begründung: Es handelt sich hier nicht um Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind. Eine Aussage ist wahrheitsdefiniert. In einer Aussage darf nicht offen sein ob die Aussage wahr oder falsch sein kann. Sie darf sich auch nicht selbst widersprechen.

2 Operatoren

- Negotiationsoperator: $\neg$
- Konjunktion $\wedge$
- Disjunktion $\vee$
- Implikation $\rightarrow$
- Bikonditional $\leftrightarrow$

2.1 Diskunktion

$p \vee q$
Wenn p oder q wahr ist, ist die Aussage wahr (logic OR).

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

2.2 Implikation

$p \rightarrow q$
Wenn p dann q

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

2.3 Bikonditional

$p \leftrightarrow q$
Wenn beide den gleichen Wahrheitswert haben ist die Aussage wahr.
Wahrheitstabelle:

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

2.4 Prioritäten

Operator	Priorität
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	2
$\rightarrow$	3
$\leftrightarrow$	3

3 Aussagen

3.1 Tautologie und Wiederspruch

Tautologie ist eine Aussage, welche immer wahr ist.
Ein Wiederspruch ist eine Aussage, welche immer falsch ist.

3.2 Logische Äquivalenzen

Die Aussage p und q heissen logisch äquivalent, falls $p \leftrightarrow q$ eine Tautologie ist. Man schreibt dann $p \Leftrightarrow q$ oder $p \equiv q$ bzw. $p \sim q$

3.3 Logische Äquivalenzregeln

$\mathrm{p} \wedge \mathbf{T} \equiv \mathrm{p}$ *)	$\mathrm{p} \vee \mathbf{F} \equiv \mathrm{p}$	Identität
$\mathrm{p} \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	$\mathrm{p} \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Dominanz
$\mathrm{p} \vee \mathrm{p} \equiv \mathrm{p}$	$\mathrm{p} \wedge \mathrm{p} \equiv \mathrm{p}$	Idempotenz
$\neg(\neg \mathrm{p}) \equiv \mathrm{p}$		Doppelnegation
$\mathrm{p} \vee \neg \mathrm{p} \equiv \mathbf{T}$	$\mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{p} \equiv \mathbf{F}$	Tautologie/Kontradiktion
$\mathrm{p} \vee \mathrm{q} \equiv \mathrm{q} \vee \mathrm{p}$	$\mathrm{p} \wedge \mathrm{q} \equiv \mathrm{q} \wedge \mathrm{p}$	Kommutativität
$\mathrm{p} \vee (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \equiv \mathrm{p}$	$\mathrm{p} \wedge (\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \equiv \mathrm{p}$	Absorption
$(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \vee \mathrm{r} \equiv \mathrm{p} \vee (\mathrm{q} \vee \mathrm{r})$		Assoziativgesetz 1
$(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \wedge \mathrm{r} \equiv \mathrm{p} \wedge (\mathrm{q} \wedge \mathrm{r})$		Assoziativgesetz 2
$\mathrm{p} \vee (\mathrm{q} \wedge \mathrm{r}) \equiv (\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{p} \vee \mathrm{r})$		Distributivgesetz 1
$\mathrm{p} \wedge (\mathrm{q} \vee \mathrm{r}) \equiv (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \vee (\mathrm{p} \wedge \mathrm{r})$		Distributivgesetz 2
$\neg(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \equiv \neg \mathrm{p} \vee \neg \mathrm{q}$		De Morgan's Gesetz 1
$\neg(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \equiv \neg \mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{q}$		De Morgan's Gesetz 2

Duale Regeln: $\wedge$ mit $\vee$ vertauschen u. umgekehrt
und T mit F.

Weiterführend:
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Beispiel angewandte logische Äquivalenzregeln
Beispiel 1:
$(p \vee \neg(q \wedge p)) \wedge (r \vee (s \vee r))$
$\equiv (p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (r \vee r \vee s)$
$\equiv (T \vee \neg q) \wedge (r \vee s)$
$\equiv T \wedge (r \vee s)$
$\equiv r \vee s$

Beispiel 2:
$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$
$\equiv (a \to (\neg b \vee c)) \to ((\neg a \vee b) \to (\neg a \vee c))$
$\equiv (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to (\neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee c))$
$\equiv (\neg a \vee \neg b \vee c) \to ((a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee c)$
$\equiv (\neg a \vee \neg b \vee c) \to ((a \vee \neg a) \wedge (\neg b \vee \neg a) \vee c)$
$\equiv (\neg a \vee \neg b \vee c) \to (\neg b \vee \neg a \vee c)$
$\equiv \mathrm{X} \to \mathrm{X}$
$\equiv \neg\mathrm{X} \vee \mathrm{X}$
$\equiv \mathrm{T}$

4 Quantoren

Wird ein Quantor auf die Variable x angewandt, dann nennt man diese Variable *gebunden*, ansonsten *frei*.

4.1 Prädikate

Ein Prädikat ist ein Wortkonstrukt, welches mindestens eine Variable enthält.
$P(x) = "x > 3"$
Die Aussage $P(4) = 4 > 3$ ist wahr, während $P(2) = 2 > 3$ falsch ist.

4.2 Allquantor

Ist $P(x)$ wahr für alle x aus einer bestimmten Universalmenge, dann schreibt man $\forall x P(x)$. Gelesen wird dies, "für alle x gilt $P(x)$".
Falls es nur auf eine Bestimmte Zahlenmenge zutrifft (z.B. $\mathbb{Z}$) dann schreibt man:
$\forall x \in \mathbb{Z}$ ist wahr.

4.3 Existenzquantor

Ist $P(x)$ wahr für mindestens ein x aus einer bestimmten Universalmenge, dann schreibt man $\exists x P(x)$ und liest: ës existiert ein x für welches $P(x)$ wahr ist".

4.4 Verschachtelte Quantoren

Die Reihenfolge der Quantoren ist wesentlich; ausser alle Quantoren sind vom gleichen Typ (also Allquantoren oder Existenzquantoren)!

5 Beweise

- Ein Satz (Theorem) ist eine Aussage, von der man zeigen kann, dass sie wahr ist.
- Um zu zeigen, dass ein Satz wahr ist, verwendet man eine Abfolge (Sequenz) von Aussagen, die zusammen ein Argument, genannt Beweis ergeben.
- Aussagen können Axiome oder Postulate enthalten (grundlegende Annahmen der mathematischen Strukturen).
- Durch logisches (also gewissen Regeln gehorchendes) schliessen werden Folgerungen gemacht, die zusammen den Beweis ergeben.
- Ein Lemma ist ein einfacher Satz, der in Beweisen von komplizierteren Sätzen verwendet wird.
- Ein Korollar ist eine einfache Folgerung eines Satzes.

6 Mengen

Eine Menge ist eine ungeordnete Zusammenfassung wohldefinierter, unterscheidbarer Objekte, genannt *Elemente*, zu einem Ganzen. Für irgendein Objekt x gilt dann bezüglich der Menge A entweder $x \in A$ oder dann $x \notin A$.
Beispiel:
Endliche Mengen lassen sich durch Aufschreiben der in ihnen enthaltenen Elemente beschreiben. z.B. die Menge aller natürlichen Zahlen kleiner als 101:
$A = 0, 1, 2, ..., 99, 100$ (aufzählend notiert)
$99 \in A$ aber $101 \notin A$ (beschreibend notiert)

andere Schreibweisen sind:

$A = n \in \mathbb{N} | n < 101 = n \in \mathbb{N} : n <= 100 = n | n \in \mathbb{N} \wedge n <= 100$

6.1 Gleichheit, elementare Mengen

Zwei Mengen A und B sind **gleich** ($A = B$), falls sie dieselben Elemente enthalten. $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$

Einige bekannte Mengen:
$\mathbb{N}$ - Menge der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
$\mathbb{Z}$ - Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}^+$ - Menge der positiven ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$ - Menge der Brüche
$\mathbb{R}$ - Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$ - Menge der komplexen Zahlen

6.2 Spezielle Mengen

Teilmenge: A ist Teilmenge von B, geschrieben $A \subset B$, genau dann, wenn $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$: es gilt $A \subset A$!

Leere Menge: Für jede Menge A gilt: $\emptyset \subset A$.

Kardinalität: Ist S eine endliche Menge, dann bezeichnet $|S|$ die Kardinalität. Die Kardinalität ist die Anzahl Elemente von S.

Potenzmenge: Die Potenzmenge $P(S)$ oder 2^S der Menge S besteht aus der Menge aller Teilmengen $A \subset S$.

Beispiel:
Bestimmen Sie die Potenzmenge von $S = \{1, 2\}$
$S = \{1, 2\}$
$P(S) = 2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Es gilt allgemein $|2^S| = 2^{|S|}$

6.3 Das Kreuzprodukt zweier Mengen / kartesisches Produkt

$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$
Reihenfolge ist entscheidend, $A \times B \neq B \times A$
$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Beispiel: $A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

6.4 Mengenoperationen

6.4.1 Komplement

Ist A eine Teilmenge der Menge M, so bezeichnet

$A^c = \overline{A} = \{m \in M | m \notin A\}$

das Komplement von A bezüglich M.

6.4.2 Durchschnitt

Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so bezeichnet

$A \cap B = \{m \in M | m \in A \wedge m \in B\}$

den Durchschnitt von A und B.

6.4.3 Vereinigung

Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so bezeichnet

$A \cup B = \{m \in M | m \in A \vee m \in B\}$

die Vereinigung von A und B.

6.4.4 Differenz

Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so bezeichnet

$$B \setminus A = \{m \in M | m \in B \wedge m \notin A\}$$

die Differenz

6.5 Set Operatoren

Allg. Operator	Set Operator
$p \vee q$	$A \cup B$
$p \wedge q$	$A \cap B$
$\neg p$	$\overline{A}$

6.5.1 Rechenregeln

Theorem

Für das Rechnen mit Mengen $A, B, C \subseteq M$ *gelten die folgenden Regeln:*

$$\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A && \textit{Kommutativgesetz} \\
A \cap B &= B \cap A && \textit{Kommutativgesetz} \\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C && \textit{Assoziativgesetz} \\
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C && \textit{Assoziativgesetz} \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) && \textit{Distributivgesetz} \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && \textit{Distributivgesetz} \\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} && \textit{De Morgan's Gesetz} \\
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} && \textit{De Morgan's Gesetz.}
\end{aligned}$$

Die duale Rechenregel (jeweils auf den Zeilen 2, 4, 6 *und* 8*, erhält man, indem man* $\cap$ *und* $\cup$ *vertauscht und* $\emptyset$ *mit der Universalmenge* M *(falls diese vorkommen).*

6.5.2 Mengen Identitäten

TABLE 1 Set Identities.

Identity	***Name***
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	Identity laws
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation law
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive laws
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws

7 Funktionen

Wird jedem Element x einer Menge X genau ein Element y einer Menge Y zugeordnet, so heisst die Zuordnung **Funktion**.

7.1 Die ceiling- und floorfunction

$\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\}$
$\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$

7.2 Injektive Funktionen

Eine Funktion heisst injektiv, wenn jedes x auf eine eigenes y zeigt.

7.3 Surjektive Funktionen

Eine Funktion heisst surjektiv, falls für jedes Element y ein Element x existiert, so dass $f(x) = y$ gilt.

7.4 Bijektive Funktionen

Eine Funktion heisst bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist. Das bedeutet, dass jedes Element y genau ein zugehöriges Element x hat.

Bijektive Funktionen sind umkehrbar. Man muss einfach die Pfeile umkehren und damit entsteht aus f die Umkehrfunktion f^{-1}.

7.5 Zusammengesetzte Funktionen

Gegeben seien zwei Funktionen, so dass der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f enthalten ist. Dann kann man die so genannte **zusammengesetzte Funktion** oder **Komposition** von f und g bilden:
$F = f \circ g : X \longmapsto Y,\ x \longmapsto f(g(x))$

7.6 Die Caesar-Chiffre

1. **Kodierung:** Buchstaben auf Zahlen abbilden
   K:$\{a,b,c,...,z\} \mapsto \{0,1,2,...,25\}$, wobei $a \mapsto 0, b \mapsto 1, c \mapsto 2, z \mapsto 25$

2. **Verschlüsseln:** die eigentliche Caesar-Verschlüsselung
   V:$\{0,1,2,...,25\} \mapsto \{0,1,2,...,25\}$, $m \mapsto c := (m+3)$ mod 26.

3. **Dekodierung:** Zahlen auf Buchstaben abbilden
   D:$\{0,1,2,...,25\} \mapsto \{0,1,2,...,25\}$, wobei $0 \mapsto a, 1 \mapsto b, 2 \mapsto c, 25 \mapsto z$

7.7 Umkehrfunktionen

Wenn man die Umkehrfunktion auf das Ergebnis der Ursprungsfunktion mit einem x-Wert anwendet erhält man wieder x. Heisst:
$f^{-1}(f(x)) = x$

8 Folgen

8.1 Definition

Eine **Folge** ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ (oder auch $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) in eine Menga A:
$\{\cdot\}$:$\mathbb{N} \mapsto A$, $n \mapsto a_n$
Man nennt a_n das Glied der Folge mit der Nummer n. Die Folge wird auch mit $\{a_n\}$ oder (a_n) bezeichnet.

Example:
Man schreibe die ersten sechs Glieder der Folge auf, deren k. Glied gegeben ist durch $a_k = \frac{1}{k}$.

$$a_k = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots\right)$$

8.2 Die geometrische Folge

Bei einer geometrischen Folge ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich, nämlich q. Das bedeutet, dass $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ immer gleich ist.

8.3 Summen

Dank Summenzeichen lassen sich Summen einfacher schreiben:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=0}^{n-m} a_{m+i} = \sum_{k=1}^{n-m+1} a_{m+k-1}$$

Addiert man die Glieder einer arithmetischen Folge (a_k), entsteht die **arithmetische Reihe:**

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = n\frac{a_0 + a_{n-1}}{2}$$

Nützliche Summenformeln:

Summe	geschlossene Form
$\sum_{k=0}^{n} x^k$	$\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$
$\sum_{k=0}^{n} 2^k$	$2^{k+1}-1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k,\ \lvert x\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1},\ \lvert x\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$

8.4 Produkte

Dank dem Produktzeichen lassen sich Produkte einfacher schreiben:

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \ldots a_n = \prod_{j=m}^{n} a_j \qquad n \geqslant m$$

Die Fakultät lässt sich mithilfe des Produktzeichens wie folgt schreiben:

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k & n > 0 \end{cases}$$

Nützliche Abkürzung:

$$\prod_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

9 Algorithmen

Ein Algorithmus ist eine endliche Menge von präzisen Instruktionen mit deren Hilfe eine Berechnung ausgeführt oder ein Problem gelöst wird.
Algorithmen haben folgende Eigenschaften:

1. einen genau spezifizierten Input und daraus berechneten Output

2. die Instruktionen sind präzise, korrekt für jeden möglichen Input und in endlicher Zeit durchführbar

Greedy Algorithmen wählen in jedem Schritt, die zu diesem Zeitpunkt die effizienteste ist.

10 Wachstum von Funktionen

10.1 Definition

Seien f und g Funktion von $\mathbb{Z}$ oder $(\mathbb{R})$. Dann sagt man "$f(x)$ ist $\mathcal{O}(g(x))$", falls es Konstanten C und k gibt, so dass gilt:
$|f(x)| \leq C|g(x)|, \forall x > k$ Lies: "f(x) ist gross-O von g(x), man schreibt: $f(x) \in \mathcal{O}(g(x))$.

- Meist ist f eine komplizierte Funktion, wie z.B. $f(x) = (x^2 + 1)lnx + (2^x + x^4)$
- Man möchte für g eine möglichst einfache, nicht zu schnell wachsende Funktion, wie z.B. x, x^2 ...
- Ziel ist es herauszufinden, wie sich f(x) für sehr, sehr grosse x verhält, und zwar verglichen mit der einfacheren Funktion g.
- k ist der kleinste Wert von x, für den die obige Ungleichung noch gilt!

Also wir wollen für sehr grosse x, eine einfachere Funktion zu finden.

10.2 Example

Für $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ist $\mathcal{O}(x^2)$.
Das heisst bei sehr grossen x entspricht die Funktion $f(x) = x^2$

Example

Zeige: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ist $\mathcal{O}(x^2)$.

Lösung: Wir betrachten **nur** reelle Zahlen x mit $x > 1$. Für diese Zahlen gilt auch $x^2 > x$ und $x^2 > 1$ und weiterhin (da f in diesem Bereich nur positive Werte annehmen kann):

$$|f(x)| = |x^2 + 2x + 1| = x^2 + 2\underbrace{x}_{<x^2} + \underbrace{1}_{<x^2} \leqslant x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$$

$x > 1 \mid \cdot x$
$x^2 > x$

Insgesamt haben wir also gezeigt: Für alle $x > \underbrace{1}_{=k}$ gilt

$$\underbrace{|x^2 + 2x + 1|}_{=|f(x)|} \leqslant \underbrace{4}_{=C} \underbrace{|x^2|}_{=|g(x)|}$$

für $x > \underbrace{1}_{k}$

also $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ist $\mathcal{O}(x^2)$ mit den Zeugen $k = 1$ und $C = 4$.

Example

Zeige: $f(x) = 7x^2$ ist $\mathcal{O}(x^3)$.

Lösung: Falls $\boxed{x > 7}$ ist, so gilt sicher auch

$$x^3 = \boxed{x} \cdot x \cdot x > \boxed{7} \cdot x \cdot x = 7x^2$$

$|f(x)| = 7x^2 \leqslant 7x^3$ für $x \geqslant 1$

$C = 7$ $\quad$ $k = 1$

also

$$|7x^2| = 7x^2 \leqslant 1 \cdot x^3$$

Insgesamt haben wir also gezeigt: Für alle $x > \underbrace{7}_{=k}$ gilt

$$\underbrace{|7x^2|}_{=|f(x)|} \leqslant \underbrace{1}_{=C} \underbrace{|x^3|}_{=|g(x)|}$$

In der Tat:

f ist $\mathcal{O}(x^2)$

also $f(x) = 7x^2$ ist $\mathcal{O}(x^3)$ mit den Zeugen $k = 7$ und $C = 1$.

10.3 Polynome

Für das Polynom $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ gilt $f(x)$ ist $\mathcal{O}(x^n)$. Das heisst die höchste Potenz von x gibt den Ton an.

Beispiel:
Es gilt immer: $|a + b| \leq |a| + |b|$

$f(x) = 5x^6 - 3x^2 + x - 10$
$|f(x)| \leqslant 5x^6 + 3x^2 + x + 10$
$|f(x)| \leqslant 5x^6 + 3x^6 + x^6 + 10x^6$
$|f(x)| \leqslant 5x^6 + 3x^6 + x^6 + 10x^6$ für $x \geqslant 1$
$|f(x)| = 19x^6$

also f ist $\mathcal{O}(x^6)$ mit Zeugen $k = 1$ und $C = 19$

11 Zahlen und Division

11.1 Definition

Falls $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ dann sagt man: a *teilt* b, falls $\exists c(b = ac)$ in der Universalmenge $\mathbb{Z}$. Dann ist a ein *Faktor* von b und b ein *Vielfaches* von a. Man schreibt dann $a \mid b$ und anderenfalls $a \nmid b$

Theorem:
Falls a, b, c $\in \mathbb{Z}$
(a) $a \mid b \wedge a \mid c \rightarrow a \mid (b + c)$, $\rightarrow 6 \mid 12 \wedge 6 \mid 24 \rightarrow 6 \mid (12 + 24)$
(b) $a \mid b \rightarrow \forall c(a \mid bc)$,
(c) $a \mid b \wedge b \mid c \rightarrow a \mid c$,

11.2 ggt kgV

Der ggT von a und b beschreibt das grösste d für welches gilt $d \mid a$ und $d \mid b$.
Zwei zahlen sind teilerfremd (relaitv prim) falls ggT(a,b) = 1, dann schreibt man $a \perp b$.

Das kgV zweier Zahlen a und b ist die kleinste positive Zahl, welche durch a und b teilbar ist. Es gilt:

ab = ggT(a,b) $\cdot$ kgV(a,b)

Für ggT finden:

1. a und b jeweils in Primfaktoren zerlegen
2. alle gemeinsamen Primfaktoren multiplizieren

11.3 Modulare Arithmetik

Sei $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dann nennt man zwei ganze Zahlen a und b kongruent modulo m, falls $m \mid (a - b)$ Das heisst a und b liegen ein Vielfaches von m auseinander. Man schreibt dann $a \equiv b \bmod m$ und sagt: ä ist kongruent zu b modulo m".

$13 \equiv 1 \bmod 4$ denn $4 \mid (13 - 1)$
$13 \equiv 1 \bmod 3$ denn $3 \mid (13 - 1)$
$13 \not\equiv 1 \bmod 5$ denn $5 \nmid (13 - 1)$

11.4 Der Euklidische Algorithmus

Effiziente Methode um ggT zu finden.

Berechne ggT$(67, 24)$ und ggT$(201, 72)$.

$$\begin{aligned} 67 &= 2 \cdot 24 + 19 \\ 24 &= 1 \cdot 19 + 5 \\ 19 &= 3 \cdot 5 + 4 \\ 5 &= 1 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 4 \cdot 1 + 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 201 &= 2 \cdot 72 + 57 \\ 72 &= 1 \cdot 57 + 15 \\ 57 &= 3 \cdot 15 + 12 \\ 15 &= 1 \cdot 12 + 3 \\ 12 &= 4 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

ggT ist jeweils 1 und 3.

12 Matrizen

12.1 Definition

Eine m $\times$ n-Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen in m Zeilen und n Spalten.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Kurzschreibform: $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$

12.2 Addition von Matrizen

Addition von Matrizen erfolgt jeweils durch die Addition der einzelnen Positionen

12.3 Multiplikation mit einer Zahl

Einfach jede Zahl multiplizieren.

12.4 Matrixmultiplikation

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, wobei die Anzahl Spalten in $\mathbf{A}$ gleich der Anzahl Reihen in $\mathbf{B}$ sein muss

Example (Falk'sches Schema)

Berechne mit dem Falk'schen Schema:

$$\underset{3\times 2}{A} \quad \underset{2\times 2}{B}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\\4 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & -4\end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc|c}
 & & \begin{matrix}-2 & 1\\ 2 & -4\end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix}1 & 2\\3 & 1\\4 & 2\end{matrix} & & \begin{bmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot(-4)\\ 3\cdot(-2)+1\cdot 2 & 3\cdot 1+1\cdot(-4)\\ 4\cdot(-2)+2\cdot 2 & 4\cdot 1+2\cdot(-4)\end{bmatrix} = \underset{3\times 2}{C} = \begin{bmatrix}2 & -7\\-4 & -1\\-4 & -4\end{bmatrix}
\end{array}$$

12.5 Transporierte Matrix

Eine transponierte Matrix ist eine, bei der die Spalten und Reihen vertauscht wurden.

Example (Transponierte Matrix)

Wie lauten die Transponierten der folgenden Matrizen:

$$\underset{2\times 2}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix} \text{ und } \underset{2\times 3}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\2 & -4 & -2\end{bmatrix}.$$

$$\underset{2\times 2}{A^T} = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{B^T} = \begin{bmatrix}-2 & 2\\1 & -4\\3 & -2\end{bmatrix}$$

12.6 Matrizen Eigenschaften

Keywords: symmetrisch, antisymmetrisch, Einheitsmatrix, k-te Potenz

Rechnen mit Matrizen — Eigenschaften

- Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst **symmetrisch**, falls $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$. $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$
- Eine Matrix $\mathbf{A}$ heisst **antisymmetrisch**, falls $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$. $\begin{bmatrix}0 & 3\\-3 & 0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & -3\\3 & 0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0 & 3\\-3 & 0\end{bmatrix}$
- Eine symmetrische oder antisymmetrische Matrix ist quadratisch!
- Die n-dimensionale **Einheitsmatrix** $\mathbf{I}_n$ ist eine Matrix bei der alle Elemente auf der Diagonalen Eins und alle anderen Null sind. $I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
  $A \cdot I = I \cdot A = A$ (!)
- Ist $\mathbf{A}$ eine $(n \times n)$-Matrix, dann kann man deren k-**te Potenz** rekursiv definieren durch: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ und $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. $A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot A \cdot A^2 = A \cdot A \cdot A \cdot A$
- Matrizen werden in **MatLab** (steht für **Matrix Lab**oratory) zur Darstellung von Bildern verwendet: dabei entspricht das (i, j)-Matrixelement dem Grauwert des entsprechenden Pixels (i, j). Der Nullpunkt befindet sich oben links, die erste Koordinate zeigt nach unten, die zweite nach rechts!

TODO: (SW03) Inverse Matrix und Matrizen Eigenschaften allgemein & Rechenregeln mit Matrizen.

12.7 Null-Eins Matrizen

Auch boolesche Matrizen genannt.

Boolesches Matrizen Produkt wird folgendermassen geschrieben: $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$.

Example (Boolsches Produkt (die Lösung))

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Beachten Sie, dass hier die Klammern gesetzt werden müssen, da ja UND- und ODER-Verknüpfung die selbe Priorität haben, aber hier zuerst die UND-Verknüpfung ausgeweret werden muss!

Eine quadratische Matrix kann auch eine Potenz haben:
$\mathbf{A}^{[r]} = \mathbf{A} \odot \mathbf{A} \cdots \odot \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

13 Mathematisches Begründen

Bekannte Beweismethoden:

- **Direkter Beweis:** Man zeigt, dass $p \to q$ wahr ist.
- **Beweis durch Kontraposition:** Man verwendet, dass $p \to q$ äquivalent ist zur Kontraposition $\neg q \to \neg q$.
- **Beweis durch Widerspruch:** Wir möchten zeigen, dass p wahr ist indem…

13.1 Mathematische Induktion

1. **Induktionsverankerung:** Für die kleinste Zahl zeigen, dass die Formel wahr ist (1 bei $n \in \mathbb{N}$).
2. **Induktionsschritt:** Es wird gezeigt, dass die Implikation $P(k) \to P(k+1)$ wahr ist $\forall k \geq 1$.

Beispiel: Dominosteine $\to$ falls der erste fällt, muss der 2. auch fallen. Falls der 2. fällt muss der 3. auch fallen.

Hinweis: Immer zuerst überlegen was am Schluss herauskommen sollte, falls der Beweis mit Induktion bewiesen werden kann, dann fällt auch das Beweisen leichter.

13.2 Rekursiv definierte Funktionen

Wenn eine Funktion mit Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{N}$ für die f(0) definiert ist und bei welcher f(k) durch f(k-1), f(k-2) …f(1), f(0) berechnet wird. **Beispiel:** Fibonacci Folge.

Diese kann man auch mit Induktion beweisen.

13.3 Beispiel Türme von Hanoi

Vermutung: $f(n) = 2^n - 1$
Das heisst $f(n+1) = 2^{n+1} - 1$

$f(1) = 2 - 1 = 1$: stimmt
Es braucht 2^n Züge um einen Turm zu bewegen.
Dann brauch es +1 um die unterste Scheibe (n+1 Scheibe) zu verschieben.
Und schlussendlich noch einmal $2^n + 1$
Das ergibt: $2 * (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$
<u>Vermutung stimmt.</u>

14 Grundlagen des Zählens

14.1 Zusammenfassung

Bei Permutationen spielt die Reihenfolge eine Rolle; bei Kombinationen dagegen spielt die Reihenfolge keine Rolle!

Art	Wiederholung erlaubt	Anzahl	Reihenfolge relevant
r-Permutationen von n Elementen	Nein	$\frac{n!}{(n-r)!}$	ja
r-Kombinationen von n Elementen	Nein	$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	nein
r-Permutationen von n Objekten	Ja	n^r	ja
r-Kombinationen von n Objekten	Ja	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$	nein

14.2 Schubfachprinzip

Es gibt wenigstens ein Fach in das mehr als 2 Objekte reingehen.

Beispiel: In jeder Menge von 5 Zahlen gibt es 2, welche bei einer Division durch 4 den gleichen Rest geben.
Bei einer Divison durch 4 gibt es Reste von 0, 1, 2 oder 3. Man hat 5 Zahlen, heisst 2 Zahlen müssen sich denselben Rest teilen.

14.3 Permutationen

Eine Permutation von n verschiedenen Elementen ist eine geordnete Anordnung dieser n Elemente.
Das heisst die Anordnung (3,1,2) der Menge S=1,2,3 ist eine Permutation von S.
3-Permutationen ((1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)): 3!
2-Permutationen ((1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)): $2 \cdot 3$

Allgemeine Formel für Anzahl r-Permutationen einer Menge von n Elementen:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0 \leq r \leq n \in \mathbb{N}$$

n = die Anzahl Elemente
r = die Anzahl Elemente im Tuple

Die Reihenfolge **spielt** eine Rolle.

14.4 Permutation nicht unterscheidbarer Objekte

Die Anzahl verschiedener Permutationen von n Objekten, von denen n_1 Objekte der Art 1, n_2 Objekte der Art 2, ..., n_k Objekte der Art k sind, ist gegeben durch:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}, \text{ wobei } n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Beispiel:
wie viele Wörter kann man aus den Zeichen von SUCCESS machen?
$n = SUCCESS = 7$
$n_1 = S = 3$
$n_2 = U = 1$
$n_3 = C = 1$
$n_4 = E = 2$

Ergibt: $\frac{7!}{3!2!1!1!} = \frac{7!}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 420$

14.5 Kombinationen

Für $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ist {1, 3, 4} eine 3-Kombination von S. Beachte, dass {3, 1, 4} die selbe 3-Kombination von S ist.

Die Reihenfolge spielt **keine** Rolle.

Die Anzahl von r-Kombinationen einer Menge von $n \geq 0$ Elementen isst gegeben durch:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = C(n, n-r)$$

n = die Anzahl Elemente
r = die Anzahl Elemente im Set

14.6 Kombinationen mit Wiederholungen

Beispiel: Wie viele verschiedene Früchteschalen kann man mit Äpfeln, Orangen und Birnen machen, wenn immer 4 Früchte verwendet werden?
AAAA, AAAO, AAAB, AAOO, AAOB ...

$$C(n+r-1, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

15 Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeiten werden oft mit $p(A)$ angegeben. Wobei p die Wahrscheinlichkeit allgemein beschreibt und A der Output. Heisst $p(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit mit der das Ereignis A eintrifft.

15.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A eintritt, wenn ein Ereignis B eingetreten ist, ist gegeben durch
$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (siehe Beispiel mit Münze in SW06).

15.2 Verteilungsfunktionen

Zusammenfassung der (diskreten) Verteilung

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $f(x)$ der hypergeometrischen Verteilung kann im Grenzfall grosser N und M und kleinem n durch die Binomialverteilung mit $p = M/N$ approximiert werden. Diese kann für kleine p und grosse n durch die Poissonverteilung mit $\mu = np$ approximiert werden.

Verteilung	Parameter	f(k)	Bedingung für Approximation
hypergeometrisch	N, M, n	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	
Binomial	$n, p = M/N$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	wobei $p = M/N$ $n \leqslant M/10,\ n \leqslant (N-M)/10$
Poisson	$\mu = np$	$\frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$	wobei $\mu = np$ $p \leqslant 0.1,\ n \geqslant 100$

15.2.1 Bernoulli-Verteilung

Zufallsexperiment mit nur 2 möglichen Ergebnissen, wobei die Bernoulli-Verteilung der Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht. Wobei wahr p entspricht und falsch 1-p. Die Wahrscheinlichkeiten müssen dabei voneinander unabhänig sein.

Beispiel: Bitstring mit 3 Bits bei der n-Einsen vorkommen (und wenn man eine 1 Würfelt ist es ein Erfolg resp. p oder ein nicht-Erfolg resp. $1 - p$ oder q).

P(k=0) = P({000}) = $1p^0 \cdot (1-p)^3$
P(k=1) = P({001},{010},{010}) = $3p^1 \cdot (1-p)^2$
P(k=2) = P({011},{110},{101}) = $3p^2 \cdot (1-p)^1$
P(k=3) = P({111}) = $1p^3 \cdot (1-p)^0$

Definition durch Binomialverteilung:
$B(k|n,p) = B_{n,p}(k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
B: Bernoulli
k: Anzahl Erfolge
n: Anzahl Versuche
p: Wahrscheinlichkeit für Erfolg

Mit dieser Formel kann man die Wahrscheinlichkeit ausrechnen für k-Erfolge.

Beispiel für eine Ungleichverteilung:
Eine 0 wird zu 90% und eine 1 zu 10% gewürfelt. Wie wahrscheinlich ist es 8 Nullen bei 10 Würfen zu erzielen.

$B(8|10, 0.9) = \binom{10}{8} \cdot 0.9^8 \cdot 0.1^2 = 19.37\%$

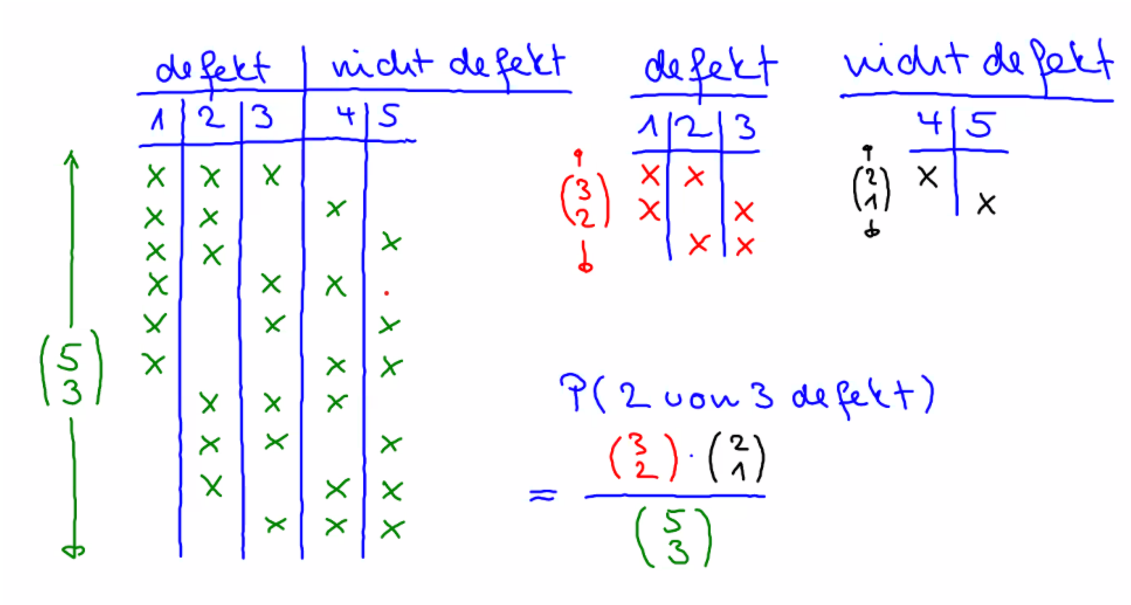
15.2.2 Hypergeometrische Verteilung

Binomialverteilung liegt vor, wenn bei einer Stichprobe die Objekte wieder zurückgelegt werden. Werden die Objekte nicht wieder zurückgelegt handelt es sich um die Hypergeometrische Verteilung.

Beispiel:
Wenn man insgesamt N Objekte hat und M davon sind defekt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n gezogenen Objekten k Objekte defekt sind?

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Anschauliches Beispiel:



Grün: Anzahl der Objekte
Rot: Anzahl der Objekte die defekt sind
Schwarz: Anzahl der Objekte die nicht defekt sind

15.2.3 Poisson-Verteilung

Wenn bei einer Binomialverteilung sehr viele Versuche durchgeführt werden und die Wahrscheinlichkeit sehr klein ist, ist die Annäherung durch die Poisson-Verteilung viel einfacher.
$p \to 0$ und $n \to \infty$ dann $\mu = np$:

$$p(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

15.3 Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable X ist die Verteilungsfunktion $F_X(x)$,

16 Fortgeschrittene Zählmethoden

16.1 Rekursionsbeziehungen

Rekursionsbeziehungen liegen immer vor, wenn ein Wert a_n von einem anderen Wert a_{n-1} abhängt.
Beispiel für Rekursionsbeziehungen:

Wie viele Bitstrings der Länge n gibt es, die keine zwei aufeinanderfolgende Nullen enthalten?

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Ein Bitstring endet mit einer 1 oder 0. Im ersten Fall kann irgendein Wert davor stehen, davon gibt es a_{n-1} Möglichkeiten. Im zweiten Fall muss ein 1 vor der 0 stehen, davon gibt es a_{n-2} Möglichkeiten.

Beispiel Computersystem Passwort:
Ein Passwort ist korrekt, wenn es eine gerade Anzahl von Nullen hat.

a_{n-1} Möglichkeiten bei einer Zahl, welche mit 1-9 endet.
Wenn eine Null steht, dann noch $10^{n-1} - a_{n-1}$ Möglichkeiten.

$a_n = 9 \cdot a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1}$
$a_n = 8 \cdot a_{n-1} + 10^{n-1}$

16.2 Lösen von Rekursionsbeziehungen

Eigenschaften von Rekursionsbeziehungen:
$F(a_n, a_{n-1} \ldots a_2, a_1) = r(n)$

Sie ist homogen, falls $r(n) = 0$

Ordnungen von Rekursionsbeziehungen:
Sie ist k-ter Ordnung, falls F höchstens von Gliedern ab a_{n-k} abhängt.

17 Graphentheorie

17.1 Gewichtete Graphen

Ein gewichteter Graph G hat eine Gewichtsfunktion
$w : E \to (0, \infty), \{u, v\} \to w(u, v)$,
welche jedem Kantenpaar ein Gewicht zuordnet.