Práctica 3. Imagen de una función de dos variables

Ejercicios propuestos

En cada uno de los siguientes casos, calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$.

(1) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 2 \}$
$f(x, y) = x^2(y-1)^3 \quad \forall (x, y) \in A$

(2) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 - y^2 \}$
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \quad \forall (x, y) \in A$

(3) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq x \leq 1 \}$
$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x \quad \forall (x, y) \in A$

(1) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \le 2 \}$

$f(x,y) = x^2(y-1)^3 \quad \forall (x,y) \in A$

A se trata de una elipse, luego es un conjunto cerrado. También está acotado porque $A \subset \overline{B}((0,0),2)$, pues $y^2 \le 2-2x^2$, $y^2 \le 4-x^2 \Rightarrow 2-2x^2 \le 4-x^2$ $\Rightarrow -2 \le x^2$ (siempre se cumple). Como A es cerrado y acotado, deducimos que es compacto. También es convexo, luego conexo. Por ser f polinómica, f es continua y parcialmente derivable, y $f(A)$ será un intervalo cerrado de la forma $[\text{mín} f(A), \text{máx} f(A)]$. Empecemos estudiando los puntos de $\mathring{A}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(y-1)^3 x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2(y-1)^2$$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow$ En los puntos de la forma $(x,1)$ y $(0,y)$

$f(x,1) = f(0,y) = 0$

Ahora estudiamos los puntos de $Fr(A)$: $2x^2+y^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2-y^2}{2}$

$$h(y) = \frac{2-y^2}{2}(y-1)^3 = \frac{1}{2}(2-y^2)(y^2-2y+1)(y-1) = \frac{1}{2}(2-y^2)(y^3-y^2-2y^2+2y+y-1) =$$

$$= \frac{1}{2}(2-y^2)(y^3-3y^2+3y-1) = \frac{1}{2}(2y^3-6y^2+6y-2-y^5+3y^4-3y^3+y^2) =$$

$$\frac{1}{2}(-y^5+3y^4-y^3-5y^2+6y-2) = -\left(\frac{y^5}{2} - \frac{3}{2}y^4 + \frac{y^3}{2} + \frac{5}{2}y^2 - 3y + 1\right)$$

$$h'(y) = -\frac{5}{2}y^4 + 6y^3 - \frac{3}{2}y^2 - 5y + 3$$

	$-5/2$	6	$-3/2$	-5	3
1	$\downarrow$	$-5/2$	$7/2$	2	-3
	$-5/2$	$7/2$	2	-3	$\boxed{0}$
1	$\downarrow$	$-5/2$	1	3	
	$-5/2$	1	3	$\boxed{0}$	

$$-\left(\frac{5}{2}y^2 - y - 3\right) = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+30}}{5} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{31}}{5} \\ \frac{1+\sqrt{31}}{5} \end{cases}$$

$$h\left(\frac{1-\sqrt{31}}{5}\right) = -4.083 \qquad h\left(\frac{1+\sqrt{31}}{5}\right) = 0.00423$$

$\text{Im} f = [-4.083, 0.00423]$

Tras haber estudiado todos los puntos sospechosos, concluimos que:

(2) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 - y^2 \}$

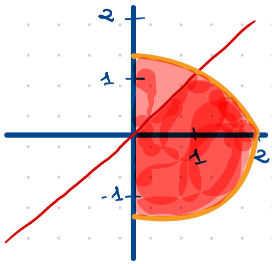
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x \quad \forall (x,y) \in A$

Para poder visualizar el problema, hacemos un esbozo de A:

$f(y) = 2 - y^2 \Rightarrow x = 2 - y^2 \Rightarrow y = \sqrt{-x+2} \quad 0 < x < 2$

$y = -\sqrt{-x+2} \quad 0 < x < 2$

Si $2 - y^2 \ge 0$, $-\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$



$A = H \cap B$

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x\}$ Semiplano cerrado

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 2 - y^2\}$ Conjunto cerrado

A es cerrado por ser intersección finita de cerrados. Además, está acotado por $B((1,0),3)$, luego es compacto. Como A es convexo, es conexo, y por ser f continua (polinómica), $f(A)$ será de la forma $f(A) = [\min f(A), \max f(A)]$.

Hallemos dicho mínimo y máximo analizando los siguientes puntos:

1°) Interior de A

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \qquad \nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x = 1 \; y = 0$

$(1,0) \in A$ pues $0 \le 1 \le 2 - 0^2$

$f(1,0) = -1$

2°) Frontera de A

Observando el dibujo, podemos considerar dos arcos paramétricos:

$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 = x \le 2 - y^2\} \qquad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x = 2 - y^2\}$

$\boxed{C_1}$ $h(y) = y^2 \quad h'(y) = 2y \quad h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow h(0) = 0$

$\boxed{C_2}$ $y^2 = 2 - x \Rightarrow g(x) = x^2 + 2 - x - 2x = x^2 - 3x + 2 \qquad g'(x) = 2x - 3$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$

$g(3/2) = -1/4$

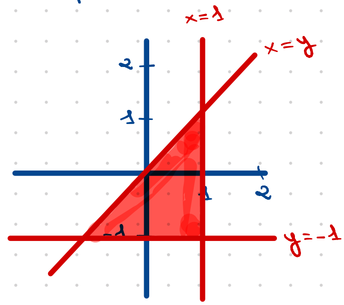
En resumen, $f(1,0) = -1$, $f(0,0) = 0$, $f\left(3/2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(3/2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1/4$.

$\operatorname{Im} f = [-1, 0]$

(3) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le x \le 1 \}$

$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x \quad \forall (x,y) \in A$

Al igual que en el apartado anterior, realizaremos un esbozo de A:



$A = B \cap C \cap D$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x\}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 1\}$

$*$ A es convexo, luego conexo

B, C y D son semiplanos cerrados, por lo que A es cerrado por ser intersección de cerrados. Además, $A \subset B((0,0),2)$, luego A está acotado y esto implica que es compacto. Por ser f continua (polinómica), $f(A)$ será un intervalo cerrado de la forma $[\min f(A), \max f(A)]$. Para hallar ese mínimo y máximo, estudiamos los siguientes puntos:

1°) Interior de A

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 1 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x+2y=0 \\ -3y=1 \implies y=-\frac{1}{3} \quad x=\frac{2}{3} \end{cases}$

$f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \qquad \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \in A$

2°) Frontera de A

La podemos dividir en 3 arcos paramétricos:

$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 = y \le x \le 1\}$

$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y = x \le 1\}$

$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le x = 1\}$

$\boxed{C_1}$ $g(x) = x^2 + 1$, $g'(x) = 2x$, $g'(x) = 0 \iff x = 0 \iff g(0) = 1$

$\boxed{C_2}$ $h(x) = 3x^2 - x$, $h'(x) = 6x - 1$, $h'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{6} \iff h\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$

$\boxed{C_3}$ $i(y) = y^2 + y$, $i'(y) = 2y + 1$, $i'(y) = 0 \iff y = -\frac{1}{2} \iff i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

En resumen, $f\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$, $f(0,-1)=1$, $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}$ y $f\left(1,-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$:

$$\mathrm{Im}\, f=\left[-\frac{1}{3},1\right]$$