

Analysis Differenzialrechnung

David Jäggli

14. November 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Ableitung	2
1.1	Ziele der Ableitungen	2
2	Differenzierbarkeit	2
2.1	Regeln	2
2.1.1	Potenzregeln	2
2.1.2	Weiterführende Regeln	2
3	Tangente & Normale	4
3.1	Tangente einer Funktion	4
3.2	Normale	4
4	Annäherungen	5
4.1	Lineare Approximation	5
4.2	Höhere Approximation (Taylorpolynom)	5
5	Die Monotonie und Krümmung	6
6	Kurvendiskussion	6
6.1	Berechnungen ohne Differenzialrechnung	6

1 Ableitung

1.1 Ziele der Ableitungen

Die folgenden drei Punkte werden mittels einer Differenzialrechnung erreicht.

1. Das Bestimmen der Tangente in einem Punkt der Kurve $y = f(x)$
2. Das Linearisieren einer Funktion $y = f(x)$ (siehe Kapitel 4)
3. Mit einer neuen Funktion $f'(x)$ (1. Ableitung von $f(x)$) die Steigung an jedem Punkt x von der ursprünglichen Funktion $f(x)$ zu ermitteln.
4. Mit einer neuen Funktion $f''(x)$ (2. Ableitung von $f(x)$) zu bestimmen, ob sich die ursprüngliche Funktion $f(x)$ an jeder beliebigen Stelle x in einer Links- resp. Rechtskrümmung befindet

2 Differenzierbarkeit

Eine Funktion ist immer dann differenzierbar, wenn sie stetig ist und keinen Knick hat.

2.1 Regeln

2.1.1 Potenzregeln

Ursprungsfunktion	Ableitung	Beispiel
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$	$x^2 \Rightarrow 2x$
$f(x) = c = 2$ (konst.)	$f'(x) = 0$	$5 \Rightarrow 0$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$e^x \Rightarrow e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$5^x \Rightarrow \ln(5) \cdot 5^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\ln(x) \Rightarrow \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{a}{(x+n)}$	$f'(x) = -\frac{a}{(x+n)^2}$	$\frac{500}{x+5} \Rightarrow -\frac{500}{(x+5)^2}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$\log_3(x) \Rightarrow \frac{1}{x \cdot \ln(3)}$

2.1.2 Weiterführende Regeln

Faktorregel & Beispiel:

$$f(x) = a \cdot g(x) = a \cdot g'(x)$$

$$f(x) = 2 \cdot x^3 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 = \underline{6x^2}$$

Summenregel & Beispiel:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$x^2 + x^3 \Rightarrow \underline{2x + 3x^2}$$

Produktregel & Beispiel:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$x^3 \cdot x^3 \Rightarrow 3x^2 \cdot x^3 + x^3 \cdot 3x^2 = 3x^5 + 3x^5 = \underline{6x^5}$$

Quotientenregel & Beispiel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^5}{2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{10x^4 \cdot 2x - 2x^5 \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{20x^5 - 4x^5}{4x^2} = \frac{16x^5}{4x^2} = \underline{4x^3}$$

Kettenregel & Beispiel:

$$f(g(x)) \Rightarrow (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \ln(x^4) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \Rightarrow \frac{4x^3}{x^4} = \frac{4}{x}$$

3 Tangente & Normale

3.1 Tangente einer Funktion

Die Tangente an einem Punkt x_0 in einer Funktion lautet folgendermassen:

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 \text{ wobei } y_0 = f(x_0)$$

Der Winkel einer Geraden (Tangente) zur x-Achse kann mit der Tangens resp. Arcustangens Funktion berechnet werden: $\alpha = \arctan(f'(x_0)) \rightarrow$ an der Stelle x_0 hat die Tangente einen Winkel von α zur x-Achse.

3.2 Normale

Die Normale oder senkrechte Funktion lässt sich folgendermassen berechnen:

Aus $g_1 \perp g_2$ folgt, dass $m_1 \cdot m_2 = -1$

resp. $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Eine Gerade ist definiert durch: $y = mx + q$. Die Steigung m der Normalen ist wie oben beschrieben einfach der negative Kehrwert der Steigung der Tangente. Den y -Wert kann man durch Einsetzen des Punktes berechnen.

Beispiel:

Gegeben: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Gesucht: Tangente und Normale bei $x = 0$

Steigung der Tangente: $m_1 = f'(x = 0) = -2$

Steigung der Normale: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = 0.5$

Für q einfach die Steigung in der Gleichung einsetzen.

Durch $f(x)$ ist definiert, dass bei $x = 0 \rightarrow y = 1$, heisst:

Für die Tangente: $1 = m_1x + q \Rightarrow 1 = -2x + q \Rightarrow q = 1$ weil $x = 0$

Für die Normale: $1 = m_2x + q \Rightarrow 1 = 0.5x + q \Rightarrow q = 1$ weil $x = 0$

Tangente = $f(x) = -2x + 1$

Normale = $f(x) = 0.5x + 1$

4 Annäherungen

Oftmals ist es nicht nötig (zu aufwändig/schwierig) oder gar nicht möglich die exakte Funktion zu berechnen (z.B. $\ln(x)$). Um dieses Problem zu beheben, erstellt man eine Annäherungsfunktion in einem gewissen Bereich, welche genügend nah an die ursprüngliche Funktion herankommt.

4.1 Lineare Approximation

Eine lineare Annäherung an einem Punkt x_0 ist die Tangente der Funktion am Punkt x_0 , welche mit der Tangentenformel berechnet werden kann:

$$\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \Rightarrow f'(x_0)(x - x_0)$$

4.2 Höhere Approximation (Taylorpolynom)

Eine quadratische oder kubische Annäherung (Taylorpolynom) einer Funktion kommt viel näher an die tatsächliche Funktion heran, da sie die Krümmung berücksichtigt. Sofern die Ursprungsfunktion $f(x)$ n -mal differenzierbar ist, kann ein Taylorpolynom wie folgt gebildet werden:

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \dots + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

5 Die Monotonie und Krümmung

Ob eine Funktion $f(x)$ am Punkt x_0 links oder rechtsgekrümmt ist, kann man mit der 2. Ableitung bestimmen.

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ **linksgekrümmt/konvex**

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ **rechtsgekrümmt/konkav**

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ **Wendepunkt**

	$f'(x) > 0 \Rightarrow$ wachsend	$f'(x) < 0 \Rightarrow$ fallend
$f''(x) > 0$ konvex		
$f''(x) < 0$ konkav		

6 Kurvendiskussion

6.1 Berechnungen ohne Differenzialrechnung

Eigenschaft	Mathematische Bedingung
Schnittpunkt mit der y-Achse	Lorem ipsum
Nullstellen	Lorem ipsum
Vertikale Asymptote (ein Pol)	Lorem
Symmetrien (gerade resp. ungerade Funktionen)	Für gerade Funktionen $f(x) = f(-x)$ Für ungerade Funktionen $f(x) = -f(-x)$ resp. $-f(x) = f(-x)$