EJERCICIOS TEMA 2

① Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Dadas dos formas lineales $\varphi, \psi \in V^*$ definimos su producto tensorial como $\varphi \otimes \psi : V \times V \to \mathbb{R}$ como $(\varphi \otimes \psi)(u,v) = \varphi(u)\psi(v)$.

a) Probar que es una forma bilineal

> f es una forma bilineal si: • $f(au_1+bu_2, v) = af(u_1,v)+bf(u_2,v)$
> • $f(u, av_1+bv_2) = af(u,v_1)+bf(u,v_2)$

Supongamos $a, b \in \mathbb{R}$ y $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$, entonces:

- $(\varphi \otimes \psi)(au_1+bu_2, v) = \varphi(au_1+bu_2)\psi(v) = a\varphi(u_1)\psi(v) + b\varphi(u_2)\psi(v) =$
  $= a(\varphi\otimes\psi)(u_1,v) + b(\varphi\otimes\psi)(u_2,v)$ como φ es aplicación lineal
- $(\varphi \otimes \psi)(u, av_1+bv_2) = \varphi(u)\psi(av_1+bv_2) = a\varphi(u)\psi(v_1) + b\varphi(u)\psi(v_2) =$
  $= a(\varphi\otimes\psi)(u,v_1) + b(\varphi\otimes\psi) = (u,v_2)$

$\Rightarrow$ Luego, $(\varphi\otimes\psi)$ es una forma bilineal.

b) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\varphi\otimes\psi = 0$

ii) $\varphi = 0$ ó $\psi = 0$

iii) $\varphi\otimes\psi$ antisimétrica

$\varphi\otimes\psi(u,v) = 0 \Rightarrow \varphi(u)\psi(v) = 0 \;\; \forall u,v \in V \Rightarrow \begin{cases} \varphi(u) = 0 \;\; \forall u \in V \Rightarrow \varphi = 0 \\ \text{ó} \\ \psi(v) = 0 \;\; \forall v \in V \Rightarrow \psi = 0 \end{cases} \Rightarrow$ i) $\Leftrightarrow$ ii)

Lema: f es antisimétrica sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Leftrightarrow (\varphi\otimes\psi) = 0$ $\Rightarrow$ iii) $\Leftrightarrow$ i) $\Leftrightarrow$ ii)

③ Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado un endomorfismo $f: V \to V$ y una forma bilineal $b: V\times V \to \mathbb{R}$, se define la aplicación $b_f: V \times V \to \mathbb{R}$ como $b_f(u,v) = b(f(u), f(v))$. Demuestra que b_f es una forma bilineal y que, además, es simétrica si lo es b.

Supongamos $u_1, u_2, u, v_1, v_2, v \in V$ y $a, c \in \mathbb{R}$

- $b_f(au_1+cu_2, v) = b(f(au_1+cu_2), f(v)) \overset{f \text{ es endomorfismo}}{=} b(af(u_1)+cf(u_2), f(v)) \overset{b \text{ es forma bilineal}}{=} ab(f(u_1),f(v)) + cb(f(u_2),f(v)) =$
  $= ab_f(u_1,v) + cb_f(u_2,v)$
- $b_f(u, av_1+bv_2) = b(f(u), f(av_1+bv_2)) \overset{f \text{ endomorfismo}}{=} b(f(u), af(v_1)+bf(v_2)) \overset{b \text{ forma bilineal}}{=} ab(f(u),f(v_1)) +$
  $+ cb(f(u),f(v_2)) = ab_f(u,v_1) + bb_f(u,v_2)$

$\Rightarrow$ b_f es forma bilineal.

- $b_f(u,v) = b(f(u),f(v)) = b(f(v),f(u)) = b_f(v,u) \Leftrightarrow b$ es simétrica

④ Sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales reales. Consideremos el espacio producto $V = V_1 \times V_2$, donde la suma y el producto por escalares se realizan coordenada a coordenada. Dadas formas bilineales $b_i: V_i \times V_i \to \mathbb{R}$ definimos $b: V\times V \to \mathbb{R}$ como:

$$b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = b_1(u_1,v_1) + b_2(u_2,v_2)$$

Demuestra que b es una forma bilineal y, además, simétrica si lo son b_1, b_2.

- $b(a(u_1,u_2)+c(u_3,u_4),(v_1,v_2)) = b((au_1+cu_3, au_2+cu_4),(v_1,v_2)) =$
$= b_1(au_1+cu_3, v_1) + b_2(au_2+cu_4, v_2) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{como } b_1,\, b_2 \text{ son formas bilineales}}}{=} ab_1(u_1,v_1) + cb_1(u_3,v_1) + ab_2(u_2,v_2) +$
$+ cb_2(u_4,v_2) = a(b_1(u_1,v_1)+b_2(u_2,v_2)) + c(b_1(u_3,v_1)+b_2(u_4,v_2)) =$
$= ab((u_1,u_2),(v_1,v_2)) + cb((u_3,u_4),(v_1,v_2))$

- $b((u_1,u_2), a(v_1,v_2)+c(v_3,v_4)) = b((u_1,u_2),(av_1+cv_3, av_2+cv_4)) =$
$= b_1(u_1, av_1+cv_3) + b_2(u_2, av_2+cv_4) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{como } b_1,\, b_2 \text{ son formas bilineales}}}{=} ab_1(u_1,v_1) + cb_1(u_1,v_3) +$
$+ ab_2(u_2,v_2) + cb_2(u_2,v_4) = a(b_1(u_1,v_1)+b_2(u_2,v_2)) + c(b_1(u_1,v_3)+b_2(u_2,v_4)) =$
$= ab((u_1,u_2),(v_1,v_2)) + cb((u_1,u_2),(v_3,v_4))$

$\Rightarrow$ b es una forma bilineal.

- $b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = b_1(u_1,v_1) + b_2(u_2,v_2) = b_2(v_2,u_2) + b_1(v_1,u_1) =$
$= b((v_1,v_2),(u_1,u_2)) \Leftrightarrow b_1, b_2$ simétricas

⑤ Se considera la forma bilineal $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 2yy' - 3zz' + 2xy' - 3yz'$$

a) Calcular $M(b, B_u)$. ¿Es b una métrica sobre $\mathbb{R}^3$?

> b es una métrica si su matriz $M(b, B_u)$ lo es, es decir, $M(b,B_u) = M(b,B_u)^T$

> La forma más rápida de calcular la matriz asociada es
> $$\begin{array}{c|ccc} & x' & y' & z' \\ \hline x & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Tenemos:

$$M(b,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

. Claramente podemos ver que b no es métrica sobre $\mathbb{R}^3$

b) Utiliza la expresión matricial de b respecto B_u para calcular $b((1,-2,1),(1,-2,4))$.

$$b((1,-2,1),(1,-2,4)) = (1,-2,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$$

> Para calcular $b(u,v)$:
> $$\underbrace{(u_1,\dots,u_n)}_{u}\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{M(b,B)}\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{v}$$

c) Se considera la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Calcular $M(b, B)$ mediante la relación de congruencia.

Como vamos de $B \to B_u$, entonces la matriz de cambio P es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

> Cuando se trata $B \to B_u$ basta con tomar P = vectores B por filas

> Dos matrices cuadradas, A, B, son congruentes si $\exists P$, matriz regular ($\det(P) \neq 0$) tal que verifique $B = P^T A P$

$$M(b,\mathcal{B}) = P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

- Toda matriz simétrica es congruente a una matriz de Sylvester por lo que si nos piden ver si dos matrices son congruentes, basta con ver si son del mismo tipo según el criterio de Sylvester.
- Dos matrices son congruentes $\Leftrightarrow$ una se puede obtener a partir de la otra haciendo transformaciones elementales, las mismas por filas y por columnas.

d) Calcular $b(u,v)$, sabiendo que las coordenadas u y v en la base $\mathcal{B}$ son $(1,-2,1)$ y $(2,1,2)$ respectivamente.

$$b((1,-2,1),(2,1,2)) = (1,-2,1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$$

6) Sea V un espacio vectorial de dimensión tres, b una forma bilineal sobre V y $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ una base de V. Sabiendo que:

$$M(b,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $b(u,v)$ para $u=v_1+v_3$ y $v=v_2+3v_3$

$\cdot\ b(u,v) = b(v_1+v_3, v_2+3v_3) = b(v_1, v_2+3v_3) + b(v_3, v_2+3v_3) = b(v_1+v_2) +$
$+ 3b(v_1,v_3) + b(v_3,v_2) + 3b(v_3,v_3) = 2+3-1+6 = 10$

$$\begin{array}{c|c} & v_1\ v_2\ v_3 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

b) ¿Existe algún vector $w \neq 0$ tal que $b(w,w)=0$?

$$(a,b,c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2+2c^2+4ab+4ac-2bc = 0$$

Consideremos $a=c=0$ y $b=x \Rightarrow b(w,w)=0$ con $w=(0,x,0)\ \forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0$

c) Calcular $M(b,\mathcal{B}')$ siendo $\mathcal{B}'=\{v_1+v_2, v_1-v_3, v_2\}$

Expresando $\mathcal{B}'$ en función de $\mathcal{B}$ tenemos:

$\mathcal{B}'=\{u_1,u_2,u_3\}$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = v_1+v_2 = (1,1,0)_{\mathcal{B}} \\ u_2 = v_1-v_3 = (1,0,-1)_{\mathcal{B}} \\ u_3 = v_2 = (0,1,0)_{\mathcal{B}} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}'=\{(1,1,0),(1,0,-1),(0,1,0)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M(b,\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 5 & 7 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7 En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ se considera la aplicación $b: \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$b(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx$$

a) comprueba que b es una forma bilineal.

Supongamos $p(x), p_1(x), p_2(x), q(x), q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ y $a, c \in \mathbb{R}$

- $b(ap_1(x)+cp_2(x), q(x)) = \int_0^1 (ap_1(x)+cp_2(x))q'(x)\,dx = a\int_0^1 p_1(x)q'(x)dx + c\int_0^1 p_2(x)q'(x)dx =$

  $= ab(p_1(x),q(x)) + cb(p_2(x),q(x))$

- $b(p(x), aq_1(x)+cq_2(x)) = \int_0^1 p(x)(aq_1(x)+cq_2(x))'\,dx = \int_0^1 p(x)[(aq_1(x))'+(cq_2(x))']dx =$

$= a\int_0^1 p(x)q_1'(x)\,dx + c\int_0^1 p(x)q_2'(x)dx = ab(p(x),q_1(x)) + cb(p(x),q_2(x))$

$\Rightarrow$ b es una forma bilineal.

b) Calcular $M(b,B)$ para $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$p(x)\cdot(1)'=0$	$p(x)\cdot(x)' = p(x)$	$p(x)(x^2)' = p(x)\cdot 2x$	$p(x)\cdot(x^3)' = p(x)\cdot 8x^2$
$a_{11} = 0$	$a_{12} = 1$	$a_{13} = 1$	$a_{14} = 1$
$a_{21} = 0$	$a_{22} = \frac{1}{2}$	$a_{23} = \frac{2}{3}$	$a_{24} = \frac{3}{4}$
$a_{31} = 0$	$a_{32} = \frac{1}{3}$	$a_{33} = \frac{1}{2}$	$a_{34} = \frac{3}{5}$
$a_{41} = 0$	$a_{42} = \frac{1}{4}$	a_{43} $\frac{2}{5}$	$a_{44} = \frac{1}{2}$

luego:

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 3/5 \\ 0 & 1/4 & 2/5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

c) Consideremos la descomposición de b como suma de una simétrica bs y una antisimétrica ba. Calcular $M(bs,B) + M(ba,B)$

$$bs(x,y) = \frac{1}{2}[b(x,y) + b(y,x)]$$

$a_{11} = 0$	$a_{12} = \frac{1}{2}$	$a_{13} = \frac{1}{2}$	$a_{14} = \frac{1}{2}$
$a_{21} = \frac{1}{2}$	$a_{22} = \frac{1}{2}$	$a_{23} = \frac{1}{2}$	$a_{24} = \frac{1}{2}$
$a_{31} = \frac{1}{2}$	$a_{32} = \frac{1}{2}$	$a_{33} = \frac{1}{2}$	$a_{34} = \frac{1}{2}$
$a_{41} = \frac{1}{2}$	$a_{42} = \frac{1}{2}$	$a_{43} = \frac{1}{2}$	$a_{44} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow M(bs,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$ba(x,y) = \frac{1}{2}[b(x,y) - b(y,x)]$$

$a_{11} = 0$	$a_{12} = \frac{1}{2}$	$a_{13} = 1/2$	$a_{14} = 1/2$
$a_{21} = -\frac{1}{2}$	$a_{22} = 0$	$a_{23} = 1/6$	$a_{24} = 2/8$
$a_{31} = -\frac{1}{2}$	$a_{32} = -1/6$	$a_{33} = 0$	$a_{34} = 1/10$
$a_{41} = -\frac{1}{2}$	$a_{42} = -2/8$	$a_{43} = -1/10$	$a_{44} = 0$

$$\Rightarrow M(ba,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/6 & 2/8 \\ -1/2 & -1/6 & 0 & 1/10 \\ -1/2 & -2/8 & -1/10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(ba,B) + M(bs,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/6 & 2/8 \\ -1/2 & -1/6 & 0 & 1/10 \\ -1/2 & -2/8 & -1/10 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 3/5 \\ 0 & 1/4 & 2/5 & 1/2 \end{pmatrix} = M(b,B)$$

d) Calcular b_S y b_A sobre una pareja cualquiera de polinomios en $\mathbb{R}_3[x]$.

Consideramos $p(x) = (a,b,c,d)_B$ y $q(x) = (a',b',c',d')_B$

$$b_S(p(x),q(x)) = (a,b,c,d)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \dots$$

$$b_A(p(x),q(x)) = (a,b,c,d)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/6 & 2/8 \\ -1/2 & -1/6 & 0 & 1/10 \\ -1/2 & -2/8 & -1/10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \dots$$

8. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ se considera la aplicación $b: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$b(A,C) = \text{traza}(A \cdot C)$$

a) Comprueba que b es una forma bilineal y simétrica

Consideramos $A, A_1, A_2, C, C_1, C_2 \in M_2(\mathbb{R})$ y $a, c \in \mathbb{R}$:

- $b(aA_1 + cA_2, C) = \text{traza}((aA_1+cA_2)\cdot C) = \text{traza}(aA_1C + cA_2C) =$
$= a\,\text{traza}(A_1C) + c\,\text{traza}(A_2C) = ab(A_1,C) + cb(A_2,C)$
- $b(A, aC_1 + cC_2) = \text{traza}(A(aC_1 + cC_2)) = \text{traza}(aAC_1 + cAC_2) =$
$= a\,\text{traza}(AC_1) + c\,\text{traza}(AC_2) = ab(A,C_1) + cb(A,C_2)$

$\Rightarrow$ b es una forma bilineal

Como para la traza solo nos interesa la diagonal, sabemos que el producto de las diagonales es el producto de cada elemento de la diagonal, es decir,

$$\begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & b^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \Rightarrow \text{traza}(AC) = \text{traza}(CA) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ b simétrica.

b) Calcular $M(b,\beta)$ para β la base usual de $M_2(\mathbb{R})$

$$\beta u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 0 \quad a_{13} = 0 \quad a_{14} = 0$

$a_{21} = 0 \quad a_{22} = 0 \quad a_{23} = 1 \quad a_{24} = 0$

$a_{31} = 0 \quad a_{32} = 1 \quad a_{33} = 0 \quad a_{34} = 0$

$a_{41} = 0 \quad a_{42} = 0 \quad a_{43} = 0 \quad a_{44} = 1$

$$\Rightarrow M(b,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Demuestra que si dos matrices cuadradas A y C son congruentes A es simétrica si y solo si lo es C. Utiliza este hecho para encontrar dos matrices A y C que sean semejantes y no sean congruentes. ¿Son dos matrices congruentes necesariamente semejantes?

- A y C congruentes $\Leftrightarrow$ $\exists P$ regular tal que $C = P^TAP$

Sabemos que si una matriz simétrica es congruente $\Rightarrow$ es congruente a una matriz diagonal de elementos $1, -1$ y 0.

Luego, si A o C es congruente, (supongamos C) esta es a la vez congruente a una matriz diagonal de elementos $1, -1, 0$ (Sylvester), que a su vez, esta matriz es congruente a A $\Rightarrow$ A simétrica

Por lo que A simétrica $\Leftrightarrow$ C simétrica

Para la segunda parte basta con tomar $A =$ una matriz no simétrica y B su matriz diagonal. A y B son semejantes, pero no congruentes, ya que B es simétrica y A no.

10 Sea ω_g la forma cuadrática asociada a una métrica g. Si sabemos que para dos vectores u y v se verifica que $\omega_g(u) = \omega_g(2v) = 2$ y $\omega_g(u+v) = 3$. ¿Cuánto vale $g(u+v, v)$?

- ω_g es una forma cuadrática de g
- g forma bilineal y métrica

$$f_p(x,y) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)\right]$$

$$g(u+v, v) = g(u,v) + g(v,v) = \frac{1}{2}\left[\omega_g(u+v) - \omega_g(u+v) - \omega_g(v)\right] + \omega_g(v) = \frac{3}{4}$$

11 Sea g la métrica en $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Escribe la expresión de la forma cuadrática ω_g asociada a g sobre cualquier $v \in \mathbb{R}^3$.

Φ es una forma cuadrática si dado la forma bilineal se verifica $\Phi(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b((x,y,z),(x,y,z))$

La forma más fácil de calcularlo es

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

Cuidado con las posiciones $xy = yx$!

Por lo que:

$\omega_g(x,y,z) = x^2 + z^2 + 4xy + 2zx + 4yz$ (Lo he sacado $\nearrow$, sino:)

$$\omega_g(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + z^2 + 4xy + 2zx + 4yz$$

b) Calcular el rango, la nulidad y el radical de g. ¿Es g degenerada?

Para calcular el rango de la métrica basta con calcular el rango de la matriz:

nulidad $= \dim(\mathrm{Rad}(g))$

$\mathrm{Rad}(g) = \{ v = (v_1, \dots, v_n) \in V \,/\, g(v) = b(v,u) = 0 \ \forall u \in V \}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mathrm{Rad}(g) \neq \{0\} \Rightarrow g \text{ es degenerada}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rg(g) = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Rad}(g)) = \text{nulidad}(g) = 1$$

Calculamos el radical de g:

$$\mathrm{Rad}(g) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{matrix} x+2y+z=0 \\ 2x+2z=0 \end{matrix} \right\} = L(\{(1,0,-1)\})$$

> $\mathrm{Rad}(g) = \{ u \in V \;/\; g(u,v)=0 \;\forall v \in V \}$
> Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V, el $\mathrm{Rad}(g)$ viene dado por:
> $\mathrm{Rad}(g) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \;/\; M(g,B) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) Encuentra una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(g,B)$ sea diagonal. Clasifica g como métrica.

El ejercicio equivale a encontrar una base ortogonal, es decir, una base de vectores ortogonales de forma que la matriz asociada a la métrica g respecto esa base es diagonal.

> Como la métrica es degenerada:
> $V = W \oplus \mathrm{Rad}(g)$
> suma ortogonal

Tenemos:

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus \mathrm{Rad}(g) = W \perp \mathrm{Rad}(g)$$

W es un subespacio suplementario al radical

La suma de un subespacio con el radical es ortogonal.

$W = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z=0\}$

Claramente, W es suplementario al radical.

Seleccionamos un vector de W tal que $g(u_i,u_i) \neq 0$, por ejemplo:

$u_1 = (1,0,0) \qquad g(u_1,u_1) = 1 \neq 0$

Creamos un subespacio generado por dicho vector y calculamos su ortogonal respecto g

$U = L(\{(1,0,0)\}) \qquad U^{\perp_{g_W}} = U^{\perp} \cap W$

subespacio ortogonal del subespacio U en la métrica g restringida a W.

$$U^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+2y+z=0 \}$$

vectores perpendiculares a u_1 respecto la métrica g

Por lo que:

Juntamos las ecuaciones cartesianas

$$U^{\perp_{g_W}} = U^{\perp} \cap W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z=0,\; x+2y+z=0 \} = L(\{(-2,1,0)\})$$

Luego, $B = \{ (1,0,0), (-2,1,0), (1,0,-1) \}$

vector seleccionado $\quad U^{\perp} \cap W \quad \mathrm{Rad}(g)$

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La métrica es degenerada ($\mathrm{Rad}(g) \neq \{0\}$), rango $=2$, nulidad $=1$, índice $=1$

(13) Sea ω la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\omega(x,y,z) = 2x^2+2y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$$

Encuentra una base β de $\mathbb{R}^3$ tal que si (a,b,c) son las coordenadas de un vector de v en esa base, $\omega(v) = a^2-b^2$.

→ Cuidado $4xy = 2xy+2yx$

$$M(\beta u,\omega) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\omega(v) = (a,b,c)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2a^2+2b^2+4ab+2c^2+4ac+4ab = a^2-b^2 =$$
$$= a^2+3b^2+2c^2+4ab+4ac+4ab$$

Pendiente

(14) Clasifica las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices respecto a la base usual vienen dadas, respectivamente, por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Decide también si cualquier par de matrices anteriores son congruentes

Para este ejercicio vamos a usar el criterio de Sylvester:

- g no degenerada $\Leftrightarrow \dim(V) = rg(g)$
- g semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ Índice $(g) = \{0\} \Leftrightarrow \det(A_k) \geq 0$
- g semidefinida negativa $\Leftrightarrow rg(g) =$ Índice $(g) \Leftrightarrow (-1)^k \det(A_k) \leq 0$
- g definida positiva $\Leftrightarrow \dim(V) = rg(g)$ y Índice $(g) = \{0\} \Leftrightarrow \det(A_k) > 0$
- g definida negativa $\Leftrightarrow \dim(V) = rg(g) =$ Índice $(g) \Leftrightarrow (-1)^k \det(A_k) < 0$
- g indefinida $\Leftrightarrow 0 <$ Índice $(g) < rg(g)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \cdot \det(A_1) = 1 > 0 \\ \cdot \det(A_2) = -4 < 0 \\ \cdot \det(A_3) = -17 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ indefinida y no degenerada}$$

$$C = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \cdot \det(C_1) = 14 > 0 \\ \cdot \det(C_2) = 24 > 0 \\ \cdot \det(C_3) = 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C \text{ definida positiva y no degenerada}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \cdot \det(D_1) = 3 > 0 \\ \cdot \det(D_2) = 8 > 0 \\ \cdot \det(D_3) = 20 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D \text{ definida positiva y no degenerada}$$

D y C son congruentes porque tienen el mismo tipo de métrica, por lo que serán congruentes a la misma matriz diagonal de elementos 1, -1 y 0.

(15) Estudia si las matrices

$$M=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}-3&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

pueden representar a una misma métrica sobre $\mathbb{R}^2$. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $N = P^T N P$.

Para ver si son congruentes veamos si las métricas son del mismo tipo:

$M=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ · $\det(A_1)=1>0$ · $\det(A_2)=-3<0$ $\Rightarrow$ Métrica indefinida y no degenerada

$N=\begin{pmatrix}-3&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ · $\det(A_1)=-3<0$ · $\det(A_2)=-5<0$ $\Rightarrow$ Métrica indefinida y no degenerada

Por lo que, son congruentes.

Pendiente

(16) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y para cada número real a fijo, se considera la métrica g_a asociada a la forma cuadrática dada por:

$$w_a(x,y,z) = x^2+y^2+8z^2+2axz-4ayz$$

Clasifica g_a según los valores del parámetro a.

$$M(B_u, w_a) = \begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&-2a\\a&-2a&8\end{pmatrix}$$

- $\det(A_1)=1>0$
- $\det(A_2)=1>0$
- $\det(A_3)=-5a^2+8=0 \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{8}{5}}$

Por lo que tenemos que:

- $a=\sqrt{\frac{8}{5}} = \det(A_3)=0 \Rightarrow$ Métrica semidefinida positiva y degenerada
- $-\sqrt{\frac{8}{5}} < a < \sqrt{\frac{8}{5}} \Rightarrow \det(A_3)>0 \Rightarrow$ Métrica definida positiva y no degenerada
- $a>\sqrt{\frac{8}{5}}$ ó $a<\sqrt{\frac{8}{5}} \Rightarrow \det(A_3)<0 \Rightarrow$ Métrica indefinida y no degenerada.

17 ¿ Existen números reales x, y, z no todos nulos tales que $x^2+y^2+z^2+2xy=0$? ¿ Y cumpliendo $2x^2+2y^2+2z^2+2xy=0$?

Para este tipo de ejercicios donde nos piden el conjunto de soluciones que verifican dicha ecuación, siendo esta una forma cuadrática, tenemos que estudiar la métrica asociada a cada forma.
Para ello, mirar el siguiente esquema:

Resumen del vídeo aclaratorio de este ejercicio

$\omega(x,y,z)=0 \quad g_\omega$

$C(g_\omega)=\{v \in \mathbb{R}^3 / \omega(v)=g_\omega(v,v)=0\}=$ Vectores luminosos $\cup \{0\}$

$\hookrightarrow$ Cono de luz de la métrica

Casos:

- g_ω definida positiva o negativa. Entonces $\omega(u)>0$ o $\omega(u)<0$ $\forall u \neq 0$, por lo que $C(g_\omega)=\{0\}$

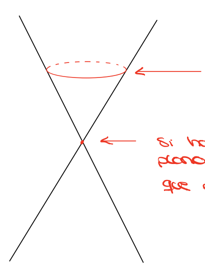
- g_ω semidefinida positiva o negativa. Entonces $\mathbb{R}^3=\mathrm{Rad}(g_\omega)\oplus W$.
Sabemos que la métrica restringida a W, la métrica es no degenerada.
Además, la métrica restringida a W solo puede ser definida positiva o negativa. Entonces, por el apt anterior, solo el vector $u=0\in W$ cumple la condición $\Rightarrow C(\omega_g)=\mathrm{Rad}(\omega_g)$

- g_ω indefinida:
Supongamos $rg(g_\omega)=3$, entonces tenemos dos casos:

1) índice $(g_\omega)=1$
$x^2+y^2-z^2=0$

2) índice $(g_\omega)=2$
$x^2-y^2-z^2=0$

Las soluciones de esta ecuación son geométricamente un cono infinito.



Si hacemos intersección con planos de la forma $z\neq 0$, entonces obtenemos circunferencias cada vez de radio mayor

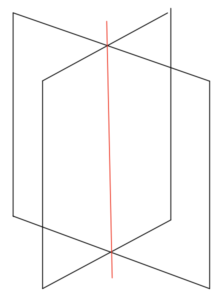
Si hacemos intersección con el plano $z=0$, obtenemos un punto que es el radical de la métrica

- Se denominan vectores de luz a $g(v,v)=0$ (Estarían en el cono)
- Se denominan vectores espaciales a $g(v,v)>0$ (Estarían fuera del cono)
- Se denominan vectores temporales a $g(v,v)<0$ (estarían dentro del cono)

Supongamos $rg(g_\omega)=2$, luego índice $(g_\omega)=1$
Si tomamos una base ortonormal nos queda diferencias de cuadrados

$$a^2-b^2=0$$

$$(a-b)(a+b)=0 \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Bigg\} = C(g_\omega) \quad \text{Son dos planos}$$



- Tenemos que $\omega(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xy$ por lo que:

$$M(B_u,\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Es fácil ver que el $rg(g_\omega) = 2 \Rightarrow$ Métrica degenerada
$\Downarrow$ $Dim(Rad(g_\omega)) = 1$

Calculemos el radical:

$$Rad(g_\omega) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ x+y=0,\ z=0 \right\} =$$

$$= L(\{(1,-1,0)\})$$

Consideremos $\mathbb{R}^3 = W \oplus Rad(g_\omega)$, siendo W un subespacio suplementario del radical.

Consideremos, por ejemplo, $W = L(\{(0,1,0),(0,0,1)\})$

Luego, consideramos la base $B = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$. Es fácil ver que esta base es ortonormal:

$$M(g_\omega, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Se ve que g_ω es semidefinida positiva y degenerada.

Según nuestro esquema, $C(g_\omega) = Rad(g_\omega) = L(\{(-1,-1,0)\})$

Conjunto de soluciones

- Vamos ahora con la segunda ecuación. Tenemos que $\omega(x,y,z) = 2x^2+2y^2+2z^2+2xy$

$$A = M(B_u, \omega_g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. Podemos ver que el $rg(g_\omega) = 3 \Rightarrow$ Métrica no degenerada

- $\det(A_1) = 2 > 0$
- $\det(A_2) = 3 > 0$
- $\det(A_3) = 6 > 0$

$\Rightarrow$ g_ω métrica definida positiva y no degenerada

Luego, según nuestro esquema, $C(g_\omega) = \{0\}$

(18) Calcula todas las soluciones en $\mathbb{R}^3$ de las ecuaciones:

a) $x^2+5y^2+z^2+4xy+2yz=0$

$$M(g_\omega, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \det(A_1) = 1 > 0 \\ \cdot \det(A_2) = 1 > 0 \\ \cdot \det(A_3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Métrica semidefinida positiva y degenerada}$$

Según nuestro esquema, en este caso la solución se trata del radical:

$$\mathrm{Rad}(g_\omega) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} x+2y = 0 \\ 2x+5y+z=0 \end{array} \right\} = L(\{(2,-1,1)\}) = C(g_\omega)$$

b) $3x^2+y^2-xy=0$

$$M(g_\omega, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \det(A_1) = 3 > 0 \\ \cdot \det(A_2) = \frac{11}{4} > 0 \\ \cdot \det(A_3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Métrica semidefinida positiva y degenerada}$$

Según nuestro esquema la solución es el radical:

$$\mathrm{Rad}(g_\omega) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} 3x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + y = 0 \end{array} \right\} = L(\{(0,0,1)\}) = C(g_\omega)$$

c) $x^2+z^2+4xy+2xz+4yz=0$

$$A = M(g_\omega, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \det(A_1) = 1 > 0 \\ \cdot \det(A_2) = -4 < 0 \\ \cdot \det(A_3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Indefinida y degenerada}$$

$\dim(\mathrm{Rad}(g_\omega)) = 1$

(19) Se considera la métrica $g : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p'(x) q'(x)\, dx$$

donde ' representa la derivada respecto de x.

a) Calcula el radical de g.

Comenzamos hallando la matriz de la métrica en la base usual:

$\cancel{p'(x)\cdot(1)'} \to 0$ $\qquad p'(x)(x)' = p'(x)$ $\qquad p'(x)(x^2)' = 2xp'(x)$

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 0 & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 2 & a_{23} = 0 \\ a_{31} = 0 & a_{32} = 0 & a_{33} = \frac{8}{3} \end{array} \Rightarrow M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Claramente se puede ver que el $rg(g) = 2$ y que es una métrica degenerada y semidefinida positiva.

$$Rad(g) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}_2[x] \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}_2[x] \Big/ \begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{8}{3} z = 0 \end{array} \right\}$$

b) Calcular el subespacio ortogonal a $\mathbb{R}_1[x]$ con respecto g.

Tomamos el subespacio vectorial $\mathbb{R}_1[x] = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 / z = 0 \} \subset \mathbb{R}_2[x]$ y calculamos su subespacio ortogonal.

> Sea $\mathcal{U}$ un subespacio vectorial de V, espacio vectorial métrico, se define:
> $\mathcal{U}^{\perp} = \{ v \in V \ / \ g(v,u) = 0 \ \ \forall u \in \mathcal{U} \}$. Además, sea (V, g) espacio vectorial métrico y $\mathcal{U}$ y W subespacios del mismo. Entonces se tiene:
>
> - $V^{\perp} = Rad(g)$, $\{0\}^{\perp} = V$
> - $W \subset \mathcal{U} \Rightarrow W^{\perp} \subset \mathcal{U}^{\perp}$
> - $W \subset \mathcal{U} \Rightarrow W^{\perp g_{\mathcal{U}}} = W^{\perp g} \cap \mathcal{U}$
> - $(\mathcal{U} + W)^{\perp} = \mathcal{U}^{\perp} \cap W^{\perp}$
>
> Además, si g es no degenerada:
>
> - $\dim(V) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{U}^{\perp})$ $\qquad$ · $V = \mathcal{U} \oplus W$, $W = \mathcal{U}^{\perp}$
> - $\dim(\mathcal{U}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{U}$ $\qquad$ · $g_{\mathcal{U}}$ no degenerada $\Leftrightarrow g_{\mathcal{U}}^{\perp}$
> - $(\mathcal{U} \cap W)^{\perp} = \mathcal{U}^{\perp} + W^{\perp}$
> - $(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$ es un espacio vectorial métrico no degenerado $\Leftrightarrow V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$

Volviendo al ejercicio, tenemos $\mathbb{R}_1[x] = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$

$$\mathbb{R}_1^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}_2[x] \Big/ g((1,0,0),(x,y,z)) = 0, \ g((0,1,0),(x,y,z)) = 0 \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}_2[x] \Big/ y = 0 \right\} =$$

$$= L(\{(1,0,0),(0,0,1)\})$$

$$g((1,0,0),(x,y,z)) = (1,0,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 8/3 z \end{pmatrix} = 0$$

$$g((0,1,0),(x,y,z)) = (0,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,1,0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y = 0 \Rightarrow L(\{(1,0,0),(0,0,1)\})$$

c) Encuentra una base ortogonal para g. La base usual ya es ortogonal

20) Se considera la métrica $g: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(A,C) = tr(A \cdot C^t)$$

a) Prueba que g es no degenerada.

Comenzamos calculando la matriz de la métrica respecto a la base usual:

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$a_{11} = 1$	$a_{12} = 0$	$a_{13} = 0$	$a_{14} = 0$
$a_{21} = 0$	$a_{22} = 1$	$a_{23} = 0$	$a_{24} = 0$
$a_{31} = 0$	$a_{32} = 0$	$a_{33} = 1$	$a_{34} = 0$
$a_{41} = 0$	$a_{42} = 0$	$a_{43} = 0$	$a_{44} = 1$

$$\Rightarrow M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos ver claramente que el $rg(g) = 4 \Rightarrow g$ no degenerada.

g es una métrica definida positiva y no degenerada.

b) Calcula $A_2(\mathbb{R})^{\perp}$, siendo $A_2(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices antisimétricas

$$A_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A_2(\mathbb{R})^{\perp} = \left\{ (x,y,z,t) \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, g((0,-1,1,0),(x,y,z,t)) = (0,-1,1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, -y+z=0 \right\} = L(\{(0,1,1,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\})$$

c) Encuentra una base ortogonal para g formada por matrices simétricas y antisimétricas.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$a_{11} = 1$	$a_{12} = 0$	$a_{13} = 0$	$a_{14} = 0$
$a_{21} = 0$	$a_{22} = 2$	$a_{23} = 0$	$a_{24} = 0$
$a_{31} = 0$	$a_{32} = 0$	$a_{33} = 1$	$a_{34} = 0$
$a_{41} = 0$	$a_{42} = 0$	$a_{43} = 0$	$a_{44} = 2$

$$\Rightarrow M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

21) Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Clasifica la métrica g_a según el valor de a. En el caso $a = -1$ calcula la forma cuadrática asociada y encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $z = 0$.

- $\det(A_1) = a$
- $\det(A_2) = a$
- $\det(A_3) = -3a$

Tenemos entonces:

- $a = 0 \Rightarrow rg(g_a) = 2$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} -\det(A_1) = 0 \\ -\det(A_2) = 0 \\ -\det(A_3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Métrica degenerada e indefinida

- $a > 0 \Rightarrow rg(g_u) = 3$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} -\det(A_1) > 0 \\ -\det(A_2) > 0 \\ -\det(A_3) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Métrica no degenerada e indefinida

- $a < 0 \Rightarrow rg(g_u) = 3$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} -\det(A_1) < 0 \\ -\det(A_2) < 0 \\ -\det(A_3) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Métrica no degenerada e indefinida

Para el $a = -1$ tenemos $M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculamos la forma cuadrática asociada:

$$\omega(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x^2 + y^2 + z^2 + 4yz$$

- Definimos $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z = 0\} = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$

Por lo que:

$$U^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; g((1,0,0),(x,y,z)) = 0 \;,\; g((0,1,0),(x,y,z)) = 0\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{array}{l} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right\} = L(\{(0,-2,1)\})$$

$$g((1,0,0),(x,y,z)) = (1,0,0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1,0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x = 0$$

$$g((0,1,0),(x,y,z)) = (0,1,0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,1,2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y + 2z = 0$$

22 Calcula el índice, el rango y clasifica, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la métrica $g_a \in \mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por:

$$\omega_a(x,y,z) = x^2 + y^2 + az^2 + 2axz - 4ayz$$

Comenzamos hallando la matriz de la métrica:

$$M(g_a, B_u) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -2a & a \\ 0 & 1 & -2a \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \end{array}$$

- $\det(A_1) = 1$
- $\det(A_2) = 1$
- $\det(A_3) = a + 4a^3 - a^2$

$a(1-a+4a^2)=0$

$a=0$ No tiene solución

Entonces tenemos:

- $a=0$ $\left.\begin{array}{l} \det(A_1)=1>0 \\ \det(A_2)=1>0 \\ \det(A_3)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Métrica semidefinida positiva y degenerada, $rg(g)=2$, índice $(g)=0$

- $a<0$ $\left.\begin{array}{l} \det(A_1)=1>0 \\ \det(A_2)=1>0 \\ \det(A_3)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Métrica indefinida y degenerada, $rg(g)=2$, índice $(g)=1$

- $a>0$ $\left.\begin{array}{l} \det(A_1)=1>0 \\ \det(A_2)=1>0 \\ \det(A_3)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Métrica definida positiva y no degenerada, $rg(g)=3$, índice $(g)=0$

23 Sea g la métrica de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base usual es

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentra una base ortonormal para g del plano de ecuaciones $x+y=0$, $z+t=0$.

Comenzamos definiendo el siguiente subespacio:

$$U=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;/\; \begin{array}{l} x+y=0 \\ z+t=0 \end{array}\right\} = L(\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\})$$

Calculamos la matriz de la métrica restringida a dicha base:

$$M(g_U, B_U)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}=g((1,-1,0,0),(1,-1,0,0)) = (1,-1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=2$$

g es métrica $\Rightarrow$ Matriz simétrica

$$a_{12}=a_{21} = g((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)) = (1,-1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=2$$

$$a_{22}= g((0,0,1,-1),(0,0,1,-1)) = (0,0,1-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=3$$

Tenemos dos formas de hacer este ejercicio:

- <u>1º forma</u>:

$$M(g_u, B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Métrica no degenerada}$$

Como la métrica es no degenerada:

En caso de que la métrica hubiese sido degenerada:
1) Calcular $Rad(g)$
2) $\mathbb{R}^4 = Rad(g) \oplus W$

1) Tomamos un vector no luminoso

$$\boxed{v \in V \text{ no es luminoso} \Leftrightarrow g(v,v) \neq 0}$$

Tomamos $u_1 = (1,-1,0,0)$ y definimos $U_1 = L(\{(1,-1,0,0)\})$

$g(u_1, u_1) = 2$

2) calculamos el ortogonal de U_1 respecto de g

Métrica restringida

$$U_1^{\perp g_u} = U \cap U_1^{\perp g}$$

Métrica de todo el espacio

$$U_1^{\perp g} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, g((1,-1,0,0),(x,y,z,t)) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, (1,-1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x - y - z - 3t = 0 \right\}$$

Por lo que tendremos:

$$U_1^{\perp g_u} = U_1^{\perp g} \cap U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{array}{l} x+y=0 \\ z+t=0 \\ x-y-z-3t=0 \end{array} \right\} = L(\{(1,-1,-1,1)\})$$

Por lo que:

$\beta' = \{(1,-1,0,0),(1,-1,-1,1)\}$ es una base ortogonal

3) Ortonormalizar la base

$g(u_1, u_1) = 2$

$$g((1,-1,-1,1),(1,-1,-1,1)) = (1,-1,-1,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Por lo que la base que buscamos es:

$$\beta' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \frac{1}{\sqrt{1}}(1,-1,-1,1) \right\}$$

Hay que multiplicar cada vector por $\frac{1}{\sqrt{|g(v,v)|}}$

· 2° manera:

1) Tomamos la matriz de la métrica restringida
2) $A \cdot M(g_u, B_u) \cdot A^T$, donde A es la matriz identidad con las operaciones para escalonar $M(g_u, B)$
3) Repetir hasta obtener matriz diagonal

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Multiplicar por $\frac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1}} \end{pmatrix}}_{B^T}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1}} \end{pmatrix}}_{B}$$

Así tendríamos la matriz de la métrica en una base de Sylvester. Para sacar los vectores de la base, simplemente multiplicamos las matrices de paso $B_1 \cdot B_2$ (las traspuestas no)

(24) En $\mathbb{R}^3$ se considera el plano de ecuación $y-z=0$ y la recta $W = L(\{(1,1,-1)\})$. Encuentra la expresión de la métrica g en $\mathbb{R}^3$ cuyo radical sea W y cuya restricción sea Lorentziana.

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y-z=0\} = L(\{(1,0,0),(0,1,1)\})$
$W = L(\{(1,1,-1)\})$, g en $\mathbb{R}^3$
$Rad(g) = W$, g_u Lorentziana

Métrica Lorentziana:
· Rad (g) = máximo posible
· Índice (g) = 1

1) Tomar base adaptada a los subespacios
$\mathbb{R}^3 = W \oplus U$
$B = \{(1,0,0),(0,1,1)(1,1,-1)\}$

2) Escribir la matriz de la métrica g en B para que cumpla las condiciones que queremos

Métrica Lorentziana

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Radical

La pasamos a la base usual:

$$M(g, B_u) = M(B_u \longrightarrow B)^T \, M(g,B) \, M(B_u \longrightarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(B_u \to B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Escribo B en función de B_u

25 En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de polinomios de grado menor o igual que dos, y para cada número real m fijo, se considera la métrica g_m dada por:

$$g_m(p(x), q(x)) = p(m)q(m)$$

a) Calcula una base del radical de g_m, una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g_m)$, el rango y el índice de g_m. Clasifica g_m.

Comenzamos calculando la matriz asociada a la métrica en $B_u = \{1, x, x^2\}$

$$\left.\begin{array}{lll} p(x)=1 & p(x)=x & p(x)=x^2 \\ a_{11} = 1 & a_{12} = m & a_{13} = m^2 \\ a_{21} = m & a_{22} = m^2 & a_{23} = m^3 \\ a_{31} = m^2 & a_{32} = m^3 & a_{33} = m^4 \end{array}\right\} \Rightarrow M(g_m, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m^3 \\ m^2 & m^3 & m^4 \end{pmatrix}$$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m^3 \\ m^2 & m^3 & m^4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(g_m) = 1 \Rightarrow \dim(Rad(g_m)) = 2$$

$$Rad(g_m) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m^3 \\ m^2 & m^3 & m^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + my + m^2 z = 0 \right\} =$$

$$= L(\{(m, -1, 0), (m^2, 0, -1)\})$$

$\mathbb{R}^3 = Rad(g_m) \oplus W$. Definimos $W = \{(1,0,0)\}$

Por lo que tenemos una base ortogonal $B = \{(1,0,0), (m,-1,0), (m^2,0,-1)\}$

La ortonormalizamos:

$g((1,0,0),(1,0,0)) = 1$. Las otras son del radical, luego:

$$M(g_m, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_m \text{ métrica semidefinida positiva y degenerada}$$

b) Determina si para $m = 1$ existe una base B de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $M(g_1, B)$ es la matriz cuyas entradas son todas iguales a 1. Ya resuelto.

26 En $\mathbb{R}^2$ se considera las métricas g_1, g_2 y g_3 que vienen representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices.

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Son los planos $(\mathbb{R}^2, g_1)$, $(\mathbb{R}^2, g_2)$, $(\mathbb{R}^2, g_3)$ isométricos entre sí? En caso afirmativo construye una isometría.

Dos espacios son isométricos $\Leftrightarrow$ el espacio tiene misma dimensión, las métricas tienen el mismo rango y el mismo índice.

Comenzamos clasificando las métricas:

$g_1|$
- $\mathrm{Det}(G_{11}) = 4 > 0$
- $\mathrm{Det}(G_{12}) = 7 > 0$

g_1 es definida positiva y no degenerada:
- $rg(g_1) = 2$
- Índice $(g_1) = 0$

$g_2|$
- $\mathrm{Det}(G_{21}) = -4 < 0$
- $\mathrm{Det}(G_{22}) = -9 < 0$

g_2 indefinida y no degenerada:
- $rg(g_2) = 2$
- índice $(g_2) = 2$

$g_3|$
- $\mathrm{Det}(G_{31}) = 3 > 0$
- $\mathrm{Det}(G_{32}) = 10 > 0$

g_3 definida positiva y no degenerada:
- $rg(g_3) = 2$
- índice $(g_3) = 0$

Luego, solo pueden ser isométricos $(\mathbb{R}^2, g_1)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}_{P_1^T} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{P_1} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{7}} \end{pmatrix}}_{P_2^T} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{7}} \end{pmatrix}}_{P_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}}$

Podemos calcularlas a ojo porque sabemos que la métrica es definida positiva

Para sacar la base ortonormal multiplicamos todas las matrices de paso

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{7}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{1}{2\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

Vectores (por columnas) de la base ortonormal, expresados en función de la primera base que teníamos

$$\mathcal{B}_o^{g_1} = \left\{ (1/2, 0), \left(-\frac{1}{2\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right) \right\}$$

Repetimos el proceso con la segunda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para definir la isometría consideramos la aplicación lineal que lleva una base a otra

$$f : (\mathbb{R}^2, g_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, g_3)$$
$$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) \longmapsto \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$
$$\left(-\tfrac{1}{2\sqrt{7}}, \tfrac{2}{\sqrt{7}}\right) \longmapsto \left(\tfrac{1}{2\sqrt{6}}, \tfrac{3}{2\sqrt{6}}\right)$$

También es válida:

$$f (\mathbb{R}^2, g_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, g_3)$$
$$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) \longmapsto \left(\tfrac{1}{2\sqrt{6}}, \tfrac{3}{2\sqrt{6}}\right)$$
$$\left(-\tfrac{1}{2\sqrt{7}}, \tfrac{2}{\sqrt{7}}\right) \longmapsto \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

Como ambos tienen la misma métrica, da igual como emparejemos los vectores. En caso contrario, hay que ordenarlos para que se conserve

(27) En $\mathbb{R}^4$ se considera g la métrica representada, en la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcular su radical

$$\mathrm{Rad}(g) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle/\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle/\; \begin{array}{l} x-y+z-t=0 \\ -x+2y-z=0 \\ x-y+3z-3t=0 \end{array} \right\} = L(\{(1,1,1,1)\})$$

b) Calcular una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \overset{P_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{P_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{P_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{P_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g es una métrica semidefinida positiva y degenerada

Hallamos la base ortonormal:

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = \left\{ (1,0,0,0), (1,1,0,0), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (1,1,1,1) \right\}$$

c) Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1=0$ con la métrica inducida por g.

$$U = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x=0\} = \mathcal{L}(\{(0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\})$$

Podemos expresar: $\mathbb{R}^4 = U \oplus Rad(g)$

Tomamos un vector no luminoso:

$u_1=(0,1,0,0)$ $\qquad U_1=\mathcal{L}(\{(0,1,0,0)\})$

$$U_1^{\perp g_U} = U_1^{\perp g}\cap U$$

$$U_1^{\perp g} = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, g((0,1,0,0),(x,y,z,t))=0\} =$$

$$= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, (0,1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\} =$$

$$= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, -x+2y-z=0\}$$

Por lo que:

$$U_1^{\perp g_U} = U_1^{\perp g}\cap U = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{matrix} -x+2y-z=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}(\{(0,1,2,0),(0,0,0,1)\})$$

Tomamos ahora otro vector no luminoso de $U_1^{\perp g_U}$:

$u_2=(0,0,0,1)$ $\qquad U_2=\mathcal{L}(\{(0,0,0,1)\})$

$g(u_2,u_2)=4\neq 0$

$$U_2^{\perp g_{U_1^\perp}} = U_1^{\perp g_U}\cap U_2^{\perp g_U} = U_1^{\perp g}\cap U_2^{\perp g}\cap U$$

$$U_2^{\perp} = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, (0,0,0,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} =$$

$$= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, -x-3y+4t=0\}$$

$$U_2^{\perp g_{U_1^\perp}} = U_2^{\perp g}\cap U_1^{\perp g}\cap U = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{matrix} -x-3y+4t \\ -x+2y-z=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}(\{(0,2,4,3)\})$$

Por lo que: $\beta'' = \{(0,1,0,0),(0,0,0,1),(0,2,4,3)\}$. ortonormalizando:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,0),\ \frac{1}{2}(0,0,0,1),\ \frac{1}{2}(0,2,4,3)\right\}$$

(28) Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por:

$$\omega_a(x,y,z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy$$

a) Calcular índice, rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

Comenzamos calculando la matriz asociada a la métrica respecto βu.

$$M(\omega_a, \beta u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

- $\det(A_1) = a$ $\qquad a = 0$
- $\det(A_2) = a^2 - 1$ $\qquad a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$
- $\det(A_3) = a^2(a-1) - (a-1) = a^3 - a^2 - a + 1$ $\qquad a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

	-1		0		1	
$\det(A_1) < 0$		$\det(A_1) < 0$		$\det(A_1) > 0$		$\det(A_1) > 0$
$\det(A_2) > 0$		$\det(A_2) < 0$		$\det(A_2) < 0$		$\det(A_2) > 0$
$\det(A_3) < 0$		$\det(A_3) < 0$		$\det(A_3) > 0$		$\det(A_3) > 0$
	$\det(A_1) < 0$		$\det(A_1) = 0$		$\det(A_1) > 0$	
	$\det(A_2) = 0$		$\det(A_2) < 0$		$\det(A_2) = 0$	
	$\det(A_3) = 0$		$\det(A_3) > 0$		$\det(A_3) = 0$	

Por lo que:

	$rg(g_a)$	$índice(g_a)$
$a \in]-\infty, -1[\Rightarrow g_a$ no degenerada y definida negativa	3	3
$a = -1 \Rightarrow g_a$ degenerada y semidefinida negativa.	2	1
$a \in]-1, 0[\Rightarrow g_a$ indefinida y no degenerada	3	2
$a = 0 \Rightarrow g_a$ indefinida y no degenerada	3	2
$a \in]0, 1[\Rightarrow g_a$ indefinida y no degenerada	3	2
$a = 1 \Rightarrow g_a$ degenerada y semidefinida positiva	1	0
$a \in]1, +\infty[\Rightarrow g_a$ no degenerada y definida positiva	3	0

b) En caso de $a = -1$ calcula una base ortonormal para g_{-1}

Como la métrica es degenerada, calculamos el radical:

$$Rad(g_{-1}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x = y \\ z = 0 \end{matrix} \right\} = L(\{(1,1,0)\})$$

Podemos:

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus Rad(g_{-1}) \qquad W = L(\{(1,0,0), (0,0,1)\})$$

$u_1 = (1,0,0)$ no lumínoso $\qquad U_1 = L(\{u_1\})$

$g_{-1}(u_1, u_1) = -1$

$$U_1^{\perp g_{-1} W} = U_1^{\perp g_{-1}} \cap W$$

$$U_1^{\perp g_{-1}} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ (1,0,0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y \right\}$$

$$U_1^{\perp g_{-1}} = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; \begin{array}{l} x=y \\ y=0 \end{array} \right\} = L(\{(0,0,1)\})$$

Por lo que una base ortogonal será $\{(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$

La ortonormalizamos:

$$\begin{array}{l} g((1,0,0),(1,0,0)) = -1 \\ g((0,0,1),(0,0,1)) = -2 \\ g((1,1,0),(1,1,0)) = 0 \end{array} \Rightarrow B = \left\{ \frac{1}{\cancel{\sqrt{|-1|}}^{\,1}}(1,0,0),\ \frac{1}{\sqrt{|-2|}}(0,0,1),\ \frac{1}{\cancel{\sqrt{0}}}(1,1,0) \right\}$$

se tenía como 1

c) En el caso de $a=2$, encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $y-2z=0$

$$U = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; y-2z=0\} = L(\{(1,0,0),(0,2,1)\})$$

$$U^{\perp} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; g((1,0,0),(x,y,z))=0,\ g((0,2,1),(x,y,z))=0\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; \begin{array}{l} -2x+y=0 \\ 2x-4y+z=0 \end{array} \right\} = L(\{(1,2,6)\})$$

d) En el caso de $a=0$, ¿Es posible encontrar dos vectores luminosos linealmente independientes?

Para $a=0 \Rightarrow M(g_0, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,0,0),(0,1,0)$ son vectores luminosos l.i.

e) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-1})$ isométricos? ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_0)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{2}})$ isométricos? Halla, si es posible la isometría

- $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-1})$ no son isométricos, ya que tienen distinto rango y distinto índice.
- $(\mathbb{R}^3, g_0)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{2}})$ si son isométricos (mismo rango, mismo índice, misma métrica...)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\overset{P_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\overset{P_2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\overset{P_3}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_0 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q_1} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q_2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow B_{1/2} = \left\{(\sqrt{2},0,0), \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), (0,0,\sqrt{2})\right\}$$

Definimos $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \longmapsto (\sqrt{2}, 0, 0)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \longmapsto \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$$

$$(0, 0, 1) \longmapsto (0, 0, \sqrt{2})$$

2a En $\mathbb{R}^3$ sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$ y $W = L(\{(1,-1,1)\})$. Calcula, si es posible, una métrica g y la expresión matricial $M(g, B_u)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $Rad(g) = U$ y $g|_W$ es definida positiva

$B = \{(1,-1,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\qquad M(g, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = M(g, B_u)$$

b) $Rad(g) = W$ y $g|_U$ definida negativa

$B = \{(0,1,0), (0,0,1), (1,-1,1)\}$ $\qquad M(g, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M(g, B_u)$$

c) $U^{\perp} = U$

Hacemos que U sea el radical

$B = \{(1,-1,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\qquad M(g, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = M(g, B_u)$$

d) $W^{\perp} = W$ y g no degenerada

e) $U^{\perp} = W$, g no degenerada e índice $(g) = 2$. Si esta métrica existe, da una base ortonormal para $(\mathbb{R}^3, g)$ y (U, g_U)

(30) Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) ¿Es bilineal la aplicación $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g((x,y),(x',y')) = xy$?

Suponemos $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ y $a, b \in \mathbb{R}$:

- $g((au_1+bu_2, v)) = (au_1+bu_2)v = au_1v + bu_2v = a\,g(u_1,v) + b\,g(u_2,v)$
- $g((u, av_1+bv_2)) = u(av_1+bv_2) = a\,uv_1 + b\,uv_2 = a\,g(u,v_1) + b\,g(u,v_2)$

$\Rightarrow$ g es una aplicación bilineal.

b) Toda forma bilineal $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es de la forma $g(x,y) = axy$ con $a \in \mathbb{R}$