# TÉCNICAS DE CONTEO

- PRINCIPIO MULTIPLICATIVO
- PRINCIPIO ADITIVO
- PERMUTACIONES
- COMBINACIONES



#### Técnicas de conteo

LAS **TÉCNICAS DE CONTEO** O TAMBIÉN DENOMINADAS COMO **ANÁLISIS COMBINATORIO** PERMITEN CALCULAR DE FORMA MÁS FÁCIL EL NÚMERO DE CASOS FAVORABLES Y EL NÚMERO DE CASOS TOTALES COMO RESULTADO DE UN EXPERIMENTO PROBABILÍSTICO.

SE LES DENOMINA TÉCNICAS DE CONTEO A LAS:

- · COMBINACIONES,
- PERMUTACIONES Y
- DIAGRAMA DE ÁRBOL

LAS BASES PARA ENTENDER EL USO DE LAS TÉCNICAS DE CONTEO SON:

- EL PRINCIPIO MULTIPLICATIVO
- EL PRINCIPIO ADITIVO.

#### **EJEMPLO**

EL SR. CRUZ TIENE UN TRAJE GRIS Y UNO AZUL; TIENE CUATRO CAMISAS: BLANCA, AZUL, CREMA Y RAYADA ¿DE CUANTAS MANERAS DISTINTAS SE PUEDE VESTIR, UTILIZANDO ESTAS PRENDAS, SI TODAS LAS PRENDAS COMBINAN BIEN?

#### SOLUCIÓN

CON EL PRIMER TRAJE PUEDE USAR LAS CUATRO CAMISAS, CON EL SEGUNDO TRAJE TAMBIÉN PUEDE USAR LAS CUATRO CAMISAS.

POR LO TANTO, SE PUEDE RESUMIR ESTA INFORMACIÓN EN LA TABLA SIGUIENTE:

TRAJE	CAMISAS						
	BLANCA	Azul	CREMA	RAYADA			
Azul	(A, B)	(A, A)	(A, C)	(A, R)			
GRIS	(G, B)	(G, A)	(G, C)	(G, R)			

DONDE LA PRIMERA LETRA ES LA INICIAL DEL COLOR DEL TRAJE Y LA SEGUNDA ES LA INICIAL DEL COLOR DE LA CAMISA.

#### Solución

Analizando la información de la Tabla anterior se identifican ocho posibles combinaciones:

Número De Trajes	MULTIPLICAR	Número De Camisas		NÚMERO DE COMBINACIONES
2	Х	4	=	8

#### Técnicas de conteo



LAS **TÉCNICAS DE CONTEO** FACILITAN EL RECUENTO DE SUCESOS PARA:

- NO HACER UNA LISTA DE UNO A UNO DE LOS OBJETOS O SUJETOS QUE COMPONEN UNA COLECCIÓN GRANDE.
- DESCRIBIR EVENTOS DIFÍCILES DE ORGANIZAR.
- ENUMERAR LAS POSIBILIDADES DE ORGANIZAR UN EVENTO.

## Principio multiplicativo

SI SE DESEA REALIZAR UNA ACTIVIDAD QUE CONSTA DE R PASOS, EN DONDE EL PRIMER PASO DE LA ACTIVIDAD A REALIZAR PUEDE SER LLEVADO A CABO DE N1 MANERAS, EL SEGUNDO PASO DE N2 MANERAS Y EL R-ÉSIMO PASO DE NR MANERAS, ENTONCES ESTA ACTIVIDAD PUEDE SER LLEVADA A EFECTO DE:

N1 x N2 x ......X NR MANERAS

EL PRINCIPIO MULTIPLICATIVO IMPLICA QUE CADA UNO DE LOS PASOS DE LA ACTIVIDAD DEBEN SER LLEVADOS A EFECTO, UNO TRAS OTRO.

## Ejemplo

Una persona desea armar un computador, para lo cuál considera que puede seleccionar la Motherboard de entre las dos disponibles, mientras que el procesador puede ser seleccionado de un Pentium IV, un Celeron o un Athlon, la tarjeta de video puede ser una ATI Radeon o una GForce y por último hay disponible un solo modelo de gabinete (Tower). ¿Cuantas maneras tiene esta persona de armar su PC?

Motherboard		Tarjeta de video	Gabinete	=	Total
2	3 3	2 \$	<b>\$</b> 1	=	12

#### Actividad (libreta) - Principio multiplicativo

¿CUÁNTAS PATENTES PARA AUTOMÓVIL PUEDEN SER DISEÑADAS SI DEBEN CONSTAR DE TRES LETRAS SEGUIDAS DE CUATRO NÚMEROS, SI LAS LETRAS DEBEN SER TOMADAS DEL ABECEDARIO Y LOS NÚMEROS DE ENTRE LOS DÍGITOS DEL 0 AL 9?

- a. SI ES POSIBLE REPETIR LETRAS Y NÚMEROS,
- b. No es posible repetir letras y números,
- C. CUÁNTAS DE LAS PLACAS DISEÑADAS EN EL INCISO B EMPIEZAN POR LA LETRA D Y EMPIEZAN POR EL CERO,
- d. Cuantas de las placas diseñadas en el inciso b empiezan por la letra D seguida de la G.

#### Actividad (libreta) - Principio multiplicativo

- ¿CUÁNTOS NÚMEROS TELEFÓNICOS ES POSIBLE DISEÑAR, LOS QUE DEBEN CONSTAR DE SEIS DÍGITOS TOMADOS DEL 0 AL 9?,
- A. CONSIDERE QUE EL CERO NO PUEDE IR AL INICIO DE LOS NÚMEROS Y ES POSIBLE REPETIR DÍGITOS,
- B. EL CERO NO DEBE IR EN LA PRIMERA POSICIÓN Y NO ES POSIBLE REPETIR DÍGITOS,
- C. ¿CUÁNTOS DE LOS NÚMEROS TELEFÓNICOS DEL INCISO B EMPIEZAN POR EL NÚMERO SIETE?,
- D. ¿CUÁNTOS DE LOS NÚMEROS TELEFÓNICOS DEL INCISO B FORMAN UN NÚMERO IMPAR?

#### Principio aditivo

SI SE DESEA LLEVAR A EFECTO UNA ACTIVIDAD, LA CUÁL TIENE FORMAS ALTERNATIVAS PARA SER REALIZADA, DONDE LA PRIMERA DE ESAS ALTERNATIVAS PUEDE SER REALIZADA DE X MANERAS O FORMAS, LA SEGUNDA ALTERNATIVA PUEDE REALIZARSE DE Y MANERAS O FORMAS ..... Y LA ÚLTIMA DE LAS ALTERNATIVAS PUEDE SER REALIZADA DE Z MANERAS O FORMAS:

PA = [X + Y + ... + Z] maneras o formas

## Ejemplo

Una persona desea comprar una lavadora de ropa; para lo cual ha pensado que puede seleccionar de entre las marcas Whirpool (W), Easy (E) y General Electric (GE); cuando acude a hacer la compra se encuentra que la lavadora de la marca W se presenta en dos tipos de carga (8 o 10 kg), en cuatro colores diferentes y puede ser automática o semiautomática.

LA LAVADORA DE LA MARCA E SE PRESENTA EN TRES TIPOS DE CARGA (8, 10 O 15 KG), EN DOS COLORES DIFERENTES Y PUEDE SER AUTOMÁTICA O SEMIAUTOMÁTICA, Y LA LAVADORA DE LA MARCA GE SE PRESENTA EN SOLO UN TIPO DE CARGA, QUE ES DE 10 KG, DOS COLORES DIFERENTES Y SOLO HAY SEMIAUTOMÁTICA.

#### Solución

¿CUÁNTAS POSIBILIDADES TIENE ESTA PERSONA PARA SELECCIONAR LA LAVADORA QUE QUIERE COMPRAR?

MARCA	CARGA	Color	MECANISMO	TOTAL
WHIRPOOL (W)	2	4	2	16
EASY (E)	3	2	2	12
GENERAL ELECTRIC (GE)	1	2	1	2

- Utilizar el Principio de la Multiplicación para obtener las opciones que ofrece cada marca de lavadoras.
- Utilizar el Principio de la Adición para obtener todas las posibilidades que se tiene para comprar una lavadora.

#### Solución

OPCIONES DE LAVADORAS POR MARCA								
Marca Carga Color Mecanismo Total								
WHIRPOOL (W)	2	4	2	16				
EASY (E)	3	2	2	12				
GENERAL ELECTRIC (GE)	1	2	1	2				

Total de posibilidades para la compra de una Lavadoras = [Opciones de (W) + Opciones de (E) + Opciones de (GE)] = <math>[16 + 12 + 2] = 30

## Actividad (libreta) - *Principio Aditivo*

- 1. Un estudiante que está terminando su bachillerato, debe decidir si estudia en el Tecnológico o en la Universidad. Si decide estudiar en el Tecnológico, tendrá que decidir si estudia Ing en Sistemas Computacionales, Ing Mecánica o Ing Electrónica. Si decide estudiar en la Universidad, tendrá que decidir si estudia Ing Civil, Ing Mecatrónica, Ing Química o Licenciado en Física. ¿Cuántas opciones tiene para elegir su carrera?
- 2. Para viajar de México a Ensenada se puede optar por avión, autobús o tren; existen tres rutas para el avión, cuatro para el autobús y dos para el tren. ¿Cuántas rutas hay para viajar?

#### NOTA

¿Cómo podemos distinguir cuando hacer uso del principio multiplicativo y cuando del aditivo?

Es muy simple, cuando se trata de una sola actividad, la cual requiere para ser llevada a efecto de una serie de pasos, entonces haremos uso del principio multiplicativo y si la actividad a desarrollar o a ser efectuada tiene alternativas para ser llevada a cabo, haremos uso del principio aditivo.

#### TÉCNICAS DE CONTEO



#### **PERMUTACIONES**

Son eventos de tipo multiplicativo, donde el número de posibilidades va disminuyendo y si importa el orden, una permutación es un arreglo de un conjunto de objetos en un orden definido. El número de permutaciones diferentes de estos objetos es ; esto se vé fácilmente si pensamos que para la primera alternativa disponemos de los elementos del conjunto, cada uno de los cuales puede complementarse con los restantes como segunda opción, y así hasta llegar a la última elección, conformando el producto .

Hay dos tipos de permutaciones:

Se permite repetir: como una cerradura, podría ser "333".

**Sin repetición**: por ejemplo los tres primeros en una carrera. No puedes quedar primero *y* segundo a la vez.

## Permutaciones sin repetición

DADO (n) OBJETOS, UNA PERMUTACIÓN (P) DE ELLOS ES CUALQUIERA DE LAS DIFERENTES MANERAS EN LAS QUE SE PUEDEN ACOMODAR, EN ORDEN, DICHOS OBJETOS.

La notación para la Permutación es  $P_{n,r}$  de donde (n) es el número total de objetos a ordenar tomando (r) objetos cada vez.

EL NÚMERO DE PERMUTACIONES DE **(n)** OBJETOS DISTINTOS PARA ARREGLOS EN DONDE SE UTILICEN LOS **(n)** OBJETOS CON QUE SE CUENTA, LA FÓRMULA DE LAS PERMUTACIONES ES:

$$P_{n,n} = n!$$

## Ejemplo

EN UNA CARRERA DE AUTOMÓVILES HAY CUATRO CORREDORES INSCRITOS. LOS ORGANIZADORES DETERMINAN ASIGNAR MEDIANTE UN SORTEO LOS AUTOS QUE CADA CORREDOR USARÁ ¿DÉ CUANTAS MANERAS DIFERENTES PUEDEN SER ASIGNADOS LOS AUTOMÓVILES A LOS CORREDORES?

$$P_{n,n} = n! = 4! = (4)(3)(2)(1) = 24$$
 formas

## Actividad (libreta)

1. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra IMPUREZA?

## Permutaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r

EL NÚMERO DE PERMUTACIONES DE (n) OBJETOS DISTINTOS TOMANDO (r) A LA VEZ ES:

$$Pn_{\Gamma} = \frac{(n!)}{(n-r)!}$$

El resultado obtenido son las diferentes maneras o formas de elegir en orden (r) objetos tomados de entre (n) objetos.

ESTE CÁLCULO PERMITE OBTENER TODOS LOS ARREGLOS EN DONDE EL ORDEN ES IMPORTANTE Y SOLO SE USE UNA PARTE (r) DE LOS (n) OBJETOS CON LOS QUE SE CUENTA; ADEMÁS HAY QUE HACER NOTAR QUE NO SE PUEDEN REPETIR OBJETOS DENTRO DEL ARREGLO; ESTO ES, LOS (n) OBJETOS SON TODOS DIFERENTES.

## Ejemplo

¿CUÁNTOS COMITÉS DIFERENTES SERÁN POSIBLES FORMAR, SI SE DESEA QUE CONSTEN DE UN PRESIDENTE, UN SECRETARIO, UN TESORERO, UN PRIMER VOCAL Y UN SEGUNDO VOCAL?, SÍ ESTA REPRESENTACIÓN PUEDE SER FORMADA DE ENTRE 25 MIEMBROS DEL SINDICATO DE UNA PEQUEÑA EMPRESA.

#### SOLUCIÓN

Por el principio de la multiplicación:

N <sub>1</sub>	Х	N <sub>2</sub>	Х	N <sub>3</sub>	Х	N <sub>4</sub>	X	N <sub>5</sub>	=	
25	X	24	X	23	X	22	Χ	21	=	6,375,600
	MANERAS DE FORMAR UNA REPRESENTACIÓN SINDICAL									

POR LA FÓRMULA, CONSIDERANDO (n) = 25, (r) = 5

15511210043330985984000000

2432902008176640000

$$P_{n,r} = \frac{(n)!}{(n-r)!} = \frac{25!}{(25-5)!} = \frac{(25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20!)}{20!} = 6,375,600$$

## Actividad (libreta)

¿ De cuántas formas diferentes se pueden sentar seis alumnos en un salón de clases con 25 pupitres?



## Actividad (libreta)

EN UNA CARRERA DE CICLISMO CORREN LOS PARTICIPANTES A,B, Y C SOLO HAY PREMIO PARA EL PRIMER Y SEGUNDO LUGAR ¿CUÁNTAS PERMUTACIONES SON POSIBLES?



#### Permutaciones con repetición

El número de permutaciones (P) diferentes de (n) objetos de los cuales  $(n_1)$  son de un tipo,  $(n_2)$  son de un segundo tipo, ...,  $(n_k)$  de un **k-ésimo** tipo, es:

$$^{nP}(x_1,x_2,x_3\cdots x_k) = \frac{n!}{(x_1!,x_2!,x_3!\cdots x_k!)}$$

#### Permutaciones con repetición

n

 $X_1, X_2, X_3, ... X_K$   $nP_{(X_1, X_2, X_3, ... X_K)}$ 

NÚMERO TOTAL DE DATOS DEL ESTUDIO

CANTIDAD DE OBJETOS DE CADA TIPO

Número total de permutaciones que

ES POSIBLE OBTENER CON (n) OBJETOS

ENTONCES, SE BUSCA OBTENER LAS PERMUTACIONES DE (n) OBJETOS, CUANDO ENTRE ESOS OBJETOS HAY ALGUNOS QUE SON IGUALES.

## Ejemplo

¿Cuántas maneras distintas existen para ordenar las letras de la palabra *matemáticas* y en cuántas de estas permutaciones las letras *a* quedan juntas?

Debemos considerar que la letra m se repite dos veces, la a tres y la t dos

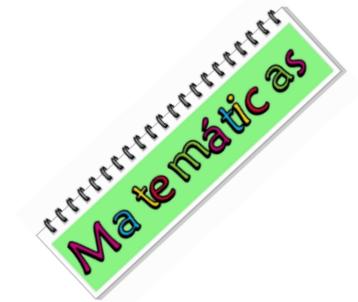
$$^{11}P_{2,3,2} = \frac{11!}{2!3!2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$$
 
$$^{11}P_{2,3,2} = 1663200$$

Este resultado supone que  $\dot{\alpha}=a$ 

Para determinar en cuantas ocasiones las tres letras a quedan juntas debemos considerar a las mismas como si fuesen una sola, por tanto se tiene:

$${}^{9}P_{2,2} = \frac{9!}{2!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$^{9}P_{2,2} = 90720$$



## Actividad (libreta)

SI UN EQUIPO DE FÚTBOL SOCCER FEMENIL PARTICIPA EN 12 JUEGOS EN UNA TEMPORADA ¿CUÁNTAS MANERAS HAY DE QUE ENTRE ESOS DOCE JUEGOS EN LOS QUE PARTICIPA, OBTENGA 7 VICTORIAS, 3 EMPATES Y 2 JUEGOS PERDIDOS?



#### Actividad (libreta)

OBTENGA TODAS LAS SEÑALES POSIBLES QUE SE PUEDEN DISEÑAR CON SEIS BANDERINES, DOS DE LOS CUALES SON ROJOS, TRES SON VERDES Y UNO MORADO.



#### Permutaciones circulares

SON AQUELLAS EN LAS QUE NO EXISTE PRIMER NI ÚLTIMO OBJETO Y FORMAN UNA FIGURA CERRADA, EL NÚMERO DE ELLAS SE PUEDE FORMAR CON N OBJETOS VIENE DEFINIDO POR:

$$PC_n = (n-1)!$$

## Ejemplo:

¿DE CUÁNTAS FORMAS DIFERENTES PUEDEN SENTARSE 5 PERSONAS ALREDEDOR DE UNA MESA CIRCULAR ?

$$PC_5 = P_{(5-1)} = 4! = 4x3x2x1 = 24$$



## Ejercicios

#### ¿DE CUÁNTAS FORMAS DIFERENTES PUEDEN SENTARSE OCHO PERSONAS ALREDEDOR DE UNA MESA CIRCULAR SI DOS DE ELLAS DEBEN ESTAR JUNTAS?

Si dos de ellas deben permanecer juntas se las puede considera inicialmente como si fuesen una sola, entonces:

$$P_{7-1} = (7-1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Pero las dos personas que deben permanecer juntas pueden sentarse de dos maneras diferentes, por tanto, el problema quedará resuelto del siguiente modo:

$$^{7-1}P_{7-1}^{2}P_{2} = 720 \cdot 2 = 1440$$

#### RESUMEN PERMUTACIONES

SÍ intervienen todos los elementos SÍ IMPORTA el orden de los elementos NO se pueden repetir los elementos

#### RESUMEN PERMUTACIONES

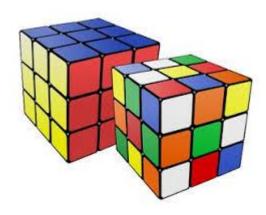
DESCRIPCIÓN	FÓRMULA
Permutaciones sin repetición de n elementos tomados todos a la vez	${}^{n}P_{n}=n!$
Permutaciones circulares de n elementos	$P_{cir,n} = (n-1)!$
Permutaciones sin repetición de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$ , donde $r$ £ $n$	${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
Permutaciones con repetición de n elementos tomados de r en r	$^{n}P_{\gamma}^{rep}=n^{\gamma}$
Permutaciones de $n$ elementos de los cuales $p_1$ son de un tipo, $p_2$ son de otro tipo, $\frac{1}{4}$ , $p_k$ de otro tipo, donde $p_1 + p_2 + \frac{1}{4} + p_k = n$ .	${}^{x}P_{y_1,y_2,\dots,y_n} = \frac{x!}{ y_1  y_2  \dots y_n }$

## Actividad (libreta)

- 1. ¿De cuántas formas se pueden aparcar 8 coches en línea atendiendo a su matrícula?
- 2. Con las cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9:
  - a) ¿Cuántos números distintos de cinco cifras se pueden formar?
- 3. ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 1, 2, 2, 3, 3?
- 4. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?
- 5. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?

#### Combinaciones

UNA COMBINACIÓN, ES UN ARREGLO DE ELEMENTOS EN DONDE NO NOS INTERESA EL LUGAR O POSICIÓN QUE OCUPAN LOS MISMOS DENTRO DEL ARREGLO. EN UNA COMBINACIÓN NOS INTERESA FORMAR GRUPOS Y EL CONTENIDO DE LOS MISMOS.



#### Combinaciones

Dados (n) objetos y (r)  $\leq$  (n), una combinación de (n) objetos, tomados de (r) en (n) es cualquiera de las diferentes maneras en las cuales se pueden elegir (r) de los (n) disponibles sin importar el orden en el cual se presentan.

La notación para la Combinación es  $\mathbf{nC_f}$ , de donde  $(\mathbf{n})$  es el número total de objetos a ordenar tomando  $(\mathbf{r})$  objetos cada vez

$$C_{n,r} = \frac{(n!)}{(n-r)!(r!)}$$

## Ejemplo

EN UN COLEGIO SE CUENTA CON 14 ALUMNOS QUE DESEAN COLABORAR EN UNA CAMPAÑA PRO LIMPIEZA DE LA INSTITUCIÓN, ¿CUÁNTOS GRUPOS DE LIMPIEZA PODRÁN FORMARSE, SI SE DESEA QUE CONSTEN DE 5 ALUMNOS CADA UNO DE ELLOS?

#### SOLUCIÓN:

$$C_{n,r} = \frac{(n!)}{(n-r)!(r!)} = C_{14,5} = \frac{(14!)}{(14-5)!(5!)} = \frac{14!}{(9!)(5!)} = \frac{14*13*12*11*10*9!}{(9!)(5!)} = \frac{240,240}{120} = 2002$$

#### Ejemplo:

SI ENTRE LOS 14 ALUMNOS HAY 8 MUJERES Y 6 HOMBRES, ¿CUÁNTOS DE LOS GRUPOS DE LIMPIEZA (r = 5) TENDRÁN A 3 MUJERES?

$$[C_{8,3}][C_{6,2}] = \left[\frac{8!}{(8-3)!(3!)}\right] \left[\frac{6!}{(6-2)!(2!)}\right] = (56)(15) = 840$$

¿CUÁNTOS DE LOS GRUPOS DE LIMPIEZA CONTARÁN CON 4 HOMBRES POR LO MENOS?

$$[C_{6,4}][C_{8,1}] = \left[\frac{6!}{(6-4)!(4!)}\right] \left[\frac{8!}{(8-1)!(1!)}\right] = (15)(8) = 120$$

$$[C_{6,5}][C_{8,0}] = \left[\frac{6!}{(6-5)!(5!)}\right] \left[\frac{8!}{(8-0)!(0!)}\right] = (6)(1) = 6$$



EL NÚMERO TOTAL DE GRUPOS DE LIMPIEZA CON CUATRO HOMBRES POR LO MENOS SON LA SUMA DE ESTAS COMBINACIONES: 126

## Actividad (libreta)

1. Una tarjeta de circuito impreso es ofrecida por cinco proveedores ¿De cuántas maneras se escoge a tres proveedores de entre los cinco?

- 2. Los números telefónicos en la Ciudad de Cuernavaca, Morelos, constan de siete dígitos.
  - a) ¿CUÁNTAS LÍNEAS TELEFÓNICAS PUEDEN CREARSE EN ESTA CIUDAD? (RECUERDE QUE PUEDEN COMENZAR CON CERO)
  - b) Si los tres primeros dígitos representan una zona de Cuernavaca ¿Cuántas líneas telefónicas pertenecen a la zona 326?