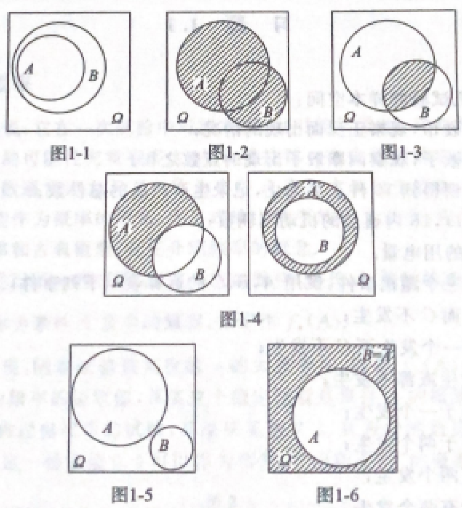
# 随机事件与概率

- **随机事件**

> 随机实验：
>
> 1. 相同条件下实验可重复
> 2. 实验结果不止一个
> 3. 无法预测结果
>
> 基本事件：相对实验目的来说，不能再拆分的事件
>
> 复合事件：由基本事件复合完成
>
> 样本空间：所有基本事件集合（可以是无限集）
>
> 样本点：表示的基本事件

- **随机事件的关系**

> 1. **包含、相等** （设A，B为两个事件，若A发生必然导致B发生，则称事件B中包含事件A，记为 A⊂B）
> 2. **和事件** （称事件A，B中**至少有一个发生**，A事件与B事件全集， 记作 A + B）
> 3. **积（交）事件**（**A事件与B事件同时发生**，记为A∩B或 AB）
> 4. **差事件**（A发生且B不发生的事件 记为 **A - B = A - AB = A**$\overline{B}$）
> 5. **互不相容事件**（A事件与B事件不能同时发生 **AB=**$\emptyset$，**A与B互不相容时 P(A+B) = P(A) + P(B）**）
> 6. **对立事件**（ **AB=**$\emptyset$**，且 A ∪B=** $\Omega$**，**记为 $\overline{A}$，对立事件一定是互不相容，对立适用于两个事件)
>
> 图 1-1～1-6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算. 例如，图 1-1 中正方形区域表示样本空间 $\Omega$，圆域 $A$ 与圆域 $B$ 分别表示事件 $A$ 与事件 $B$，事件 $B$ 包含事件 $A$，图 1-2 中的阴影部分表示和事件 $A\cup B$，又如图 1-3 中的阴影部分表示积事件 $AB$，图 1-4 中阴影部分则表示差事件 $A-B$，图 1-5 表示 $A$ 与 $B$ 互不相容，图 1-6 表示 $A$ 与 $B$ 互为对立事件.
>
> 
>
> 图1-1 图1-2 图1-3 图1-4 图1-5 图1-6
>
> **事件运算**
>
> - $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(A\cap B)$
> - $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(A\cup B)$

> - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
> - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
>
> **事件概率性质**
>
> - **P(A-B) = P(A) - P(AB)**
> - 当A$\supset B$时 P(A-B) = P(A) - P(B)
> - **P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)**
>
> > - 当A与B互不相容时：P(A+B) = P(A) + P(B)， P(AB) = 0
> > - P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)

## 古典概率模型

> 概率：*事件可能发生大小*
>
> **古典概率**
>
> 1. 有限样本
> 2. 所有样本概率相等
> 3. P(A) = $\frac{A}{\Omega} = \frac{A\text{中包含事件}}{\text{基本事件总数}}$
>
> **排列组合**
>
> 加法原理：完成某一个事件有多少方案
>
> 乘法原理：一个事件分多少步骤完成
>
> - 排列：从n个**不同元素**中取出m个排列（不放回） 记作：$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
> - 全排列：从n个**不同元素**中取出n个排列（不放回）记作：$P_n^n = n!$
> - 重复排列：从n个不同元素中取出m个排列（放回） $n^m$
> - 组合：从n个不同元素中取出m个不同元素（不排列，不分先后顺序）
>
> > $$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

## 几何概率模型 （转换线段，图，空间计算）

> 1. 无限样本
> 2. 样本概率相等
> 3. P(A) = $\frac{u_A}{\Omega}$ *其中样本可以是线段长度，面积大小，空间体积*
>
> 概率与频率：*通过实验频率可以获得未来发生某一件事情可能发生的概率（频率通过已知事件计算，概率未知事件发生大小*

## 条件概率

> *存在样本空间Ω，A，B两个事件在B已经发生条件下A事件发生的概率，记为P(A|B)，**样本空间发生变化***
>
> - P(A|B) = $\frac{P(AB)}{\Omega_B} = \frac{P(AB)}{P(B)}$ ：在事件B样本空间中事件A发生概率
> - P(A|B) $\geq 0$ ，P(Ω|B) = 1
> - P(AB) = P(A) P(B|A)
> - P(AB) = P(B) P(A|B)

- P(ABC) = P(A) P(B|A) P(C|AB)

**全概率公式**

$A_1,A_2,A_n$是$E$的完备事件组，且$P(A_i)>0$则$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

**叶贝斯公式** *已知道结果找原因*

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

## 独立事件

事件A的概率不受事件B概率影响，即**P(AB)=P(A)P(B)**，充要条件为P(A|B)=P(A)，P(B|A)=P(B)

- A与B独立，则A与$\overline{B},\overline{A}$与$B$，$\overline{A}$与$\overline{B}$也独立
- n重伯努利公式 （n次试验中事件A发生k次概率，其中p为发生概率，q为未发生概率）

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}$$