Objetivos de aprendizaje Tema 5
Análisis Matemático I

Javier Gómez López

30 de noviembre de 2021

1. Conocer y comprender las siguientes definiciones:

a) Sucesión de Cauchy y espacio métrico completo
Si E es un espacio métrico con distancia d, y $x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que $\{x_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** en E, cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Es obvio que, en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, las sucesiones de Cauchy son las que ya conocíamos, que coinciden con las convergentes. En general, tenemos siempre una implicación:

- *En cualquier espacio métrico, toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

También es importante que, en general, el recíproco del resultado anterior no es cierto.

Por otro lado, dado un espacio métrico E con distancia d, se dice que d es una **distancia completa**, o también que E es un **espacio métrico completo**, cuando toda sucesión de Cauchy de puntos de E es convergente.

El teorema de complitud de $\mathbb{R}$, como su nombre indica, afirma que la distancia usual $\mathbb{R}$ es completa, o que $\mathbb{R}$ con la distancia usual es un espacio métrico completo.

Diremos ahora que una norma $||\cdot||$ en un espacio vectorial X es una **norma completa**, cuando es completa con la distancia d asociada, definida por $d(x,y) = ||x-y||$ para cada $x, y \in X$. Un **espacio de Banach** es un espacio normado que, con la distancia asociada a su norma, es un espacio métrico completo. Por otro lado, dado un espacio pre-hilbertiano cuya norma, la asociada a su producto escalar, es completa, recibe el nombre de **espacio de Hilbert**.

b) Función uniformemente continua
En lo que sigue fijamos dos espacios métricos E y F, cuyas distancias se denotan ambas por d, y una función $f : E \to F$. La continuidad de f se expresa en la forma

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in E, \ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

donde sabemos que δ puede depender tanto de ε como del punto $x \in E$ considerado. Pues bien, tendremos continuidad uniforme cuando podamos conseguir que δ solo dependa de ε.

Por tanto, decimos que f es **uniformemente continua** cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x, y \in E, \ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Caracterizamos fácilmente la continuidad uniforme en términos de sucesiones:

- *Si f es uniformemente continua y $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones de puntos de E verificando que $\{d(x_n, y_n)\} \to 0$, entonces $\{d(fx_n), f(y_n))\} \to 0$. El recíproco también es cierto, más aún: si f no es uniformemente continua, existen dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de puntos de E y existe un $\varepsilon > 0$ tales que $d(x_n, y_n) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero también se tiene que $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

c) Función lipschitziana y constante de Lipschitz

Si E y F son espacios métricos, una función $f : E \to F$ es **lipschitziana** cuando existe una constante $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq M d(x,y) \qquad \forall x, y \in E \tag{1}$$

Es evidente que toda función lipschitziana es uniformemente continua, y sabemos que el recíproco es falso.

La mínima constante M_0 que verifica (1) es la **constante de Lipschitz** de f, que viene dada por

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} : x, y \in E, x \neq y \right\}$$

Cuando $M_0 \leq 1$ se dice que f es **no expansiva**. Cuando se tiene de hecho $M_0 < 1$ decimos que f es **contractiva**.

2. Conocer y comprender los siguientes resultados:

a) Complitud de $\mathbb{R}^N$

En el ambiente particular de los espacio normados tenemos una ventaja que no teníamos en espacios métricos cualesquiera:

- *Dos normas equivalentes en un mismo espacio vectiral dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy. Por tanto, toda norma equivalente a una norma completa es completa.*

Teorema 1. *Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. Por tanto, el espacio euclídeo N-dimensional es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Basta, por ejemplo, probar que la norma del máximo en $\mathbb{R}^N$ es completa. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de vectores de $\mathbb{R}^N$, le aplicamos la desigualdad que ya hemos usado varias veces:

$$|x_p(k) - x_q(k)| \leq ||x_p - x_q||_\infty \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall k \in \Delta_N$$

Deducimos que, para cada $k \in \Delta_N$, la sucesión de números reales $\{x_n(k)\}$ es de Cauchy luego, por el teorema de complitud de $\mathbb{R}$, es convergente. Por tanto $\{x_n\}$ es convergente. ■

- *Sea E un espacio métrico y A un subespacio métrico de E. Se tiene:*

  (i) *Si A es completo, entonces A es un subconjunto cerrado de E.*

(*ii*) *Si E es completo y A es un subconjunto cerrado de E, encontes A es completo.*

b) Versión general del teorema de Heine

Teorema 2 (Heine). *Sean E y F dos espacios métricos y $f : E \to F$ una función continua. Si E es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Por reducción al absurdo, suponemos que f no es uniformemente continua. Existen sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de puntos de E, y un $\varepsilon > 0$, tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$d(x_n.y_n) < 1/n \qquad \text{y} \qquad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

Por ser E compacto, tenemos una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $x \in E$. Puesto que $\{d(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})\} \to 0$, deducimos que también $\{y_{\sigma(n)}\} \to x$. Como f es continua, tenemos que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$ y $\{f(y_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, luego $\{d(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)}))\} \to 0$, lo cual es una contradicción, ya que $d(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)})) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

3. Conocer los siguientes resultados, incluyendo su demostración:

a) Teorema del punto fijo

Teorema 3 (Punto fijo de Banach). *Sea E un espacio métrico completo y $f : E \to E$ una aplicación contractiva. Entonces f tiene un único punto fijo, es decir, existe un único punto $x \in E$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Fijamos $x_0 \in E$ arbitrario y definimos por inducción una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E, tomando $x_1 = f(x_0)$ y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos que esta sucesión es convergente y su límite será el punto fijo que buscamos.
Si $\alpha < 1$ es la constante de Lipshitz de f y $\rho = d(x_0, x_1)$, comprobamos por inducción que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

En efecto, tenemos $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1) = \alpha \cdot \rho$ y, suponiendo que (2) se verifca para un $n \in \mathbb{N}$, deducimos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \cdot \alpha^n \cdot \rho = \alpha^{n+1} \cdot \rho$$

Ahora, para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \rho \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{n+j} \leq \rho \cdot \alpha^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{\rho \cdot \alpha^n}{1 - \alpha} \tag{3}$$

De la desigualdad (3) deduciremos fácilmente que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, como $\{\alpha^n\} \to 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq m$ se tiene que $\rho\alpha^n < \varepsilon(1-\alpha)$. Entonces, para $p, q \geq m$, suponiendo sin perder generalidad que $p < q$, usamos (3) con $n = p$ y $k = q - p$ para obtener

$$d(x_p, x_q) = d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{\rho\alpha^n}{1 - \alpha} < \varepsilon$$

Como por hipótesis E es completo, tenemos $\{x_n\} \to x \in E$, luego $\{f(x_n)\} = \{x_{n+1}\} \to x$. Pero f es continua, luego $\{f(x_n)\} \to f(x)$, y concluimos que $f(x) = x$. Finalmente, si $y \in E$ es otro punto fijo de f, se tiene que $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$, luego $(1 - \alpha)d(x, y) \leq 0$. Como $\alpha < 1$, deducimos que $d(x, y) \leq 0$, es decir $x = y$. ■

b) Caracterización de la continuidad de una aplicación lineal

- *Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *T es continua*
  - (ii) *Existe una constante $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $||T(x)|| \leq M||x||$ para todo $x \in X$*

Demostración. *(i) ⇒ (ii).* Teniendo en cuenta que $T(0) = 0$, la continuidad de T en 0 nos dice que

$$\exists \delta > 0 : z \in X, ||z|| \leq \delta \Rightarrow ||T(z)|| < 1$$

Dado $x \in X \setminus \{0\}$, tomando $z = \frac{\delta x}{2||x||}$ tenemos claramente $||z|| = \delta/2 < \delta$, luego

$$||T(x)|| = \frac{2||x||}{\delta}||T(z)|| \leq \frac{2}{\delta}||x||$$

Como esta desigualdad es obvia cuando $x = 0$, hemos probado *(ii)* con $M = 2/\delta$.
(ii) ⇒ (i). Para cualesquiera $u, v \in X$, de *(ii)* deducimos claramente que

$$||T(u) - T(v)|| = ||T(u - v)|| \leq M||u - v||$$

lo que prueba que T es lipschitziana, luego continua. ■

- *Si X es un espacio normado de dimensión finita, toda aplicación lineal de X en cualquier otro espacio es normado, es continua.*

Demostración. Sea Y otro espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Definimos entonces una nueva norma $|| \cdot ||_T$ en X, de la siguiente forma

$$||x||_T = ||x|| + ||T(x)|| \qquad \forall x \in X$$

Se comprueba rutinariamente que $|| \cdot ||_T$ es efectivamente una norma en X. Como X tiene dimensión finita, el teorema de Hausdorff nos dice que $|| \cdot ||_T$ es equivalente a la norma de partida en X, luego existe una constante $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $||x||_T \leq \rho||x||$ para todo $x \in X$. Pero está bien claro que

$$||T(x)|| \leq ||x||_T \leq \rho||x|| \qquad \forall x \in X$$

y esto prueba que T es continua. ■