WUOLAH

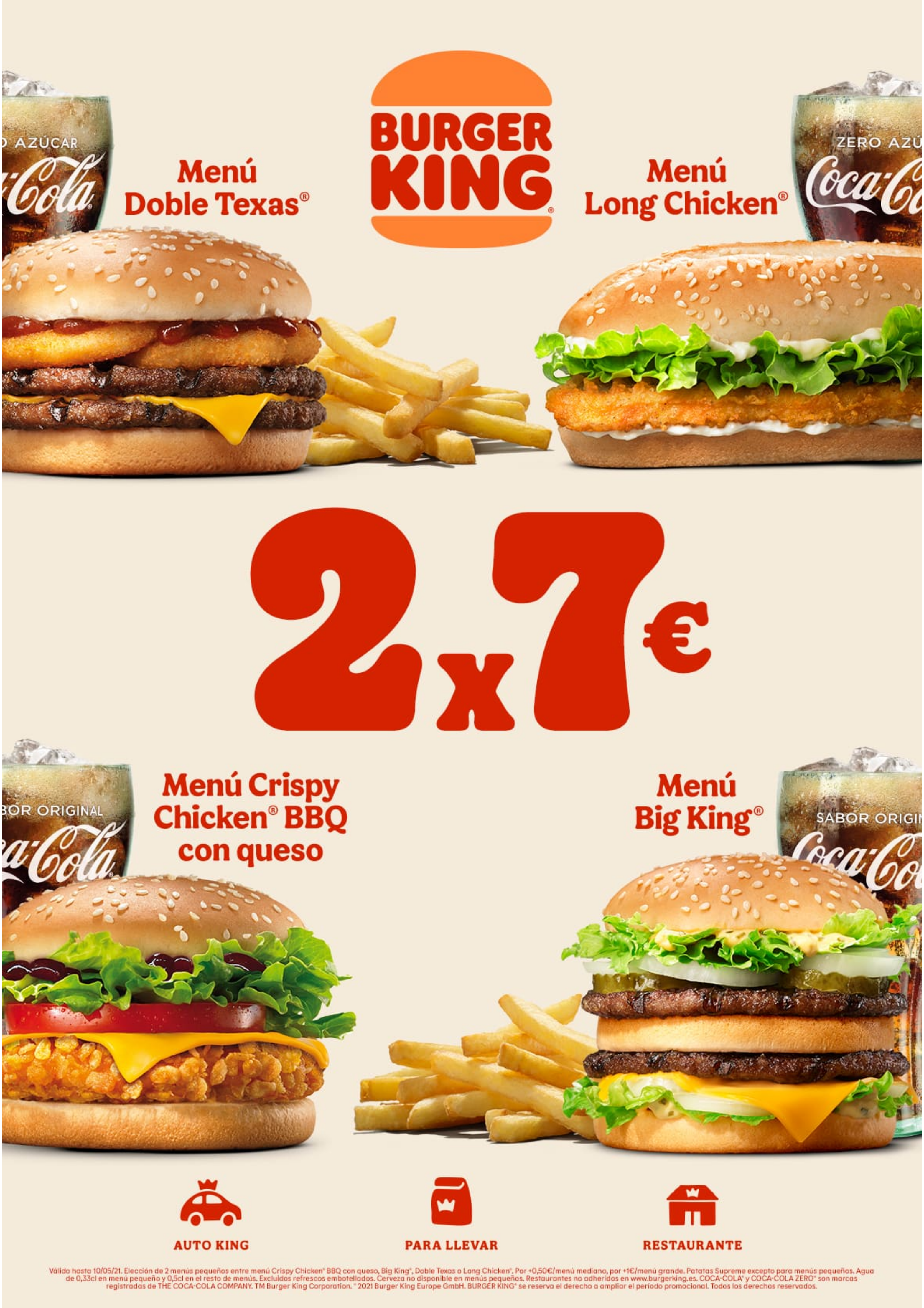
Relacion1-Resuelta.pdf

ppicky

Geometría II

1º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada


BURGER KING
Menú Doble Texas®
Menú Long Chicken®
2x7€
Menú Crispy Chicken® BBQ con queso
Menú Big King®
AUTO KING
PARA LLEVAR
RESTAURANTE
Válido hasta 10/05/21. Elección de 2 menús pequeños entre menú Crispy Chicken® BBQ con queso, Big King®, Doble Texas o Long Chicken®. Por +0,50€/menú mediano, por +1€/menú grande. Patatas Supreme excepto para menús pequeños. Agua de 0,33cl en menú pequeño y 0,5cl en el resto de menús. Excluidos refrescos embotellados. Cerveza no disponible en menús pequeños. Restaurantes no adheridos en www.burgerking.es. COCA-COLA® y COCA-COLA ZERO® son marcas registradas de THE COCA-COLA COMPANY. TM Burger King Corporation. © 2021 Burger King Europe GmbH. BURGER KING® se reserva el derecho a ampliar el periodo promocional. Todos los derechos reservados.

Geometría II. Relación de problemas 1

Tema 1: Diagonalización de endomorfismos

Curso 2015-16

1. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tal que $f \circ f = -I_V$. Demuestra que f no tiene valores propios y, por tanto, no es diagonalizable. ¿Se puede llegar a la misma conclusión si V es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$? Concluye que el endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $f(x,y) = (y,-x)$ no es diagonalizable.

2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $f \circ f = rI_V$. Demuestra que los únicos valores propios posibles de f son $\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$.

3. Prueba que toda matriz cuadrada de orden 2 con coeficientes reales simétrica o con determinante negativo es diagonalizable. ¿Es cierto que todos los automorfismos de $\mathbb{R}^2$ son diagonalizables?

4. Sea $f: V \to V$ un endomorfismo de un plano vectorial tal que $\mathrm{nul}(f) = 1$ y se cumple $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Demuestra que f es diagonalizable.

5. En el espacio $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{R}$ se define el endomorfismo $f: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ como $f(p(x)) = xp'(x)$, donde $p'(x)$ representa la derivada de $p(x)$ con respecto a x. Calcula los valores propios y los subespacios propios de f. Encuentra, si es posible, una base de $\mathbb{R}_n[x]$ formada por vectores propios de f.

6. Estudia si las siguientes matrices con coeficientes reales son diagonalizables:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analiza también si cualesquiera dos matrices de las de arriba son semejantes.

7. Consideremos el endomorfismo $f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b+c \\ 2a-2c & 4d \end{pmatrix}.$$

¿Es f diagonalizable? En caso de serlo, proporciona una base de vectores propios.

8. Estudia si la siguiente matriz con coeficientes reales es semejante a una matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. En el espacio vectorial real $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales consideramos la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

y el endomorfismo $f : S_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R})$ tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores propios de f. Discute si existe una base de $S_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de f. Calcula los subespacios propios de f y encuentra una base de cada uno.

10. Estudia para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la matriz de coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -a & a \\ a+2 & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Para dichos valores, encuentra P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

11. Dada la matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

se pide lo siguiente:

a) Estudia si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

b) Calcula A^6 y A^{-4}.

c) ¿Existe una matriz cuadrada C con coeficientes reales tal que $C^2 = A$?

12. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}.$$

Se pide lo siguiente:

a) ¿Para qué valores de a hay un valor propio de f con multiplicidad algebraica 3?

b) Estudia para qué valores de a el endomorfismo f es diagonalizable.

c) Para $a = 1$ y $a = 2$ encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f.

13. Se considera la siguiente matriz cuadrada con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix},$$

donde a y b son n˙meros reales con $a \geq b$. Se pide lo siguiente:

a) Calcula el polinomio característico y los valores propios de A.

b) Calcula las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de A. Estudia cuando A es diagonalizable.

c) En los casos en los que A sea diagonalizable, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

14. Sea V un espacio vectorial real tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f: V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

a) $f(u) = u$, con $u = 6v_1 + 2v_2 + 5v_3$.

b) $U = \{v \in V \,/\, x + 6y - 3z = 0\}$ es un subespacio propio de f. Aquí x, y, z representan las coordenadas de v con respecto a B.

c) La traza de f es 5.

Calcula los valores propios de f y la matriz $M(f,B)$.

15. Sea V un espacio vectorial real tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f: V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

a) $f(v_1) = 3v_1 + 2v_2 + 2v_3, \quad f(v_2) = 2v_1 + 2v_2.$

b) $M(f,B)$ es simétrica.

c) El vector $v = 2v_1 - 2v_2 - v_3$ está en el núcleo de f.

Calcula $M(f,B)$ y estudia si f es diagonalizable. En caso afirmativo, da una base B' de V tal que $M(f,B')$ sea diagonal.

16. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in M_2(\mathbb{K})$. Definimos $F_A : M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$ como $F_A(X) = AX$.

   a) Prueba que F_A es un endomorfismo de $M_2(\mathbb{K})$. Calcula la matriz que representa a F_A en la base usual de $M_2(\mathbb{K})$.

   b) Demuestra que el polinomio característico de F_A coincide con $p_A(\lambda)^2$.

   c) Prueba que si A es diagonalizable, entonces F_A también lo es.

17. Discute de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Si $f : V \to V$ es un endomorfismo diagonalizable, entonces el endomorfismo traspuesto $f^t : V^* \to V^*$ también es diagonalizable.

   b) La suma de dos valores propios de un endomorfismo es siempre un valor propio del mismo endomorfismo.

   c) Si A es diagonalizable, entonces A^n también lo es para cada $n \in \mathbb{Z}$.

   d) Si una matriz de orden dos es singular, entonces es diagonalizable.

   e) Si el polinomio característico de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es $(1-\lambda)(1+\lambda^2)$ entonces f no es diagonalizable.

   f) Si dos endomorfismos son diagonalizables y tienen los mismos valores propios, entonces son iguales.

   g) Toda matriz cuadrada regular es diagonalizable.

   h) La suma y el producto de matrices diagonalizables es una matriz diagonalizable.

   i) Si un endomorfismo f de un espacio vectorial V cumple $f \circ f = f$, y 0 no es un valor propio de f, entonces $f = I_V$.

   j) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + 2z = 0\}$, y tal que $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 13$ son valores propios de f. Entonces, f es diagonalizable.

   k) Si dos matrices tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico, entonces son semejantes.

   l) Un endomorfismo diagonalizable puede ser diagonalizado en varias bases diferentes.

RELACIÓN EJERCICIOS:

6 Estudiar si las ss. matrices con coefs reales son diagonalizables.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)^3 + 2 + 1+\lambda + 1+\lambda + 1+\lambda = -(1+\lambda)^3 + 5 + 3\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - \cancel{3\lambda} - 1 + \cancel{3\lambda} + 5 = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 =$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & & & & \\ \hline & -1 & -4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+4) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2.$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \longrightarrow a_{\lambda_1} = 1.$$
$$\lambda_2 = -2 \longrightarrow a_{\lambda_2} = 2.$$

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - \lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

dimensión será como mucho a_λ $\Rightarrow$ en este caso sólo puede ser 1.

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ \cancel{x+y-2z=0} \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} -2x+y-x+2y=0 \\ z=-x+2y \\ -\cancel{3}x+\cancel{3}y=0 \\ x=y \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} y=x \\ z=x \end{array}\right\} = \{(x,x,x) \,/\, x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= L((1,1,1))$$

$$g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 1.$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x-y\}$$

$$= \{ (x,y,-x-y),\ x,y \in \mathbb{R} \} = L\left(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}\right)$$

$$(x,y,-x-y) = x\underbrace{(1,0,-1)}_{*'} + y\underbrace{(0,1,-1)}_{*}$$

$*, *'$ son L.indeps

$$g_{\lambda_2} = \dim_K V_{\lambda_2} = 2$$

Como las multiplicidades geométrica y algebraica coinciden, A es diagonalizable.

Las multiplicidades suman 3 $\Rightarrow$ Tenemos una matriz diagonalizable.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B') = M(1_V, B, B')\, M(f, B)\, \underbrace{M(1_V, B', B)}_{=P}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{|P|} \mathrm{Adj}(P^t)$$

$$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Adj}(P^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(P) = \cdot 1$

$$\hookrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

25/2/16.

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable ya que es diagonal.

$\lambda_1 = 1 \qquad a_{\lambda_1} = g_{\lambda_1} = 1$

$\lambda_2 = -1 \qquad a_{\lambda_2} = g_{\lambda_2} = 2$

- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

triangular

$P_D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)^2 = (\lambda-1)(\lambda+1)^2$

$\lambda_1 = 1 \longrightarrow a_{\lambda_1} = 1 = g_{\lambda_1} \qquad 1 \leq g_{\lambda_1} \leq a_{\lambda_1} = 1$

$\lambda_2 = -1 \longrightarrow a_{\lambda_2} = 2 \neq g_{\lambda_2} = 1.$

La suma de las multiplicidades algebraicas es 3 que es la dimensión de la matriz pero faltaría ver que las mult. algebraica y geométrica coinciden para ver que es diagonalizable.

$V_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (D - \lambda_2 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \overset{\circledast}{=}$

El rango es 2 y la dimensión del subespacio es $3 - rg = 1$.

$\dim V_{\lambda_2} = 1 \Rightarrow g_{\lambda_2} = 1 \neq a_{\lambda_2} \Rightarrow D$ no es diagonalizable

No nos lo piden en el ejercicio:

$\circledast$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} x=0 \\ z=0 \end{matrix}\} = \{(0,y,0) / y \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,-1,0)\})$.

$V_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} =$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} -2y+z=0 \\ -2z=0 \end{matrix}\right\} = \{(x,0,0), x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,0)\})$.

Como D no es diagonalizable y A y B sí lo son $\Rightarrow$ D no es semejante a A ni a B.

A y G no son semejantes ya que por el corolario "del Th de diagonalización" (como ambas son diagonalizables); no son semejantes porque no tienen los mismos valores propios y por tanto, no tienen el mismo polinomio característico.

(11)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

@ A es diagonalizable? ¿P? tq $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ tq $P^{-1}AP = D$ D diagonal.

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(\lambda-1)(\lambda+1)-1\right] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-2) = -(\lambda-1)(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}).$$

Tenemos tres valores propios distintos y como la matriz A es $3\times 3 \Rightarrow$ A es diagonalizable.

Ahora calculamos los subespacios propios asociados a los λ_i

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$.

rango 2.

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} z=0 \\ y-\cancel{2z}=0 \end{matrix}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \{(x,0,0),\ x \in \mathbb{R}\} = L((1,0,0)) \Rightarrow \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \{(1,0,0)\}.$$

$$V_{\lambda_2}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1-\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x=0 \\ (1-\sqrt{2})y+z=0 \end{matrix}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x=0 \\ z=(\sqrt{2}-1)y \end{matrix}\right\}$$

$$=\{(0,y,(\sqrt{2}-1)y)\ /\ y\in\mathbb{R}\}=L((0,1,\sqrt{2}-1))$$

$$\mathcal{B}_{V_{\lambda_2}}=\{(0,1,\sqrt{2}-1)\}$$

$$V_{\lambda_3}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x=0 \\ z=-(1+\sqrt{2})y \end{matrix}\right\}=\{(0,y,(-1-\sqrt{2})y)\ /\ y\in\mathbb{R}\}$$

$$=L((0,1,-1-\sqrt{2})) \hookrightarrow \mathcal{B}_{V_{\lambda_3}}=\{(0,1,-1-\sqrt{2})\}$$

Ahora tenemos que poner los vectores de las bases por columnas.

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\frac{1}{\det(P)}\,\mathrm{Adj}(P)^t.$$

$$\det(P)=-2\sqrt{2}.$$

$$\mathrm{Adj}(P)=\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$P^{-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} +2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1+\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A\cdot P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ⓑ Calcula A^6 y A^{-4}.

- $P^{-1} \cdot A \cdot P = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$.

$$A^6 = P D^6 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2})^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{2})^6 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- $A^{-1} = P^{-1} \cdot D^{-1} \cdot P$

$$A^{-4} = P^{-1} (D^{-1})^4 P = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^4 P =$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

ⓒ ¿ $\exists C$ tq $C^2 = A$?

Tenemos un resultado que nos proporciona tal C pero siempre y cuando los v. propios sean positivos pero en este caso uno de los v. propios es negativo $\Rightarrow$ No podemos aplicar dicho resultado.

Tenemos que buscar otro método:

$$(\det C)^2 = \det C^2 = \det(A) = -2.$$

Este resultado puede usarse siempre y cuando un único valor propio sea negativo..

1/3/16.

1. • V sobre $\mathbb{R}$ $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$, $f \circ f = -1_V$

f no tiene valores propios y por tanto no es diagonalizable

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, $v \neq 0$ tal que

$f(v) = \lambda v$

$-v = (f \circ f)(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v.$

$\Rightarrow -v = \lambda^2 v \Rightarrow v(\lambda^2 + 1) = 0 \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} \lambda^2 = -1$. ¡No puede ocurrir!

Contradicción.

• Si $f \in End_{\mathbb{C}}(V)$. $\Rightarrow \lambda = \pm i$

$f(v) = iv$. (Homotecia de razón i)

↳ Endomorfismo diagonalizable.

• $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y,-x)$ no es diagonalizable.

$f \circ f(x,y) = f(y,-x) = (-x,-y) = -1_{\mathbb{R}^2}(x,y)$. Por lo tanto, no puede ser diagonalizable.

~~$f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ $\exists r > 0$ tal que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\exists v \in V$, $v \neq 0$ con $f(v) = \lambda v$~~

2. $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ $\exists r > 0$ tq $f \circ f = r 1_V$. Los únicos valores propios posibles son $\sqrt{r}, -\sqrt{r}$. ~~Supongamos~~

Supongamos que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\exists v \in V$, $v \neq 0$ con $f(v) = \lambda v$.

$r v = f \circ f(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v.$

$\Rightarrow rv = \lambda^2 v \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} r = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{r}.$

③ $M_2(\mathbb{R})$ si es simétrica o con $\det < 0$ es diagonalizable.

• Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}^2$$

$$= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Veamos como es el discriminante:

$$\Delta = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) =$$

$$= \underbrace{a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22} - 4a_{11}a_{22}}_{a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22}.} + 4a_{12}^2 = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$$

Si $\Delta = 0$.

$a_{11} = a_{22}$. $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$
$a_{12} = 0$

En otro caso $\Delta > 0 \Rightarrow$ El polinomio característico tiene dos raíces distintas. $\Rightarrow$ tenemos 2 valores propios distintos $\Rightarrow A$ es diagonalizable.

• Veamos qué pasa si $\det(A) < 0$.

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{traza}(A) \cdot \lambda + \det(A)$.

$$\Delta = \text{traza}(A)^2 \underbrace{- 4 \overset{<0}{\det(A)}}_{>0} > 0$$

• No. ya que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y,-x)$ No es diagonalizable.

$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(M(f, B_u)) = 1 \neq 0$

Luego f es un automorfismo (ya que la matriz asociada a una base es invertible.

Scanned with CamScanner

④ $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

$\dim_K V = 2 \qquad \text{nul}(f) = \dim_K(\ker(f)) = 1$.

$\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. Demuestra que f es diagonalizable.

$\ker(f) + \text{Im}(f) \leq V$.

$\dim(\ker(f) + \text{Im}(f)) =$

$= \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) - \underbrace{\dim(\ker(f) \cap \text{Im}(f))}_{0} =$

$= \dim_K V$.

$\Rightarrow$ Tenemos que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = V$.

Sea $u_1 \in \ker(f)$, $u_1 \neq 0$ y $u_2 \in \text{Im}(f)$, $u_2 \neq 0$. Tenemos que $B = (u_1, u_2)$ es base de V. Además tenemos:

$f(u_1) = 0 = 0 u_1$, u_1 es un vector propio asociado al valor propio 0.

$f(u_2) \in \text{Im}(f) \Rightarrow f(u_2) = \lambda u_2$, $\lambda \neq 0$, u_2 es vector propio asociado al valor propio $\lambda \neq 0$.

Como tenemos que B es una base de vectores propios $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ es diagonalizable.

⑤ $\mathbb{R}_n[x]$ polinomios de grado menor o igual que n.

$\mathbb{R}_1[x] = \{a_1 x + a_0,\ a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}_2[x] = \{a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}_n[x]$ tiene dimensión $n+1$.

Base de $\mathbb{R}_n[x] = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ (Base de monomios)

$f: \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$.

$\quad p(x) \longmapsto x \cdot p'(x)$

$f(1) = x\,0 = 0 = 0 \cdot 1 \Rightarrow 1$ es vector propio de f asociado al valor propio 0.

$f(x) = x \cdot 1 = x = 1\,x \Rightarrow x$ es vector propio de f asociado al valor propio 1.

$f(x^2) = x \cdot 2x = 2 \cdot x^2 \Rightarrow x^2$ vector propio de f asociado al valor propio 2.

$\vdots$

$f(x^m) = x \cdot m \cdot x^{m-1} = m\,x^m \Rightarrow x^m$ es vector propio de f asociado al valor propio m.

$0 \leq m \leq n$.

$\lambda_m = m \,, \; 0 \leq m \leq n \qquad V_{\lambda_m} = L(x^m)$. $\qquad f$ diagonalizable.

2/3/16.

7 $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \qquad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b+c \\ 2a-2c & 4d \end{pmatrix}$

$B_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Calculamos $M(f, B_u)$

$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la ecuación característica:

$$\det(M(f, B_u) - \lambda I_4) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\left(-\lambda(1-\lambda)(-2-\lambda) + 2\right) =$$

$$= (4-\lambda)(-\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & & 1 & 0 & -2 \\ \hline & -1 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow (4-\lambda)(\lambda+1)(-\lambda^2+2)=0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 4 \\ -1 \\ \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

f tiene 4 autovalores y $n=4 \Rightarrow f$ diagonalizable.

$$f(x)=\lambda x \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Con } \lambda = 4 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Con } \lambda = -1 : \left\{ \begin{array}{l} a+b=0 \\ 2b+c=0 \Rightarrow b=1 \\ 2a-c=0 \Rightarrow a=-1 \quad c=-2 \\ 5d=0 \Rightarrow d=0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Con } \lambda = \sqrt{2} : \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{2}a+b=0 \Rightarrow a=\sqrt{1/2} \\ (1-\sqrt{2})b+c=0 \Rightarrow b=1. \\ 2a+(-2-\sqrt{2})c=0 \Rightarrow c=\sqrt{2}-1 \\ (4-\sqrt{2})d=0 \Rightarrow d=0 \end{array} \right\} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 \\ \sqrt{2}-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{2}} & 1 \\ \sqrt{2}-1 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_4)=\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\Big((3-\lambda)^2(-1-\lambda)-4-6+2(1-\lambda)+3(3-\lambda)+4(3-\lambda)\Big)=$$

$$=(1-\lambda)(-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)=$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2.$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & -1 & 4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\lambda_1=2 \quad a_{\lambda_1}=2$

$\lambda_2=1 \quad a_{\lambda_2}=2.$

$$g_{\lambda_1}=\dim V_{\lambda_1}=4-\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}=4-3=1$$

$$V_{\lambda_1}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;/\; \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}=2+4+6-4-4-3=1\neq 0 \Rightarrow rg=3$$

$\Rightarrow$ como $g_{\lambda_1}=a_{\lambda_1} \Rightarrow$ A no es diagonalizable.

⑨ $f: S_2(\mathbb{R}) \longrightarrow S_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

Base de $S_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = B$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 5 & -6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+2)+6$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+2)+6-10+5(\lambda-1)+2(\lambda+2)+6(2-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+3 = -(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-3) = -(\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

	-1	1	5	3
-1		1	-2	-3
	-1	2	3	0

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}.$$

$\lambda_1 = -1 \rightarrow a_{\lambda_1} = 2.$

$\lambda_2 = 3 \rightarrow a_{\lambda_2} = 1 = g_{\lambda_2}$ (Para las raíces g_λ y a_λ coinciden)

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \,/\, \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \overset{\circledast}{=}$$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \qquad rg = 2.$

$g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 3 - 2 = 1.$

$$\overset{\circledast}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \,/\, \begin{matrix} 3a-2b+c=0 \\ -a+2b+c=0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \,/\, \begin{matrix} c=-a \\ 2b = a-c = 2a \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \,/\, a \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

No es diagonalizable ya que $a_{\lambda_1} = 2 \neq g_{\lambda_1} = 1$.

$$V_{\lambda_2} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \,/\, \begin{pmatrix} \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \,/\, \begin{matrix} -a-2b+c=0 \\ 5a-6b-5c=0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \,/\, \begin{matrix} b=0 \\ a=c \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) $S_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad f: S_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R})$.

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 5 & -6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) - 10 + 6 - 5(1-\lambda) -$$

$$-2(-2-\lambda) + 6(2-\lambda) = (2-3\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda) \cancel{-4} - 5 + 5\lambda \cancel{+4} + 2\lambda + 12 - 6\lambda$$

$$= -4 - 2\lambda + 6\lambda + 3\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^3 + 7 + \lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & -1 & 2 & 3 & \boxed{0} \\ -1 & & 1 & -3 & \\ \hline & -1 & 3 & \boxed{0} & \\ 3 & & -3 & & \\ \hline & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$\boxed{\lambda_1 = -1} \to a_{\lambda_1} = 2$.

$\boxed{\lambda_2 = 3} \to a_{\lambda_2} = 1 = g_{\lambda_2}$

$$g_{\lambda_1} = \dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_1} = 3 - rg \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \middle/ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \middle/ \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \to 6b + 3c - 2b + c = 0 \to 4b + 4c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \to a = 2b + c \qquad \hookrightarrow c = -b. \\ \qquad = 2b - b \to a = b. \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \middle/ \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{1} \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \middle/ \begin{array}{l} -a - 2b + c = 0 \to c = a + 2b \to c = a. \\ 5a - 6b - 5c = 0 \to \cancel{5a} - 6b - \cancel{5a} - 10b = 0 \\ \qquad \hookrightarrow b = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ no es una base de $S_2(\mathbb{R})$ formada por los vectores propios de f, ya que la dimensión del espacio es 3.

10

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -a & a \\ a+2 & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} a+1-\lambda & -a & a \\ a+2 & -a-\lambda & a-1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (a+1-\lambda)(-a-\lambda)(-\lambda) - 2a(a-1) - a(a+2) - 2a(-a-\lambda) -$$
$$- a\lambda(a+2) + (a-1)(a+1-\lambda) =$$

$$= -(\lambda-a-1)(\lambda+a)\lambda - \cancel{2a^2} + \cancel{2a} - \cancel{a^2} - \cancel{2a} + \cancel{2a^2} + \cancel{2a\lambda} - a^2\lambda - \cancel{2a\lambda}$$
$$+ \cancel{a^2} + \cancel{a} - a\lambda - \cancel{a} - 1 + \lambda = -(\lambda-a-1)(\lambda+a)\lambda + (-a^2-a+1)\lambda - 1$$
$$= (-\lambda+a+1)(\lambda^2+a\lambda) + (1-a-a^2)\lambda - 1 =$$
$$= -\lambda^3 + \cancel{a\lambda^2} + \lambda^2 - \cancel{a\lambda^2} + \cancel{a^2\lambda} + \cancel{a\lambda} + \lambda - \cancel{a\lambda} - \cancel{a^2\lambda} - 1 = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & & -1 & 1 & \\ \hline & -1 & 1 & 0 & \\ 1 & & -1 & & \\ \hline & -1 & 0 & & \end{array}$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow a_{\lambda_1} = 2$

$\lambda_2 = -1 \rightarrow a_{\lambda_2} = 1 = g_{\lambda_2}$.

$$g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} a & -a & a \\ \cancel{a+2} & \cancel{-a-1} & \cancel{a-1} \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El rango tiene que ser < 3. Para que sea diagonalizable rango tiene que ser 1, para que la g_{λ_1} sea 2.

$\Rightarrow$ Buscamos a tal que $rg \begin{pmatrix} a & -a & a \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$.

$(a, -a, a) = \alpha(2, -1, -1)$

$a = 2\alpha$
$-a = -\alpha$ $\qquad \alpha = 0 \Rightarrow a = 0$.
$a = -\alpha$

$rg(A - I_3) = 1 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow g_{\lambda_1} = 2 \Leftrightarrow a = 0$.

$$\boxed{A \text{ diagonalizable} \Leftrightarrow a = 0}$$

Para $a = 0$:

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} 2x-y-z=0 \\ z = 2x-y \end{matrix} \right\} = \{ (x,y,2x-y) \,/\, x,y \in \mathbb{R} \} =$$

$$= L(\{(1,0,2),(0,1,-1)\})$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x = 0 \\ y-z=0 \end{matrix} \right\} = \{ (0,y,y) \,/\, y \in \mathbb{R} \} = L((0,1,1)).$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Matriz tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P =$ diagonal.

(12) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo $B_u = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

$$M(f, B_u) = A = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}$$

(a) ¿valores de a para los que hay un valor propio de f con multiplicidad algebraica 3?

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2a+4-\lambda & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2a+4-\lambda)(4-a-\lambda)(4-a^2-\lambda)$$

Por tanto tenemos 3 posibles valores para λ obtenidos de la ecuación característica: $(2a+4-\lambda)(4-a-\lambda)(4-a^2-\lambda) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 2a+4-\lambda_1 = 0 \\ 4-a-\lambda_2 = 0 \\ 4-a^2-\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \lambda_1 = 2a+4 \\ \rightarrow \lambda_2 = 4-a \\ \rightarrow \lambda_3 = 4-a^2 \end{array}$$

Para que la multiplicidad algebraica sea 3, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ deben ser iguales.

- $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow 2a+\cancel{4} = \cancel{4}-a \Rightarrow a(2+1) = 0 \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$
- $\lambda_1 = \lambda_3 \Rightarrow 2a+\cancel{4} = \cancel{4}-a^2 \Rightarrow a(a+2) = 0 \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2 \end{array}} \right.$
- $\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow \cancel{4}-a = \cancel{4}-a^2 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}} \right.$

Por tanto, para que haya un valor propio con multiplicidad algebraica 3, a tiene que tomar el valor $\boxed{a=0}$ (ya que es el valor que está en las 3 igualdades

ⓑ ¿valores de a para los que f es diagonalizable?

Si $a \neq 0$, $a \neq -2$, $a \neq 1 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ y λ_3 son distintos $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es diagonalizable.

Vamos a estudiar los casos en que a sean esos valores:

• Si $a = 0$: $\lambda_1 = 4 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow a_{\lambda_1} = 3$

$$g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq a_{\lambda_1}$$

$\Rightarrow f$ no es diagonalizable.

• Si $a = -2$: $\lambda_1 = 0 = \lambda_3$, $\lambda_2 = 6$ $\quad a_{\lambda_1} = 2$, $a_{\lambda_2} = 1 = g_{\lambda_2}$

$$g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 = a_{\lambda_1}$$

$\Rightarrow f$ es diagonalizable.

• Si $a = 1$: $\lambda_1 = 6$ $\quad \lambda_2 = 3 = \lambda_3$ $\quad a_{\lambda_1} = 1 = g_{\lambda_1}$, $a_{\lambda_2} = 2$.

$$g_{\lambda_2} = \dim V_{\lambda_2} = 3 - rg\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 = a_{\lambda_2}$$

$\Rightarrow f$ es diagonalizable.

(c) $\boxed{a=1}$ $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$.

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 3x - 3z = 0 \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x \}$$

$$= \{ (x,y,x) / \ x,y \in \mathbb{R} \} = L(\{ (1,0,1), (0,1,0) \})$$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} z = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} = \{ (x,0,0) / \ x \in \mathbb{R} \} = L(\{ (1,0,0) \})$$

$\mathcal{B} = \{ (1,0,1), (0,1,0), (1,0,0) \}$ base formada por los vectores propios de f.

$\boxed{a=2}$ $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$.

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -8 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} y + 8z = 0 \rightarrow z = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} = \{ (x,0,0) / \ x \in \mathbb{R} \} =$$

$$= L(\{ (1,0,0) \})$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} 6x - y - 8z = 0 \rightarrow y = 6x \\ 4z = 0 \end{matrix} \right\} = \{ (x,6x,0) \ / \ x \in \mathbb{R} \}$$

$$= L(\{ (1,6,0) \})$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 8 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} 8x - \cancel{y}^{\,0} - 8z = 0 \to z = x \\ y = 0 \end{matrix} \right\} = \{(x,0,x) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$= L(\{(1,0,1)\})$$

$\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(1,6,0),(1,0,1)\}$ base formada por los vectores propios de f

13

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a,b \in \mathbb{R} \\ a \geq b. \end{matrix}$$

ⓐ $$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2a-b-\lambda & 0 & 2a-2b \\ 1 & a-\lambda & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (a-\lambda)\left[(\lambda+a-2b)(\lambda-2a+b)+2(a-b)^2\right] =$$

$$= (a-\lambda)\left(\lambda^2+(-a-b)\lambda-\cancel{2a^2}+ab+\cancel{4ab}-\cancel{2b^2}+\cancel{2a^2}+\cancel{2b^2}-\cancel{4ab}\right]$$

$$= (a-\lambda)\left(\lambda^2-(a+b)\lambda+ab\right) = (a-\lambda)(\lambda-a)(\lambda-b) =$$

$$= -(\lambda-a)^2(\lambda-b).$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = a & a_{\lambda_1} = 2. \\ \lambda_2 = b & a_{\lambda_2} = 1 \end{matrix}\right\} \text{ si } a \neq b.$$

Si $a = b \Rightarrow \lambda_1 = a \quad a_{\lambda_1} = 3$

ⓑ Si $a \neq b$: $\quad g_{\lambda_2} = 1 = a_{\lambda_2}$

$$g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 3 - rg\begin{pmatrix} a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & 0 & 2 \\ -a+b & 0 & -2a+2b \end{pmatrix} = 3-1 = 2.$$

$\Rightarrow g_{\lambda_1} = 2 = a_{\lambda_1}$

$\Rightarrow$ A es diagonalizable.

Si $a = b$: $\quad g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-1 = 2.$

$\Rightarrow g_{\lambda_1} = 2 \neq a_{\lambda_1} = 3.$

$\Rightarrow$ A no es diagonalizable.

(c) $V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} \cancel{a-b} & \cancel{0} & \cancel{2a-2b} \\ 1 & 0 & 2 \\ \cancel{a+b} & \cancel{0} & \cancel{-2a+2b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2z = 0 \rightarrow x = -2z \} =$

$= \{ (-2z, y, z) \,/\, y, z \in \mathbb{R} \} = L(\{(-2,0,1),(0,1,0)\})$

$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} \cancel{2a-2b} & \cancel{0} & \cancel{2a-2b} \\ 1 & a-b & 2 \\ -a+b & 0 & -a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} x + (a-b)y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \rightarrow \; = -x \end{matrix} \right\} =$

Sé que $(a+b) \neq 0$ por eso puedo dividir por él

$\hookrightarrow y = \dfrac{-2z - x}{(a-b)} = \dfrac{x}{a-b}$

$= \left\{ \left(x, \dfrac{1}{a-b} x, -x \right) / x \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \left(1, \dfrac{1}{a-b}, -1 \right) \right\} \right)$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/a-b \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

14

ⓐ $f(u)=u \rightsquigarrow f(6v_1+2v_2+5v_3)=6v_1+2v_2+5v_3 \to \lambda_1=1$.

ⓑ $U=\{v\in V \,/\, x+6y-3z=0\}$ subespacio propio de f.

x, y, z coords de v. respecto a B.

ⓒ Traza $(f)=5$.

¿ valores propios de f ? $M(f,B)$?

$U=\{v\in V \,/\, x+6y-3z=0\}=\{v\in V \,/\, x=3z-6y\}=\{(3z-6y)v_1+yv_2+zv_3\}$

$= L(\{\underbrace{(3v_1+v_3)}_{w_1}, \underbrace{(-6v_1+v_2)}_{w_2}\})$

$\tilde{B}=\{u, w_1, w_2\}=\{(6v_1+2v_2+5v_3),(3v_1+v_3),(-6v_1+v_2)\}$

Base de vectores propios asociados a los valores propios

Por c) tenemos que traza$(f)=5$. $\lambda_1=1,\ \lambda_2,\ \lambda_2$.

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ya que la dimensión de U es 2, es decir, la multiplicidad geométrica es 2, coincidiendo con la algebraica.

traza$(f)=1+2\lambda_2=5 \Rightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1=1\\ \lambda_2=2\end{array}}\right.$ $a_{\lambda_1}=1$, $a_{\lambda_2}=2$.

$\Rightarrow M(f,\tilde{B})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ es diagonal $\Rightarrow$ es diagonalizable $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists P\in Gl_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}M(f,B)P=D$ diagonal.

$\Rightarrow$ Tenemos que $M(f,B)=PDP^{-1}$

Siendo $D=M(f,\tilde{B})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

consideramos $P = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(P) = 15 - 12 - 6 = -3$

$$\mathrm{Adj}(P) = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -6 & 30 & 9 \\ 3 & -18 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Adj}(P)^t = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 \\ 5 & 30 & -18 \\ 2 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M(f, B) = PDP^{-1}$$

$$\rightsquigarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2 & -1 \\ -5/3 & -10 & 6 \\ -2/3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(f,B) = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2 & -1 \\ -5/3 & -10 & 6 \\ -2/3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 6 & -12 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2 & -1 \\ -5/3 & -10 & 6 \\ -2/3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ -2/3 & -2 & 2 \\ -5/3 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

(15) $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de V $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$. $f: V \longrightarrow V$.

ⓐ $f(v_1) = 3v_1 + 2v_2 + 2v_3$
$f(v_2) = 2v_1 + 2v_2$.

ⓑ $M(f, B)$ es simétrica.

ⓒ $v = 2v_1 - 2v_2 - v_3 \in \ker(f)$.

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es simétrica $M(f,B)$

por c) ↓

por c) tenemos que $f(v)=0 \Rightarrow f(2v_1 - 2v_2 - v_3) \underset{\substack{f \text{ endom.} \\ f \text{ lineal}}}{=} 2f(v_1) - 2f(v_2) - f(v_3)$

$\Rightarrow f(v_3) = 2f(v_1) - 2f(v_2)$

$f(v_3) = 2(3v_1 + 2v_2 + 2v_3) - 2(2v_1 + 2v_2) = 2v_1 + 4v_3$.

Ahora veamos si es diagonalizable:

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - 8 + 4\lambda - 16 + 4\lambda$$

$$= (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - 14 + 8\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24 - 8 + 4\lambda - 16 + 4\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda - 3)$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ $\Rightarrow$ f tiene 3 valores propios distintos y como la dimensión de V es 3 $\Rightarrow$ f es diagonalizable.

$$V_{\lambda_1} = \left\{ xv_1 + yv_2 + zv_3 \;/\; \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ xv_1 + yv_2 + zv_3 \;/\; \begin{array}{l} \cancel{3x + 2y + 2z = 0} \\ x + y = 0 \to y = -x \to \\ x + 2z = 0 \to z = \frac{-x}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ xv_1 - xv_2 - \frac{x}{2} v_3 \;/\; x \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \left(v_1, -v_2, -\frac{v_3}{2} \right) \right\} \right)$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ x v_1 + y v_2 + z v_3 \;/\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ x v_1 + y v_2 + z v_3 \;/\; \begin{array}{l} \cancel{y + z = 0} \\ 2x - y = 0 \to y = 2x \\ 2x + z = 0 \to z = -2x \end{array} \right\} = \{ x v_1 + 2x v_2 - 2x v_3 \,/\, x \in \mathbb{R} \}$$

$$= L(v_1 + 2v_2 - 2v_3)$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{ x v_1 + y v_2 + z v_3 \;/\; \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ x v_1 + y v_2 + z v_3 \;/\; \begin{array}{l} -3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \to y = x/2 \\ x - z = 0 \to z = x \end{array} \right\} = \left\{ x v_1 + \frac{x}{2} v_2 + x v_3 \,/\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(v_1 + \frac{v_2}{2} + v_3 \right)$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \left(v_1 - v_2 - \frac{1}{2} v_3 \right), (v_1 + 2v_2 - 2v_3), \left(v_1 + \frac{v_2}{2} + v_3 \right) \right\}$$

Es una base de V tal que $M(f, \mathcal{B}')$ es diagonal.

(16) K cuerpo $A \in \mathcal{M}_2(K)$.

$$F_A : \mathcal{M}_2(K) \longrightarrow \mathcal{M}_2(K)$$
$$F_A(X) \longmapsto AX$$

a) Probar que F_A es endomorfismo:

Tenemos que ver que es aplicación lineal.

$\alpha, \beta \in K \qquad X, Y \in \mathcal{M}_2(K)$

$$\underbrace{F_A(\alpha X + \beta Y)}\overset{?}{=} \alpha F_A(X) + \beta F_A(Y)$$

$$A(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X) + A(\beta Y) = \alpha\,\underline{(AX)} + \beta\,\underline{(A\cdot Y)} = \alpha F_A(X) + \beta F_A(Y)$$

Además, como va de un espacio vectorial en sí mismo

$\Rightarrow$ F_A es endomorfismo

¿$M(f, B_u)$?

$$B_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Otra posibilidad de Base usual, que sería $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pero en este ejercicio nos conviene coger la primera.

$$F_A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix}$$

$$F_A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$M(F_A, B_u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

ⓑ $P_{F_A}(\lambda) = \det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) - \lambda I_4 \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} A-\lambda I_2 & 0_{2\times 2} \\ \hline 0_{2\times 2} & A-\lambda I_2 \end{array} \right) =$

$= \det(A-\lambda I_2)^2 = P_A(\lambda)^2$.

ⓒ Si A diagonalizable $\Rightarrow$ F_A también es diagonalizable.

$M(F_A, B) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$ Probar que el recíproco es cierto

Si A es diagonalizable $\exists P \in Gl_2(k)$ tal que $P^{-1}AP = D$ diagonal

$\tilde{P} = \left(\begin{array}{c|c} P & 0_{2\times 2} \\ \hline 0_{2\times 2} & P \end{array} \right)$ $\tilde{P}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0_{2\times 2} \\ \hline 0_{2\times 2} & P^{-1} \end{array} \right)$

$\tilde{P}^{-1} M(F_A, B) \cdot \tilde{P} = \left(\begin{array}{c|c} P^{-1}AP & 0_{2\times 2} \\ \hline 0_{2\times 2} & P^{-1}AP \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} D & 0_{2\times 2} \\ \hline 0_{2\times 2} & D \end{array} \right)$ diagonal.

★ Probar que si F_A es diagonalizable $\Rightarrow$ A diagonalizable.

$F_A(X) = XA$ ver que pasa

(13)

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

a) $$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2a-b-\lambda & 0 & 2a-2b \\ 1 & a-\lambda & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2a-b-\lambda)(a-\lambda)(-a+2b-\lambda) - (2a-2b)(a-\lambda)(-a+b) =$$

$$= 2a^2 - 2a\lambda - ba + b\lambda - a\lambda + \lambda^2(-a+2b-\lambda) + (-2a^2 + 2a\lambda + 2ba - 2b\lambda)(-a+b)$$

$$= -2a^2 + \cancel{2a^2\lambda} + ba^2 - \cancel{ba\lambda} + a^2\lambda - \cancel{a\lambda^2} + \cancel{4a^2b} - \cancel{4ab\lambda} - \cancel{2b^2a} + \cancel{2b^2\lambda} - 2ab\lambda + 2b\lambda^2$$

$$- 2a^2\lambda + 2a\lambda^2 + \cancel{ba\lambda} - b\lambda^2 + \cancel{a\lambda^2} - \lambda^3 + 2a^3 - \cancel{2a^2\lambda} - \cancel{2ba^2} + \cancel{2ba\lambda} - \cancel{2a^2b} + \cancel{2ab\lambda}$$

$$+ \cancel{2b^2a} - \cancel{2b^2\lambda} = -\lambda^3 + (2a+b)\lambda^2 + (-a^2 - 2ab)\lambda + 2a^3 + a^2(b-2)$$

17 a) $f: V \longrightarrow V$ diagonalizable $\Rightarrow f^t: V^* \longrightarrow V^*$ diagonalizable.

Si tenemos una base B y $M(f, B) = A$, $M(f^t, B^*) = A^t$.

Si A es diagonalizable $\exists P \in Gl_n(k)$ tal que $P^{-1} A P = D$ diagonal.

$(P^{-1} A P)^t = D^t \Leftrightarrow P^t \cdot A^t (P^{-1})^t = D^t = D$. VERDADERO

b) FALSO

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (No es un valor propio del endomorfismo)

El valor propio 0 corresponde al vector que está en el nucleo.

c) A diagonalizable $\Rightarrow A^n$ diagonalizable $n \in \mathbb{Z}$.

A diagonalizable $\Rightarrow \exists P \in Gl_n(k)$ tal que $P^{-1} A \cdot P = D$ diagonal.

- $n \in \mathbb{N}$: $(P^{-1} \cdot A \cdot P)^n = D^n$ diagonal.

$P^{-1} A \cancel{P} \cdot \cancel{P^{-1}} A P \cdots P^{-1} A P = D^n \rightsquigarrow P^{-1} \cdot A^n \cdot P = D^n$.

- Si n es negativo $n \in \mathbb{Z}$.

$(P^{-1} \cdot A \cdot P)^{-1} = D^{-1}$ diagonal.

$P^{-1} A^{-1} \cdot P = D^{-1} \underset{\text{elevo } n \in \mathbb{N}}{\rightsquigarrow} P^{-1} \cdot A^{-n} \cdot P = D^{-n}$ $n \in \mathbb{N}$.

VERDADERO

ⓓ Si una matriz de orden 2 es singular $\Rightarrow$ es diagonalizable.

FALSO

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det A = 0$ luego A es singular.

$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 \qquad \lambda_1 = 0 \ , \ a_{\lambda_1} = 2$

$g_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_1} = 2 - rg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq a_{\lambda_1}$

Por el Th fundamental de diagonalización, A no es diagonalizable.

ⓔ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_f(\lambda) = (1-\lambda)\underbrace{(1+\lambda^2)}_{\text{No tiene raíces reales}} \Rightarrow f$ no es diagonalizable.

VERDADERO

Solo hay un único valor propio, $\lambda = 1$ y $a_\lambda = 1$. (y la suma de las multiplicidades algebraicas debe ser 3 y en este caso no ocurre nunca).

*Si fuera $f: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \Rightarrow$ en este caso f sí sería diagonalizable.

ya que $\lambda_1 = 1 \quad a_{\lambda_1} = 1$
$\lambda_2 = \sqrt{-1} \quad a_{\lambda_2} = 2$ $\Rightarrow$ f diagonalizable.

ⓕ Si dos endomorfismos son diagonalizables y tienen los mismos valores propios $\Rightarrow$ son iguales.

FALSO

Ambos son diagonalizables.

$g, f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tienen los mismos valores propios con distinta multiplicidad y son endomorfismos diferentes.

(g) Toda matriz cuadrada regular es diagonalizable. FALSO

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\quad$ $\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ es regular

$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$. No tiene raíces reales.

$\Rightarrow$ No tiene soluciones reales y por tanto, no es diagonalizable.

(h) La suma y el producto de matrices diagonalizables es una matriz diagonalizable FALSO

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{diagonaliz.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{diagonaliz.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{no diagonaliz.}}$$

$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1)$ $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$ Luego es diagonalizable.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{diagonaliz.}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{diagonaliz.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{no diagonaliz.}}$$

$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$ $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1. \end{cases}$

(i) $f \circ f = f$ y 0 no es valor propio de $f \Rightarrow f = 1_V$.

$v \in V$ tenemos que ver si $f(v) = v$.

$f(v) = f \circ f(v) = f(f(v))$

$f(v) - f(f(v)) = 0 \rightsquigarrow f(v - f(v)) = 0 \Rightarrow$ como 0 no es

f end / f lineal

valor propio $\Rightarrow v - f(v) = 0$.

(j) $f \in End(\mathbb{R}^3)$ tal que $Im(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ y $\lambda_1 = -1$, y $\lambda_2 = -13$ son valores propios de f. Entonces f es diagonalizable. VERDADERO

$\dim(Im(f)) = 2$.

$f: V \longrightarrow W \rightsquigarrow \dim V = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f))$.

$$3 = \dim(\ker(f)) + \underbrace{\dim(Im(f))}_{2}$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = 1.$$

$\lambda_3 = 0$ es un valor propio

$\Rightarrow$ Como f tiene 3 valores propios distintos $\Rightarrow$ f es diagonalizable

(k) Si dos matrices tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico $\Rightarrow$ son semejantes.

Sabemos que la otra implicación es cierta, pero la que nos pide es cierta si son diagonalizables. FALSO

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

no diagonaliz. diagonalizable.

$$\begin{cases} traza(A) = traza(B) \\ \det(A) = \det(B) \\ P_A(\lambda) = P_B(\lambda) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Pero no son semejantes ya que no son las 2 diagonalizables.

(l) Un endomorfismo diagonalizable puede ser diagonalizable en varias bases diferentes.

$\mathbb{R}^3$ λ_1, λ_2.

$V_{\lambda_1} \rightsquigarrow \dim V_{\lambda_1} = 1$. $V_{\lambda_2} \rightsquigarrow \dim V_{\lambda_2} = 2$.

Dentro de cada subespacio propio podemos considerar bases distintas.