Práctica 3

Imagen de una función de dos variables

3.1. Planteamiento y primeras hipótesis

Consideremos el problema general de averiguar los valores que toma una función real de dos variables reales, problema que sólo abordaremos en casos muy concretos:

Problema. *Calcular la imagen de una función* $f : A \to \mathbb{R}$*, donde* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^2$.

Naturalmente, sin hipótesis sobre A y f, este problema es inabordable, así que imponemos condiciones topológicas, y otras propias del cálculo diferencial, que permiten en muchos casos resolverlo. Concretamente, asumimos de entrada las siguientes hipótesis:

(H.1) *El conjunto* A *es compacto y conexo.*

(H.2) *La función* f *es continua.*

Resultados topológicos bien conocidos nos aseguran entonces que $f(A)$ es un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo cerrado y acotado. Por tanto f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en sendos puntos de A y su imagen es:

$$f(A) = \big[\, \text{mín}\, f(A)\, ,\, \text{máx}\, f(A) \big]$$

Así pues, nuestro problema se reduce a calcular el máximo y el mínimo valor de f, lo que se conoce como un *problema de optimización*. Debemos encontrar los puntos en los que f puede tener un extremo absoluto, lo que nos lleva a distinguir dos casos, dependiendo de la posición que dichos puntos puedan tener en el conjunto A.

3.2. Estudio en los puntos interiores

Aquí es donde entra en juego, igual que ocurría con funciones de una variable, el cálculo diferencial. Para ello imponemos una tercera condición, aunque en algunos casos, se puede debilitar, como veremos.

(H.3) *La función f es parcialmente derivable en todo punto de A°.*

Su utilidad se adivina fácilmente. Si f tiene un extremo absoluto en un punto $(x,y) \in A^\circ$, también tiene un extremo relativo y, siendo f parcialmente derivable en (x,y), podemos aplicar la condición necesaria de extremo relativo: se ha de tener $\nabla f(x,y) = 0$, es decir, (x,y) ha de ser un punto crítico de f. Esto nos permite descartar todos los puntos de A° que no sean puntos críticos, pues f no puede tener un extremo absoluto en esos puntos.

Denotaremos por E_0 al conjunto de puntos críticos de f. En ciertos casos, nuestro problema es abordable, aunque que no se verifique la hipótesis **(H.3)**. Entonces, añadimos a E_0 los puntos de A° en los que f no sea parcialmente derivable. Por tanto, en general, E_0 es el conjunto formado por los puntos críticos de f y los puntos de A° en los que f no es parcialmente derivable. Si f tiene un extremo absoluto en $(x,y) \in A^\circ$, entonces $(x,y) \in E_0$. En la práctica, el conjunto E_0, o al menos $f(E_0)$, que es el que realmente nos interesa, suele ser finito.

3.3. Estudio en la frontera

Claro está que f puede tener un extremo absoluto en un punto de $A \setminus A^\circ = \overline{A} \setminus A^\circ = \operatorname{Fr} A$. Para detectarlo, necesitamos entonces una última hipótesis, que se refiere a la forma concreta que debe tener la frontera de A.

Recordemos que una curva paramétrica en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto de la forma $\gamma(J)$ donde J es un intervalo abierto no vacío en $\mathbb{R}$ y $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ es continua. Dado un intervalo compacto no trivial $I \subset J$ se suele entonces decir que $\gamma(I)$ es un arco paramétrico. Más concretamente, un **arco paramétrico** es un conjunto de la forma $C = g(I)$ donde I es un intervalo compacto no trivial en $\mathbb{R}$ y $g : I \to \mathbb{R}^2$ es continua. Pues bien, suponemos que se verifica lo siguiente:

(H.4) *La frontera de A es unión finita de arcos paramétricos.*

Tenemos pues $\operatorname{Fr} A = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ donde $C_1, \ldots, C_n$ son arcos paramétricos. Estudiamos la posibilidad de que f tenga un extremo absoluto en un arco paramétrico $C \subset \operatorname{Fr} A$, lo que se usará luego con $C = C_k$ para cada $k \in \Delta_n$.

Sea $C = g(I)$ donde I es un intervalo compacto y $g : I \to \mathbb{R}^2$ continua. Entonces C es compacto y conexo, luego $f(C)$ es un intervalo cerrado y acotado. A poco que se piense, sólo nos interesa conocer los extremos de este intervalo, y en ocasiones, $\max f(C)$ y $\min f(C)$ se calculan a simple vista.

En cualquier caso, consideramos la función continua $h = f \circ g$ y tenemos

$$\min f(C) = \max h(I) \qquad \text{y} \qquad \max f(C) = \max h(I)$$

Se trata pues de encontrar la imagen de una función continua en un intervalo compacto, con valores reales, problema que conocemos bien. No obstante, enseguida recordaremos la forma de resolverlo.

En la práctica, no suele ser necesario considerar la función g, ya que en realidad sólo nos interesa h. Suele ser fácil conseguir la igualdad $f(C) = h(I)$ para una función continua h en un intervalo compacto I.

3.4. Primera opción para resolver el problema

Partimos de la igualdad $\operatorname{Fr} A = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, que nos da la frontera de A como una unión finita de arcos paramétricos. Para cada $k \in \Delta_n$ tenemos $f(C_k) = h_k(I_k)$ donde I_k es un intervalo compacto y $h_k : I_k \to \mathbb{R}$ es continua. Calculado el intervalo compacto $h_k(I_k)$, escribimos

$$\alpha_k = \min h_k(I_k) = \min f(C_k) \qquad \text{y} \qquad \beta_k = \max h_k(I_k) = \max f(C_k)$$

para tomar finalmente $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ y $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$. Está bien claro que $\alpha = \min f\big(\operatorname{Fr} A\big)$ y $\beta = \max f(\operatorname{Fr} A)$, luego usando el conjunto E_0 obtenido al estudiar los puntos interiores, concluimos:

$$\min f(A) = \min\big(f(E_0) \cup \{\alpha\}\big) \qquad \text{y} \qquad \max f(A) = \max\big(f(E_0) \cup \{\beta\}\big)$$

3.5. Segunda opción para resolver el problema

Hacemos un tratamiento muy similar, pero anotando los puntos de la frontera de A en los que f puede tener un extremo absoluto. De paso repasamos la forma de resolver nuestro problema para funciones de una variable.

Para $k \in \Delta_n$, volvemos a la igualdad $f(C_k) = h_k(I_k)$, pero ahora prestamos atención al conjunto $T_k \subset I_k$ de los puntos en los que h_k puede tener un extremo absoluto. Está formado por los extremos del intervalo I_k, los puntos de I_k en los que h_k no es derivable, y los puntos $t \in I_k$ en los que h_k es derivable con $h_k'(t) = 0$. Está claro entonces que $\min h_k(I_k) = \min h_k(T_k)$ y $\max h_k(I_k) = \max h_k(T_k)$. Esta era la forma de resolver nuestro problema para funciones de una variable.

Para cada $t \in T_k$ consideramos los puntos $(x,y) \in C_k$ tales que $f(x,y) = h_k(t)$, obteniendo un conjunto $E_k \subset C_k$ tal que $\min f(C_k) = \min f(E_k)$ y $\max f(C_k) = \max f(E_k)$. Como ocurría con E_0, el conjunto E_k, o al menos $f(E_k)$, que es el que realmente nos interesa, suele ser finito.

Formamos ahora el conjunto $S = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$ y tenemos claramente

$$\min f(A) = \min f(S) \qquad \text{y} \qquad \max f(A) = \max f(S)$$

Como el conjunto S, o al menos $f(S)$, suele ser finito, nuestro problema está resuelto.

Como no podía ser de otra forma, este segundo método es equivalente al ofrecido como primera opción. Simplemente es más explícito, pues nos da un conjunto S que contiene todos los puntos en los que f puede tener un extremo absoluto.

3.6. Resumen

Enumeremos los pasos que suelen permitir en la práctica calcular la imagen de una función de dos variables, mediante el método que acabamos de explicar con detalle.

1. *Comprobamos que el conjunto A es compacto y conexo.* Como $A \subset \mathbb{R}^2$, la compacidad no suele presentar problema, se trata de comprobar que A es cerrado y acotado, pero la conexión merece un comentario. El conjunto A suele venir definido como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que verifican varias condiciones, luego es una intersección de conjuntos más sencillos, cada uno de los cuales suele ser convexo. Pero es evidente que toda intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo y, por tanto, conexo.

2. *Comprobamos que f es continua.* Aquí no hay nada nuevo que comentar, se trata de probar la continuidad de un campo escalar, asunto ya tratado en la práctica 1. Comprobada esta segunda hipótesis, ya sabemos que $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado.

3. *Estudiamos la derivabilidad parcial de f en A°.* No olvidemos que se trata de estudiar la derivabilidad de funciones de una sola variable.

4. *Calculamos los puntos críticos de f.* Al igualar a cero las derivadas parciales de f, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que debemos resolver, pues sus soluciones en A°, y sólo en A°, son los puntos críticos de f. Anotamos el conjunto E_0 formado por los puntos críticos de f y, eventualmente, los puntos de A° en los que f no sea parcialmente derivable. El conjunto $f(E_0)$ suele ser finito.

5. *Descomponemos la frontera de A como unión finita de arcos paramétricos.* Dicho de forma más directa, detectada la frontera de A, escribimos

$$f(\operatorname{Fr} A) = \bigcup_{k=1}^{n} f(C_k) = \bigcup_{k=1}^{n} h_k\big([a_k, b_k]\big)$$

donde, para $k \in \Delta_n$, C_k es un arco paramétrico, y lo que realmente importa, $h_k : I_k \to \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo compacto I_k.

6.a. *Para cada $k \in \Delta_n$, calculamos la imagen de h_k.* A veces puede hacerse de un vistazo, pero siempre podemos usar el método explicado para la segunda opción. En cualquier caso, tenemos $\alpha_k = \min h_k(I_k)$ y $\beta_k = \max h_k(I_k)$.

7.a. *Tomamos $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ y $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$*, para concluir que

$$\min f(A) = \min\big(f(E_0) \cup \{\alpha\}\big) \qquad \text{y} \qquad \max f(A) = \max\big(f(E_0) \cup \{\beta\}\big)$$

6.b. *Detectamos los puntos de $\operatorname{Fr} A$ en los que f puede tener un extremo absoluto.* Más concretamente, para cada $k \in \Delta_n$, consideramos el conjunto $T_k \subset I_k$ formado por los extremos de I_k, los puntos de I_k en los que h_k no es derivable, y los puntos $t \in I_k$ donde h_k es derivable con $h_k'(t) = 0$. Formamos entonces un conjunto $E_k \subset C_k$ con todos los puntos $(x, y) \in C_k$ tales que $f(x, y) = h_k(t)$ para algún $t \in T_k$.

7.b. *Obtenemos el conjunto S formado por todos los puntos de A en los que f puede tener un extremo absoluto.* Basta tomar $S = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$. Concluimos por tanto que

$$\min f(A) = \min f(S) \qquad \text{y} \qquad \max f(A) = \max f(S)$$