重积分

导数：描述函数在某一点的变化率和变化方向（斜率）$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$，通常使用符号 $f'(x)$或 dy / dx 表示

微分：函数在某一个点的变化量，通常用符号d表示

积分：在区间内函数累积增量（区间内微分之和）

$$\text{函数在某范围内其值与该函数趋近于0的增量的积之和}$$

$$V = lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \triangle \delta_i = \iint_D f(x,y) d\delta$$

$$x, y\text{为积分变量，}D\text{：积分区域，}f(x,y)\text{被积分函数，}f(x,y)d\delta\text{被积分表达式，}d\delta\text{面积元素}$$

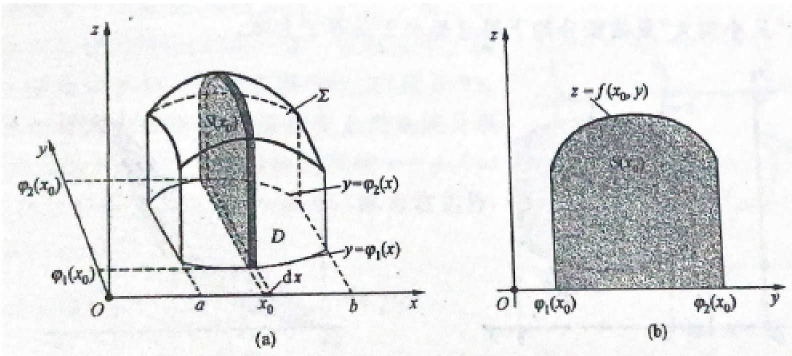
二重积分性质

同一积分区域

- 各函数积分满足加减运算
- 函数积分与常系数满足乘法运算
- 如果$f(x,y) \leq g(x,y)$ 其积分也满足
- $m\delta \leq \iint_D f(x,y) d\delta \leq M\delta$，其中$m$，$M$为$f(x,y)$在$D$上最小与最大值，$\delta$为$D$的面积
- $\iint_D f(x,y) d\delta = f(\xi, \eta) \cdot \delta$

直角坐标系下二重积分计算

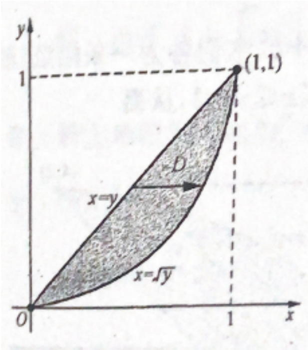
先对y后对x的二次积分



1. 设积分区域 D：$a \leq x \leq b$，$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ 使用x变量规定y范围
2. 求y定积分 $S(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$
3. 求x定积分 $\iint_D f(x,y) dxdy = \int_a^b (\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy) dx$

求积分区域先求出其中一个自变量范围，在通过该自变量约束另一个自变量范围

先对x后对y的二次积分



1. 设积分区域$D: 0 \le y \le 1，y \le x \le \sqrt{y}$

被积函数积偶性判断

- 被积函数关于x是奇函数 f(-x,y) = -f(x,y) 则 $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$
- 被积函数关于x是偶函数 f(-x,y) = f(x,y) 则 $\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D左} f(x,y)dxdy$
- 被积分区域为矩形，且被积分函数是关于x，y两个一元函数的乘积 即 $f(x,y) = h(x)g(y)$ 则有

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d h(x)g(y)dy = (\int_a^b h(x)dx)\ (\int_c^d g(y)dy)$$

极坐标下二重积分计算

极坐标： 在平面内取一个定点O作为极点，引一条射线Ox作为极轴，对于平面内任意一点M，用p表示OM长度，θ表示极轴与OM的夹角，其中p为极径，θ为极角，平面M坐标为(p,θ)

直角坐标与极坐标二重积分转换

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctran\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)d\delta = \iint_D f(rcos\theta, rsin\theta)rdrd\theta = \int_a^b \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(rcos\theta, rsin\theta)rdr$$

$$D：a \le \theta \le b，\varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta)$$

1. 将$x = rcos\theta，y = rsin\theta$带入已知方程，求出r与$\theta$范围（r与$\theta$之间关系，且r=0时 求$\theta$范围），
2. 构造极坐标被积分区域D
3. 带入极坐标二重积分公式

三重积分

$$V = lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \xi_i)\triangle\delta_i = \iiint_D f(x,y,z)d\vartheta$$

$$三元函数：通常使用空间上的点与因变量(密度)描述函数$$

直角坐标系下三重积分计算

先一后二求法

1. 设置积分区域 $x \le x \le b，y_1(x) \le y_2(x)，z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$

2. 求关于z变量积分 $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$
3. 求关于y变量积分$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \cdot \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$
4. 求关于x变量积分$\int_a^b dx \cdot \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \cdot \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

求积分区域先求出其中一个自变量范围，在通过该自变量约束另一个自变量范围

截面法（存在约束）

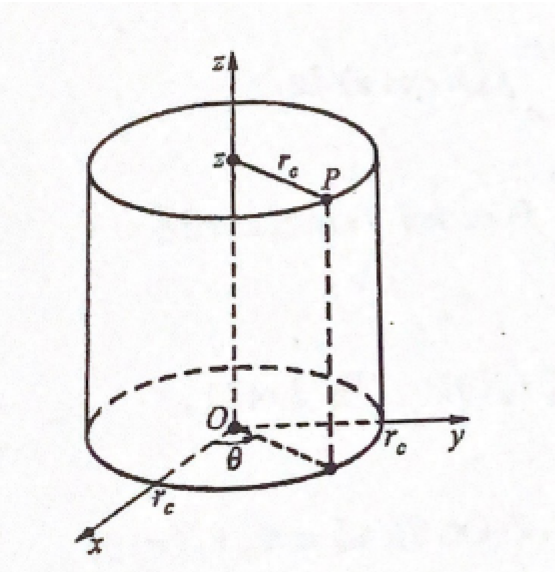
*积分函数只含有一个因变量的三重积分

$$\iiint zdxdydz = \int_a^b zdz \iint_{D_{xy}} dxdy \quad 其中 \iint_{D_{xy}} dxdy为被积分区域在oxy面上投影（截面面积）$$

截面面积：使用含积分变量公式计算

- 椭圆面积 πab，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

柱面坐标下三重积分计算



$$直角坐标方程转柱面方程$$

$$\begin{cases} x = rcos\theta, 0 \le r \le +\infty \\ y = rsin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = z, -\infty \le z \le +\infty \quad z使用x，y的极坐标判断其范围 \end{cases}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \iiint_\Omega f(rcos\theta, rsin\theta, z)rdrd\theta dz$$

附录

附录 基本积分表

$$\int k\mathrm{d}x = kx + C$$

$$\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C(\mu \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$= -\operatorname{arccot} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

$$= -\arccos x + C$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = \csc x + C$$

$$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$= \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$= -\ln|\csc x| + C$$

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arccos x\mathrm{d}x = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{arccot} x\mathrm{d}x = x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

基本导数公式

原函数	导函数
$y = c$	$y' = 0$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x\ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$

原函数	导函数
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{x^{-\frac{n-1}{n}}}{n}$
$y=\frac{1}{x^n}$	$y'=-\frac{n}{x^{n+1}}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$
$y=\cot x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$
$y=\sec x$	$y'=\sec x\tan x$
$y=\csc x$	$y'=-\csc x\cot x$
$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$

三角函数公式

函数名	表达式
余切函数 cot	$cotA=\frac{b}{a}$
正割函数 sec	$secA=\frac{c}{b}$
余割函数 csc	$cscA=\frac{c}{a}$

三角函数诱导公式

$$\begin{aligned}\sin(\pi+\alpha)&=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)&=-\cos\alpha\\ \tan(\pi+\alpha)&=\tan\alpha\\ \cot(\pi+\alpha)&=\cot\alpha\end{aligned}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

三角函数转换 $\frac{k\pi}{2} \pm a \quad k \in z$ 其中k为偶数时三角函数不变，其正负 $\frac{k\pi}{2} \pm a \quad k \in z$ 所在象限

和差角公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

对数公式

$$\log_a（M \cdot N）= \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$