常微分方程

> 未知函数，未知函数的导数，未知函数的微分与自变量之间关系的方程为微分方程
>
> 通解：含任意常数，且常数的个数等于微分方程的阶数
>
> **可分离变量微分方程**
>
> $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

齐次方程

> $$\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x}) \quad x, y\text{作为中间变量整体出现}$$
>
> **齐次方程求解**
>
> - 令$u = \frac{y}{x}$
> - 求x与u的关系式$y = xu$
> - 求y=xu 关于$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$
> - 转为可分离变量微分方程

一阶线性微分方程

> $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$
>
> $$Q(x) \equiv 0\text{时其通解为} \quad y = Ce^{-\int P(x)dx}$$
>
> $$y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)$$
>
> 齐次微分方程 $Q(x) \equiv 0$
>
> 非齐次微分方程Q(x) $\neq$0

可降阶的高阶方程

> - $y^n = f(x) \quad y^{n-1} = \int f(x)dx + C$
> - $y`` = f(x, y`)$
>
> > 令$y` = p \quad y`` = p`$带入原式得到一阶线性微分方程求y
> > $y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)$
>
> - $y`` = f(y, y`)$
>
> > 令$y` = p \quad y`` = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy}$，原函数：$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$

二阶线性微方程

> 二阶线性微方程一般形式
>
> $y`` + p(x)y` + q(x)y = f(x)$
>
> - 解结构：当$y_1(x), y_2(x)$不满足线性关系时，$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$是方程的通解

二阶常系数线性齐次微分方程的解

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$，其中$p(x)$，$q(x)$为常数

特征方程： $r^2 + pr + q = 0$

- 特征方程存在根r_1, r_2 方程通解为 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
- 特征方程存在复数根 $r_{1,2} = a \pm i\beta$ 方程通解为 $y = e^{ax}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)$
- 特征方程存在根$r_1 = r_2$ 方程通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$