Javier Gómez López

$f: \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$; $f(x) := x^6 \mod 10$ R_f

$\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$

$f(\bar{0}) = \bar{0}$ $f(\bar{1}) = \bar{1}$ $f(\bar{2}) = \bar{4}$ $f(\bar{3}) = \bar{9}$ $f(\bar{4}) = \bar{6}$

$f(\bar{5}) = \bar{5}$ $f(\bar{6}) = \bar{6}$ $f(\bar{7}) = \bar{9}$ $f(\bar{8}) = \bar{4}$ $f(\bar{9}) = \bar{1}$

Observamos que f no es inyectiva. Para serlo, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ pero $f(\bar{1}) = f(\bar{9})$ y $\bar{1} \neq \bar{9}$

Tampoco es sobreyectiva pues no toma todos los elementos del espacio de llegada $\mathbb{Z}_{10}$. Por ~~ej~~ ejemplo, $\bar{3} \notin \operatorname{Im}(f)$

Calcular $\mathbb{Z}_{10}/R_f$

Usando los cálculos anteriores, podemos determinar que

$\mathbb{Z}_{10}/R_f = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{9}\}$.

¿$g: \mathbb{Z}_{10}/R_f \to \mathbb{Z}_{10}$ $g(\bar{x}) := x^2 \mod 10$?

Sí, puesto que $g(\bar{0}) = \bar{0}$ $g(\bar{1}) = \bar{1}$ $g(\bar{4}) = \bar{6}$ $g(\bar{5}) = \bar{5}$ $g(\bar{6}) = \bar{6}$ y $g(\bar{9}) = \bar{1}$. ~~Todos estos elementos están en $\mathbb{Z}_{10}$, así g está bien definida.~~

Además vamos que $g(\bar{x})$ no depende de x sino de la clase en sí.

Supongamos $\bar{x} = \bar{y}$ ~~$g(\bar{x}) = g(\bar{y}) \Rightarrow g(\bar{x} - \bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} = 0$~~ $\boxed{\cancel{\bar{x} = \bar{y}}}$

$g(\bar{x}) = g(\bar{y}) \Rightarrow g(\bar{x}) - g(\bar{y}) = 0 \Rightarrow g(\bar{x} - \bar{y}) = 0$; $\bar{x} - \bar{y} = 0$
$\bar{x} = \bar{y}$