AVISO LEGAL

Con motivo de la suspensión temporal de la actividad docente presencial en la Universidad de Granada, se informa de las condiciones de uso de este material que ha sido elaborado, por la profesora responsable de la asignatura Cálculo II del Grado de Matemáticas, del Doble Grado de Matemáticas-Física (Grupo A), y del Doble Grado de Matemáticas e Informática, para su impartición por docencia virtual.

“Queda prohibida la captación y/o grabación de la sesión así como su reproducción o difusión, en todo o en parte sea cual sea el medio o dispositivo utilizado. Cualquier actuación indebida comportará una vulneración de la normativa vigente, pudiendo derivarse las pertinentes responsabilidades legales”. (Instrucción de la Secretaria General de 20 de abril de 2020, para la aplicación de la normativa de protección de datos en el uso de las herramientas digitales).

Puesto que este material forma parte de dichas sesiones docentes, queda prohibida expresamente su difusión o reproducción en todo o en parte.

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

Objetivo: Extender la integral de Cauchy a funciones $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotadas, no necesariamente continuas.

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $P = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$ siendo $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. Entonces f está acotada en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, por lo que existen los siguientes valores:

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [\, x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [\, x_{k-1}, x_k]\}.$$

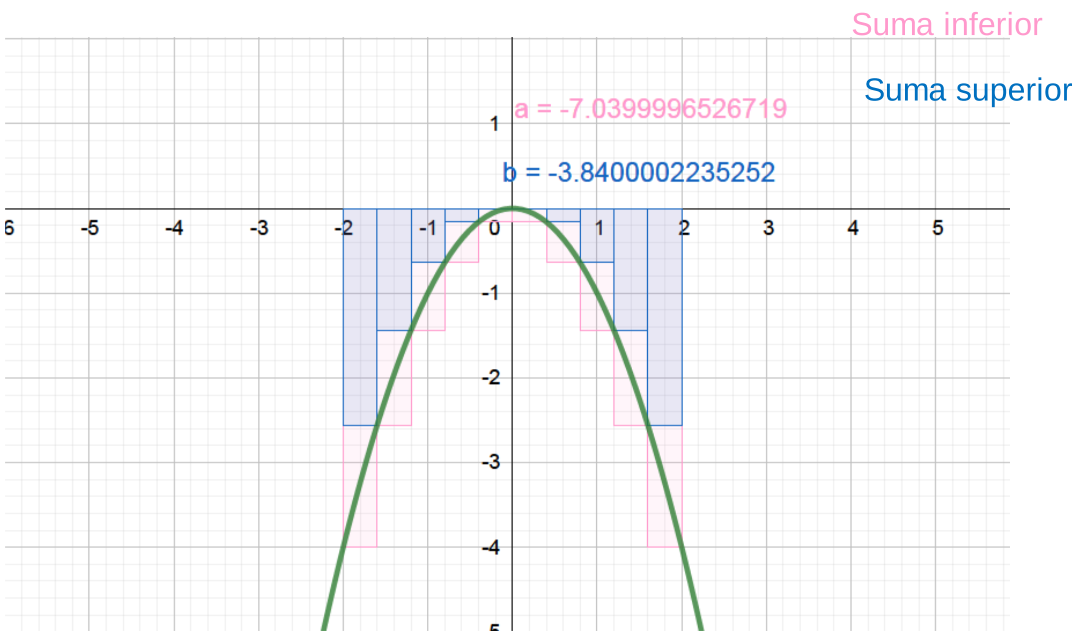
Definición. Llamamos

Suma inferior de f para la partición P al valor

$$\mathrm{I}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}).$$

Suma superior de f para la partición P al valor

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$



Si $m \le f(x) \le M$ para cada $x \in [a,b]$ entonces

$$m(b-a) \le I(f,P) \le S(f,P) \le M(b-a)$$

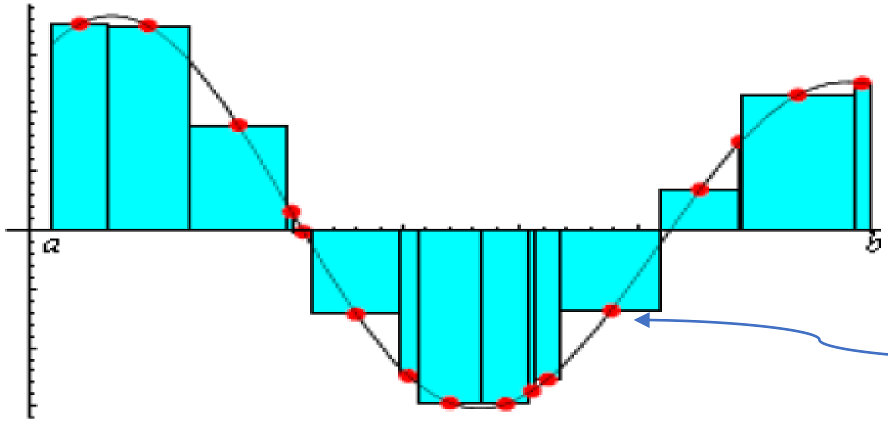
INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

Definición. Llamamos suma intermedia (o suma de Riemann) de la función f para la partición P al valor

$$\sigma(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

donde $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$, para $k=1,\dots,n$. Obviamente

$$I(f,P)\leq \sigma(f,P)\leq S(f,P)$$



Una suma de Riemann.

Los ξ_k son las etiquetas de la suma de Riemann.

La función $\xi:\{1,\dots,n\}\to[a,b]$ dada por $\xi(j)=\xi_j$ es la función de etiquetado o de selección de la suma de Riemann.

Imágenes de las selecciones o etiquetas.

Observación. Una misma partición tiene infinitas sumas intermedias, pero una única suma superior e inferior.

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

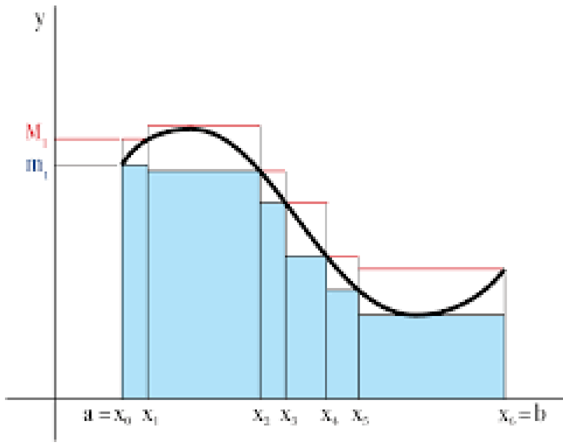
Definición (Darboux). Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Por la acotación, los siguientes valores son reales:

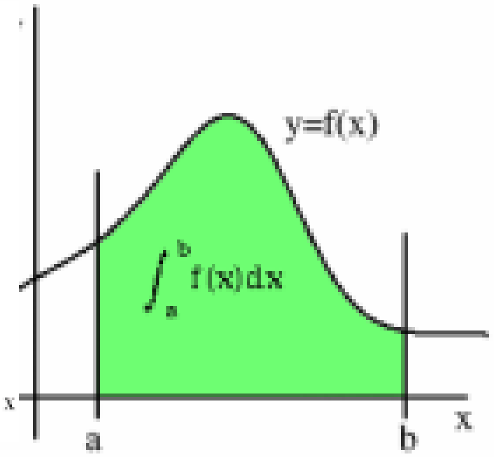
$$I(f) := \sup\{I(f,P) : P\in\mathscr{P}[a,b]\} \quad \text{(Integral inferior)}$$
$$S(f) := \inf\{S(f,P) : P\in\mathscr{P}[a,b]\} \quad \text{(Integral superior)}$$

Se dice que f es Riemann integrable cuando $I(f)=S(f)$, en cuyo caso escribimos

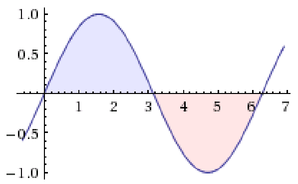
$$\int_a^b f(x)dx = I(f) = S(f).$$

Cuando $f(x)\geq 0$, para cada $x\in[a,b]$, entonces decimos que dicho valor es el área delimitada por la gráfica de la función (positiva) f entre las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje de abcisas.





Cuestión: ¿Cómo definir el área de una función que toma valores positivos y negativos?



Lo razonable sería sumar las áreas sombreadas.

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

Definición. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

(i) la parte positiva de f como la función $f^+ : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

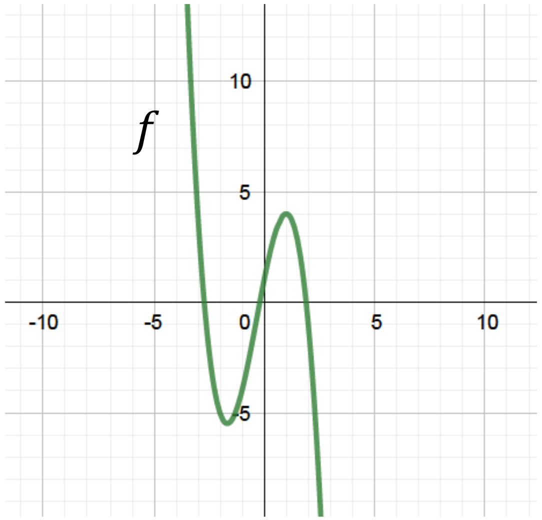
$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} \qquad (x \in [a,b]).$$

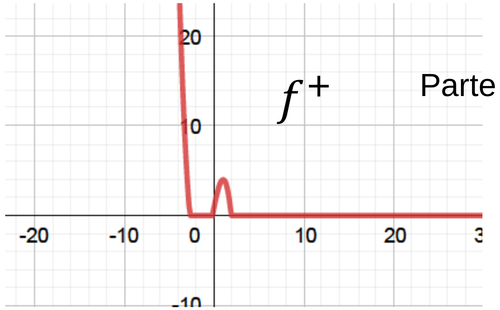
(ii) la parte negativa de f como la función $f^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} \qquad (x \in [a,b]).$$

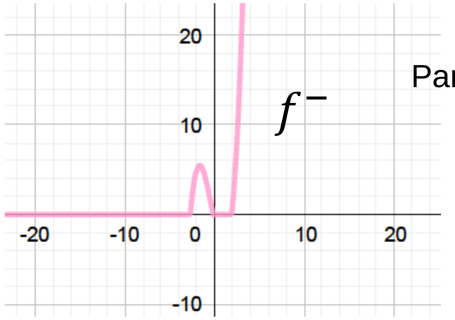
Propiedades:

- $f^+ \geq 0$ y $f^- \geq 0$ en $[a,b]$
- $f = f^+ - f^-$
- $|f| = f^+ + f^-$
- $f \geq 0$ en $[a,b] \Leftrightarrow f = f^+$.
- $f \leq 0$ en $[a,b] \Leftrightarrow f = f^-$.





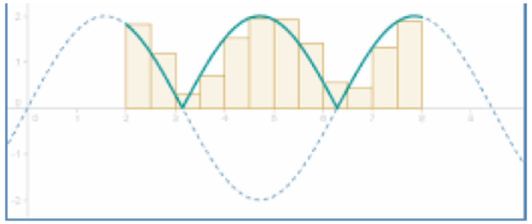
Parte positiva



Parte negativa

Definición. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se define el área de la region limitada por la gráfica de f y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ como

$$\lambda(G(f, a, b)) := \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f^-(x) dx + \int_a^b f^+(x) dx$$



Área del seno.

Objetivo pendiente. Probar que si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada que toma valores positivos y negativos entonces f es Riemann integrable en $[a, b]$ si y solo si f^+ y f^- son Riemann integrables en $[a, b]$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx$$

En consecuencia, la integral de Riemann de f viene a ser una especie de área con signo.

Para ello, previamente vamos a caracterizar la integral de Riemann y vamos a establecer sus propiedades elementales. Retomaremos la cuestión anterior cuando veamos que si f es Riemann integrable entonces $|f|$ también lo es.

Antes de proceder con la caracterización de las funciones Riemann integrables, nos planteamos alguna cuestiones básicas.

Observación. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ nótese que entonces es Riemann integrable siendo la integral de Riemann y la de Cauchy una misma cosa.
(La integrabilidad de f se demostró en el Teorema Integral de Cauchy).

Cuestión: ¿Son Riemann integrables todas las funciones acotadas? No.

Ejemplo. La función de Dirichlet dada por $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ no es integrable en ningún intervalo acotado $[a,b]$. De hecho, para cada $P \in \mathscr{P}[a,b]$ se tiene que $I(f,P) = 0$ mientras que $S(f,P) = b - a$, lo que demuestra que $I(f) = 0 \neq S(f) = b - a$.

Cuestión: ¿Extiende verdaderamente la integral de Riemann a la integral de Cauchy?

Sí. El concepto de integral de Riemann permite abordar la integrabilidad de funciones que distan mucho de ser continuas.

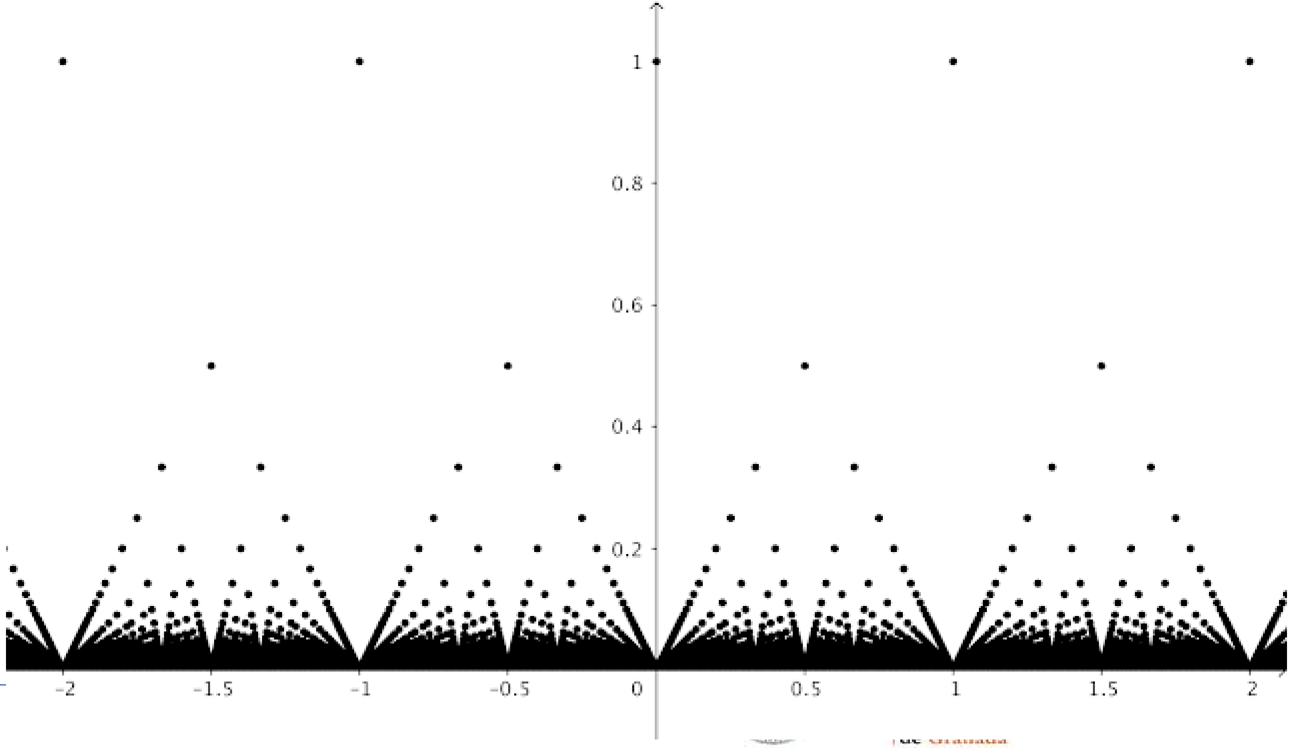
INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

Función de Thomae o de las palomitas: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donde para cada $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & si\ \ x = \frac{p}{q} \text{ con } m.c.d.(p,q) = 1 \end{cases}$$

Carl Johannes Thomae (1840-1921)

Einleitung In Die Theorie Der Bestimmten Integrale (1875)



La función de Thomae o de las palomitas es un ejemplo de función continua en todos los números irracionales y discontinua en todos los números racionales.

Sea $P_n \in \mathscr{P}[0,1]$ la partición de $[0,1]$ que divide a este intervalo en n subintervalos $J_1, \dots, J_n$ de longitud $\frac{1}{n}$.
Es claro que $I(f, P_n) = 0$. Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que el conjunto $A_\varepsilon =: \{x \in [0,1] : f(x) > \frac{\varepsilon}{2}\}$ es finito (compruébese). Si $\text{card}(A_\varepsilon) = k$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{k}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea

$$U = \{k \in \{1, \dots, n\} : J_k \cap A_\varepsilon = \emptyset\}.$$

Si $k \in \mathrm{U}$ es porque ningún $x \in J_k$ es tal que $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$, luego $f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $x \in J_k$.
Por el contrario, si $k \notin U$ entonces algún $x \in J_k$ será tal que $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$, pero siempre $f(x) \leq 1$ para cada $x \in J_k$, y como mucho tendremos k intervalos (esto es el cardinal de A_ε) en esta situación.

Por tanto, para $M_k = \sup\{f(x): x \in J_k\}$, se tiene que

$$S(f, P_n) = \sum_{k\in U} M_k l(J_k) + \sum_{k\notin U} M_k l(J_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{n}\text{card}(U) + 1\text{card}(A_\varepsilon)\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{k}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En consecuencia $0 \leq S(f) - I(f) \leq S(f, P_n) - I(f, P_n) \to 0$, lo que prueba que:

La función de las palomitas es integrable siendo $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Formalizamos la estrategia anterior:

Teorema (caracterización de la integrabilidad) . Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable (esto es $I(f)=S(f)$) si, y solo si, existe una sucesión $P_n\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que

$$S(f,P_n)-I(f,P_n)\to 0,$$

en cuyo caso se tiene que

$$I(f)=S(f)=\lim_{n\to\infty}S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}I(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)$$

Dem. [⇒] Supongamos que $I(f)=S(f)$. Por definición de supremo y de ínfimo existen particiones $\hat{P}_n$, $\tilde{P}_n\in\mathscr{P}[a,b]$ tales que

$$I(f)=\lim_{n\to\infty}I\big(f,\hat{P}_n\big),\qquad S(f)=\lim_{n\to\infty}S\big(f,\tilde{P}_n\big).$$

Sea $P_n:=\hat{P}_n\cup\tilde{P}_n$. Entonces

$$I\big(f,\hat{P}_n\big)\le I(f,P_n)\le S(f,P_n)\le S\big(f,\tilde{P}_n\big).$$

Así, $0\le S(f,P_n)-I(f,P_n)\le S\big(f,\tilde{P}_n\big)-I\big(f,\hat{P}_n\big)\to S(f)-I(f)=0,$ de donde $S(f,P_n)-I(f,P_n)\to 0$.

[⇐] Supongamos que existe $P_n\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que $S(f,P_n)-I(f,P_n)\to 0$. Puesto que

$$I(f,P_n)\le I(f)\le S(f)\le S(f,P_n),$$

deducimos que $I(f)=S(f)$ y el resto es claro. ■

Nota: El resultado se reformula diciendo que $I(f)=S(f)$ si, y solo si, para cada $\varepsilon>0$ existe $P\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que $|S(f,P)-I(f,P)|<\varepsilon$

Propiedades básicas de la integral de Riemann

Linealidad. Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas en $[a,b]$, Riemann integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Positividad. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y tal que $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$. Si f es Riemann integrable entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Conservación del orden. Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas en $[a,b]$, Riemann integrables. Estableciendo que

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \text{ para cada } x \in [a,b]$$

se tiene que

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

En particular, si $m \leq f(x) \leq M$, para cada $x \in [a,b]$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Integrabilidad del valor absoluto. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada y Riemann integrable entonces $|f|$ es Riemann integrable, siendo $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f|(x)dx$.

Aditividad respecto del intervalo de integración. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada y $c\in\,]a,b[$. Entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si, y solo si, lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

A continuación, adelantamos la demostración de las propiedades de la integral de Riemann relativas a la linealidad respecto del integrando y a la positividad. La demostración de dos propiedades anteriores las haremos un poco más adelante cuando dispongamos de algún resultado adicional (que nos permita probar con comodidad la integrabilidad del valor absoluto), y de caracterizaciones potentes de la integrabilidad de Riemann (que usaremos para probar la aditividad de la integral respecto del intervalo de integración).

Dem.

1.- Veamos que si f y g son integrables entonces $f+g$ es integrable. Tomemos particiones $\hat{P}_n$, $\tilde{P}_n \in \mathscr{P}[a,b]$ tales que

$$I(f)=S(f)=\lim_{n\to\infty} I\left(f,\hat{P}_n\right)=\lim_{n\to\infty} S\left(f,\hat{P}_n\right), \qquad I(g)=S(g)=\lim_{n\to\infty} I\left(f,\tilde{P}_n\right)=\lim_{n\to\infty} S\left(f,\tilde{P}_n\right).$$

Sea $P_n := \hat{P}_n \cup \tilde{P}_n$. Entonces

$$I\left(f,\hat{P}_n\right) \leq I(f,P_n) \leq S(f,P_n) \leq S\left(f,\hat{P}_n\right);$$
$$I\left(g,\tilde{P}_n\right) \leq I(g,P_n) \leq S(g,P_n) \leq S\left(g,\tilde{P}_n\right)$$

Además, $I(f,P_n)+I(g,P_n) \leq I(f+g,P_n) \leq S(f+g,P_n) \leq S(f,P_n)+S(g,P_n)$. Así,

$$0 \leq S(f+g) - I(f+g) \leq S(f+g,P_n) - I(f+g,P_n) \leq \left(S\left(f,\tilde{P}_n\right) - I\left(f,\tilde{P}_n\right)\right) + \left(S(g,P_n) - I\left(g,\hat{P}_n\right)\right) \to 0,$$

de donde se deduce la integrabilidad de $f+g$ y también que $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

2.- Que αf es integrable siendo $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ se deduce del siguiente hecho:

$$0 \leq \left|S\left(\alpha f,\hat{P}_n\right) - I\left(\alpha f,\hat{P}_n\right)\right| = |\alpha| \left|S\left(f,\hat{P}_n\right) - I\left(f,\hat{P}_n\right)\right| \to 0.$$

(Compruébese distinguiendo entre los casos $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$).

3.- La positividad de la integral es obvia (por construcción).

4.- La conservación del orden se deduce de la positividad y la linealidad $(f=(f-g)+g)$. ■

Teorema (de Composición). Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[a,b]$. Sea $[c,d]$ un intervalo acotado tal que $f([a,b])\subseteq[c,d]$. Si $g\colon[c,d]\to\mathbb{R}$ es continua entonces $g\circ f\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable.

Dem. Sea $h := g\circ f$. Dado $\varepsilon>0$ buscamos $P\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que $S(h,P)-I(h,P)<\varepsilon$.
Sea $\gamma=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Por el Teorema de Heine, g es uniformemente continua. Por ello, dado γ, existe $\delta>0$ tal que si $u,v\in[c,d]$ son tales que $|u-v|<\delta$ entonces $|g(u)-g(v)|<\gamma$.
Sea M>0 con $\operatorname{Im} g=[-M,M]$ y sea $\mu\in\mathbb{R}$ tal que $0<\mu<\frac{\varepsilon\delta}{4M}$. Para dicho μ, por la caracterización de la integrabilidad, existe $P\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que $S(f,P)-I(f,P)<\mu$. Si $P=\{x_0=a,\dots,x_n=b\}$ sea

$$M_k := \sup\{f(x):\ x\in[x_{k-1},x_k]\},\qquad m_k := \inf\{f(x):\ x\in[x_{k-1},x_k]\}$$
$$R_k := \sup\{h(x):\ x\in[x_{k-1},x_k]\},\qquad r_k := \inf\{h(x):\ x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

Sea $A=\{k\in\{1,\dots,n\}:\ M_k-m_k<\delta\}$.
Si $k\notin A$ entonces $M_k-m_k\geq\delta$, por lo que $\delta\sum_{k\notin A}(x_k-x_{k-1})\leq\sum_{k\notin A}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})\leq S(f,P)-I(f,P)<\mu$.
Así $\sum_{k\notin A}(x_k-x_{k-1})\leq\frac{\mu}{\delta}$. Por tanto, $\sum_{k\notin A}(R_k-r_k)(x_k-x_{k-1})\leq 2M\frac{\mu}{\delta}<2M\frac{\varepsilon\delta}{\delta 4M}=\frac{\varepsilon}{2}$.

Si $k\in A$ entonces $|f(s_k)-f(t_k)|\leq|M_k-m_k|<\delta$, para cada $s_k,t_k\in[x_{k-1},x_k]$, por lo que $|g(f(s_k))-g(f(t_k))|<\gamma$ (esto es $|h(s_k)-h(t_k)|<\gamma$), de donde $|R_k-r_k|\leq\gamma$. Por tanto, $\sum_{k\in A}(R_k-r_k)(x_k-x_{k-1})\leq\gamma(b-a)=\frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}$

$$S(h,P)-I(h,P)=\sum_{k=1}^{n}(R_k-r_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k\in A}(R_k-r_k)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k\notin A}(R_k-r_k)(x_k-x_{k-1})\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \blacksquare$$

Corolario (Integrabilidad del valor absoluto). Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[a,b]$ entonces $|f|$ es Riemann integrable, siendo $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f|(x)dx$

Dem. La función $|f|$ no es otra cosa que la composición de la función integrable f con la función valor absoluto, esto es la función continua $|\cdot| : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $x \to |x|$. En consecuencia, por el teorema anterior $|f|$ es Riemann integrable. Por otra parte, puesto que $-f \le |f|$ y $f \le |f|$ se tiene que

$$-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-f)(x)dx \le \int_a^b |f|(x)dx\,; \quad y \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f|(x)dx\,;$$

de donde $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f|(x)dx$. ■

Corolario. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si, y solo si, f^+ y f^- son Riemann integrables en $[a,b]$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

Dem. Si f es Riemann integrable entonces $|f|$ también lo es de donde $f^+ = \frac{1}{2}(|f|+f)$ y $f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$ son Riemann integrables. Recíprocamente, si f^+ y f^- son integrables entonces $f = f^+ - f^-$ también lo es. Como $f = f^+ - f^-$ es claro que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$. ■

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

Corolario. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada Riemann integrable en $[a,b]$ entonces f^2 también lo es.

Dem. La función $f^2:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $f^2(x)=f(x)^2$ no es otra cosa que la composición $g\circ f$ donde $g(x)=x^2$, y el resultado se obtiene por el Teorema de Composición. ■

Observación. Esto se aplica a muchas más funciones en el papel de $g(x)$.

Teorema. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones acotadas Riemann integrables. Entonces la función producto fg es Riemann integrable.

Dem. Las funciones $f^2,g^2,(f+g)^2:[a,b]\to\mathbb{R}$ son Riemann integrables por el corolario anterior y

$$fg=\frac{(f+g)^2-f^2-g^2}{2}.$$ ■

Teorema. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones acotadas Riemann integrables. Entonces

(i) Desigualdad de Schawarz: $\left(\int_a^b (fg)(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$

(ii) Desigualdad de Minkowski: $\left(\int_a^b (f+g)^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$

La integral como límite de sumas de Riemann

Recordamos que si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y P_n cualquier sucesión de particiones en $\mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P_n \to 0$, entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, P_n).$$

Esto es muy útil tanto para calcular una integral como un límite de sumas, como para calcular sumas haciendo uso de la integral.

Queremos trasladar este resultado al marco de la integral de Riemann, en el que ya no disponemos del Teorema de Heine por no suponer que f es continua. A pesar de ello podemos probar, igualmente, que si tenemos una función Riemann integrable, f, entonces para calcular el valor de $\int_a^b f(x)dx$, basta considerar una sucesión de particiones P_n en $\mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P_n \to 0$, y calcular cualesquiera de los límites anteriores, puesto que de nuevo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, P_n).$$

Probar este resultado es nuestro próximo objetivo.

Teorema (Criterio de Riemann). Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$. Son equivalentes:

(i) $\int_a^b f(x)dx=\alpha$

(ii) Para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $P\in\mathscr{P}[a,b]$ verifica que $\Delta P<\delta,$ entonces $|\sigma(f,P)-\alpha\,|<\varepsilon$.

Dem.

(ii) ⇒ (i). Si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $\sigma(f,P)\in\,]\,\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon[$ siempre que $\Delta P<\delta$. En particular $I(f,P), S(f,P)\in\,]\alpha-\varepsilon,\alpha-\varepsilon[$ por lo que resulta que $\alpha-\varepsilon\le I(f,P)\le I(f)\le S(f)\le S(f,P)\le\alpha+\varepsilon$ y de ahí que $\alpha-\varepsilon\le I(f)\le S(f)\le\alpha+\varepsilon,$ para cada $\varepsilon>0$. Haciendo $\varepsilon\to 0$ se obtiene que $\int_a^b f(x)dx=\alpha$.

(i) ⇒ (ii). Por hipótesis $I(f)=S(f)=\alpha$. Dado $\varepsilon>0$, por definición de ínfimo existe $P_\varepsilon\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que

$$S(f,P_\varepsilon)<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

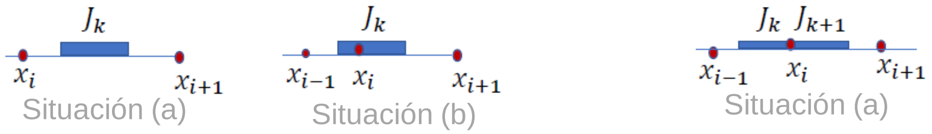
Si $P_\varepsilon=\{x_0=a,\dots,x_s=b\}$, definimos $\mu=\min\{x_i-x_{i-1}:i=1,\dots,s\}$. Sea $M:=\sup\{|f(x)|:x\in[a,b]\}$.
Definamos

$$\delta:=\min\{\mu,\frac{\varepsilon}{2(s-1)M}\}.$$

Consideremos ahora $P\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P<\delta$ y veamos que $|\sigma(f,P)-\alpha\,|<\varepsilon$.

Si $P=\{\hat{x}_0=a,\dots,\hat{x}_m=b\}$, para $k=1,\dots,m,$ sean $J_k=[\hat{x}_{k-1},\hat{x}_k]$ los intervalos asociados a la partición P.
y sean $l(J_k)=\hat{x}_k-\hat{x}_{k-1},$ sus longitudes.

Por construcción las posibilidades son las siguientes:



Por tanto, cada J_k está en una de estas dos situaciones siguientes:

(a) J_k corta a un único $[x_{i-1}, x_i]$ (estando de hecho contenido en él) o
(b) J_k corta a dos intervalos consecutivos $[x_{i-1}, x_i], [x_i, x_{i+1}]$ para algún $i = 1, \dots, (s-1)$.

Sean $A = \{k \in \{1, \dots, m\} : J_k$ está en el caso (a)$\}$ y $B = \{k \in \{1, \dots, m\} : J_k$ está en el caso (b)$\}$.
Si $M_k = \sup\{f(x) : x \in J_k\}$ $(k = 1, \dots, m)$ es claro que

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{m} M_k l(J_k) = \sum_{k \in A} M_k l(J_k) + \sum_{k \in B} M_k l(J_k)$$

$$\leq S(f, P_\varepsilon) + M(s-1)\Delta P < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) + M(s-1)\frac{\varepsilon}{2(s-1)M} = \alpha + \varepsilon,$$

dado que $M_k \leq M$, $\mathrm{card}\,(B) \leq s-1$ y $l(J_k) \leq \Delta P \leq \min\{\mu, \frac{\varepsilon}{2(s-1)M}\}$.

De forma análoga se demuestra que $\alpha - \varepsilon = \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} < I(f, P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \leq I(f, P)$, de donde

$$\alpha - \varepsilon < I(f, P) \leq S(f, P) < \alpha + \varepsilon.$$

En consecuencia $\alpha - \varepsilon < \sigma(f, P) < \alpha + \varepsilon$, o lo que es lo mismo $|\sigma(f, P) - \alpha| < \varepsilon$. ■

Teorema de convergencia de las sumas integrales. Una función acotada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable si, y solo si, para cada sucesión de particiones P_n en $\mathcal{P}[a,b]$ tal que $\Delta P_n\to 0$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$, en cuyo caso se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

Dem.

[⇒] Sea $\alpha:=\int_a^b f(x)dx$. Por el teorema anterior, para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $P\in\mathcal{P}[a,b]$ verifica que $\Delta P<\delta,$ entonces $|\sigma(f,P)-\alpha|<\varepsilon$. Como $\Delta P_n\to 0$, asociado a δ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\Delta P_n<\delta$ para cada $n\geq n_0$. Por tanto $|\sigma(f,P)-\alpha|<\varepsilon$, para cada $n\geq n_0$ de donde $\alpha=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)$.

En particular, $\alpha=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$ y análogamente $\alpha=\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$.

[⇐] De la igualdad $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)-I(f,P_n)=0$, para cada P_n tal que $\Delta P_n\to 0$, de donde $0\leq S(f)-I(f)\leq S(f,P_n)-I(f,P_n)\to 0$, y en consecuencia $S(f)=I(f)$, es decir, f es Riemann integrable. ■

Observación. El teorema anterior junto con propiedades básicas como que $\sigma(\alpha f+\beta g,P)=\alpha\,\sigma(f,P)+\beta\sigma(g,P)$, nos permite redemostrar con facilidad las propiedades ya conocidas para la integral de Cauchy al ambiente más general de la integral de Riemann (aunque ya hemos facilitado una prueba de la mayoría de ellas).

Demostramos, a continuación, la aditividad de la integral de Riemann respecto del intervalo de integración.

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

Aditividad respecto del intervalo de integración. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in]a,b[$. Entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si, y solo si, lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dem. [⇐] Veamos que si f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.
Sea $P_n \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P_n \to 0$. Entonces $\hat{P}_n \coloneqq P_n \cup \{c\}$ es tal que $\Delta \hat{P}_n \to 0$ puesto que $\Delta \hat{P}_n \leq \Delta P_n$.
En consecuencia, $Q_n \coloneqq \hat{P}_n \cap [a,c]$ y $R_n \coloneqq \hat{P}_n \cap [c,b]$ son particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$ tales que $\Delta Q_n \to 0$ y $\Delta R_n \to 0$ de donde

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, Q_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, Q_n).$$

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, R_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, R_n).$$

Como $I(f, \hat{P}_n) = I(f, Q_n) + I(f, R_n)$ y, análogamente, $S(f, \hat{P}_n) = S(f, Q_n) + S(f, R_n)$, se deduce que

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, Q_n) + \lim_{n\to\infty} \sigma(f, R_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, \hat{P}_n) = \lim_{n\to\infty} S\left(f, \hat{P}_n\right).$$

Además, $\lim_{n\to\infty} I(f, \hat{P}_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, P_n)$, y $\lim_{n\to\infty} S(f, \hat{P}_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$ pues si $M \coloneqq \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$,

$0 \leq S(f, P_n) - S\left(f, \hat{P}_n\right) \leq 2M\Delta P_n$, al igual que $0 \leq I(f, \hat{P}_n) - I(f, P_n) \leq 2M\Delta P_n$.

Así, $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, P_n) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, de donde

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad \blacksquare$$

M. Victoria Velasco, Dpto. de Análisis Matemático

Universidad de Granada

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann

[⇒] Supongamos f integrable en $[a,b]$. Dadas particiones $Q_n \in \mathscr{P}[a,c]$ y $R_n \in \mathscr{P}[c,b]$ tales que $\Delta Q_n \to 0$ y $\Delta R_n \to 0$ es claro que $P_n := Q_n \cup R_n$ es una partición de $[a,b]$ tal que $\Delta P_n \to 0$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \big(S(f,P_n) - I(f,P_n)\big) = 0.$$

Pero $I(f,P_n) = I(f_{/[a,c]}, Q_n) + I(f_{/[c,b]}, R_n)$ y $S(f,P_n) = S(f_{/[a,c]}, Q_n) + S(f_{/[c,b]}, R_n)$, de donde

$$0 \leq S(f,P_n) - I(f,P_n) = \left(S(f_{/[a,c]}, Q_n) - I\big(f_{/[a,c]}, Q_n\big)\right) + \left(S(f_{/[c,b]}, R_n) - I\big(f_{/[c,b]}, R_n\big)\right) \to 0. \qquad (*)$$

Puesto que $0 \leq \left(S(f_{/[a,c]}, Q_n) - I\big(f_{/[a,c]}, Q_n\big)\right)$ y $0 \leq \left(S(f_{/[c,b]}, R_n) - I\big(f_{/[c,b]}, R_n\big)\right)$ se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \left(S(f_{/[a,c]}, Q_n) - I\big(f_{/[a,c]}, Q_n\big)\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \left(S(f_{/[c,b]}, R_n) - I\big(f_{/[c,b]}, R_n\big)\right) = 0.$$

Esto prueba la integrabilidad de f en $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente. Por (*), también es claro que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \blacksquare$$

Corolario. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sean $c,d \in [a,b]$ tales que $[c,d] \subseteq [a,b]$. Si f es Riemann integrable en $[a,b]$ entonces también lo es en $[c,d]$.

Dem. Sea $[c,d] \subseteq \,]a,b[$. Entonces f es integrable en $[a,d]$ (y en $[d,b]$). Como $c \in \,]a,d[$, una nueva aplicación del resultado anterior nos da la Riemann integrabilidad de f en $[c,d]$ (y en $[a,c]$). $\blacksquare$