磁面坐标下朗道流体程序的开发

任广智

October 10, 2019

1 初始设置

1.1 坐标系的建立

1.2 方程变换

首先是 $V_E \cdot \nabla$，这里考虑 $B_T \gg B_p$ 的近似，即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_T} = g(\psi)\nabla\phi$。但是这种假设并不是真正考虑了 $k_\parallel \ll k_\perp$ 的结果，这一点在 field aligned 的坐标系下比较容易做到。所以如果是三维有限差分的话，需要考虑上 B_p 的贡献。

$$
\begin{aligned}
V_E \cdot \nabla f &= -\frac{\nabla\Phi \times \boldsymbol{B_T}}{B_0^2} \cdot \nabla f \\
&= \frac{1}{B_0^2}\nabla\Phi \times \nabla f \cdot g(\psi)\nabla\phi \\
&= \frac{g}{JB_0^2}(\Phi_\psi f_\theta - \Phi_\theta f_\psi) \\
&= \frac{g}{JB_0^2}[\Phi, f] \\
V_E \cdot \nabla f_0(\psi) &= -\frac{\nabla\Phi \times \boldsymbol{B_T}}{B_0^2} \cdot \nabla f_0 \\
&= -\frac{g}{JB_0^2}\Phi_\theta f_\psi
\end{aligned}
$$

平行微分算符 $\nabla_\parallel$

$$
\nabla_\parallel f = \boldsymbol{b_0} \cdot \nabla f = -\frac{\Psi' J^{-1}}{B_0}(f_\theta + q f_\phi)
$$

拉普拉斯算符 $\nabla_\perp^2$，目前使用的一些基本算湍流输运的流体方程中，我们只使用了垂直磁场方向的 laplace 算符，同上边的对流项，这里的垂直不并不是严格意义上的垂直，而是在 (ψ, θ) 平面的算符，严格的计算也会加入后续比较，即 $\nabla_\perp^2 f = \nabla^2 f - \nabla_\parallel^2 f$，暂时如下计算：

$$
\begin{aligned}
\nabla_\perp^2 f &= \nabla \cdot (f_\psi \nabla\psi + f_\theta \nabla\theta) \\
&= \nabla \cdot [(f_\psi J_{11} + f_\theta J_{21})\nabla\theta \times \nabla\phi \mathcal{J} + (f_\psi J_{12} + f_\theta J_{22})\nabla\phi \times \nabla\psi \mathcal{J}] \\
&= \frac{1}{\mathcal{J}}[\frac{\partial}{\partial_\psi}\mathcal{J}(J_{11} f_\psi + J_{21} f_\theta) + \frac{\partial}{\partial_\theta}\mathcal{J}(J_{12} f_\psi + J_{22} f_\theta)]
\end{aligned}
$$

磁曲率项

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{V_E} &= \nabla(\frac{1}{B_0^2}) \cdot (\boldsymbol{B_0} \times \nabla\Phi) \\
&= \frac{2}{B_0^3}\nabla B_0 \cdot (\nabla\Phi \times \boldsymbol{B_0}) \\
&\approx \frac{2}{B_0^2}\nabla B_0 \times \nabla\Phi \cdot \boldsymbol{B_T} \\
&= \frac{2g}{\mathcal{J}B_0^3}[B_0, \Phi]
\end{aligned}
$$