Geometría II. Relación de problemas 2

Tema 2: Formas bilineales y métricas

Curso 2018-19

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Dadas dos formas lineales $\varphi, \psi \in V^*$ definimos su *producto tensorial* $\varphi \otimes \psi : V \times V \to \mathbb{R}$ como $(\varphi \otimes \psi)(u, v) = \varphi(u)\, \psi(v)$.

   a) Prueba que $\varphi \otimes \psi$ es bilineal.

   b) Prueba que las siguientes afirmaciones equivalen:

      i) $\varphi \otimes \psi = 0$.

      ii) $\varphi = 0$ ó $\psi = 0$.

      iii) $\varphi \otimes \psi$ es antisimétrica.

   c) Prueba que la aplicación

   $$\begin{aligned} F : V^* \times V^* &\longrightarrow \mathcal{B}(V) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi \otimes \psi \end{aligned}$$

   es bilineal.

   d) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ su base dual. Calcula la matriz de $\varphi \otimes \psi$ en la base B relacionándola con las coordenadas de φ y ψ en la base B^*. Demuestra que $B' = \{\varphi_i \otimes \varphi_j \,/\, i, j = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\mathcal{B}(V)$. Describe la base B' cuando $V = \mathbb{R}^n$ y $B = B_u$.

   e) Sea $b \in \mathcal{B}(V)$. Prueba que las siguientes afirmaciones equivalen:

      i) rango(b) $= 1$.

      ii) $b = \varphi \otimes \psi$ con $\varphi \neq 0$ y $\psi \neq 0$.

      iii) Existe B base de V tal que si b es simétrica

   $$M(b, B) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

y si b no es simétrica

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Denotemos por $\mathcal{L}(V,V^*)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de V en su dual V^*. Se define $F : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}(V,V^*)$ como $F(b)(u)(v) = b(u,v)$, $b \in \mathcal{B}(V)$, $u,v \in V$. Prueba que F está bien definida y que es un isomorfismo.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado un endomorfismo $f : V \to V$ y una formal bilineal $b : V \times V \to \mathbb{R}$, se define la aplicación $b_f : V \times V \to \mathbb{R}$ como $b_f(u,v) = b(f(u), f(v))$. Demuestra que b_f es una forma bilineal, que además es simétrica si lo es b.

4. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales reales. Consideremos el espacio producto $V = V_1 \times V_2$, donde la suma y el producto por escalares se realizan coordenada a coordenada. Dadas formas bilineales $b_i : V_i \times V_i \to \mathbb{R}$ definimos $b : V \times V \to \mathbb{R}$ como

$$b\big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\big) = b_1(u_1,v_1) + b_2(u_2,v_2).$$

Demuestra que b es una forma bilineal sobre V, que además es simétrica si lo son b_1 y b_2.

5. Se considera la forma bilineal $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 2yy' - 3zz' + 2xy' - 3yz'.$$

a) Calcula $M(b, B_u)$. ¿Es b una métrica sobre $\mathbb{R}^3$?

b) Utiliza la expresión matricial de b respecto a B_u para calcular $b((1,-2,1),(1,-2,4))$.

c) Se considera la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Calcula $M(b,B)$ mediante la relación de congruencia.

d) Calcula $b(u,v)$, sabiendo que las coordenadas de u y v en la base B son $(1,-2,1)$ y $(2,1,2)$, respectivamente.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión tres, b una forma bilineal sobre V y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Sabiendo que

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula $b(u,v)$ para $u = v_1 + v_3$ y $v = v_2 + 3v_3$.

b) ¿Existe algún vector $w \neq 0$ tal que $b(w,w) = 0$?

c) Calcula $M(b,B')$ siendo $B' = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2\}$.

7. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ se considera la aplicación $b : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx \, .$$

a) Comprueba que b es una forma bilineal.

b) Calcula $M(b,B)$ para $B = \{1,x,x^2,x^3\}$.

c) Consideremos la descomposición de b como suma de una métrica b_s y de una forma bilineal antisimétrica b_a. Calcula $M(b_s,B)$ y $M(b_a,B)$.

d) Calcula b_s y b_a sobre una pareja cualquiera de polinomios en $\mathbb{R}_3[x]$.

8. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera la aplicación $b : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(A,C) = \text{traza}(A \cdot C) \, .$$

a) Comprueba que b es una forma bilineal y simétrica.

b) Calcula $M(b,B)$ para B la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. Demuestra que si dos matrices cuadradas A y C son congruentes, entonces A es simétrica si y sólo si lo es C. Utilizar este hecho para encontrar dos matrices A y C que sean semejantes y no sean congruentes. ¿Son dos matrices congruentes necesariamente semejantes?

10. Sea ω_g la forma cuadrática asociada a una métrica g. Si sabemos que para dos vectores u y v se verifica que $\omega_g(u) = \omega_g(2v) = 2$ y $\omega_g(u+v) = 3$, ¿cuánto vale $g(u+v,v)$?

11. Sea g la métrica en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Escribe la expresión de la forma cuadrática ω_g asociada a g sobre cualquier $v \in \mathbb{R}^3$.

b) Calcula el rango, la nulidad y el radical de g. ¿Es g degenerada?

c) Encuentra B base de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(g,B)$ sea diagonal. Clasifica g como métrica.

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ definimos la forma bilineal

$$g(a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2) = a_0b_0+a_0b_1+a_0b_2+a_1b_0+a_1b_2+3a_2b_1+2a_2b_2.$$

   a) Calcula $M(g,B_u)$, donde B_u es la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$.

   b) Consideremos la descomposición de g como suma de una métrica g_s y de una forma bilineal antisimétrica g_a. Calcula $M(g_s,B_u)$, $M(g_a,B_u)$ y las expresiones de g_s y g_a sobre dos polinomios cualquiera en $\mathbb{R}_2[x]$.

   c) Estudia si g_s es degenerada y calcula su radical.

   d) Encuentra una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ para g_s. Clasifica g_s como métrica.

13. Sea ω la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\omega(x,y,z) = 2x^2+2y^2+z^2+4xy+4xz+4yz.$$

Encuentra una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que si (a,b,c) son las coordenadas de un vector v en esa base, $\omega(v) = a^2-b^2$.

14. Clasifica las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices respecto a la base usual vienen dadas, respectivamente, por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Decide también si cualquier par de las matrices anteriores son congruentes.

15. Estudia si las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pueden representar a una misma métrica sobre $\mathbb{R}^2$. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $N = P^t MP$.

16. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y para cada número real a fijo, se considera la métrica g_a asociada a la forma cuadrática dada por:

$$\omega_a(x,y,z) = x^2+y^2+8z^2+2axz-4ayz.$$

Clasifica g_a según los valores del parámetro a.

17. ¿Existen números reales x,y,z no todos nulos tales que $x^2+y^2+z^2+2xy=0$? ¿Y cumpliendo $2x^2+2y^2+2z^2+2xy=0$?

18. Calcula todas las soluciones en $\mathbb{R}^3$ a las ecuaciones:

    a) $x^2+5y^2+z^2+4xy+2yz=0$,
    b) $3x^2+y^2-xy=0$,
    c) $x^2+z^2+4xy+2xz+4yz=0$.

19. Se considera la métrica $g:\mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(p(x),q(x))=\int_{-1}^{1}p'(x)\,q'(x)\,dx,$$

donde $'$ representa la derivada respecto de x.

    a) Calcula el radical de g.
    b) Calcula el subespacio ortogonal a $\mathbb{R}_1[x]$ con respecto a g.
    c) Encuentra una base ortogonal para g.

20. Se considera la métrica $g:M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ definida por:

$$g(A,C)=\mathrm{tr}(AC^t).$$

    a) Prueba que g es no degenerada.
    b) Calcula $A_2(\mathbb{R})^{\perp}$, siendo $A_2(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices antisimétricas.
    c) Encuentra una base ortogonal para g formada por matrices simétricas y antisimétricas.

21. Para cada $a\in\mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(g_a,B_u)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Clasifica la métrica g_a según el valor de a. En el caso $a=-1$ calcula la forma cuadrática asociada y encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $z=0$.

22. Calcula el índice, el rango y clasifica, en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$, la métrica g_a en $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por

$$\omega_a(x,y,z)=x^2+y^2+az^2+2axz-4ayz.$$

23. Sea g la métrica de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base usual es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentra una base ortonormal para g del plano de ecuaciones $x+y=0$, $z+t=0$.

24. En $\mathbb{R}^3$ se considera el plano U de ecuación $y-z=0$ y la recta $W = L(\{(1,1,-1)\})$. Encuentra la expresión de una métrica g en $\mathbb{R}^3$ cuyo radical sea W y cuya restricción a U sea lorentziana.

25. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de polinomios de grado menor o igual que dos, y para cada número real m fijo, se considera la métrica g_m dada por

$$g_m(p(x),q(x)) = p(m)q(m)\ .$$

   a) Calcula una base del radical de g_m, una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g_m)$, el rango y el índice de g_m. Clasifica g_m.

   b) Determina si para $m=1$ existe una base B de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $M(g_1,B)$ es la matriz cuyas entradas son todas iguales a 1.

26. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas g_1, g_2 y g_3 que vienen representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Son los planos $(\mathbb{R}^2, g_1)$, $(\mathbb{R}^2, g_2)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$ isométricos entre sí? En caso afirmativo construye una isometría.

27. En $\mathbb{R}^4$ se considera g la métrica representada, en la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcula su radical.

   b) Calcula una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g)$.

   c) Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 = 0$ con la métrica inducida por g.

d) Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 + x_2 = 0$ con la métrica inducida por g.

e) ¿Son isométricos los hiperplanos anteriores?

28. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por
$$\omega_a(x,y,z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy\ .$$

a) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

b) En el caso $a = -1$ calcula una base ortonormal para g_{-1}.

c) En el caso $a = 2$ encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $y - 2z = 0$.

d) En el caso $a = 0$, ¿es posible encontrar dos vectores luminosos linealmente independientes?

e) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-1})$ isométricos? ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_0)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{2}})$ isométricos? En caso afirmativo construye una isometría.

29. En $\mathbb{R}^3$ sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ y $W = L(\{(1,-1,1)\})$. Calcula, si es posible, una métrica g y la expresión matricial $M(g, B_u)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $\mathrm{Rad}(g) = U$ y $g_{|W}$ es definida positiva.

b) $\mathrm{Rad}(g) = W$ y $g_{|U}$ es definida negativa.

c) $U^\perp = U$.

d) $W^\perp = W$ y g no degenerada.

e) $U^\perp = W$, g no degenerada e índice$(g) = 2$. Si esta métrica existe da una base ortonormal para $(\mathbb{R}^3, g)$ y para (U, g_U).

30. Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) ¿Es bilineal la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g((x,y),(x',y')) = xy$?

b) Toda forma bilineal $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la forma $g(x,y) = axy$ con $a \in \mathbb{R}$.

c) Si dos matrices cuadradas son congruentes, entonces tienen la misma traza. ¿Deben tener el mismo determinante?

d) En $\mathbb{R}^2$ existe una métrica tal que $(L(\{(2,1)\}))^\perp = L(\{(2,1)\})$.

e) Sea V un espacio vectorial real y g una métrica en V. Supongamos que en la diagonal de $M(g,B)$ respecto de una cierta base B existen dos números a y b con $ab < 0$. Entonces g es indefinida.

f) Si una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ está representada en una cierta base por una matriz con determinante negativo entonces se trata de una métrica lorentziana.

g) Sea V un espacio vectorial real de dimensión tres y g una métrica. Supongamos que existen vectores $u,v \in V$ linealmente independientes, ortogonales entre sí y luminosos. Entonces, g es degenerada.

h) Sea V un espacio vectorial real y g una métrica. Si todos los elementos diagonales de la matriz de g en una cierta base B son negativos, entonces g es definida negativa.

i) Toda métrica indefinida sobre un espacio vectorial real tiene vectores luminosos no nulos.

j) Dos vectores perpendiculares y no nulos de una métrica g son linealmente independientes. ¿Y si alguno de los dos vectores no es luminoso?

k) Si g es una métrica semidefinida, entonces un vector $v \in V$ es luminoso si y sólo si está en el radical de g. ¿Y si g es degenerada pero no semidefinida?

l) En $\mathbb{R}^3$ con la métrica $g_{2,1}$ un plano vectorial de ecuación $ax+by+cz=0$ es degenerado si y sólo si $g(v,v)=0$, donde $v=(a,b,c)$.

m) Existe en $\mathbb{R}^4$ una métrica no degenerada tal que $g_{|U}=0$ y $g_{|V}=0$ donde $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ z+t=0\}$ y $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\ z-t=0\}$.

n) Dadas M y N dos matrices simétricas de orden 20 y de rango 1 se tiene que M y N son congruentes si y sólo si $\mathrm{traza}(M)\cdot\mathrm{traza}(N)>0$.

ñ) Dado (V,g) un espacio vectorial métrico tal que para todo subespacio U de V se tiene $\dim(V)=\dim(U)+\dim(U^{\perp})$ entonces g es no degenerada.

o) Una matriz simétrica A es semidefinida positiva si y sólo si existe una matriz cuadrada Q tal que $A=Q^t\cdot Q$.

p) Si (V,g) es un espacio vectorial métrico tal que para todo subespacio U de V de dimensión mayor o igual que 1 se tiene $\dim(V)=\dim(U)+\dim(U^{\perp})$, entonces g es no degenerada.

q) Existe una métrica degenerada en $\mathbb{R}^4$ tal que el ortogonal a la recta generada por el vector $v=(1,1,1,1)$ es la propia recta.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Dadas dos formas lineales $\varphi, \psi \in V^*$ definimos su *producto tensorial* $\varphi \otimes \psi : V \times V \to \mathbb{R}$ como $(\varphi \otimes \psi)(u,v) = \varphi(u)\,\psi(v)$.

   a) Prueba que $\varphi \otimes \psi$ es bilineal.

   b) Prueba que las siguientes afirmaciones equivalen:

      i) $\varphi \otimes \psi = 0$.
      ii) $\varphi = 0$ ó $\psi = 0$.
      iii) $\varphi \otimes \psi$ es antisimétrica.

   c) Prueba que la aplicación

$$\begin{aligned} F : V^* \times V^* &\longrightarrow \mathcal{B}(V) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi \otimes \psi \end{aligned}$$

   es bilineal.

   d) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ su base dual. Calcula la matriz de $\varphi \otimes \psi$ en la base B relacionándola con las coordenadas de φ y ψ en la base B^*. Demuestra que $B' = \{\varphi_i \otimes \varphi_j \,/\, i, j = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\mathcal{B}(V)$. Describe la base B' cuando $V = \mathbb{R}^n$ y $B = B_u$.

   e) Sea $b \in \mathcal{B}(V)$. Prueba que las siguientes afirmaciones equivalen:

      i) rango(b) $= 1$.
      ii) $b = \varphi \otimes \psi$ con $\varphi \neq 0$ y $\psi \neq 0$.
      iii) Existe B base de V tal que si b es simétrica

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

      y si b no es simétrica

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

$\phi \otimes \psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi = \phi$ en todo el ej.

$(\phi \otimes \psi)(u, v) = \phi(u) \cdot \psi(v)$

a) Probar que $\phi \otimes \psi$ es bilineal

Sean $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ $\quad \lambda \in K$

- $(\phi \otimes \psi)(u_1 + u_2, v_1) = \phi(u_1 + u_2)\,\psi(v_1) = (\phi(u_1) + \phi(u_2))\psi(v_1) =$
$= \phi(u_1)\psi(v_1) + \phi(u_2)\,\psi(v_1) = (\phi \otimes \psi)(u_1, v_1) + (\phi \otimes \psi)(u_2, v_1)$
- $(\phi \otimes \psi)(u_1, v_1 + v_2) = \phi(u_1)\,\psi(v_1 + v_2)$ Idem al anterior
- $(\phi \otimes \psi)(\lambda u_1, v_1) = \phi(\lambda u_1)\,\psi(v_1) = \lambda\,\phi(u_1)\,\psi(v_1) =$
$= \lambda(\phi \otimes \psi)(u_1, v_1)$
- $(\phi \otimes \psi)(u_1, \lambda v_1) \Rightarrow$ idem al anterior.

Efectivamente $\phi \otimes \psi$ es bilineal

b) Prueba que las siguientes afirmaciones equivalen:

i) $\phi \otimes \psi = 0$

ii) $\phi = 0$ ó $\psi = 0$

iii) $\phi \otimes \psi$ es antisimétrica

i) $\Rightarrow$ ii) Sean $u_1, v_1 \in V$ $(\phi \otimes \psi)(u_1, v_1) = \phi(u_1)\,\psi(v_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \phi = 0 \\ \psi = 0 \end{array}$

ii) $\Rightarrow$ iii) Sean $u_1, v_1 \in V$ con $\phi = 0$

Diremos que una forma bilineal es antisimétrica si $g(u,v) = -g(v,u)$

$(\phi \otimes \psi)(u_1, v_1) = \phi(u_1)\psi(v_1) = 0 \cdot \psi(v_1) = 0 = -(\phi \otimes \psi)(v_1, u_1) = -\phi(v_1)\,\psi(u_1) = 0$

c) Prueba que la aplicación:

$$\mathcal{F}: V^* \times V^* \longrightarrow \mathcal{B}(V)$$
$$\mathcal{F}(\phi, \psi) \longrightarrow \phi \otimes \psi$$

es bilineal

Sean $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in V^*$ $\lambda \in K$

$\mathcal{F}(\phi_1 + \phi_2, \psi_1) = (\phi_1 + \phi_2) \otimes \psi_1 = \phi_1 \otimes \psi_1 + \phi_2 \otimes \psi_1 =$

$= \mathcal{F}(\phi_1, \psi_1) + \mathcal{F}(\phi_2, \psi_1)$

$\mathcal{F}(\phi_1, \psi_1 + \psi_2) = \phi_1 \otimes (\psi_1 + \psi_2) =$ Ídem que el anterior

$\mathcal{F}(\lambda \phi_1, \psi_1) = (\lambda \phi_1) \otimes (\psi_1) = \lambda \phi_1 \otimes \psi_1 = \lambda \mathcal{F}(\phi_1, \psi_1)$

$\mathcal{F}(\phi_1, \lambda \psi_1) =$ ídem que el anterior.

d) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ su base dual. Calcula la matriz de $\varphi \otimes \psi$ en la base B relacionándola con las coordenadas de φ y ψ en la base B^*. Demuestra que $B' = \{\varphi_i \otimes \varphi_j \,/\, i, j = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\mathcal{B}(V)$. Describe la base B' cuando $V = \mathbb{R}^n$ y $B = B_u$.

$B = \{v_1 \ldots v_n\}$ $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$

$$M(\varphi \otimes \psi, B) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$\varphi = a_1 \varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n$

$\psi = b_1 \varphi_1 + \cdots + b_n \varphi_n$

$m_{11} = (\varphi \otimes \psi)(v_1, v_1) = \varphi(v_1)\psi(v_1) = a_1 \underbrace{\varphi_1(v_1)}_{1} + \cancel{\cdots + a_n \varphi_n(v_1)}^{0} + b_1 \underbrace{\varphi_1(v_1)}_{1} + \cdots$
$\cancel{b_n \varphi_n(v_1)}^{0} = a_1 b_1$

$m_{12} = (\varphi \otimes \psi)(v_1, v_2) = \varphi(v_1)\psi(v_2) = a_1 b_2$

$\vdots$

$m_{ij} = (\varphi \otimes \psi)(v_i, v_j) = \varphi(v_i)\psi(v_j) = a_i b_j$

Para probar que B' es base hay que recordar que hay un isomorfismo entre las formas bilineales y las matrices cuadradas de orden n, cada forma bilineal la lleva a su matriz respecto de una base.

Sea esa base nuestra $\mathcal{B}$, entonces $\varphi_i \otimes \varphi_j$ va a la matriz elemental E_{ij}, es decir, todo ceros menos un 1 en el lugar (i,j). Como estas matrices son una base del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n, pues entonces B' también es base.

Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u$

$\mathcal{B} = \{(1,0,\dots 0), (0,1,0\dots,0), \dots, (0,\dots,1)\}$

$\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$\varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$

$M_{11} = \varphi_1 \otimes \varphi_1$

e) Sea $b \in \mathcal{B}(V)$. Prueba que las siguientes afirmaciones equivalen:

i) rango(b) $= 1$.

ii) $b = \varphi \otimes \psi$ con $\varphi \neq 0$ y $\psi \neq 0$.

iii) Existe B base de V tal que si b es simétrica

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y si b no es simétrica

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

i) $\Rightarrow$ ii) rango$(e) = 1$

rango$(e) = \dim(V) - \dim$

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Denotemos por $\mathcal{L}(V,V^*)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de V en su dual V^*. Se define $F : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}(V,V^*)$ como $F(b)(u)(v) = b(u,v)$, $b \in \mathcal{B}(V)$, $u,v \in V$. Prueba que F está bien definida y que es un isomorfismo.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado un endomorfismo $f : V \to V$ y una formal bilineal $b : V \times V \to \mathbb{R}$, se define la aplicación $b_f : V \times V \to \mathbb{R}$ como $b_f(u,v) = b(f(u), f(v))$. Demuestra que b_f es una forma bilineal, que además es simétrica si lo es b.

Sea $u_1 u_2\, v_1, v_2 \in V$ $\lambda_1, \lambda_2 \in K$

$b_f(\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_2, \lambda_2 v_1 + \lambda_2 v_2) =$

$= b(f(\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_2), f(\lambda_2 v_1 + \lambda_2 v_2)) =$

$= b(\lambda_1 f(u_1 + u_2), \lambda_2 f(v_1 + v_2)) =$

$= b(\lambda_1 (f(u_1) + f(u_2)), \lambda_2 f(v_1) + f(v_2)) =$

$= \lambda_1 b_f(u_1, v_1) + \lambda_2 b_f(u_2, v_2)$

Pongamos que b es simétrica, sean $v, u \in V$:

$b(v,u) = b(u,v)$

$\Downarrow$

$b_f(v,u) = b(f(v), f(u)) = b(f(u), f(v)) = b_f(u,v)$

4. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales reales. Consideremos el espacio producto $V = V_1 \times V_2$, donde la suma y el producto por escalares se realizan coordenada a coordenada. Dadas formas bilineales $b_i : V_i \times V_i \to \mathbb{R}$ definimos $b : V \times V \to \mathbb{R}$ como

$$b\big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\big) = b_1(u_1,v_1) + b_2(u_2,v_2).$$

Demuestra que b es una forma bilineal sobre V, que además es simétrica si lo son b_1 y b_2.

$V = V_1 \times V_2$

$v_1 = (a_1, b_1, c_1 \dots)_B$

$v_2 = (a_2, b_2, c_2 \dots)_B$

$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, \dots)_B$

$\lambda v_1 = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1 \dots)_B$

$b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = b_1(u_1,v_1) + b_2(u_2,v_2)$

Sea $u_1', u_2', v_1', v_2' \in V$

$b((u_1,u_2)+(u_1',u_2'), (v_1,v_2)+(v_1',v_2')) =$

$= b((u_1+u_1', u_2+u_2'), (v_1+v_1', v_2+v_2')) =$

$= b_1(u_1+u_1', v_1+v_1') + b_2(u_2+u_2', v_2+v_2') =$

$= b_1(u_1,v_1) + b_1(u_1',v_1') + b_2(u_2,v_2) + b_2(u_2',v_2') =$

$= b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) + b((u_1',u_2'),(v_1',v_2'))$

Faltaría comprobar con escalares.

Por último supongamos que e_1 y e_2 son simétricas

$e_1(u_1, v_1) = e_1(v_1, u_1)$

$e_2(u_2, v_2) = e_2(v_2, u_2)$

$$e((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = e_1(u_1, v_1) + e_2(u_2, v_2) =$$

$$= e_1(v_1, u_1) + e_2(v_2, u_2) = e((v_1, v_2), (u_1, u_2))$$

5. Se considera la forma bilineal $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 2yy' - 3zz' + 2xy' - 3yz'.$$

a) Calcula $M(b, B_u)$. ¿Es b una métrica sobre $\mathbb{R}^3$?

b) Utiliza la expresión matricial de b respecto a B_u para calcular $b((1,-2,1),(1,-2,4))$.

c) Se considera la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Calcula $M(b,B)$ mediante la relación de congruencia.

d) Calcula $b(u,v)$, sabiendo que las coordenadas de u y v en la base B son $(1,-2,1)$ y $(2,1,2)$, respectivamente.

a) $B_u = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 2yy' - 3zz' + 2xy' - 3yz'$

$$M(b,B_u) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$m_{11} = b((1,0,0),(1,0,0)) = 1$

$m_{12} = b((1,0,0),(0,1,0)) = 2$

$m_{13} = b((1,0,0),(0,0,1)) = 0$

$m_{21} = b((0,1,0),(1,0,0)) = 0$

$m_{22} = b((0,1,0),(0,1,0)) = 2$

$m_{23} = b((0,1,0),(0,0,1)) = 3$

$m_{31} = b((0,0,1),(1,0,0)) = 0$

$m_{32} = b((0,0,1),(0,1,0)) = 0$

$m_{33} = b((0,0,1),(0,0,1)) = 3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $M \notin S_3(\mathbb{R}) \Rightarrow b$ no es simétrica

e) $b((1,-2,1),(1,-2,4))$

$$(1,-2,1)\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=(1\ -2\ -3)\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=-7$$

d) $M(b,B)=P^T M(b,B_u)P$

Sea $P=M(B_u,B)$

$(1,0,0)_{B_u}=(1,0,0)_B$

$(0,1,0)_{B_u}=(-1,1,0)_B$

$(0,0,1)_{B_u}=(0,-1,1)_B$

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad P^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$M(b,B)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&3\\0&-2&2\end{pmatrix}$$

$m_{33}=b((1,1,1),(1,1,1))=$

a) ~~El~~ último muy similar al b

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión tres, b una forma bilineal sobre V y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Sabiendo que

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula $b(u,v)$ para $u = v_1 + v_3$ y $v = v_2 + 3v_3$.

b) ¿Existe algún vector $w \neq 0$ tal que $b(w,w) = 0$?

c) Calcula $M(b,B')$ siendo $B' = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2\}$.

a) $b((1,0,1),(0,1,3)) =$

$= (1,0,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$

c) $M(b,B') = M(B',B)^T M(b,B) M(B',B)$

$M(B',B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$M(b,B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

7. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ se considera la aplicación $b : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx\,.$$

a) Comprueba que b es una forma bilineal.

b) Calcula $M(b,B)$ para $B = \{1,x,x^2,x^3\}$.

c) Consideremos la descomposición de b como suma de una métrica b_s y de una forma bilineal antisimétrica b_a. Calcula $M(b_s,B)$ y $M(b_a,B)$.

d) Calcula b_s y b_a sobre una pareja cualquiera de polinomios en $\mathbb{R}_3[x]$.

b) $M(b,B) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}$

$m_{11} = b(1,1) = \int_0^1 0\,dx = 0$

$m_{12} = b(1,x) = \int_0^1 1\,dx = x\Big]_0^1 = 1$

$m_{13} = b(1,x^2) = \int_0^1 2x\,dx = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\Big]_0^1 = 1$

$m_{14} = b(1,x^3) = \int_0^1 3x^2 dx = x^3\Big]_0^1 = 1$

$m_{21} = b(x,1) = \int_0^1 0\,dx = 0$

$m_{22} = b(x,x) = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$

$m_{23} = b(x,x^2) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$

$m_{24} = b(x,x^3) = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{3}{4}$

$m_{31} = b(x^2,1) = \int_0^1 0\,dx = 0$

$m_{32} = b(x^2,x) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$

$m_{33} = b(x^2,x^2) = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{2x^4}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$

$m_{34} = b(x^2,x^3) = \int_0^1 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{3}{5}$

$m_{41} = \varphi(x^3, 1) = \int_0^1 0\,dx = 0$

$m_{42} = \varphi(x^3, x) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}$

$m_{43} = \varphi(x^3, x^2) = \int_0^1 2x^4 dx = \frac{2x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{2}{5}$

$m_{44} = \varphi(x^3, x^3) = \int_0^1 3x^5 dx = \frac{3x^6}{6}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$

$$M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 3/5 \\ 0 & 1/4 & 2/5 & 1/3 \end{pmatrix}$$

c) Sabemos que la matriz de una forma bilineal simétrica es simétrica, idem con las antisimétricas

$A = -A^t \qquad S = S^t$

$-A = A^t$

$M(\varphi, B) = M(\varphi_A, B) + M(\varphi_S, B)$

$M(\varphi, B)^t = M(\varphi_A, B)^t + M(\varphi_S, B)^t = M(\varphi_S, B) - M(\varphi_A, B)$

$M(\varphi, B) + M(\varphi, B)^t = 2M(\varphi_S, B)$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 3/5 \\ 0 & 1/4 & 2/5 & 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1 & 2/3 & 2/3 & 2/5 \\ 1 & 3/4 & 3/5 & 1/3 \end{pmatrix} \right) \cdot 1/2 = M(\varphi_S, B)$$

$$M(\varphi_S, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$M(\ell_A, B) = M(\ell, B) - M(\ell_S, B)$$

$$M(\ell_A, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/6 & 1/4 \\ -1/2 & -1/6 & 0 & 1/10 \\ -1/2 & -1/4 & -\frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

c) Sean x^2, x

$$\ell_A(x^2, x) = (0,0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/6 & 1/4 \\ -1/2 & -1/6 & 0 & 1/10 \\ -1/2 & -1/4 & -\frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}$$

$$\ell_S(x^2, x) = (0,0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\ell(x^2, x) = (0,0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 3/5 \\ 0 & 1/4 & 2/5 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

8. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera la aplicación $b : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(A,C) = \text{traza}(A \cdot C) \ .$$

   a) Comprueba que b es una forma bilineal y simétrica.

   b) Calcula $M(b,B)$ para B la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) i) $b(A_1+A_2, C_1) = \text{Traza}((A_1+A_2)\cdot C_1) =$

$= \text{Traza}(A_1C_1 + A_2C_1) = \text{Traza}(A_1C_1) + \text{Traza}(A_2C_1) =$

$= b(A_1, C_1) + b(A_2, C_1)$

ii) $b(\lambda A_1, C_1) = \text{Traza}(\lambda(A_1 \cdot C_1)) = \lambda \text{Traza}(A_1C_1) =$

$= \lambda b(A_1, C_1)$

iii) $b(A_1, C_1+C_2) = \text{Traza}(A_1 \cdot (C_1+C_2)) =$

$= \text{Traza}(A_1C_1 + A_1C_2) = \text{Traza}(A_1C_1) + \text{Traza}(A_1C_2) =$

$= b(A_1, C_1) + b(A_1, C_2)$

iv) $b(A_1, \lambda C_1) = \text{Traza}(\lambda(A_1 \cdot C_1)) = \lambda \text{Traza}(A_1C_1) =$

$= \lambda b(A_1, C_1)$

Para ver si es simétrica, basta con demostrar que $\text{Traza}(A\cdot C) = \text{Traza}(C\cdot A)$

Para $n=1$

$Tr((a_{11})\cdot(b_{11})) = Tr((b_{11})\cdot(a_{11})) = a_{11}\cdot b_{11}$

lo suponemos cierto para $n-1$ y demostramos para n.

e) Sea $B_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$e\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Traza}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1$

⋮

9. Demuestra que si dos matrices cuadradas A y C son congruentes, entonces A es simétrica si y sólo si lo es C. Utilizar este hecho para encontrar dos matrices A y C que sean semejantes y no sean congruentes. ¿Son dos matrices congruentes necesariamente semejantes?

Sean A y C matrices congruentes

$A = P^T \cdot C \cdot P$

$\Rightarrow)$ Sea A simétrica $\Rightarrow A = A^T$

$$\left.\begin{aligned} A^T &= P^T \cdot C \cdot P \\ A &= P^T \cdot C^T \cdot P \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = C^T$$

$\Leftarrow)$ Sea C simétrica $\Rightarrow C = C^T$

$$\left.\begin{aligned} A &= P^T \cdot C^T \cdot P \\ A^T &= P^T \cdot C \cdot P \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = A^T$$

A y C son semejantes $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = P^{-1} \cdot C \cdot P$

Dos matrices congruentes no tienen que ser semejantes, a no ser que P sea ortogonal, entonces $P^{-1} = P^T$

10. Sea ω_g la forma cuadrática asociada a una métrica g. Si sabemos que para dos vectores u y v se verifica que $\omega_g(u) = \omega_g(2v) = 2$ y $\omega_g(u+v) = 3$, ¿cuánto vale $g(u+v,v)$?

$$g(u+v,v) = g(u,v) + g(v,v) = \frac{1}{2}(\omega_g(u+v) - \omega_g(u) - \omega_g(v)) + \omega_g(v) =$$

$$= \frac{1}{2}\omega_g(u+v) - \frac{1}{2}\omega_g(u) + \frac{1}{2}\omega_g(v) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Sabemos que $\omega_g(2v) = 2^2\omega_g(v) = 4\omega_g(v) = 2 \Rightarrow \omega_g(v) = \frac{1}{2}$

11. Sea g la métrica en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Escribe la expresión de la forma cuadrática ω_g asociada a g sobre cualquier $v \in \mathbb{R}^3$.

b) Calcula el rango, la nulidad y el radical de g. ¿Es g degenerada?

c) Encuentra B base de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(g,B)$ sea diagonal. Clasifica g como métrica.

a)

$\omega_g(v) = g(v,v)$

$v = (x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+2y+z,\ 2x+2z,\ x+2y+z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 + 2yx + zx + 2xy + 2yz + xz + 2yz + z^2 =$$

$$= x^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que $\text{rad}(g) \neq \{0\}$

Sea $\text{rad}(g) = \left\{ (x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{matrix} \right\} = L(\{(-1,0,1)\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\text{rad}(g)) = 1 = \text{nul}(g)$

$\text{rango}(g) = n - \text{nul}(g) = 2$

Además, al ser $\text{nul} \neq 0$, podemos afirmar que es una métrica degenerada.

c) Nos piden una base ortogonal

Proposición 2.19

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus \mathrm{Rad}(g)$$

cualquiera

automáticamente es $\perp$

no degenerada

$$W = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$$

$$u_1 = (1,0,0) \qquad g(u_1,u_1) = 1 \neq 0$$

$$U = L(\{(1,0,0)\}) \qquad U^{\perp_g W} = U^{\perp} \cap W$$

$$U^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$$

$$U^{\perp} \cap W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}\right\} =$$

$$= L(\{(-2,1,0)\})$$

$$B = \{(1,0,0),(-2,1,0),(1,0,-1)\}$$

Base ortogonal.

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ definimos la forma bilineal

$$g(a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2) = a_0b_0+a_0b_1+a_0b_2+a_1b_0+a_1b_2+3a_2b_1+2a_2b_2.$$

a) Calcula $M(g,B_u)$, donde B_u es la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Consideremos la descomposición de g como suma de una métrica g_s y de una forma bilineal antisimétrica g_a. Calcula $M(g_s,B_u)$, $M(g_a,B_u)$ y las expresiones de g_s y g_a sobre dos polinomios cualquiera en $\mathbb{R}_2[x]$.

c) Estudia si g_s es degenerada y calcula su radical.

d) Encuentra una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ para g_s. Clasifica g_s como métrica.

a) $B_u(\mathbb{R}_2[x]) = \{1, x, x^2\}$

$g(1,1) = 1$

$g(1,x) = 1$

$g(1,x^2) = 1$

$g(x,1) = 1$

$g(x,x) = 0$

$g(x,x^2) = 1$

$g(x^2,1) = 0$

$g(x^2,x) = 3$

$g(x^2,x^2) = 2$

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

l)

$$\mathcal{M}(l, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = S_2(\mathbb{R}) \oplus A_2(\mathbb{R})$

$A = -A^T \qquad S = S^T$

$-A = A^T$

$\mathcal{M}(l, B_U) = \mathcal{M}(l_A, B_U) + \mathcal{M}(l_S, B_U)$

$\mathcal{M}(l, B_U)^T = \mathcal{M}(l_A, B_U)^T + \mathcal{M}(l_S, B_U)^T = \mathcal{M}(l_S, B_U) - \mathcal{M}(l_A, B_U)$

$$\mathcal{M}(l_S, B_u) = \mathcal{M}(l, B_u) - \mathcal{M}(l_A, \cancel{B_U})$$

$$\mathcal{M}(l_S, B_u) = \mathcal{M}(l, B_u)^T + \cancel{\mathcal{M}}(l_A, B_U)$$

$$2\mathcal{M}(l_S, B_U) = \mathcal{M}(l, B_U) + \mathcal{M}(l, B_u)^T$$

$$\mathcal{M}(l, B_u)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(l, B_U) + \mathcal{M}(l, B_u)^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(l_S, B_U) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(l, B_U) - \mathcal{M}(l_S, B_u) = \mathcal{M}(l_A, B_u)$$

$$M(e_1, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sean los polinomios :

c) Para ver si g_S es degenerada:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

Podemos afirmar que es no degenerada $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Rad}(g_s) = \{0\}$

d) Vamos a calcular una base ortogonal para la métrica g_S, que es no degenerada. Trabajamos con g_S.

El primer paso es encontrar un vector de la base usual tal que $\ell_S(u_i, u_i) \neq 0$

$$\ell_S(1,1) = (1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,1,1/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$= 1 \neq 0$

Nos sirve u_1.

$U_1 = L(\{1\})$

$$U_1^{\perp} = \{ (x,y,z)_{B_u} \in \mathbb{R}_2[x] : (1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \}$$

$$= \{ x + y + \frac{z}{2} = 0 \} = L(\{(1,1,-4),(1,-1,0)\})$$

Procedemos de igual forma encontrando un vector de $U_1^\perp$: $g(u_i, u_i) \neq 0$

$$(1,-1,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$$U_2 = \mathcal{L}(\{(1,-1,0)\})$$

Ahora habría que calcular $U_2^{\perp g_{U_1^\perp}} = U_2^\perp \cap U_1^\perp$

$$U_2^\perp = \left\{ (x,y,z)_{B_u} \in \mathbb{R}_2[x] : (1,-1,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right.$$

$$= \left\{ y - \frac{3}{2}z = 0 \right\} = \mathcal{L}\{(0,3/2,1),(1,-3/2,-1)\}$$

$$U_1^\perp \cap U_2^\perp = \left\{ \begin{array}{l} y - \frac{3}{2}z = 0 \\ x + y + \frac{z}{2} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$\mathcal{L}(\{(-2, \tfrac{3}{2}, 1)\})$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ -y + 3/2\, z = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 2x + 2y + z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{array}$$

$$2x + 2y = -z$$

$$+\frac{2}{3}y = z$$

Tenemos $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_2^{\perp g_{4,t}}$

Cogiendo un vector de cada subespacio tendríamos la base ortogonal.

$$B = \{ 1,\ 1-x,\ -2+\frac{3}{2}x + x^2 \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ Métrica indefinida no degenerada.

$|A_1| = 1$

$|A_2| = -1$

$|A_3| = -4$

13. Sea ω la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\omega(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz.$$

Encuentra una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que si (a,b,c) son las coordenadas de un vector v en esa base, $\omega(v) = a^2 - b^2$.

Sea g su métrica asociada:

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y queremos conseguir una base B tal que:

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0), (-1,0,1), (-1,1,0) \right\}$$

14. Clasifica las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices respecto a la base usual vienen dadas, respectivamente, por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Decide también si cualquier par de las matrices anteriores son congruentes.

$\det(A_1) = 1 > 0$

$\det(A_2) = -4 < 0$

$\det(A_3) = \det(A) = -17 < 0$

Métrica no degenerada indefinida.

$\det(D_1) = 3 > 0$

$\det(D_2) = 8 > 0$

$\det(D_3) = \det(D) = 20 > 0$

Métrica no degenerada definida positiva.

$\det(C_1) = 14 > 0$

$\det(C_2) > 0$

$\det(C_3) = 4 > 0$

Métrica no degenerada definida positiva. → def pos.

A y C: $A = P^T \cdot C \cdot P$ $\quad \overset{<0}{\det(A)} = \det(P^T) \cdot \det(C) \cdot \det(P) =$

$= \det(P)^2 \cdot \det(C) > 0$

A y D: Tampoco $\det(A) < 0$, $\det(D) > 0$ No son congruentes

C y D: son congruentes: mismo rango y mismo signo en el det.

15. Estudia si las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pueden representar a una misma métrica sobre $\mathbb{R}^2$. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $N = P^t M P$.

Lo primero va ser clasificar las métricas:

$\det(M_1) = 1 > 0$

$\det(M_2) = -3 < 0$

Métrica no degenerada indefinida.

$\det(N_1) = -3 < 0$

$\det(N_2) = -7 < 0$

Métrica no degenerada indefinida

Por la ley de Inercia de Sylvester tenemos que g es indefinida si $0 < s < r =$ rango, por tanto la única posibilidad en rango $= 2$ es $s = 1$ en ambas métricas.

Como ambas métricas tienen la misma signatura, → y son no degeneradas llegamos a la conclusión de que son congruentes y pueden representar a la misma métrica.

$D = P_1^T \cdot M \cdot P_1$ Ambas son congruentes

$D = P_2^T \cdot N \cdot P_2$ a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$P_1^T \cdot M \cdot P_1 = P_2^T \cdot N \cdot P_2$$

$$N = \underbrace{(P_2^T)^{-1} \cdot P_1^T}_{P^T} \cdot M \cdot \underbrace{P_1 \cdot P_2^{-1}}_{P}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2 \times \sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = P_1$$

$$P_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7/3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7/3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7/3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7/3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{21}}{21} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{21}}{7} & 0 \end{pmatrix} = P_2$$

$$P_2^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{21}}{21} & \frac{\sqrt{21}}{7} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^T = (P_2^T)^{-1} \cdot P_1^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{\sqrt{21}-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P = P_1 \cdot P_2^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{\sqrt{21}-2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

16. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y para cada número real a fijo, se considera la métrica g_a asociada a la forma cuadrática dada por:

$$\omega_a(x,y,z) = x^2 + y^2 + 8z^2 + 2axz - 4ayz\,.$$

Clasifica g_a según los valores del parámetro a.

Tenemos que la matriz asociada a la forma cuadrática en la base usual de $\mathbb{R}^3$ es:

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2a \\ a & 2a & 8 \end{pmatrix} = A$$

Si ahora utilizamos el criterio de Sylvester:

$\det(A_1) = 1 > 0$ Ya no puede ser una
$\det(A_2) = 1 > 0$ métrica definida negativa

$$\det(A_3) = -5a^2 + 8$$

$$-5a^2 + 8 = 0$$

$$a^2 = \frac{8}{5} \quad a = \pm\sqrt{\frac{8}{5}}$$

<0 >0 <0

$-\sqrt{8/5}$ $\sqrt{8/5}$

- Si $a \in \left]-\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{8}{5}}\right[$, tenemos una métrica no degenerada definida positiva.
- Si $a > \sqrt{\frac{8}{5}}$ ó $a < -\sqrt{\frac{8}{5}}$, métrica no degenerada indefinida.

• Si $a = -\sqrt{\frac{8}{5}}$ ó $a = \sqrt{\frac{8}{5}}$, estaríamos ante una métrica degenerada semidefinida positiva.

17. ¿Existen números reales x, y, z no todos nulos tales que $x^2+y^2+z^2+2xy=0$? ¿Y cumpliendo $2x^2+2y^2+2z^2+2xy=0$?

$$x^2+y^2+z^2+2xy=0$$

$$\omega(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xy$$

Métrica asociada g_ω

$$M(g_\omega, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Métrica degenerada rango$(g_\omega) = 2$

$$\text{Rad}(g_\omega) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}_3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} x+y=0 \\ z=0 \end{array} \right\} = L(\{(1,-1,0)\})$$

$W = L(\{(0,1,0),(0,0,1)\}) \to$ suplementario del radical

$B = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$

$$M(g_\omega, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ B es una base ortonormal.

g_ω es semidefinida positiva

$C(g_\omega) = \text{Rad}(g_\omega) = L(\{(1,-1,0)\})$

↳ cono de luz.

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy = 0$

$\omega(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy$

g_ω métrica asociada

$$M(g_\omega, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rango $(g_\omega) = 3 \rightarrow$ no degenerada

$\det(2) = 2 > 0$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$

$\det(M(g_\omega, B_u)) > 0$

Métrica no degenerada definida positiva.

$\omega(x,y,z) > 0$

$C(g_\omega) = \{0\}$

18. Calcula todas las soluciones en $\mathbb{R}^3$ a las ecuaciones:

a) $x^2+5y^2+z^2+4xy+2yz=0$,

b) $3x^2+y^2-xy=0$,

c) $x^2+z^2+4xy+2xz+4yz=0$.

a) $\omega(x,y,z) = x^2+5y^2+z^2+4xy+2yz$

$$M(g_\omega, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ Métrica degenerada.

$$\operatorname{Rad}(g_\omega) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x+2y = 0 \\ y+z = 0 \end{array} \right\} = L(\{(2,-1,1)\})$$

$$W = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$$

$$\operatorname{Rad} \oplus W = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \operatorname{Rad} \textcircled{\perp} W$$

l) $3x^2 + y^2 - xy = 0$

$\omega(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - xy$

$$M(g_\omega, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Métrica degenerada

Tercer vector base usual

$\mathrm{Rad}(g_\omega) = L(\{(0,0,1)\})$

$W = L(\{\underbrace{(1,0,0),(0,1,0)}_{B}\})$

$$M(g_W, B) = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Criterio Sylvester

$\det(A_1) = 3 > 0$

$\det(A_2) = 3 - \frac{1}{4} > 0$

g_W es no degenerada def pos.

g_ω es semidefinida positiva

$C(g_\omega) = \mathrm{Rag}(g_\omega)$

c) $x^2+z^2+4xy+2xz+4yz=0$

$\omega(x,y,z)=x^2+z^2+4xy+2xz+4yz$

$$M(g_\omega, B_u)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

g_ω degenerada.

$$\mathrm{Rad}(g_\omega) \overset{\text{ej. 11}}{=} L(\{1,0,-1)\}$$

$B=\{(1,0,0),(-2,1,0),(1,0,-1)\}$

$$M(g_\omega, B)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Métrica degenerada indefinida

$s=1$ rango$(g_\omega)=2$

$\omega(v)=a^2-4b^2 = \quad (a,b,c)=v$ respecto de B.

$=(a-2b)(a+2b)$

$C(g_\omega)=\{v: a-2b=0\}\cup\{v: a+2b=0\}$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=M(B_u,B)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$ (x,y,z) coor vector en B_u.

$$\| $$

$$M(B,B_u)^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

19. Se considera la métrica $g : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p'(x)\, q'(x)\, dx,$$

donde $'$ representa la derivada respecto de x.

a) Calcula el radical de g.

b) Calcula el subespacio ortogonal a $\mathbb{R}_1[x]$ con respecto a g.

c) Encuentra una base ortogonal para g.

Considérese la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$

$B_u = \{1, x, x^2\}$

$g(1,1) = \int_{-1}^{1} 0 = 0 \qquad g(x,1) = \int_{-1}^{1} 0 = 0$

$g(1,x) = \int_{-1}^{1} 0 = 0 \qquad g(x,x) = \int_{-1}^{1} 1\, dx = x\Big]_{-1}^{1} = 2$

$g(1,x^2) = \int_{-1}^{1} 0 = 0 \qquad g(x,x^2) = \int_{-1}^{1} 2x\, dx = \frac{2x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = 0$

$g(x^2,1) = \int_{-1}^{1} 0 = 0$

$g(x^2,x) = \int_{-1}^{1} 2x\, dx = 0$

$g(x^2,x^2) = \int_{-1}^{1} 4x^2\, dx = \frac{4x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Rad}(g) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}_2[x] \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2y = 0 \\ 8/3\, z = 0 \end{array} \right\} = L(\{(1,0,0)\})$$

b) $U = \mathbb{R}_1[x]$

$$B_U = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$$

$$g(u_2, u_2) \neq 0$$

$$U^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}_2[x] : (0,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (0,2,0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \{ 2y = 0 \}$$

c) B_U ya es una base ortogonal.

20. Se considera la métrica $g : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(A,C) = \mathrm{tr}(AC^t).$$

a) Prueba que g es no degenerada.

b) Calcula $A_2(\mathbb{R})^\perp$, siendo $A_2(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices antisimétricas.

c) Encuentra una base ortogonal para g formada por matrices simétricas y antisimétricas.

a) $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Haríamos la matriz y calcularíamos su rango

$g(u_1,u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Tr = 1$

$g(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Tr = 0$

$g(u_1,u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Tr = 0$

$g(u_1,u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 = Tr = 0$

$g(u_2,u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = Tr = 0$

$g(u_2,u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Tr = 1$

$g(u_2,u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = Tr = 0$

$g(u_2,u_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Tr = 0$

$$g(u_3, u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Tr = 0$$

$$g(u_3, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Tr = 0$$

$$g(u_3, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Tr = 1$$

$$g(u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Tr = 0$$

$$g(u_4, u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Tr = 0$$

$$g(u_4, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Tr = 0$$

$$g(u_4, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{0}^{?} = Tr = 0$$

$$g(u_4, u_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Tr = 1$$

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No degenerada definida positiva.

$$\dim(A_2(\mathbb{R})) = \binom{2}{2} = 1$$

$$A_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$g(u_1,u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Tr = 2 \neq 0$$

$$A_2(\mathbb{R})^{\perp} = \left\{(x,y,z,t) \in M_2(\mathbb{R}) : (0,1,-1,0)\, I_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \vec{0}\right\}$$

$$= y - z = 0 = S_2(\mathbb{R})$$

c) $S_2(\mathbb{R})^{\perp}$

→ es ortogonal

$$S_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$S_2(\mathbb{R})^{\perp} = \{(x,y,z,t) \in M_2(\mathbb{R}) :$$

$$(0,1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} y + z &= 0 \\ x &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

||

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}^{A_2(\mathbb{R})}$$

21. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Clasifica la métrica g_a según el valor de a. En el caso $a = -1$ calcula la forma cuadrática asociada y encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $z = 0$.

$\det(A_1) = a$

$\det(A_2) = a$

$\det(A_3) = -3a$

- Si $a > 0$ -> métrica no degenerada indefinida
- Si $a < 0$ -> métrica no degenerada indefinida
- Si $a = 0$

$\mathrm{Rad}(g_a) = L(\{(1,0,0)\})$ $U = L\{(0,1,0),(0,0,1)\}$

$M(g_{a_U}, B_U) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = B$

$\det(B_1) = 1$

$\det(B_2) = -3$

Métrica degenerada indefinida.

e) $M(g, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Métrica no degenerada.

$W = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (0,1,0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right\} = L(\{(0,2,-1)\})$$

La base que nos piden.

$$\omega(x,y,z) = -x^2 + y^2 + z^2 + 4yz$$

22. Calcula el índice, el rango y clasifica, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la métrica g_a en $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por

$$\omega_a(x,y,z) = x^2 + y^2 + az^2 + 2axz - 4ayz.$$

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2a \\ a & 2a & a \end{pmatrix} = A$$

$\det(A_1) = 1 > 0$

$\det(A_2) = 1 > 0$

$\det(A_3) = 1(a - 4a^2) + a(-a) =$

$= a - 4a^2 - a^2 = a - 5a^2$

$a = 0$

$a = \frac{1}{5}$

$-$ $+$ $-$

0 $\frac{1}{5}$

- Si $a > 0$ y $a < \frac{1}{5}$, métrica no degenerada definida positiva

$s = 0$ $r = 3$

- Si $a < 0$ ó $a > \frac{1}{5}$, métrica no degenerada indefinida.

$r = 3$ $s = 1$

• Si $a = 0$ ó $a = \frac{1}{5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango $= 2$ $s = 0$

Métrica degenerada semidefinida positiva.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

$F_3 - \frac{1}{5}F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$F_3 - \frac{2}{5}F_2$

Métrica degenerada semidefinida positiva

23. Sea g la métrica de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base usual es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentra una base ortonormal para g del plano de ecuaciones $x+y=0$, $z+t=0$.

$$M(g, \mathcal{B}_u) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\to$ plano

dim $= 2$

$$\mathcal{U} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases} \right\}$$

$$(\mathcal{U}, g_u) = \mathcal{L}\left(\{ (1,-1,0,0), (0,0,1,-1) \} \right)$$ $\to$ Son una base $\mathcal{B}$

Necesitamos la matriz de esta métrica restringida a $\mathcal{U}$.

$$M(g_u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g((1,-1,0,0),(1,-1,0,0)) = (1\ -1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (1\ -1\ -1\ -3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$g((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)) = (1\ -1\ -1\ -3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$g((0,0,1,-1),(0,0,1,-1)) = (0\ 0\ 1\ -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1\ -3\ 1\ -2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$$

Silvester

$$M(g_u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\mathcal{U} = \mathrm{Rad}(g_u) \perp W \rightsquigarrow$ Si hubiese sido degenerada

$\det(A_1) = 2 > 0$

$\det(A_2) = 2 > 0$

Criterio Silv $\to$ definida positiva

no hace falta pregunta

u_1 no luminoso $g(u_1, u_1) \neq 0$

$u_1 = (1,-1,0,0)$ $\mathcal{U}_1 = L(\{(1,-1,0,0)\})$

$$\mathcal{U}_1^{\perp g_U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_1^{\perp g}$$

$$\mathcal{U}_1^{\perp} = \{(x,y,z,T) \in \mathbb{R}^4 : g((1,-1,0,0),(x,y,z,T)) = 0\} =$$

$$= \{(x,y,z,T) \in \mathbb{R}^4 : (1\ -1\ -1\ -3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ T \end{pmatrix} = 0\} =$$

$$= \{(x,y,z,T) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z - 3T = 0\}$$

$$\mathcal{U}_1^{\perp g_u} = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_1^{\perp g} = \left\{(x,y,z,T) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x + y = 0 \\ z + T = 0 \\ x - y - z - 3T = 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z,T) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x = -y \Rightarrow x = T \\ z = -T \\ -2y - 2T = 0 \\ y = -T \end{array}\right\} =$$

$$= L(\{(1,-1,-1,1)\})$$

Ya tenemos la base ortogonal

Para ortonormalizarlo

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0),\ (1,-1,-1,1) \right\}$$

serrata

$$g((1,-1,-1,1),(1,-1,-1,0)) = (1\ -1\ -1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2\ \ 2\ -2\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2-1 = 1$$ no lo divido por nada

$$(1,-1,-1,1) = 1(1,-1,0,0) - 1(0,0,1,-1)$$

$$(1\ -1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$$

Se puede hacer así

$$M(g_u, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Métrica definida positiva, por criterio de Sylvester

Con matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → def positiva

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → Matriz de Sylvester asociada a esta métrica

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas de la base ortonormal en función de la base del principio

$$B'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0),\ -1(1,-1,0,0) + 1(0,0,1,-1) \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0),\ \underline{(-1,1,1,-1)} \right\}$$

Sale el opuesto pero es B mismo

24. En $\mathbb{R}^3$ se considera el plano U de ecuación $y - z = 0$ y la recta $W = L(\{(1,1,-1)\})$. Encuentra la expresión de una métrica g en $\mathbb{R}^3$ cuyo radical sea W y cuya restricción a U sea lorentziana.

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$ → Plano

$W = L(\{(1,1,-1)\})$ → Recta

g en $\mathbb{R}^3$

$\text{Rad}(g) = W$ $\quad g_U$ lorentziana

$\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Si unimos ambas bases nos da una de $\mathbb{R}^3$

$B = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,-1)\}$

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ → no degenerada e índice 1

→ Si B cualquiera

$$M(g,B_U) = M(B_U,B)^T M(g,B)\, M(B_U,B)$$

$$M(B_U,B) = M(B,B_U)^{-1}$$

$$M(B,B_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(B_U,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\,)} \text{Adj}(\,)^T =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(g, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

25. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de polinomios de grado menor o igual que dos, y para cada número real m fijo, se considera la métrica g_m dada por

$$g_m(p(x),q(x)) = p(m)q(m) \ .$$

a) Calcula una base del radical de g_m, una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g_m)$, el rango y el índice de g_m. Clasifica g_m.

b) Determina si para $m = 1$ existe una base B de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $M(g_1, B)$ es la matriz cuyas entradas son todas iguales a 1.

a) Antes de proceder, vamos a calcular la matriz de g_m en la base usual.

$B_u = \{1, x, x^2\}$

$g_m(1,1) = 1 \quad g_m(x,1) = m \quad g(x^2,1) = m^2$

$g_m(1,x) = m \quad g_m(x,x) = m^2 \quad g(x^2,x) = m^3$

$g_m(1,x^2) = m^2 \quad g_m(x,x^2) = m^3 \quad g(x^2,x^2) = m^4$

$$M(g_m, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m^3 \\ m^2 & m^3 & m^4 \end{pmatrix}$$

rango$(g_m) = 1 \ \forall m \in \mathbb{R}$, pq las filas son siempre proporcionales

Sabemos de antemano que $\dim(Rad(g_m)) = 2$.

$$Rad(g_m) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ \cancel{m} & \cancel{m^2} & \cancel{m^3} \\ \cancel{m^2} & \cancel{m^3} & \cancel{m^4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}\right\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + my + m^2z = 0\} = L(\{(m,-1,0),(0,m,-1)\})$$

Si añadimos uno de los vectores de la base usual, a la base que tenemos del radical, podemos hallar una base ortogonal

$$B_{on} = \{ (1,0,0), (m,-1,0), (0,m,-1) \}$$

Para que sea ortonormal necesitamos calcular:

$$(1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m^3 \\ m^2 & m^3 & m^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Podemos asegurar, que nuestra base es ortonormal.

La matriz quedaría:

$$M(g_m, B_{ON}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s = 0$$

Estamos ante una métrica degenerada semidefinida positiva.

e) Sí, la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$.

26. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas g_1, g_2 y g_3 que vienen representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Son los planos $(\mathbb{R}^2, g_1)$, $(\mathbb{R}^2, g_2)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$ isométricos entre sí? En caso afirmativo construye una isometría.

Isométricos : misma dimensión, mismo rango, mismo índice

$|G_1| = 7 \neq 0$ $\quad >0$

$|G_2| = -9 \neq 0$ $\quad <0$

$|G_3| = 8 \neq 0$ $\quad >0$

rango (g_1) = rango (g_2) = rango (g_3) = 2

$(\mathbb{R}^2, g_1)$ definida positiva $s=0$

$(\mathbb{R}^2, g_2)$ indefinida

$(\mathbb{R}^3, g_3)$ definida positiva $s=0$

Los E.O.M $(\mathbb{R}^2, g_1)$ $(\mathbb{R}^2, g_3)$ son isométricos.

Vamos a construir la isometría

$$M(g_1, B_u) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(g_3, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Necesito base ortonormal de ambas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{28}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{-1}{2\sqrt{7}} \\ 0 & 2/\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{28}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{28}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \left\{ \left(\tfrac{1}{2}, 0\right), \left(-\tfrac{1}{2\sqrt{7}}, \tfrac{2}{\sqrt{7}}\right) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{3}{2\sqrt{6}}\right) \right\}$$

Ahora describimos la isometría

$$f : (\mathbb{R}^2, g_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, g_3)$$

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{3}{2\sqrt{6}}\right)$$

¡¡ En este caso no importa el orden !!

27. En $\mathbb{R}^4$ se considera g la métrica representada, en la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

a) Calcula su radical.

b) Calcula una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g)$.

c) Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 = 0$ con la métrica inducida por g.

d) Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 + x_2 = 0$ con la métrica inducida por g.

e) ¿Son isométricos los hiperplanos anteriores?

a) Primero estudiamos el rango de nuestra métrica.

$\det(A_1) = 1$

$\det(A_2) = 1$

$\det(A_3) = 2$

$\det(A_4) = \det(A) = 0$

$\text{rango}(g) = 3$

$$\text{rad}(g) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{-3} \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \vec{0} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} x - y + z - t &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -x - 3z + 4t &= 0 \end{aligned} \right\} = L(\{(1,1,1,1)\})$$

e) Base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Métrica degenerada semidefinida positiva

Rod.

$$B = \left\{ (1,0,0,0), (1,1,0,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (1,1,1,1) \right\}$$

c) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0\}$

(U, g_U)

Lo primero es la matriz de g_U

$B_U = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

$$M(g_U, B_U) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{No degenerada}$$

Consideramos un vector luminoso

$u_1 = (0,1,0,0)$

$U_1 = L(\{(0,1,0,0)\})$

$U_1^{\perp g_U} = U \cap U_1^{\perp g}$

$$U_1^{\perp g} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0} \right\} =$$

$$= \{-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$U_1^{\perp g_U} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} = L(\{(0, x_2, 2x_2, x_4)\}) =$$

$$= L(\{(0,1,2,0), (0,0,0,1)\}$$

Volvemos a coger un vector no luminoso.

$u_2 = (0,0,0,1)$

$U_2 = L(\{(0,0,0,1)\})$

$U_1^{\perp g_U} = U_2 \oplus U_2^{\perp g_{U_1^\perp}}$

$$\| $$

$$U_1^\perp \cap U_2^{\perp g_U} = U_1^\perp \cap U_2^\perp \cap U$$

$U_2^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : (-1\ 0\ -3\ 4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \bar{0}\} =$

$= \{-x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$

$U_2^{\perp g_{U_1^\perp}} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} =$

$= L(\{(0,2,4,3)\})$

$B_2 = \{(0,1,0,0), (0,0,0,1), (0,2,4,3)\}$

$B_2 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,0), \frac{1}{2}(0,0,0,1), \frac{1}{2}(0,2,4,3)\}$

d) $M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0\} =$

$= \mathcal{L}(\{(1,-1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\})$

-> Calculamos los demás

$M(g_w, B) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Seleccionamos vector no luminoso:

$w_1 = (0,0,1,0)$

$W_1 = \mathcal{L}(\{(0,0,1,0)\})$

$W_1^{\perp g_w} = W \cap W_1^{\perp g}$

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0\}$

$W_1^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \; g((0,0,1,0), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0\} =$

$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : (1,-1,3,-3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$

$= \{x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0\}$

$$W \cap W_1^{\perp} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$w_2 = (0,0,1,1)$$

$g((0,0,1,1),(0,0,1,1)) = 1$ no es luminoso

$$W_2 = L(\{(0,0,1,1)\})$$

$$W_2^{\perp g W_1^{\perp}} = W \cap W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$$

$$W_2^{\perp} = \{ -x_2 + x_4 = 0 \}$$

$$W_2^{\perp g W_1^{\perp}} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Tenemos w_1, w_2, y este

$$B'_{ORTG} = \{(0,0,1,0), (0,0,1,1), (-1,1,\tfrac{5}{3},1)\}$$

$$(-3,3,5,3)$$

$$g(w_1,w_1) = 3$$

$$g(w_2,w_2) = 1$$

$$g(w_3,w_3) = 24$$

$$B'_{ORTN} = \{\tfrac{1}{\sqrt{3}}(0,0,1,0), (0,0,1,1), \tfrac{1}{\sqrt{24}}(-3,3,5,3)\}$$

e) (U, g_u) def positiva $\qquad (W, g_w)$ def positiva

$\dim(U) = \dim(W) = 3$

$\operatorname{rang}(g_u) = \operatorname{rang}(g_w) = 3$

$s(g_u) = 0 = s(g_w)$

$f : U \to W$

$u_1 \longrightarrow w_1$

$u_2 \longrightarrow w_2$

$u_2 \longrightarrow w_3$

28. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por
$$\omega_a(x,y,z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy\,.$$

a) Calcula el índice, el rango y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

b) En el caso $a = -1$ calcula una base ortonormal para g_{-1}.

c) En el caso $a = 2$ encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $y - 2z = 0$.

d) En el caso $a = 0$, ¿es posible encontrar dos vectores luminosos linealmente independientes?

e) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-1})$ isométricos? ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_0)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{2}})$ isométricos? En caso afirmativo construye una isometría.

29. En $\mathbb{R}^3$ sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ y $W = L(\{(1,-1,1)\})$. Calcula, si es posible, una métrica g y la expresión matricial $M(g,B_u)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $\mathrm{Rad}(g) = U$ y $g_{|W}$ es definida positiva.

b) $\mathrm{Rad}(g) = W$ y $g_{|U}$ es definida negativa.

c) $U^\perp = U$.

d) $W^\perp = W$ y g no degenerada.

e) $U^\perp = W$, g no degenerada e índice$(g) = 2$. Si esta métrica existe da una base ortonormal para $(\mathbb{R}^3, g)$ y para (U, g_U).

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$

$W = L(\{(1,-1,1)\})$

$\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

a) $\mathrm{Rad}(g) = U$ y g_W def. pos.

$B = \{(1,-1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(g,B_U) = M(B,B_U)\,M(g,B)\,M(B_U,B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\text{Rad}(g) = W$ $\quad g|_U$ def negativa

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Misma base

$$M(g,B_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $U^\perp = U$

→ No interviene W

$B_U = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Si pongo un 0, no vale

$$M(g,B_U) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$U = U^\perp$

d) $W^\perp = W$ $\quad g$ no degenerada

$\dim(W^\perp) = 3 - \dim(W) = 2$

Nunca puede ser $W^\perp = W$

No existe una métrica que cumpla estas condiciones.

e) $U^{\perp} = W$, g no degenerada, índice $(g) = 2$

$$M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}$ base ortonormal

$\mathcal{B}_1 = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$ base ortonormal para (U, g_U)

30. Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) ¿Es bilineal la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g((x,y),(x',y')) = xy$?

   b) Toda forma bilineal $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la forma $g(x,y) = axy$ con $a \in \mathbb{R}$.

   c) Si dos matrices cuadradas son congruentes, entonces tienen la misma traza. ¿Deben tener el mismo determinante?

a) $g((x,y),(x',y')) = xy$

NO

$g((1,1),(0,0)) = 1 \neq 0$

$g((1,1),(1,1)) = 1$

$g((1,1),2(1,1)) = 1 \neq 2$

b) $g(x,y) = axy$

$g(x,y) = \underset{1\times1}{(x)}(a)\underset{1\times1}{(y)} = axy$.

Sí.

d) En $\mathbb{R}^2$ existe una métrica tal que $(L(\{(2,1)\}))^{\perp} = L(\{(2,1)\})$.

A priori, las dimensiones no parecen un problema, puesto que:

$\dim(V) = 2 = \dim(U) + \dim(U^{\perp})$, si la métrica es no degenerada.

Sea $B = \{(2,1),(1,0)\}$

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verdadero.

l) En $\mathbb{R}^3$ con la métrica $g_{2,1}$ un plano vectorial de ecuación $ax+by+cz=0$ es degenerado si y sólo si $g(v,v)=0$, donde $v=(a,b,c)$.

m) Existe en $\mathbb{R}^4$ una métrica no degenerada tal que $g_{|U}=0$ y $g_{|V}=0$ donde $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ z+t=0\}$ y $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\ z-t=0\}$.

o) Una matriz simétrica A es semidefinida positiva si y sólo si existe una matriz cuadrada Q tal que $A=Q^t\cdot Q$.

p) Si (V,g) es un espacio vectorial métrico tal que para todo subespacio U de V de dimensión mayor o igual que 1 se tiene $\dim(V)=\dim(U)+\dim(U^\perp)$, entonces g es no degenerada.

p) Si g es no degenerada $\Rightarrow \dim(V)=\dim(U)+\dim(U^\perp)$

$U=V \quad \dim(V)=\dim(V)+\dim(V^\perp)=$

$=\dim(V)+\dim(\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\mathrm{Rad}(g)})$

$\mathrm{Rad}(g)=\{0\}$

o) A semidef pos $\Leftrightarrow \exists Q$ m. cuadrada $\mid A=Q^T\cdot Q$

$A=M(g,B_U) \Rightarrow$

$$M(g,B_{ORTN})=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$A=P^T\cdot M(g,B_{ORTN})\cdot P=\underbrace{P^T\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{Q^T}\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P}_{Q}$$

$\Leftarrow)$ $A = Q^T \cdot Q$

$$g((x_1 \dots x_n)(x_1 \dots x_n)) = (x_1 \dots x_n)\, Q^T Q \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1^2 + \dots + y_n^2 \geq 0$$

Semidef pos.

n) M, N 2O y rango 1

M y N congruentes $\Leftrightarrow$ Traza $(M) \cdot$ Traza $(N) > 0$

g y g' métricas

$M(g, B_u) = M$

$M(g', B_u) = N$

Traza (M)

$$M = P^T \cdot \left(\begin{array}{c|c} \pm 1_{1\times 1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P = \begin{pmatrix} \pm p_{11}^2 & & & \\ & \pm p_{12}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm p_{120}^2 \end{pmatrix}$$

Traza $(M) = + \sum_{i=1}^{n} p_{1i}^2 \to$ semidef neg

$\Rightarrow$ Traza $(M)\cdot$ Traza $(N) = \sum_{i=1}^{20} p_{ii}^2 \cdot \sum_{i=1}^{20} q_{ii}^2 > 0$

$\Leftarrow$

m) $g_U = 0 \qquad g_V = 0$

$B_U = \{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)\}$

$B_V = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$

$B = \{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1), (1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ No degenerada.

l) Lorentz Minkowski

$g_{2,1}$ $\quad ax + by + cz = 0$ es degenerado si y solo si $\Leftrightarrow$

s $\quad g(v,v) = 0 \quad r = (a,b,c)$

$r = 3$

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$

$= \{(a\,b\,-c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}\} = L(\{(a,b,-c)\})^{\perp}$

g_U es ~~no~~ deg $\Leftrightarrow V \neq U \oplus U^{\perp} \Leftrightarrow g_{U^\perp}$ ~~es~~ deg

$$U^{\perp} = L(\{a, b, -c\})\quad g((a, b, -c), (a, b, -c)) = 0$$

(V, g) espacio vectorial métrico de dimensión n.

$g|_U$ $U \subseteq V$, $\dim(U) = 2$ no degenerada, entonces $\dim(U^\perp)$ es $n-2$. Falso

g degenerada de forma que g_U no degenerada.

e) Sea V un espacio vectorial real y g una métrica en V. Supongamos que en la diagonal de $M(g,B)$ respecto de una cierta base B existen dos números a y b con $ab < 0$. Entonces g es indefinida.

$$(V, g) \qquad M(g, B) = \begin{pmatrix} a & \\ & e \end{pmatrix}$$

¿ g es indefinida? $\quad ab < 0$

$g(u_i, u_i) > 0 \Rightarrow$ No puede ser definida neg.

$g(u_j, u_j) < 0 \Rightarrow$ No puede ser definida positiva

Afirmamos que es indefinida.

q) Existe una métrica degenerada en $\mathbb{R}^4$ tal que el ortogonal a la recta generada por el vector $v = (1,1,1,1)$ es la propia recta.

$U^{\perp} = U \qquad$ No existe

$U \subseteq \mathbb{R}^4$

$(\mathbb{R}^4)^{\perp} \subseteq U^{\perp} = U \quad \dim(U) = 1$

$0 < \dim(\operatorname{Rad}(g)) \leq 1$

$\dim(\operatorname{Rad}(g)) = 1 \Rightarrow \operatorname{rad}(g) = U$

$\underset{\mathbb{R}^4}{V} = \operatorname{rad}(g)^{\perp} = U^{\perp} = U$

contradicción

$$U^{\perp} = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid g((1,1,1,1),(x,y,z,t)) = 0 \}$$

ecuación implícita

Nunca puede tener subespacio en $\mathbb{R}^4$ de dimensión 1 *f*) Si una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ está representada en una cierta base por una matriz con determinante negativo entonces se trata de una métrica lorentziana.

g) Sea V un espacio vectorial real de dimensión tres y g una métrica. Supongamos que existen vectores $u, v \in V$ linealmente independientes, ortogonales entre sí y luminosos. Entonces, g es degenerada.

h) Sea V un espacio vectorial real y g una métrica. Si todos los elementos diagonales de la matriz de g en una cierta base B son negativos, entonces g es definida negativa.

i) Toda métrica indefinida sobre un espacio vectorial real tiene vectores luminosos no nulos.

j) Dos vectores perpendiculares y no nulos de una métrica g son linealmente independientes. ¿Y si alguno de los dos vectores no es luminoso?

k) Si g es una métrica semidefinida, entonces un vector $v \in V$ es luminoso si y sólo si está en el radical de g. ¿Y si g es degenerada pero no semidefinida?

f) No tiene por qué.

Sea $M(g, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

El determinante de la métrica es negativo pero $s = 3 \neq 1$.

g) Podemos formar una base con u y v, añadiendo un vector w l.i. a estos dos.

$g(v, u) = 0 \quad g(u, v) = 0 \quad g(v, v) = 0 \quad g(u, u) = 0$

Podemos suponer, que $g(v, w) \neq 0 \quad g(u, w) = 0$

$B = \{v, u, w\}$

Claramente $g(v, v) = 0 \quad g(v, u) = 0 \quad g(v, w) \neq 0$

$g(u, v) = 0 \quad g(u, u) = 0 \quad g(u, w) \neq 0$

Siempre habrá una fila proporcional en nuestra matriz.

h) Si todos los elementos de la diagonal son negativos $\Rightarrow$

$g(u_n, u_n) < 0 \quad \forall u_n \quad n = 1 \dots \dim(V)$

Que es justo la definición de definida negativa Verdadero

i) Falso. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es indefinida pero no tiene ningún vector luminoso.