Evaluación 3. Cálculo I Javier Gómez López

1. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a < f(x) \leq b$ para todo $x \in [a,b]$. Definamos $x_1 = a$ y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un número $\beta \in]a,b]$

Si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está mayorado y la sucesión es estrictamente creciente, la sucesión converge al supremo de dicho conjunto.

Para probar que $\{x_n\}$ es estrictamente creciente, usaremos el principio de inducción matemática.

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$. Primero comprobamos que $1 \in A$.

$x_1 = a$, $x_2 = f(a)$, $a < f(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow a < f(a) \Rightarrow x_1 < x_2$.

Ahora suponemos que $n \in A$ y probamos que $n+1 \in A$.

Si $n \in A \to x_n < x_{n+1}$ y al ser f creciente $f(x_n) < f(x_{n+1}) \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$

Queda demostrado que A es inductivo y $\{x_n\}$ es estrictamente creciente.

Ahora probaremos que está mayorado. Sea $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq b\}$.

Comprobamos que $1 \in B \Rightarrow a < b$.

Ahora suponemos que $x_n \in B$ y probamos que $x_{n+1} \in B$

$x_n \in [a,b] \Rightarrow f(x_n) \in [a,b] \Rightarrow x_{n+1} \in [a,b] \Rightarrow x_{n+1} \leq b$.

Y queda demostrado que $x_{n+1} \in B$ y que B es inductivo $\Rightarrow x_n \leq b\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Por tanto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado y es estrictamente creciente, y converge a $\lim\{x_n\} = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Llamaré β al $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como b es mayorante del conjunto,
$a < \beta \leq b \Rightarrow \beta \in]a, b]$

b) Sea $C = \{f(x) : x \in [a,b], x < \beta\}$. Prueba que $\beta = \sup(C)$ y $\beta \leq f(\beta)$

Hemos demostrado que $\{x_n\} \to \beta \Rightarrow \{x_{n+1}\} = \{f(x_n)\} \to \beta$
Es decir, $\sup\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} = \beta$. Ahora definamos que significa que la sucesión $\{x_n\} \to \beta$. Esto quiere decir que dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: si $n > n_0$ entonces $|x_n - \beta| < \varepsilon$. Dado un x, tomo $\varepsilon = |x - \beta| \Rightarrow$
$\exists\ |x_n - \beta| < |x - \beta| \Rightarrow x_n > x$.

Ahora, dado un $x : a \leq x < \beta$, $\exists n \in \mathbb{N} : x < x_n < \beta$ (ver definición de arriba). Luego $f(x) < f(x_n) \in C$, y por lo tanto $\sup C = \sup\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} = \beta$.

Tomamos cualquier $x < \beta \Rightarrow f(x) < f(\beta)$. Puesto $\beta > f(x)$, $\therefore f(\beta) \geq \beta$

c) Si la imagen de f es un intervalo, prueba que $\beta = f(\beta)$
Hemos demostrado que $f(\beta) \geq \beta$. Ahora, supongamos que $f(\beta) > \beta$. Al ser $f([a,b])$ un intervalo, podemos afirmar que $\exists \alpha \in \mathbb{R} : f(\beta) > f(\alpha)$ y $f(\alpha) > \beta$. De $f(\beta) > f(\alpha)$, puesto que f es estrictamente creciente, deducimos que $\beta > \alpha$. Puesto que $\alpha \in [a, \beta[$, deducimos que $f(\alpha) \in C$. Puesto que el supremo de C es β, sabemos que $\beta > f(\alpha)$.
Hemos llegado a una contradicción, $f(\alpha) > \beta > f(\alpha)$. Es decir la suposición de que $f(\beta) > \beta$ es falsa y $f(\beta) = \beta$ si $f([a,b])$ es un intervalo.

Evaluación 3. Cálculo I Javier Gómez López

2. Sea $\{x_n\}$ la sucesión definida por

$$x_1 = 2 \qquad x_{n+1} = \frac{4x_n + a}{x_n + 4} \qquad (4 < a < 16)$$

a) Estudia la convergencia de dicha sucesión.

Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está mayorado y $\{x_n\}$ es estrictamente creciente, $\lim \{x_n\} = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

En primer lugar, probaremos que la sucesión es estrictamente creciente. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$ y probaremos que es inductivo. Primero comprobemos que $1 \in A$.

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = \frac{4 \cdot 2 + a}{2+4} \Rightarrow x_2 = \frac{8+a}{6}.$$ Puesto que $4 < a < 16$, $x_2 > x_1$

Ahora suponemos que $n \in A$ y comprobamos que $n+1 \in A$. Lo haremos a partir de suponer que $x_{n+2} - x_{n+1} > 0$

$$\frac{4x_{n+1} + a}{x_{n+1} + 4} - \frac{4x_n + a}{x_n + 4} = \frac{4x_{n+1}x_n + 16x_{n+1} + a \cdot x_n + 4a - 4x_{n+1}x_n - 16x_n - a x_{n+1} - 4a}{(x_{n+1}+4) \cdot (x_n + 4)} =$$

$$= \frac{16x_{n+1} - 16x_n + a x_n - a x_{n+1}}{(x_n+4) \cdot (x_{n+1}+4)} = \frac{16 \cdot (x_{n+1} - x_n) + a \cdot (x_n - x_{n+1})}{(x_{n+1}+4) \cdot (x_n + 4)} =$$

$$= \frac{16 \cdot (x_{n+1} - x_n) - a \cdot (x_{n+1} - x_n)}{(x_{n+1}+4) \cdot (x_n+4)} = \frac{(x_{n+1} - x_n) \cdot (16 - a)}{(x_{n+1}+4) \cdot (x_{n}+4)}$$

Scanned with CamScanner

Evidentemente, $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Si probamos que $16 - a > 0$, de la igualdad anterior deducimos que si, suponemos $x_{n+1} > x_n$, entonces también $x_{n+2} > x_{n+1}$, y como $x_1 = 2 < \frac{8+a}{6} = x_2$, se sigue, por inducción matemática, que $x_{n+1} > x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y la sucesión es estrictamente creciente.

$16 - a > 0 \iff 16 > a$ y esto ocurre siempre. Por tanto $x_{n+1} > x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Ya hemos demostrado que es estrictamente creciente.

Ahora veremos que está acotada superiormente.

$$x_{n+1} = \frac{4x_n + a}{x_n + 4} < \frac{4x_n + 16}{x_n + 4} = \frac{4 \cdot (x_n + 4)}{x_n + 4} \Rightarrow x_{n+1} < 4 \Rightarrow x_n < 4$$

Por propiedades de sucesiones: $\{x_n\} \to L \iff \{x_{n+1}\} \to L$

$\{x_n\} \to \lim\limits_{n \to \infty} \{x_{n+1}\} = \lim\limits_{x_n \to \infty} \frac{4x_n + a}{x_n + 4}$. Usando álgebra de límites

$$\Rightarrow \frac{4L + a}{L + 4} = L \Rightarrow 4L + a = L^2 + 4L \Rightarrow L = \sqrt{a}$$

Por lo tanto $\{x_n\} \to \sqrt{a}$

Javier Gómez López

b) Prueba que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3}(\sqrt{a} - x_n)$ y deduce que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3^n} \cdot (\sqrt{a} - 2)$

$x_n < x_{n+1} < \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} - x_{n+1} > 0$

Ahora probemos que $\sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{a} - x_n)$

$$\frac{\sqrt{a} - x_{n+1}}{\sqrt{a} - x_n} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{a} - \frac{4x_n + a}{x_n + 4}}{\sqrt{a} - x_n} < \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_n \cdot \sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 4x_n - a}{(x_n + 4) \cdot (\sqrt{a} - x_n)} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x_n \cdot (\sqrt{a} - 4) + \sqrt{a} \cdot (4 - \sqrt{a})}{(x_n + 4) \cdot (\sqrt{a} - x_n)} < \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_n \cdot (\sqrt{a} - 4) - \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} - 4)}{(x_n + 4) \cdot (\sqrt{a} - x_n)} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{(\sqrt{a} - 4) \cdot (x_n - \sqrt{a})}{(x_n + 4) \cdot (\sqrt{a} - x_n)} < \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(4 - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{a} - x_n)}{(x_n + 4) \cdot (\sqrt{a} - x_n)} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4 - \sqrt{a}}{x_n + 4} < \frac{1}{3} \Rightarrow 12 - 3\sqrt{a} < x_n + 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_n > 8 - 3\sqrt{a}$. Por otro lado tenemos que $4 < a < 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 < \sqrt{a} < 4 \Rightarrow -6 > -3\sqrt{a} > -12 \Rightarrow 2 > 8 - 3\sqrt{a} > -4$

Puesto que $x_n \geq 2 > 8 - 3\sqrt{a}$; queda demostrada la desigualdad.

Ahora probemos que $\sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3^n} \cdot (\sqrt{a} - 2)$

Partimos de que $\sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{a} - x_n)$

Sea $B = \{n \in \mathbb{N} : \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3^n} \cdot (\sqrt{a} - 2)\}$ y probemos que es inductivo.

Primero comprobemos que $1 \in A$.

$\sqrt{a} - x_2 < \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{a} - 2) \Rightarrow 3\sqrt{a} - 3x_2 < \sqrt{a} - 2 \Rightarrow 2\sqrt{a} - 3x_2 < -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{a} + 2 < 3x_2 \Rightarrow 2 \cdot (\sqrt{a} + 1) < 3 \cdot \frac{8+a}{6} \Rightarrow 2 \cdot (\sqrt{a} + 1) < \frac{8+a}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a} + 1 < \frac{8+a}{4} \Rightarrow 4 \cdot (\sqrt{a} + 1) < 8 + a \Rightarrow 4 < \frac{8+a}{\sqrt{a}+1}$ y puesto que $4 < a < 16$, esto se cumple siempre.

Ahora suponemos que $n \in B$ y comprobamos que $n+1 \in B$.

Si $n \in B \Rightarrow \sqrt{a} - x_n < \frac{1}{3^{n-1}} \cdot (\sqrt{a} - 2)$

$\sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{a} - x_n) \Rightarrow \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \cdot (\sqrt{a} - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3^n} \cdot (\sqrt{a} - 2)$

Por lo tanto queda demostrado que B es inductivo y que la desigualdad se cumple.

Scanned with CamScanner