多元函数的微分学

- **多元函数的复合函数**

> $$u=f(v)\quad v=g(x,y)$$
> $$u=F(x,y)=f(g(x,y))$$

- **隐函数**

> *给定二元方程F(x,y)=0，如果该方程有解，则可以确定一元方程y=y(x)，即F(x,y)的x,y存在y=y(x)关系*

- **多元函数**

> **多元函数极限**
>
> $$lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$$
>
> 二重极限充要条件：点P(x,y)**从任意方式**趋近于点$P_0(x_0,y_0)$，**其函数f(x,y)的极限都存在且相等**
>
> ---
>
> **多元函数连续**
>
> $$设函数f(x,y)在点P_0(x_0,y_0)的某个领域内有定义$$
>
> $$lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$
>
> $$f(x,y)在P_0(x_0,y_0)处连续$$
>
> - 如果函数f(x,y)在有界闭区域D上连续，则函数f(x,y)在D上有最大值和最小值
>
> ---
>
> **多元函数偏导数与全微分**
>
> **偏导数**
>
> *偏导数实际为该函数某个点上**其中一个变量增量趋近为0的极限***
>
> $$lim_{\triangle x\to0}=\frac{\triangle F}{\triangle x}=\frac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle x}$$
> $$记为z_x(x_0,y_0)$$
>
> $$f(x,y)二阶偏导记为f_{xx}(x,y)$$
> $$当f(x,y)在区间内连续时，其两个混合偏导f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$
>
> **全微分**
>
> $$\triangle z=f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x,y)$$
> $$\triangle x\to0\qquad\triangle y\to0$$
> $$全微分：dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$
>
> - **可微充分条件**：若函数z=f(x,y)的两个偏导数在点(x,y)处连续，则函数f(x,y)在点(x,y)处可微
> - **可微必要条件**：若函数z=f(x,y)在(x,y)处两个偏导数都存在，且常数A，B是这两个偏导数
> - 可微=连续+可导
> - 全增量：$\triangle z=f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x,y)$
> - **函数在某点(x_0,y_0)连续充要条件**：$lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$
> - **函数在某点(x_0,y_0)可导充要条件**：$lim_{\triangle x\to0}\frac{f(x_0+\triangle x,y)}{\triangle x}$ **函数在某点可导与连续无关系**

- **复合函数与隐函数的导数和偏导数**

> **复合函数链式求导：**
>
> $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
>
> **隐函数的导数和偏导数：**
>
> 设二元方程F(x,y)在点(x_0,y_0)的某个领域内具有连续的偏导数且 $F_y(x_0,y_o)\neq 0, F(x_0,y_0)=0$ 使得方程F(x,y)=0在点(x_0,y_0)在领域内可以唯一确定具有连续导数的**隐函数y=f(x)**并有
>
> $$\text{方程}F(x,y)=0\text{的隐函数}y=f(x)\text{求导}$$
> $$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$
> $$\text{三元方程}F(x,y,z)=0\text{的隐函数}z=f(x,y)\text{求导}$$
> $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

- **偏导数应用**

  - **多元函数极值计算**

    > 极值：函数指定义域U总有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$成立，则称$f(x_0,y_0)$为f(x,y)的一个极大值
    >
    > 最值：函数在其有效的定义域D内总有$f(x,y)<f(x_0,y_0)$成立
    >
    > ---
    >
    > 极值必要条件：函数f(x,y)在点P(x,y)处的两个偏导数都存在。$f_x(x,y)=0,f_y(x,y)=0$，点（x,y)为函数f(x,y)的驻点
    >
    > (x_0,y_0)是函数$f(x,y)$的驻点，则有$A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，$\triangle=B^2-AC$
    >
    > | $\triangle<0,A<0$ | (x_0,y_0)**为极大值** |
    > | --- | --- |
    > | $\triangle<0,A>0$ | (x_0,y_0)为极小值 |
    > | $\triangle>0,A<0$ | (x_0,y_0)不是极值点 |
    > | $\triangle=0$ | (x_0,y_0)不做判断 |
    >
    > ---
    >
    > **条件极值**
    >
    > *函数自变量，及其他附加条件求极值*
    >
    > **拉格朗日乘数法：** 设二元函数f(x,y)和$\varphi(x,y)$在所考虑的区域内具有连续的偏导数，且$\varphi_x(x,y),\varphi_y(x,y)$不同时为零。构造拉格日朗函数：
    >
    > $$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$
    > $$\text{其中}\lambda\text{为拉格朗日乘数，}L(x,y)\text{为拉格朗日函数}$$
    >
    > $$\text{构造求极值方程组}$$
    > $$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0,\\ \varphi(x,y)=0,\end{cases}$$
    > $$\text{其解是可疑极值点}$$

  - **几何应用**

    > **空间曲线上某点斜率（切向量）与法平面**

$$L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

$$\text{设曲线}L\text{上的点}P(x_0,y_0,z_0)\text{具有连续偏导数且不同时为}0,$$

$$\text{则点}P\text{上方向向量为}\vec{s}=\{x^{\backprime}(t_0),y^{\backprime}(t_0),z^{\backprime}(t_0)\},$$

$$P\text{上法平面}x^{\backprime}(t_0)(x-x_0)+y^{\backprime}(t_0)(y-y_0)+z^{\backprime}(z_0)(z-z_0)=0$$

给定参数方程求斜率，需要先求出该点参数变量，求导后带入参数变量的到方向向量

空间曲面的切平面与法线

设曲面Σ的方程为F(x,y,z)=0，且函数F(x,y,z)具有连续的偏导数，且三个偏导数不同时为0。设点 $P(x_0,y_0,z_0)$*是Σ上一个点，存在曲线Γ也经过该点，该点Γ参数方程为*

$$\Gamma\text{：}\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

$$t=t_0\text{，即}x_0=x(t_0)\text{，}y_0=y(t_0)\text{，}z_0=z(t_0)$$

$$\because F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0\quad\therefore\frac{d}{dt}F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$$

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}\text{为曲面}\Sigma\text{在点}P\text{处的法向量，同时还是该点方向向量}$$

方向导数

偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$ 分别是该函数在(x,y)处沿x，y轴方向的变化率，方向导数为函数沿**某个向量**的变化率

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{（x_0,y_0）}\text{表示为点}(x_0,y_0)\text{沿}l\text{方向的导数}$$

- 函数的方向导数存在，其偏导数未必存在

方向导数计算（数量积）

$$f(x,y)\text{在}(x_0,y_0)\text{点可微，且方向导数存在则：}\frac{\partial z}{\partial l}|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial z}{\partial x}cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}cos\beta$$

$$\text{其中}\alpha,\beta\text{是}l\text{与}x\text{轴，}y\text{轴的正向夹角}\quad\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

$$l\text{的方向向量}cosa,cosb$$

梯度（方向导数的向量，方向导数取最大值）

$$gradf(x_0,y_0)=\{\frac{\partial z}{\partial x}cos\alpha\text{，}\frac{\partial z}{\partial y}cos\beta\}$$