Analysis Differential Rechnung

David Jäggli

30. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Ableitung

1.1 Ziele der Ableitungen

Die folgenden drei Punkte werden mittels eine Differentialrechnung erreicht.

1. Das Bestimmen der Tangente in einem Punkt der Kurve $y = f(x)$
2. Das Linearisieren einer Funktion $y = f(x)$ (siehe Kapitel 4)
3. Mit einer neuen Funktion $f'(x)$ (1. Ableitung von $f(x)$ die Steigung an jedem Punkt x von der ursprünglichen Funktion $f(x)$ zu ermitteln.
4. Mit einer neuen Funktion $f''(x)$ (2. Ableitung von $f(x)$) zu bestimmen ob sich die ursprüngliche Funktion $f(x)$ an jeder beliebigen Stelle x in einer Links- resp. Rechtskrümmung befindet

2 Differenzierbarkeit

Eine Funktion ist immer dann differenzierbar wenn sie stetig ist und keinen Knick hat.

2.1 Regeln

2.1.1 Potenzregeln

Ursprungsfunktion	Ableitung	Beispiel
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$	$x^2 \Rightarrow 2x$
$f(x) = c = 2$ (Konst.)	$f'(x) = 0$	$5 \Rightarrow 0$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$e^x \Rightarrow e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = ln(a) \cdot a^x$	$5^x \Rightarrow ln(5) \cdot 5^x$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$ln(x) \Rightarrow \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{a}{(x+n)}$	$f'(x) = -\frac{a}{(x+n)^2}$	$\frac{500}{x+5} \Rightarrow -\frac{500}{(x+5)^2}$
$f(x) = log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$	$log_3(x) \Rightarrow \frac{1}{x * ln(3)}$

2.1.2 Regeln für verknüpfte Funktionen

Faktorregel & Beispiel:

$$f(x) = a \cdot g(x) = a \cdot g'(x)$$

$$f(x) = 2 \cdot x^3 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 = \underline{6x^2}$$

Summenregel & Beispiel:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

$$x^2+x^3 \Rightarrow \underline{2x+3x^2}$$

Produktregel & Beispiel:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$x^3\cdot x^3 \Rightarrow 3x^2\cdot x^3 + x^3\cdot 3x^2 = 3x^5+3x^5 = \underline{6x^5}$$

Quotientenregel & Beispiel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(x)=\frac{2x^5}{2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{10x^4\cdot 2x-2x^5\cdot 2}{(2x)^2}=\frac{20x^5-4x^5}{4x^2}=\frac{16x^5}{4x^2}=\underline{4x^3}$$

Kettenregel & Beispiel:

$$f(g(x)) \Rightarrow (f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$f(x)=ln(5x^6)=ln(g(x)) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{g(x)}$$

3 Tangente & Normale

3.1 Tangente einer Funktion

Die Tangente an einem Punkt x_0 in einer Funktion lautet folgendermassen:
$f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$ wobei $y_0 = f(x_0)$

Der Winkel einer Geraden (Tangente) zur x-Achse kann mit der tangens resp arctan Funktion berechnet werden: $\alpha = arctan(f'(x_0)) \rightarrow$ an der Stelle x_0 hat die Tangente einen Winkel von α zur x-Achse.

3.2 Normale

Die Normale oder senkrechte Funktion lässt sich folgendermassen berechnen:
Aus $g_1 \perp g_2$ folgt, dass $m_1 \cdot m_2 = -1$
resp. $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Eine Gerade ist definiert durch: $y = mx + q$. Die Steigung m der Normalen ist wie oben beschrieben einfach der negative Kehrwert der Steigung der Tangente. Den y-Wert kann man durch Einsetzen des Punktes berechnen.

Beispiel:
Gegeben: $f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 2$
Gesucht: Tangente und Normale bei $x = 0$
Steigung der Tangente: $m_1 = f'(x = 0) = -2$
Steigung der Normale: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = 0.5$

Für q einfach die Steigung in der Gleichung einsetzen.
Durch $f(x)$ ist definiert, dass bei $x = 0 \rightarrow y = 1$, heisst:
Für die Tangente: $1 = m_1x + q \Rightarrow 1 = -2x + q \Rightarrow q = 1$ weil $x = 0$
Für die Normale: $1 = m_2x + q \Rightarrow 1 = 0.5x + q \Rightarrow q = 1$ weil $x = 0$

Tangente = $\underline{f(x) = -2x + 1}$
Normale = $\underline{\underline{f(x) = 0.5x + 1}}$

4 Annäherungen

Oftmals ist es nicht nötig (zu aufwändig/schwierig) oder gar nicht möglich die exakte Funktion zu berechnen (z.B. ln(x)). Um dieses Problem zu beheben, erstellt man eine Annäherungsfunktion in einem gewissen Bereich, welche genügend nah an die ursprüngliche Funktion herankommt.

4.1 Lineare Approximation

Lineare Annäherung an einem Punkt x_0 ist die Tangente der Funktion am Punkt x_0

$$\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \Rightarrow f'(x_0)(x - x_0)$$

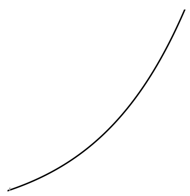
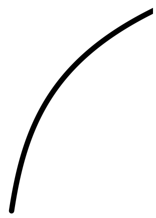
4.2 Höhere Approximation (Taylorpolynom)

Eine quadratische oder qubische Annäherung (Taylorpolynom) einer Funktion kommt viel näher an die tatsächliche Funktion heran, da sie die Krümmung berücksichtigt. Sofern die Ursprungs funktion $f(x)$ n-mal differenzierbar ist kann ein Taylorpolynom wie folgt gebildet werden:

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + ... + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + f(x_0)$$

5 Die Monotonie und Krümmung

Ob eine Funktion $f(x)$ am Punk x_0 links oder rechtsgekrümmt ist, kann man mit der 2. Ableitung bestimmen.
$f''(x) > 0 \Rightarrow$ **linksgekrümmt/konvex**
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ **rechtsgekrümmt/konkav**

	$f'(x) > 0 \Rightarrow$ wachsend	$f'(x) < 0 \Rightarrow$ fallend
$f''(x) > 0$ konvex		
$f''(x) < 0$ konkav		