Evaluación 4. Cálculo I

Javier Gómez López

1. Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión mayorada y sean $A_n = \{x_k : k \geq n\}$, $\beta_n = \sup(A_n)$. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \beta_n \in A_n\}$.

Prueba que:

i) Si el conjunto A es finito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial estrictamente creciente

Si A es finito $\Rightarrow \exists N \geq n \quad \forall n \in A$

Por tanto $\Rightarrow \forall M \geq N \Rightarrow M \notin A \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\beta_M \notin A_M \\ \beta_M \in \overline{A_M}\end{array}\right\} \beta_M = \lim_{k \to \infty} A_M$

Por ello, $\forall$ sucesión parcial de $\{x_n\}$ de la forma $M \geq N \Rightarrow$
$\{x_M\} \longrightarrow \beta_M$

Además, $\{x_M\}$ la suponemos sucesión de números reales y por tanto admite una sucesión parcial monótona

Llamemos a esta sucesión parcial de $\{x_M\}$ como $\{x_{\sigma(M)}\}$, la cual es monótona y converge a $\beta_M \Rightarrow \beta_M > \forall x_k \in \{x_{\sigma(M)}\}$

Entonces $\{x_{\sigma(M)}\}$ es creciente.

Ahora consideremos el conjunto $C = \{\sigma(M) : x_{\sigma(M)} \neq x_{\sigma(M)+1}\}$

De esta manera podemos definir $\{x_p\}_{p \in C}$ como una parcial de $\{x_n\}$ estrictamente creciente.

ii) Si el conjunto A es infinito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial decreciente.

Si A es infinito $\Rightarrow$ $\exists\, \sigma : \mathbb{N} \to A$ y bigectiva.

Ahora consideremos la sucesión $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ la cual es una parcial de $\{x_n\}$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{\sigma(n)} = \max A_{\sigma(n)} \\ \beta_{\sigma(n)+1} = \max A_{\sigma(n)+1} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A_{\sigma(n)+1} \subset A_{\sigma(n)} \\ \text{Si } \beta_{\sigma(n)+1} > \beta_{\sigma(n)} \Rightarrow \beta_{\sigma(n)+1} = \max A_{\sigma(n)} \Rightarrow \end{array}$$

$$\beta_{\sigma(n)+1} = \beta_{\sigma(n)}.$$

Hemos llegado a una contradicción. Por tanto, $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial decreciente de $\{x_n\}$

Javier Gómez López

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y α y $\beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \underline{\lim} \{x_n\} \iff \forall \varepsilon > 0$ $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha - \varepsilon\}$ finito
$B = \{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha + \varepsilon\}$ infinito

Supongamos un $A_m = \{x_n : n \geq m\}$

Si $\underline{\lim} \{x_n\} = \alpha \Rightarrow \{x_n\}$ inferiormente acotada. Definamos $\alpha_m = \inf A_m$ $\forall m \geq 1$, y es $\lim_{m\to\infty} A_m = \alpha$. En particular, $\exists N \geq 1$:

$$m \geq N \Rightarrow \alpha - \varepsilon < \alpha_m < \alpha + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Si $m \geq N \Rightarrow x_m \in A_m \Rightarrow x_m \geq \inf A_m = \alpha_m > \alpha - \varepsilon$
Entonces si tomamos $p : p < N \Rightarrow x_p < \alpha - \varepsilon$ y $\{p \in \mathbb{N} : x_p < \alpha - \varepsilon\}$ es finito puesto que son naturales.

Ahora supongamos $C = \{k \in \mathbb{N} : x_k < \alpha + \varepsilon\}$ es finito y por tanto $c = \max C \Rightarrow$ Si tomamos $\varphi > c \Rightarrow \varphi \notin C \Rightarrow x_\varphi \geq \alpha + \varepsilon$
Por lo tanto $\alpha + \varepsilon$ es cota inferior de $A_m \Rightarrow \alpha_m \geq \alpha + \varepsilon$ $\forall m > c$, lo cual es una contradicción con $\alpha - \varepsilon < \alpha_m < \alpha + \varepsilon$ y por tanto C debe ser infinito

Ahora probemos el recíproco. Si $m \geq 1 \Rightarrow A_m$ y $\{x_m : x_m \not< \alpha + \varepsilon\}$ tienen intersección no vacío, porque $\{x_m : x_m < \alpha + \varepsilon\}$ es infinito por hipótesis. Es decir, $\alpha + \varepsilon$ no es cota inferior de $A_m \Rightarrow \alpha_m = \sup A_m \leq \alpha + \varepsilon$
$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} A_m \leq \alpha + \varepsilon$

Por otro lado $\Rightarrow \{m \in \mathbb{N} : x_m < \alpha - \varepsilon\}$ es finito, $\exists N \geq 1$:

$n \geq N \Rightarrow x_n \geq \alpha - \varepsilon$. Entonces, si $m \geq N \Rightarrow \alpha - \varepsilon$ es cota inferior $A_m \Rightarrow$

$\alpha_m = \sup A_m \geq \alpha - \varepsilon$.

Así, hemos probado que $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \alpha - \varepsilon \leq \alpha_m \leq \alpha + \varepsilon$

y esto solo es posible si $\underline{\lim} \{x_n\} = \alpha$

ii) $\beta = \overline{\lim} \{x_n\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta + \varepsilon\}$ finito

$\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta - \varepsilon\}$ infinito

La demostración es análoga a la anterior

Supongamos $B_m = \{x_m : m \geq n\}$

Si $\overline{\lim} \{x_n\} = \beta$. Entonces $\{x_n\}$ está superiormente acotado $\Rightarrow \beta_m = \sup B_m$

$\forall m \geq n$ y $\lim_{m \to \infty} \beta_m = \beta$. $\exists N \geq 1 : m \geq N \Rightarrow \beta - \varepsilon < \beta_m < \beta + \varepsilon$.

Si $m \geq N \Rightarrow x_m \in B_m \Rightarrow x_m \leq \beta_m < \beta + \varepsilon$. Esto nos dice

que para cualquier $z < N \Rightarrow \{k \in \mathbb{N} : x_k > \beta + \varepsilon\}$ es finito.

Por otro lado, supongamos $D = \{t \in \mathbb{N} : x_t > \beta - \varepsilon\}$ finito $\Rightarrow d = \max D$.

Si $m > d \Rightarrow x_m \leq \beta - \varepsilon$ y $\beta - \varepsilon$ es cota superior de B_m y por

tanto $\beta_m \leq \beta - \varepsilon$, lo cual es una contradicción con $\beta - \varepsilon < \beta_m < \beta + \varepsilon$

y por tanto D es infinito.

Probemos ahora el recíproco. Si $m \geq 1 \Rightarrow A_m$ y $\{m \in \mathbb{N} : x_m > \beta - \varepsilon\}$ tienen intersección no vacía puesto que $\{m \in \mathbb{N} : x_m > \beta - \varepsilon\}$ es infinito:

es decir, $\beta - \varepsilon$ no es cota superior de B_m y entonces $\beta_m \geq \alpha - \varepsilon$

Por otro lado, $\{m \in \mathbb{N} ; x_m > \beta + \varepsilon\}$ es finito $\Rightarrow \exists N \geq 1 : m \geq N \Rightarrow x_m \leq \beta + \varepsilon$

Entonces si $m \geq N \Rightarrow \beta + \varepsilon$ cota superior de B_m y por tanto $\beta_m \leq \beta + \varepsilon$

Así, $\beta - \varepsilon \leq \beta_m < \beta + \varepsilon$

Scanned with CamScanner

Javier Gómez López

3. Calcula los límites de las sucesiones

a) $x_n = \left(1 + \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n$ $\left\{\log \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right\} \to 0$

Indeterminación 1^∞

$x_n^{y_n} \to e^L \iff y_n \cdot (x_n - 1) \to L$

$n \cdot \left(1 + \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1} - 1\right) = n \cdot \log\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right) = \log\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n$

$\log\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n = \log\left(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\right)^n \sim \log(e^{-1}) = -1$

Por tanto, $x_n \to e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\begin{array}{l|l} n^2+1 & n^2+n+1 \\ \hline 0-n & 1 \end{array}$

b) $y_n = \dfrac{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \dots + \frac{1}{n\log n}}{\log(\log(n+1))}$

$\{y_n\} = \left\{\frac{x_n}{z_n}\right\}$ $\{z_n\}$ diverge positivamente $\Rightarrow$ $\{z_n\} \to +\infty$

Aplicamos criterio de Stolz

$\{y_n\} \sim \left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{z_{n+1} - z_n}\right\} \to L$

$$\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot\log(n+1)}}{\log(\log(n+2)) - \log(\log(n+1))} = \frac{\frac{1}{\log(n+1)^{n+1}}}{\log\left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)}$$

$$\log\left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right) = \log\left(1+\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} - 1\right) =$$

$$= \log\left(1+\frac{\log(n+2)-\log(n+1)}{\log(n+1)}\right) = \log\left(1+\frac{\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\log(n+1)}\right) =$$

$$= \log\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\log(n+1)}\right) \sim \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\log(n+1)} \sim \frac{1}{(n+1)\cdot\log(n+1)}$$

Retomamos la principal sucesión

$$\frac{\frac{1}{\log(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{\log(n+1)^{n+1}}} = 1 \qquad \text{Así, } \{y_n\} \to 1$$