Evaluación 5. Cálculo I

Javier Gómez López

1. Estudia según los valores de $a \in \mathbb{R}$ la convergencia de las series:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{((3n)!)^2}{(n!)^6} \cdot a^{6n}$ Sea $\{a_n\} = \frac{((3n)!)^2}{(n!)^6} \cdot a^{6n}$

Puesto que la serie es de terminos positivos $\forall n \in \mathbb{N}$, aplicamos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((3n+3)!)^2 \cdot a^{6n+6}}{((n+1)!)^6}}{\frac{((3n)!)^2 \cdot a^{6n}}{(n!)^6}} = \frac{(n!)^6 \cdot ((3n+3)!)^2 \cdot a^{6n+6}}{((n+1)!)^6 \cdot ((3n!))^2 \cdot a^{6n}} =$$

$$= \frac{(n!)^6 \cdot ((3n+3)\cdot(3n+2)\cdot(3n+1)\cdot(3n)!)^2 \cdot a^6}{((n+1)\cdot(n)!)^6 \cdot ((3n)!)^2} =$$

$$= \frac{((3n+3)\cdot(3n+2)\cdot(3n+1))^2 \cdot a^6}{(n+1)^6} =$$

$$= \frac{729n^6 + 2916n^5 + 4696n^4 + 3888n^3 + 1717n^2 + 396n + 36}{n^6 + 6n^5 + 15n^4 + 20n^3 + 15n^2 + 16n + 1} \cdot a^6$$

$$\lim_{n\to\infty} \rightarrow 729a^6 \Rightarrow 729 \cdot a^6 < 1 \Rightarrow a < \frac{1}{3}$$

- Si $a < \frac{1}{3}$; $\lim \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L$; $L < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{3}$. La serie converge.

• Si $a > \frac{1}{3} \Rightarrow 729 \cdot a^6 > 1 \Rightarrow \lim \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \ell > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{3}$

Por tanto $\{a_n\}$ no converge a 0 y $\sum_{n\geq 1} a_n$ no es convergente.

• Si $a = \frac{1}{3}$; $\lim \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L = 1$ y por tanto la serie puede ser convergente o divergente

Aplicamos criterio de Raabe

Sea $R_n = n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$

$$R_n = n \cdot \left(1 - \frac{((3n+3) \cdot (3n+2) \cdot (3n+1))^2}{(n+1)^6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \right) =$$

$$= \frac{162n^4 + 369n^3 + 288n^2 + 77n}{81n^4 + 324n^3 + 486n^2 + 324n + 81}$$

$\lim \{R_n\} = L = 2 > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

Concluimos que:

• Si $a \leq \frac{1}{3}$ la serie es convergente.

• Si $a > \frac{1}{3}$ la serie es divergente.

Javier Gómez López

b) $\sum_{n\geq 1} \left(\dfrac{4\cdot 6\cdot 8 \cdots (2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13 \cdots (2n+7)} \right)^a$

Sea $\{a_n\} = \left(\dfrac{4\cdot 6\cdot 8 \cdots (2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13 \cdots (2n+7)} \right)^a$ $\quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Aplicamos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{4^a\cdot 6^a\cdot 8^a \cdots (2n+2)^a\cdot(2n+4)^a}{9^a\cdot 11^a\cdot 13^a \cdots (2n+7)^a\cdot (2n+9)^a}}{\dfrac{4^a\cdot 6^a\cdot 8^a \cdots (2n+2)^a}{9^a\cdot 11^a\cdot 13^a \cdots (2n+7)^a}} = \left(\frac{2n+4}{2n+9} \right)^a$$

$\lim \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L = 1^a = 1$; la serie puede ser convergente o divergente

Aplicamos la forma alternativa del criterio de Raabe ya que $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

Sea $S_n = \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right)^n = \left(\dfrac{2n+9}{2n+4} \right)^{a_n} \longrightarrow 1^{a_n} \longrightarrow 1^\infty$

Usaremos el criterio del número $e \Rightarrow S_n = \{x_n^{y_n}\} \to e^L \Leftrightarrow y_n\cdot(x_n - 1) \to L$

$$a_n \cdot \left(\frac{2n+9}{2n+4} - 1 \right) = a_n \cdot \left(\frac{2n+9-2n-4}{2n+4} \right) = \frac{5a_n}{2n+4} \longrightarrow \frac{5}{2}a$$

Tenemos que $e^L = e^{\frac{5}{2}a}$ $\quad L > 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}a > 1 \Rightarrow a > \frac{2}{5}$

- Si $a > \frac{2}{5}$ la serie converge
- Si $a < \frac{2}{5}$ la serie diverge
- Para el caso $a = \frac{2}{5}$, se requiere de un estudio adicional

Javier Gómez López

2. Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las series:

a) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}+1}$ $\qquad \{a_n\} = \frac{\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}+1}$

Estudiamos la convergencia absoluta

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| = \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}+1}$$

Aplicamos el criterio límite de comparación

Sea $\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ $\quad$ Supongamos $\left\{\frac{|a_n|}{b_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}_0^+ \cup (+\infty)$

$$\frac{|a_n|}{b_n} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n\cdot\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}+1} \to L = 1 > 0; \quad 1 \in \mathbb{R}^+$$ y puesto

que $\sum_{n\geq 1} b_n$ diverge (es la serie armónica), $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ diverge, es decir, no converge absolutamente.

Ahora estudiamos convergencia. Usaremos el criterio de Leibniz para series alternadas.

Primero demostremos que $\{a_n\} \to 0$

$$\frac{\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}+1} = \frac{n^{1/2}}{n^{3/2}+1} = \frac{\frac{n^{1/2}}{n^{3/2}}}{\frac{n^{3/2}}{n^{3/2}}+\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\frac{n^{1/2}}{n^{3/2}}}{1+\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^{3/2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0}{1} = 0$$

Ahora demostraremos que $\{a_n\}$ es decreciente. Sea $A = \{n : a_n > a_{n+1}\}$, probemos que A es inductivo

Comprobemos que $1 \in A$

$$x_1 = \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1} = x_2 \Rightarrow 1 > \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$$

Supongamos $n \in A$. Probemos que $n+1 \in A$

$a_n > a_{n+1}$ Cabe mencionar que vamos a trabajar con términos mayores que 0 y por ello la desigualdad se mantendrá.

$$\frac{\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\cdot\sqrt{n+1}+1} \rightarrow \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow n\cdot\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+n} + \sqrt{n} > n\cdot\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{n^2+n} + \sqrt{n} > \sqrt{n+1} \rightarrow (\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n})^2 > (\sqrt{n+1})^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow n^2+n+n+2\sqrt{n^3+n} > n+1 \rightarrow n^2+n+2\sqrt{n^3+n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hemos demostrado que A es inductivo y por tanto $\{a_n\}$ es decreciente.

Aplicando el criterio de Leibniz, concluimos que $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}+1}$ converge

b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt[n+2]{3}}$ $\{a_n\} = \frac{1}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt[n+2]{3}}$

Javier Gómez López

Estudiamos la convergencia absoluta

Comparación con el criterio límite de comparación.

Sea $\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \to L$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt[n+2]{3}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt[n+2]{3}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt[n+2]{3}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n}} \cdot \sqrt[n+2]{3}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} \cdot \sqrt[n+2]{3}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \in \mathbb{R}^+$$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ diverge,

hemos demostrado que $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ diverge, es decir, no es absolutamente convergente.

Estudiamos la convergencia. Usaremos el criterio de Leibniz para series alternadas.

Primero demostraremos que $\{a_n\} \to 0$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt[n+2]{3}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} \cdot \sqrt[n+2]{3}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0}{1} = 0.$$

Acabamos de demostrar que $\{a_n\} \to 0$

$a_n \geq a_{n+1}$ Ahora demostraremos que es decreciente.

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}\cdot\sqrt[n+2]{3}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+3}\cdot\sqrt[n+3]{3}} \Rightarrow \sqrt{n+3}\cdot\sqrt[n+3]{3} \geq \sqrt{n+2}\cdot\sqrt[n+2]{3}$$

$$\sqrt{\frac{n+3}{n+2}} \geq \frac{\sqrt[n+2]{3}}{\sqrt[n+3]{3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{n+3}{n+2}} \geq \frac{3^{1/n+2}}{3^{1/n+3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{n+3}{n+2}} \geq 3^{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}$$

Puesto que $\frac{n+3}{n+2} \geq 1$ ya que toma valores cercanos a 1 cuando n tiende a $+\infty$

y $\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 3^{\frac{1}{(n+2)(n+3)}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Queda demostrada la desigualdad y por tanto la sucesión es decreciente.

Podemos afirmar que $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2}\cdot\sqrt[n+2]{3}}$ converge.

Scanned with CamScanner