Diskrete Mathematik - Übungen SW04

David Jäggli

22. März 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Vollständige Induktion

I.)
Folgende Aussage beweisen: $H_{2n} \geq 1 + \frac{n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

1. **IV:** für $n = 0$: $\quad 1 \geq 1 =$ wahr.
2. **IS:**

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = H_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Keine Ahnung warum $H_{2^{n+1}}$ so definiert ist, wie in den Lösungen.

II.)

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} \frac{a\cdot(a-1)\cdot\dots\cdot(a-k-1)}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$\binom{2n+1}{n} > 2^{n+1}$

Induktionsverankerung:

$a = 2, \quad \binom{4+1}{2} > 2^{2+1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} > 8$
$a = 3, \quad \binom{6+1}{3} > 2^{3+1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6} > 16$

Alle wahr

Induktionsschritt:

$$\binom{2(n+1)+1}{n+1} = \binom{2n+3}{n+1} > 2^{n+2}$$

$$\binom{2n+3}{n+1} = \frac{(2n+3)\cdot(2n+2)\cdot(n+3)\dots(n+1)\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\dots n\cdot(n+1)}$$

Ganz ehrlich: wie man von hier auf die richtige Lösung kommt, ist absolut random.

III.)

Es gilt folgendes zu beweisen:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Induktionsverankerung:

$$1^2 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3} = \text{true}$$

$$1^2 + 3^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3} = \text{true}$$

Induktionsschritt:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + \frac{3 \cdot (2n+3)^2}{3} =$$

$$\frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 + 12n^2 + 36n + 27}{3} = \frac{4n^3 + 24n^2 + 47n + 30}{3} =$$

$$\frac{(n+2)(2n+3)(2n+5)}{3}$$

2 Rekursiv definierte Funktionen

V.)

$H1 : \forall x[f(x) \rightarrow r(x) \vee s(x)]$
$H2 : f(DI) \vee f(DO)$
$H3 : \neg(r(DI) \vee s(DI)))$
$H4 : \neg s(DO)$

H1: $f(DI) \rightarrow (r(DI) \vee s(DI))$ zusammen mit H3 = $\neg f(DI)$
Dann muss H2: $f(DO)$

H1: $f(DO) \rightarrow r(DO) \vee s(DO)$ zusammen mit H4 und obigem Ergebniss: $r(DO)$

Ergibt gesamthaft:

1. $\neg f(DI)$: Dienstag regnet es nicht
2. $f(DO)$: Ich nehme am Donnerstag frei
3. $r(DO)$: Es regnet am Donnerstag