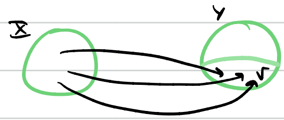
TEMA 2

TEMA 2: APLICACIONES CONTINUAS

20 OCT 2021

NOTACIÓN: Sea $f: X \to Y$ una aplicación entre conjuntos

f^{-1} < aplicación inversa de f si f es biyectiva / imagen inversa



$V \subset Y \Rightarrow f^{-1}(V) = \{x \in X \,/\, f(x) \in V\}$

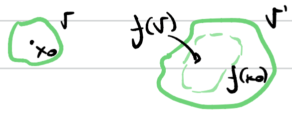
1. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$
2. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(V_i)$
3. $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$
4. $f(f^{-1}(V)) \subset V$
   $y \in f(f^{-1}(V)) \Rightarrow \exists\, x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x) \in V \,/\, y = f(x) \in V$
5. $U \subset f^{-1}(f(U))$
   $x \in U \Rightarrow f(x) \in f(U) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(U))$
6. $f(X \setminus f^{-1}(U')) \subset Y \setminus U'$

Sea $f: (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre dos espacios topológicos

DEFINICIÓN 1: Diremos que f es CONTINUA si $\forall V \in T'$, se tiene que $f^{-1}(V) \in T$

DEFINICIÓN 2: Sea $x_0 \in X$. Diremos que f es CONTINUA EN UN PUNTO, x_0, si $\forall V' \in N'_{f(x_0)}$ (entornos de $f(x_0)$ en (Y, T')), $\exists\, V \in N_{x_0}$ (entornos de x_0 en (X, T)) tal que $f(V) \subset V'$

$f^{-1}(V') \in N_{x_0}$



PROPOSICIÓN 1: Sea $f: X \to Y$ una aplicación entre todo ET $(X, T), (Y, T')$.

Son equivalentes:

1. $f: (X, T) \to (Y, T')$ es continua
2. $f: (X, T) \to (Y, T')$ es continua en x_0 $\forall x_0 \in X$.

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$ | Fijamos $x_0 \in X$. Veamos que f es continua en x_0.

Tomemos $V' \in N'_{f(x_0)}$. Por definición de entorno, $\exists\, U' \in T' \,/\, f(x_0) \in U' \subset V'$. Como f es continua p.h. y $U' \in T'$, entonces $f^{-1}(U') \in T$.

$\left.\begin{array}{l} x_0 \in f^{-1}(U') \Leftrightarrow f(x_0) \in U' \\ f^{-1}(U') \in T \end{array}\right\} \Rightarrow V = f^{-1}(U') \in N_{x_0} \Rightarrow f(V) = f(f^{-1}(U')) \subset U' \subset V'$

Por tanto, como $x_0 \in X$ y $V' \in N'_{f(x_0)}$ eran arbitrarios $\Rightarrow f$ continua en todo $x_0 \in X$

$2 \Rightarrow 1$ | Sea $U' \in T'$. Consideramos el conjunto $f^{-1}(U')$. Queremos ver que $f^{-1}(U') \in T$.

Para ello, probamos que todo punto $x_0 \in f^{-1}(U')$ ($\Leftrightarrow f(x_0) \in U'$) es un punto interior.

$\left.\begin{array}{l} U' \in T' \\ f(x_0) \in U' \end{array}\right\} \Rightarrow U' \in N'_{f(x_0)}$ p.h., como f es cont. en x_0, $\exists\, V \in N_{x_0}$ tal que

$f(V) \subset U' \Rightarrow f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U') \Rightarrow V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U') \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 \in \operatorname{int}(f^{-1}(U')) \Rightarrow f^{-1}(U') \in T \Rightarrow f$ continua.

EJEMPLO 1: $Id_X : (X,T) \to (X,T)$ es continua

Sea $V \in T$, $(Id_X)^{-1}(V) = \{x \in X / Id_X(x) \in V\} = \{x \in X / x \in V\} = V \in T$

EJEMPLO 2: $Id_X : (X, T_1) \to (X, T_2)$ es continua $\Leftrightarrow \forall V \in T_2,\ (Id_X)^{-1}(V) \in T_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall V \in T_2,\ V \in T_1 \Leftrightarrow T_2 \subset T_1 \Leftrightarrow T_1$ es más fina que T_2

EJEMPLO 3: $f_1 : (X_1, T_1) \to (X_2, T_2)$, $f_2 : (X_2, T_2) \to (X_3, T_3)$ continuas.
Entonces, $f_2 \circ f_1 : (X_1, T_1) \to (X_3, T_3)$ es continua. $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3$
$V \in T_3$, $(f_2 \circ f_1)^{-1}(V) = f_1^{-1}(\underbrace{f_2^{-1}(V)}_{\in T_2\ f_2 \text{ cont}}) \in T_1$ → f_1 cont
$f_2^{-1}(V) \in T_2$

EJERCICIO 1: Si $f_1 : (X_1, T_1) \to (X_2, T_2)$ es continua en $x_1 \in X_1$ y $f_2 : (X_2, T_2) \to (X_3, T_3)$ es continua en $f_1(x_1)$, entonces $f_2 \circ f_1 : (X_1, T_1) \to (X_3, T_3)$ es continua en x_1.
Hecho al final

PROPOSICIÓN 2: Sea $f: X \to Y$ una aplicación entre dos ET. Sea $x_0 \in X$ y sean $\mathcal{B}_{x_0}$, $\mathcal{B}'_{f(x_0)}$ bases de entornos de x_0 en (X,T) y de $f(x_0)$ en (Y,T'), respectivamente.
Son equivalentes:

1. f continua en x_0 $\forall V' \in N'_{f(x_0)},\ \exists V \in N_{x_0} / f(V) \subset V'$
2. $\forall B' \in \mathcal{B}'_{f(x_0)},\ \exists B \in \mathcal{B}_{x_0} / f(B) \subset B'$

Demostración:

cualquier entorno
→ contiene un el. de la base

$\underline{1 \Rightarrow 2}$ $\mathcal{B}'_{f(x_0)} \subset N'_{f(x_0)}$ y $\mathcal{B}_{x_0} \subset N_{x_0}$. Sea $B' \in \mathcal{B}'_{f(x_0)} \subset N'_{f(x_0)}$. P.h., $\exists V \in N_{x_0} / f(V) \subset B'$.
$\mathcal{B}_{x_0}$ base de entornos de $x_0 \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_{x_0} / B \subset V \Rightarrow f(B) \subset f(V) \subset B'$

$\underline{2 \Rightarrow 1}$ Sea $V' \in N'_{f(x_0)}$. Como $\mathcal{B}'_{f(x_0)}$ es base de entornos de $f(x_0)$, $\exists B' \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}$ tal que $B' \subset V'$. P.h., $\exists B \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(B) \subset B' \subset V'$. Como $\mathcal{B}_{x_0} \subset N_{x_0}$, podemos tomar $V = B \in N_{x_0}$. Por tanto, $f(V) = f(B) \subset B' \subset V'$ ∎

21 OCT 2021

Ejemplo 1: Sean $(X,d), (Y,d')$ EM, $f: X \to Y$, $x_0 \in X$.
$\mathcal{B}_{x_0} = \{B(x_0, r) / r > 0\}$
$\mathcal{B}'_{f(x_0)} = \{B'(f(x_0), r) / r > 0\}$
$f: (X, T_d) \to (Y, T_{d'})$ es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si $\forall B' \in \mathcal{B}'_{f(x_0)},\ \exists B \in \mathcal{B}_{x_0} / f(B) \subset B'$.
Dar un elemento de $\mathcal{B}'_{f(x_0)}$ o de $\mathcal{B}_{x_0}$ es equivalente a dar el radio de la bola
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta)) \subset B'(f(x_0), \varepsilon)$
Escojo $x' \in B(x_0, \delta) \Rightarrow d(x_0, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x')) < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / \underbrace{d(x_0, x')}_{|x_0 - x'|} < \delta \Rightarrow \underbrace{d'(f(x_0), f(x'))}_{|f(x_0) - f(x')|} < \varepsilon$$

!! **NOTA IMPORTANTE:** Todas las aplicaciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en x_0 en el sentido de Cálculo I ($\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$) son continuas en x_0 como aplicaciones de $(\mathbb{R}, T_u)$ en $(\mathbb{R}, T_u)$. P.ej: polinomios, trigonométricas ...

PROPOSICIÓN 3: Sean $(\mathbb{X},T),(Y,T')$ ET, $f:\mathbb{X}\to Y$ aplicación. Son equivalentes:

1. f continua $f^{-1}(U')\in T\ \forall U'\in T'$
2. $f^{-1}(C')\in C_T\ \forall C'\in C_{T'}$
3. $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}\quad\forall A\subset\mathbb{X}$

Demostración:

1⇒2| Sea $C'\in C_{T'}$. Queremos ver que $f^{-1}(C')\in C_T \iff \mathbb{X}\setminus f^{-1}(C')\in T$. Pero $\mathbb{X}\setminus f^{-1}(C')=f^{-1}(Y\setminus C')$. Como $C'\in C_{T'}$, $Y\setminus C'\in T'$. P.H., f es continua, así que $f^{-1}(Y\setminus C')=\mathbb{X}\setminus f^{-1}(C')\in T\Rightarrow f^{-1}(C')\in C_T$.

2⇒1| Se demuestra análogamente, cambiando abierto por cerrado en la dem.

1⇒3| Suponemos que f es continua. Veamos que $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$.
Sea $y\in f(\bar{A})\Rightarrow\exists x\in\bar{A}\,/\,f(x)=y$. Sabemos que f es continua en x. Elegimos $V'\in N_y$. Entonces $\exists V\in N_x\,/\,f(V)\subset V'$.

$$\left.\begin{array}{l}V\in N_x\\ x\in\bar{A}\end{array}\right\}\emptyset\neq V\cap A\Rightarrow\emptyset\neq f(V\cap A)\subset f(V)\cap f(A)\subset V'\cap f(A)\Rightarrow\emptyset\neq V'\cap f(A)$$

Por tanto, $y\in\overline{f(A)}\Rightarrow f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$

3⇒1| Sea $U'\in T'$. Queremos ver que $f^{-1}(U')\in T\iff\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')\in C_T$. Para ello, veamos que $\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')=\overline{\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')}$. Como $\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')\subset\overline{\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')}$, sólo nos queda probar la inclusión inversa. Para facilitar la notación, llamemos $A=\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')$. Como suponemos que 3) se verifica, sabemos que $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$.
Por tanto, $f(\overline{\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')})\subset\overline{f(\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U'))}\subset\overline{Y\setminus U'}\underset{U'\in T'}{=}Y\setminus U'\in C_{T'}\Rightarrow$
$\Rightarrow\overline{\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')}\subset f^{-1}(Y\setminus U')=\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')\Rightarrow\mathbb{X}\setminus f^{-1}(U')\in C_T\Rightarrow f^{-1}(U')\in T$

Ejemplo 1: $f:(\mathbb{X},T)\to(Y,T')$

- Si T es la topología discreta, entonces f es continua
  Si $U'\in T'\Rightarrow f^{-1}(U')\subset\mathbb{X}$. Como T es la discreta, todos los conjuntos son abiertos. Concretamente, $f^{-1}(U')\in T$
- Si T' es la topología trivial, entonces f es continua
  $T'=\{\emptyset,Y\}\qquad f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in T\qquad f^{-1}(Y)=\mathbb{X}\in T\qquad f$ biyectiva

Ejemplo 2: $f:(\mathbb{X},T)\to(Y,T')$. Supongamos que f es constante $(\exists y_0\in Y\,/\,f(x)=y_0\ \forall x\in\mathbb{X})$, entonces f es continua.
Sea $U'\in T'\quad f^{-1}(U')=\{x\in\mathbb{X}\,/\,f(x)\in U'\}=\begin{cases}\emptyset & \text{si } y_0\notin U'\\ \mathbb{X} & \text{si } y_0\in U'\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(U')\in T$

27 OCT 2021

Ejemplo 3: $(\mathbb{X},T)$ ET, $A\subset\mathbb{X}$, $A\neq\emptyset$. $T_A=\{U\cap A\,|\,U\in T\}$
$i_A:A\to\mathbb{X}$ (aplicación inclusión) $i_A(a)=a\quad\forall a\in A$
$i_A:(A,T_A)\to(\mathbb{X},T)$ es continua
$U\in T,\ i_A^{-1}(U)=\{a\in A\,/\,a\in U\}=U\cap A\in T_A$
La aplicación inclusión es siempre una aplicación continua si consideramos T_A.

Ejemplo 4: $f: (X,T) \to (Y,T')$ continua, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$

La restricción de f al conjunto A es la aplicación $f_{|A}: A \to Y$ definida por $f_{|A}(a) = f(a)$ $\forall a \in A$. Veamos que $f_{|A}: (A, T_A) \to (Y, T')$ es continua.

Para demostrarlo, observamos que $f_{|A} = f \circ i_A : A \xrightarrow{i_A} X \xrightarrow{f} Y$. Sabemos que ambas tienen el mismo dominio (A) y codominio (Y). Visto esto, fijémonos ahora en que $a \in A$, $f_{|A}(a) = f(a) = f(i_A(a)) = (f \circ i_A)(a)$.

Si f es continua, como sabemos que $i_A: A \to X$ es continua, entonces la composición $f \circ i_A : A \to Y$ es continua $\Rightarrow f_{|A} = f \circ i_A$ es continua.

Ejemplo 5: $f: (X,T) \to (Y,T')$. Supongamos que $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, $U_\alpha \in T$ $\forall \alpha \in I$.

Entonces, $f_{|U_\alpha}$ es continua $\forall \alpha \in I \Leftrightarrow f$ es continua.

$\Leftarrow$) Ejemplo 4.

$\Rightarrow$) Sea $V \in T'$. P.h., $f_{|U_\alpha}^{-1}(V) \in \underbrace{T_{U_\alpha}}_{\text{topología restringida al conjunto } U_\alpha}$ $\forall \alpha \in I$.

$$f_{|U_\alpha}^{-1}(V) = \{x \in U_\alpha \,/\, f(x) \in V\} = \{x \in U_\alpha \,/\, x \in f^{-1}(V)\} = U_\alpha \cap f^{-1}(V).$$

A abto, $T_A \subset T$ $\quad U_\alpha \cap f^{-1}(V) \in T_{U_\alpha}^{\subset T}$ $\forall \alpha \in I \rightsquigarrow U_\alpha \cap f^{-1}(V) = U_\alpha \cap W_\alpha$, $W_\alpha \in T \Rightarrow$

$\Rightarrow$ intersección de abiertos: $U_\alpha \cap f^{-1}(V) \in T \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} \underbrace{(f^{-1}(V) \cap U_\alpha)}_{\in T} = \bigcup_{\alpha \in I} (f_{|U_\alpha}^{-1}(V)) = f^{-1}(V) \in T$$

NOTA: En este ejemplo, no podemos cambiar $U_\alpha \in T$ por la hipótesis $U_\alpha \in C_T$. Si eso fuera cierto, y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$, $\{x\} \in C_{T_u} \Rightarrow f_{|\{x\}}: (\{x\}, T_{u|\{x\}}) \to (\mathbb{R}, T_u)$ es continua por ser constante $\Rightarrow f$ continua, y eso valdría para cualquier función real! Pero podemos encontrar numerosos contraejemplos de funciones reales no continuas (véase $f(x) = 1/x$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), por lo que habríamos llegado a un absurdo.

Ejemplo 6: $f: (X,T) \to (Y,T')$. Supongamos que $X = C_1 \cup \ldots \cup C_k$ $k \in \mathbb{N}$, $C_i \in C_T$ $\forall i \in \Delta_k$.

Entonces, $f_{|C_i}$ es continua $\Leftrightarrow f$ continua.

$\Leftarrow$) Cierta siempre

$\Rightarrow$) f continua $\Leftrightarrow f^{-1}(C') \in C_T$ $\forall C' \in C_{T'}$. Sea $C' \in C_{T'}$, $f^{-1}(C') = f^{-1}(C') \cap X = f^{-1}(C') \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right) =$
$= \bigcup_{i=1}^{k} (f^{-1}(C') \cap C_i) = \bigcup_{i=1}^{k} \underbrace{f_{|C_i}^{-1}(C')}_{\in C_{T_{C_i}}}$

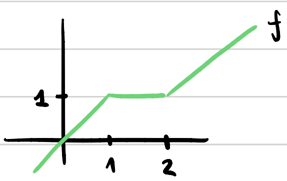
KIT-KAT: Si $A \subset X$, $C_{T_A} = \{F \cap A \,/\, F \in C_T\}$. Demostrémoslo:

 $\subseteq$) Sea $G \in C_{T_A} \Rightarrow A \setminus G \in T_A \Rightarrow A \setminus G = W \cap A$, $W \in T$. $\overbrace{(X \setminus W)}^{\in C_T} \cap A = G \Rightarrow G \in \{F \cap A \,/\, F \in C_T\}$. T_A

 $\supseteq$) Sea ahora $G \in \{F \cap A / F \in C_T\} \Rightarrow \exists F_0 \in C_T \mid G = F_0 \cap A \Rightarrow A \setminus G = A \setminus (F_0 \cap A) \underset{\text{habría que probarlo}}{=} \overbrace{(X \setminus F_0)}^{\in T} \cap A \in T_A \Rightarrow G \in C_{T_A}$

Si A cerrado $\Rightarrow C_{T_A} \subset C_T$ $\quad \underbrace{f_{|C_i}^{-1}(C')}_{\in C_{T_{C_i}}} = \underbrace{F_i}_{\in C_T} \cap \underbrace{C_i}_{\in C_T} \in C_T \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} f_{|C_i}^{-1}(C') \in C_T$

Veamos el ejemplo en la práctica:



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua $\Leftrightarrow$ está bien definida.

Para ello, la definimos en intervalos cerrados y vemos que no hay puntos con contradicciones.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 1 & x \in [1,2] \\ x-1 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_0 = 1 = 1 = x_1 \\ x_1 = 1 = 2-1 = x_2 \end{matrix}$$

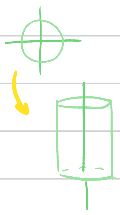
DEFINICIÓN 3: Una aplicación $f:(X,T)\to(Y,T')$ entre dos ET es:

1. ABIERTA si $f(U)\in T'$ $\forall U\in T$
2. CERRADA si $f(C)\in C_{T'}$ $\forall C\in C_T$

DEFINICIÓN 4: Una aplicación $f:(X,T)\to(Y,T')$ entre dos ET es un HOMEOMORFISMO si es biyectiva, continua, y f^{-1} (app inversa) es continua

V, V' e. vectoriales $\quad f:V\to V'$ isomorfismo (lineal y biyectiva) $\Rightarrow f^{-1}$ lineal.

Ejemplo 1: Sean X un conjunto, $T_1\subset T_2$, $T_1\neq T_2$ topologías en X.
(p.e. $\#X\geq 2$, $T_1=T_t$ y $T_2=T_D$)
$Id_X:(X,T_2)\to(X,T_1)$ es biyectiva y continua ($T_1\subset T_2$)
$Id_X^{-1}:(X,T_1)\to(X,T_2)$ no es continua ($T_2\not\subset T_1$)
Es por esto por lo que en un homeomorfismo es necesario recalcar la condición f^{-1} continua, porque f continua y biyectiva no lo asegura.



NOTA: "Un topólogo no puede diferenciar una rosquilla de una taza".
Un espacio topológico puede deformarse en otro mediante un homeomorfismo. Aquellos espacios que se relacionen así se llamarán homeomorfos y serán el mismo topológicamente.

DEFINICIÓN 5: Un INVARIANTE TOPOLÓGICO es una propiedad que se preserva por homeomorfismos.
Dos ET tales que existe un homeomorfismo entre ellos tienen los mismos invariantes topológicos.

NOTA: Si f es biyectiva, f^{-1} es continua $\Leftrightarrow (f^{-1})^{-1}(U)\in T'$ $\forall U\in T$
$\Leftrightarrow f(U)\in T'$ $\forall U\in T \Leftrightarrow f$ abierta

→ Por tanto, f es homeomorfismo si f es biyectiva, continua y abierta

DEFINICIÓN 6: Diremos que (X,T) es HOMEOMORFO a (Y,T') si existe un homeomorfismo $f:(X,T)\to(Y,T')$. Lo indicaremos por $(X,T)\approx(Y,T')$

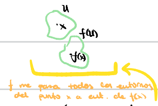
PROPIEDADES 1: "Ser homeomorfo a" es una relación de equivalencia en el conjunto de los ET.

- Reflexiva: $(X,T)\approx(X,T)$ $\quad Id_X:(X,T)\to(X,T)$ es homeom.
- Simétrica: $(X,T)\approx(Y,T')\Rightarrow(Y,T')\approx(X,T)$ $\quad$ Si $\exists f:(X,T)\to(Y,T')$ hom $\Rightarrow f^{-1}:(Y,T')\to(X,T)$ es hom
- Transitiva: $\left.\begin{array}{l}(X,T)\approx(Y,T')\\(Y,T')\approx(Z,T'')\end{array}\right\}\Rightarrow(X,T)\approx(Z,T'')$ $\quad$ P.h., $\exists f:(X,T)\to(Y,T')$ hom y $g:(Y,T')\to(Z,T'')$ hom.
Componemos $g\circ f:(X,T)\to(Z,T'')$, que es hom.
  - $g\circ f$ biyectiva por ser composición de dos biy.
  - $g\circ f$ continua por ser composición de dos cont.
  - $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ continua por ser composición de dos cont.

DEFINICIÓN 7: Dos conjuntos tienen el mismo cardinal si existe una aplicación biyectiva entre ellos.

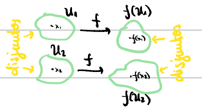
Ejemplo 1: "Tener el mismo cardinal" es un invariante topológico.
Si $(X,T)\approx(Y,T')$, entonces X e Y tienen el mismo cardinal. (hom son biy.)

Ejemplo 2: La propiedad Hausdorff es un invariante topológico.
Si (X,T) es T_2 y $(X,T)\approx(Y,T')$, entonces (Y,T') es T_2



Dem: Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es un homeomorfismo y $x\in X$, $f(N_x)=\{f(U)\,/\,U\in N_x\}=N'_{f(x)}$
Sea $U\in N_x \Rightarrow \exists W\in T\,/\,x\in W\subset U \Rightarrow f(x)\in f(W)\subset f(U) \Rightarrow f(U)\in N'_{f(x)} \Rightarrow f(N_x)\subset N'_{f(x)}$
$\in T'$ por ser f abierta

$N'_{f(x)}\subset f(N_x)$ se prueba usando f^{-1} $(f^{-1}(N'_{f(x)})\subset N_x \Leftrightarrow N'_{f(x)}\subset f(N_x))$



EJERCICIO 2: Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es homeomorfismo, entonces f es cerrada
- f continua $\Leftrightarrow f^{-1}(C')\in G\ \forall C'\in G'$

Como f es homeom p.h., f^{-1} es continua. Entonces, $f(C)\in G'\ \forall C\in G$, que es la definición de f cerrada.

29 OCT 2021

EJERCICIO 3: Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ un homeomorfismo
1. Sea $x\in X$, $\mathcal{B}_x$ base de entornos de $x \Rightarrow f(\mathcal{B}_x)=\{f(B)\,/\,B\in\mathcal{B}_x\}$ es b.ent. de $f(x)$
2. Si $\mathcal{B}$ es base de T, entonces $f(\mathcal{B})=\{f(B)\,/\,B\in\mathcal{B}\}$ es base de T'

Hecho al final

CONSECUENCIA: Las propiedades AN-I, AN-II son invariantes topológicas.

AN-I | Todo punto admite una base de entornos numerable.
(X,T) AN-I, $(X,T)\approx(Y,T')$. Sea $y\in Y$, $\exists x\in X$ tal que $y=f(x)$.
Como (X,T) es AN-I, existe una base numerable de entornos $\mathcal{B}_x$ de $x \Rightarrow f(\mathcal{B}_x)$ es base de entornos de y. Además, es numerable $\Rightarrow$
$\Rightarrow (Y,T')$ es AN-I

AN-II | Se deduce de ejer 3.2

→ Planteémonos el siguiente problema:
Sea X y R una relación de equivalencia y X/R el conjunto cociente
Definamos $\pi: X\to X/R$ tal que $x\mapsto \bar{x}=[x]$

Supongamos (X,T) ET
¿Qué topología puedo poner en X/R de manera que π sea continua?
Por ejemplo, la trivial. ¿Cuál es aquella lo más fina posible?

Veamos distintos ejemplos y escenarios para situarnos.

1. $f: X \to Y$ aplicación, (X,T) ET.
   ¿Cuál es la topología más fina en Y que hace continua a f?
   La topología trivial en Y hace continua a f, pero es la más gruesa posible
2. $f_i: X_i \to Y$ $i \in I$ aplicación, (X_i,T_i) ET
   ¿Cuál es la topología más fina en Y que hace continua a todas las f_i? ... veámoslo

PROPOSICIÓN 4: Sea $f_i: X_i \to Y$, $i \in I$, una familia de aplicaciones. Supongamos que (X_i,T_i) es un ET $\forall i \in I$. Entonces:

depende de f_i y de T_i

$T' = \{V \subset Y \mid f_i^{-1}(V) \in T_i \ \forall i \in I\}$ es una topología en Y tal que:

1. $f_i: (X_i,T_i) \to (Y,T')$ es continua $\forall i \in I$
2. Si T'' es otra topología en Y tal que $f_i: (X_i,T_i) \to (Y,T'')$ es continua $\forall i \in I$, entonces $T'' \subset T'$. Es decir, T' es la topología más fina que hace cont. a $\{f_i\}_{i\in I}$

Demostración:

0. T' es topología:
   1) $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_i \ \forall i \in I$, $f_i^{-1}(Y) = X_i \in T_i \ \forall i \in I \Rightarrow \emptyset, Y \in T'$
   2) Sea $\{V_j\}_{j\in J} \subset T' \Rightarrow f_i^{-1}(V_j) \in T_i \ \forall i \in I \ \forall j \in J$
   (i fijo) $f_i^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} V_j\right) = \bigcup_{j\in J} \overbrace{f_i^{-1}(V_j)}^{\in T_i} \in T_i$ unión arbitraria de elementos de T_i $\Rightarrow f_i^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} V_j\right) \in T_i \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{j\in J} V_j \in T'$
   3) Sea $V_1, \dots, V_k \in T' \Rightarrow f_i^{-1}(V_j) \in T' \ \forall i \in I \ \forall j \in \Delta_k$
   (i fijo) $f_i^{-1}(V_1 \cap \dots \cap V_k) = \overbrace{f_i^{-1}(V_1)}^{\in T_i} \cap \dots \cap \overbrace{f_i^{-1}(V_k)}^{\in T_i} \in T_i$ T_i topología $\forall i \in I \Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_k \in T'$

1. $f_i: (X_i,T_i) \to (Y,T')$ es continua $\forall i \in I$:
   Sea $V \in T'$, ¿$f_i^{-1}(V) \in T_i$? Sí, por definición de T'

2. Supongamos que T'' es otra top. en Y tal que $f_i: (X_i,T_i) \to (Y,T'')$ es continua $\forall i \in I$.
   Sea $V \in T'' \overset{f_i \text{ cont}}{\Rightarrow} f_i^{-1}(V) \in T_i \ \forall i \in I \overset{\text{def } T'}{\Rightarrow} V \in T' \Rightarrow T'' \subset T' \Rightarrow T'$ la más fina

DEFINICIÓN 8: La T' definida en la prop. 4 se hace llamar **TOPOLOGÍA ASOCIADA** a la familia de aplicaciones $\{f_i\}_{i\in I}$

DEFINICIÓN 9: Si (X,T) es un ET y R una rel. eq. en X, la **TOPOLOGÍA COCIENTE** T/R es la topología final para la aplicación $\pi: (X,T) \to X/R$. Se define como:

$T/R = \{V \subset X/R \ ; \ \pi^{-1}(V) \in T\}$

DEFINICIÓN 10: $f_i: X_i \to X$ $i \in I$ aplicaciones, (X_i,T_i) ET $\forall i \in I$. La top más fina en X que hace cont. a todas las f_i es $T = \{U \subset X : f_i^{-1}(U) \in T_i \ \forall i \in I\}$, la **TOPOLOGÍA INDUCIDA** por las app f_i.

3 NOV 2021

PROPIEDAD 2: UNIVERSAL DE LA TOPOLOGÍA FINAL. Sea $f_i: X_i \to X$ una familia de aplicaciones $(i \in I)$, T_i top en X_i, T top final inducida por $f_i: (X_i,T_i) \to X$. Sea (Y,T') otro ET, y $g: X \to Y$ una aplicación. Entonces $g: (X,T) \to (Y,T')$ es continua si, y sólo si, $g \circ f_i: (X_i,T_i) \to (Y,T')$ es continua $\forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g\circ f_i"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Demostración:

$\Rightarrow |$ g cont $\Rightarrow g \circ f_i$ cont (composición de continuas)

$\Leftarrow |$ Supongamos que $g \circ f_i$ es cont $\forall i \in I$. Sea $V \in T'$, queremos ver que $g^{-1}(V) \in T \overset{\text{def } T}{\Leftrightarrow} f_i^{-1}(g^{-1}(V)) \in T_i \;\; \forall i \in I \Leftrightarrow (g \circ f_i)^{-1}(V) \in T \;\; \forall i \in I$ ■

cierto porque suponemos $(g \circ f_i)$ continua

Ejemplo 1: (X,T) ET. R = rel eq. en X. $\pi: X \to X/R$ proyección a X/R

$\rightsquigarrow$ La topología final para $\pi: (X,T) \to X/R$ es, por definición, la topología cociente T/R:

$$\begin{tikzcd}
(X,T) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g\circ\pi"'] & (X/R, T/R) \arrow[d, "g"] \\
 & (Y,T')
\end{tikzcd}$$

$$g: (X/R, T/R) \to (Y,T') \text{ cont} \Leftrightarrow g \circ \pi: (X,T) \to (Y,T') \text{ cont.}$$

¿Cuál es la topología más gruesa en X que hace continuas a todas estas aplicaciones f_i?

Supongamos que $I = \{1\}$. Llamemos $f = f_1: X \to (X_1, T_1)$. Para que la función $f: (X,T) \to (X_1, T_1)$ sea continua, debe verificarse $\{f^{-1}(V) \,/\, V \in T_1\} \subset T$ (se puede comprobar que es topología). Como estoy buscando la topología con la menor cantidad posible de abiertos que hace continua a la aplicación f, tomamos $T = \{f^{-1}(V) \,/\, V \in T_1\}$. La llamaremos TOPOLOGÍA INICIAL para $f: X \to (X_1, T_1)$

Si ahora consideramos el problema general (I arbitrario), tenemos $f_i: X \to (X_i, T_i)$ $\forall i \in I$. Cualquier topología T en X que haga continuas a estas aplicaciones tiene que cumplir la propiedad $V_i \in T_i \Rightarrow f_i^{-1}(V_i) \in T \Rightarrow$ $\Rightarrow S = \{f_i^{-1}(V_i) \,/\, V_i \in T_i$ para algún $i \in I\} \subset T$. Pero esta, por lo general, no es topología. Sea $T(S) = \bigcap_{S \subset T} T$ la topología más gruesa en X que contiene a S. A $T(S)$ la llamaremos TOPOLOGÍA INICIAL para la familia de aplicaciones $f_i: X \to (X_i, T_i)$

Hablando de bases y subbases...

Si $\underset{\text{subbase}}{S} \subset P(X)$ y $\bigcup_{U \in S} U = X \Rightarrow \{U_1 \cap \dots \cap U_k \,/\, k \in \mathbb{N},\, U_i \in S \;\; \forall i \in \Delta_k\} = \underset{\text{base}}{\mathcal{B}(S)}$ es base de $T(S)$. Como, en nuestro caso, $X = f_i^{-1}(X_i) \Rightarrow X \in T(S) \Rightarrow \bigcup_{U \in S} U = X$

Por tanto

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(S) = \{f_{i_1}^{-1}(V_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) \,/\, k \in \mathbb{N},\; i_j \in I \;\; j \in \Delta_k,\; V_{i_j} \in T_{i_j} \;\; j \in \Delta_k\}$ es una base de $T(S)$.

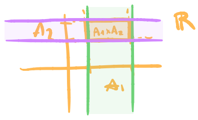
ESPACIOS PRODUCTO

Ejemplo 1: ESPACIO PRODUCTO. Sea $k \geq 2$, $(X_1, T_1), \dots, (X_k, T_k)$ ET (pueden ser iguales o no). El producto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_k$ es el conjunto

$X_1 \times \dots \times X_k = \{(x_1, \dots, x_k) \,/\, x_i \in X_i \;\; i \in \Delta_k\}$.

La aplicación $p_i: X_1 \times \dots \times X_k \to X_i$ es la proyección i-ésima o proyección sobre el i-ésimo factor. Así, $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \overset{p_i}{\mapsto} x_i$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
$A_1 \subset \mathbb{R}$ $\rightarrow$
$A_2 \subset \mathbb{R}$



La topología inicial para las aplicaciones $p_i : X_1 \times \dots \times X_k \to (X_i, T_i)$ $i \in \Delta_k$ es la topología producto en $X_1 \times \dots \times X_k$. La denotaremos por $T_1 \times \dots \times T_k$.

De este modo, tendríamos $p_i : (X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k) \to (X_i, T_i)$ $i \in \Delta_k$ continua.

Si $A_i \subset X_i$ $\forall i \in \Delta_k$, definimos $A_1 \times \dots \times A_k \subset X_1 \times \dots \times X_k$ como el conjunto $A_1 \times \dots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) \,/\, a_i \in A_i \ \forall i \in \Delta_k\}$

Tomamos $p_1^{-1}(A_1) = \{(x_1, \dots, x_k) \,/\, \overbrace{p_1((x_1, \dots, x_k))}^{x_1} \in A_1\} = A_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ *

Deducimos que $A_1 \times A_2 = p_1^{-1}(A_1) \times p_2^{-1}(A_2)$ *

PROPIEDAD 3: En las condiciones anteriores, $A_i \subset X_i$ $\forall i \in \Delta_k$,

de la top. producto $A_1 \times \dots \times A_k = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_k^{-1}(A_k)$

Demostración: $(x_1, \dots, x_k) \in A_1 \times \dots \times A_k \Leftrightarrow \overset{= p_i((x_1,\dots,x_k))}{x_i} \in A_i \ \forall i \in \Delta_k \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_k) \in p_i^{-1}(A_i) \ \forall i \in \Delta_k \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_k) \in p_1^{-1}(A_1) \times \dots \times p_k^{-1}(A_k)$

4 NOV 2021

Continuamos con la topología producto.

Una base de la topología producto es:

$$\mathcal{B} = \{p_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap p_k^{-1}(U_k) \,/\, U_i \in T_i \ \forall i \in \Delta_k\} = \{U_1 \times \dots \times U_k \,/\, U_i \in T_i \ \forall i \in \Delta_k\}$$

Una base $\mathcal{B}$ de $T_1 \times \dots \times T_k$ está formada por productos de abiertos en las topologías T_i.

Ejemplo de la topología producto:

$(\mathbb{R}, T_u)$ $\quad (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, T_u \times T_u)$ $\quad B = \{U \times V \,/\, U, V \in T_u\}$ $\quad$ U y V pueden ser iguales o no

Recopilación: dados $(X_1, T_1) \times \dots \times (X_k, T_k)$, la TOPOLOGÍA PRODUCTO es la topología inicial para la familia de aplicaciones $p_i : X_1 \times \dots \times X_k \to X_i$.

1. Las aplicaciones $p_i : (X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k) \to (X_i, T_i)$ son continuas $\forall i \in \Delta_k$
2. Si T' es otra topología en $X_1 \times \dots \times X_k$ tales que $p_i : (X_1 \times \dots \times X_k, T') \to (X_i, T_i)$ es continua $\forall i \in \Delta_k$, entonces $T_1 \times \dots \times T_k \subset T'$.
3. $\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_k \,/\, U_i \in T_i \ \forall i \in \Delta_k\}$ es una base de $T_1 \times \dots \times T_k$.

ver prop 4) 4. $g : (Z, T') \to (X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es continua si, y sólo si, $p_i \circ g : (Z, T') \to (X_i, T_i)$ es continua $\forall i \in \Delta_k$

PROPIEDAD 4: UNIVERSAL DE LA TOPOLOGÍA INICIAL. Sea $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ una familia de ET, X un conjunto, $f_i : X \to X_i$ $i \in I$ una familia de aplicaciones. Supongamos que T es la topología inicial para la familia $f_i : X \to (X_i, T_i)$. Si (Z, T') es otro ET y $g : Z \to X$ una aplicación, entonces $g : (Z, T') \to (X, T)$ es continua si, y sólo si, $f_i \circ g : (Z, T') \to (X_i, T_i)$ es continua $\forall i \in I$

Demostración

$\Rightarrow)$ Si g es continua, como $f_i : (X, T) \to (X_i, T_i)$ es continua $\forall i \in I$, entonces $f_i \circ g : (Z, T') \to (X_i, T_i)$ por comp. de cont. $\forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} (Z,T') \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & (X,T) \arrow[d, "f_i"] \\ & (X_i,T_i) \end{tikzcd}$$

⇐] Supongamos que $f_i \circ g$ es continua $\forall i \in I$. Tomamos $\mathcal{U} \in T \leftarrow$ top inicial y veamos si $g^{-1}(\mathcal{U}) \in T'$. Sea $\{B_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U} = \bigcup_{j\in J} B_j \Rightarrow g^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(B_j)$. Si probamos que $g^{-1}(B_j)\in T'$ $\forall j \in J$, tendríamos que $g^{-1}(\mathcal{U}) \in T'$ (unión de abiertos de T')

Sea $B\in\mathcal{B}$. Comprobemos que $g^{-1}(B)\in T'$. Si $B\in\mathcal{B}$, $\exists k\in\mathbb{N}$ y $\exists i_1,\dots,i_k\in I$, $\mathcal{U}_{i_1}\in T_{i_1},\dots,\mathcal{U}_{i_k}\in T_{i_k}$ tales que $B = f_{i_1}^{-1}(\mathcal{U}_{i_1})\cap\dots\cap f_{i_k}^{-1}(\mathcal{U}_{i_k})$

$$\rightsquigarrow g^{-1}(B) = g^{-1}\left(f_{i_1}^{-1}(\mathcal{U}_{i_1})\cap\dots\cap f_{i_k}^{-1}(\mathcal{U}_{i_k})\right) = g^{-1}\left(f_{i_1}^{-1}(\mathcal{U}_{i_1})\right)\cap\dots\cap g^{-1}\left(f_{i_k}^{-1}(\mathcal{U}_{i_k})\right) =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(f_{i_1}\circ g)^{-1}}_{\text{cont}}\ \underbrace{(\mathcal{U}_{i_1})}_{\in T_{i_1}}}_{\in T'} \cap\dots\cap \underbrace{(f_{i_k}\circ g)^{-1}(\mathcal{U}_{i_k})}_{\in T'} \in T' \text{ por ser intersección finita de elementos de } T'.$$

■

* NOTA: La inversa de cualquier aplicación respeta la unión arbitraria, la intersección arbitraria, y el complementario.

5 NOV 2021

PROPOSICIÓN 5: Sean $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ EM ($k\geq 2$). Se definen en $X\times X$, donde $X = X_1\times\dots\times X_k$, y para $x=(x_1,\dots,x_k)$ e $y=(y_1,\dots,y_k)$, las aplicaciones:

$$\delta_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le k}\{d_i(x_i,y_i)\} \qquad \delta_1(x,y) = \sum_{i=1}^k d_i(x_i,y_i) \qquad \delta_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^k d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2}$$

Entonces δ_∞, δ_1 y δ_2 son distancias en X, y son métricamente equivalentes. Además, $T_{\delta_\infty} = T_{d_1}\times\dots\times T_{d_k}$. También $T_{\delta_\infty} = T_{\delta_1} = T_{\delta_2}$

Demostración:

- δ_∞ distancia.

D1) $\delta_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le k}\{d_i(x_i,y_i)\}\geq 0$

$\delta_\infty(x,y) = 0 \Leftrightarrow \max_{1\le i\le k}\{d_i(x_i,y_i)\}=0 \Leftrightarrow d_i(x_i,y_i)=0\ \forall i\in\Delta_k \Leftrightarrow x_i=y_i\ \forall i\in\Delta_k \Leftrightarrow x=y$

D2) $\delta_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le k}\{d_i(x,y)\} = \max_{1\le i\le k}\{d_i(y,x)\} = \delta_\infty(y,x)$

D3) $z=(z_1,\dots,z_k)$: $d_i(x_i,y_i)\le d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$ $\forall i\in\Delta_k$, $d_i(x_i,y_i)\le\delta_\infty(x,y)$

$\delta_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le k}\{d_i(x,y)\}\le\delta_\infty(x,z)+\delta_\infty(z,y)$

- δ_1 distancia

D1) $\delta_1(x,y) = \sum_{i=0}^k d_i(x_i,y_i)\geq 0$

$\delta_1(x,y)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k d_i(x_i,y_i)=0 \Leftrightarrow d_i(x_i,y_i)=0\ \forall i\in\Delta_k \Leftrightarrow x_i=y_i\ \forall i\in\Delta_k \Leftrightarrow x=y$

D2) $\delta_1(x,y) = \sum_{i=0}^k d_i(x_i,y_i) = \sum_{i=0}^k d_i(y_i,x_i) = \delta_1(y,x)$

D3) $d_i(x_i,y_i)\le d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$ $\forall i\in\Delta_k \Rightarrow \sum_{i=1}^k d_i(x_i,y_i)\le\sum_{i=1}^k d_i(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^k d_i(z_i,y_i)$

$\delta_1(x,y)\le\delta_1(x,z)+\delta_1(z,y)$

- δ_2 distancia

D1) $\delta_2(x,y) = \left(\sum_{i=0}^k d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2}\geq 0$

$\delta_2(x,y)=0 \Leftrightarrow \left(\sum d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2}=0 \Leftrightarrow \sum d_i(x_i,y_i)^2=0 \Leftrightarrow d_i(x_i,y_i)^2=0\ \forall i\in\Delta_k \Leftrightarrow x_i=y_i\ \forall i\in\Delta_k \Leftrightarrow x=y$

D2) $\delta_2(x,y) = \left(\sum d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum d_i(y_i,x_i)^2\right)^{1/2} = \delta_2(y,x)$

D3) des Minkowski: $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$ (V e. vectorial, $u,v\in V$, $\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$)

$\mathbb{R}^k$ $u=(u_1,\dots,u_k)$, $v=(v_1,\dots,v_k)\in\mathbb{R}^k$ $\|u\| = \left(\sum_{i=1}^k u_i^2\right)^{1/2}$ $\left(\sum_{i=1}^k(u_i+v_i)^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{i=1}^k u_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^k v_i^2\right)^{1/2}$

$\delta_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^k d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{i=1}^k\left(d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)\right)^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{i=1}^k d_i(x_i,z_i)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^k d_i(z_i,y_i)^2\right)^{1/2} = \delta_2(x,z)+\delta_2(z,y)$

Ya sabemos que d_∞, d_1 y d_2 son distancias.

- d_∞, d_1, d_2 son métricamente equivalentes: $d_\infty \leq d_1 \leq \sqrt{k}\, d_2 \leq k \cdot d_\infty$

$d_\infty \leq d_1$) $\max_{1\leq i\leq k} \{d_i(x_i,y_i)\} \leq \sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i)$ por definición

$d_1 \leq \sqrt{k} d_2$) des. Schwarz: $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$ (V e.v. $\langle,\rangle$)

$|u_1v_1 + \dots + u_kv_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^2\right)^{1/2}$

$u_1 = \dots = u_k = 1$, $v_i = d_i(x_i,y_i)$ $\forall i \in \Delta_k$ $\Rightarrow$ $|\underbrace{1\cdot d_1(x_1,y_1) + \dots + 1\, d_k(x_k,y_k)}_{d_1(x,y)}| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} 1^2\right)^{1/2}}_{\sqrt{k}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2}}_{d_2(x,y)} \Rightarrow d_1(x,y) \leq \sqrt{k}\, d_2(x,y)$

$d_2 \leq \sqrt{k} d_\infty$) $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} d_\infty(x,y)^2\right)^{1/2} = (k\cdot d_\infty(x,y)^2)^{1/2} = \sqrt{k}\, d_\infty(x,y)$

- Por último, veamos que $T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$. Una base de T_{d_∞} está formada por todas las bolas abiertas en X con la distancia d_∞: $\mathcal{B}_\infty = \{B_\infty(x,r) \,/\, x \in X, r > 0\}$.

$y \in B_\infty(x,y) \Leftrightarrow d_\infty(x,y) < r \Leftrightarrow \max_{1\leq i\leq k}\{d_i(x_i,y_i)\} < r \Leftrightarrow d_i(x_i,y_i) < r$ $\forall i \in \Delta_k \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y_i \in B_i(x_i,r)$ $\forall i \in \Delta_k \Leftrightarrow y \in B_1(x_1,r) \times \dots \times B_k(x_k,r) \rightarrow B_\infty(x,r) = B_1(x_1,r) \times \dots \times B_k(x_k,r)$

Así, una base $\mathcal{B}$ de $T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$ está formada por producto de abiertos
$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_k \,/\, U_i \in T_{d_i} \ \ i \in \Delta_k\}$

Para probar que $T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$ hay que comprobar:

$\forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}_\infty \,/\, x \in B' \subset B$

Sea $B = U_1 \times \dots \times U_k$, $U_i \in T_i$ $\forall i \in \Delta_k$, y sea $x \in B \Rightarrow x_i \in U_i$ $\forall i \in \Delta_k$. Como $U_i \in T_{d_i} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists r_i > 0 \,/\, B_i(x_i,r_i) \subset U_i$. Si $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$, $r > 0$ y $B_i(x_i,r) \subset B_i(x_1,r_i) \subset U_i$ $\forall i \in \Delta_k \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in B_\infty(x,r) = B_1(x_1,r) \times \dots \times B_k(x_k,r) \subset U_1 \times \dots \times U_k$

$\forall B' \in \mathcal{B}_\infty, \forall x \in B', \exists B \in \mathcal{B} \,/\, x \in B \subset B'$

10 NOV 2021

Sea $B' \in \mathcal{B}_\infty$. $B' = B_\infty(y,r)$ $y \in X_1 \times \dots \times X_k$, $r > 0$ y sea $x \in B' = B_\infty(y,r) = B_1(y_1,r) \times \dots \times B_k(y_k,r)$
$x = (x_1, \dots, x_k) \Rightarrow x_i \in B_i(y_i,r) \Leftrightarrow d_i(x_i,y_i) < r$

$x_i \in B_i(y_i,r) \in T_{d_i} \Rightarrow \exists s_i > 0 \,/\, B_i(x_i,s_i) \subset B_i(y_i,r)$ $\forall i \in \Delta_k$

Tomo $U_i = B_i(x_i,s_i) \in T_{d_i}$, $i \in \Delta_k \Rightarrow U_1 \times \dots \times U_k \in \mathcal{B}$

$x \in U_1 \times \dots U_k = B_1(x_1,s_1) \times \dots \times B_k(x_k,s_k) \subset B_1(y_1,r) \times \dots \times B_k(y_k,r) = B_\infty(y,r)$
$x_i \in U_i$

Acabamos de ver que $T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$.
Como d_1, d_2, d_∞ son métricamente equivalentes $\Rightarrow T_{d_1} = T_{d_2} = T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$

Ejemplo 1: $\mathbb{R}^2$, $T_u = T_{d_2} = T_d \times T_d$ $(\mathbb{R}, d)$ dist usual

$x, y \in \mathbb{R}^2$ $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{2} d(x_i,y_i)^2\right)^{1/2}$

d_2 es la distancia d_2 tal y como se definió para producto de EM.
T_u en $\mathbb{R}^2$ = top. asociada a la dist euclídea $\left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$, que coincide con la distancia d_2 tal y como la hemos definido al comienzo de esta sección $\Rightarrow T_u = T_{d_2}$. Pero acabamos de ver que $T_{d_2} = T_d \times T_d$. Entonces T_{d_2} es una top. producto y tiene todas las propiedades de una topología producto. En particular, $f: (X,T) \rightarrow (\mathbb{R}^2, T_u)$ es continua si, y sólo si,

$p_i \circ f: (X,T) \rightarrow (\mathbb{R}, T_d)$ es continua $\forall i = 1,2$

Por ejemplo, $f: (\mathbb{R}, T_u) \rightarrow (\mathbb{R}^2, T_u)$ tal que $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ es continua porque $p_1 \circ f = \cos$ y $p_2 \circ f = \operatorname{sen}$, que son aplicaciones continuas de $(\mathbb{R}, T_u)$ en $(\mathbb{R}, T_u)$

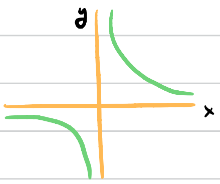
Ejemplo 2: En $\mathbb{R}^n$, $T_u = T_d \times \cdots \times T_d$ $\quad T_d = T_u$ en $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$
Por tanto, $(\mathbb{R}^n, T_u)$ es un espacio producto. Para ver que una determinada función f es continua, comprobamos $p_i \circ f$ continua $\forall i \in \Delta_n$

Sabemos que $p_i : (X_1 \times \cdots \times X_k, T_1 \times \cdots \times T_k) \to (X_i, T_i)$ son continuas $\forall i \in \Delta_k$.

PROPIEDAD 5: $p_i : (X_1 \times \cdots \times X_k, T_1 \times \cdots \times T_k) \to (X_i, T_i)$ son abiertas $\forall i \in \Delta_k$.

Demostración: $\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_k \,/\, U_i \in T_i \ \forall i \in \Delta_k\}$ es base de $T_1 \times \cdots \times T_k$. Tenemos que $p_i(U_1 \times \cdots \times U_k) = U_i \in T_i$. Hemos probado que $p_i(B) \in T_i$ $\forall B \in \mathcal{B}$.
Si $U \in T_1 \times \cdots \times T_k$, $\exists \{B_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{B}$ / $U = \bigcup_{j \in J} B_j \to p_i(U) = p_i\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} \overbrace{p_i(B_j)}^{\in T_i} \in T_i$

Ejemplo 1: Las proyecciones en un espacio producto no son cerradas en general.
$(\mathbb{R}^2, T_d \times T_d)$ $\quad d =$ dist usual en $\mathbb{R}$



$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$
C es cerrado en $(\mathbb{R}^2, T_d \times T_d)$, pero $p_1(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es cerrado en $(\mathbb{R}, T_d)$ $\quad (\{0\} \notin T_d)$

Veamos que C es cerrado. Sólo hace falta ver que la aplicación $h : (\mathbb{R}^2, T_d \times T_d) \to (\mathbb{R}, T_d)$ definida por $h(x,y) = xy$ es continua. En este caso, $C = h^{-1}(\{1\})$. Como $\{1\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, T_d)$, entonces $h^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, h(x,y) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\} = C$ es cerrado.

Veamos ahora que $h(x,y) = xy$ es continua:
$h(x,y) = xy = p_1(x,y) \cdot p_2(x,y) = (p_1 \cdot p_2)(x,y)$. Que h es continua se sigue del lema.

LEMA 1: Sean $f, g : (X, T) \to (\mathbb{R}, T_d)$ aplicaciones continuas de un ET (X,T) en $(\mathbb{R}, T_d)$.
Definimos $f+g : X \to \mathbb{R}$ y $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ (suma y producto de f y g) como: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\quad \forall x \in X$

NOTA: Necesitamos que en el espacio final haya suma y/o producto

Entonces $f+g$ y $f \cdot g$ son continuas

Demostración: Veamos que $f \cdot g$ es continua. Fijamos $x_0 \in X$ y veamos que $f \cdot g$ es continua en $x_0 \in X$. Sabemos que f, g son continuas en x_0, lo que significa que $\forall V \in N_{f(x_0)}$ en $(\mathbb{R}, T_d)$, existe un entorno U de x_0 en X tal que $f(U) \subset V$, y $\forall V' \in N_{g(x_0)}$ existe $U' \in N_{x_0}$ tal que $g(U') \subset V'$

Recordemos como se demostraba la continuidad de $f \cdot g$ si $f, g : (\mathbb{R}, T_d) \to (\mathbb{R}, T_d)$
$|fg(x) - fg(x_0)| = |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \leq$
$\leq |f(x)g(x) - f(x)g(x_0)| + |f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| = |f(x)|\,|g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)|\,|f(x) - f(x_0)|$ *
Como yo sé que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon + |f(x_0)|$
Sigo: * $\leq (\varepsilon + |f(x_0)|) \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)|$

Sea $V \in N_{fg(x_0)}$. $\exists\, 0 < \varepsilon < 1$: $((fg)(x_0) - \varepsilon, (fg)(x_0) + \varepsilon) \subset V$ $\quad$ 11 NOV 2021
Sea $M = \max\{|f(x_0)|, |g(x_0)|\} + 1 \geq 1 > 0$.
Usamos que f, g son continuas en x_0. Tomando
$V_1 = (f(x_0) - \varepsilon', f(x_0) + \varepsilon') \in N_{f(x_0)}$ $\quad$ con $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$
$V_2 = (g(x_0) - \varepsilon', g(x_0) + \varepsilon') \in N_{g(x_0)}$
Por la continuidad de f en x_0, $\exists U_1 \in N_{x_0}$ tal que $f(U_1) \subset V_1$ $\quad (x \in U_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \in V_1 = (f(x_0) - \varepsilon', f(x_0) + \varepsilon') \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon')$

Por la continuidad de g en x_0, $\exists \mathcal{U}_2 \in \mathcal{N}_{x_0}$ tal que $g(\mathcal{U}_2) \subset \mathcal{V}_2$ $(x \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) \in \mathcal{V}_2 = (g(x_0)-\varepsilon', g(x_0)+\varepsilon') \Rightarrow |g(x_0)-g(x)| < \varepsilon')$
Tomamos $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{N}_{x_0}$. Si $x \in \mathcal{U}$:

$$|fg(x)-fg(x_0)| \leq |f(x)||g(x_0)-g(x)| + |g(x_0)||f(x_0)-f(x)| < |f(x)| \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |g(x_0)| \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} <$$
$$< |f(x)| \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \underset{\text{def } M}{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} \; (*)$$

Pero $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon' \Rightarrow |f(x)| - |f(x_0)| \leq |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon' \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| \leq |f(x_0)| + \varepsilon' \underset{\text{def } M}{<} M + \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$

Sigo $(*)$ $< \left(M + \overset{1}{\frac{\varepsilon}{2(M+1)}}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)}^{2} \leq \underbrace{\left(M + \overset{1}{\frac{1}{2}}\right) \frac{\varepsilon}{2(M+1)}}_{3} + \frac{\varepsilon}{2}^{2} \underset{3}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

1) $\varepsilon < 1 \Rightarrow M+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2(M+1)} \leq \frac{1}{2}$
2) $\frac{M}{M+1} \leq 1$
3) $\frac{M+1/2}{M+1} \leq 1$

Hemos probado que si $x \in \mathcal{U} \Rightarrow |(fg)(x_0) - (fg)(x)| < \varepsilon \Rightarrow (fg)(\mathcal{U}) \subset ((fg)(x_0)-\varepsilon, (fg)(x_0)+\varepsilon) \subset \mathcal{V}$

$\blacksquare$

Suma probada en ejercicio 3 de la relación.

PROPIEDAD 6: Sean $(X_1,T_1), \ldots, (X_k \times T_k)$ ET. Sea $\mathcal{B}_i$ base de T_i $\forall i \in \Delta_k$. Entonces, $\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_k = \{B_1 \times \ldots \times B_k \,/\, B_i \in \mathcal{B}_i \ \forall i \in \Delta_k\}$ es una base de $T_1 \times \ldots \times T_k$.

Demostración: Sea $\mathcal{U} \in T_1 \times \ldots \times T_k$ y sea $x \in \mathcal{U}$. Para probar que $\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_k$ es base, basta encontrar $B \in \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_k$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}$. Como $\{\mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_k \,/\, \mathcal{U}_i \in T_i \ \forall i \in \Delta_k\}$ es base de $T_1 \times \ldots \times T_k$, $\exists \mathcal{U}_1 \in T_1, \ldots, \mathcal{U}_k \in T_k$ tales que $x \in \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_k \subset \mathcal{U}$
$x = (x_1, \ldots, x_k)$ $x_i \in \mathcal{U}_i$ $i \in \Delta_k$. Como $\mathcal{B}_i$ es base de T_i, existe $B_i \in \mathcal{B}_i \,/\, x_i \in B_i \subset \mathcal{U}_i$.
Entonces $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \underbrace{B_1 \times \ldots \times B_k}_{} \overset{B_i \subset \mathcal{U}_i \ \forall i \in \Delta_k}{\subset} \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_k \subset \mathcal{U}$.

$\in \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_k$

$\blacksquare$

PROPIEDAD 7: Sean (X_i, T_i) $i \in \Delta_k$ ET. $A_i \subset X_i$ $\forall i \in \Delta_k$. Entonces,
$$\overline{A_1 \times \ldots \times A_k} = \overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_k}$$

Demostración: Sea $x \in X_1 \times \ldots \times X_k$. Sabemos que $\{\mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_k \,/\, \mathcal{U}_i \in T_i \ \forall i \in \Delta_k\} = \mathcal{B}$ es base de $T_1 \times \ldots \times T_k$, y que $\mathcal{B}(x) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{B} \,/\, x \in \mathcal{U}\}$ es b.ent. de x. Sabemos también que $x \in \overline{A_1 \times \ldots \times A_k} \Leftrightarrow B \cap (A_1 \times \ldots \times A_k) \neq \emptyset$ $\forall B \in \mathcal{B}(x)$.

$x = (x_1, \ldots, x_k) \in \overline{A_1 \times \ldots \times A_k} \Leftrightarrow (\mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_k) \cap (A_1 \times \ldots \times A_k) = \emptyset$ $\forall \mathcal{U}_i \in T_i \,/\, x_i \in \mathcal{U}_i \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\mathcal{U}_1 \cap A_1) \times \ldots \times (\mathcal{U}_k \cap A_k) \neq \emptyset$ $\forall \mathcal{U}_i \in T_i \,|\, x_i \in \mathcal{U}_i \Leftrightarrow \mathcal{U}_i \cap A_i \neq \emptyset$ $\forall i \in \Delta_k$ $\forall \mathcal{U}_i \in T_i \,|\, x_i \in \mathcal{U}_i \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_i \in \overline{A_i}$ $\forall i \in \Delta_k$ $\Leftrightarrow x = (x_1, \ldots, x_k) \in \overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_k}$

$\mathcal{B}_i(x_i) = \{\mathcal{U}_i \in T_i \,/\, x_i \in \mathcal{U}_i\}$ base ent. x

Hemos terminado espacios producto.

ESPACIOS COCIENTE

DEFINICIÓN 11: Sea $f: (X,T) \to (Y,T')$ una aplicación sobreyectiva entre dos ET. Diremos que es una IDENTIFICACIÓN si T' es la topología final para f.

Ejemplo 1: Si (X,T) es ET y R relación de equivalencia, la aplicación proyección $p: (X,T) \to (X/R, T/R)$ es una identificación.

Comentario: Si $f: (X,T) \to (Y,T')$ es una aplicación y T' es la top. final para f, entonces $\mathcal{V} \in T' \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{V}) \in T$. $T' = \{\mathcal{V} \subset Y : f^{-1}(\mathcal{V}) \in T\}$

17 NOV 2021

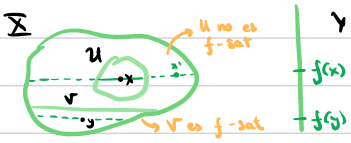
DEFINICIÓN 12: Sea $f: X \to Y$ una aplicación. Diremos que $U \subset X$ es **f-SATURADO** si $U = f^{-1}(f(U))$.

- $x \in U \Rightarrow f(x) \in f(U) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(U))$ ($U \subset f^{-1}(f(U))$ se da siempre)

Entonces, la parte relevante de esta definición es $f^{-1}(f(U)) \subset U$

Si un conjunto es f-saturado $\Rightarrow U = f^{-1}(f(U)) = f^{-1}\left(\bigcup_{x \in U} f(\{x\})\right) = \bigcup_{x \in U} f^{-1}(f(\{x\}))$

$\Rightarrow$ si $x \in U$, todos los puntos de X con la misma imagen que x pertenecen a U



DEFINICIÓN 13: $f: (X, T) \to (Y, T')$ es **CASI-ABIERTA** si la imagen de todo $U \in T$ f-saturado es abierto en T'.

DEFINICIÓN 14: $f: (X, T) \to (Y, T')$ es **CASI-CERRADA** si la imagen de todo $U \in C_T$ f-saturado es cerrado en T'.

PROPOSICIÓN 6: Sea $f: (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación sobreyectiva. Entonces f es una identificación si, y sólo si, f es continua y casi-abierta (o casi-cerrada).

Demostración:

$\Rightarrow)$ Supongamos que f es identificación. Entonces f es continua puesto que T' es la top. final. Veamos que f es casi-abierta. Sea $U \in T$ f-saturado ($U = f^{-1}(f(U))$). Queremos ver que $f(U) \in T'$. Como T' es la topología final para f, $f(U) \in T' \Leftrightarrow f^{-1}(f(U)) \in T$. Como U es f-saturado, $U = f^{-1}(f(U)) \in T$ (ya que U es abierto)

$\Leftarrow)$ Supongamos que f es continua y casi-abierta. Para comprobar que f es identificación, tenemos que ver que f es sobreyectiva (lo es por hipótesis) y que $T' = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$. Como $\{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$ es la top. final para f (es la top más fina que hace continua a $f: (X, T) \to Y$) y $f: (X, T) \to (Y, T')$ es continua, entonces $T' \subset \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$

otra forma para $\subset$: $V \in T' \overset{f\ \text{cont}}{\Rightarrow} f^{-1}(V) \in T \Rightarrow V \in T_{final} = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$

$x_{\in} \Rightarrow f(x) \in V$; $f(x') = f(x) \in V$ $\Rightarrow x' \in f^{-1}(V)$

Veamos ahora la otra inclusión. Sea $V \subset Y$ tal que $f^{-1}(V) \in T$. El conjunto $f^{-1}(V)$ es saturado (hay que comprobar $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(f(f^{-1}(V)))$). Como f es casi-abierta, $f(f^{-1}(V)) \in T'$. Pero $V = f(f^{-1}(V))$ por ser f sobreyectiva. Por tanto $V \in T'$. Concluimos que $T' = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\} \Rightarrow T'$ es la topología final para f y f es identificación.

$\blacksquare$

DEFINICIÓN 15: Si $f: X \to Y$ es una aplicación, podemos definir en X la relación de equivalencia R_f por: $x R_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$

Podemos definir $\tilde{f}: X/R_f \to Y$ $\quad \tilde{f}([x]) = f(x)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow^{\pi} & \uparrow \tilde{f} \\ & & X/R_f \end{array} \qquad \begin{array}{l} \tilde{f}(\pi(x)) = f(x) \\ \tilde{f}([x]) = f(x) \end{array}$$

(bien definida porque si $[x]=[x'] \Rightarrow x R_f x' \Rightarrow f(x) = f(x')$)

- La aplicación $\tilde{f}$ siempre es inyectiva ($\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([x']) \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x R_f x' \Rightarrow [x]=[x']$)
- $\tilde{f}$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow f$ es sobreyectiva ($f(X) = \tilde{f}(X/R_f)$)

Si $f: X \to Y$ es sobreyectiva, entonces $\tilde{f}: X/R_f \to Y$ es biyectiva

TEOREMA 1: Sea $f: (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación sobreyectiva entre ET. Entonces $\tilde{f}: (X/R_f, T/R_f) \to (Y, T')$ es un HOMEOMORFISMO si y sólo si $f: (X,T) \to (Y,T)$ es una IDENTIFICACIÓN.

18 NOV 2021

Demostración:

$\Leftarrow$) Supongamos que f es identificación y veamos que $\tilde{f}$ es homeomorfismo. $\tilde{f}$ es sobreyectiva porque f lo es, y siempre es inyectiva $\Rightarrow \tilde{f}$ es biyectiva.

Además, $\tilde{f}: (X/R_f, T/R_f) \to (Y, T')$ es continua $\Leftrightarrow \tilde{f} \circ \pi: (X,T) \to (Y,T')$ es continua. Pero $\pi \circ \tilde{f} = f$, que es continua por ser identificación. Sólo nos queda ver que $\tilde{f}$ es abierta.

Sea $V \in T/R_f \Rightarrow \pi^{-1}(V) \in T$. $f(\pi^{-1}(V)) = \{f(x) : x \in \pi^{-1}(V)\} = \{\tilde{f}(\pi(x)) : \pi(x) \in V\} = \tilde{f}(V)$.

Si probamos que $\pi^{-1}(V)$ es f-saturado•, como f es casi abierta por ser identificación, $f(\pi^{-1}(V)) \in T' \Rightarrow \tilde{f}(V) \in T'$. Entonces $V \in T/R_f \Rightarrow \tilde{f}(V) \in T'$, lo que implica $\tilde{f}$ abierta.

Como $\tilde{f}$ es continua, biyectiva y abierta, $\tilde{f}$ es homeomorfismo

• $\pi^{-1}(V)$ es f-saturado: Sea $\underbrace{x \in \pi^{-1}(V)}_{\pi(x) \in V}$, $x' \in X \mid f(x) = f(x') \Rightarrow x R_f x' \Rightarrow [x] = [x'] \Rightarrow \pi(x) = \pi(x') \in V$

$\pi^{-1}(V)$ f-saturado $\Leftarrow x' \in \pi^{-1}(V)$

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $\tilde{f}$ es homeomorfismo y veamos que f es una identificación (continua y casi abierta). Como $\pi \circ \tilde{f} = f$, f es continua por ser composición de aplicaciones continuas ($\tilde{f}$ lo es por ser homeomorfismo y π por ser la proyección al espacio cociente). Queda ver que f es casi-abierta. Para ello, sea $V \in T$ f-saturado. Queremos ver que $f(V) \in T'$. Como $f(V) = \tilde{f}(\pi(V))$, si probamos que $\pi(V) \in T/R_f$ habríamos terminado porque $\tilde{f}$ es un homeomorfismo, y $\tilde{f}(\pi(V)) \in T'$

$\pi(V) \in T/R_f \Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi(V)) \in T$. Como V es f-saturado, veamos que $V = \pi^{-1}(\pi(V))$:

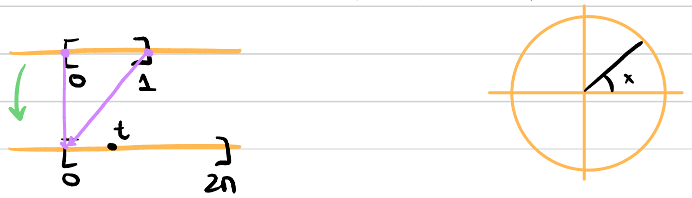
Si $x \in V \Rightarrow \pi(x) \in \pi(V) \Rightarrow x \in \pi^{-1}(\pi(V)) \Rightarrow V \subset \pi^{-1}(\pi(V))$. Busquemos la otra inclusión:

Sea $x \in \pi^{-1}(\pi(V)) \Rightarrow \pi(x) \in \pi(V) \Rightarrow \exists x' \in V / \overset{x R_f x'}{\pi(x) = \pi(x')}$. Por tanto, si $x \in \pi^{-1}(\pi(V))$, $\exists x' \in V$ tal que $f(x) = f(x') \overset{V\ f\text{-sat}}{\Rightarrow} x \in V$ ■

Ejemplo 1: $([0,1], (T_u)_{[0,1]})$ $\quad I \quad S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ $(T_u^2)_{S^1}$

Definimos $f: ([0,1], \underbrace{(T_u)[0,1]}_{T}) \to (S^1, \underbrace{(T_u^2)S^1}_{T'})$ por $f(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$

$x \mapsto 2\pi x \longrightarrow (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$



$f: ([0,1], (T_u)_{[0,1]}) \to (S^1, (T_u^2)_{S^1})$

Veamos a ver que f es identificación (sobreyectiva, continua y casi-cerrada)

Veamos primero una consecuencia: Si f es una identificación, entonces $\tilde{f}: ([0,1]/R_f, T/R_f) \to (S^1, T')$ es homeomorfismo. ¿Quién es R_f?

Si $x, x' \in [0,1]$, $f(x) = f(x') \Rightarrow (\cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x)) = (\cos(2\pi x'), \text{sen}(2\pi x')) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\pi x = \cos 2\pi x' \\ \text{sen}\, 2\pi x = \text{sen}\, 2\pi x' \end{cases} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $2\pi x - 2\pi x' = 2\pi \cdot k \Rightarrow x - x' = k$

Entonces, $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$. Como $x, x' \in [0,1]$, la única posibilidad para que $f(x) = f(x')$ es
- $x = x'$
- $x = 0,\ x' = 1$
- $x = 1,\ x' = 0$

Entonces, las clases de equivalencia son
- $[x] = \{x\}$ $\quad x \neq 0,1$
- $[0] = [1] = \{0,1\}$

f identificación $\Rightarrow ([0,1], T/R_f) \overset{\text{homeomorfo}}{\approx} (S^1, T')$

Visualmente, esto significa que doblamos el intervalo $[0,1] \mapsto [0,2\pi]$ pegando los extremos (circunferencia) para que los elementos próximos a 1 estén cerca de la clase $[1]$ y de la clase $[0]$

24 NOV 2021

•) f sobreyectiva: si $x^2+y^2=1$, $\exists t \in [0,2\pi)$ tal que $\cos(t) = x$ y $\text{sen}(t) = y$. Si tomamos $z = \frac{t}{2\pi}$, entonces $z \in [0,1)$ y $f(z) = (\cos(2\pi z), \text{sen}(2\pi z)) = (x,y)$

•) f continua: $f: ([0,1], T) \to (S^1, T') \subset (\mathbb{R}^2, T_u^2)$. T' es la top. inicial para la aplicación inclusión $i_{S^1}: (S^1, T' = (T_u^2)_{S^1}) \to (\mathbb{R}^2, T_u^2)$. Por la prop. universal de la topología inicial, f es continua $\Leftrightarrow i_{S^1} \circ f: ([0,1), T) \to (\mathbb{R}^2, T_u^2)$ es continua. Por la misma prop., se tiene $i_{S^1} \circ f$ es continua $\Leftrightarrow p_1 \circ (i_{S^1} \circ f),\ p_2 \circ (i_{S^1} \circ f)$ son continuas

Pero $(p_1 \circ (i_{S^1} \circ f))(z) = \cos(2\pi z)$, $(p_2 \circ (i_{S^1} \circ f))(z) = \text{sen}(2\pi z)$ con $([0,1], (T_u)_{[0,1]}) \to (\mathbb{R}, T_u)$ $\Rightarrow$ son continuas de $(\mathbb{R}, T_u)$ en $(\mathbb{R}, T_u)$. Por tanto, al restringirse al intervalo $[0,1]$ siguen siendo continuas.

• f cerrada: Vamos a necesitar el ejercicio 35c,d del tema 1, que son:
- (X, T) ET. $\emptyset \neq A \subset X$. Sup. $\exists \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ / $a_i \to x$. Entonces $x \in \bar{A}$
- Si (X,T) es AN-I y $x \in \bar{A}$, entonces $\exists \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $a_i \to x$

También necesitaremos la siguiente propiedad 8 (ver).

Sea $A \subset [0,1]$ cerrado. Veamos que $f(A)$ es cerrado en S^1. Sea $p \in \overline{f(A)}$.
$(S^1, (T_u^2)_{S^1})$ es AN-I $(\mathbb{R}^2, T_u^2)$ es AN-I por ser EM y cualquier subconjunto de un AN-I es AN-I
$\exists \{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset f(A) / p_i \to p$. $\exists a_i \in A / f(a_i) = p_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$. $\{a_i\} \subset [0,1] \Rightarrow$ T$^{\text{ma}}$ Heine-Borel $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \{a_{\sigma(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión parcial tal que $a_{\sigma(i)} \to a \in [0,1]$. Como $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es sucesión en A y $a_{\sigma(i)} \to a \Rightarrow a \in \bar{A} \overset{A \text{ cerrado}}{=} A$. Como f es continua, y $a_{\sigma(i)} \to a$, entonces $p_{\sigma(i)} = f(a_{\sigma(i)}) \to f(a)$. Pero $p_{\sigma(i)} \to p$ por ser parcial de $p_i \to p$.
Como $(S^1, (T_u^2)_{S^1})$ es Hausdorff, $p = f(a)$ (los límites de sucesiones son únicos)
$\Rightarrow p \in f(A)$ $(a \in A)$. Por tanto, $\overline{f(A)} \subset f(A) \Rightarrow f(A)$ cerrado, y f es cerrada $\Rightarrow$ casi-cerrada

Entonces f es identificación.

PROPIEDAD 8: Sea $f:(\mathfrak{X},\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ continua y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathfrak{X}$ que converge al punto $x\in\mathfrak{X}$. Entonces $f(x_i)\to f(x)$.

Demostración: Sea $\mathcal{V}\in N'_{f(x)}$. Como f es continua en x, $\exists\,\mathcal{U}\in N_x \,/\, f(\mathcal{U})\subset\mathcal{V}$.
Como $x_i\to x$, $\exists\, i_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_i\in\mathcal{U}\in N_x$ $\forall i\geq i_0 \Rightarrow f(x_i)\in f(\mathcal{U})\subset\mathcal{V}\in N'_{f(x)}$ $\forall i\geq i_0$.

EJERCICIO 4: Sea $f:(\mathfrak{X},\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ una aplicación con la siguiente propiedad: si $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathfrak{X}$ converge a $x\in\mathfrak{X}$, entonces $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}\subset Y$ converge a $f(x)$. Probar que f es continua si $(\mathfrak{X},\mathcal{T})$ es AN-I

Reducción al absurdo. Si f no es continua $\Rightarrow \exists\, x\in\mathfrak{X} \,/\, f$ no es continua en $\mathfrak{X} \Rightarrow \exists\,\mathcal{V}\in N'_{f(x)}$ tal que $f(\mathcal{U})\not\subset\mathcal{V}$ para todo $\mathcal{U}\in N_x$. Ahora, hay que construir $x_i\to x \,/\, f(x_i)\not\to f(x)$.

TEMA 2 TERMINADO

EJERCICIO 1: Si $f_1:(\mathfrak{X}_1,\mathcal{T}_1)\to(\mathfrak{X}_2,\mathcal{T}_2)$ es continua en $x_1\in\mathfrak{X}_1$ y $f_2:(\mathfrak{X}_2,\mathcal{T}_2)\to(\mathfrak{X}_3,\mathcal{T}_3)$ es continua en $\underbrace{f_1(x_1)}_{=x_2}$, entonces $f_2\circ f_1:(\mathfrak{X}_1,\mathcal{T}_1)\to(\mathfrak{X}_3,\mathcal{T}_3)$ es continua en x_1.

$f_2\circ f_1$ continua en $x_1 :=$ "$\forall\mathcal{V}''\in N''_{f_2\circ f_1(x)},\ \exists\,\mathcal{V}\in N_{x_1} : f_2\circ f_1(\mathcal{V})\subset\mathcal{V}''$"

Tomamos $\mathcal{V}''\in N''_{f_2(f_1(x_1))}=N''_{f_2(x_2)}$. Como f_2 es continua en x_2, $\exists\,\mathcal{V}'\in N'_{f_1(x_1)}$ verificando $f_2(\mathcal{V}')\subset\mathcal{V}'' \Leftrightarrow \mathcal{V}'\subset f_2^{-1}(\mathcal{V}'') \Leftrightarrow f_2^{-1}(\mathcal{V}'')\in N'_{f_1(x_1)}$. Como f_1 es continua en x_1, $\exists\,\mathcal{V}\in N_{x_1}$ tal que $f_1(\mathcal{V})\subset\mathcal{V}' \Rightarrow f_2(f_1(\mathcal{V}))\subset f_2(\mathcal{V}')\subset\mathcal{V}''$.

Luego, concluimos que $\forall\,\mathcal{V}''\in N_{f_2(f_1(x_1))}$, $\exists\,\mathcal{V}\in N_{x_1}$ tal que $f_2(f_1(\mathcal{V}))\subset\mathcal{V}''$, por lo que $f_2\circ f_1$ es continua en $x_1\in\mathfrak{X}$.

EJERCICIO 3: Sea $f:(\mathfrak{X},\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ un homeomorfismo $<$ f, f^{-1} continuas; f biyectiva

1. Sea $x\in\mathfrak{X}$, $\mathcal{B}_x$ base de entornos de $x \Rightarrow f(\mathcal{B}_x)=\{f(B)/B\in\mathcal{B}_x\}$ es b.ent. de $f(x)$
2. Si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces $f(\mathcal{B})=\{f(B)/B\in\mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}'$

1) $\mathcal{B}_x$ b.ent x: $\mathcal{B}_x\subset N_x$ y $\forall\mathcal{V}\in N_x$, $\exists B\in\mathcal{B}_x : x\in B\subset\mathcal{V}$.

Hemos visto antes que $f(N_x)=N'_{f(x)}$ para f hom., luego como $\mathcal{B}_x\subset N_x$, $f(\mathcal{B}_x)\subset N'_{f(x)}$. Sea ahora $\mathcal{V}'\in N'_{f(x)} \Rightarrow \exists W\in\mathcal{T}' : f(x)\in W\subset\mathcal{V}'$. Como f es continua, $x\in \underbrace{f^{-1}(W)}_{\in\mathcal{T}}\subset f^{-1}(\mathcal{V}') \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}')\in N_x$. Como $\mathcal{B}_x$ es b.ent. de x, $\exists B\in\mathcal{B}_x$ verificando $x\in B\subset f^{-1}(\mathcal{V}') \Rightarrow f(x)\in f(B)\subset\mathcal{V}' \Rightarrow f(\mathcal{B}_x)$ es b.ent. de $f(x)$.

2) $\mathcal{B}$ base de T : $\mathcal{B} \subset T$ y $\forall V \in T$, $\exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$: $\bigcup_{i \in I} B_i = V$

Como f es abierta, $\forall B \in \mathcal{B} \subset T$, $f(B) \in T'$ $\Rightarrow$ $f(\mathcal{B}) \subset T'$

Ahora, tomamos $V' \in T'$. Como f es continua, sabemos que $f^{-1}(V') \in T$.
Luego $\exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ verificando $\bigcup_{i \in I} B_i = f^{-1}(V')$ $\Rightarrow$ $f(\bigcup_{i \in I} B_i) = f(f^{-1}(V')) \subset V'$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\bigcup_{i \in I} f(B_i) \subset V'$. Tomando la familia $\{f(B_i)\}_{i \in I} \subset f(\mathcal{B})$, queremos probar la inclusión inversa. Sea $y \in V'$. Como f es biyectiva, $\exists x \in X : f(x) = y$.
$x \in f^{-1}(V) = \{x' \in X : f(x') \in V\} \in T$, por lo que $\exists i_0 \in I$ verificando $x \in B_{i_0}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $f(x) \in f(B_{i_0})$ $\Rightarrow$ $f(x) = y \in \bigcup_{i \in I} f(B_i)$ $\Rightarrow$ $V' \subset \bigcup_{i \in I} f(B_i)$.

Concluimos que $V' = \bigcup_{i \in I} f(B_i)$, por lo que $f(\mathcal{B})$ es base de T'.