空间解析几何与向量代数

- **空间中两点距离公式**

  > $|P_1P_2| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad P_1\{x_1,y_1,z_1\}, P_2\{x_2,y_2,z_2\} \quad a = |x_2-x_1, y_2-y_1, z_z-z_1|$

- **空间上特殊位置**

  > **点对称关系（a,b,c)**
  >
  > - 关于原点对称：(-a,-b,-c)
  > - 关于坐标平面对称（Oxy）：(a,b,-c)
  > - 关于轴(x)对称：(a,-b,-c)
  > - 关于点对称(x,y,z)： (|2x-a|,|2y-b|,|2z-c|) 需要考虑卦限
  >
  > **特殊向量**
  >
  > - 与坐标面平行（Oxy）：$\vec{a} = \{a,b,0\}$
  > - 与x轴平行：$\vec{a} = \{a,0,0\}$
  > - 与坐标面垂直（Oxy）：$\vec{a} = \{0,0,c\}$
  > - 与x轴垂直：$\vec{a} = \{0,b,c\}$

- **向量代数**

  > 向量相等：模相同，方向相同
  >
  > 向量共线：向量的起始点与终止点都在同一条直线上
  >
  > 向量共面：向量的起始点与终止点都在同一条平面上
  >
  > 向量平行：向量的方向相同或相反（零向量与任何向量都是共线的，向量共线的充要条件时这两个向量相互平行，**空间中任意两个向量都是共面的**）
  >
  > **向量平行充要条件：** 设向量$\vec{a} \neq \vec{0}$则存在λ使得 $\lambda\vec{a} = \vec{b}$
  >
  > **向量夹角：** 0<= φ <= π，零向量与任意向量的夹角可取[0,π] 任意值，非零向量的夹角等于$\frac{\pi}{2}$时，向量垂直
  >
  > 向量投影：a向量在b上的投影简记为 $Prj_b\vec{a}$ $Prj_b\vec{a}$ = $|\vec{a}|cos\varphi$
  >
  > $$\text{同一投影向量可以相加} \quad Prj_u(\vec{a}+\vec{b}) = Prj_u\vec{a} + Prj_u\vec{b}$$
  >
  > **向量：** $\vec{a} = \{a_1,a_2,a_3\}$，其单位向量$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
  >
  > $$\vec{a}^0 = \{cosa, cosb, cosc\} = \{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3}}\}$$
  >
  > $$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$$
  >
  > **向量坐标**
  >
  > 空间坐标系中存在两点$M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ 则在空间坐标系中表示$M_1\vec{M}_2$向量坐标为{$x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$}

向量运算

- 数乘
- 数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi$ 在向量坐标中$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
- 向量积

> 1. $\vec{\lambda}$的长度为$|\vec{\lambda}|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\varphi$
> 2. $\vec{\lambda}$的方向垂直与$\vec{a}$与$\vec{b}$相交所在平面
> 3. 向量积使用坐标计算
>
> $$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}\vec{\beta}=\{b_1,b_2,b_3\}$$
> $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{c}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{bmatrix}\vec{i}-\begin{bmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{bmatrix}\vec{j}+\begin{bmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}\vec{k}$$

- **空间中曲面与曲线**

二维曲线：圆，椭圆，标准，一般，参数方程

$$圆一般方程：x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\quad(D^2+E^2-4F>0)$$
$$圆标准方程：(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\quad a=-\frac{D}{2},b=-\frac{E}{2}，R=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$
$$圆参数方程：x=a+rcos\theta\quad y=b+rsin\theta\quad(a,b)为圆心，r为半径$$
$$椭圆标准方程：当焦点在x轴时\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$
$$y轴时\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$$
$$椭圆参数方程：R=\frac{a^2-c^2}{a-csin\theta}\quad a：长半轴长度，c：为焦距的一半，R为曲线上到焦点距离$$
$$P为椭圆上一点，存在|PF_1|+|PF_2|=2a$$

空间曲面方程

- 球面方程

1. 一般方程：$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$
2. 标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
3. 参数方程：

$$\begin{cases}x=rsin\theta cos\varphi\\y=rsin\theta sin\varphi\\z=rcos\theta\end{cases}$$
$$\theta:极角（Z轴与r的夹角），\varphi:方位角（x轴与r的夹角）$$

- 方程同解变形：方程两端加上（乘以）或减（除以非零）一个式子（数）代替原方程（解集不变）
- 非同解变形：方程两端平方或开方得到的新方程解集比原方程多，或少
- 曲面方程对称性

旋转曲面

曲线绕它所在的平面的一条直线L旋转一周所生成的曲面

旋转轴变量不变，参数变为 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$

$$
\begin{gathered}
\text{曲线方程：} f(y,z)=0 \\
\text{绕}z\text{轴生成的旋转曲面：} f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0 \\
\text{绕}y\text{轴生成的旋转曲面：} f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0 \\
\cdots
\end{gathered}
$$

空间曲线方程

- 一般曲线方程（两个曲面相交，其解为曲线方程上的点）

$$
C\text{：}\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}
$$

- 参数方程

$$
\begin{gathered}
C\text{：}\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases} \\
(a\le t\le b)
\end{gathered}
$$

- **空间平面与直线**

空间平面确定（法向量确定）

1. 不在同一直线上任意三个点（待定系数）
2. 直线到直线外的一点（点法方程）
3. 两条平行的直线（求两条直线的法向量）

点法式方程（直线到直线外一点）

$$
\begin{gathered}
Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{其中}A\text{，}B\text{，}C\text{不全为}0 \\
\vec{n}=\{A,B,C\} \quad \text{为平面中一个法向量}
\end{gathered}
$$

平面截距方程

1. D=0时，平面包含原点
2. A = 0 时，表示平面平行x轴
3. A=0，B=0时，平面平行于Oxy

$$
\text{平面截距方程：} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1
$$

$$
a=\frac{-D}{A} \quad b=\frac{-D}{B} \quad c=\frac{-D}{C}
$$

点P(x_0,y_0,z_0)到平面Ax + By + Cz + D = 0距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

平面夹角：法向量数量积与模比值

$$\begin{gathered}
\text{两平面法向量}\vec{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}\quad \vec{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}\\
cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|n_1|\cdot|n_2|}\\
1.\text{平面垂直充要条件}A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\\
2.\text{平面平行充要条件}\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}
\end{gathered}$$

空间直线方程

- 对称方程

$$\begin{gathered}
\text{对称式方程}\quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\\
\text{其中}\vec{v}=\{l,m,n\}\text{为直线方程方向向量}
\end{gathered}$$

- 参数方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

$$\begin{gathered}
L\text{：}\begin{cases}x=x_0+lt,\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt\end{cases}\\
(-\infty<t<+\infty)
\end{gathered}$$

- 一般方程

$$L\text{：}\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_1z+D_2=0\end{cases}$$

直线夹角

$$\begin{gathered}
\vec{v_1}=\{l_1,m_1,n_1\},\quad \vec{v_2}=\{l_2,m_2,n_2\}\\
cos\theta=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}
\end{gathered}$$

- **二次曲面**

二次曲面

> $$球面：(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$
> $$椭球面：\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad a>0,\ b>0,\ c>0$$
> $$抛物面：z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$
> $$圆锥面：z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$