Objetivos de aprendizaje Tema 9
Análisis Matemático II

Javier Gómez López

2 de junio de 2022

1. Conocer y comprender la definición de función de variación acotada

   En lo que sigue, trabajamos en un intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$. Empezamos observando una útil propiedad de las funciones crecientes.

   - *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función creciente, entonces f tiene límite en los puntos a y b, y tiene límites laterales en todo punto $c \in]a, b[$. Como consecuencia, f sólo puede tener un conjunto numerable de discontinuidades, todas ellas evitables o de salto.*

   Por otro lado, llamaremos **partición** del intervalo $[a, b]$ a todo conjunto finito $P \subset [a, b]$ con $a, b \in P$, y denotaremos por $\Pi(a, b)$ al conjunto de tales particiones. Si $P \in \Pi(a, b)$ tiene $n + 1$ elementos, con $n \in \mathbb{N}$, solemos numerarlos de menor a mayor, escribiendo $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Fijada dicha partición, a cada función $f : J \to \mathbb{R}$, definida en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ con $a, b \in J$, podemos asociar la suma dada por

   $$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

   Llamaremos **variación total** de f en $[a, b]$ al supremo de las sumas del tipo anterior, que se obtienen para todas las particiones del intervalo $[a, b]$, a la que se denota por

   $$V(f; a, b) = \sup\{\sigma(f, P) : P \in \Pi(a, b)\} \in [0, \infty]$$

   Decimos que f tiene **variación acotada** en $[a, b]$ cuando $V(f; a, b) < \infty$. Resaltamos que esta definición tiene sentido para funciones definidas en cualquier intervalo J tal que $a, b \in J$. En el caso $J = [a, b]$, cuando una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene variación acotada en $[a, b]$, se dice simplemente que f es una **función de variación acotada.**

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

   a) Relación entre funciones crecientes y funciones de variación acotada
   Es fácil ver que toda función creciente $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada. De hecho, si una partición $P \in \Pi(a, b)$ viene dada por $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, se tiene

   $$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a)$$

   de donde deducimos que $V(f; a, b) = f(b) - f(a)$. Podemos ya caracterizar las funciones que se obtienen como diferencia de dos crecientes.

- *Una función de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ tiene variación acotada en $[a,b]$ si, y sólo si, se puede expresar como diferencia de dos funciones crecientes.*

b) Límites y continuidad de las funciones de variación acotada

El resultado sobre límites y continuidad de las funciones crecientes, enunciado al principio, se puede extender a las funciones de variación acotada:

- *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada, entonces f tiene límite en los puntos a y b, y límites laterales en todo punto $c \in]a,b[$. Además, f sólo puede tener un conjunto numerable de discontinuidades, todas ellas evitables o de salto.*

c) Teorema de derivación de Lebesgue

A continuación, se presenta uno de los resultados más importantes en el estudio de las funciones reales de una variable real.

Teorema 1 (Derivación de Lebesgue)**.** *Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, supongamos que una función $f : J \to \mathbb{R}$ tiene variación acotada en cada intervalo compacto $K \subset J$. Entonces f es derivable casi por doquier en J.*