固定境界軸対称電磁流体平衡コードによる原型炉炉心プラズマの解析環境整備

TASK/EQ コード解説書

Ver. 0.1

2018 年 2 月 28 日

高度情報科学技術研究機構

目次

緒言

本解説書は、平成 29 年度 QST 調達「固定境界軸対称電磁流体平衡コードによる原型炉炉心プラズマの解析環境整備」により整備された。

1. 定義

TASK/EQ の基礎となる方程式系の定義を、以下に記述する。

1.1 座標系

TASK/EQ では、二つの座標系が使われている。

- 円柱座標系(R, φ, Z)
- トロイダル座標系（磁気面座標）(r, θ, ζ)

トロイダル座標系の動径座標rは、磁気面を識別するための任意のラベルであり、デカルト座標系における磁気軸からの距離を表すとは限らない。トロイダル角は、円柱座標の偏角座標と$\zeta = -\varphi$の関係がある。また、記号

$$\sqrt{g} = [(\nabla r \times \nabla\theta) \cdot \nabla\zeta]^{-1} \tag{1.1.1}$$

を導入すると、トロイダル座標における体積要素は

$$\mathrm{d}V = \sqrt{g}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta \tag{1.1.2}$$

と書ける。トロイダル座標の反変基底ベクトル∇r、$\nabla\theta$、$\nabla\zeta$は、一般に磁気面の形状に依存するが、$\nabla\zeta$は円柱座標を用いて

$$\nabla\zeta = -\frac{1}{R}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.1.3}$$

と表される。ここに、$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}$は円柱座標の正規直交基底ベクトルである。

もう一つのベクトルの組$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta}$を考えると $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \cdot \nabla\beta = \delta_\alpha^\beta$ $(\alpha, \beta = r, \theta, \zeta)$であるので、これらは$\nabla r$、$\nabla\theta$、$\nabla\zeta$に双対な共変基底ベクトルであることが分かる。共変基底ベクトルを用いると、座標平面$\gamma = \mathrm{const.}$の法線方向を向く面要素ベクトルを

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\gamma = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \tag{1.1.4}$$

と書くことができる。ここにα、β、γは、r、θ、ζの巡回置換である。

ここで、$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = 0$ であるから$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\right) \propto \nabla\gamma$が分かるが、$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\right) \cdot (\nabla\alpha \times \nabla\beta) = 1$ 及び$\sqrt{g}$の定義から、

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \sqrt{g}\,\nabla\gamma \tag{1.1.5}$$

である。同様にして、

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \sqrt{g}\nabla\beta \times \nabla\gamma \tag{1.1.6}$$

も分かる。また、$\sqrt{g}$は共変基底ベクトルを用いて

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta}=\sqrt{g} \tag{1.1.7}$$

と書けることも分かる。

1.2 微分公式

円柱座標およびトロイダル座標上では、次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\zeta\times\boldsymbol{\nabla}f)=\left[R^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}f\right)\right]\boldsymbol{\nabla}\zeta \tag{1.2.1}$$

$$\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}\times(R^2\boldsymbol{\nabla}\zeta\times\boldsymbol{\nabla}f)=[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f)]\boldsymbol{\nabla}\zeta \tag{1.2.2}$$

$\boldsymbol{\nabla}\zeta$を$\boldsymbol{\nabla}\varphi$に置き換えても同じである。

円柱座標系では、

$$R^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}f\right)=R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} \tag{1.2.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f)=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial f}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} \tag{1.2.4}$$

である。

軸対称な場（$\partial f/\partial\zeta=0$）に関しては、

$$\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{\nabla}_\perp+\boldsymbol{\nabla}\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\quad,\ (\boldsymbol{\nabla}\zeta\cdot\boldsymbol{\nabla}_\perp=0) \tag{1.2.5}$$

と分解したとき、

$$R^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}f\right)=R\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot\left(\frac{1}{R}\boldsymbol{\nabla}_\perp f\right) \tag{1.2.6}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f)=\frac{1}{R}\boldsymbol{\nabla}_\perp\cdot(R\boldsymbol{\nabla}_\perp f) \tag{1.2.7}$$

が成り立つ。

1.3 平衡磁場

軸対称プラズマの平衡磁場は、二つの磁気面関数（座標rのみの関数）I_θとψ_θを用いて表すことができる。TASK/EQ では、磁場の表式が

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2\pi}[I_\theta\boldsymbol{\nabla}\zeta+\boldsymbol{\nabla}\zeta\times\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta] \tag{1.3.1}$$

となるようにI_θ、ψ_θを定義している。右辺第一項がトロイダル磁場$\boldsymbol{B}_t=\frac{1}{2\pi}I_\theta\boldsymbol{\nabla}\zeta$、第二項がポロイダル磁場$\boldsymbol{B}_p=\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\zeta\times\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta$である。このとき、電流密度分布はマックスウェル方程式$\boldsymbol{j}=\frac{1}{\mu_o}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$から、

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{2\pi\mu_o}\left[\boldsymbol{\nabla}\zeta R^2 \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta - \boldsymbol{\nabla}\zeta\times\boldsymbol{\nabla}I_\theta\right] \tag{1.3.2}$$

となる。トロイダル磁場とトロイダル電流の正の向きを$\boldsymbol{\nabla}\zeta$の向きに定めると、正のトロイダル磁場に対して$I_\theta > 0$であり、また正のトロイダル電流に対してψ_θは下に凸な関数であることがわかる。

ここで、

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta = \frac{1}{2\pi}(\boldsymbol{\nabla}\zeta\times\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta)\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g}^{-1}\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r} \tag{1.3.3}$$

であるから

$$\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta\mathrm{d}V = \int\sqrt{g}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta = 2\pi\psi_\theta + \mathrm{const.} \tag{1.3.4}$$

である。TASK/EQ では、磁気軸$r=0$で$\psi_\theta = 0$となるように定義しているので、

$$\psi_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi}\oint_0^{2\pi}\int_0^r\sqrt{g}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\zeta' \tag{1.3.5}$$

であり、$\psi_\theta > 0$である。また、$\boldsymbol{\nabla}\theta = \sqrt{g}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\zeta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}$ であるから、

$$\sqrt{g}\boldsymbol{\nabla}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\zeta = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\zeta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}\mathrm{d}r\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}\boldsymbol{S}_\theta \tag{1.3.6}$$

上式を(1.3.5)式に代入してθについて積分を行うと

$$\psi_\theta = \int_{r'<r}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S'}_\theta \tag{1.3.7}$$

となり、$\theta = \mathrm{const.}$面を貫く磁束に等しいことが分かる。

同様にして、

$$I_\theta = 2\pi R_o B_o + \frac{\mu_o}{2\pi}\iiint_r^{r_a}\sqrt{g}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta = 2\pi R_o B_o + \mu_o\int_{r<r'<r_a}\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S'}_\theta \tag{1.3.8}$$

である。I_θは、rよりも外側に流れる全ポロイダル電流であり、ポロイダル電流関数と呼ばれる。プラズマ外部$r > r_a$では、アンペールの周回積分の法則により、$2\pi R_o B_o$に等しい。ここでR_o、B_oは、それぞれプラズマ大半径及びトロイダル磁場コイルが$R = R_o$に作る真空磁場の値である。真空磁場は、$RB = \mathrm{const.}$を満たすことに注意。

（注）TASK/EQ ソースコード中では、ポロイダル電流関数を記号Fで表している。

1.4 磁気面平均（Flux average）

トロイダル座標系の動径座標を、$r = \psi_\theta$と取った時の$\sqrt{g}$ を

$$\mathcal{J} = [(\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta\times\boldsymbol{\nabla}\theta)\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta]^{-1} \tag{1.4.1}$$

と書くことにする。一般のトロイダル座標については、

$$\mathcal{J} = \frac{\sqrt{g}}{\mathrm{d}\psi_\theta/\mathrm{d}r} \tag{1.4.2}$$

である。$\mathcal{J}$を用いて磁気面平均を定義することができる。

$$\langle A \rangle = \frac{\int A\mathcal{J}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta}{\int \mathcal{J}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta} \tag{1.4.3}$$

磁気面（$r = \mathrm{const.}$）上の面要素は、$\mathrm{d}S_r = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right| \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta = \mathcal{J}|\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta$ であるから

$$\mathcal{J}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta = \frac{\mathrm{d}S_r}{|\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta|} \tag{1.4.4}$$

であり、磁気面平均“$\langle\cdot\rangle$”は単なる面積分による平均ではないことに注意。$|\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta|^{-1}$は、磁気面間の距離に比例するので、$\langle\cdot\rangle$は、隣接する磁気面で挟まれる体積中での平均である。

磁気面平均は、他にも実用上便利な形に書くことができる。ポロイダル磁場に沿う線要素は、

$$\mathrm{d}l_p = \frac{1}{B_p}\boldsymbol{B}_p \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{B_p}\boldsymbol{B}_p \cdot \mathcal{J}\boldsymbol{\nabla}\zeta \times \boldsymbol{\nabla}\psi_\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi\mathcal{J}B_p\mathrm{d}\theta$$

であるので、

$$\langle A \rangle = \frac{\int (A/B_p)\mathrm{d}l_p}{\int (1/B_p)\mathrm{d}l_p} \tag{1.4.5}$$

である。また、$\int A\mathcal{J}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\int A\mathrm{d}V$ であるから、

$$\langle A \rangle = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\int A\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V/\mathrm{d}\psi_\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\int A\mathrm{d}V \tag{1.4.6}$$

である。

次の公式は、よく使われる。

$$\langle \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \rangle = \frac{1}{V'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\langle V'\boldsymbol{\nabla}r \cdot \boldsymbol{A} \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\langle \boldsymbol{\nabla}V \cdot \boldsymbol{A} \rangle \tag{1.4.7}$$

ここに、$V' = \mathrm{d}V/\mathrm{d}r$である。

（注）ここでは磁気面平均を$\mathcal{J}$を用いて(1.4.3)の様に定義したが、(1.4.2)式の関係があるため任意の動径座標についても同様に磁気面平均を定義することができる。

$$\langle A \rangle = \frac{\int A\mathcal{J}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta}{\int \mathcal{J}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta} = \frac{\int A\sqrt{g}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta}{\int \sqrt{g}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta} \tag{1.4.3a}$$

1.5 トロイダル磁束、トロイダル電流

トロイダル磁束関数及びトロイダル電流関数を、次式により定義する。

$$\psi_\zeta = \int \boldsymbol{B}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\zeta \tag{1.5.1}$$

$$I_\zeta = \int \boldsymbol{j}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\zeta \tag{1.5.2}$$

上の定義式中の面積分は、次のように体積分に変換できる。

$$\int\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\zeta = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\zeta \int\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\zeta = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi}\int \sqrt{g}\,\boldsymbol{\nabla}\zeta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi}\int\,\boldsymbol{\nabla}\zeta\mathrm{d}V$$

よって

$$\psi_\zeta = \frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{B}\cdot\,\boldsymbol{\nabla}\zeta\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi^2}\int \frac{I_\theta}{R^2}\mathrm{d}V \tag{1.5.3}$$

$$I_\zeta = \frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{j}\cdot\,\,\boldsymbol{\nabla}\zeta\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi^2\mu_o}\int \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta\mathrm{d}V \tag{1.5.4}$$

磁気面平均を用いて書き換えると、

$$\frac{\mathrm{d}\psi_\zeta}{\mathrm{d}V} = \frac{I_\theta}{4\pi^2}\langle\frac{1}{R^2}\rangle$$

ゆえに

$$I_\theta = 4\pi^2\langle\frac{1}{R^2}\rangle^{-1}\frac{\mathrm{d}\psi_\zeta}{\mathrm{d}V} \tag{1.5.5}$$

また

$$I_\zeta = \frac{1}{4\pi^2\mu_o}\int \frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}_r = \frac{1}{4\pi^2\mu_o}\int \frac{|\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta|^2}{R^2}\mathcal{J}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{4\pi^2\mu_o}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\psi_\theta}\langle\frac{|\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta|^2}{R^2}\rangle \tag{1.5.6}$$

である。

　トロイダル磁束を用いて、磁気面座標の一種である(r_ψ,θ,ζ)座標を

$$r_\psi = \sqrt{\frac{\psi_\zeta}{\pi B_o}} \tag{1.5.7}$$

により定義する。また、規格化されたr_ψを

$$\rho = \frac{r_\psi}{r_{\psi a}} = \sqrt{\frac{\psi_\zeta(r)}{\psi_\zeta(r_a)}} \tag{1.5.8}$$

と書くことにする。以降特に断らない限り、トロイダル座標系の動径座標は、$r = r_\psi$に取ってあるものとする。また、“ ′ ”はrによる微分$\mathrm{d}/\mathrm{d}r$を表すものとする。

1.6 磁気面変数（Flux variable）

トロイダル座標系で見たとき、動径座標rのみに依存する物理量を磁気面変数と呼ぶ。磁気

面平均で得られる物理量は、磁気面変数である。ここで、いくつか磁気面変数を表す記号を導入する。

$$G_0 = J \equiv \frac{I_\theta}{2\pi R_o B_o} \tag{1.6.1}$$

$$G_1 \equiv \langle |\nabla r| \rangle \tag{1.6.2}$$

$$G_2 \equiv \langle |\nabla r|^2 \rangle \tag{1.6.3}$$

$$G_3 \equiv \langle \frac{|\nabla r|^2}{R^2} \rangle \tag{1.6.4}$$

$$G_4 \equiv \langle \frac{R_o^2}{R^2} \rangle = \frac{4\pi^2 r R_o}{J V'} \tag{1.6.5}$$

$$G_5 \equiv \langle \frac{B^2}{B_o^2} \rangle \tag{1.6.6}$$

G_4の式変形には、（1.5.5)、(1.5.7）式を用いた。

これらの定義を用いてI_ζを書き表す。

$$I_\zeta = \frac{1}{4\pi^2 \mu_o} V' \langle \frac{|\nabla r|^2}{R^2} \rangle \frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{V'}{4\pi^2 \mu_o} G_3 \frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r} \tag{1.6.7}$$

トロイダル方向および、磁力線方向の平均電流密度j_{tav}、$j_{\parallel av}$を次のように定義する。

$$\begin{aligned} j_{tav} &\equiv R_o \langle \boldsymbol{j} \cdot \nabla \zeta \rangle = \frac{R_o}{2\pi \mu_o} \langle \nabla \cdot \frac{1}{R^2} \nabla \psi_\theta \rangle = \frac{R_o}{2\pi \mu_o} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V} \langle \frac{\nabla V \cdot \nabla \psi_\theta}{R^2} \rangle \\ &= \frac{R_o}{2\pi \mu_o} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V} \left(V' \langle \frac{|\nabla r|^2}{R^2} \rangle \frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r} \right) = 2\pi R_o \frac{\mathrm{d}I_\zeta}{\mathrm{d}V} \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

$$\begin{aligned} j_{\parallel av} &\equiv \frac{1}{B_o} \langle \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{B} \rangle = \frac{1}{4\pi^2 \mu_o B_o} \langle I_\theta \nabla \cdot \frac{1}{R^2} \nabla \psi_\theta - \frac{1}{R^2} \nabla \psi_\theta \cdot \nabla I_\theta \rangle = \frac{I_\theta^2}{4\pi^2 \mu_o B_o} \langle \nabla \cdot \frac{1}{R^2 I_\theta} \nabla \psi_\theta \rangle \\ &= \frac{R_o J^2}{2\pi \mu_o} \langle \nabla \cdot \frac{1}{R^2 J^2} \nabla \psi_\theta \rangle = \frac{R_o J^2}{2\pi \mu_o} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V} \left(\frac{V'}{J} \langle \frac{|\nabla r|^2}{R^2} \rangle \frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r} \right) = 2\pi R_o J^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V} \left(\frac{I_\zeta}{J} \right) \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

最後に、安全係数qを次のように定義する。

$$\begin{aligned} B_{pav} &\equiv \frac{1}{2\pi R_o} \frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r} \\ \frac{1}{q} &\equiv \frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}\psi_\zeta} = \frac{1}{2\pi r B_o} \frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{R_o}{r B_o} B_{pav} \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

ここで、

$$B_p = \frac{1}{2\pi} |\nabla \zeta \times \nabla \psi_\theta| = \frac{|\nabla r|}{2\pi R} \frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r}$$

であるから、$B_{pav} \neq \langle B_p \rangle$に注意。

1.7 Grad-Shafranov 方程式

プラズマは、力学平衡$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=\nabla P$（電磁流体に対する静的な運動方程式）を満たす。

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{4\pi^2\mu_o}\left[R^2\nabla\cdot\frac{1}{R^2}\nabla\psi_\theta+I_\theta\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}\right]\nabla\zeta\times(\nabla\zeta\times\nabla\psi_\theta)$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2\mu_o}\left[\nabla\cdot\frac{1}{R^2}\nabla\psi_\theta+\frac{I_\theta}{R^2}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}\right]\nabla\psi_\theta$$

$$\nabla P=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}\nabla\psi_\theta$$

あるから、

$$\nabla\cdot\frac{1}{R^2}\nabla\psi_\theta=-4\pi^2\mu_o\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}-\frac{I_\theta}{R^2}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}\tag{1.7.1}$$

である。この方程式が Grad-Shafranov 方程式（G-S 方程式）である。右辺の圧力P、ポロイダル電流I_θがポロイダル磁束ψ_θの関数として与えられると、G-S 方程式を解くことができる。

これまで、トロイダル座標系(r,θ,ζ)を用いて計算してきたが、トロイダル座標系は、プラズマに固定された座標系である。これに対してプラズマの配位（磁気軸位置、断面形状など）を求めたいときには、G-S 方程式を空間に固定された（円柱座標のような）座標系で計算しなければならない。そのため、左辺に現れるポロイダル磁束関数を、トロイダル座標の関数と見た時の$\psi_\theta=\psi_\theta(r)$とは区別して$\psi_\theta=\psi(\boldsymbol{r})=\psi(R,Z)$と書いておくと便利である。TASK/EQ では、$\psi(\boldsymbol{r})$はプラズマ表面で 0 になるように選ばれている。すなわち、

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r})&=\psi_\theta\big(r(\boldsymbol{r})\big)+\psi_o\\ \psi_o&=-\psi_\theta(r_a)\end{aligned}\tag{1.7.2}$$

である。このことを陽に示すと、G-S 方程式は結局

$$\nabla\cdot\frac{1}{R^2}\nabla\psi(\boldsymbol{r})=-4\pi^2\mu_o\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}-\frac{I_\theta}{R^2}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}\tag{1.7.3}$$

と書かれる。

ポロイダル磁場を G-S 方程式を解いて求めるための入力は、プラズマ圧力とポロイダル電流関数（トロイダル磁場）であるが、トロイダル電流（密度）を与えて解くことができると便利な事が多い。1.7.1 節から 1.7.3 節では、電流密度分布や安全係数を入力とするように G-S 方程式を書き換える。

1.7.1 電流密度の磁力線方向成分

プラズマ電流密度の表式に G-S 方程式を代入すると、平衡にあるプラズマ中の電流密度は次のように表される。

$$\boldsymbol{j}=\frac{1}{2\pi\mu_o}\left[\nabla\zeta R^2\nabla\cdot\frac{1}{R^2}\nabla\psi-\nabla\zeta\times\nabla I_\theta\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\pi R^2 \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}\boldsymbol{\nabla}\zeta - \frac{I_\theta}{2\pi\mu_o}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}\boldsymbol{\nabla}\zeta - \frac{1}{2\pi\mu_o}\boldsymbol{\nabla}\zeta \times \boldsymbol{\nabla}I_\theta \\
&= -2\pi R^2 \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}\boldsymbol{\nabla}\zeta - \frac{1}{2\pi\mu_o}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}[I_\theta\boldsymbol{\nabla}\zeta + \boldsymbol{\nabla}\zeta \times \boldsymbol{\nabla}\psi_\theta] \\
&= -2\pi R^2 \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}\boldsymbol{\nabla}\zeta - \frac{1}{\mu_o}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}\boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

磁場$\boldsymbol{B}$との内積を取って、磁気面平均すると$j_{\parallel av}$が得られる。

$$
\begin{aligned}
j_{\parallel av} &= \frac{1}{B_o}\langle \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{B}\rangle = -\frac{1}{B_o}\langle 2\pi R^2 \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}\boldsymbol{\nabla}\zeta\cdot\boldsymbol{B} + \frac{1}{\mu_o}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}B^2\rangle \\
&= -\frac{I_\theta}{B_o}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} - \frac{B_o}{\mu_o}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}\langle\frac{B^2}{B_o^2}\rangle
\end{aligned}
\tag{1.7.4}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}\psi_\theta &= -4\pi^2\mu_o\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} + \frac{I_\theta}{R^2}\frac{\mu_o}{B_o\langle B^2/B_o^2\rangle}\left[\frac{I_\theta}{B_o}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} + j_{\parallel av}\right] \\
&= \frac{2\pi\mu_o R_o J}{R^2\langle B^2/B_o^2\rangle}j_{\parallel av} + 4\pi^2\mu_o\left[\frac{R_o^2 J^2}{R^2\langle B^2/B_o^2\rangle} - 1\right]\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} \\
&= 2\pi\mu_o\left[\frac{R_o J}{R^2\langle B^2/B_o^2\rangle}j_{\parallel av} - \left(1 - \frac{R_o^2 J^2}{R^2\langle B^2/B_o^2\rangle}\right)\frac{q}{rB_o}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\right]
\end{aligned}
$$

書き直すと

$$
\begin{aligned}
R\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}\psi &= 2\pi\mu_o j_\zeta \\
j_\zeta &\equiv \frac{R_o J}{R\langle B^2/B_o^2\rangle}j_{\parallel av} - 2\pi R\left[1 - \frac{R_o^2 J^2}{R^2\langle B^2/B_o^2\rangle}\right]\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}
\end{aligned}
\tag{1.7.5}
$$

このときポロイダル電流関数は、次のように求まる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I_\theta^2}{\mathrm{d}\psi_\theta} &= -4\pi\mu_o R\left[2\pi R\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} + j_\zeta\right] \\
&= -4\pi\mu_o\left[\frac{2\pi R_o^2 J^2}{\langle B^2/B_o^2\rangle}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} + \frac{R_o J}{\langle B^2/B_o^2\rangle}j_{\parallel av}\right]
\end{aligned}
\tag{1.7.6}
$$

※オリジナルのメモでは赤色で示した符号が逆になっているが、TASK/EQ ソースコードでは、上に示した正しい式が使われている。

ここで、係数$G_5 = \langle B^2/B_o^2\rangle$を他の$G_i$で書き表しておく。

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle B^2\rangle}{B_o^2} &= \frac{1}{4\pi^2 B_o^2}\langle\frac{I_\theta^2}{R^2} + \frac{|\boldsymbol{\nabla}r|^2}{R^2}\left(\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r}\right)^2\rangle = J^2\langle\frac{R_o^2}{R^2}\rangle + \frac{r^2}{q^2}\langle\frac{|\boldsymbol{\nabla}r|^2}{R^2}\rangle \\
&= J^2 G_4 + G_3\frac{r^2}{q^2}
\end{aligned}
\tag{1.7.7}
$$

1.7.2 電流密度のトロイダル方向成分

磁気面変数$j_{\zeta o}$を

$$j_{\zeta o} \equiv -2\pi R_o \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} - \frac{I_\theta}{2\pi\mu_o R_o}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta} \tag{1.7.8}$$

で定義する。すると G-S 方程式は、次のように変形できる。

$$\begin{gathered} R\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}\psi = 2\pi\mu_o j_\zeta \\ j_\zeta = -2\pi R\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} - \frac{I_\theta}{2\pi\mu_o R}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta} = \frac{R_o}{R}j_{\zeta o} - 2\pi R\left(1-\frac{R_o^2}{R^2}\right)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} \end{gathered} \tag{1.7.9}$$

1.7.3 安全係数

G-S 方程式(1.7.3)の両辺の磁気面平均を取る。1.4 節の公式(1.4.7)を使うと

$$\left\langle \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r})\right\rangle = \frac{1}{V'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(V'\left\langle\frac{|\boldsymbol{\nabla}r|^2}{R^2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{V'}\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(V'\left\langle\frac{|\boldsymbol{\nabla}r|^2}{R^2}\right\rangle\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r}\right)$$

また

$$\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r} = 2\pi B_o\frac{r}{q}$$

であるので、

$$\frac{4\pi^2B_o^2}{V'}\frac{r}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(V'\left\langle\frac{|\boldsymbol{\nabla}r|^2}{R^2}\right\rangle\frac{r}{q}\right) = -4\pi^2\mu_o\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} - \left\langle\frac{1}{R^2}\right\rangle I_\theta\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta} \tag{1.7.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(\frac{1}{2}I_\theta^2\right) = -\frac{R_o^2}{\langle R_o^2/R^2\rangle}\left[4\pi^2\mu_o\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} + \frac{4\pi^2B_o^2}{V'}\frac{r}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(V'\left\langle\frac{|\boldsymbol{\nabla}r|^2}{R^2}\right\rangle\frac{r}{q}\right)\right] \tag{1.7.11}$$

となる。これより G-S 方程式

$$\begin{gathered} R\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nabla}\psi = 2\pi\mu_o j_\zeta \\ j_\zeta = -2\pi R\left(1-\frac{R_o^2/R^2}{\langle R_o^2/R^2\rangle}\right)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} + \frac{R_o^2/R}{\langle R_o^2/R^2\rangle}\frac{2\pi B_o^2}{\mu_o V'}\frac{r}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(V'\left\langle\frac{|\boldsymbol{\nabla}r|^2}{R^2}\right\rangle\frac{r}{q}\right) \end{gathered} \tag{1.7.12}$$

を得る。

2. 数値解法

2.1 座標系

G-S 方程式は、以下に説明するポロイダル断面上の(σ,θ)座標系において差分化を行う。(σ,θ)座標系は、σを動径、θを偏角とするポロイダル断面内の座標系であり、(R,Z)と次の関係にある。

$$R = R_o + \rho\sigma\cos\theta$$
$$Z = \rho\sigma\sin\theta \tag{2.1.1}$$
$$(0 \le \sigma \le 1,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

ここにR_oは、プラズマ大半径（磁気軸大半径とは異なる。プラズマ断面の幾何学的中心)、$\rho = \rho(\theta)$は、プラズマ小半径である。ψ_θはζに関して軸対称であるから、(1.2.6)式を用いてG-S 方程式は

$$\nabla_\perp \cdot \frac{1}{R}\nabla_\perp\psi = 2\pi\mu_o j_\zeta \tag{2.1.2}$$

である。以下$\nabla_\perp$を単に∇と書く。

まず、微分演算子∇を、(σ,θ)で書き表すと

$$\nabla = \nabla\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} + \nabla\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{2.1.3}$$

である。(2.1.1)式の勾配を取って得られる

$$\nabla R = \rho\cos\theta\,\nabla\sigma + \sigma(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\nabla\theta$$
$$\nabla Z = \rho\sin\theta\,\nabla\sigma + \sigma(\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\nabla\theta \tag{2.1.4}$$

を逆に解くと

$$\nabla\sigma = \frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho^2}\nabla R - \frac{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta}{\rho^2}\nabla Z$$
$$\nabla\theta = -\frac{\sin\theta}{\rho\sigma}\nabla R + \frac{\cos\theta}{\rho\sigma}\nabla Z \tag{2.1.5}$$

を得る。ここに、$\rho' = \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\theta$である。$\nabla R$、$\nabla Z$は、ポロイダル断面内の定ベクトル場であるから、$\partial\,\nabla R/\partial\sigma = \partial\,\nabla R/\partial\theta = \partial\,\nabla Z/\partial\sigma = \partial\,\nabla Z/\partial\theta = 0$。よって、

$$\frac{\partial\nabla\sigma}{\partial\sigma} = 0$$
$$\frac{\partial\nabla\theta}{\partial\theta} = -\frac{\cos\theta}{\rho\sigma}\nabla R - \frac{\sin\theta}{\rho\sigma}\nabla Z - \frac{\rho'}{\rho}\nabla\theta \tag{2.1.6}$$

である。すると、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial\sigma}\nabla\sigma + \frac{\partial}{\partial\theta}\nabla\theta + \frac{\cos\theta}{\rho\sigma}\nabla R + \frac{\sin\theta}{\rho\sigma}\nabla Z + \frac{\rho'}{\rho}\nabla\theta \tag{2.1.7}$$

と書き直すことができる。

以上より、(2.1.2)式の左辺を計算すると（最初の∇には(2.1.7)式を代入し、二番目の∇には(2.1.3)式を代入する）、

$$\nabla\cdot\frac{1}{R}\nabla\psi=\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\nabla\sigma\cdot\nabla\sigma}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\nabla\sigma\cdot\nabla\theta}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\nabla\theta\cdot\nabla\sigma}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\nabla\theta\cdot\nabla\theta}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R}\left(\frac{\cos\theta}{\rho\sigma}\nabla R+\frac{\sin\theta}{\rho\sigma}\nabla Z+\frac{\rho'}{\rho}\nabla\theta\right)\cdot\nabla\sigma\frac{\partial\partial\psi}{\partial\sigma} \tag{2.1.8}$$
$$+\frac{1}{R}\left(\frac{\cos\theta}{\rho\sigma}\nabla R+\frac{\sin\theta}{\rho\sigma}\nabla Z+\frac{\rho'}{\rho}\nabla\theta\right)\cdot\nabla\theta\frac{\partial\partial\psi}{\partial\theta}$$

を得る。次に、上式の係数を計算すると、$(\nabla R)^2=(\nabla Z)^2=1$、$\nabla R\cdot\nabla Z=0$であるから、(2.1.5)式より

$$\nabla\sigma\cdot\nabla\sigma=\frac{\rho^2+\rho'^2}{\rho^4} \tag{2.1.9}$$

$$\nabla\sigma\cdot\nabla\theta=\nabla\theta\cdot\nabla\sigma=-\frac{\rho'}{\rho^3\sigma} \tag{2.1.10}$$

$$\nabla\theta\cdot\nabla\theta=\frac{1}{\rho^2\sigma^2} \tag{2.1.11}$$

である。また

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho\sigma}\nabla R+\frac{\sin\theta}{\rho\sigma}\nabla Z\right)\cdot\nabla\sigma=\frac{1}{\rho^2\sigma^2}=\nabla\theta\cdot\nabla\theta \tag{2.1.12}$$

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho\sigma}\nabla R+\frac{\sin\theta}{\rho\sigma}\nabla Z\right)\cdot\nabla\theta=0 \tag{2.1.13}$$

も分かるから、うまく整理すると

$$\nabla\cdot\frac{1}{R}\nabla\psi=\frac{1}{\rho^2\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(A\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(B\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(C\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right] \tag{2.1.14}$$

を得る。ここに

$$A=\rho^2\sigma\frac{\nabla\sigma\cdot\nabla\sigma}{R}=\frac{\sigma}{R}+\frac{\rho'^2\sigma}{R\rho^2} \tag{2.1.15}$$

$$B=\rho^2\sigma\frac{\nabla\sigma\cdot\nabla\theta}{R}=-\frac{\rho'}{R\rho} \tag{2.1.16}$$

$$C=\rho^2\sigma\frac{\nabla\theta\cdot\nabla\sigma}{R}=-\frac{\rho'}{R\rho} \tag{2.1.17}$$

$$D=\rho^2\sigma\frac{\nabla\theta\cdot\nabla\theta}{R}=\frac{1}{R\sigma} \tag{2.1.18}$$

である。この方程式を、有限差分法によって差分化する。

（注）微分幾何学の公式より

$$\nabla\cdot\frac{1}{R}\nabla\psi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\sqrt{g}g^{ij}}{R}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}$$

$$g^{ij}=\nabla x^i\cdot\nabla x^j$$

$$\sqrt{g}^{-1}=\sqrt{\det(g^{ij})}=|\nabla x^1\times\nabla x^2|$$

である。

2.2 差分方程式

差分を取る格子の間隔を、σ格子、θ格子それぞれ

$$\Delta\sigma=1/N_\sigma \tag{2.2.1}$$

$$\Delta\theta=2\pi/N_\theta \tag{2.2.2}$$

とする。格子間隔は、一定であるものとする。格子点上の座標を整数添え字、メッシュ中心点（格子中間点）上の座標を半整数添え字で表すことにする。

$$\sigma_i=i\Delta\sigma\quad(i=0,1,\cdots,N_\sigma) \tag{2.2.3}$$

$$\sigma_{i+\frac{1}{2}}=(i+\frac{1}{2})\Delta\sigma\quad(i=0,1,\cdots,N_\sigma-1) \tag{2.2.4}$$

$$\theta_j=j\Delta\sigma\quad(j=0,1,\cdots,N_\theta) \tag{2.2.5}$$

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}=(j+\frac{1}{2})\Delta\sigma\quad(j=0,1,\cdots,N_\theta-1) \tag{2.2.6}$$

（ソースコード中では、添え字i、jは 1 から始まるようにσ_i、$\sigma_{i+\frac{1}{2}}$等が定義されているが、ここでは式が見やすくなるよう上のように定義する。）

また、任意の物理量の格子点、メッシュ中心点での値を、

$$f_{i,j}=f(\sigma_i,\theta_j)$$

$$f_{i+\frac{1}{2},j}=f(\sigma_{i+\frac{1}{2}},\theta_j)$$

などのように標記する。

G-S 方程式は、(σ,θ)メッシュ中心点において差分化される。

$$\begin{aligned}\left(\nabla\cdot\frac{1}{R}\nabla\psi\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}&=\frac{1}{\rho^2_{j+\frac{1}{2}}\sigma_{i+\frac{1}{2}}}\times\\ \times\Bigg\{\frac{1}{\Delta\sigma^2}\Big[A_{i+1,j+\frac{1}{2}}\psi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}&-\left(A_{i+1,j+\frac{1}{2}}+A_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+A_{i,j+\frac{1}{2}}\psi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Big]\\ +\frac{1}{2\Delta\sigma\Delta\theta}\Bigg[B_{i+1,j+\frac{1}{2}}&\left(\frac{\psi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}}+\psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}}{2}-\frac{\psi_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}+\psi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2}\right)\\ -B_{i,j+\frac{1}{2}}&\left(\frac{\psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}+\psi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}}{2}-\frac{\psi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}+\psi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

$$
+\frac{1}{2\Delta\sigma\Delta\theta}\left[C_{i+\frac{1}{2},j+1}\left(\frac{\psi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}}+\psi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}}{2}-\frac{\psi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}+\psi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{2}\right)\right.
$$
$$
\left.-C_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{\psi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}+\psi_{i+\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}}{2}-\frac{\psi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+\psi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2}\right)\right]
$$
$$
\left.+\frac{1}{\Delta\theta^2}\left[D_{i+\frac{1}{2},j+1}\psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}-\left(D_{i+\frac{1}{2},j+1}+D_{i+\frac{1}{2},j}\right)\psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+D_{i+\frac{1}{2},j}\psi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right]\right\}
$$
$$
=2\pi\mu_o j_{\zeta i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}
$$

ここで、一次元の添え字

$$
I=iN_\theta+j \tag{2.2.8}
$$

を導入し、$\psi_I=\psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$と表すと、$I=0,1,\cdots,N_\sigma N_\theta-1$に関する連立一次方程式

$$
\begin{aligned}
&Q_{I,I+N_\theta+1}\psi_{I+N_\theta+1}+Q_{I,I+N_\theta}\psi_{I+N_\theta}+Q_{I,I+N_\theta-1}\psi_{I+N_\theta-1}+Q_{I,I+1}\psi_{I+1}+Q_{I,I}\psi_I\\
&+Q_{I,I-1}\psi_{I-1}+Q_{I,I-N_\theta+1}\psi_{I-N_\theta+1}+Q_{I,I-N_\theta}\psi_{I-N_\theta}+Q_{I,I-N_\theta-1}\psi_{I-N_\theta-1}\\
&=2\pi\mu_o\rho_{j+\frac{1}{2}}^2\sigma_{i+\frac{1}{2}}j_{\zeta I}
\end{aligned} \tag{2.2.9}
$$

$$
Q_{I,I+N_\theta+1}=\frac{1}{4\Delta\sigma\Delta\theta}\left(B_{i+1,j+\frac{1}{2}}+C_{i+\frac{1}{2},j+1}\right) \tag{2.2.10}
$$

$$
Q_{I,I+N_\theta}=\frac{1}{\Delta\sigma^2}A_{i+1,j+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4\Delta\sigma\Delta\theta}\left(C_{i+\frac{1}{2},j+1}-C_{i+\frac{1}{2},j}\right) \tag{2.2.11}
$$

$$
Q_{I,I+N_\theta-1}=\frac{1}{\Delta\sigma^2}A_{i+1,j+\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\Delta\sigma\Delta\theta}\left(B_{i+1,j+\frac{1}{2}}+C_{i+\frac{1}{2},j}\right) \tag{2.2.12}
$$

$$
Q_{I,I+1}=\frac{1}{\Delta\theta^2}D_{i+\frac{1}{2},j+1}+\frac{1}{4\Delta\sigma\Delta\theta}\left(B_{i+1,j+\frac{1}{2}}-B_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \tag{2.2.13}
$$

$$
Q_{I,I}=-\frac{1}{\Delta\sigma^2}\left(A_{i+1,j+\frac{1}{2}}+A_{i,j+\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{\Delta\theta^2}\left(D_{i+\frac{1}{2},j+1}+D_{i+\frac{1}{2},j}\right) \tag{2.2.14}
$$

$$
Q_{I,I-1}=\frac{1}{\Delta\theta^2}D_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{1}{4\Delta\sigma\Delta\theta}\left(B_{i+1,j+\frac{1}{2}}-B_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \tag{2.2.15}
$$

$$
Q_{I,I-N_\theta+1}=-\frac{1}{4\Delta\sigma\Delta\theta}\left(B_{i,j+\frac{1}{2}}+C_{i+\frac{1}{2},j+1}\right) \tag{2.2.16}
$$

$$
Q_{I,I-N_\theta}=\frac{1}{\Delta\sigma^2}A_{i,j+\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\Delta\sigma\Delta\theta}\left(C_{i+\frac{1}{2},j+1}-C_{i+\frac{1}{2},j}\right) \tag{2.2.17}
$$

$$
Q_{I,I-N_\theta-1}=\frac{1}{4\Delta\sigma\Delta\theta}\left(B_{i,j+\frac{1}{2}}+C_{i+\frac{1}{2},j}\right) \tag{2.2.18}
$$

に直すことができる。上の連立方程式は、行列を用いて

$$
[\mathrm{Q}_{IJ}][\psi_J]=2\pi\mu_o\left[\left(\rho^2\sigma j_\zeta\right)_I\right] \tag{2.2.19}
$$

の形に書けている。$[\mathrm{Q}_{IJ}]$は、帯行列になっており、$[\mathrm{Q}_{IJ}]$の逆行列を求める事により差分方程式をψ_Jについて解くことができる。

2.3 磁気面平均

G-S 方程式の右辺を計算するためには、磁気面変数を$\psi(\boldsymbol{r})$から磁気面平均によって求めておく必要がある。必要な磁気面変数は、$q(\psi_\theta)$、$V'(\psi_\theta)$、$G_3(\psi_\theta)$、$G_4(\psi_\theta)$、$G_5(\psi_\theta)$である。トロイダル磁場に関する物理量、$\psi_\zeta(\psi_\theta)$および$I_\theta(\psi_\theta)$は、既知であるとする。

磁気面平均は、(R,Z)座標上で磁力線（$\psi(R,Z)$の等高線）を追跡し、線積分

$$\int \frac{A}{B_p}\mathrm{d}l_p \tag{2.2.19}$$

を数値的に求めることにより行う。ここで、

$$B_p = \frac{1}{2\pi R}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.2.20}$$

である。また、l_pは磁力線に沿った長さである。

まず、

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\psi_\theta} = \oint \mathcal{J}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\zeta = \oint \frac{\mathrm{d}l_p}{2\pi B_p}\mathrm{d}\zeta = \oint \frac{\mathrm{d}l_p}{B_p}$$

および(1.5.5)式より

$$q = \frac{\mathrm{d}\psi_\zeta}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\psi_\theta} = \frac{I_\theta}{4\pi^2}\langle\frac{1}{R^2}\rangle\oint\frac{\mathrm{d}l_p}{B_p} = \frac{I_\theta}{4\pi^2}\oint\frac{\mathrm{d}l_p}{R^2 B_p} \tag{2.2.21}$$

である。すると

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r}\oint\frac{\mathrm{d}l_p}{B_p} = \frac{2\pi r B_o}{q}\oint\frac{\mathrm{d}l_p}{B_p} \tag{2.2.22}$$

により、$V'(\psi_\theta)$が求まる。

$G_3(\psi_\theta)$は、定義式を少し変形して

$$G_3(\psi_\theta) = \left(\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}r}\right)^{-2}\langle\frac{|\nabla\psi|^2}{R^2}\rangle = \frac{q^2}{r^2B_o^2}\oint B_p\mathrm{d}l_p\Big/\oint\frac{\mathrm{d}l_p}{B_p} \tag{2.2.23}$$

$G_4(\psi_\theta)$、$G_5(\psi_\theta)$は、定義式通りに

$$G_4(\psi_\theta) = R_o^2\oint\frac{\mathrm{d}l_p}{R^2B_p}\Big/\oint\frac{\mathrm{d}l_p}{B_p} \tag{2.2.24}$$

$$G_5(\psi_\theta) = \frac{1}{B_o^2}\oint\frac{B^2\mathrm{d}l_p}{B_p}\Big/\oint\frac{\mathrm{d}l_p}{B_p} \tag{2.2.25}$$

と計算される。ここに

$$B^2 = \frac{1}{4\pi^2R^2}\left[I_\theta^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^2\right] \tag{2.2.26}$$

である。

3. サブルーチンの説明

本節において網掛け“テキスト”で示した部分は、平成 29 年度 QST 調達「固定境界軸対称電磁流体平衡コードによる原型炉炉心プラズマの解析環境整備」により整備された拡張仕様である。

3.1 EQCALC

TASK/EQ 平衡計算の入り口。以下の流れで処理を行う。

出力	
IERR	（引数）エラーコード

1. EQMESH
   G-S 方程式の径方向およびポロイダル方向メッシュを作成する。
2. EQPSIN/EQPSIR
   平衡計算の出発点となる一次元ポロイダル磁束関数分布を作成する。Q0*QA<0 の場合に EQPSIR が使われる（しかしながら EQPSIN と EQPSIR は、全く同じ内容)。
3. EQDEFB
   プラズマの境界形状$\rho(\theta)$を与える。
4. EQLOOP
   G-S 平衡を求めるための収束計算ループ。収束ループ内から以下のサブルーチンが呼び出される。
   - EQBAND: バンド行列の係数を与える。
   - EQRHSV: G-S 方程式の右辺ベクトルを与える。
   - EQSOLV: 右辺の与えられた G-S 方程式（ポアソン方程式）を解く。
5. EQTORZ
   座標を(σ,θ)から(r,z)へ変換する。
6. EQCALP
   圧力、温度、トロイダル回転などの一次元分布を計算する。

3.2 EQMESH

G-S 方程式を解くための座標、(σ,θ)のメッシュを生成する。σは磁気軸で値 0、プラズマ表面で値 1 を取る動径、θは外側赤道面から測った偏角である。

入力	
NSGMAX	（Namelist）σメッシュ数N_σ

NTGMAX	(Namelist) θメッシュ数N_θ

出力	
DSG	σメッシュ幅（格子間隔）$\Delta\sigma$
DTG	θメッシュ幅（格子間隔）$\Delta\theta$
SIGM(1:NSGMAX)	σメッシュの中心座標（半整数格子点）$\sigma_{i+1/2}$
SIGG(1:NSGMAX+1)	σメッシュの格子点座標σ_i
THGM(1:NTGMAX)	θメッシュの中心座標（半整数格子点）$\theta_{j+1/2}$
THGG(1:NTGMAX+1)	θメッシュの格子点座標θ_j

3.3 EQPSIN/EQPSIR

平衡解を得るための収束計算の初期分布を設定する。

入力	
MDLEQF	(Namelist) 分布形状選択パラメータ
RR	(Namelist) プラズマ大半径R_o[m]
RA	(Namelist) プラズマ赤道面小半径a[m]
RKAP	(Namelist) プラズマ断面楕円度κ
BB	(Namelist) トロイダル磁場B_o[T]
QA	(Namelist) プラズマ表面安全係数q_a
RIP	(Namelist) プラズマ電流I_p[MA]
NRVMAX	(Namelist) rメッシュ数N_r

出力	
RAXIS	磁気軸R座標R_{axis}[m]
ZAXIS	磁気軸Z座標Z_{axis}[m]
PSI0	二次元ポロイダル磁束分布$\psi(\sigma,\theta)$の磁気軸での値ψ_o[Wb]
PSIPA	表面ポロイダル磁束$\psi_{\theta a} = \psi_\theta(r_a)$[Wb]
PSITA	表面トロイダル磁束$\psi_{\zeta a} = \psi_\zeta(r_a)$[Wb]
PSIPNV(1:NRVMAX)	$[0,1]$に規格化されたポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta(r) = \psi_\theta/\psi_{\theta a}$
PSIPV(1:NRVMAX)	ポロイダル磁束$\psi_\theta(r)$[Wb]
PSITV(1:NRVMAX)	トロイダル磁束$\psi_\zeta(r)$[Wb]
QPV(1:NRVMAX)	安全係数分布$q(r)$
TTV(1:NRVMAX)	ポロイダル電流$I_\theta(r)$[Wb/m]
PSI(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	

	二次元ポロイダル磁束分布$\psi(\sigma,\theta)$[Wb]
DELPSI(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	
	$\psi(\sigma,\theta)$の収束誤差$\delta\psi(\sigma,\theta)$[Wb]
UPSITV(1:4,1:NRVMAX)	
	PSITV のスプライン係数
UQPV(1:4,1:NRVMAX)	QPV のスプライン係数
UTTV(1:4,1:NRVMAX)	TTV のスプライン係数

各変数は、次のように初期化される。

$$R_{axis} = R_o$$

$$Z_{axis} = 0$$

ψ_o、$\psi_{\theta a}$、$\psi_{\zeta a}$は、MDLEQF の値によって異なる値に初期化される。

（MDLEQF = 4, 9）

$$\psi_{\zeta a} = \pi\kappa a^2 B_o$$

$$\psi_{\theta a} = 2\psi_{\zeta a}/q_a$$

$$\psi_o = -\psi_{\theta a}$$

（MDLEQF = 0-3,5-8）

$$\psi_o = \frac{1}{2}\mu_o R_o I_p \times 10^6$$

$$\psi_{\theta a} = -\psi_o$$

$$\psi_{\zeta a} = \pi\kappa a^2 B_o$$

磁気面上の一次元分布は、$\rho = r/r_a$について以下のように初期化される。

$$\hat{\psi}_\theta(\rho) = \rho^2$$

$$\psi_\theta(\rho) = \psi_{\theta a}\rho^2$$

$$\psi_\zeta(\rho) = \psi_{\zeta a}\rho^2$$

$$q(\rho) = \psi_{\zeta a}/\psi_{\theta a}$$

$$I_\theta(\rho) = 2\pi R_o B_o$$

(σ,θ)メッシュ上の二次元分布は、以下のように初期化される。

$$\psi(\sigma,\theta) = \psi_o(1-\sigma^2)$$

$$\delta\psi(\sigma,\theta) = 0$$

3.4 EQDEFB

(σ,θ)メッシュの境界半径$\rho(\theta)$を与え、G-S 方程式の係数A、B、C、Dを設定する。

入力	
RR	（Namelist）プラズマ大半径R_o[m]
RA	（Namelist）プラズマ赤道面小半径a[m]

RKAP	（Namelist）プラズマ断面楕円度κ
RDLT	（Namelist）プラズマ断面三角度δ
NSGMAX	（Namelist）σメッシュ数N_σ
NTGMAX	（Namelist）θメッシュ数N_θ
LBNDR	（Namelist）プラズマ境界形状読込選択パラメータ
DSG	σメッシュ幅（格子間隔）$\Delta\sigma$
DTG	θメッシュ幅（格子間隔）$\Delta\theta$
SIGM(1:NSGMAX)	σメッシュの中心座標（半整数格子点）$\sigma_{i+1/2}$
SIGG(1:NSGMAX+1)	σメッシュの格子点座標σ_i
THGM(1:NTGMAX)	θメッシュの中心座標（半整数格子点）$\theta_{j+1/2}$
THGG(1:NTGMAX+1)	θメッシュの格子点座標θ_j
NSBMAX	プラズマ境界形状データ点数
RSB(1:NSBMAX)	プラズマ境界R座標[m]
ZSB(1:NSBMAX)	プラズマ境界Z座標[m]

出力	
RHOM(1:NTGMAX)	σメッシュ境界半径（メッシュ中心）$\rho(\theta_{j+1/2})$[m]
RHOG(1:NTGMAX+1)	σメッシュ境界半径（格子点）$\rho(\theta_j)$[m]
RMG(1:NSGMAX,1;NTGMAX+1)	
	$(\sigma_{i+1/2},\theta_j)$の$R$座標値$R_{i+1/2,j}$[m]
RGM(1:NSGMAX+1,1;NTGMAX)	
	$(\sigma_i,\theta_{j+1/2})$の$R$座標値$R_{i,j+1/2}$[m]
RMM(1:NSGMAX,1;NTGMAX)	
	$(\sigma_{i+1/2},\theta_{j+1/2})$の$R$座標値$R_{i+1/2,j+1/2}$[m]
ZMM(1:NSGMAX,1;NTGMAX)	
	$(\sigma_{i+1/2},\theta_{j+1/2})$の$Z$座標値$Z_{i+1/2,j+1/2}$[m]
AA(1:NSGMAX+1,1:NTGMAX)	
	G-S 方程式係数$A_{i,j+1/2}$
AB(1:NSGMAX+1,1:NTGMAX)	
	G-S 方程式係数$B_{i,j+1/2}$
AC(1:NSGMAX,1:NTGMAX+1)	
	G-S 方程式係数$C_{i+1/2,j}$
AD(1:NSGMAX,1:NTGMAX+1)	
	G-S 方程式係数$D_{i+1/2,j}$
RR	（Namelist）プラズマ大半径R_o[m]
BB	（Namelist）トロイダル磁場B_o[T]

RA	（Namelist）プラズマ赤道面小半径a[m]
RB	（namelist）真空容器赤道面小半径b[m]
RKAP	（Namelist）プラズマ断面楕円度κ
RDLT	（Namelist）プラズマ断面三角度δ
THSB(1:NSBMAX+1)	プラズマ境界θ座標
URHOB(4,1:NSBMAX+1)	
	σメッシュ境界半径$\rho(\theta)$スプライン係数

LBNDR=0 の時、境界形状は、円柱座標で次のように与えられる。

$$R(\theta) = R_o + a\cos(\theta' + \delta\sin\theta')$$

$$Z(\theta) = a\kappa\sin\theta'$$

ここにθ'は、

$$\frac{\kappa\sin\theta'}{\cos(\theta' + \delta\sin\theta')} = \tan\theta$$

を満たす媒介変数である。$\rho(\theta)$は次のように与えられる。

$$\rho(\theta) = a\sqrt{\cos^2(\theta' + \delta\sin\theta') + \kappa^2\sin^2\theta'}$$

LBNDR=1、2 の時、境界形状は RSB(I)、ZSB(I)、I=1,NSBMAX により与えられる。RSB、ZSB はそれぞれ、境界形状のR、Z座標値である。これらの座標値をσ、θ座標値に変換した後、スプライン補間により、θメッシュ点での境界半径$\rho(\theta)$が求められる。スプライン変換の横軸座標値 THSB、スプライン係数 URHOB は後にサブルーチン EQTORZ で使用するため保存される。また、ネームリスト変数 RR、RA、RB、BB、RKAP、RDLT は境界形状に合うように再設定される。LBNDR = 1 の時、境界形状はネームリスト変数 KNAMBD で指定される名前の表形式テキストファイルから読み込まれ、LBNDR = 2 の時は、ネームリスト変数 KNAMPF で指定される名前の G EQDSK 形式ファイルから読み込まれる。

このρ(θ)を用いて、(σ,θ)に対応するR、Z座標値は、

$$R(\sigma,\theta) = R_o + \sigma\rho(\theta)\cos\theta$$

$$Z(\sigma,\theta) = \sigma\rho(\theta)\sin\theta$$

で与えられる。

G-S 方程式の係数は、(2.1.15)から(2.1.18)式で与えられる。

$$A = \frac{\sigma}{R} + \frac{\rho'^2\sigma}{R\rho^2},\qquad B = C = -\frac{\rho'}{R\rho},\qquad D = \frac{1}{R\sigma}$$

3.5 EQLOOP

G-S 方程式を解くための収束ループ。

入力	
EPSEQ	（Namelist）許容される収束誤差ε

出力	
IERR	（引数）エラーコード

以下のサブルーチンを繰り返し呼出し、G-S 方程式の収束解を求める。

EQBAND	帯行列$[Q_{IJ}]$をセットする
EQRHSV	G-S 右辺のベクトル$[j_{\zeta I}]$を計算する
EQSOLV	$[Q_{IJ}][\psi_J] = 2\pi\mu_o\left[\left(\rho^2\sigma j_\zeta\right)_I\right]$を解く

ループの収束条件は、

$$\sqrt{\sum\left(\delta\psi_{i+1/2,j+1/2}\right)^2} < \varepsilon\sqrt{\sum\left(\psi_{i+1/2,j+1/2}\right)^2}$$

である。

3.6 EQBAND

帯行列$[Q_{IJ}]$をセットする。

入力	
NSGMAX	（Namelist）σメッシュ数N_σ
NTGMAX	（Namelist）θメッシュ数N_θ
DSG	σメッシュ幅（格子間隔）$\Delta\sigma$
DTG	θメッシュ幅（格子間隔）$\Delta\theta$
AA(1:NSGMAX+1,1:NTGMAX)	G-S 方程式係数$A_{i,j+1/2}$
AB(1:NSGMAX+1,1:NTGMAX)	G-S 方程式係数$B_{i,j+1/2}$
AC(1:NSGMAX,1:NTGMAX+1)	G-S 方程式係数$C_{i+1/2,j}$
AD(1:NSGMAX,1:NTGMAX+1)	G-S 方程式係数$D_{i+1/2,j}$
NBM	Spike Solver ブロックサイズ

出力	
Q(1:4*NTGMAX-1,1:NSGMAX*NTGMAX)	
	帯行列$[Q_{IJ}]$
SSR(1:NTGMAX,1:NTGMAX,1:NSGMAX)	
	Spike Solver 作業領域
SSP(1:NTGMAX,1:NTGMAX,1:NSGMAX)	
	Spike Solver 作業領域
SSQ(1:NTGMAX,1:NTGMAX,1:NSGMAX)	
	Spike Solver 作業領域

(2.2.10)から(2.2.18)式に従って帯行列Q_{IJ}を設定する。Q_{IJ}は、更に Spike Solver の作業領域にコピーされる。「固定境界軸対称電磁流体平衡コードの開発・整備報告書」を参照の事。

3.7 EQRHSV

G-S 方程式の右辺ベクトル$[j_{\zeta I}]$を計算する。

入力	
MDLEQF	（Namelist）分布形状選択パラメータ
NSGMAX	（Namelist）σメッシュ数N_σ
NTGMAX	（Namelist）θメッシュ数N_θ
NRVMAX	（Namelist）rメッシュ数N_r
RIP	（Namelist）プラズマ電流I_p[MA]
DSG	σメッシュ幅（格子間隔）$\Delta\sigma$
DTG	θメッシュ幅（格子間隔）$\Delta\theta$
RAXIS	磁気軸大半径R_{axis}[m]
PSI(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	
	二次元ポロイダル磁束分布$\psi(\sigma,\theta)$[Wb]

出力	
HJT(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	
	二次元トロイダル電流密度分布$j_\zeta(\sigma,\theta)$[Wb]
TT(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	
	二次元ポロイダル電流関数$I_\theta(\sigma,\theta)$[Wb/m]
RHO(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	
	質量密度分布$\rho_m(\sigma,\theta)=\frac{m_pP}{T}\exp(\frac{m_pR^2\omega^2}{2T})$[kg/m³]

TTV(1:NRVMAX)	ポロイダル電流関数$I_\theta(r)$[Wb/m]
UPSITV(1:4,1:NRVMAX)	
	PSITV のスプライン係数
UQPV(1:4,1:NRVMAX)	QPV のスプライン係数
UTTV(1:4,1:NRVMAX)	TTV のスプライン係数
TJ	分布規格化乗数f

（注）TT 及び RHO は、TASK/EQ コードの他の部分では使用されていない。

サブルーチン EQRHSV は、サブルーチン EQPPSI、EQFPSI、EQJPSI、EQTPSI、EQOPSI 及び EQFIPV を呼び出して、規格化されたポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta = 1 - \psi(\sigma,\theta)/\psi_o$の関数である G-S 方程式の右辺$j_\zeta(\sigma,\theta) = j_\zeta\left(\hat{\psi}_\theta(\sigma,\theta)\right)$を計算する。$j_\zeta$は、一般にプラズマ圧力$P(\hat{\psi}_\theta)$とポロイダル電流関数$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$の関数として

$$j_\zeta = -2\pi R \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} - \frac{I_\theta}{2\pi\mu_o R}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}$$

と与えられるが、オプション MDLEQF の値によって、ポロイダル電流関数の代わりに他の分布形状を与えて計算することもできる。

3.7.1 MDLEQF = 0, 5: $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{j_{\zeta o}}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{I_p}$

詳細な理論は不明だが、G-S 方程式として以下の方程式を用いる。

$$R\nabla\cdot\frac{1}{R^2}\nabla\psi = 2\pi\mu_o j_\zeta$$

$$j_\zeta = -2\pi R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(P\exp\frac{m_p R^2\omega^2}{2T}\right) - \frac{I_\theta}{2\pi\mu_o R}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}$$

トロイダル電流$j_{\zeta o}$を次式で定義する。

$$j_{\zeta o}(\hat{\psi}_\theta) = -2\pi R_{axis}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(P\exp\frac{m_p R_{axis}^2\omega^2}{2T}\right) - \frac{I_\theta}{2\pi\mu_o R_{axis}}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}$$

ここで、R_{axis}は磁気軸のR座標である。$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$の代わりに$j_{\zeta o}(\hat{\psi}_\theta)$を入力と見なすと、

$$j_\zeta = f j_T + j_P$$

$$j_T = \frac{R_{axis}}{R} j_{\zeta o}^{IN}$$

$$j_P = -2\pi R\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(P^{IN}\exp\frac{m_p R^2 {\omega^{IN}}^2}{2T^{IN}}\right) - \frac{R_{axis}^2}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(P^{IN}\exp\frac{m_p R_{axis}^2 {\omega^{IN}}^2}{2T^{IN}}\right)\right]$$

が得られる。ここに、fは全電流がI_pに等しくなるよう決められる規格化定数であり、

$$f = \left(I_p\times 10^6 - \int j_P\rho^2\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\theta\right)\Big/\int j_T\rho^2\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\theta$$

である。（注）TASK/EQ のソースコードでは、j_Tの符号が逆であるが、規格化定数fに吸収

されるので気にしなくて良い。

分布$P^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$、$j_{\zeta o}^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$、$T^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$、$\omega^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$の取得に、それぞれサブルーチン EQPPSI、EQJPSI、EQTPSI、EQOPSI を呼び出す。関係するネームリスト入力及びスプライン係数については、3.8 節を参照。

ポロイダル電流関数との関係は、

$$I_\theta(\hat{\psi}_\theta) = \left\{(2\pi R_o B_o)^2 + 2\mu_o R_{axis}\left(2\pi f\int_1^{\hat{\psi}_\theta} j_{\zeta o}^{IN}\mathrm{d}\psi_\theta - R_{axis}P^{IN}\exp\frac{m_p R_{axis}^2 {\omega^{IN}}^2}{2T^{IN}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

である。

3.7.2 MDLEQF = 1, 6: $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{I_\theta}$、$\boldsymbol{I_p}$

プラズマ圧力分布$P(\hat{\psi}_\theta)$、ポロイダル電流関数$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$を与えて計算する。$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$は、全プラズマ電流が$I_p$に等しくなるよう規格化される。分布の取得に EQPPSI、EQFPSI を呼出す。関係するネームリスト入力及びスプライン係数については、3.8 節を参照。

入力値を$P^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$、$I_\theta^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$として、$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$、$j_\zeta(\hat{\psi}_\theta)$は以下の様に規格化される。

$$I_\theta(\hat{\psi}_\theta) = 2\pi R_o B_o + f\left(I_\theta^{IN} - 2\pi R_o B_o\right)$$

$$\begin{aligned} j_\zeta(\hat{\psi}_\theta) &= -2\pi R\frac{\mathrm{d}P^{IN}}{\mathrm{d}\psi_\theta} - \frac{f}{2\pi\mu_o R}2\pi R_o B_o\frac{\mathrm{d}I_\theta^{IN}}{\mathrm{d}\psi_\theta} - \frac{f^2}{2\pi\mu_o R}\left(I_\theta^{IN} - 2\pi R_o B_o\right)\frac{\mathrm{d}I_\theta^{IN}}{\mathrm{d}\psi_\theta} \\ &= j_P + f j_{T1} + f^2 j_{T2} \end{aligned}$$

$$J_P = \int j_P\,\rho^2\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\theta$$

$$J_{T1} = \int j_{T1}\,\rho^2\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\theta$$

$$J_{T2} = \int j_{T2}\,\rho^2\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\theta$$

$$f = \frac{-J_{T1} \pm \sqrt{J_{T1}^2 + 4J_{T2}(I_p \times 10^6 - J_P)}}{2J_{T2}}$$

上式中の複合は、$J_{T1} > 0$の時+、$J_{T1} < 0$の時−である。

3.7.3 MDLEQF = 2, 7: $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{j_{\parallel av}}$、$\boldsymbol{I_p}$

プラズマ圧力分布$P(\hat{\psi}_\theta)$、電流密度の磁力線方向成分$j_{\parallel av}(\hat{\psi}_\theta)$を与えて計算する。$j_{\parallel av}$は、(1.6.9)式で定義される磁気面変数である。分布の取得にサブルーチン EQPPSI、EQIPJP、EQFIPV を呼び出す。関係するネームリスト入力、スプライン係数については 3.8、3.9 節を参照。

サブルーチン EQIPJP は、$j_{\parallel av}$分布をI_θ分布に変換し、そのスプライン係数を保存する。

サブルーチン EQFIPV は、保存されたスプライン係数から補間によって$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$を生成する。この$I_\theta^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$とサブルーチン EQPPSI によって得られた$P^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$とから、MDLEQF = 1, 6 と全く同じ手続きで$j_\zeta(\hat{\psi}_\theta)$の分布を得る。全電流は$I_p$に等しくなるよう規格化される。

3.7.4 MDLEQF = 3, 8: $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{j_{\parallel av}}$

MDLEQF = 2, 7 の場合と同じであるが、$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$は規格化されない。すなわち、$f = 1$に強制される。

3.7.5 MDLEQF = 4, 9: $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{q}$

プラズマ圧力分布$P(\hat{\psi}_\theta)$、安全係数分布$q(\hat{\psi}_\theta)$を与えて計算する。qは、(1.6.10)式で定義される。分布の取得にサブルーチン EQPPSI、EQIPQP、EQFIPV を呼び出す。関係するネームリスト入力、スプライン係数については 3.8、3.10 節を参照。

サブルーチン EQIPQP は、q分布をI_θ分布に変換し、そのスプライン係数を保存する。サブルーチン EQFIPV は、保存されたスプライン係数から補間によって$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$を生成する。この$I_\theta^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$とサブルーチン EQPPSI によって得られた$P^{IN}(\hat{\psi}_\theta)$とから、以下の計算式で$j_\zeta(\hat{\psi}_\theta)$の分布を得る。$I_p$による規格化は、行われない。

$$j_\zeta(\hat{\psi}_\theta) = -2\pi R\frac{\mathrm{d}P^{IN}}{\mathrm{d}\psi_\theta} - \frac{1}{2\pi\mu_o R} I_\theta^{IN}\frac{\mathrm{d}I_\theta^{IN}}{\mathrm{d}\psi_\theta}$$

3.8 EQ*PSI

サブルーチン EQPPSI、EQFPSI、EQQPSI、EQJPSI、EQTPSI、EQOPSI は、それぞれ$P(\hat{\psi}_\theta)$、$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$、$q(\hat{\psi}_\theta)$、$j(\hat{\psi}_\theta)$、$T(\hat{\psi}_\theta)$、$\omega(\hat{\psi}_\theta)$の値及び微分値を、与えられた関数形もしくはスプライン係数から計算する。ωは、トロイダル回転角速度である。

入力（共通）	
MDLEQF	（Namelist）分布形状選択パラメータ
MDLEQA	（Namelist）分布形状独立変数選択パラメータ
PROFR0	（Namelist）分布形状パラメータα_0
PROFR1	（Namelist）分布形状パラメータα_1
PROFR2	（Namelist）分布形状パラメータα_2
RHOITB	（Namelist）ITB 位置規格化半径ρ_{ITB}
UPSITV(1:4, 1:NRVMAX)	
	PSITV（ψ_ζ）スプライン係数

ネームリスト入力パラメータ MDLEQF の値によって、処理が異なる。

MDLEQF = 0, 1, 2, 3, 4

PROFR0-2、RHOITB をパラメータとする関数形を使って分布の値、微分値を計算する。分布形状の独立変数$\hat{\psi}$は、MDLEQA によって 2 通りから選択できる。

$$\hat{\psi} = \begin{cases} \hat{\psi}_\theta & (\mathrm{MDLEQA} = 0) \\ \psi_\zeta(\hat{\psi}_\theta)/\psi_{\zeta a} & (\mathrm{MDLEQA} = 1) \end{cases}$$

MDLEQA = 1 の場合、$\hat{\psi}$を計算するためにスプライン係数 UPSITV が使用される。

MDLEQF = 5, 6, 7, 8, 9

EQPPSI、EQFPSI、EQQPSI、EQJPSI、EQTPSI、EQOPSI は、それぞれスプライン係数 UPPSI、UFPSI、UQPSI、UJPSI、UTPSI、UVTPSI から分布の値、微分値を計算する。

（注）現バージョンでは、プログラムのどこでも UPPSI、UFPSI、UQPSI、UJPSI、UTPSI、UVTPSI が計算されていないため、MDLEQF>=5 は動作しない。

3.8.1 EQPPSI

プラズマ圧力分布$P(\hat{\psi})$

入力	
PSIPNL	（引数）規格化ポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta$
LPPSI	（Namelist）圧力分布読込選択パラメータ
PP0	（Namelist）プラズマ圧力（主成分）P_0[MPa]
PP1	（Namelist）プラズマ圧力（副成分）P_1 [MPa]
PP2	（Namelist）プラズマ圧力（ITB 増分）P_2 [MPa]
PROFP0	（Namelist）プラズマ圧力分布形状パラメータβ_0^P
PROFP1	（Namelist）プラズマ圧力分布形状パラメータβ_1^P
PROFP2	（Namelist）プラズマ圧力分布形状パラメータβ_2^P
UPPSI(1:4,1:NRVMAX)	プラズマ圧力分布スプライン係数

出力	
PPSI	（引数）プラズマ圧力$P(\hat{\psi}_\theta)$[Pa]
DPPSI	（引数）微分係数$\mathrm{d}P/\mathrm{d}\psi_\theta\,(\hat{\psi}_\theta)$[Pa/Wb]

MDLEQF < 5、LPPSI = 0 の時、$P(\hat{\psi}_\theta)$及び$\mathrm{d}P/\mathrm{d}\psi_\theta\,(\hat{\psi}_\theta)$は次の式で計算される。

$$10^{-6}P(\hat{\psi}_\theta) = P_0(1-\hat{\psi}^{\alpha_0})^{\beta_0^P} + P_1(1-\hat{\psi}^{\alpha_1})^{\beta_1^P} + H(\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}-\hat{\psi})P_2\left(1-\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^P}$$

$$\begin{aligned}10^{-6}\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}\hat{\psi}}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}(\hat{\psi}_\theta) \\ &= -P_0\alpha_0\beta_0^P(1-\hat{\psi}^{\alpha_0})^{\beta_0^P-1}\hat{\psi}^{\alpha_0-1} - P_1\alpha_1\beta_1^P(1-\hat{\psi}^{\alpha_1})^{\beta_1^P-1}\hat{\psi}^{\alpha_1-1} \\ &- H(\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}-\hat{\psi})\frac{P_2\alpha_2\beta_2^P}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\left(1-\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^P-1}\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2-1}\end{aligned}$$

ここに、

$$\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}} = \begin{cases} \rho_{\mathrm{ITB}}^2 & (\mathrm{MDLEQA}=0) \\ \psi_\zeta(\hat{\psi}_\theta=\rho_{\mathrm{ITB}}^2)/\psi_{\zeta a} & (\mathrm{MDLEQA}=1) \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1 & (x\geq 0) \end{cases}$$

である。（注）$\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}$は、実際にはサブルーチン EQCALV で計算されている。

MDLEQF < 5、LPPSI = 1 の時、プラズマ圧力分布はファイル “T_RHO_MACH.gp” から読み込まれ、スプライン補間によって$P(\hat{\psi}_\theta)$及び$\mathrm{d}P/\mathrm{d}\psi_\theta\,(\hat{\psi}_\theta)$が計算される。

MDLEQF < 5、LPPSI = 2 の時、プラズマ圧力分布はネームリスト変数 KNAMPF で指定される名前の G EQDSK 形式ファイルから読み込まれ、スプライン補間によって$P(\hat{\psi}_\theta)$及び$\mathrm{d}P/\mathrm{d}\psi_\theta\,(\hat{\psi}_\theta)$が計算される。

3.8.2 EQFPSI

ポロイダル電流$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$

入力	
PSIPNL	（引数）規格化ポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta$
LFPSI	(Namelist) ポロイダル電流関数分布読込選択パラメータ
RR	(Namelist) プラズマ大半径R_o[m]
BB	(Namelist) トロイダル磁場B_o[T]
FF0	(Namelist) ポロイダル電流（主成分）F_0[Wb/m]
FF1	(Namelist) ポロイダル電流（副成分）F_1[Wb/m]
FF2	(Namelist) ポロイダル電流（ITB 増分）F_2[Wb/m]
PROFF0	(Namelist) ポロイダル電流分布形状パラメータβ_0^F

PROFF1	（Namelist）ポロイダル電流分布形状パラメータβ_1^F
PROFF2	（Namelist）ポロイダル電流分布形状パラメータβ_2^F
UFPSI(1:4,1:NRVMAX)	ポロイダル電流分布スプライン係数

出力	
FPSI	（引数）ポロイダル電流$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$[Wb/m]
DFPSI	（引数）微分係数$\mathrm{d}I_\theta/\mathrm{d}\psi_\theta\,(\hat{\psi}_\theta)$[m-1]

MDLEQF < 5、LFPSI = 0 の時、$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$及び$\mathrm{d}I_\theta/\mathrm{d}\psi_\theta\,(\hat{\psi}_\theta)$は次の式で計算される。

$$I_\theta(\hat{\psi}_\theta) = 2\pi R_o B_o + F_0\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_0}\right)^{\beta_0^F} + F_1\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_1}\right)^{\beta_1^F} + H(\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}-\hat{\psi})F_2\left(1-\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^F}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}\hat{\psi}}\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}(\hat{\psi}_\theta) = -F_0\alpha_0\beta_0^F\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_0}\right)^{\beta_0^F-1}\hat{\psi}^{\alpha_0-1} - F_1\alpha_1\beta_1^F\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_1}\right)^{\beta_1^F-1}\hat{\psi}^{\alpha_1-1}$$

$$- H(\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}-\hat{\psi})\frac{F_2\alpha_2\beta_2^F}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\left(1-\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^F-1}\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2-1}$$

MDLEQF < 5、LFPSI = 2 の時、ポロイダル電流関数分布はネームリスト変数 KNAMPF で指定される名前の G EQDSK 形式ファイルから読み込まれ、スプライン補間によって$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$及び$\mathrm{d}I_\theta/\mathrm{d}\psi_\theta\,(\hat{\psi}_\theta)$が計算される。

3.8.3 EQQPSI

安全係数$q(\hat{\psi}_\theta)$

入力	
PSIPNL	（引数）規格化ポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta$
LQPSI	（Namelist）安全係数分布読込選択パラメータ
Q0	（Namelist）磁気軸安全係数q_o
QA	（Namelist）プラズマ表面安全係数q_a
UQPSI(1:4,1:NRVMAX)	安全係数分布スプライン係数

出力	
QPSI	（引数）安全係数$q(\hat{\psi}_\theta)$

MDLEQF < 5、LQPSI = 0 の時、$q(\hat{\psi}_\theta)$は次式で計算される。

$$q(\hat{\psi}_\theta) = q_o + (q_a - q_o)\hat{\psi}_\zeta$$
$$\hat{\psi}_\zeta = \psi_\zeta(\hat{\psi}_\theta)/\psi_{\zeta a}$$

MDLEQF < 5、LQPSI = 2 の時、安全係数分布はネームリスト変数 KNAMPF で指定される名前の G EQDSK 形式ファイルから読み込まれ、スプライン補間によって$q(\hat{\psi}_\theta)$が計算される。

3.8.4 EQJPSI

電流密度$j(\hat{\psi}_\theta)$

入力	
PSIPNL	（引数）規格化ポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta$
PJ0	（Namelist）電流密度（主成分）j_0[MA/m2]
PJ1	（Namelist）電流密度（副成分）j_1 [MA/m2]
PJ2	（Namelist）電流密度（副成分）j_2 [MA/m2]
PROFJ0	（Namelist）電流密度分布形状パラメータβ_0^j
PROFJ1	（Namelist）電流密度分布形状パラメータβ_1^j
PROFJ2	（Namelist）電流密度分布形状パラメータβ_2^j
UJPSI(1:4,1:NRVMAX)	電流密度分布スプライン係数

出力	
HJPSI	（引数）電流密度$j(\hat{\psi}_\theta)$[A/m2]
HJPSID	（引数）原関数$\int_1^{\hat{\psi}_\theta} jd\psi_\theta$[AWb/m2]

MDLEQF < 5 の時、$j(\hat{\psi}_\theta)$、$\int_1^{\hat{\psi}_\theta} jd\psi_\theta$は次のように計算される。

$$10^{-6}\frac{\mathrm{d}\hat{\psi}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\int_1^{\hat{\psi}_\theta} jd\psi_\theta$$
$$= -\frac{j_0}{\alpha_0(\beta_0^j+1)}\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_0}\right)^{\beta_0^j+1} - \frac{j_1}{\alpha_1(\beta_1^j+1)}\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_1}\right)^{\beta_1^j+1}$$
$$- \frac{j_2}{\alpha_2(\beta_2^j+1)}\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^j+1}$$

$$10^{-6}j(\hat{\psi}_\theta) = j_0\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_0}\right)^{\beta_0^j}\hat{\psi}^{\alpha_0-1} + j_1\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_1}\right)^{\beta_1^j}\hat{\psi}^{\alpha_1-1} + j_2\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^j}\hat{\psi}^{\alpha_2-1}$$

（注）PJ0～PJ2 の値は、MDLEQF の設定により$j_{\zeta o}$、$j_{\| av}$どちらにも解釈され得る。

3.8.5 EQTPSI

プラズマ温度$T(\hat{\psi}_\theta)$

入力	
PSIPNL	（引数）規格化ポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta$
PT0	（Namelist）プラズマ温度（主成分）T_0[keV]
PT1	（Namelist）プラズマ温度（副成分）T_1[keV]
PT2	（Namelist）プラズマ温度（ITB 増分）T_2[keV]
PTSEQ	（Namelist）プラズマ表面温度T_a[keV]
PROFT0	（Namelist）プラズマ温度分布形状パラメータβ_0^T
PROFT1	（Namelist）プラズマ温度分布形状パラメータβ_1^T
PROFT2	（Namelist）プラズマ温度分布形状パラメータβ_2^T
UTPSI(1:4,1:NRVMAX)	プラズマ温度分布スプライン係数
（注）PROFT0-2 のデフォルト値を与えるコードがサブルーチン EQINIT に存在するが、現在コメントアウトされている。	

出力	
TPSI	（引数）プラズマ温度$T(\hat{\psi}_\theta)$[J]
DTPSI	（引数）微分係数$\mathrm{d}T/\mathrm{d}\psi_\theta\ (\hat{\psi}_\theta)$[J/Wb]

MDLEQF < 5 の時、$T(\hat{\psi}_\theta)$及び$\mathrm{d}T/\mathrm{d}\psi_\theta\ (\hat{\psi}_\theta)$は次の式で計算される。

$$\frac{10^{-3}}{e}T(\hat{\psi}_\theta) = T_a + (T_0 - T_a)\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_0}\right)^{\beta_0^T} + T_1\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_1}\right)^{\beta_1^T}$$

$$+ H(\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}} - \hat{\psi})T_2\left(1-\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^T}$$

$$\frac{10^{-3}}{e}\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}\hat{\psi}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\psi_\theta}(\hat{\psi}_\theta)$$

$$= -T_0\alpha_0\beta_0^T\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_0}\right)^{\beta_0^T-1}\hat{\psi}^{\alpha_0-1} - T_1\alpha_1\beta_1^T\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_1}\right)^{\beta_1^T-1}\hat{\psi}^{\alpha_1-1}$$

$$- H(\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}} - \hat{\psi})\frac{T_2\alpha_2\beta_2^T}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\left(1-\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^T-1}\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2-1}$$

3.8.6 EQOPSI

トロイダル回転$\omega(\hat{\psi}_\theta)$

入力	
PSIPNL	（引数）規格化ポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta$
RAXIS	磁気軸大半径R_{axis}[m]
PV0	（Namelist）トロイダル回転速度（主成分）v_0[m/s]
PV1	（Namelist）トロイダル回転速度（副成分）v_1[m/s]
PV2	（Namelist）トロイダル回転速度（ITB 増分）v_2[m/s]
PROFV0	（Namelist）トロイダル回転分布形状パラメータβ_0^v
PROFV1	（Namelist）トロイダル回転分布形状パラメータβ_1^v
PROFV2	（Namelist）トロイダル回転分布形状パラメータβ_2^v
UVTPSI(1:4,1:NRVMAX)	プラズマ温度分布スプライン係数

出力	
OMGPSI	（引数）トロイダル回転角速度$\omega(\hat{\psi}_\theta)$[rad/s]
DOMGPSI	（引数）微分係数$\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\psi_\theta\ (\hat{\psi}_\theta)$[rad/s/Wb]

MDLEQF < 5 の時、$\omega(\hat{\psi}_\theta)$、$\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\psi_\theta\ (\hat{\psi}_\theta)$は次のように計算される。

$$R_{axis}\omega(\hat{\psi}_\theta) = v_0\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_0}\right)^{\beta_0^v} + v_1\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_1}\right)^{\beta_1^v} + H\left(\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}-\hat{\psi}\right)v_2\left(1-\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^v}$$

$$\begin{aligned} R_{axis}\frac{\mathrm{d}\psi_\theta}{\mathrm{d}\hat{\psi}}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\psi_\theta}(\hat{\psi}_\theta) \\ &= -v_0\alpha_0\beta_0^v\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_0}\right)^{\beta_0^v-1}\hat{\psi}^{\alpha_0-1} - v_1\alpha_1\beta_1^T\left(1-\hat{\psi}^{\alpha_1}\right)^{\beta_1^v-1}\hat{\psi}^{\alpha_1-1} \\ &\quad - H\left(\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}-\hat{\psi}\right)\frac{v_2\alpha_2\beta_2^T}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\left(1-\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2}\right)^{\beta_2^v-1}\left(\frac{\hat{\psi}}{\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}}\right)^{\alpha_2-1} \end{aligned}$$

3.9 EQIPJP

ポロイダル電流関数$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$を、圧力分布$P(\hat{\psi}_\theta)$、電流密度磁力線方向成分$j_{\parallel av}(\hat{\psi}_\theta)$から計算し、サブルーチン EQFIPV のために、スプライン係数 UFIPV を計算する。

入力	
NRVMAX	（Namelist）rメッシュ数N_r

RR	（Namelist）プラズマ大半径R_o[m]
BB	（Namelist）トロイダル磁場B_o[T]
PSIPV(1:NRVMAX)	ポロイダル磁束$\psi_\theta(r)$[Wb]
PSIPA	表面ポロイダル磁束$\psi_{\theta a}=\psi_\theta(r_a)$[Wb]
AVBB2(1:NRVMAX)	磁気面変数$G_5=\langle B^2/B_o^2\rangle$

出力	
FIPV(1:NRVMAX)	ポロイダル電流関数$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$[Wb/m]
UFIPV(1:4,1:NRVMAX)	FIPV のスプライン係数

(1.7.6)式は

$$\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}=-\frac{\mu_o}{B_o^2G_5}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta}I_\theta-\frac{\mu_o}{B_oG_5}j_{\parallel av}$$

$$\frac{\mathrm{d}I_\theta}{\mathrm{d}\psi_\theta}+\alpha I_\theta=\beta$$

と書き直すことができる。これを差分化して得られる漸化式

$$I_\theta^{i-1}=\frac{\left[1+\frac{1}{4}\left(\alpha^i+\alpha^{i-1}\right)\left(\psi_\theta^i-\psi_\theta^{i-1}\right)\right]I_\theta^i-\frac{1}{2}\left(\beta^i+\beta^{i-1}\right)\left(\psi_\theta^i-\psi_\theta^{i-1}\right)}{1-\frac{1}{4}\left(\alpha^i+\alpha^{i-1}\right)\left(\psi_\theta^i-\psi_\theta^{i-1}\right)}$$

を境界条件

$$I_\theta^{N_r}=2\pi R_oB_o$$

の下解く。こうして求めた分布から、スプライン係数 UFIPV を計算する。

$\mathrm{d}P/\mathrm{d}\psi_\theta$、$j_{\parallel av}$は、それぞれサブルーチン EQPPSI、EQJPSI により計算する。EQPPSI、EQJPSI に関係するネームリスト入力、スプライン係数については、3.8 節を参照。

3.10 EQIPQP

ポロイダル電流関数$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$を、圧力分布$P(\hat{\psi}_\theta)$、安全係数分布$q(\hat{\psi}_\theta)$から計算し、サブルーチン EQFIPV のために、スプライン係数 UFIPV を計算する。

入力	
NRVMAX	（Namelist）rメッシュ数N_r
RR	（Namelist）プラズマ大半径R_o[m]
BB	（Namelist）トロイダル磁場B_o[T]
PSIPV(1:NRVMAX)	ポロイダル磁束$\psi_\theta(r)$[Wb]
PSIPA	表面ポロイダル磁束$\psi_{\theta a}=\psi_\theta(r_a)$[Wb]
RSV(1:NRVMAX)	動径座標$r=\sqrt{\psi_\zeta/(\pi B_o)}$[m]
AVIR2(1:NRVMAX)	磁気面変数$G_4=\langle R_o^2/R^2\rangle$

AVRR2(1:NRVMAX)	磁気面変数$G_3 = \langle |\nabla r|^2/R^2 \rangle$[m-2]
VPV(1:NRVMAX)	磁気面変数$V' = \mathrm{d}V/\mathrm{d}r$[m2]

出力	
FIPV(1:NRVMAX)	ポロイダル電流関数$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$[Wb/m]
UFIPV(1:4,1:NRVMAX)	FIPV のスプライン係数

(1.7.11)式を積分してI_θを求める。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(\frac{1}{2}I_\theta^2\right) = -\frac{R_o^2}{\langle R_o^2/R^2 \rangle}\left[4\pi^2\mu_o\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi_\theta} + \frac{4\pi^2 B_o^2}{V'}\frac{r}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_\theta}\left(V'\langle\frac{|\nabla r|^2}{R^2}\rangle\frac{r}{q}\right)\right] \tag{1.7.11}$$

求めたI_θ分布から、スプライン係数 UFIPV を計算する。

$\mathrm{d}P/\mathrm{d}\psi_\theta$、$q$は、それぞれサブルーチン EQPPSI、EQQPSI により計算する。EQPPSI、EQQPSI に関係するネームリスト入力、スプライン係数については、3.8 節を参照。

3.11 EQFIPV

サブルーチン EQIPJP または EQIPQP により計算されるスプライン係数 UFIPV を用いて、ポロイダル電流関数値$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$及び微分係数$\mathrm{d}I_\theta/\mathrm{d}\psi_\theta$を計算する。

入力	
PSIPNL	（引数）規格化ポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta$
PSIPA	表面ポロイダル磁束$\psi_{\theta a} = \psi_\theta(r_a)$[Wb]

出力	
FIPL	（引数）ポロイダル電流関数値$I_\theta(\hat{\psi}_\theta)$[Wb/m]
DFIPL	（引数）微分係数$\mathrm{d}I_\theta/\mathrm{d}\psi_\theta(\hat{\psi}_\theta)$[m-1]

3.12 EQSOLV

右辺の与えられた G-S 方程式（ポアソン方程式）を解く。

入力	
NSGMAX	（Namelist）σメッシュ数N_σ
NTGMAX	（Namelist）θメッシュ数N_θ
PSI(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	二次元ポロイダル磁束分布$\psi(\sigma,\theta)$[Wb]
HJT(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	

	二次元トロイダル電流密度分布$j_\zeta(\sigma,\theta)$[A/m²]
SIGM(1:NSGMAX)	σメッシュの中心座標（半整数格子点）$\sigma_{i+1/2}$
RHOM(1:NTGMAX)	σメッシュ境界半径（メッシュ中心）$\rho(\theta_{j+1/2})$[m]
SSR(1:NTGMAX,1:NTGMAX,1:NSGMAX)	Spike Solver 作業領域
SSP(1:NTGMAX,1:NTGMAX,1:NSGMAX)	Spike Solver 作業領域
SSQ(1:NTGMAX,1:NTGMAX,1:NSGMAX)	Spike Solver 作業領域

出力	
PSI(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	二次元ポロイダル磁束分布$\psi(\sigma,\theta)$[Wb]
DELPSI(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	$\psi(\sigma,\theta)$の収束誤差$\delta\psi(\sigma,\theta)$[Wb]

(2.2.9)式の右辺

$$2\pi\mu_o\rho^2_{j+\frac{1}{2}}\sigma_{i+\frac{1}{2}}j_{\zeta I}$$

を Spike Solver の作業領域（配列 SSB）に代入し、連立方程式(2.2.19)

$$[Q_{IJ}][\psi_J] = 2\pi\mu_o\left[\left(\rho^2\sigma j_\zeta\right)_I\right]$$

を解く。「固定境界軸対称電磁流体平衡コードの開発・整備報告書」を参照の事。

3.13 EQTORZ

座標(σ,θ)上で定義されたポロイダル磁束関数$\psi(\sigma,\theta)$及びトロイダル電流密度$j_\zeta(\sigma,\theta)$を、二次元スプライン補間を用いて、座標(R,Z)上の関数$\psi(R,Z)$及び$j_\zeta(R,Z)$にそれぞれ変換する。

入力	
LBNDR	（Namelist）プラズマ境界形状読込選択パラメータ
RR	（Namelist）プラズマ大半径R_o[m]
RA	（Namelist）プラズマ赤道面小半径a[m]
RB	（Namelist）プラズマ対向壁赤道面小半径b[m]
RKAP	（Namelist）プラズマ断面楕円度κ
RDLT	（Namelist）プラズマ断面三角度δ
NSGMAX	（Namelist）σメッシュ数N_σ

NTGMAX	（Namelist）θメッシュ数N_θ
NRGMAX	（Namelist）Rメッシュ数N_R
NZGMAX	（Namelist）Zメッシュ数N_Z
SIGM(1:NSGMAX)	σメッシュの中心座標（半整数格子点）$\sigma_{i+1/2}$
THGM(1:NTGMAX)	θメッシュの中心座標（半整数格子点）$\theta_{j+1/2}$
PSI(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	(σ,θ)ポロイダル磁束関数$\psi(\sigma,\theta)$[Wb]
HJT(1:NTGMAX,1:NSGMAX)	(σ,θ)トロイダル電流密度$j_\zeta(\sigma,\theta)$[A/m^2]
THSB(1:NSBMAX+1)	プラズマ境界θ座標
URHOB(4,1:NSBMAX+1)	σメッシュ境界半径$\rho(\theta)$スプライン係数

出力	
RG(1:NRGMAX)	Rメッシュ格子点座標R_i
ZG(1:NZGMAX)	Zメッシュ格子点座標Z_j
PSIRZ(1:NRGMAX,1:NZGMAX)	(R,Z)ポロイダル磁束関数$\psi(R,Z)$[Wb]
HJTRZ(1:NRGMAX,1:NZGMAX)	(R,Z)トロイダル電流密度$j_\zeta(R,Z)$[A/m^2]

座標(R,Z)の離散化は、領域

$$(R,Z) \in [R_o - b, R_o + b] \times [-\kappa b, \kappa b]$$

においてR_i、Z_jが等間隔になるように行われる。

LBNDR = 0 の時、点(R_i,Z_j)に対応する(σ,θ)座標が、媒介変数θ'を通して

$$\frac{\kappa \sin\theta'}{\cos(\theta' + \delta\sin\theta')} = \frac{Z_j}{R_i - R_o}$$

$$\sigma_{i,j} = \frac{\sqrt{(R_i - R_o)^2 + Z_j^2}}{a\sqrt{\cos^2(\theta' + \delta\sin\theta') + \kappa^2\sin^2\theta'}}$$

$$\theta_{i,j} = \tan^{-1}\frac{Z_j}{R_i - R_o}$$

と計算される。

LBNDR = 1、2 の時は、

$$\theta_{i,j} = \tan^{-1}\frac{Z_j}{R_i - R_o}$$

に対するプラズマ境界半径$\rho(\theta_{i,j})$が、THSB、URHOB からスプライン補間によって求められ、

$$\sigma_{i,j} = \frac{\sqrt{(R_i - R_o)^2 + Z_j^2}}{\rho(\theta_{i,j})}$$

によりσ座標が計算される。

座標点$(\sigma_{i,j}, \theta_{i,j})$でのポロイダル磁束、トロイダル電流密度の値が、二次元スプライン補間を用いて$\psi(\sigma, \theta)$、$j_\zeta(\sigma, \theta)$から

$$\psi(R_i, Z_j) = S\psi(\sigma_{i,j}, \theta_{i,j})$$
$$j_\zeta(R_i, Z_j) = Sj_\zeta(\sigma_{i,j}, \theta_{i,j})$$

のように計算される。スプライン係数を作成するサブルーチンは、EQSETF、補間を行う関数は、PSIF と HJTF である。

プラズマの外側$\sigma_{i,j} > 1$となる点では、$\psi(R_i, Z_j)$に関しては外挿を行い

$$\psi(R_i, Z_j) = S\psi(0.95, \theta_{i,j}) + [S\psi(1, \theta_{i,j}) - S\psi(0.95, \theta_{i,j})]\frac{(\sigma_{i,j} - 0.95)}{1 - 0.95}$$

$j_\zeta(R_i, Z_j)$に関しては、

$$j_\zeta(R_i, Z_j) = 0$$

である。

3.14 EQCALV

磁気面平均を行い、磁気面変数$q(\psi_\theta)$、$V'(\psi_\theta)$、$G_3(\psi_\theta)$、$G_4(\psi_\theta)$、$G_5(\psi_\theta)$を計算する。計算した磁気面変数は、サブルーチン EQRHSV で使われる。

入力	
NRGMAX	(Namelist) Rメッシュ数N_R
NZGMAX	(Namelist) Zメッシュ数N_Z
NRVMAX	(Namelist) rメッシュ数N_r
RHOITB	(Namelist) ITB 位置規格化半径ρ_{ITB}
RG(1:NRGMAX)	Rメッシュ格子点座標R_i
ZG(1:NZGMAX)	Zメッシュ格子点座標Z_j
PSIRZ(1:NRGMAX,1:NZGMAX)	(R,Z)ポロイダル磁束関数$\psi(R,Z)$[Wb]

出力	
RAXIS	磁気軸R座標R_{axis}[m]
ZAXIS	磁気軸Z座標Z_{axis}[m]

PSI0	二次元ポロイダル磁束分布$\psi(\sigma,\theta)$の磁気軸での値ψ_o[Wb]
PSIPA	表面ポロイダル磁束$\psi_{\theta a}=\psi_\theta(r_a)$[Wb]
PSITA	表面トロイダル磁束$\psi_{\zeta a}=\psi_\zeta(r_a)$[Wb]
PSIPNV(1:NRVMAX)	$[0,1]$に規格化されたポロイダル磁束$\hat{\psi}_\theta(r)=\psi_\theta/\psi_{\theta a}$
PSIPV(1:NRVMAX)	ポロイダル磁束$\psi_\theta(r)$[Wb]
PSITV(1:NRVMAX)	トロイダル磁束$\psi_\zeta(r)$[Wb]
RSV(1:NRVMAX)	動径座標$r=\sqrt{\psi_\zeta/(\pi B_o)}$[m]
VPV(1:NRVMAX)	磁気面変数$V'=\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$[m^2]
QPV(1:NRVMAX)	安全係数分布$q(r)$
AVRR2(1:NRVMAX)	磁気面変数$G_3=\langle\|\nabla r\|^2/R^2\rangle$[m^{-2}]
AVIR2(1:NRVMAX)	磁気面変数$G_4=\langle R_o^2/R^2\rangle$
AVBB2(1:NRVMAX)	磁気面変数$G_5=\langle B^2/B_o^2\rangle$
UPSITV(1:4,1:NRVMAX)	
	PSITV のスプライン係数
PSIITB	ITB 位置規格化磁束$\hat{\psi}_{\mathrm{ITB}}$

2.3 節に詳述した手続きに従って、磁気面変数を計算する。

3.15 EQCALP

TASK/EQ データ保存用に、プラズマ分布$P(\psi_\theta)$、$I_\theta(\psi_\theta)$、$T(\psi_\theta)$、$\omega(\psi_\theta)$を計算する。

入力	
MDLEQF	（Namelist）分布形状選択パラメータ
NPSMAX	（Namelist）分布を計算する磁気面の数N_ψ
PSIPA	表面ポロイダル磁束$\psi_{\theta a}=\psi_\theta(r_a)$[Wb]
TJ	分布規格化乗数f

出力	
PPPS(1:NPSMAX)	プラズマ圧力分布$P(\psi_\theta)$[Pa]
TTPS(1:NPSMAX)	ポロイダル電流関数$I_\theta(\psi_\theta)$[Wb/m]
TEPS(1:NPSMAX)	プラズマ温度分布$T(\psi_\theta)$[keV]
OMPS(1:NPSMAX)	トロイダル回転角速度$\omega(\psi_\theta)$[rad/s]

MDLEQF の設定により、$P(\psi_\theta)$、$I_\theta(\psi_\theta)$、$T(\psi_\theta)$、$\omega(\psi_\theta)$を計算する。計算される物理量の定義は 3.7.1 から 3.7.5 節に記述されているものと同じであるが、磁気面

$$\psi_{\theta i} = \psi_{\theta a} \frac{i-1}{N_\psi - 1}$$

上の値が計算される。計算された分布は、サブルーチン EQSAVE での TASK/EQ データの保存にのみ用いられる。