多维随机变量及其概率分布

- ## 二维随机变量

> *假设E是随机试验，Ω是样本空间，X，Y是定义在Ω的随机变量*
>
> **分布函数：**
>
> $$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}\text{关于}X\text{，}Y\text{联合分布}$$
>
> 分布函数性质：
>
> 1. $0\le F(x,y)\le 1$
> 2. F(x,y) 当y不变 $x_1\le x_2$时 $F(x_1,y)\le F(x_2,y)$
> 3. $F(-\infty,y)=0,F(x,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1$
> 4. $$P\{x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$$
>
> ---
>
> **二维离散型的联合分布及边缘分布**
>
> | X\Y | 1 | 2 | 3 |
> | --- | --- | --- | --- |
> | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ |
> | 2 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
>
> 关于X、Y的边缘分布：横纵求和
>
> ---
>
> **二维连续的联合密度和边缘密度函数**
>
> $$F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)dsdt$$
>
> - G是X,Y平面区域 则
>
> $$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$$
>
> - 密度函数f(x,y)在点(x,y)上连续
>
> $$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$
>
> ---
>
> **二维均匀分布**
>
> $$\text{当}D\text{是矩形时：}f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)(d-c)} & a\le x\le b,c\le y\le d\\ 0\quad\text{其他}\end{cases}$$
> $$\text{当}D\text{是圆形区域时：}f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2} & x^2+y^2\le R^2\\ 0\end{cases}$$
>
> ---
>
> **边缘密度函数**

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(s,t)dt]ds$$
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

随机变量的独立性

判断随机变量的独立条件

$$f_X(x)\text{关于}y\text{求积分}\quad f_Y(y)\text{关于}x\text{求积分}$$
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$
$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

二维离散型独立性判断

X、Y	0	1
0	0.2	0.2
1	0.2	0.4

其横纵坐标边缘概率之和的乘积等于其坐标上值则独立

二维连续型变量独立性判断

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

二维变量函数独立性

X，Y独立，其g(x),与h(y)构成的随机变量也相互独立

二维随机变量函数分布

连续性随机变量函数分布

求二维密度函数在变量函数上二重积分

- 当X事件与Y事件相互独立时
- 存在密度函数 f(x,y)
- 存在关于x，y变量的函数，求P{X+Y< 1} 的概率或密度函数
- $P\{X+Y\leq 3\}=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_0^{3-x}f(x,y)dy$