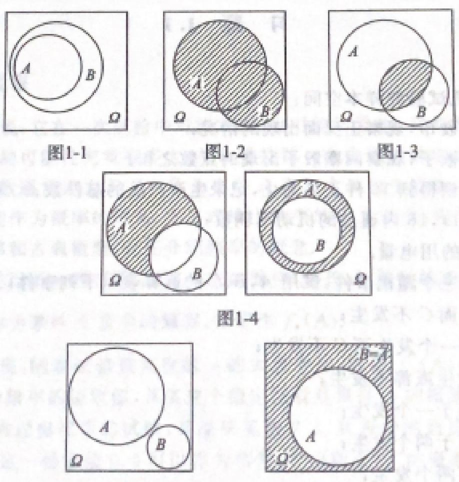
随机事件与概率

- ## 随机事件

> 随机实验：
>
> 1. 相同条件下实验可重复
> 2. 实验结果不止一个
> 3. 无法预测结果
>
> 基本事件：相对实验目的来说，不能再拆分的事件
>
> 复合事件：由基本事件复合完成
>
> 样本空间：所有基本事件集合（可以是无限集）
>
> 样本点：表示的基本事件

- ## 随机事件的关系

> 1. **包含、相等** （设A，B为两个事件，若A发生必然导致B发生，则称事件B中包含事件A，记为 A⊂B）
> 2. **和事件** （称事件A，B中**至少有一个发生**，A事件与B事件全集， 记作 A + B）
> 3. **积（交）事件（A事件与B事件同时发生**，记为A∩B或 AB）
> 4. **差事件**（A发生且B不发生的事件 记为 **A - B = A - AB = A**$\overline{B}$)
> 5. **互不相容事件（A事件与B事件不能同时发生 AB=$\emptyset$，A与B互不相容时 P(A+B) = P(A) + P(B)）**
> 6. **对立事件**（ **AB=$\emptyset$，且 A ∪B= Ω，** 记为 $\overline{A}$，对立事件一定是互不相容，对立适用于两个事件)
> 7. **独立事件**： 事件A与事件B没联系，P(AB) = P(A) P(B)
>
> 图 1-1～1-6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算. 例如，图 1-1 中正方形区域表示样本空间 Ω，圆域 A 与圆域 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A，图 1-2 中的阴影部分表示和事件 $A \cup B$，又如图 1-3 中的阴影部分表示积事件 AB，图 1-4 中阴影部分则表示差事件 $A-B$，图 1-5 表示 A 与 B 互不相容，图 1-6 表示 A 与 B 互为对立事件.
>
> 
> 图1-1 图1-2 图1-3 图1-4 图1-5 图1-6
>
> **事件运算**
>
> - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap B)$

- $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(A\cup B)$
- $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
- $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

事件概率性质

- **P(A-B) = P(A) - P(AB)**
- 当A⊃ B 时 P(A-B) = P(A) - P(B)
- **P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)**

1. 当A与B互不相容时：P(A+B) = P(A) + P(B) ，P(AB) = 0

- P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)

古典概率模型

概率：事件可能发生大小

古典概率

1. 有限样本
2. 所有样本概率相等
3. P(A) = $\frac{A}{\Omega}=\frac{A中包含事件}{基本事件总数}$

排列组合

加法原理：完成某一个事件有多少方案

乘法原理：一个事件分多少步骤完成

- 排列：从n个**元素**中取出m个排列（不放回） 记作：$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$
- 全排列：从n个**元素**中取出n个排列（不放回）记作：$P_n^n=n!$
- 重复排列：从n个元素中取出m个排列（放回） n^m
- 组合：从n个元素中取出m个元素（不排列，不分先后顺序）

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

几何概率模型

1. 无限样本
2. 样本概率相等
3. P(A) = $\frac{u_A}{\Omega}$ 其中样本可以是线段长度，面积大小，空间体积

条件概率

存在样本空间Ω，A，B两个事件在B已经发生条件下A事件发生的概率，记为P(A|B)，**样本空间发生变化**

- P(A|B) = $\frac{P(AB)}{\Omega_B}=\frac{P(AB)}{P(B)}$ ：**在事件B样本空间中事件A发生概率**
- P(AB) = P(A) P(B|A)，P(AB) = P(B) P(A|B)
- P(ABC) = P(A) P(B|A) P(C|AB)

- 事件$A_1, A_2, A_3, ... A_n$ 互不相容，且$A_1 + A_2 + A_3, ... A_n$等于 Ω
    1. 全概率公式

$$P(B) = P(Ai)P(B|Ai)P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

    2. 叶贝斯公式

$$P(Ai|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

独立事件

> 事件A，B之间互不影响：独立事件定义 P(A | B) = P(A)
>
> P(A) > 0，P(B) > 0， **A与B独立的充分必要条件 P(AB) = P(A)P(B)**
>
> 重伯努利公式 （n次试验中事件A发生k次概率，其中p为发生概率，q为未发生概率）
>
> $$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$