Objetivos de aprendizaje Tema 12
Análisis Matemático I

Javier Gómez López

8 de enero de 2022

1. Conocer y comprender el teorema de la función implícita, incluyendo su demostración

Teorema. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, $F \in D(\Omega, \mathbb{R}^M)$ y $(a,b) \in \Omega$ tal que $F(a,b) = 0$. Consideremos el abierto $\Omega_a \subset \mathbb{R}^M$ y la función $F_a \in D(\Omega_a, \mathbb{R}^M)$ dados por*

$$\Omega_a = \{y \in \mathbb{R}^M : (a,y) \in \Omega\} \qquad y \qquad F_a(y) = F(a,y) \quad \forall y \in \Omega_a$$

Supongamos que DF es continua en (a,b) y que $DF_a(b)$ es biyectiva. Entonces existen, un abierto W, con $(a,b) \in W \subset \Omega$, un abierto $U \subset \mathbb{R}^N$ y una función $\Psi \in D(U, \mathbb{R}^M)$, tales que

$$\{(x,y) \in W : F(x,y) = 0\} = \{(x, \Psi(x)) : x \in U\} \tag{1}$$

Demostración. Consistirá simplemente en aplicar el teorema de la función inversa local a la función $H : \Omega \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ definda por

$$H(x,y) = (x, F(x,y)) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

que claramente verifica $H(a,b) = (a,0)$.

Empezamos observando que H es diferenciable, pues sus dos componentes lo son. Pero conviene calcular explícitamente la diferencial de H en cada punto de Ω.

Para ello, consideramos las proyecciones lineales naturales de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ sobre $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$, que denotamos por π_1 y π_2 respectivamente, es decir, escribimos:

$$\pi_1(x,y) = x \qquad \text{y} \qquad \pi_2(x,y) = y \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$$

Por otra parte J_1 y J_2 serán las inyecciones lineales de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$ en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, dadas por

$$J_1(x) = (x,0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \qquad \text{y} \qquad J_2(y) = (0,y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^M$$

De esta forma, para todo $(x,y) \in \Omega$, tenemos claramente

$$H(x,y) = (x,0) + (0, F(x,y)) = J_1(x) + J_2(F(x,y)) = J_1(\pi_1(x,y)) + J_2(F(x,y))$$

lo que se resume escribiendo $H = J_1 \circ (\pi_1|_\Omega) + J_2 \circ F$. Deducimos claramente que

$$DH(x,y) = J_1 \circ \pi_1 + J_2 \circ DF(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega \tag{2}$$

Entonces, también para todo $(x,y) \in \Omega$, tenemos

$$||DH(x,y) - DH(a,b)|| = ||J_2 \circ (DF(x,y) - DF(a,b))|| \leq ||J_2||||DF(x,y) - DF(a,b)||$$

y como DF es continua en (a,b), vemos que DH también lo es. Para aplicar el teorema de la función inversa local, sólo queda comprobar que $DH(a,b)$ es biyectiva, para lo cual usaremos la hipótesis sobre la función F_a.

Observamos que para todo $y \in \Omega_a$ se tiene $F_a(y) = F((a,0)+(0,y)) = F(J_1(a) + J_2(y))$, y la regla de la cadena nos da

$$DF_a(y) = DF(a,y) \circ J_2 \quad \forall y \in \Omega_a \qquad \text{luego} \qquad DF_a(b) = DF(a,b) \circ J_2 \tag{3}$$

Para comprobar que $DH(a,b)$ es biyectiva, como se trata de una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión, bastará ver que es inyectiva. Suponemos por tanto que $DH(a,b)(u,v) = (0,0)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, para probar que $u = v = 0$. En efecto, usando (2) tenemos

$$(0,0) = DH(a,b)(u,v) = (u,0) + (0, DF(a,b)(u,v))$$

de donde deducimos, primero que $u = 0$, y entonces que

$$0 = DF(a,b)(u,v) = (DF(a,b) \circ J_2)(v) = (DF_a(b))(v)$$

donde, para la última igualdad, hemos usado (3). Como por hipótesis, $DF_a(b)$ es biyectiva, obtenemos $v = 0$, como queríamos.

El teorema de la función inversa nos da un abierto W de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, con $(a,b) \in W \subset \Omega$, y un abierto $G = H(W)$ de $\mathbb{R}^M$, con $(a,0) \in G$, tales que $H|_W$ es un biyección de W sobre G, cuya inversa es diferenciable en G. Dicha inversa es por tanto una biyección $K : G \to W$ que es diferenciable y verifica que $H(K(x,z)) = (x,z)$ para todo $(x,z) \in G$.

Tomando $U = J_1^{-1}(G) = \{x \in \mathbb{R}^N : (x,0) \in G\}$, tenemos un abierto de $\mathbb{R}^N$ tal que $a \in U$, y la última igualdad nos dice que

$$H(K(x,0)) = (x,0) \qquad \forall x \in U \tag{4}$$

Consideremos ahora las dos componentes de la función $x \mapsto K(x,0)$, de U en W, pues la segunda es la funciñón $\Psi : U \to \mathbb{R}^M$ que buscamos. Más concretamente, definimos

$$\varphi(x) = \pi_1(K(x,0)) \qquad \text{y} \qquad \Psi(x) = \pi_2(K(x,0)) \qquad \forall x \in U$$

Pero φ es fácil de calcular. Para $x \in U$, tenemos $(\varphi(x), \Psi(x)) = K(x,0) \in W$ y (4) nos da

$$(x,0) = H(\varphi(x), \Psi(x)) = (\varphi(x), F(\varphi(x), \Psi(x)))$$

luego $\varphi(x) = x$ para todo $x \in U$. Deducimos que

$$(x, \Psi(x)) \in W \qquad \text{y} \qquad F(x, \Psi(x)) = 0 \qquad \forall x \in U \tag{5}$$

Claramente Ψ es diferenciable, pues basta observar que $\Psi = \pi_2 \circ K \circ (J_1|_U)$. Sólo nos queda comprobar que W, U y Ψ verifican la igualad (1)-

Una inclusión la tenemos en (5), pues si $x \in U$ e $y = \Psi(x)$, vemos en (5) que $(x, y) \in W$ y $F(x, y) = 0$.

Recíprocamente, si $(x, y) \in W$ y $F(x, y) = 0$, tenemos que $x, 0) = H(x, y) \in G$, luego $x \in U$. Además, también sabemos que $K(x, 0) \in W$ y $H(K(x, 0 == (x, 0)$, pero H es inyectiva en W, luego $(x, y) = K(x, 0) = (x, \Psi(x))$, de donde $y = \Psi(x)$ como queríamos demostrar. ■