AVISO LEGAL

Con motivo de la suspensión temporal de la actividad docente presencial en la Universidad de Granada, se informa de las condiciones de uso de este material que ha sido elaborado, por la profesora responsable de la asignatura Cálculo II del Grado de Matemáticas, del Doble Grado de Matemáticas-Física (Grupo A), y el Doble Grado de Matemáticas-Informática para su impartición por docencia virtual.

“Queda prohibida la captación y/o grabación de la sesión así como su reproducción o difusión, en todo o en parte sea cual sea el medio o dispositivo utilizado. Cualquier actuación indebida comportará una vulneración de la normativa vigente, pudiendo derivarse las pertinentes responsabilidades legales”. (Instrucción de la Secretaria General de 20 de abril de 2020, para la aplicación de la normativa de protección de datos en el uso de las herramientas digitales).

Puesto que este material forma parte de dichas sesiones docentes, queda prohibida expresamente su difusión o reproducción en todo o en parte.

Integrales de Riemann impropias.

Cuestión. Hasta la fecha hemos definido la integral de un tipo de funciones muy limitado: funciones acotadas definidas en un intervalo cerrado y acotado. ¿Es posible definir la integral de funciones definidas en intervalos de otro tipo? ¿y de funciones no acotadas?

Nótese que una función **acotada** definida en un intervalo de la forma $[a,b[,\ ]a,b]$ o $]a,b[$ donde $a,b \in \mathbb{R}$ siendo $a<b,$ a los efectos de la integración, puede asimilarse a cualquier extensión suya al intervalo $[a,b]$ puesto que sabemos que si dos funciones acotadas, f y g, definidas en $[a,b]$ difieren en un conjunto finito de valores entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si y solo si lo es g en cuyo caso el valor de ambas integrales es el mismo.

Por tanto, lo que no queda cubierto es el estudio de la integrabilidad de $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ cuando:
(i) $[a,b]$ no es un intervalo acotado y/o
(ii) La función f no está acotada en $[a,b]$.
En las situaciones anteriores hablamos de integrales impropias.

Cuando el intervalo de integración no es acotado pero la función sí lo es, decimos que se trata de una integral impropia de primera especie. Cuando la función no está acotada en su intervalo de integración decimos que estamos ante una integral impropia de segunda especie.

Nótese que hay integrales impropias que son a la vez de primera y segunda especie (algunos autores las llaman integrales impropias de tercera especie).

Recordamos que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada que es integrable en $[c,b]$ para cada $c\in]a,b[$, entonces f es integrable en $[a,b]$ siendo $\int_a^b f(t)dt=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(t)dt$.

Este resultado nos alumbra una forma de proceder en situaciones como las siguientes:

Ejemplo. (Función no acotada). Sea $f:]0,1]\to\mathbb{R}$ la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. La función $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $F(x)=2\sqrt{x}$ es una primitiva de f puesto que F es continua en $[0,1]$, derivable en $]0,1[$ (de hecho lo es en $]0,1]$) siendo $F´(c)=f(x)$, para cada $x\in]0,1[$. Puesto que

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt=F(1)-F(x)=2-2\sqrt{x}$$

y $2-2\sqrt{x}\to 2$ cuando $x\to 0$, sería razonable definir

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt=\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\lim_{x\to 0^+} 2-2\sqrt{x}=2.$$

Ejemplo. (Intervalo no acotado). Sea $\alpha>0$. Sabemos que $\int_0^x e^{-\alpha t}dt=\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\Big]_0^x=\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha x}+\frac{1}{\alpha}$.

Como $\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha x}+\frac{1}{\alpha}\to\frac{1}{\alpha}$ cuando $x\to+\infty$, esto invita a definir

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt=\frac{1}{\alpha}.$$

Estos ejemplos motivan la siguientes definiciones y resultados.

Definición. Sea I un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$. Se dice que la función f es localmente integrable si es Riemann integrable en cada intervalo cerrado y acotado $[u, v]$ contenido en I.

Observación. Si I es un intervalo arbitrario entonces todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ continuas y todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ monótonas (ya sean o no acotadas) son localmente integrables en I.
En particular cualquier función continua o monótona definida en un intervalo de la forma $[c, +\infty[$, o $[-\infty, c[$, o $]-\infty, +\infty[$ es localmente integrable en dicho intervalo.

El concepto de función localmente integrable nos permitirá estudiar (por paso al límite) la integrabilidad de funciones $f : I \to \mathbb{R}$ acotadas o no acotadas, definidas sobre intervalos acotados y no acotados. De hecho, el caso de la integral impropia de primera especie (integral de funciones acotadas sobre intervalos no acotados) queda bajo control cuando la función es integrable en cualquier intervalo de la forma $[u, v]$ contenido en I (es decir cuando la función es localmente integrable en I). Por el momento, queda al descubierto el caso de una función que tenga una asíntota vertical en un punto interior al intervalo (integral impropia de segunda especie), que será tratado más adelante.

Este última situación se daría, por ejemplo, en la siguiente integral.

$$\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$$

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann Impropia

Definición. Sea $I=[a,b[$ donde $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ (siempre suponemos $a<b$ si $b\in\mathbb{R}$) y sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función localmente integrable en I. Decimos que f es Riemann integrable en sentido impropio en I o que la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ converge cuando $\lim\limits_{c\to b}\int_a^c f(t)dt$ existe y es finito, en cuyo caso definimos

$$\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt\,.$$

(Nótese que si $b\in\mathbb{R}$ entonces, obviamente, $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$).

Si $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)dt=\pm\infty$ entonces decimos que la integral impropia de f en I diverge (positiva o negativamente, según proceda). Finalmente, si $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$ no existe, diremos que f no es impropiamente integrable en I.

(En algunos textos a las funciones que no son impropiamente integrables se las llaman oscilantes).

Ejemplo. Sea $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$, con $\alpha>0$. Veamos que esta integral converge si, y solo si, $\alpha>1$.
Esta función es localmente integrable en $[1,+\infty[$ por serlo en cada intervalo de la forma $[1,x]$ con $x>1$.
Caso 1: $\alpha=1$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{dt}{t}=\lim_{x\to+\infty}\ln(t)]_{t=1}^{t=x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\,.$$

Caso 2: $\alpha \neq 1$. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big]_{t=1}^{t=x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right]$.

Por tanto, si si $\alpha > 1$,

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1},$$

mientras que si $0 < \alpha < 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = +\infty\ .$$

Esto prueba que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, y solo si, $\alpha > 1$.

Definición (dual). Sea $I =]a,b]$ donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (siempre suponemos $a < b$ si $a \in \mathbb{R}$) y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable en I. Decimos que f es Riemann integrable en sentido impropio en I o que la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ converge cuando $\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt$ existe y es finito en cuyo caso definimos

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt\,.$$

(Si $a \in \mathbb{R}$, obviamente, $\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$).

Si el límite anterior vale $\pm\infty$ decimos que la integral impropia de f en I diverge (positiva o negativamente, según proceda). Si el mencionado límite no existe diremos que f no es impropiamente integrable en I.

Ejemplo. $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ donde $-\infty < a < b < +\infty$ y $\alpha > 0$.

Es claro $f(t) = \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ es localmente integrable en $]a,b]$ por ser continua en cualquier intervalo $[x,b] \subseteq]a,b]$.

Caso 1: $\alpha = 1$.

$$\int_x^b \frac{dt}{(t-a)} = \ln(t-a)]_{t=x}^{t=b} = \ln(b-a) - \ln(x-a).$$

En consecuencia $$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)} = \lim_{x\to a} \int_x^b \frac{dt}{(t-a)} = \lim_{x\to a}[\ln(b-a) - \ln(x-a)] = +\infty$$

Caso 2: $\alpha \neq 1$.

$$\int_x^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \left.\frac{(t-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{t=x}^{t=b} = \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}.$$

Si $0 < \alpha < 1$ entonces

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}\right] = \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}.$$

Si $\alpha > 1$ entonces

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \lim_{x\to a^-}\left[\frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}\right] = +\infty.$$

En consecuencia $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge solo si $0 < \alpha < 1$.

Si combinamos la anterior definición con el Segundo TFC, podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema.
(i) Sea $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ una función acotada, localmente integrable. Sea $F:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ una primitiva de f. Entonces f es impropiamente integrable $[a,+\infty[$ si, y solo si, existe $\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$, en cuyo caso

$$\int_a^{+\infty}f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}[F(x)-F(a)].$$

Si dicho límite vale $\pm\infty$ entonces la integral impropia $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ es divergente y si dicho límite no existe entonces la integral impropia es oscilante.
(ii) Análogo resultado para $f:]-\infty,a]\to\mathbb{R}$ siendo

$$\int_{-\infty}^{a}f(t)dt=\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt=\lim_{x\to-\infty}[F(a)-F(x)].$$

Para tratar el caso de las funciones definidas en todo $\mathbb{R}$, establecemos previamente el siguiente resultado.

Proposición. Sea $I=]a,b]$ donde $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ y sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función localmente integrable en I. Sea $u\in]a,b[$. Entonces f es Riemann integrable en sentido impropio en $I=]a,b]$ si y solo si f es Riemann integrable en sentido impropio en $]a,u]$ y es Riemann integrable en $[u,b]$ en cuyo caso:

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^u f(t)dt+\int_u^b f(t)dt.$$

Dem. $\Rightarrow$] Si f es localmente integrable en $]a,b]$ entonces obviamente f es Riemann integrable en $[u,b]$ y es localmente integrable en $]a,u]$ (puesto que cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en $]a,u]$ también está contenido en $]a,b]$). Por otra parte, sabemos que

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt.$$

Si $a < x < u < b$ entonces f es integrable en $[x,b]$, luego también lo es en $[x,u]$ y en $[u,b]$ siendo

$$\int_x^b f(t)dt = \int_x^u f(t)dt + \int_u^b f(t)dt,$$

y es claro que $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt = \lim_{x\to a} (\int_x^u f(t)dt + \int_u^b f(t)dt)$, de donde se deduce que f es impropiamente integrable en $]a,u]$ siendo $\int_a^b f(t)dt = \int_a^u f(t)dt + \int_u^b f(t)dt$.

$\Leftarrow$] Si f es impropiamente integrable en $]a,u]$ e integrable en $[u,b]$, con $u \in]a,b[$, entonces existe

$$\lim_{x\to a} \int_x^u f(t)dt = \int_a^u f(t)dt$$ (integrabilidad impropia en $]a,u]$)

y también $\int_u^b f(t)dt$ (integrabilidad en $[u,b]$). Por tanto, existe $\lim_{x\to a} \int_x^u f(t)dt + \int_u^b f(t)dt$. Como f es Riemann integrable en $[x,u]$ y en $[u,b]$, también ha de serlo en $[x,b]$ siendo $\int_x^u f(t)dt + \int_u^b f(t)dt = \int_x^b f(t)dt$. De ahí que exista $\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt$. En consecuencia f es impropiamente integrable en $]a,b]$ siendo

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt = \lim_{x\to a} \int_x^u f(t)dt + \int_u^b f(t)dt = \int_a^u f(t)dt + \int_u^b f(t)dt. \quad \blacksquare$$

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann Impropia

Definición. Sea $I=]a,b[$ donde $-\infty \le a < b \le +\infty$. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable en I. Se dice que f es Riemann integrable en sentido impropio en el intervalo $]a,b[$ si lo es en los intervalos $]a,c[$ y $[c,b[$ para algún $c \in]a,b[$ en cuyo caso definimos

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Observación. Por lo que acabamos de demostrar, si existe un tal $c \in]a,b[$ entonces cualquier otro elemento $\tilde{c} \in]a,b[$ disfruta de la misma propiedad y se verifica que

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^{\tilde{c}} f(t)dt + \int_{\tilde{c}}^b f(t)dt.$$

En consecuencia estamos ante una buena definición puesto que no depende del valor c elegido.

Proposición. Sea $I=]a,b[$ donde $-\infty \le a < b \le +\infty$. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable en I. Sea F es una primitiva de f en $]a,b[$. Entonces f es Riemann integrable en sentido impropio en el intervalo $]a,b[$ si, y solo si, los límites $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ existen en cuyo caso

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Observación. En particular, si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es localmente integrable (por ejemplo si f es continua o monótona) entonces f es impropiamente integrable en $\mathbb{R}$ cuando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que las integrales impropias $\int_{-\infty}^c f(t)dt$ y $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ convergen en cuyo caso $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt$ (límite que no depende de c).

Observación. Nótese que si una de las integrales $\int_{-\infty}^{c} f(t)dt$ y $\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ es convergente y la otra es divergente entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ es divergente.

Análogamente si ambas integrales $\int_{-\infty}^{c} f(t)dt$ y $\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ divergen positivamente (resp. negativamente) entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ también diverge positivamente (resp. negativamente).

Sin embargo si una de estas integrales diverge positivamente y la otra diverge negativamente entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{-\infty}^{c} f(t)dt = [\infty - \infty],$$

y en este caso **no podemos calcular la integral (porque no converge) ni decir que diverge positiva o negativamente.**

Ejemplo. $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$. Esta integral sería convergente si, y solo si, las integrales $\int_{0}^{+\infty} tdt$ y $\int_{-\infty}^{0} tdt$ convergen simultáneamente, y no es el caso. De hecho,

$$\int_{0}^{+\infty} tdt = \lim_{x\to+\infty} \frac{t^2}{2}\Big]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{0} tdt = \lim_{x\to-\infty} \frac{t^2}{2}\Big]_{t=x}^{t=0} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

por lo que estamos en la situación $[\infty - \infty]$ antes comentada. Por tanto la integral es no convergente, pero no podemos calcular su valor ni decir que diverge positiva o negativamente.

Para cada $c \in \mathbb{R}$, podemos calcular lo que se llama valor principal o valor de Cauchy de la integral dada que es $\int_{-c}^{c} tdt = 0.$ Pero esto hecho no garantiza la convergencia de la integral dada.

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann Impropia

Definición. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función localmente integrable. Se llama valor principal de Cauchy de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ al valor del límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$.

Observación. Si F es una primitiva de f entonces el valor principal de Cauchy viene dado por

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}(F(x)-F(-x)).$$

Proposición Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función localmente integrable. Si la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ es convergente entonces su valor coincide con el valor principal de Cauchy.

Dem. Si $c\in\mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{c} f(t)dt + \lim_{x\to+\infty}\int_{c}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt,$$

puesto que todos los límites en juego existen (por ser f impropiamente integrable en $\mathbb{R}$ y localmente integrable en $\mathbb{R}$).

Observación. El ejemplo anterior pone de manifiesto que la existencia del valor principal de Cauchy de f no garantiza la convergencia de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ (pero nos informa del valor que cabría esperar en caso de convergencia).

Ejemplo. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{e^t+e^{-t}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t dt}{e^{2t}+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x}^{c}\frac{e^t dt}{e^{2t}+1} + \lim\limits_{x\to+\infty}\int_{c}^{x}\frac{e^t dt}{e^{2t}+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt =$

$$\lim_{x\to-\infty}[\operatorname{arctg}(e^c)-\operatorname{arctg}(e^x)] + \lim_{x\to+\infty}[\operatorname{arctg}(e^x)-\operatorname{arctg}(e^c)] = \operatorname{arctg}(e^c)+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(e^c) = \frac{\pi}{2}.$$

Proposición. Sea $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ entonces $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.
En consecuencia, si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge y existe el límite $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ entonces ha de ser $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$

Dem. Para cada $t > c$, con c suficientemente grande, $\frac{L}{2} \leq f(t) \leq 3\frac{L}{2}$, de donde $\lim_{x\to+\infty} \int_c^x f(t)$ diverge. ■

Ejemplo. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ no converge para valores de α negativos. (De hecho $\lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha t} = +\infty$, si $\alpha < 0$).

Ejemplo. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty$ y sin embargo $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0.$

Abordamos el ahora el caso que quedaba pendiente de una función f que no es localmente integrable en el intervalo de integración considerado. Extendemos las ideas anteriores a esta situación.

Definición. Sea $I = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$ una unión disjunta finita de intervalos. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función que es localmente integrable de cada I_j, con $j = 1,..,n$. Decimos que f es Riemann integrable en sentido impropio en I si lo es en cada subintervalo I_j, con $j = 1,..,n$, en cuyo caso

$$\int_I f(t)dt = \int_{I_1} f(t)dt + \cdots + \int_{I_n} f(t)dt,$$

donde $\int_{I_j} f(t)dt = \int_{a_j}^{b_j} f(t)dt$, si I_j es el intervalo de extremos a_j y b_j.

INTEGRACIÓN: Integral de Riemann Impropia

Los intervalos anteriores pueden ser consecutivos. En particular tenemos lo siguiente.

Definición. Sea $f\colon [a,c[\cup]c,b] \to \mathbb{R}$ localmente integrable en $[a,c[$ y en $]c,b]$. Se dice que f es impropiamente integrable en $[a,c[\cup]c,b]$ si, y solo si, f es impropiamente integrable en $[a,c[$ y en $]c,b]$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Esta definición se extiende al caso en que $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ y $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, e intervalos abiertos en a y b.

Observación. En este caso el valor principal de Cauchy se define como

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(t)dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t)dt\right).$$

Si $\int_a^b f(t)dt$ converge entonces el valor de $\int_a^b f(t)dt$ ha de coincidir con su valor principal de Cauchy.

Ejemplo. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t}$. La función $f(t) = \frac{1}{t}$ tiene una asíntota en $t = 0$ y es localmente integrable en $[-1,0[$ y en $]0,1]$ por lo que f es impropiamente integrable si, y solo si, lo es en $[-1,0[$ y en $]0,1]$. Como

$$\int_{-1}^0 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0}\int_{-1}^x \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0}\ln|t|\,]_{t=-1}^{t=x} = -\infty,$$

concluimos que la integral no converge.

Nótese que es erróneo decir que $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t} = \int_{-1}^c \frac{dt}{t} + \int_c^1 \frac{dt}{t} = \ln(|c|) - \ln(|c|) = 0.$

Asimismo, el valor principal de Cauchy de $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t}$ es cero (y su existencia no garantiza la convergencia de f).

Ejemplo. $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2}$.

La función $f(t) = \frac{1}{t^2}$ no está definida en $t = 0$ (tiene una asíntota vertical) y es localmente integrable en $[-1,0[$ y en $]0,1]$ por lo que f es impropiamente integrable si, y solo si, lo es en $[-1,0[$ y en $]0,1]$. Como

$$\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to 0^-} \int_{-1}^{x} \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{t}\Big]_{t=-1}^{t=x} = +\infty, \quad \text{y} \quad \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to 0^+} \int_{x}^{1} \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{t}\Big]_{t=x}^{t=1} = +\infty,$$

Concluimos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2} = +\infty.$$

Observaciones:

(i) En una situación del tipo $[\infty - \infty]$ no habríamos podido concluir nada más que la no convergencia de la integral, pero no su divergencia.

(ii) En el ejemplo anterior, el siguiente razonamiento habría sido erróneo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{t}\Big]_{t=-1}^{t=1} = -2$$

(¡la integral de una función positiva no puede ser negativa!)

Sobre las propiedades de la integral de Riemann impropia

Puesto que convergencia de una integral impropia se reduce a la existencia de determinados límites de integrales de Riemann, es claro que determinadas propiedades de la integral de Riemann como la linealidad, las propiedades de orden, o los TFC se extienden a la integral impropia.

Sin embargo, hay propiedades que no se transmiten, como es el caso de las siguientes:

(i) El producto de dos funciones impropiamente Riemann integrables puede no ser impropiamente Riemann integrable.

(ii) La composición de una función impropiamente Riemann integrable con una función continua puede no ser impropiamente Riemann integrable.

Ejemplo. La función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ es impropiamente Riemann integrable en]0,1] mientras que su cuadrado $g(t) = \frac{1}{t}$ no lo es.

Este ejemplo prueba igualmente que la composición $h \cdot f$ donde $h(t) = t^2$ tampoco es impropiamente integrable (dado que $h \cdot f = g$).

Criterios de convergencia

Puesto que determinar la primitiva de una función integrable en términos de funciones elementales puede llegar a ser extremadamente complicado (y en ocasiones sencillamente imposible como veremos más adelante) conviene disponer de resultados que nos aseguren la convergencia de una integral sin necesidad de conocer una primitiva (y que a ser posible nos proporcione un valor aproximado de la integral en caso de que haya convergencia).

Algunos criterios básicos de convergencia son muy fáciles de establecer, como mostramos a continuación.

Proposición. Sea $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y sea $f: [a, b[\to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y positiva. Entonces $\int_a^b f(t)dt$ converge si, y solo si $\sup\left\{F(x) = \int_a^x f(t)dt\,; a < x < b\right\} < \infty$ en cuyo caso

$$\int_a^b f(t)dt = \sup\left\{F(x) = \int_a^x f(t)dt\,; a < x < b\right\}.$$

Si dicho supremo es $+\infty$ entonces $\int_a^b f(t)dt$ diverge positivamente.

Dem. Como $F(x)$ es creciente es claro que

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) = \sup\left\{F(x) = \int_a^x f(t)dt\,; a < x < b\right\}. \qquad \blacksquare$$

Observación. En todo esto podemos establecer resultados análogos cambiando $[a, b[$ por $]a, b]$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Proposición (Criterio de comparación). Sea $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y sean $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ funciones localmente integrables tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in [a, b[$. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge entonces $\int_a^b f(t)dt$ también converge siendo $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Dem. Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, y sea $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Como $0 \leq F(x) \leq G(x)$, es claro que

$$\int_a^b f(t)dt = \sup\left\{F(x) = \int_a^x f(t)dt\,; a < x < b\right\} \leq \sup\left\{G(x) = \int_a^x g(t)dt\,; a < x < b\right\} = \int_a^b g(t)dt < \infty. \quad \blacksquare$$

Proposición (Criterio de comparación por límite). Sea $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y sean $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ funciones localmente integrable tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in [a, b[$. Supongamos que

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0.$$

Entonces $\int_a^b f(t)dt$ converge (resp. diverge positivamente) si y solo si $\int_a^b g(t)dt$ converge (resp. diverge positivamente).

Dem. Por definición de límite, existe $u \in [a, b[$ tal que $\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3L}{2}$, para cada $x \in [u, b[$. En consecuencia $\frac{L}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3L}{2} g(x)$, para cada $x \in [u, b[$, y el resultado se obtiene del anterior. $\blacksquare$

Definición. Sea $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y sea $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una función localmente integrable en $[a, b[$. Decimos que la integral impropia de f en $[a, b[$ es absolutamente convergente si $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.

Proposición. Sea $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y sea $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una función localmente integrable en $[a, b[$. Si la integral impropia de f es absolutamente convergente en $[a, b[$ entonces la integral impropia de f converge en $[a, b[$.

Dem. Si $\int_a^b |f(t)|dt$ es convergente entonces las funciones

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad (x \in [a, b]),$$

$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \quad (x \in [a, b]),$$

son localmente integrables y tales que $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$ y $0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$. En consecuencia de la convergencia absoluta de la integral impropia de f se obtiene (por el criterio de comparación) la integrabilidad impropia de f^+ y de f^- y en consecuencia la integrabilidad impropia de $f = f^+ - f^-$. ■

Ejemplo. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ es convergente por serlo absolutamente. De hecho, $0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, para cada $x > 1$. Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ es convergente deducimos que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ es absolutamente convergente.

Observación. Si $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ una función localmente integrable en $[a,b[$, pudiera darse el caso de que la integral impropia de f en $[a,b[$ sea convergente pero no lo sea absolutamente.

Ejemplo. $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$ es convergente pero no lo es absolutamente (esto es que $\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right| dx$ no converge).

En efecto. Si $b > \pi$ entonces, integrando por partes,

$$\int_{\pi}^{b} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = \left[u = \frac{1}{x}, v = -\cos(x)\right] = -\left.\frac{\cos(x)}{x}\right]_{x=\pi}^{x=b} - \int_{\pi}^{b} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\cos b}{b} + \frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{b} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

Por tanto,

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{\pi}^{b} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = \frac{1}{\pi} - \lim_{b\to+\infty} \int_{\pi}^{b} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx.$$

Esto prueba la convergencia de $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$ (puesto que la convergencia de $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ está estudiada).

Sin embargo, $\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right| dx$ no converge. Si lo hiciese, $\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| dx$ también lo haría. Esto se debe a que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| dx = \int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(x+\pi/2)}{x}\right| dx = \left[x + \frac{\pi}{2} = t\right] = \int_{3\pi/2}^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(t)}{t-\pi/2}\right| dt,$$

y como $\frac{\left|\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right|}{\left|\frac{\operatorname{sen}(t)}{t-\pi/2}\right|} \to 1$ cuando $t \to +\infty$ tenemos que:

la convergencia de $\int_{3\pi/2}^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(t)}{t-\frac{\pi}{2}}\right|dt$ (que no es más que la convergencia de $\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\cos(x)}{x}\right|dx$) equivale a la convergencia de $\int_{3\pi/2}^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right|dt$ y esta a su vez a la de $\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right|dt$.

Si las integrales impropias

$$\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right|dt=\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}dx \quad \text{y} \quad \int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\cos(x)}{x}\right|dt=\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\cos(x)|}{x}dx$$

fuesen convergentes, tendríamos que también lo sería

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}dx+\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\cos(x)|}{x}dx=\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\operatorname{sen}(x)|+|\cos(x)|}{x}dx.$$

Pero esto último no se verifica. De hecho, al ser $|\operatorname{sen}(x)|+|\cos(x)|\geq 1$, se tiene que

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\operatorname{sen}(x)|+|\cos(x)|}{x}dx\geq\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$$

y $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ no es convergente. Esto prueba la no convergencia de $\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right|dx$.

Nota.
$|\operatorname{sen}(x)|+|\cos(x)|\geq 1 \Leftrightarrow |\operatorname{sen}(x)|\geq 1-|\cos(x)| \Leftrightarrow |\operatorname{sen}(x)|^2\geq(1-|\cos(x)|)^2 \Leftrightarrow 1+|\cos(x)|\geq 1-|\cos(x)|$

$|\operatorname{sen}(x)|^2=1-|\cos(x)|^2=(1-|\cos(x)|)(1+|\cos(x)|)$