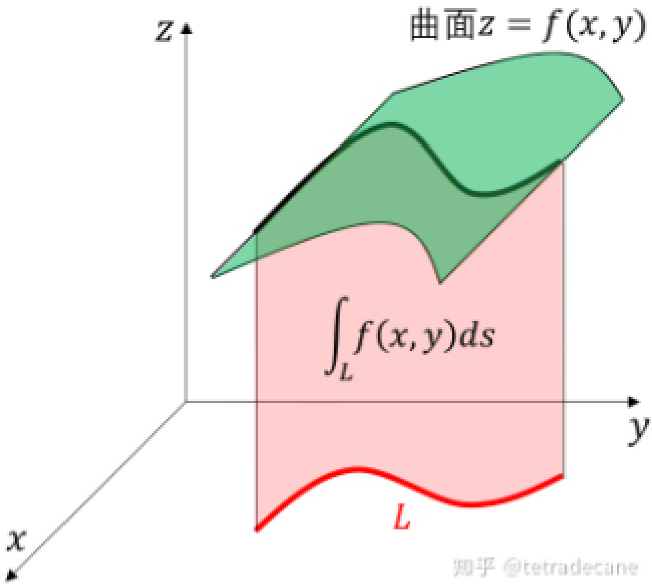
曲线积分与曲面积分

*曲线曲面积分与之前重积分不同之处在于积分区域的不同，之前描述的一重积分在数轴上的一个闭区间与函数所围成的面积，二重积分在空间坐标系上函数与其投影所围成的空间体积，三重积分为空间有界闭区域与其被积函数**所围成的密度(通常四维空间使用密度或质量代替)***

曲线积分

> *设L为Oxy平面内一条曲线弧，端点为A,B，其被积分函数f(x,y)在L上有界，在L上定义n-1个点*
> $M_1(x_1,y_1)...M_n(x_n,y_n)$，并取$M_1=A,M_n=B$则把L分为n+1小段其每段长度为$\Delta s$，$L$上任意一点与$\Delta s$做乘积的到$f(x_i,y_i)\Delta s_i$，并对i求和$\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta s_i$当最小弧长度趋近于0时，则f(x,y)和式极限存在，此函数在f(x,y)在曲线L上弧长的曲线积分
>
> $$\int_L f(x,y)ds = lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta s_i$$
> $$f(x,y)\text{被积函数(密度函数)，}L\text{为积分弧段，}ds\text{：被积曲线}$$
>
> 
>
>
> L与曲面f(x,y)所围成的面积，或(x,y)在L上线质量密度f(x,y)
>
> 当曲线勾搭的线密度p(x,y)在曲线弧L上连续时，该构件质量为$M=\int_L p(x,y)ds$
>
> **曲线积分性质**
>
> - $\int_L ds = |L|$其中|L|表示曲线弧L长度
> - 其他同积分
>
> **曲线积分计算**
>
> $$\text{曲线参数方程}L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}\quad(a\le t\le b)$$
> $$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(\psi(t),\phi(t))\sqrt{(\psi`(t))^2+(\varphi`(t))^2}dt$$
> $$\text{当参数方程为}x=t,y=\varphi(t)\text{时：}$$
> $$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$$

对坐标的曲线积分

> *定义：设L为Oxy平面从点A到点B的一条**有向**光滑曲线弧，函数P(x,y),Q(x,y)在L上有界，在L上沿L方向任意插入n-1个点$M_1(x_1.y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，$...M_i(x_i,y_i)$把L分为n段有向弧，设$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，当各段弧长趋近于0时，和式$\sum_{i=1}^{n} P(x,y)\Delta x_i$ 极限存在，则函数P(x,y)在有向弧L上对x积分为$\int_L P(x,y)dx$，对y积分为$\int_L Q(x,y)dy$，P(x,y)，Q(x,y)叫做被积函数，L叫做积分弧段，二类曲线积分*
>
> **对坐标的曲线积分计算**
>
> $$\text{参数方程}L\text{：}\begin{cases} x=\psi(t), \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$
> $$t:A \to B$$
> $$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_a^b P(\psi(t),\varphi(t))\psi(t)`dt + \int Q(\psi(t),\varphi(t))\varphi(t)`dt$$
>
> *一类曲线积分与二类曲线积分*
>
> - *一类曲线积分：在弧上所有点与其距离乘积的累加* $f(x_i,y_i)\Delta s_i$，其中Δs_i代表L_i到L_{i-1}长度化为$\Delta x \Delta y$的方向增量为$\Delta s = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$
> - *二类曲线积分：某点沿弧方向上向量作x轴y分解得到* $P(x,y)\Delta x + Q(x,y)\Delta y$
> - 一类曲线积分与二类曲线积分转换
>
> $$P(x,y)\Delta x + Q(x,y)\Delta y = (P\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta^2 x+\Delta^2 y}} + Q\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta^2 x+\Delta^2 y}})\sqrt{\Delta^2 x+\Delta^2 y}$$
> $$f(x_i,y_i)\cdot\sqrt{\Delta^2 x+\Delta^2 y} = Pcos\alpha + Qcos\beta$$

格林公式 *求闭合区域边界曲线的二重积分*

> *平面上沿闭曲线L对坐标的曲线积分与曲线L所围成闭区域D上的二重积分关系*
>
> 单连通区域：闭合曲线包含的全部区域
>
> 复连通区域：闭合曲线中存在不包含的区域
>
> 正方向：外界边逆时针，内界边顺时针
>
> $$\text{格林公式：}\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx+Qdy$$
> $$\text{其中}L\text{为}D\text{的正方向边界曲线}$$
> $$\oint_L Pdx+Qdy\text{：为二类曲线积分}$$
>
> **格林公式计算**
>
> - 通过曲线积分求D的二重积分
>
> > 1. 带入格林公式直接计算二重积分
>
> - 通过二重积分求曲线积分
>
> > 1. 设置未知变量积分求P，Q
> > 2. 计算P，Q二类曲线积分

平面曲线积分与路径无关条件

当曲线L从A到B或从B到A的二类曲线积分相等，即$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$*，则曲线积分在D内与路径无关*

当$\int_L Pdx + Qdy$**在D内与路径无关的充要条件时其闭合曲线积分为0**

其格林公式必有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

- 设开区域D为单连通区域，函数P(x,y)，Q(x,y)在D内具有连续的一阶偏导数，则P(x,y)dx+Q(x,y)dy在D内为某个**函数u(x,y)的全微分充要条件为**

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

- d(x,y)=P(x,y)dx + Q(x,y)dy

曲面积分

被积分函数为三元积分

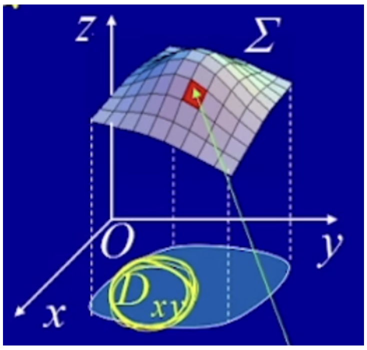
$$lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x, y, z)\Delta s = \iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$$

第一类曲面积分

曲面积分计算

$\Sigma = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}, f(x, y, z)$在$\Sigma$上连续，则曲面积分$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$存在，且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}dxdy$$



1. 求空间曲面在xoy面上投影
2. 求三元曲面z关于x,y的隐函数 z(x,y)，并带入被积曲面积分
3. $ds = \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}dxdy$
4. 求二重积分

对坐标的曲面积分

侧的方向

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧

其中 a 为曲面该点的法向量与x轴夹角，b为曲面法向量与y轴夹角，y为曲面法向量与z轴夹角

在Σ上定义一个向量场$\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，若对$\Sigma$的任意分割和在局部面上任意取点，下列极限都存在

$$lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dydz$$

$$\phi=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$