Dynos

PS5

En dynos

Sorteamos 5 PS5

Participa y gana tu consola next gen!

¡Cada semana sorteamos una PlayStation 5!

Entra en **dynos.es** y confirma tu participación
con tu correo electrónico

¡Aumenta tus posibilidades de ganar participando en nuestras redes sociales!

Geometría II. Relación de problemas 3

Espacios vectoriales euclídeos

Curso 2015-16

1. Sea V un espacio vectorial real. Denotemos por $\mathcal{B}_s^+(V)$ al conjunto de todas las métricas euclídeas sobre V. Demuestra que:

   a) Si $g, g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $g + g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   b) Si $a > 0$ y $g \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $a\,g \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   ¿Es $\mathcal{B}_s^+(V)$ un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(V)$?

2. Sean (V, g) y (V', g') dos espacios vectoriales euclídeos. Se define la *métrica producto* $g \times g'$ en $V \times V'$ a partir de la igualdad:

$$(g \times g')\big((u, u'), (v, v')\big) = g(u, v) + g'(u', v').$$

   Demuestra que $g \times g'$ es una métrica euclídea en $V \times V'$.

3. Decide de forma razonada si son euclídeas o no las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha+4 & -2 & 2 \\ -2 & \alpha+1 & -1 \\ 2 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

4. Dados dos vectores cualesquiera u y v de un espacio vectorial euclídeo (V, g), demuestra que se cumplen estas propiedades:

   a) Identidad del paralelogramo: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

   b) Teorema del coseno: $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\| \cos\measuredangle(u, v)$.

   c) Teorema de Pitágoras: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u \perp v$.

   d) $\|u\| = \|v\| \iff u + v \perp u - v$.

   e) $\big|\,\|u\| - \|v\|\,\big| \leq \|u - v\|$.

5. Utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio vectorial euclídeo conveniente para probar las siguientes desigualdades y caracterizar cuando se obtiene la igualdad en cada una de ellas.

a) Para cualesquiera números $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, se cumple que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

b) Para cada matriz simétrica A de orden n se verifica que $(\mathrm{tr}(A))^2 \leq n\,\mathrm{tr}(A^2)$.

c) Para cualquier función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \varphi(t)^2\,dt.$$

comparar alba

6. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con su métrica euclídea usual g_u. Calcula una base ortonormal de (U, g_U), donde U es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 4y - z + 3t = 0\}.$$

Amplia la base anterior hasta conseguir una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g_u)$. Calcula las coordenadas del vector $u = (1,0,0,1)$ en la base obtenida.

7. En el espacio vectorial $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales se considera la métrica g definida como $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC)$.

a) Prueba que g es una métrica euclídea.

b) Utiliza el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ a partir de la base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Encuentra dos matrices linealmente independientes $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ que sean unitarias y que formen ángulo $\pi/3$ con I_2.

8. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por:

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

Demuestra que la base usual B_u de $\mathbb{R}_2[x]$ no es ortonormal. Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g)$ a partir de B_u.

9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica g, cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestra que la métrica g es euclídea.

b) Calcula el ángulo que forman los vectores $u = (1,1,0)$ y $v = (0,-1,1)$.

c) Calcula la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector $u = (2,1,0)$ con respecto al plano $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$.

10. En el espacio $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC^t)$. Se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula el ángulo determinado por A y C.

b) Calcula las proyecciones ortogonales de A sobre $U = L(C)$ y sobre $U^\perp$.

c) Calcula la imagen de A por la simetría respecto del subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a-b+c-d=0, -a+d=0 \right\}.$$

d) Da una base de $W^\perp$, siendo W el subespacio del apartado anterior.

11. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se sabe que $\|v_i\| = 2$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y que $\measuredangle(v_i, v_j) = \pi/3$ si $i \neq j$. Calcula $M(g,B)$ y una base ortonormal de (V,g).

12. Sean V un plano vectorial, B una base de V y g la métrica en V tal que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos, para cada $a \in \mathbb{R}$, el endomorfismo $f_a : V \to V$ dado por:

$$M(f_a, B) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Prueba que g es una métrica euclídea sobre V y encuentra los valores de a para los que f_a es autoadjunto en (V,g).

b) ¿Existe algún valor de a tal que f_a es una isometría en (V,g)?

13. Se consideran los endomorfismos $f, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dados por:

$$f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z), \quad M(h, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3/2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f y h son autoadjuntos respecto a la métrica euclídea usual. Calcula dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ en las que las matrices de f y h sean diagonales.

Alba 14. En $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo f que en la base $B = \{(1,0,1), (-1,2,1), (1,1,1)\}$ tiene la siguiente matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudia si f es autoadjunto con respecto a la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ y, en caso de serlo, encuentra una base ortonormal de vectores propios de f.

15. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo tridimensional. Supongamos que:

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en una cierta base B de V. Sea $f : V \to V$ el endomorfismo dado por:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es autoadjunto en (V, g) y encuentra una base ortonormal de (V, g) formada por vectores propios de f.

? 16. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

encuentra una matriz $P \in O(3)$ tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

? 17. Sea g la métrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores propios de A y estudia su signo para determinar el índice de g. Clasifícala en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. ¿En algún caso se obtiene la métrica euclídea usual o la métrica lorentziana usual de $\mathbb{R}^3$?

Hacer

18. Se considera la familia de métricas $g_{a,b}$ en $\mathbb{R}^4$ tales que:

$$M(g_{a,b}, B_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & b & -1 \end{pmatrix}.$$

Clasifica, según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, las métricas $g_{a,b}$.

ver lo del giro

19. Describe las isometrías de $(\mathbb{R}^2, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

No es ortonormal

Rotación

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

ver lo del giro

20. Sea (V, g) un plano vectorial euclídeo y B una base de V para la que:

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Estudia si los endomorfismos $f, h : V \to V$ tales que:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M(h, B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

son isometrías de (V, g). En caso afirmativo, describe tales isometrías.

(...)

21. Consideremos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, 2x + 2y - z).$$

a) Demuestra que f es una isometría cuando usamos la métrica euclídea usual.

b) Calcula los valores propios de f y sus multiplicidades. Describe geométricamente la isometría f.

22. Describe geométricamente las isometrías de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

23. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales se considera la métrica euclídea g tal que la base $B = \{1, x, x^2\}$ es ortonormal. Demuestra que el endomorfismo $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dado por:

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \frac{1}{3}\left((2a_0 - a_1 + 2a_2) + (-a_0 + 2a_1 + 2a_2)x + (2a_0 + 2a_1 - a_2)x^2\right)$$

es una isometría en $(\mathbb{R}_2[x], g)$ y descríbela.

24. Sobre el espacio vectorial euclídeo $(S_2(\mathbb{R}), g)$, donde $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC)$, se define el endomorfismo $f : S_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es una isometría de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ y descríbela.

25. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con su métrica euclídea usual.

a) Calcula la matriz $M(f, B_u)$, siendo f la simetría axial con respecto a $U = L((2,3))$.

b) Calcula, en las coordenadas usuales, las ecuaciones de un giro que lleve el vector $(-4,3)$ en el vector $(5,0)$.

26. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con su métrica euclídea usual.

? *a*) Calcula la matriz $M(f, B_u)$, siendo f una rotación de ángulo $\pi/2$ con eje dado por $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, x - z = 0\}$.

✓ *b*) Calcula, en coordenadas usuales, las ecuaciones de la simetría ortogonal respecto al plano perpendicular a la recta U del apartado anterior.

? *c*) Calcula $M(f, B_u)$, donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría que verifique $f(1,-1,0) = (1,-1,0)$, $f(1,1,5) = (3,3,-3)$ y $\det(f) = 1$.

27. En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, calcula la matriz en B_u de $h \circ \sigma_U$, donde σ_U es la simetría ortogonal con respecto al plano U de ecuación $z = 0$, y h es el giro de ángulo $\pi/3$ alrededor del eje OX. Clasifica y describe la isometría resultante.

28. Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a, *a*) Si g es una métrica euclídea sobre V, entonces todos los elementos diagonales de la matriz de g en cualquier base de V son positivos. ¿Es cierto el recíproco?

b, *b*) Sea g una métrica cuya matriz en una base B tiene un valor propio negativo. Entonces g no es euclídea.

c) Sean u y v dos vectores no nulos de un espacio vectorial euclídeo (V,g) que forman un ángulo α. Entonces el ángulo que forman $2u$ y $2v$ es 2α.

d) Toda base B de un espacio vectorial V es base ortonormal para una única métrica euclídea sobre V.

e) Si U es un hiperplano de un espacio vectorial euclídeo entonces hay exactamente dos vectores perpendiculares a U y unitarios.

f) Toda matriz cuadrada con determinante 1 o -1 es ortogonal.

g) Si dos subespacios de un espacio vectorial euclídeo son perpendiculares y unimos dos bases ortonormales, una de cada uno de ellos, obtenemos una base ortonormal de la suma de los dos subespacios.

h) Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo (V,g). Entonces, se cumple la igualdad $I_V = 2\pi_U - \sigma_U$.

i) Todo endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo es automorfismo.

j) Todo endomorfismo diagonalizable de un espacio vectorial es autoadjunto respecto de alguna métrica euclídea en dicho espacio.

k) Dos vectores propios linealmente independientes de un endomorfismo autoadjunto son ortogonales.

l) Si $f: V \to V$ es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V,g) entonces dos vectores propios de f asociados a valores propios distintos son ortogonales.

m) Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo es un endomorfismo autoadjunto.

n) En un espacio vectorial euclídeo (V,g), dados dos subespacios vectoriales de la misma dimensión siempre existe una isometría de (V,g) que lleva uno en otro.

ñ) En $(\mathbb{R}^2, g_u)$ consideramos el giro r_θ de ángulo $\theta \in (0,2\pi)$ y la simetría ortogonal σ con respecto a la recta de ecuación $y=0$. Entonces, $f = r_\theta \circ \sigma$ es la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuación $(\cos\theta - 1)x + (\operatorname{sen}\theta)y = 0$.

o) En un plano vectorial euclídeo la composición de dos simetrías axiales es un giro.

p) Si una matriz ortogonal de orden 2 no es diagonal y tiene determinante positivo, entonces no es diagonalizable.

q) Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 5 para la que el subespacio de vectores fijos tiene dimensión 2 es inversa.

r) Sobre un espacio vectorial euclídeo (V,g) de dimensión impar no existe ninguna isometría f tal que $f \circ f = -I_V$.

① V, $\mathcal{B}_S^+(V) = \{$conjunto de todas las métricas euclídeas sobre $V\}$.

ⓐ Si $g, g' \in \mathcal{B}_S^+(V) \Rightarrow g+g' \in \mathcal{B}_S^+(V)$

$$(g+g')(u,u) = \underbrace{g(u,u)}_{\geq 0} + \underbrace{g'(u,u)}_{\geq 0} \geq 0 \quad , \forall u \in V$$

$$(g+g')(u,u) = g(u,u) + g'(u,u) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(u,u) = 0 \\ g'(u,u) = 0 \end{cases} \Rightarrow u = 0$$

ⓑ Si $a>0$, $g \in \mathcal{B}_S^+(V) \Rightarrow ag \in \mathcal{B}_S^+(V)$.

$$(ag)(u,u) = \underbrace{a}_{>0}\underbrace{g(u,u)}_{\geq 0} \geq 0 \quad , u \in V.$$

g def. pos.

$$(ag)(u,u) = ag(u,u) = 0 \underset{a>0}{\Rightarrow} u = 0$$

• Si $a \leq 0 \Rightarrow ag \notin \mathcal{B}_S^+(V$

③ Son euclídeas o no las métricas sobre $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det(A_1) = 1 > 0 \\ \det(A_2) = 4 > 0 \\ \det(A_3) = 7 > 0 \end{array}\right\} g_A \text{ es euclídea.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det(C_1) = 2 > 0 \\ \det(C_2) = -11 < 0 \\ \det(C_3) = 1 > 0 \end{array}\right\} g_C \text{ es una métrica indefinida y no degenerada.}$$

Índice $= 2$, Rango $= 3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Posibles bases ortonormales.}}$$

sería la primera ya que el signo del determinante se conserva.

$$D = \begin{pmatrix} \alpha+4 & -2 & 2 \\ -2 & \alpha+1 & -1 \\ 2 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$\det(D_1) = \alpha + 4$

$\det(D_2) = (\alpha+4)(\alpha+1) - 4$

$\det(D_3) = \det(D) = (\alpha+4)(\alpha+1)^2 + 4 + 4 - 4(\alpha+1) - 4(\alpha-1) - (\alpha+4)$

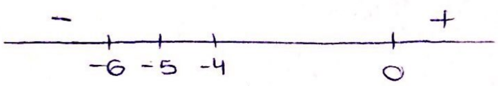
$= \alpha^3 + 4\alpha^2 + 2\alpha^2 + \cancel{8\alpha} + \cancel{\alpha} + \cancel{4} + \cancel{8} - \cancel{4\alpha} - \cancel{4} - \cancel{4\alpha} + \cancel{4} - \cancel{\alpha} - \cancel{4} =$

$= \alpha^3 + 6\alpha^2 = \alpha^2(\alpha+6)$

$\alpha^2(\alpha+6) = 0 \;\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -6 \end{cases}$

$(\alpha+4)(\alpha+1) - 4 = \alpha^2 + \alpha + 4\alpha + \cancel{4} - \cancel{4} = \alpha(\alpha+5) = 0 \;\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -5 \end{cases}$

$\alpha + 4 = 0 \longrightarrow \alpha = -4$.



• Si $\alpha > 0 \Rightarrow g_D$ es definida positiva $\Rightarrow g_D$ euclídea.

$\left.\begin{array}{l} \det(D_1) > 0 \\ \det(D_2) > 0 \\ \det(D_3) > 0 \end{array}\right\}$

• Si $\alpha < -6$. $\Rightarrow g_D$ es definida negativa

$\left.\begin{array}{l} \det(D_1) < 0 \\ \det(D_2) > 0 \\ \det(D_3) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g_D$ no euclídea.

• Si $-6 < \alpha < 0 \Rightarrow$ Indefinida no degenerada

$\det(D_3) > 0$ $\hookrightarrow g_D$ no euclídea

• Si $\alpha = 0$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(D_3) = 0$
$\det(D_2) = 0$
$\det(D_1) = 4 > 0$

$\text{rango}(g_D) = 1$.

g_D semidefinida positiva.
$\hookrightarrow g_D$ no euclídea

• Si $\alpha = -6$.

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$\det(D_3) = 0$

$\det(D_2) = 6 > 0$

$\det(D_1) = -2 < 0$

$\text{Rango}(g_D) = 2$.

g_D semidefinida negativa.

↳ g_D no euclídea.

(2) (V,g), (V',g') espacios vectoriales euclídeos.

Métrica producto: $g \times g$ en $V \times V$.

$$(g\times g')((u,u'),(v,v')) = g(u,v) + g'(u',v').$$

Demuestra $g \times g'$ es métrica euclídea en $V \times V'$.

$$(g\times g')((u,u'),(u,u')) = \underset{\geq 0}{g(u,u)} + \underset{\geq 0}{g'(u',u')} \geq 0$$

$$(g\times g')((u,u'),(u,u')) = 0$$

$$\hookrightarrow \underset{\geq 0}{g(u,u)} + \underset{\geq 0}{g'(u',u')} = 0 \Rightarrow g(u,u) = g'(u',u') = 0 \Rightarrow u = u' = 0$$

g, g' son euclídeas. $(u,u') = 0$.

(4) u, v de (V,g): Demostrar:

(a) Identidad del paralelogramo:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

$$\|u+v\|^2 = g(u+v,u+v) = g(u,u) + 2g(u,v) + g(v,v) = \|u\|^2 + 2g(u,v) + \|v\|^2$$

$$\|u-v\|^2 = g(u-v,u-v) = g(u,u) - 2g(u,v) + g(v,v) = \|u\|^2 - 2g(u,v) + \|v\|^2$$

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

(b) Teorema de Pitágoras: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$.

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow g(u,v) = 0 \Leftrightarrow u \perp v.$$

(d) $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow u+v \perp u-v$.

$$g(u+v, u-v) = \|u\| + \cancel{g(u,v)} - \cancel{g(u,v)} - \|v\|^2 = 0$$

Scanned with CamScanner

ⓔ $\big| \|u\| - \|v\| \big| \leq \|u-v\|$.

$$(\|u\| - \|v\|)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\|$$

$$\|u-v\|^2 = g(u-v, u-v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2g(u,v) \geq$$
$$\geq \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| = (\|u\| - \|v\|)^2$$

$$\Rightarrow (\|u\| - \|v\|)^2 \leq \|u-v\|^2 \Leftrightarrow \big| \|u\| - \|v\| \big| \leq \|u-v\|.$$

ⓑ Teorema del coseno:

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos \measuredangle(u,v).$$

$$\|u-v\|^2 \underset{e)}{=} \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2g(u,v) \underset{\uparrow}{=} \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos(\measuredangle(u,v))$$

$$g(u,v) = \|u\|\|v\| \cos(\measuredangle(u,v))$$

⑤ Usar desigualdad Cauchy - Schwarz:

$$0 \leq |g(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| \quad , \; x,y \in V$$

ⓐ $\forall x_1, \ldots, x_n \geq 0$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \right) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)}_{*}$$

$g(u,v) = uv$.

$u = (x_1^{3/2}, x_2^{3/2}, \ldots, x_n^{3/2})$ Para que ⊛ nos dé la norma al cuadrado.

$v = (x_1^{1/2}, x_2^{1/2}, \ldots, x_n^{1/2})$.

$$g(u,v) = x_1^{3/2} \cdot x_1^{1/2} + x_2^{3/2} \cdot x_2^{1/2} + \cdots + x_n^{3/2} \cdot x_n^{1/2} = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

¿Cuando se da la igualdad? Se dará la igualdad si u y v son linealmente indeps $\Leftrightarrow u = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x_i^{3/2} = \lambda x_i^{1/2} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

$$x_i^{1/2}(x_i - \lambda) = 0 \quad \begin{cases} x_i = 0 \\ x_i = \lambda \end{cases}$$

7) $S_2(\mathbb{R})$ g métrica $g(A,C) = tr(A \cdot C)$

a) g métrica euclídea?

$A \in S_2(\mathbb{R})$

$g(A,A) = tr(A^2) \geq 0$

$(A^2)_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \begin{pmatrix} \text{columna} \\ j \text{ de } A \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ simétrica } a_{ij}=a_{ji}}}{=} (a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} =$

$\overset{\shortparallel}{(A^2)_{ii}} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 \geq 0$

$g(A,A) = \text{traza}(A^2) = 0 \iff A = O_{2\times 2}$.

b) Utilizar método de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de:

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}.$$

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{g(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(v_2,u_1) = tr(v_2 u_1) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\|u_1\|^2 = g(u_1,u_1) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$u_3 = v_3 - \frac{g(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \cancelto{0}{\frac{g(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2}} u_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g(v_3,u_1) = tr\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

(b) $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$ se verifica: $(\text{traza}(A))^2 \leq n\,tr(A^2)$.

$g(A,C) = \text{traza}(AC) = \text{traza}(AC^t)$

$u = I_n$ (tiene traza u) $\rightarrow \|u\|^2 = g(I_n, I_n) = tr(I_n \cdot I_n) = n$.

$v = A \rightarrow \|v\|^2 = g(A,A) = tr(A^2)$

$g(u,v) = tr(I_n \cdot A) = tr(A)$

Se da la igualdad si I_n y A son lineal. depends, es decir:

$A = \lambda I_n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

$$\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \varphi(t)^2\,dt.$$

$g(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(t) f_2(t)\,dt$. $\quad V = \{f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua$\}$

$g(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^2(t)\,dt \geq 0 \quad = 0 \Leftrightarrow f_1^2(t) = 0 \Leftrightarrow f_1(t) = 0$.

$v = \varphi(t), \quad \|v\|^2 = \int_a^b \varphi(t)^2\,dt$.

$u = 1. \qquad \|u\|^2 = \int_a^b dt = [t]_a^b = b-a$

$g(u,v) = \int_a^b \varphi(t)\,dt$.

$= \Leftrightarrow u, v$ son lineal. depend. $\Leftrightarrow \varphi(t) = \lambda \cdot 1 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

$$g(v_3, u_2) = tr\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$B' = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$ base ortogonal.

$$\|u_3\|^2 = g(u_3, u_3) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\|u_2\|^2 = g(u_2, u_2) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$B'' = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$ base ortonormal.

ⓒ $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ linealm. indeps. unitarias / forman ángulo $\frac{\pi}{3}$ con I_2

$$\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{1/2.} = \frac{g(I_2, A)}{\underbrace{\|I_2\|}_{\sqrt{2}}\ \underbrace{\|A\|}_{1}} = \frac{g(I_2, A)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$g(I_2, A) = \frac{\sqrt{2}}{2} = tr(I_2 \cdot A) = tr(A).$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$1 = \|A\|^2 = tr(A^2) = tr\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + b^2 & * \\ * & b^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + 2b^2, \quad 2b^2 = \frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow b = \pm\frac{1}{2}$$

⑧ $\mathbb{R}_2[x]$, métrica euclídea:

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx .$$

Demostrar B_u de $\mathbb{R}_2[x]$ no es ortonormal.

$B_u = \{1, x, x^2\}$ Para que lo sea la matriz asociada a g en dicha base debe ser la identidad.
$\quad \overset{\shortparallel}{v_1} \; \overset{\shortparallel}{v_2} \; \overset{\shortparallel}{v_3}$

$$g(1,1) = \int_{-1}^{1} dx = 2 .$$

$$g(1,x) = \int_{-1}^{1} x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 = g(x,1).$$

$$g(1,x^2) = g(x^2,1) = g(x,x) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$g(x,x^2) = g(x^2,x) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$g(x^2,x^2) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$\hookrightarrow \quad M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

No es la identidad $\Downarrow$ no es base ortonormal.

Obtener una base ortonormal a partir de B_u:

$u_1 = v_1 = 1$.

$$u_2 = v_2 - \cancel{\frac{g(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2}}^{\,0} u_1 = x .$$

$$g(v_2,u_1) = g(x,1) = 0$$

$$u_3 = v_3 - \frac{g(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \cancel{\frac{g(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2}}^{\,0} u_2 = x^2 - \frac{2/3}{2} = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$g(v_3,u_1) = g(x^2,1) = \frac{2}{3}, \quad g(v_3,u_2) = g(x^2,x) = 0$$

$\|u_1\|^2 = \|1\|^2 = (1,1) = 2.$

$B' = \left\{ 1, x, x^2 - \frac{1}{3} \right\}$ base octogonal.

$\|u_2\|^2 = g(x,x) = 2/3,$

$\|u_3\|^2 = g\left(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right) = \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9}\, dx = \left.\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9}\right]_{-1}^{1}$

$= 8/45$

$B'' = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}$ base octonormal.

9 $\mathbb{R}^3$, g métrica / $A = M(g, B_u)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) g euclídea?

$\left.\begin{array}{l} \det(A_1) = 3 > 0 \\ \det(A_2) = 2 > 0 \\ \det(A_3) = 3 - 1 - 1 = 1 > 0 \end{array}\right\}$ g euclídea.

b) Ángulo que forman $u = (1,1,0)$, $v = (0,-1,1)$.

$$\cos\theta = \frac{g(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \to \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$g(u,v) = (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\|u\|^2 = g(u,u) = (2\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \to \|u\| = \sqrt{2}.$$

$$\|v\|^2 = g(v,v) = (0\ -1\ 1) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ -1\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

© Proyección ortogonal y simetría ortogonal de $u=(2,1,0)$ con respecto $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}$.

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, z=-x-y\}=\{(x,y,-x-y) \,/\, x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$=L(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\})$$
$$\hookrightarrow B_U=\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$$

$$U^{\perp}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} (1\ 0\ -1)\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \\ (0\ 1\ -1)\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \end{array}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} (2\ -1\ 0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \rightarrow 2x-y=0 \\ (-2\ 1\ -1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \rightarrow -2x+y-z=0 \end{array}\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} y=2x \\ z=0 \end{array}\right\}=\{(x,2x,0) \,/\, x\in\mathbb{R}\}=L(\{(1,2,0)\})$$

$$\hookrightarrow B_{U^{\perp}}=\{(1,2,0)\}$$

$$u=\underset{U}{\underset{\in}{u_1}}+\underset{U^{\perp}}{\underset{\in}{u_2}} \qquad P_U(u)=u_1$$
$$S_U(u)=u_1-u_2.$$

$$u=(2,1,0)=a(1,0,-1)+b(0,1,-1)+c(1,2,0)=(a+c,\,b+2c,\,-a-b)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2=a+c \\ 1=b+2c \\ 0=-a-b \end{array}\right\} \begin{array}{l} c=2-a \longrightarrow c=1 \\ \rightarrow 1=b+4-2a=-a+4-2a \rightarrow -3=-3a \\ \rightarrow b=-a \longrightarrow b=-1 \qquad \hookrightarrow a=1 \end{array}$$

$$\boxed{P_U(u)=(1,0,-1)-(0,1,-1) \Rightarrow P_U(u)=(1,-1,0)}$$

$$\boxed{S_U(u)=(1,-1,0)-(1,2,0)=(0,-3,0)}$$

(15) (V, g) espacio vectorial euclídeo, tridimensional.

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = C$$

¿f autoadjunto

f autoadjunto en $(V,g) \Leftrightarrow M(g,B)M(f,B)$ es simétrica

$$\Leftrightarrow AC = (AC)^t \Leftrightarrow AC = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (AC)^t.$$

$\Rightarrow f$ es autoadjunto

¿Base ortonormal de (V,g) formada por los vectores propios de f?

$$P_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \rightarrow a_{\lambda_1} = 1 \\ \lambda_2 = 3 \rightarrow a_{\lambda_2} = 2. \end{cases}$$

$$U_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} y = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \rightarrow z = -2x \end{matrix} \right\} = L(\{\underbrace{(1,0,-2)}_{u_1}\})$$

$$\|u_1\|^2 = (1 \ \ 0 \ \ -2)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \ \ 0 \ \ -2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.$$

$\Rightarrow B_{U_{\lambda_1}} = \{\underbrace{(1,0,-2)}_{u_1}\}$ base ortonormal de U_{λ_1}

$$U_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -x+y=0 \to y = x \} = L(\{ \underbrace{(0,0,1)}_{u_2}, \underbrace{(1,1,0)}_{u_3} \})$$

$$\|u_3\|^2 = (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (4\ 1\ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5.$$

Tengo que calcular una base ortonormal de U_{λ_2}:

$v_1 = u_2 = (0,0,1)$.

$$v_2 = u_3 - \frac{g(u_3, v_1)}{\|v_1\|} v_1 = (1,1,0) - (0,0,2) = (1,1,-2).$$

$$\|v_1\| = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$g(u_3, v_1) = (2\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$\|v_2\| = 1$

Base ortonormal de U_{λ_2}: $\{(0,0,1), (1,1,-2)\}$

$\Rightarrow$ Base ortonormal de (V, g) formada por los vectores propios de f:

$$B' = \{ (1,0,-2), (0,0,1), (1,1,-2) \}$$ V

Scanned with CamScanner

(14) $\mathbb{R}^3$, f endomorfismo, $B = \{(1,0,1), (-1,2,1), (1,1,1)\}$.

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿f es autoadjunto con respecto a g_u de $\mathbb{R}^3$?

f autoadjunto $\Leftrightarrow M(g_u,B)M(f,B)$ es simétrica.

¿$M(g_u,B)$?

$$g_u((1,0,1),(1,0,1)) = (1,0,1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2$$

$$g_u((1,0,1),(-1,2,1)) = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$g_u((1,0,1),(1,1,1)) = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2.$$

$$g_u((-1,2,1),(1,0,1)) = (-1\ 2\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$g_u((-1,2,1),(-1,2,1)) = (-1\ 2\ 1)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = 6$$

$$g_u((-1,2,1),(1,1,1)) = (-1,2\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2.$$

$$g_u((1,1,1),(1,0,1)) = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2.$$

$$g_u((1,1,1),(-1,2,1)) = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = 2$$

$$g_u((1,1,1),(1,1,1)) = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3$$

$$M(g_u,B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M(g_u,B)\cdot M(f,B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 16 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

es simétrica $\Rightarrow f$ es autoadjunto.

¿Base ortonormal de vectores propios de f?

$$P_f = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\overbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}^{2-3\lambda+\lambda^2} + 2 + 2 + 4 - 2\lambda + 1 - \lambda - 8 + 2\lambda =$$

$$= 8 - 12\lambda + 4\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 1 - \lambda = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9$$

	-1	7	-15	9
1		-1	6	-9
	-1	6	-9	0
3		-3	9	
	-1	3	0	
3		-3		
	-1	0		

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 , & a_{\lambda_1} = 1 \\ \lambda_2 = 3 , & a_{\lambda_2} = 2 . \end{array}\right\}$$

$$U_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x+y+z = 0 \to z = -2x \\ -x+y = 0 \to y = x \end{array} \right\} = L(\{(1,1,-2)\})$$

$$\hookrightarrow B_{\lambda_1} = \{(1,1,-2)\}$$

$$U_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ 1 & -1 & 1 \\ \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y+z = 0 \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = y-x \}$$

$$= L(\{(1,0,-1),(0,1,1)\})$$

$$\hookrightarrow B_{\lambda_2} = \{(1,0,-1),(0,1,1)\}.$$

$$B = \{(1,1,-2),(1,0,-1),(0,1,1)\} \overset{\{v_1,v_2,v_3\}.}{=}$$ base formada por vectores propios de f.

Ahora calculamos una ortonormal a partir de esta usando el método de Gram-Smith.

$$u_1 = v_1 = (1,1,-2).$$

$$u_2 = v_2 - \frac{f(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,1,-2) = \left(1/2, -1/2, 0\right)$$

$$f(v_2,u_1) = (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (6 \ -3 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3.$$

$$\|u_1\|^2 = f(u_1,u_1) = (1 \ 1 \ -2) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (9 \ -3 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6$$

$$u_3 = v_3 - \frac{f(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{f(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2}u_2 \overset{\circledast}{=}$$

$$f(v_3,u_1) = (0\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1\ \ 4\ \ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1$$

$$f(v_3,u_2) = (-1\ \ 4\ \ 2)\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = -5/2.$$

$$\|u_2\|^2 = f(u_2,u_2) = (1/2,\ -1/2\ \ 0)\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}\ \ -\frac{3}{2}\ \ 0\right)\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$\overset{\circledast}{=} (0,1,1) - \frac{1}{6}(1,1,-2) - \frac{5}{3}\left(1/2,-1/2,0\right) = \left(-1,\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

$$\|u_3\|^2 = f(u_3,u_3) = \left(-1,\ \frac{5}{3}\ \ \frac{4}{3}\right)\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = (-5\ \ 7\ \ 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{58}{3}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2),\ \frac{\sqrt{6}}{3}(1/2,-1/2,0),\ \frac{\sqrt{174}}{58}\left(-1,\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right) \right\}$$

(12) V plano vectorial. B base de V, g métrica en V

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$\forall a \in \mathbb{R}$: $f_a : V \longrightarrow V$ dado por:

$$M(f_a, B) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = C.$$

ⓐ g métrica euclídea sobre V?

$$\left.\begin{array}{l} \det(A_1) = 2 > 0 \\ \det(A_2) = \det(A) = 3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ es métrica euclídea.}$$

¿ valores de a tq. f_a es autoadjunto en (V,g).

f_a autoadjunto $\Leftrightarrow$ $\underbrace{M(g,B)}_{A} \cdot \underbrace{M(f_a,B)}_{B}$ es simétrica $\Rightarrow$

$\Rightarrow (AB) = (AB)^t$

$$\left.\begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2a+1 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix} \\ (AB)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow f_a \text{ autoadj.} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2a+1 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f_a$ es autoadjunto $\Leftrightarrow 2a+1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{a=0}$

ⓑ f_a es una isometría en $(V,g) \Leftrightarrow A = C^t \cdot A \cdot C$.

$$C^t A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a+1 \\ -a+1 & a^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow -a+1 = 1 . \Rightarrow \boxed{a=0}$

$\Rightarrow$ Si $a=0 \Rightarrow f_a$ es isometría en (V,g).

⑥ $\mathbb{R}^4 \rightarrow g_u$ métrica usual. Base ortonormal de (U, g_u),

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x+4y-z+3t=0\}.$$

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / z = 2x+4y+3t\} =$$
$$= \{(x,y,2x+4y+3t,t) \ / \ x,y,t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= L(\{(1,0,2,0), (0,1,4,0), (0,0,3,1)\})$$

$$\rightarrow B_U = \{\underbrace{(1,0,2,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,4,0)}_{v_2}, \underbrace{(0,0,3,1)}_{v_3}\}.$$

Método de Gram Smith.

Cuál es g? o $M(g, B_u)$

$$u_1 = v_1 = (1,0,2,0).$$

$$u_2 = v_2 - \frac{g(v_2,u_1)}{\|u_1\|} u_1 := (0,1,4,0).$$

(13) f, h endomorfismos $f, h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$f(x,y,z) = (2x+y+z,\ x+2y+z,\ x+y+2z)$

$$M(h, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3/2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

¿f, h autoadjuntos respecto de la métrica euclídea usual g_0?

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

f es autoadjunto $\Leftrightarrow$ $\underbrace{M(g_0, B_u)}_{I_3} \cdot M(f, B_u)$ es simétrica

$\Rightarrow M(g_0, B_u)\, M(f, B_u) = M(f, B_u)$ y esta es simétrica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es autoadjunto.

g es autoadjunto $\Leftrightarrow$ $M(g_0, B_u) \cdot M(h, B_u)$ es simétrica.

$\Rightarrow M(g_0, B_u)\, M(h, B_u) = M(h, B_u)$ es simétrica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ h es autoadjunto.

¿Dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ en las que las matrices de f y h sean diagonales?

(1) $B_u = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Usamos el método de Gram-Smitdh.

$u_1 = v_1 = (1,0,0)$.

$$u_2 = v_2 - \frac{f(v_2, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,0) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$f(v_2, u_1) = (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\|u_1\|^2 = g(u_1, u_1) = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (2\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$u_3 = v_3 - \frac{f(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{f(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2} u_2 \overset{=}{*}$$

$$f(v_3,u_2) = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 2)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$f(v_3,u_1) = (1\ 1\ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|u_2\|^2 = (-1/2\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\ \ \tfrac{3}{2}\ \ \tfrac{1}{2})\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$\overset{*}{=} (0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,0) - \frac{1}{3}(-1/2,1,0) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, 1\right)$$

$$B = \left\{ (1,0,0), \left(\frac{-1}{2},1,0\right), \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, 1\right) \right\}$$ base ortogonal.

$$\|u_3\|^2 = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, 1\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(0, 0, \frac{4}{3}\right)\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}$$

$$B = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0), \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{-1}{2},1,0\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, 1\right) \right\}$$

base ortonormal de f.

De la misma forma obtenemos una base ortonormal de h.

(Enunciado cambiado)

(13) $f, h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (2x+y+z,\ x+2y+z,\ x+y+2z)$$

$$M(h, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3/2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Demostrar f, h son autoadjuntos respecto métrica euclídea usual g_u. Calcular dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ tq f y h sean diagonales.

$f \in End(V)$

(V, g) espacio vectorial euclídeo.

f autoadjunto $\Leftrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{I_3}}{M(g,B)} \cdot M(f,B)$ es simétrica,

B base cualquiera $\Leftrightarrow M(f,B)$ es simétrica si B es ortonormal.

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcular una base ortonormal de g_0 formada por vectores propios de h.

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3 + \cancel{2} - \cancel{2} + \lambda - 2 + \lambda - 2 + \lambda$$

$$= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 4 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4.$$

	-1	6	-9	4
1		-1	5	-4
	-1	5	-4	0
1		-1	4	
	-1	4	0	
4		-4		
	-1	0		

$P_f(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

$\lambda_1 = 1 \longrightarrow a_{\lambda_1} = 2.$

$\lambda_2 = 4 \longrightarrow a_{\lambda_2} = 1.$

$\circ\ V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underset{\hookrightarrow z=-x-y}{x+y+z=0} \right\} = L\left(\{ (1,-1,0),(0,1,-1) \} \right)$

$\hookrightarrow B_1 = \{ (1,-1,0),(0,1,-1) \}$

Necesitamos una base ortonormal (Gram-Smidt).

$u_1 = v_1 = (1,-1,0)$.

$\|u_1\|^2 = (1,-1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,-1,0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$

$u_2 = v_2 - \dfrac{g(v_2,u_1)}{\|u_1\|} u_1 = (0,1,-1) + \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right)$

$g(v_2,u_1) = (1\ -1\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$

$\|u_2\|^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -1 \right) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$

Base ortonormal de V_{λ_1}: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\ \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right) \right\}$

$\circ\ V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{matrix} \right\} = \{ (x,x,x) / x \in \mathbb{R} \}$

$= L\left(\{ (1,1,1) \} \right) \longrightarrow B_2 = \{ (1,1,1) \}$

$\|(1,1,1)\|^2 = (1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$

Base ortonormal de V_{λ_2} : $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1) \right\}$

$\Rightarrow$ Base ortonormal de g_0 formada por vectores propios de f:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0), \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right), \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1) \right\}$$

19 Describir las isometrías de $(\mathbb{R}^2, g_u)$ tq matrices en B_u :

$$M(f,B_u) = A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad M(h,B_u) = C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

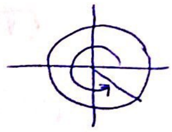
$f, h \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2, g_u)$

- $\det(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$$\boxed{\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}}$$

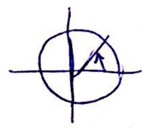
* En caso de que no quisiéramos coger la base que nos da el ejercicio :

$$B' = \{(0,1),(1,0)\}.$$

$$f(0,1) = (0 \;\; 1)\begin{pmatrix} \cancel{1/\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \\ \cancel{-1/\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$f(1,0) = (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} \cancel{1/\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \\ \cancel{-1/\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

$$M(f,B') = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

- $\text{Det}(C) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow$ simetría axial.

$$U = V_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} - 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)x + \frac{1}{\sqrt{2}} y = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (1-\sqrt{2})x + y = 0 \right\} = L(\{(1, \sqrt{2}-1)\})$$

OTRA FORMA

$U = L(\{(a,b)\})$

$U^{\perp} = L(\{(b,-a)\})$

$$U^{\perp} = L(\{(\sqrt{2}-1, -1)\})$$

$$\|(1, \sqrt{2}-1)\| = \sqrt{1+2-2\sqrt{2}+1} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$\|(\sqrt{2}-1, -1)\| = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(1, \sqrt{2}-1), \; \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(\sqrt{2}-1, -1) \right\}$$

$$M(h, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

19 $(\mathbb{R}^2, g_u)$. $\quad f, h \in \text{Iso}(\mathbb{R}^2, g_u)$

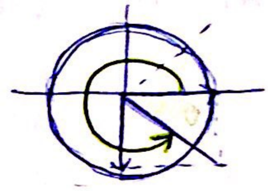
$$M(f, B_u) = A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad M(g, B_u) = G = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- $\boxed{A}$

$\det(A) = 1 \Rightarrow$ Rotación de ángulo θ.

$\text{traza}(A) = \sqrt{2} = 2\cos(\theta)$

$$M(f, B_u) = A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \boxed{\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}}$$

- $\boxed{G}$

$\det(G) = -1 \Rightarrow$ Simetría axial respecto de una recta. V_1:

$\text{traza}(G) = 0$

Hay dos valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1 \Rightarrow g$ diagonalizable.

Si $V_1 = \{u_1\}$, $V_{-1} = \{u_2\}$, $u_1 \perp u_2$ y la matriz de g en la base $\{u_1, u_2\}$ será:

$$M(f, \{u_1, u_2\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la recta respecto de la cual es simetría

$$V_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) x + \frac{1}{\sqrt{2}} y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (1 - \sqrt{2}) x + y = 0 \Rightarrow y = (\sqrt{2} - 1) x \right\} =$$

$$= L(\{(1, \sqrt{2} - 1)\})$$

(20) (V,g) plano vect. euclídeo. B base de V:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} = G.$$

$f, h : V \longrightarrow V$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = A_1 \quad M(h,B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = A_2$$

son f, h isometrías de (V,g)?

- f es isometría de $(V,g) \Leftrightarrow G = A_1^t \cdot G \cdot A_1$

$$A_1^t G \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} = G \Rightarrow f \text{ es isometría.}$$

Se cumple que $g(f_1(x), f_1(y)) = g(x,y)$.

- h es isometría ~~de~~ $(V,g) \Leftrightarrow G = A_2^t G A_2$.

$$A_2^t \cdot G \cdot A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -7 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -16 \\ -16 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} = G.$$

$\Rightarrow h$ es isometría de $(V,g) \rightsquigarrow g(h_1(x), h_1(y)) = g(x,y)$.

Ahora vamos a determinar qué isometrías son:

$\det(f) = \det(A_1) = -1 \Rightarrow f$ es una simetría ortogonal respecto V_1

$\det(h) = \det(A_2) = 1 \Rightarrow h$ es un giro

f " simetría axial.

calculamos $U = V_1$

$$V_1 = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{l} 6x - 12y = 0 \\ 4x - 8y = 0 \end{array} \right\}$$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x-2y=0\} = L(\{(2,1)\})$

- h es un giro.

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{traza}(h) = \text{traza}(A_2) = \sqrt{2} = 2\cos(\theta).$$

$$\hookrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

$\Rightarrow$ h es una rotación de ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ f es una simetría axial. respecto de la recta V_1.

Veamos hacia donde gira (h):

$$h(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/\sqrt{2} \\ -5/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Es negativo $\Rightarrow$ El giro es en el sentido contrario de las agujas del reloj.

(21) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(x-2y-2z, -2x+y-2z, 2x+2y-z)$.

ⓐ f es isometría cuando usamos g_0?

f isometría de $(\mathbb{R}^3, g_0) \Leftrightarrow \underbrace{M(g_0, B_u)}_{I_3} = M(f, B_u)^t \underbrace{M(g_0, B_u)}_{I_3} M(f, B_u)$

$$M(f, B_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M(g_0, B_u) = I_3.$$

$$M(f, B_u)^t M(f, B_u) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow f \in Iso(\mathbb{R}^3, g_0)$$

ⓑ ¿valores propios de f y sus multiplicidades?

$$P_f(\lambda) = \det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-3\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-3\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -1-3\lambda \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{27}\left((1-3\lambda)^2(-1-3\lambda) + 8 + 8 + 4 - 12\lambda + 4 + 12\lambda + 4 - 12\lambda\right) =$$

$$= \frac{1}{27}(-1 + 6\lambda - 9\lambda^2 - 3\lambda + 18\lambda^2 - 27\lambda^3 + 2 - 12\lambda) =$$

$$= \frac{1}{27}(-27\lambda^3 + 9\lambda^2 - 9\lambda + 27) = -\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda + 1.$$

$3\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 3 = 0$

	3	-1	1	-3
1		3	2	3
	3	2	3	0

$3\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$

$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-36}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-32}}{6}$ No tiene raíces reales.

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \quad \boxed{a_{\lambda_1} = 1}$

$$\det(f) = \det(M(f, B_u)) = 1 \begin{cases} \text{simetría axial respecto } V_1. \\ \text{rotación de ángulo } \theta \text{ con eje } V_1 \end{cases}$$

$$\text{traza}(M(f, B_u)) = \frac{1}{3} = 1 + 2\cos(\theta)$$

$\hookrightarrow \cos\theta = \frac{-1}{3} \Rightarrow$ Es un giro de ángulo $\boxed{\theta = 109'47}$

Vamos a calcular el eje respecto al que gira:

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cancel{-2} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} x+y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{matrix} \right. \begin{matrix} \to z = -x-y \to z=0 \\ \to x+y-2x-2y=0 \\ \hookrightarrow -x=y \end{matrix}$$

$$= \{ (x,-x,0) \,/\, x \in \mathbb{R} \} = L(\{(1,-1,0)\})$$

Plano donde hace el giro $\to$ Plano perpendicular

$$V_1^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (1 \;\; -1 \;\; 0)\, I_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = x \} = L(\{(1,1,0),(0,0,1)\})$$

(...)

(22)

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$ → es una rotación / es una simetría axial.

$\text{traza}(A) = \frac{1}{\sqrt{5}} = 1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 106'045}$

Vamos a calcular el eje:

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{5}}{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{c} (-5+\sqrt{5})x + 2\sqrt{5}z = 0 \\ 2\sqrt{5}x - 5y - \sqrt{5}z = 0 \\ y = z \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - \sqrt{5}z - z = 0 \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}z \right\}$$

$$= \left\{ ((1+\sqrt{5})z, 2z, 2z),\ z \in \mathbb{R} \right\} = L(\{(1+\sqrt{5}, 2, 2)\})$$

mejor dejarlo indicado.

$\Rightarrow f_A$ es una rotación de ángulo 106'045 con eje: la recta vectorial dada por el subespacio propio V_1

$$D = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

det(D) = 1 ⟨ es un giro / es una simetría axial.

traza(D) = −1 = 1 + 2cos θ , cos θ = −1 → θ = π ⇒ simetría

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ \cancel{x+y-2z=0} \end{array} \right\}$$

$x = -z + 2z = z$

$$\begin{array}{r} -2x+y+z=0 \\ 2x-4y+2z=0 \\ \hline -3y+3z=0 \end{array}$$

$\hookrightarrow +y = z$

$= L(\{(1,1,1)\})$

⇒ f_D es una simetría axial. respecto a la recta $V_1 = L(\{(1,1,1)\})$

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

det(E) = −1 ⟨ simetría especular. / composición

traza(E) = 1 = −1 + 2cos θ → cos θ = 1 ⇒ θ = 0.

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} \cancel{-2/3} & \cancel{-2/3} & \cancel{2/3} \\ \cancel{-2/3} & \cancel{-2/3} & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0 \to z = x + y\} =$

$= L(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$, dim $V_1 = 1$., dim $V_{-1} = 2$.

⇒ f_E es una simetría ~~axial~~ especular respecto al plano.

$V_1 = L(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$ ✓

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(C) = -1 <$ simetría especular respecto V_1 / composición de simetría ~~axial~~ con giro

$\text{traza}(C) = 0 = -1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta \neq 0, \Pi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ES una composición.

f_C es una composición de una simetría especular respecto al plano $V^\perp$ y un giro respecto de la recta V_{-1} de ángulo θ.

$$V_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} y = -x \\ \cancel{y = z} \\ z = -x \end{array} \right\} = L(\{(1,-1,-1)\})$$

$$V_{-1}^\perp = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (1\ -1\ -1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (-1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y + z \}$$

$$= L(\{(1,1,0),(1,0,1)\}) = \Pi$$

Ahora vamos a determinar el ángulo de la rotación. Para ello tenemos que sacar una base ortonormal de $V_{-1}^\perp$ a partir de la base $B = \{\underbrace{(1,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{v_2}\}$ de dicho subespacio. (Gram Schmidt)

$$u_1 = (1,1,0)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{g_u(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (1/2, -1/2, 1)$$

$$g_u(v_2,u_1) = (1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|u_1\|^2 = g(u_1,u_1) = (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\|u_2\|^2 = g(u_2,u_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right)\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow \tilde{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{\sqrt{6}}{3}\left(1/2, -1/2, 1\right) \right\} =$$

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2) \right\}$$ base ortonormal de Π.

$$\Rightarrow M(f|_\Pi, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

coordenadas de $\underbrace{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)}_{\text{Vamos a calcularlo:}}$ en la base $\tilde{B}$

Abuso de notación.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,0,1)$$

|| (otra forma)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} f((1,1,0)) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left((1,0,0)+(0,1,0)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1).$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \cos\theta \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}_{\text{Primer vector de } \tilde{B}} + \operatorname{sen}\theta \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2)}_{\text{segundo vector de } \tilde{B}}$$

obtener $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

Producto escalar

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{sen}\theta$$

$$0 = \cos\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{sen}\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\operatorname{sen}\theta. \rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{\theta = \frac{\Pi}{3}}$$

(23) $\mathbb{R}_2[x]$, g_0 métrica euclídea. $B=\{1,x,x^2\}$ ortonormal.

$f:\mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$.

$$f(a_0+a_1x+a_2x^2)=\frac{1}{3}\left((2a_0-a_1+2a_2)+(-a_0+2a_1+2a_2)x+(2a_0+2a_1-a_2)x^2\right)$$

$$A=M(f,B)=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G=M(g,B)=I_3=\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$$

f es una isometría $\Leftrightarrow$ $G=A^tGA$.

$$A^tGA=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9&0&0\\0&9&0\\0&0&9 \end{pmatrix}=I_3=G.$$

$\Rightarrow$ f es una isometría en $(\mathbb{R}_2[x],g)$

$f\in \operatorname{Iso}(\mathbb{R}_2[x],g)$.

$\det(A)=\frac{1}{3^3}(-27)=-1$ ⟨ simetría especular / composición.

$$\exists B' \,/\, M(f,B')=\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)=\begin{pmatrix} -1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{traza}(A)=1$ $\Rightarrow$ Tenemos que f es una simetría especular respecto del plano $\Pi=V_1$.

$\overset{\shortparallel}{-1+2\cos\theta}$

$\Leftrightarrow \theta=0$

$$V_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle/\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / -x-y+2z=0 \Rightarrow y=2z-x\}$$

$$=\{(x,2z-x,z)\,/\,x,z\in\mathbb{R}\}=L(\{(1,-1,0),(0,2,1)\}).$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda^3 + 1) = -(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$$

$\dim V_{-1} = 1$

$\dim V_1 = 0$

$\det C = -1$

f es la composición de una isometría especular respecto al plano $\Pi = V_{-1}^{\perp}$ y una rotación respecto de la recta $L = V_{-1}$

$$V_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ldots \right.$$

$$\Pi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y - z = 0 \} = \{ \ldots \} \ldots = L(\{ w_1, w_2 \})$$

$u_1 = (1,1,0)$

$u_2 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) = \frac{1}{2}(1,-1,2).$

(*)

$$\zeta = V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} 2x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y = z \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ (1,1,1) \right\}\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda^3 + 1) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

$\dim V_{-1} = 1$

$\dim V_1 = 0$

$\det C = -1$

f es la composición de una isometría especular respecto al plano $\Pi = V_{-1}^{\perp}$ y una rotación respecto de la recta $L = V_{-1}$

$$V_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \dots \right.$$

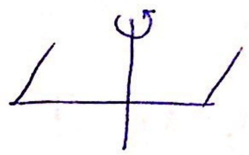
$$\Pi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y - z = 0 \} = \{ \dots \} \dots = L(\{ w_1, w_2 \})$$

$u_1 = (1,1,0)$

$$u_2 = (1,0,1) - \tfrac{1}{2}(1,1,0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1 \right) = \tfrac{1}{2}(1,-1,2).$$

(*)

(23) $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\left(\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1) \right\}\right) = L^{\perp}$



$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1) \right)$

$$M(f|_{L^{\perp}}, B) = \begin{pmatrix} -1/3 & -4/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(1,0,0) + f(0,1,0) \right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,-1,4).$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \frac{1}{6}(-2) = \frac{-1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)(0,0,1) = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

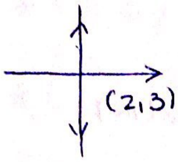
$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$. $M(f|_\Pi, B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \frac{1}{2} = \cos\theta \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen}\theta . \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\otimes\ B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \right\}$

(25) $\mathbb{R}^2$ con su métrica euclídea usual.

ⓐ $M(f, B_u)$? f simetría axial con respecto a $U = L((2,3))$



Buscamos ~~el~~ ortogonal a $(2,3) \to (-3,2)$.

$\hookrightarrow (2\ 3)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 0$

$(2\ 3)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 0 \Rightarrow x = \frac{-3y}{2}$.

$\hookrightarrow (-3y, 2y)$

$B = ((2,3), (-3,2))$

$\hookrightarrow \quad M(f, B) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (por ser simetría axial)

$$M(f, B_u) = \underbrace{M(1_{\mathbb{R}^3}, B, B_u)}_{\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}} \underbrace{M(f, B)}_{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}} \underbrace{M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, B)}_{\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{13}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}}} =$$

$$= \begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{13}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}2 & +3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to \quad M(f, B_u) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}-5 & 12\\ 12 & 5\end{pmatrix}$$

ⓑ Ecuaciones de un giro en las coords usuales que lleve.

$(-4, 3) \longrightarrow (5, 0)$

Para ello tienen que tener la misma norma. La tienen y vale 5

$M(f, B_u) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ (por ser un giro).

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4\cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta = 5\\ -4\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta = 0\end{array}\right\} \to \cos\theta = \frac{4}{3}\operatorname{sen}\theta$$

$$-\frac{16}{3}\operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}\theta = 5 \Rightarrow -16\operatorname{sen}\theta - 9\operatorname{sen}\theta = 15$$

$$-25\operatorname{sen}\theta = 15 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{-3}{5}}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\cancel{3}}\cdot\frac{-\cancel{3}}{5} \rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{-4}{5}}$$

24) $(S_2(\mathbb{R}), g)$, $g(A,C) = tr(AC)$. $f: S_2(\mathbb{R}) \rightarrow S_2(\mathbb{R})$

$$f\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}$$

f isometría de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ clasificarla.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\rightarrow G = M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$f\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$A=M(f,B)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1/\sqrt{2}&0&0\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$$

f es isometría de $(S_2(\mathbb{R}),g) \Leftrightarrow G=A^tGA$.

$$A^tGA=\begin{pmatrix}0&1/\sqrt{2}&0\\1&0&-\sqrt{2}\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1/\sqrt{2}&0&0\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\1&0&-\sqrt{2}\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1/\sqrt{2}&0&0\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=G.$$

$\Rightarrow f$ es isometría.

$\det(A)=-1$ $\begin{cases}\text{Simetría especular respecto un plano } V_{-1}\\ \text{composición de giro con simetría.}\end{cases}$

$\text{traza}(A)=0=-1+2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ es una composición de giro y simetría.

$$V_{-1}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R}) \,/\, \begin{pmatrix}+1&0&1\\1/\sqrt{2}&+1&0\\0&-\sqrt{2}&+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}x+z=0\rightarrow z=-x\\ 1/\sqrt{2}\,x+y=0\rightarrow y=-1/\sqrt{2}\,x\\ -\sqrt{2}y+z=0\end{array}\right\}=L(\{(\sqrt{2},-1,-\sqrt{2})\})$$

$$\Rightarrow \quad V_{-1}=L(\{(-2,\sqrt{2},2)\})$$

El plano donde estamos girando sería el perpendicular a la recta:

$$V_{-1}^{\perp} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -2a + 2\sqrt{2}b + 2c = 0 \right\}$$

$$a - \sqrt{2}b - c = 0 \Rightarrow c = a - \sqrt{2}b$$

$$= \left\{ (a,b,a-\sqrt{2}b) \,/\, a,b \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ (1,0,1), (0,1,-\sqrt{2}) \right\} \right)$$

- Sentido del giro?

$$\cancel{f(1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)} \quad \text{NO}$$

$$f(0,1,-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$$

< 0

$\Rightarrow$ El giro es en el sentido de las agujas del reloj.

(27) $(\mathbb{R}^3, g_u)$ ¿$M(h\circ\sigma_u, B_u)$? σ_u : simetría ortogonal con respecto al plano U. ($z=0$)

$U=\{z=0\}$

h : giro de ángulo $\theta=\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje OX.

¿clasificar la métrica y describir la isometría?

$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z=0\} = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$.

$U^{\perp}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=0=y\} = L(\{(0,0,1)\})$.

$$M(\sigma_u, B_u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$B_u=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$R=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \begin{matrix}y=0\\z=0\end{matrix}\right\} = L(\{(1,0,0)\}) \to$ eje OX

$R^{\perp}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R} / x=0\} = L(\{(0,1,0),(0,0,1)\})$.

B_u es base ortonormal:

$$M(h,B_u)=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\0&\operatorname{sen}\theta&\cos\theta\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1/2&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&1/2\end{array}\right)$$

$$M(h\circ\sigma_u, B_u)=M(h,B_u)\cdot M(\sigma_u,B_u)=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1/2&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&1/2\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1&0\\0&0&-1\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1/2&\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&-1/2\end{array}\right)$$

Simetría especular respecto al plano V_1

$\Pi=V_1=L(\{(1,0,0),(0,\sqrt{3},1)\})$ (?)

⑥ $\mathbb{R}^4$ con su métrica euclídea usual : g_u .
¿ Base ortonormal (U, g_u) , $U \subseteq \mathbb{R}^4$

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x+4y-z+3t=0\}$$
$$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / z = 2x+4y+3t\} =$$
$$= \{(x,y,2x+4y+3t,t),\ x,y,t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= L(\{(1,0,2,0),(0,1,4,0),(0,0,3,1)\})$$

$B = \{(1,0,2,0),(0,1,4,0),(0,0,3,1)\}$. base de U .

calculamos una base ortonormal de (U, g_u) a partir de $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$u_1 = v_1 = (1,0,2,0) \ .$$

$$u_2 = v_2 - \frac{g_u(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 = (0,1,4,0) - \frac{8}{5}(1,0,2,0) = \left(-\frac{8}{5},\ 1,\ \frac{4}{5},\ 0\right)$$

$$g(v_2,u_1) = (0,1\ 4\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} = 8$$

$$g(u_1,u_1) = \|u_1\|^2 = (1\ 0\ 2\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} = 5$$

$$u_3 = v_3 - \frac{g_u(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{g_u(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2} u_2 = (0,0,3,1) - \frac{6}{5}(1,0,2,0) - \frac{4}{7}\left(\frac{-8}{5},1,\frac{4}{5},0\right)$$

$$= \left(\frac{-2}{7},\ \frac{-4}{7},\ \frac{1}{7},\ 1\right)$$

$$g(v_3,u_1) = (0,0\ 3\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} = 6$$

$$g(v_3,u_2) = (0\ 0\ 3\ 1)\begin{pmatrix}-8/5\\1\\4/5\\0\end{pmatrix} = \frac{12}{5}$$

$$\|u_2\|^2 = \left(\frac{-8}{5}\ 1\ \frac{4}{5}\ 0\right)\begin{pmatrix}-8/5\\1\\4/5\\0\end{pmatrix} = \frac{21}{5}$$

$$\|u_3\|^2 = \left(\frac{-2}{7}, \frac{-4}{7}\ \frac{1}{7}\ 1\right)\begin{pmatrix}-2/7\\-4/7\\1/7\\1\end{pmatrix} = \frac{10}{7}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5}(1,0,2,0),\ \frac{\sqrt{105}}{21}\left(\frac{-8}{5}, 1, \frac{4}{5}, 0\right), \frac{\sqrt{70}}{10}\left(\frac{-2}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{1}{7}, 1\right) \right\}$$

base ortonormal de (U, g_4)

$u_4 = (1,0,0,0)$.

$$\|u_4\|^2 = (1\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1.$$

$$\rightarrow B' = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5}(1,0,2,0), \frac{\sqrt{105}}{21}\left(\frac{-8}{5}, 1, \frac{4}{5}, 0\right), \frac{\sqrt{70}}{10}\left(\frac{-2}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{1}{7}, 1\right), (1,0,0,0) \right\}$$

Base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

¿coords de $u = (1,0,0,1)$ en B'?

Scanned with CamScanner

(17) g métrica de $\mathbb{R}^3$ tq

$$A = M(g, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

¿Valores propios?

$$P_g(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & b \\ 0 & b & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (a-\lambda)\underbrace{(1-\lambda)^2}_{1-2\lambda+\lambda^2} - b^2a + b^2\lambda = a - 2a\lambda + a\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - b^2a + b^2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + (a+2)\lambda^2 + (-2a-1+b^2)\lambda + (a-b^2a)$$

(26) $(\mathbb{R}^3, g_0)$.

ⓐ ¿$M(f, B_u)$? f rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ con eje:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underset{\hookrightarrow y=-x}{x+y=0}, \underset{\hookrightarrow z=x}{x-z=0}\} = \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$= L(\{(1,-1,1)\}) \longrightarrow$ Eje de rotación.

$$U^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (1 \ -1 \ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} \Rightarrow y = x+z$$

$= L(\{(1,1,0),(0,1,1)\})$

Calculamos una base ortonormal de f a partir de

$B = \{(1,-1,1),(1,1,0),(0,1,1)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$u_1 = v_1 = (1,-1,1)$.

$$\|u_1\|^2 = (1 \ -1 \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$u_2 = v_2 - \cancel{\frac{g_0(v_2,u_1)}{\|u_1\|^2}}^{\,0} u_1 = (1,1,0).$$

$$g_0(v_2,u_1) = (1 \ 1 \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\|u_2\|^2 = (1 \ 1 \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$$u_3 = v_3 - \cancel{\frac{g_0(v_3,u_1)}{\|u_1\|^2}}^{\,0} u_1 - \frac{g_0(v_3,u_2)}{\|u_2\|^2} u_2 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

$$g(v_3,u_1) = (0 \ 1 \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$g(v_3,u_2) = (0 \ 1 \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|u_3\|^2 = (-1/2 \ \ 1/2 \ \ 1)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}.$$

$$\tilde{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{\sqrt{6}}{3}(-1/2, 1/2, 1)\right\}$$

base ortonormal.

(b) Ecuaciones de la simetría ortogonal respecto al plano perpendicular a U. en coords usuales

$$U = L(\{(1,-1,1)\})$$

$$U^{\perp} = L(\{(1,0,-1),(0,1,1)\})$$

$$B = \{\underbrace{(1,-1,1)}_{U}, \underbrace{(1,0,-1),(0,1,1)}_{U^{\perp}}\}.$$

$$M(s_U,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow ¿M(s_U,B_u)?$$

$$\boxed{M(s_U,B_u)} = M(1_{\mathbb{R}^3},B,B_u)\cdot M(S_U,B)\,M(1_{\mathbb{R}^3},B_u,B)$$
$$= M(1_{\mathbb{R}^3},B,B_u)\,M(S_U,B)\,M(1_{\mathbb{R}^3},B,B_u)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

(c) $M(f,B_u)$? $\quad f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ isometría

$f(1,-1,0) = (1,-1,0)$

$f(1,1,5) = (3,3,-3)$

$\det(f) = 1$ → rotación con eje V_1 → simetría axial respecto V_1

Scanned with CamScanner

$(*)$

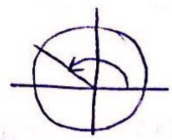
$$M(f, B_u) = M(1_{\mathbb{R}^3}, \tilde{B}, B_u) \cdot M(f, \tilde{B}) \cdot M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, \tilde{B}).$$

$$M(f, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}^{-1}$$

10) $M_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow g(A,C) = tr(A \cdot C^t)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



a) Ángulo entre A y C ?

$$\cos\theta = \frac{g(A,C)}{\|A\| \cdot \|C\|} = \frac{-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 135^\circ$$

$$g(A,C) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -3.$$

$$\|A\|^2 = g(A,A) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$\|C\|^2 = g(C,C) = tr\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 6.$$

b) Proyecciones ortogonales de A sobre $U = L(C)$ y sobre $U^\perp$

$$B_U = \left\{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U^\perp = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, tr\begin{pmatrix} -2a+b & a \\ -2c+d & c \end{pmatrix} = 0\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, -2a+b+c = 0 \Rightarrow c = 2a-b\right\} =$$

$$= L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in U}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U^{\perp}} \right\}$$

La matriz de P_U en la base B está dada por: $M(P_U, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora tenemos que calcular $M(P_U, B_U)$.

$$M(P_U, B_U) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D}^{-1}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$$Adj(D) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$M(P_U, B_U) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(P_{U^{\perp}}, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(P_{U^{\perp}}, B_U) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

© Imagen de A por la simetría respecto del subespacio de $M_2(\mathbb{R})$: W

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ \begin{matrix} a-b+c-d=0 \\ -a+d=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ \begin{matrix} c=b \\ d=a \end{matrix} \right\}$$

$$= L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$