# 武汉理工大学研究生考试试卷

**2019 ~2020 学年 1 学期 矩阵论(学硕) 课程 2020 年 1 月 4 日**

**（请在答题本上作答，不必抄题，但须标明题目序号）**

**一．填空题（每小题 3 分，共 15 分）**

（1）已知线性空间 $F[t]_3=\{f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2;a_0,a_1,a_2\in F\}$ 的两组基

$$（\mathrm{I}）：1,\ t,\ t^2；\qquad （\mathrm{II}）：2,\ t+1,\ (t+1)^2$$

则由基（I）到（II）的过渡矩阵为________

（2）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则矩阵的奇异值为________

（3）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$，则 $A$ 的 LU 分解为____________

（4）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $A$ 的 QR 分解为________

（5）已知矩阵 $A$ 如第（4）题，则 $B=E-A^TA$ 的范数

$$\|B\|_{m_1}=\_\_\_\_\_\_\_\_；\ \|B\|_{m_\infty}=\_\_\_\_\_\_\_\_；\ \|B\|_F=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

二．**（15 分）**设 $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & -15\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & -6\end{pmatrix}$

（1）求 $A$ 的行列式因子，不变因子，初等因子；

（2）求 $A$ 的 Jordan 标准形和 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形；

（3）求 $A$ 的最小多项式.

三．**（15 分）**对于 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$，定义

$$T(\alpha)=(x_1+x_2,x_1-x_3,0),$$

（1）证明 $T$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换；

（2）设$\mathbb{R}^3$的一组基为$\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$，求线性变换$T$在这组基下的矩阵；

（3）求$T$的核空间的一组基和维数.

**四．（15分）**已知微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}，\quad A=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad x_0=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

（1）求$\sin A$；

（2）求$e^{At}$，并求微分方程组的解.

**五．（20分）**设$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$。

（1）求$A$的满秩分解；

（2）求$A$的广义逆$A^+$；

（3）求$Ax=b$的最小二乘解；

（4）求$Ax=b$的极小范数最小二乘解.

**六．（20分）**设$\mathbb{R}^{2\times2}$的子空间

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\middle|\, x_1+x_2-x_3=0,x_1+x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$V_2=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

（1）求$V_1$的基和维数；

（2）证明：$V_1+V_2$是直和；

（3）对于$A=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}y_1&y_2\\y_3&y_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，定义内积

$$(A,B)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4,$$

求$V_1$的正交补$V_1^{\perp}$的一组标准正交基.