无穷级数

- **数项级数**

> **常数项级数（所有数项之和）**：$\sum_{i=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$
>
> **前n项之和**：$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$
>
> 级数收敛：$\lim_{n\to\infty} S_n = s$（s为常数）
>
> **常数项性质**
>
> - $\sum_{n=1}^{\infty} u_n 收敛于 s$　且 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n 收敛于 ks，k 不等于 0$
> - 级数加上或减少**有限项**，其敛散性不变（**收敛的和会变**）
> - 两个收敛级数相加减的到的级数也是收敛。**相加减后收敛的级数，原级数未必收敛**。级数收敛，任意加括号得到的级数也收敛，且和不变（**加括号收敛，原来级数未必收敛，加括后发散，原级数一定是发散的**）
> - $\sum u_n 收敛的必然条件 u_n \to 0, \quad u_n \to 0 未必收敛$
> - $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| 收敛，则 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n 收敛$
> - $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| 发散，\sum_{n=1}^{+\infty} u_n 条件收敛$
>
> **常见数项级数**
>
> - **等比级数（几何级数）**
>
> $$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} \quad 其中 a \neq 0\ , n \to \infty$$
> $$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$
>
> $$|q| < 1 \quad lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$
> $$|q| >= 1 时发散$$
>
> - **调和级数（发散）**
>
> $$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$
> $$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} 发散$$
>
> - **p级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}\qquad p>0$$

$$当p>1时收敛$$

$$当p\le 1时发散$$

$$p=1时，为调和级数：1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{n}$$

正项级数 $u_n\ge 0\quad S_1\le S_2\le S_3\le\ldots.S_n$

- 比较审敛法：$\sum u_n$与$\sum v_n$是正项级数，且 $v_n\le u_n$　则存在u_n收敛，其v_n收敛，v_n发散，u_n发散
- 比较审敛法极限：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\quad(0<l<+\infty)$则$\sum v_n$与$\sum u_n$敛散性相同 (与调和级数，p级数，等比级数比较)
- 比值审敛法：$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=p$　当$p<1$收敛，$p>1$发散，$p=1$时无法判断
- $\sum u_n$为正项，当$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p\quad p<1$收敛，$p>1$发散

交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

- 莱布尼茨定理，满足一下条件则级数收敛
  1. 存在 $u_{n+1}\le u_n$
  2. $lim_{n\to\infty}u_n$ =0
- **绝对值收敛：**
  1. 绝对收敛：绝对值级数收敛，原级数收敛
  2. 条件收敛：绝对值级数发散，原级数收敛

- **幂级数**

函数项无穷级数：$\sum_{i=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ 自变量x在区间I上所有函数都存在定义

幂级数（函数项为幂函数）：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)^n=a_0+a_1(x)+a_2(x)^2+\ldots.+a_n(x)^n$ 其中 a_n为任意系数

- 收敛域：x在区间I上取值范围使级数收敛

  收敛情况与收敛半径

  1. x = 0 时收敛，R = 0
  2. $x\in(-\infty,\infty)$ 时收敛， R = ∞
  3. |x| < R 时 绝对收敛（需要单独判断R端点）
- 和函数（收敛）：S(x) = $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$

收敛半径R求值 （根据系数a_n判断）

$$lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=p$$

$$R=\begin{cases}\frac{1}{p} & p>0\\ +\infty & p=0\\ 0 & p=+\infty\end{cases}$$

幂级数性质

1. 逐项积分，幂级数积分后收敛半径不变 （通过等比幂级数推导其他和函数）

$$\int_0^x s(t)dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

2. 逐项求导，幂级数求导后收敛半径不变 （通过等比幂级数推导其他和函数）

$$s`(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)`=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)`=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

等比幂级数

$$S(x)=1+x+x^2+x^3+...+x^n \quad \begin{cases}|x|<1\text{时} \quad \text{收敛域}(-1,1) \quad S(x)=\frac{1}{1-x}\\ |x|\geq 1\text{时} \quad \text{发散}\end{cases}$$

幂级函数展开式

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

$$\text{逐项求导} \quad f`(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+...+na_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$$
$$f``(x)=2a_2+(2\times3)a_3(x-x_0)+(4\times3)a_4(x-x_0)^2+..,$$

$$\text{当}x=x_0\text{时} \quad a_n=\frac{f^n(x_0)}{n!}\text{为}x_0\text{上的泰勒系数}$$
$$\text{当}x=0\text{时} \quad a_n=\frac{f^n(0)}{n!}\text{为}x_0\text{上的麦克劳林系数}$$

常用函数幂级展开式

$$x \in (1,1) \qquad S(x) = \frac{1}{1-x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n (x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$$

$$x \in (-\infty, \infty) \qquad S(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$x \in (-\infty, \infty) \qquad S(x) = sinx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$x \in (-\infty, \infty) \qquad S(x) = cosx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

$$x \in (1,1] \qquad S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

$$x \in (1,1) \qquad S(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n$$

$$x \in (1,1] \qquad S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots.$$

$$x \in (1,1) \qquad S(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + (-1)^n x^{2n}$$

- **傅里叶级数**

> 设 f(x) 是已2π为周期的函数，存在公式
>
> $$n = (0,1,2,\ldots,n) \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx dx$$
>
> $$n = (1,2,\ldots,n) \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnx dx$$
>
> $$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx)$$