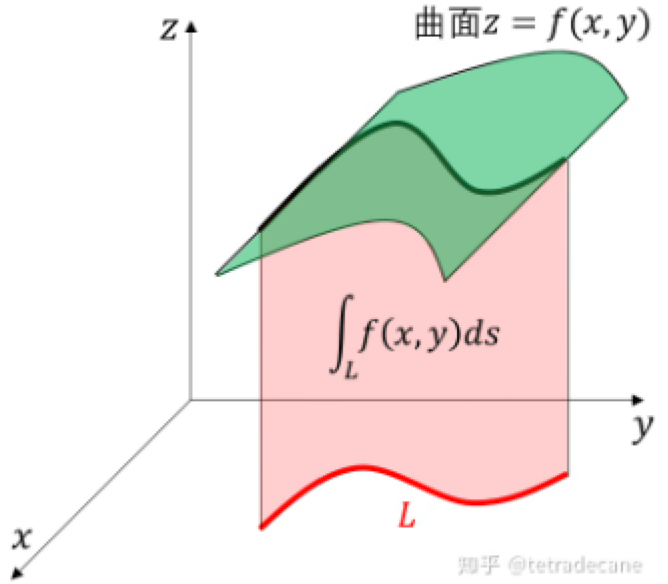
曲线积分与曲面积分

- 一重积分：在数轴的一个闭区间与函数所围成的面积（被积函数为平面曲线）$\int_a^b f(x)dx$
- 二重积分：在空间坐标系上函数与其投影所围成的空间体积（被积函数为空间曲面）$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$
- 三重积分：在空间有界闭区域与其被积函数围成的密度或质量（通常四维空间使用密度或质量代替）
- 曲线积分：求给定曲线的弧长与被积函数值之和（被积函数自定义在弧长的值域之和）
- 对坐标曲线积分：曲线积分中被积分函数拆分为X方向P(x,y)，Y方向Q(x,y)函数被积函数
- 曲面积分：求给定曲面的范围与被积函数值之和（求解曲面的质量、体积、密度等物理量）
- 对坐标的曲线积分（第二类曲面积分）：曲面积分中被积分函数拆分为X方向P(x,y,z)，Y方向Q(x,y,z)函数，Z方向R(x,y,z)被积函数之和

曲线积分

> $$\int_L f(x,y)ds = lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i$$
>
> $$f(x,y)\text{被积函数(密度函数)，}L\text{为积分弧段，}ds\text{：被积曲线微分}$$
>
> 
>
>
> 曲线L与曲面f(x,y)所围成的面积或质量
>
> eg：当曲线勾搭的线密度p(x,y)在曲线弧L上连续时，该构件质量为 $M = \int_L p(x,y)ds$
>
> **曲线积分性质**
>
> - $\int_L ds = |L|$其中|L|表示曲线弧L长度
> - 其他同积分
>
> **曲线积分计算**

$$\text{曲线参数方程}L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}\quad(a\le t\le b)$$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(\psi(t),\phi(t))\sqrt{(\psi`(t))^2+(\varphi`(t))^2}dt$$

$$\text{当参数方程为}x=t,y=\varphi(t)\text{时：}$$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$$

对坐标的曲线积分

被积分函数分解为 $F(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$ ，将i，j分别做x，y上的微分，则存在关系

$$\int_L F(x,y)dxdy=\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy$$

对坐标的曲线积分计算 （通过参数方程统一微分变量）

$$\text{参数方程}L\text{：}\begin{cases}x=\psi(t),\\y=\varphi(t)\end{cases}$$

$$t:A\to B$$

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b P(\psi(t),\varphi(t))\psi(t)`dt+\int Q(\psi(t),\varphi(t))\varphi(t)`dt$$

一类曲线积分与二类曲线积分

- 一类曲线积分：在弧上所有点与其距离乘积的累加 $f(x_i,y_i)\Delta s_i$，其中Δs_i代表L_i到L_{i-1}长度化为$\Delta x\Delta y$的方向增量为$\Delta s=\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}$
- 二类曲线积分：某点沿弧方向上向量作x轴y分解得到 $P(x,y)\Delta x+Q(x,y)\Delta y$
- 一类曲线积分与二类曲线积分转换

$$P(x,y)\Delta x+Q(x,y)\Delta y=(P\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}}+Q\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}})\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}$$

$$f(x_i,y_i)\cdot\sqrt{\Delta^2x+\Delta^2y}=Pcos\alpha+Qcos\beta$$

格林公式 （曲线积分与二重积分转换）

单连通区域：闭合曲线包含的全部区域

复连通区域：闭合曲线中存在不包含的区域

正方向：外界边逆时针，内界边顺时针

$$\text{格林公式}:\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

$$\text{其中}L\text{为}D\text{的正方向边界曲线}$$

$$\oint_L Pdx+Qdy\text{：为二类曲线积分}$$

平面曲线积分与路径无关条件

曲线积分与路径无关充分必要条件

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

设开区域D为单连通区域，函数P(x,y)，Q(x,y)在D内具有连续的一阶偏导数，则P(x,y)dx+Q(x,y)dy在D内为某个**函数u(x,y)的全微分充要条件为**

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

曲面积分

被积分函数为三元积分

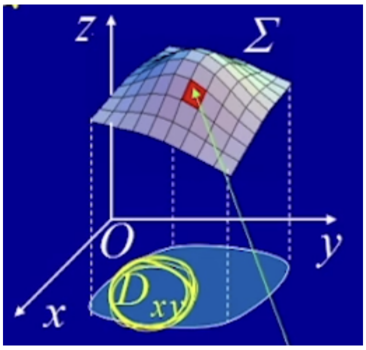
$$lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x,y,z)\Delta s = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$$

第一类曲面积分

曲面积分计算

$\Sigma = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}, f(x,y,z)$在Σ上连续，则曲面积分$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$存在，且有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$



1. 求空间曲面在xoy面上投影
2. 求三元曲面z关于x,y的隐函数 z(x,y)，并带入被积曲面积分
3. $ds = \sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$
4. 求二重积分

对坐标的曲面积分

侧的方向

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧	>0 为右侧	>0 为上侧	外侧
	<0 为后侧	<0 为左侧	<0 为下侧	内侧

其中 a 为曲面该点的法向量与x轴夹角，b为曲面法向量与y轴夹角，y为曲面法向量与z轴夹角

> 在Σ上定义一个向量场$\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，若对Σ的任意分割和在局部面上任意取点，下列极限都存在
>
> $$lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dydz$$
>
> $$\phi=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$