

Ejercicio 7.11: Calcular el área de cada una de las regiones del plano que delimitan conjuntamente las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el primer cuadrante.

Calculamos los puntos de corte:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x^2} = g(x) \Leftrightarrow 1+x = 1+x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

Luego calculamos el valor absoluto de las diferencias de las integrales en $[0, 1]$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{u} du = \ln u \Big|_0^1 = \ln 1+x \Big|_0^1 = \ln 2 \\ &\quad \begin{matrix} 1+x = u \\ dx = du \end{matrix} \\ \beta &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \text{Área} = |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{4} - \ln 2 (\approx 0.09225...)$$