随机变量的数字特征

- **数学期望（均值）**

> 离散型随机变量的期望 （随机变量与其概率之和）
>
> $$EX=\sum_{k=1}^{\infty}x_kP_k \qquad \text{若}\sum_{k=1}^{\infty}x_kP_k\text{绝对收敛}$$
> $$\text{数学期望不一定都存在}$$
>
> **连续型随机变量期望**
>
> $$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx \quad \text{绝对收敛}$$
>
> 随机变量函数数学期望
>
> $$EX=\sum g(x_i)P_i$$
>
> ---
>
> **数学期望性质**(便于计算数学期望)
>
> 1. EC =C （常数期望）
> 2. E(X+C) = EX +C
> 3. E(cX) = c(EX)，E(kX+b) = kEX+b
> 4. E(X±Y) = E(X) ± E(Y)
> 5. **当X，Y随机变量相互独立时**，E(XY) = E(X) · E(Y)

- **方差**

> 与数学期望偏离程度
>
> $$DX=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2 \qquad \text{标准差}\sqrt{DX}$$
>
> 离散型：$DX=\sum_k(x_k-EX)^2P_k$
>
> 连续型：
>
> $$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2f(x)dx$$
>
> **方差性质**
>
> - DC=0
> - D(X+C) =DX
> - D(CX) =C^2DX， D(kX+b) =k^2Dx
> - D(X±Y) =$DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$ 当X，Y相互独立时 2Cov(X，Y) = 0
> - X，Y独立，D(X±Y) = DX+DY
>
> **常见随机变量方差**
>
> - **0-1分布**

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$$
$$D(X)=p-p^2$$

- **二项分布** X~B(n,p)

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$
$$E(X)=np$$
$$D(x)=np(1-p)=npq$$

  二项分布转正态分布： X~N(np，npq)

  二项分布转泊松分布： X~P(np)

- **泊松分布** X~P(λ)

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
$$E(X)=\lambda$$
$$D(X)=\lambda$$

  泊松分布转正态分布：X~N(λ，$\frac{1}{k}$)

- **均匀分布** X~U(a,b)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & 其他\end{cases}$$
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & b\le x\end{cases}$$
$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$
$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

- **指数分布** X~E(λ)

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$
$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$
$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$
$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

- **正态分布** X~N(u,σ^2)

$$标准正态分布(u=0,\sigma=1)$$
$$F_0(-x)=1-F_0(x)$$
$$F(x)=F_0(\frac{x-u}{\sigma})$$
$$E(X)=u$$
$$D(X)=\sigma^2$$

  正态分布的样本满足正态分布 $\overline{x}$~ $N(u,\frac{\sigma^2}{n})$ n为样本数

- **二维正态分布** (X,Y) ~N$(u_1,u_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,p)$

$$(X,Y)-N(u_1,u_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,p)$$
$$p\text{表示}X\text{，}Y\text{相关系数}$$

协方差与相关系数

协方差：(描述变量X与变量Y之间的数字特性)

$$Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-EX\cdot EY$$

$$\text{协方差与方差关系：}D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$$

协方差性质：

- Cov(X,X) = D(X)
- Cov(X,C) =0
- Cov(X,Y) = Cov(Y,X)
- Cov(aX,bY) = abCov(X,Y)
- 当X，Y独立时，Cov(X,Y) =0，当Cov(X,Y)=0时，不能证X，Y是否独立

相关系数：

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$
$$|\rho|\le 1\text{相关系数是两个随机变量间线性关系强弱的度量}$$

相关系数性质：

- $COV(X,Y)=0$或$p_{XY}=0$时，X与Y不相关，不能证X，Y独立
- 若(X,Y)服从正态分布，X与Y相互独立的充要条件是 $p_{XY}=0$

中心矩与原点矩

EX^k：k阶原点距，EX：一阶原点距

$E(X-EX)^k$：k阶中心距，一阶中心距：0，DX：为二阶中心距