Examen

6 de junio de 2018

Métodos Numéricos I_Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas_UGR

DURACIÓN: 2 horas y 30 minutos

MODELO 1

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI/PASAPORTE: FIRMA:

PREGUNTA 1
1 punto

a) Sabemos que si $N \geq 1$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ con $\mathbf{A}$ regular, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ y si el método iterativo

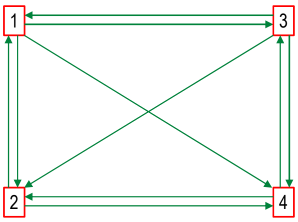
$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \ \Rightarrow \ \mathbf{x}_n = \mathbf{B}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{c} \end{array} \right.$$

converge a la solucion $\mathbf{x}$ del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cualquiera sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, entonces para cuaquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^N$ con norma matricial inducida en $\mathbb{R}^{N\times N}$ denotada de igual forma, tal que $\|\mathbf{B}\| < 1$, se tiene para todo $n \geq 1$

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \leq \frac{\|\mathbf{B}\|}{1 - \|\mathbf{B}\|} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|.$$

Ilustra este hecho con un ejemplo con $N, n \geq 2$.

b) Modeliza matemáticamente la relevancia de cada una de las cuatro páginas web que aparecen en la figura, de acuerdo con el algoritmo PageRank de Google y teniendo en cuenta la estructura de enlaces mutuos.



PREGUNTA 2

1.5 puntos

a) Demuestra que el siguiente problema de interpolación es unisolvente: dados

$$(x_0, y_0, d_0), (x_1, y_1, d_1), \ldots, (x_N, y_N, d_N) \in \mathbb{R}^3$$

de forma que

$$i, j = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; x_i \neq x_j,$$

encontrar un único $p \in \mathbb{P}_{2N+1}$ tal que

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} p(x_i) = y_i \\ p'(x_i) = d_i \end{array}\right. .$$

b) Sea $f \in C([a, b])$, sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ y sea $\mathbf{S}^1_N f$ el único elemento de $\mathbb{S}^0_1(P)$ que interpola a f en los nodos de P, i.e.,

$$i = 0, 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \mathbf{S}^1_N f(x_i) = f(x_i).$$

- Comprueba que si $i = 0, 1, \ldots, N-1$ y $x \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$\mathbf{S}^1_N f(x) \leq \max\{f(x_i), f(x_{i+1})\}.$$

- Deduce que

$$\|\mathbf{S}^1_N f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

- Demuestra que

$$\|f - \mathbf{S}^1_N f\|_\infty \leq 2 \inf_{s \in \mathbb{S}^0_1(P)} \|f - s\|_\infty.$$

PREGUNTA 3
1.5 puntos

Determina razonadamente la ecuación de la curva de ecuación $y = ax^3 + b$ que mejor aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, los datos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2,$$

siempre que sea posible, y aplícalo a los datos concretos

$$(0, 1), (1, 2), (-1, -1), (-1, 1).$$

Examen de Ordenador 1

6 de junio de 2018

Métodos Numéricos I_Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas_UGR

DURACIÓN: 1 hora

MODELO 1

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI/PASAPORTE: FIRMA:

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: Hay que resolver todos los problemas con Maxima y copiar las correspondientes entradas y salidas.

1 punto Dada la partición uniforme P del intervalo $[-1,1]$ determinada por 6 puntos y la función $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \log(x+2), \qquad (-1 \leq x \leq 1),$$

determina el spline $s \in \mathbb{S}_3^2(P)$ con $s''(-1) = s''(1) = 0$ (natural) tal que

$$i = 0,1,2,3,4,5 \;\Rightarrow\; s(-1+2i/5) = f(-1+2i/5).$$

Ilustra con un ejemplo el principio de mínima energía para este spline.

Examen de Ordenador 1

6 de junio de 2018

Métodos Numéricos I_Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas_UGR

DURACIÓN: 1 hora

MODELO 2

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI/PASAPORTE: FIRMA:

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: Hay que resolver todos los problemas con Maxima y copiar las correspondientes entradas y salidas.

1 punto Dada la partición uniforme P del intervalo $[-1,1]$ determinada por 6 puntos y la función $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$f(x) := \cos(x+\pi/7), \qquad (-1 \le x \le 1),$$

determina el spline $s \in \mathbb{S}_3^2(P)$ con $s''(-1) = s''(1) = 0$ (natural) tal que

$$i = 0,1,2,3,4,5 \;\Rightarrow\; s(-1+2i/5) = f(-1+2i/5).$$

Ilustra con un ejemplo el principio de mínima energía para este spline.