多元函数的微分学

- ## 多元函数

> 存在三个变量x，y，z 当变量x，y在一定范围变动时，对于x，y都有与z对应的值，则变量z是**变量x，y的二元函数**，记作 z = f(x,y) 或 z = z(x,y)
>
> **复合函数**（函数自变量是其他函数的因变量）
>
> $$u = f(v)$$
> $$v = g(x, y)$$
> $$u = F(x, y) = f(g(x, y))$$
>
> **多元方程的隐函数** （自变量之间存在函数关系，该函数自变量，因变量恰好是**原方程的解**）
>
> $$\text{二元方程}F(x, y) = 0\ x, y\text{是二元方程的解}$$
> $$\text{解集中存在函数关系}y = f(x)$$
> $$\text{则}y = f(x)\text{是二元方程}F(x, y) = 0\text{的隐函数}$$
>
> **多元函数的极限与连续**
>
> $$lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$$
> $$\text{当函数自变量任意方向无限趋近于点}(x_0, y_0)\text{时，此时}f(x, y)\text{的值也无限接近实数}A$$
>
> **函数连续 = 存在极限 + 极限值该点函数值**
>
> **偏导数与极限**
>
> $$\triangle F = F(x_0 + \triangle x, y_0) - F(x_0, y_0)$$
>
> $$lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle F}{\triangle x} = lim_{\triangle x\to 0} \frac{F(x_0 + \triangle x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\triangle x}$$
>
> $$\text{偏导数}f_x(x_0, y_0)\text{或}\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_0,y=y_0}$$
>
> **偏导数**： 多元函数上某点沿某个自变量的变化率
>
> **全微分**：$dz = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$
>
> - dx，dy表示关于自变量x，y的微分（增量符号，等同于$\triangle x, \triangle y$)
> - 全微分 = 函数连续 + 存在自变量偏导数
> - 全增量：$\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y)$

- ## 复合函数与隐函数的导数和偏导数

> **复合函数链式求导**：
>
> $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
>
> **隐函数的导数和偏导数**：

$$\text{方程}F(x,y)=0\text{的隐函数}y=f(x)\text{求导}$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$
$$\text{三元方程}F(x,y,z)=0\text{的隐函数}z=f(x,y)\text{求导}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

- **偏导数应用**

多元函数极值计算

- 极值：函数指定义域U总有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$成立，则称$f(x_0,y_0)$为f(x,y)的一个极大值（可能存在）

  最值：函数在其有效的定义域D内总有$f(x,y)<f(x_0,y_0)$成立（函数连续，定义域闭区间 一定存在）

  最值判断：寻找函数边界值，驻点，和不可导点综合判断

- 极值必要条件：函数f(x,y)在点P(x,y)处的两个偏导数都存在。$f_x(x,y)=0,f_y(x,y)=0$，**点(x,y)为函数f(x,y)的驻点**
- (x_0,y_0)是函数$f(x,y)$的驻点，则有$A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，$\triangle=B^2-AC$

$\triangle<0,A<0$	(x_0,y_0)**为极大值**
$\triangle<0,A>0$	(x_0,y_0)为极小值
$\triangle>0,A<0$	(x_0,y_0)不是极值点
$\triangle=0$	(x_0,y_0)不做判断

- 条件极值

  拉格朗日乘数法： 设二元函数f(x,y)和$\varphi(x,y)$在所考虑的区域内具有连续的偏导数，且$\varphi_x(x,y),\varphi_y(x,y)$不同时为零。构造拉格日朗函数：

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$
$$\text{其中}\lambda\text{为拉格朗日乘数，}L(x,y)\text{为拉格朗日函数 }\varphi(x,y)\text{为约束条件}$$

$$\text{构造求极值方程组}$$
$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0,\\ \varphi(x,y)=0,\end{cases}$$
$$\text{其解是可疑极值点}$$

- **几何应用**

  1. 空间曲线上某点斜率（切向量）与法平面

$$L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$
$$\text{设曲线}L\text{上的点}P(x_0,y_0,z_0)\text{具有连续偏导数且不同时为0，}$$
$$\text{则点}P\text{上方向向量为}\vec{s}=\{x`(t_0),y`(t_0),z`(t_0)\}\text{，}$$
$$P\text{上法平面}x`(t_0)(x-x_0)+y`(t_0)(y-y_0)+z`(z_0)(z-z_0)=0$$

2. 空间曲面的切平面与法线

$$\Gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$t = t_0，即x_0 = x(t_0)，y_0 = y(t_0)，z_0 = z(t_0)$$

$$\because F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \quad \therefore \frac{d}{dt}F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$$

$$\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}为曲面\Sigma在点P处的法向量$$

$$同时还是该点方向向量$$

3. **方向导数**（数量积）

偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 分别是该函数在(x,y)处沿x，y轴方向的变化率，方向导数为函数沿**某个向量**的变化率

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{（x_0,y_0）}表示为点(x_0, y_0)沿l方向的导数$$

$$f(x, y)在(x_0, y_0)点可微，且方向导数存在则：\frac{\partial z}{\partial l}|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}cos\beta$$

$$其中\alpha, \beta是l与x轴，y轴的正向夹角 \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$l的方向向量cosa, cosb$$

4. **梯度**（方向导数的向量，方向导数取最大值）

当点P固定时，cosa与cosb 最大值为1时方向导数等于梯度

$$gradf(x, y) = \{\frac{\partial z}{\partial x}，\frac{\partial z}{\partial y}\}$$