随机变量及其概率分布

> **随机变量 X：** 使用变量X代替样本空间中出现的事件
>
> eg：{w | X(w) = a} 表示事件，w表示样本点，X(w)表示该样本点对应的实数事件，简记：{X=a}，该事件的概率记为 P{X=a}
>
> P{$1 \le X \le 3$} 表示事件在1和3之间发生的概率
>
> ---
>
> **离散型随机变量：** 若随机变量X**只取有限个**或**可列无限多个值，则称X为离散型随机变量**

连续型随机变量及其概率密度函数

> 存在非负可积函数y=f(x)，其中x表示$a < X \le b$ 之间事件，y表示(a,b]之间概率，则f(x)为事件X的概率密度函数
>
> $$P\{a < X \le b\} = \int_a^b f(x)dx \quad X\text{连续随机变量，}f(x)\text{概率密度函数,}$$
> $$\int_a^b f(x)dx \text{ 为事件}P(a < X \le b)\text{的概率，其表达式为}X - f(x)$$
>
> **密度函数性质**
>
> - f(x) $\ge$ 0
> - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$
> - **连续性概率密度函数f(x)，随机变量x表示具体值时，概率为0**
> - P{$a \le X \le b$} = P{$a < X \le b$} = P{$a \le X < b$}= P{$a < X < b$}
> - （样本次数无限情况下）概率为0的事件不一定是不可能事件，概率为1的事件不一定是必然事件

分布函数：随机变量到达X事件的概率

> X取值不超过x的概率： **F(x) = P(X≤x)** F(x) 为分布函数 F(x) ∈ $[0, 1]$
>
> **分布函数性质**
>
> - F(x) ∈ $[0, 1]$，x∈ $(-\infty, +\infty)$
> - $x_1 < x_2$，$F(x_1) \le F(x_2)$，其中x_2事件范围包含x_1
> - $lim_{x\to+\infty}F(+\infty) = 1$，$lim_{x\to-\infty}F(-\infty) = 0$
> - F(x)右连续，则离散型概率函数右连续，连续性概率函数也连续
> - P{$X \le a$ } = F(a)
> - P{$X > a$ } =1 - P{x≤ a} =1- F(a)
> - P{ a<X≤b } = P{X≤b} - P{X≤a} = F(b) - F(a)
> - P{X=a} = F(a) - F(a-0)
> - P{a≤ $X \le b$} = F(b) - F(a-0)
> - P{X < a} = F(a-0)
> - P{x ≥ a} = 1 - F(a-0)
>
> **连续性分布函数性质** (连续概率函数与分布函数转换)
>
> - F(x) = P{X ≤ x} = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ $F`(x) = f(x)$

> - P{a<X<b} = F(b) - F(a)
>
> 分布函数转概率函数 与 概率转分布式函数

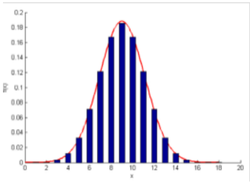
常见随机变量概率函数与分布函数

> - **0-1分布**：$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$
>
> > 只先进行一次事件试验，该事件发生的概率为p，不发生的概率为1-p，只有两种实验结果
> >
> > | X | 0 | 1 |
> > |---|---|---|
> > | p_k | $1-p$ | p |
>
> - **几何分布**：P{X=k} = $(1-p)^{k-1}p$，记为 X~G(p)
>
> > 进行多次实验，**第k次首次发生**概率
>
> - **二项分布**：$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 记为 X~B(n,p)
>
> > n次实验中，事件A发生了k次概率
> >
> > 二项分布最值
> >
> > 1. (n+1)p 不为整数时，X=(n+1)p 达到最大值（最可能发生事件）
> > 2. (n+1)p 为整数，X=(n+1)p，与X=(n+1)p-1 同时为最大值（最可能发生事件）
>
> - **泊松分布**：P{X = k} = $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ \ \lambda>0,\text{其中}k=0,1,2,3...$ 记为 X~P(λ) *离散*概率分布
>
> > 泊松分布的参数λ是单位时间(或单位面积)内**随机事件的平均发生次数**
> >
> > **二项分布用泊松分布近似条件**
> >
> > - $n\geq 100$：二项分布实验次数超过100
> > - $np\leq 10$：二项分布次数与概率乘积小于10
> > - 则使用 $C_n^k p^k q^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\qquad \lambda=np，q=1-p$
>
> - **超几何分布**：
>
> > 有限个物件中抽出n个物件，抽取m次，其中成功抽出指定种类的物件的k次数（不放回）概率
> >
> > $$P\{X=k\}=\frac{C_{n1}^k C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m}$$
>
> ---
>
> - **均匀分布**：记为 X~U[a,b]
>
> > 在相同长度间隔的分布概率是等可能的
> >
> > $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$
> >
> > $$\text{其分布函数：}F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\leq x<b\\ 1 & b\leq x\end{cases}$$
> >
> > $$X-U[a,b]\ \ \text{当}[c,d]\subset[a,b]\text{时}\ \ P\{c\leq x\leq d\}=\int_c^d\frac{1}{b-a}dt=\frac{d-c}{b-a}$$

- **指数分布：** $\lambda > 0$ 记为 X~E(λ) *连续型概率分布*

> 通常用于描述对发生的缺陷数或系统故障数的测量结果。例如某种产品或零件经过一段时间t0的工作后,仍然如同新的产品一样,不影响以后的工作寿命值，或者说，经过一段时间t0的工作之后，该产品的寿命分布与原来还未工作时的寿命分布相同
>
> $$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$
> $$其分布函数：F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$
>
> 指数分布特点：P{X > s+t | X > s} = P{x > t}

- **正态分布：** 记为 X~N(u,σ^2)

> $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$
> $$其分布函数：F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}} dt$$
>
> 
>
> **一般正态分布密度函数性质：**
>
> 1. 以x=u为对称轴
> 2. x=u时，f(x)为最大值为$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
> 3. σ固定，u变化，函数左右移动，u固定，σ变化，函数上下压缩
>
> ---
>
> **标准正态分布：** 当u=0，$\sigma = 1$时
>
> $$密度函数：\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
> $$分布函数：F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$
>
> **性质：**
>
> 1. 关于y轴对称 (偶函数)，$\phi_0(x) = \phi_0(-x)$
> 2. $F(-x) = 1 - F(x)$
> 3. $F(0) = \frac{1}{2}$
>
> **一般正态分布函数转标准正态分布函数**
>
> $$F(x) = F_0(\frac{x-u}{\sigma})$$
> $$P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) = F_0(\frac{b-u}{\sigma}) - F_0(\frac{a-u}{\sigma})$$
> $$F(x)：一般正态分布函数$$
> $$F_0(x)：标准正态分布函数$$

随机变量函数的分布

> 求分布函数关于X（随机变量）的复合函数
>
> **离散型变量函数得到值之后概率相加**
>
> | X | -1 | 0 | 1 |
> | --- | --- | --- | --- |
> | P | 0.2 | 0.4 | 0.4 |
>
> 求变量$Y=X^2$的分布律
>
> | Y | 1 | 0 |
> | --- | --- | --- |
> | P | 0.6 | 0.4 |
>
> **连续型变量函数的密度函数**
>
> - 已知X的密度函数$f_X(x)$，求变量x关于y = $f(x)$ 的密度函数 $f_Y(x)$
>
> $F_Y(x)=P\{Y\le x\}=P\{f(x)\le x\}=P\{X\le g(y)\}=F_X(g(y)) \quad y=f(x)与x=g(x)互为反函数$
>
> $$使用X的分布函数代替x变量上的函数 \quad f_Y(x)=g^{`}(y)f_X(x)=F_Y^{`}(x)=g^{`}(y)F_X^{`}(x)$$