无穷级数

- ## 常数项级数

> *无限个常数求和，* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + ... + u_n$ 为常数项无穷级数　u_n 为一般项
>
> 收敛：$lim_{n \to \infty} S_n = S$，$S$ 为所有常数项之和，S_n 为前 n 项常数之和
>
> 余项：$S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ...$
>
> ---
>
> **等比级数**
>
> $$a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} = S_n \quad \text{其中} a \neq 0$$
> $$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$
> $$|q| < 1 \quad lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$
> $$|q| > 1 \text{时发散}$$
> $$q = 1 \text{发散}$$
> $$q = -1 \text{极限不存在(发散)}$$
>
> ---
>
> **P级数**
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + ... + \frac{1}{n^p} \qquad p > 0$$
> $$\text{当} p > 1 \text{时收敛，当} p \leq 1 \text{时发散}$$
> $$p = 1 \text{时，为调和级数：} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$
>
> **基本性质**
>
> - $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s　且 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 ks，k 不等于0
> - 两个收敛级数相加减的到的级数也是收敛，相加减后收敛。相加减后收敛的级数，原级数未必收敛
> - 级数加上或减少**有限项**，其敛散性不变（**收敛的和会变**）
> - 级数收敛，任意加括号得到的级数也收敛，且和不变（**加括号收敛，原来级数未必收敛，加括后发散，原级数一定是发散的**）
> - $\sum u_n$ 收敛，一定存在 $u_n \to 0$，　$u_n \to 0$ 未必收敛
>
> - $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛
> - $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 条件收敛
>
> **正项级数**
>
> > $u_n \geq 0$ 的级数

正项级数敛散判断

- 存在$\sum u_n$与$\sum v_n$是正项级数，且 $v_n \le u_n$，u_n收敛，其v_n收敛，v_n发散，u_n发散（**通常与等比级数，调和级数，p级数对比判断敛散性**）
- $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}(0<l<+\infty)$则$\sum v_n$与$\sum u_n$敛散性相同
- $lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=p$　当$p<1$收敛，$p>0$发散，$p=1$时无法判断
- $\sum u_n$为正项，当$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p$　$p<1$收敛，$p>1$发散

交错级数（相邻项之间正负号相反）

- 对于一切正整数n存在 $u_{n+1}\le u_n$
- $lim_{n\to\infty}u_n$ =0

则存在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛

- **幂级数**

幂级数：
$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+....+a_n(x-x_0)^n$
当t=$x-x_0$ 存在 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$

收敛点：自变量x使级数收敛，该自变量x为收敛点

收敛域：自变量x在某范围内函数收敛，该范围为收敛域

和函数：$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$

幂级数收敛半径计算 (幂函数系数极限比)

$$lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=p$$

$$R=\begin{cases}|\frac{1}{p}| & p>0\\ +\infty & p=0\\ 0 & p=+\infty\end{cases}$$

收敛域半径端点是否收敛需要用其他方法证明

幂级数和的运算

- 设幂级函数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为R，其和函数s(x)在(-R,R)上可积的，对于任意x有积分公式

$$\int_0^x s(t)dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

- 设幂级函数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为R，其和函数s(x)在(-R,R)上可导的，对于任意x有求导公式

$$s'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

求幂级数的和函数，一般将其转换为等比级数求和推导

- ## 函数的幂级数展开式

> 如果函数f(x)在区间(R,R)内可以展开幂级数即
>
> $$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$
>
> $$当x=x_0时，泰勒系数为a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$
>
> $$泰勒级数：f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$
>
> $$麦克劳林级数：泰勒级数x_0=0时f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$
>
> 函数f(x)在点x_0的某个邻域U上具有任意阶导数，则f(x)在该领域内可以展开泰勒级数
>
> $$lim_{x\to\infty}R_n(x)=0 \quad x\in U$$
> $$R_n(x)为f(x)展开幂级数的通项$$
>
> - f(x)的幂极展开式
>   1. 求f(x)各阶级导数
>   2. 求出泰勒系数a_n ($x=x_0$时，$a_n=\frac{f^n(x_0)}{n!}$)，及泰勒级数：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$
>   3. 当$x_0=0$时带入泰勒级数中

- ## 傅里叶级数

> *任何周期性函数都可以用正弦函数（Sin）和余弦函数（Cos）构成的无穷级数来表示（正弦函数与余弦函数正相交）*
>
> **三角函数系：**

- **附录**

$f(x)=e^x的幂级展开式为f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^n}{n!}+...$

$f(x)=sinx的幂级展开式为f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....$

$f(x)=cosx的幂级展开式为f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....$$

$f(x)=\frac{1}{1-x}的幂级展开式为f(x)=1+x+x^2+x^3+...+x^n \quad 其中（-1<x<1）$

$f(x)=\frac{1}{1+x}的幂级展开式为f(x)=1-x+x^2-x^3+(-1)^nx^n+.... 其中（-1<x<1)$

$f(x)=ln(1+x)的幂级展开式为f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+....其中（-1<x\leq1)$

$f(x)=a^x的幂级展开式f(x)=1+xlna+\frac{x^2(lna)^2}{2!}+\frac{x^3(lna)^3}{3!}+\frac{x^n(lna)^n}{n!}+...$

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+(-1)^nx^{2n}$