Ejercicio 7.7: Calcular el área de los recintos limitados por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y la recta de ecuación $x + y = 1$.

• La ecuación $x^2+y^2=1$ describe la circunferencia de radio 1 centrada en el origen.

$$x^2+y^2=1 \Longrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \left< \begin{array}{l} f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \\ f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$

} dividimos la circunferencia en 2 funciones; semicircunferencia superior e inferior.

$$x + y = 1 \Longrightarrow g(x) = 1 - x$$ (recta)

• Buscamos los puntos de corte:

$$f_1(x) = g(x) \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1-x \Longleftrightarrow \cancel{1}-x^2 = \cancel{1}+x^2-2x \Longleftrightarrow 2x(x-1)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

→ como hemos resuelto elevando un polinomio al cuadrado, comprobamos las soluciones.

$g(0) = 1 = f_1(0)$ ✓ $\qquad g(1) = 0 = f_1(1)$ ✓

$$f_2(x) = g(x) \Longleftrightarrow -\left(\sqrt{1-x^2}\right) = 1-x \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x-1 \Longleftrightarrow \cancel{1}-x^2 = x^2+\cancel{1}-2x \Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{x=0} \\ x=1 \end{cases}$$

→ como hemos resuelto elevando un polinomio al cuadrado, comprobamos las soluciones.

$g(0) = 1 \neq -1 = f_2(0)$ ✗ $\qquad g(1) = 0 = f_2(1)$ ✓

• Estudiamos la posición relativa de las funciones g y f_1 entre 0 y 1

$g(1/2) = 1/2$; $\quad f_1(1/2) = \frac{\sqrt{3}}{2} > g(1/2) \longrightarrow f_1(x) > g(x) \ \forall x \in (0,1)$ $\quad f_1$ está por encima de g.

• Calculo la superficie limitada por $g(x)$ y $f_1(x)$

$$A_1 = \int_0^1 \left(f_1(x) - g(x)\right) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} + x - 1 \, dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)+t\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \simeq 0'285$$

(*) Integro $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ aplicando cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t) \Longrightarrow 1\, dx = \cos(t)\, dt$

$\operatorname{sen}(t) = 0 \leftarrow t = 0$

$\operatorname{sen}(t) = 1 \leftarrow t = \pi/2$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)} \cdot \cos(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\, dt \overset{(*)^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos(2t)+1)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2t \, dt + \left[\frac{t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + t\right]_0^{\pi/2}$$

$(*)^2$ $\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(y+x) + \cos(y-x)\right) \Longrightarrow \cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$

(no necesito deshacer el cambio de variable)

• Calculo la otra superficie limitada por la recta y la circunferencia.

$$f_1(x) = f_2(x) \Longleftrightarrow \sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} \Longleftrightarrow 1-x^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$1-(-1) = 2$ diámetro de la circunf. (ya lo sabemos por ser goniométrica)

$A_c = \pi \cdot r^2 = \pi$

$$A_2 = A_c - A_1 = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2} \simeq 2'856$$

$\boxed{A_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \simeq 0'285}$ $\qquad$ $\boxed{A_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \simeq 2'856}$

(otra opción)?