Evaluación 2. Cálculo I

Javier Gómez López

1. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

Definimos A.

$$A = \left\{ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$A \subseteq \mathbb{N}$. Lo demostraremos por inducción.

Comprobemos para $n = 1$

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2 \cdot 1)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 1 + 3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(1+1)(1+2)(1+3)}} \Rightarrow \frac{96}{1575} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$$

observamos que se cumple para $n=1$

Suponemos que se cumple para n, y demostramos que se cumple para $n+1$

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot [2 \cdot (n+1)]}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3) \cdot [2 \cdot (n+1)+3]} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n+2)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3) \cdot (2n+5)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot (2n+3)} \cdot \frac{2n+2}{2n+5}$$

Y para mantener la desigualdad:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot (2n+3)} \cdot \frac{2n+2}{2n+5} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}} \cdot \frac{2n+2}{2n+5}$$

Operamos con el lado mayor de la desigualdad.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}} \cdot \frac{2n+2}{2n+5} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot \frac{2n+5}{2n+2}}$$

$$\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right)^2 = \frac{4n^2+20n+25}{4n^2+8n+4}$$

$$\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \frac{4n^2+20n+25}{4n^2+8n+4}}$$

$$\frac{4n^2+20n+25}{4n^2+8n+4} \cdot (n+1) = \frac{4n^3+20n^2+25n+4n^2+20n+25}{4n^2+8n+4} =$$

$$= \frac{4n^3+24n^2+45n+25}{4n^2+8n+4} \Rightarrow \begin{array}{rrrr|l} \cancel{4n^3} & +24n^2 & +45n & +25 & 4n^2+8n+4 \\ \cancel{-4n^3} & -8n^2 & -4n & & \overline{n+4} \\ \hline & 16n^2 & +41n & +25 & \\ & -16n^2 & -32n & +16 & \\ \hline & & 9n & +9 & \end{array}$$

$$\Rightarrow n+4 + \frac{9n+9}{4n^2+8n+4}$$

Obtenemos que:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot \frac{2n+5}{2n+2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3) \cdot \left(n+4+\frac{9n+9}{4n^2+8n+4}\right)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4) + \left[\frac{9n+9}{4n^2+8n+4} \cdot (n+2)(n+3)\right]}}$$

Javier Gómez López

Puesto que $(n+2)(n+3)(n+4)>0$ y $\frac{9n+9}{4n^2+8n+4}(n+2)(n+3)>0$,

podemos afirmar que: (puesto que la raíz cuadrada es creciente)

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)+\frac{9n+9}{4n^2+8n+4}(n+2)(n+3)}} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}}$$

y por lo tanto:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\,(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdot (2n+3)}\cdot\frac{2n+2}{2n+5} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}\cdot\frac{2n+2}{2n+5} <$$

$$< \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}} \Longrightarrow \frac{2\cdot 4\cdot (2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdot (2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}}$$

Así, queda demostrado que la desigualdad se cumple para $n+1$

Por inducción, queda demostrada la desigualdad $\forall n \in \mathbb{N}$

Scanned with CamScanner

Evaluación 2. Cálculo I

Javier Gómez López

2. Sea A un conjunto infinito y acotado de números reales. Un número $z \in \mathbb{R}$ se dice que es un casi mayorante de A si el conjunto $\{x \in A : z < x\}$ es finito (puede ser vacío).
Sea B el conjunto de todos los casi mayorantes de A. Prueba que B no es vacío, está minorado y $\inf(B) \leq \sup(A)$.
Prueba también que si $\inf(B) < \sup(A)$ entonces A tiene máximo.

Primero probemos que B no es vacío.
Definamos $\alpha = \sup(A) \Rightarrow \alpha \geq a \ \forall a \in A$. Así, podemos afirmar que $\{x \in A : \alpha < x\} = \phi$. Concluimos que, usando la hipótesis, $\sup(A) \in B$ y es casi mayorante de A. Así, $B \neq \phi$

Ahora probemos que B está minorado.
Sea $\varphi < \inf(A)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Así, $\{x \in A : \varphi < x\} = A$. El conjunto A es infinito $\Rightarrow \varphi$ no es casi mayorante de A y $\varphi \notin B$. Esto ocurre $\forall \varphi < \inf(A)$.

Tomando un $w \in B$, podemos afirmar que $w \geq \inf(A)$ y así queda demostrado que B está minorado y $\inf(A) \in$ Minorante de B

Probemos que $\inf(B) \leq \sup(A)$

Esta demostración es inmediata y se da por definición. En el primer apartado hemos demostrado que $\sup(A) \in B$. En el segundo apartado hemos demostrado que B está minorado y $\exists \inf(B)$.

Por definición, $\inf(B) \leq b \quad \forall b \in B$. $\sup(A) \in B \implies \inf(B) \leq \sup(A)$

Probemos que si $\inf(B) < \sup(A) \implies A$ tiene máximo.

Si A tiene máximo, quiere decir que $\sup(A) \in A$.

Hemos demostrado que $\{x \in A : z < x\}$ es finito. Llamemos $z = \inf(B)$, $x \in A$ y por tanto $\inf(B) < x \leq \sup(A)$. Podemos concluir que si $\inf(B) < x$ es finito, A tiene máximo y $\sup(A) \in A$.

Evaluación 2. Cálculo I — Javier Gómez López

3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ creciente. Para cada $\alpha\in\,]a,b[$ definamos:

$$\omega(f,\alpha)=\inf\{f(t):\alpha<t\leq b\}-\sup\{f(s):a\leq s<\alpha\}$$

Prueba que:

i) $\omega(f,\alpha)\geq 0$ y si $a\leq u<\alpha<v\leq b$ entonces $\omega(f,\alpha)\leq f(v)-f(u)$

Primero probaremos que $\omega(f,\alpha)\geq 0$

Llamemos $I=\inf\{f(t):\alpha<t\leq b\}$, $S=\sup\{f(s):a\leq s<\alpha\}$

$\omega(f,\alpha)\geq 0 \Rightarrow I-S\geq 0 \Rightarrow I\geq S$

Puesto que f es creciente $\Rightarrow$ $f(s)\leq f(\alpha)\quad\forall s\in[a,\alpha)$

$f(\alpha)\leq f(t)\quad\forall t\in(\alpha,b]$

Así, podemos afirmar que $f(s)\leq f(\alpha)\leq f(t)\Rightarrow f(s)\leq f(t)$,

y por tanto $S\leq I\Rightarrow I-S\geq 0\Rightarrow\omega(f,\alpha)\geq 0$

Ahora probaremos que si $a\leq u<\alpha<v\leq b\Rightarrow\omega(f,\alpha)\leq f(v)-f(u)$

Esto equivale a demostrar que:

$I\leq f(v)$

$S\geq f(u)$

Puesto que $f(t)$ es el mínimo valor que más se acerca a $f(\alpha)$ cuando $\alpha<t\leq b$

y $f(s)$ es el máximo valor que más se acerca a $f(\alpha)$ cuando $a\leq s<\alpha$,

podemos afirmar que:

- Al ser $I\leq f(v)\Rightarrow f(t)\leq f(v)\Rightarrow\alpha<t\leq v$
- Al ser $S\geq f(u)\Rightarrow f(u)\leq f(s)\Rightarrow u\leq s<\alpha$

Así, $f(t)-f(s)\leq f(v)-f(u)\Rightarrow\omega(f,\alpha)\leq f(v)-f(u)$

ii) Si $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p < b$, entonces:

$$\omega(f, \alpha_1) + \omega(f, \alpha_2) + \dots + \omega(f, \alpha_p) \leq f(b) - f(a)$$

Para este apartado consideraremos puntos tales que:

$$a = x_0 < \alpha_1 < x_1 < \alpha_2 < x_2 < \alpha_3 < \dots < x_{p-1} < \alpha_p < x_p = b$$

Así, por un lado tenemos: $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \omega(f, \alpha_i)$

$\forall i \in \{1, \dots, p\}$

Y por otro lado: $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} f(x_i) - f(x_{i-1})$

$\forall i \in \{1, \dots, p\}$

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i) - f(x_{i-1}) = [f(x_1) - f(x_0)] + [f(x_2) - f(x_1)] + [f(x_3) - f(x_2)]$$

$$+ \dots + [f(x_p) - f(x_{p-1})] = f(b) - f(a)$$

Podemos afirmar que

$$\sum_{i=1}^{p} \omega(f, \alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{p} f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{p} \omega(f, \alpha_i) \leq f(b) - f(a)$$

Scanned with CamScanner

Javier Gómez López

iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $S_n = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) \geq \frac{1}{n}\}$ es finito

Lo demostraremos por reducción al absurdo

Supongamos que S_n es infinito $\forall n \in \mathbb{N}$. Tomamos $m \in \mathbb{N}$. Si sumamos m elementos del conjunto S_n: $\omega(f,\alpha_1) + \omega(f,\alpha_2) + \dots + \omega(f,\alpha_m)$ obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^{m} \omega(f,\alpha_i) \geq m \cdot \frac{1}{n}$$

Y como hemos demostrado en ii) $\rightarrow f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^{m} \omega(f,\alpha_i)$

Y por tanto $f(b) - f(a) \geq \frac{m}{n}$.

Al ser S_n infinito, y usando la propiedad arquimediana de los números naturales, podemos tomar un m : $\frac{m}{n} > f(b - f(a)$.

Hemos llegado a una contradicción y podemos afirmar que S_n es finito.

iv) El conjunto $S = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) > 0\}$ es numerable

Tomando como referencia el apartado iii), podemos escoger un $n \in \mathbb{N}$ tan grande como queramos y definir un S como el del enunciado iv).

Al ser conjuntos con las mismas características, podemos afirmar que S es finito.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$. Decimos que un conjunto A es finito, o bien $A = \emptyset$ o bien existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim I_n$.

Al ser S finito, $\exists I_n : S \sim I_n$. Al ser I_n numerable (pues existe una aplicación inyectiva de I_n en $\mathbb{N}$), S es numerable.