Javier Gómez López

Cálculo I. Evaluación 6.

1.

a) Sea $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua y definamos $Z = \{x \in [c, d] : f(x) = 0\}$. Supuesto que $Z = \emptyset$ prueba que Z tiene máximo y mínimo

Puesto que $Z \subset [c, d] \Rightarrow Z$ está acotado y $Z \neq \emptyset \Rightarrow$

$\exists \inf(Z)$ y $\exists \sup(Z)$

Sea $\inf(Z) = \alpha$ y $\sup(Z) = \beta$

Probemos que $\alpha \in Z$, es decir, $f(\alpha) = 0$.
Podemos definir el extremo inferior de un conjunto como el límite de una sucesión de puntos de dicho conjunto. Es decir, $\alpha = \lim\{z_n\}$, $z_n \in Z$. Como f es continua $\Rightarrow \lim\{f(z_n)\} = f(\alpha)$.
Además, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$ y por tanto $\alpha \in Z$ y $\alpha = \min(Z)$.

De manera análoga, probemos que $\beta \in Z$, es decir, $f(\beta) = 0$.
Igualmente, podemos definir el extremo superior de un conjunto como el límite de una sucesión de puntos de dicho conjunto. Es decir, $\beta = \lim\{y_n\}$, $y_n \in Z$. Al ser f continua $\Rightarrow \lim\{f(y_n)\} = f(\beta)$.
Además, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = 0 \Rightarrow f(\beta) = 0$ y por tanto $\beta \in Z$ y $\beta = \max(Z)$.

b) Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a)<0$, $f(b)<0$ y $f(c)>0$ para algún $c \in]a,b[$. Prueba que hay dos números u, v verificando que $a<u<v<b$, $f(u)=f(v)=0$ y $f(x)>0$ para todo $x \in]u,v[$

Tomemos el intervalo $[a,c]$. $[a,c] \subset [a,b]$ y al ser f continua en $[a,b]$, f es continua en $[a,c]$. Tenemos que $f(a)<0$, $f(c)>0$ y f continua en $[a,c]$. Por el Teorema de Bolzano podemos afirmar que $\exists$ al menos un $u \in]a,c[$ tal que $f(u)=0$.

Tomemos de todos estos posibles valores que anulan f en $]a,c[$, el más próximo a c. Desde este punto u a c, podemos afirmar que la función no se anula y como $f(c)>0$, podemos afirmar que $f(x)>0$ $\forall x \in]u,c]$.

De manera análoga, tomemos el intervalo $[c,b]$. $[c,b] \subset [a,b]$ y al ser f continua en $[a,b]$, f es continua en $[c,b]$. Tenemos que $f(c)>0$, $f(b)<0$ y f continua en $[c,b]$. Por el Teorema de Bolzano podemos afirmar que $\exists$ al menos un $v \in]c,b[$ tal que $f(v)=0$.

Tomemos de todos estos posibles valores que anulan f en $]c,b[$, el más próximo a c. Desde c a este punto v, podemos afirmar que la función no se anula y como $f(c)>0$, podemos afirmar que $f(x)>0$ $\forall x \in [c,v[$.

Así, concluimos que $f(x)>0$ $\forall x \in]u,v[$.

Javier Gómez López

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y creciente. Prueba que todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y mayorado se verifica que $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$

Sucesiones

Podemos decir que el supremo de un conjunto A es una sucesión de puntos de dicho conjunto. Sea $\alpha = \sup(A)$.
Así, tenemos $\alpha = \lim \{a_n\}$ $a_n \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Al ser f una función continua, podemos afirmar que $f(\alpha) = \lim \{a_n\}$.
De esta manera tenemos que $f(\alpha)$ es el límite de una sucesión de puntos del conjunto $f(A)$ y además es un mayorante de $f(A)$.
Así, tenemos que $f(\alpha) = \sup(f(A)) \Rightarrow f(\sup(A)) = \sup(f(A))$.

Sin sucesiones

Sea $\alpha = \sup(A)$. Es decir $a \leq \alpha$ $\forall a \in A$. Al ser f una función creciente $\Rightarrow f(a) \leq f(\alpha)$ $\forall a \in A \Rightarrow f(\alpha) \in$ Mayorantes de $f(A) \Rightarrow$ $\sup(f(A)) \leq f(\alpha)$. Ahora distinguimos casos:

- Si $\alpha \in A \Rightarrow f(\alpha) \in f(A) \Rightarrow \sup(f(A)) = \max(f(A)) = f(\alpha) = f(\sup(A))$; $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$.
- Si $\alpha \notin A$. Probaremos que $f(\alpha)$ es el mínimo mayorante de $f(A)$.

Al ser f continua en α, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\Rightarrow$ $f(\alpha) - \varepsilon < f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$.

Como $\alpha = \sup(A)$ y $\alpha \notin A \Rightarrow]\alpha - \delta, \alpha[\cap A \neq \emptyset$ y si tomamos un $a \in]\alpha - \delta, \alpha[\cap A$, tenemos que $f(\alpha) - \varepsilon < f(a)$, así $f(\alpha) - \varepsilon \notin$ Mayorantes de $f(A)$ $\forall \varepsilon > 0$. Así, $f(\alpha) = \sup(f(A)) \Rightarrow$ $f(\sup(A)) = \sup(f(A))$.

Javier Gómez López

3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in [a,b]$ por $g(x) = \max f([a,x])$ es continua.

La función g siempre toma el valor máximo en el intervalo $[a,x]$ $\forall x \in [a,b]$, la función g es claramente creciente.

Ahora consideremos el conjunto $M = \max f([a,b])$. Trataremos de probar que $g([a,b]) = [f(a), M]$.

Para ello, sea $v \in]f(a), M[$ y sea $t_v = \sup\{x \in [a,b] : f(s) \leq v \ \forall s \in [a,x]\}$.

Por el teorema del valor intermedio, al ser f una función continua en un intervalo, podemos afirmar que su imagen es un intervalo. Así, $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Así, podemos afirmar que $[f(a), M] \subset [f(a), f(b)]$. Al estar $v \in]f(a), M[\subset [f(a), M] \subset [f(a), f(b)]$, podemos afirmar que f toma el valor v en algún punto $\forall v \in]f(a), M[$.

Al ser t_v el valor de la recta real en el cual f toma el valor más cercano a v, podemos afirmar que $f(t_v) = v \Rightarrow f([a, t_v]) = v$

y como f es continua esto ocurre $\forall v \in]f(a), M[$.

Así, podemos afirmar que $g(t_v) = v \Rightarrow g([a, b]) = [f(a), M]$, esto al ser un intervalo, confirma que g es continua.