磁面坐标下朗道流体程序的开发

任广智

October 15, 2019

0.1 平衡量表示

雅克比的计算有两种方法，可以相互比较和对照

$$J(\psi,\theta) = R(R_\theta Z_\psi - R_\psi Z_\theta)$$

$$J(\psi,\theta) = \oint \frac{R}{J_{tmp}|\nabla\psi|} dl_p / 2\pi J_{tmp}$$

在定义一些微分算符之前，我们需要计算出所需要的度量张量的各个分量, 这些分量在一般的矢量计算中会用到。包括

$$J_{11} = |\nabla\psi|^2 = \frac{R^2}{J^2}(R_\theta^2 + Z_\theta^2)$$

$$J_{22} = |\nabla\theta|^2 = \frac{R^2}{J^2}(R_\psi^2 + Z_\psi^2)$$

$$J_{33} = |\nabla\phi|^2 = \frac{1}{R^2}$$

$$J_{12} = J_{21} = \nabla\theta\cdot\nabla\psi = -\frac{R^2}{J^2}(R_\psi R_\theta + Z_\psi Z_\theta)$$

现在我们可以推导一些流体方程中出现的算符和项的具体表现形式了。磁场和磁场各个分量：

$$\boldsymbol{B_0} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B_0} = \nabla\times(A_\phi\hat{\phi}) + (\frac{\partial A_R}{\partial Z} - \frac{\partial(A_Z)}{\partial R})\hat{\phi}$$

$$\Psi(R,Z) = RA_\phi$$

$$\boldsymbol{B_0} = \nabla\Psi(R,Z)\times\nabla\phi + g(R,Z)\nabla\phi$$

$$\boldsymbol{B_p} = \nabla\Psi(R,Z)\times\nabla\phi$$

$$\boldsymbol{B_t} = g(R,Z)\nabla\phi$$

$$B_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}$$

$$B_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}$$

这里 q 为 local 的 q,$q = q(\psi)$ 只在 straight field line 的时候成立

$$\begin{aligned} q(\psi,\theta) &= \frac{\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla\phi}{\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla\theta} \\ &= -\frac{gJ}{\Psi' R^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B_0} &= \Psi'\nabla\psi\times\nabla\phi + g(\psi)\nabla\phi \\ &= \Psi'[\nabla\psi\times\nabla\phi - q(\psi,\theta)\nabla\psi\times\theta] \\ &= (\Psi'\frac{J}{R^2}\nabla\theta\cdot\nabla\psi)\nabla\psi + (-\Psi'\frac{J}{R^2}|\nabla\psi|^2)\nabla\theta + g(\psi)\nabla\phi \end{aligned}$$

1 圆截面近似平衡设置

这里设置一个圆截面的平衡，主要用来近似小柱坐标系下的情况，将 ψ 设为 r，选择 equal are length 的情况，所以 θ 等同于极向角。方便起见，无量纲坐标分量用 (ψ, θ, ϕ) 和 (r, θ, ζ) 表示，带量纲的小半径用 r 表示

1. 设定一个 q 剖面，这里是一个 global 的剖面，剖面与小柱坐标系下相同, 程序中真正的 q 剖面为其相反数

2. 得到 Ψ 和 Ψ'

$$\Psi = \int \frac{rB_0}{q} dr$$

$$\Psi' = \frac{arB_0}{q}$$

3. 坐标的微分量

$$R_\psi = a\cos\theta, R_\theta = -r\sin\theta$$

$$Z_\psi = a\sin\theta, Z_\theta = r\cos\theta$$

4. 计算雅克比

$$J = R(R_\theta Z_\psi - R_\psi Z_\theta)$$

实际为

$$J = -arR$$

5. 计算度量张量

$$|\nabla\psi| = 1/a, |\nabla\theta| = 1/r, \nabla\theta \cdot \nabla\psi = 0$$

6. q 剖面

$$q_{local} = -\frac{gJ}{\Psi' R^2}$$

$$q_{global} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{q} d\theta = -\frac{1}{2\pi}\frac{g}{\Psi'}\int_0^{2\pi}\frac{J}{R^2} d\theta$$