Objetivos de aprendizaje Tema 10

Análisis Matemático II

Javier Gómez López

29 de mayo de 2022

1. Conocer y comprender la definición de función localmente integrable y de integral indefinida de una tal función

Diremos que una función medible $f \in \mathcal{L}(J)$ es **localmente integrable** en J, cuando f sea integrable en todo intervalo compacto $K \subset J$, y denotaremos por $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ al conjunto de tales funciones. Es claro que $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(J)$, con $\mathcal{L}_1(J) \subset \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$.

Ahora, dada $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$, y fijado un punto $a \in J$, la **integral indefinida** de f con origen en a es la función $F : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in J$$

Nótese que la integral anterior tiene sentido para todo $x \in J$. Si $a < x$, ello se debe a que f es integrable en el intervalo compacto $[a, x] \subset J$. Si $a > x$, entonces f es integrable en $[x, a]$ y basta tener en cuenta que:

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx \overset{\text{def}}{=} -\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Finalmente, en virtud de

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \forall a \in J$$

se tiene $F(a) = 0$.

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Teorema de derivación de integrales

Como habíamos anunciado, si F es una integral indefinida de una función $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$, el teorema de derivación de Lebesgue nos asegura que F es derivable c.p.d en J, pero nuestro objetivo es ahora probar que de hecho se tiene $F'(x) = f(x)$ p.c.t $x \in J$. Nótese que la anterior igualdad c.p.d es lo mejor que podemos esperar, aún cuando F fuese derivable en todo punto de J.

Tras realizar una serie de observaciones y probar varios resultados, podemos obtener lo que se puede entender como una primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo:

Teorema (Derivación de integrales)**.** *Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, sea $F: J \to \mathbb{R}$ cualquier integral indefinida de una función $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(J)$. Entonces F es derivable c.p.d en J con $F'(x) = f(x)$ p.c.t $x \in J$.*

b) Teorema de integración de derivadas

Veamos el resultado clave que vamos buscando, aunque después se pueda generalizar: Trabajamos en un intervalo compacto $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$.

- *Si $F : K \to \mathbb{R}$ es una función creciente, entonces $F' \in \mathcal{L}_1(K)$ con*

$$\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a) \tag{1}$$

Es tentador pensar que la desigualdad anterior pueda ser una igualdad, pero en tal caso, lo podríamos usar para todo intervalo de la forma $[a, x]$ con $a < x < b$, obteniendo que

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Pero entonces, salvo una constante aditiva, F sería una integral indefinida de F', luego F sería absolutamente continua. Sin embargo, era solamente una función creciente, que puede no ser ni continua. Ahora veamos un resultado muy interesante

Teorema (Integración de derivadas)**.** *Dado un intervalo no trivial $J \in \mathbb{R}$, sea $F : J \to \mathbb{R}$ una función que tenga variación acotada en cada intervalo compacto $K \subset J$. Entonces F' es localmente integrable en J.*

c) Versión general del teorema fundamental del cálculo

Lo primero de todo, tenemos que dar la siguiente definición: se dice que una función $F : K \to \mathbb{R}$ es **absolutamente continua**, cuando para cada $\varepsilon > 0$ pueda encontrarse un $\delta > 0$ verificando la siguiente condición: si $n \in \mathbb{N}$ y $\{]a_k, b_k[: k \in \Delta_n\}$ es una familia de intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en K, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}|F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

Teorema (Fundamental del Cálculo)**.** *Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, sea $F : J \to \mathbb{R}$ una función, verificando que $F_{|K}$ es absolutamente continua, para todo intervalo compacto $K \subset J$. Entonces F es derivable c.p.d en J y su derivada es localmente integrable en J con*

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) \qquad \forall a, b \in J$$

Conviene resaltar que el resultado anterior puede expresarse de forma que muestre la integración como operación inversa de la derivación.

3. Conocer y comprender la versión elemental del teorema fundamental del cálculo, incluyendo su demostración.

Para llegar a dicho resultado, es necesario enunciar otro antes:

- *Sea $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(J)$ y F una integral indefinida de f. Si f es continua en un punto $x \in J$, entonces F es derivable en el punto x, con $F'(x) = f(x)$.*

Demostración. Fijado $y \in J \setminus \{x\}$, integrando una función constante, vemos claramente que, tanto si $x < y$ como si $y < x$, se tiene $(y-x)f(x) = \int_x^y f(x)dt$. Además, si la integral indefinida F tiene su origen en $a \in J$, usando que

- *Si $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(J)$, para cualesquiera $a, b, c \in J$ se tiene:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{2}$$

con $c = x$ y $b = y$ obtenemos que

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt$$

Usando la linealidad de la integral, tenemos por tanto que

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) = \frac{1}{y-x}\left(\int_x^y f(t)dt - \int_x^y f(x)dt\right) = \frac{1}{y-x}\int_x^y (f(t) - f(x))dt \tag{3}$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de f en el punto x nos da un $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in J$ que verifique $|t - x| < \delta$, se tiene $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Supongamos que $|y-x| < \delta$ y sea K_y el intervalo compacto de extremos x e y. Puesto que f es integrable en K_y, también lo es la función $\varphi : K_y \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = f(t) - f(x)$ para todo $t \in K_y$. Además, para $t \in K_y$ se tiene que $|t-x| \leq |y-x| < \delta$, luego $|\varphi(t)| < \varepsilon$. Deducimos claramente que

$$\left|\int_x^y (f(t) - f(x))dt\right| = \left|\int_{K_y} \varphi\right| \leq \int_{K_y} |\varphi| \leq \varepsilon\lambda(K_y) = \varepsilon|y - x|$$

Usando ahora (3), obtenemos la desigualdad

$$\left|\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x)\right| = \frac{1}{|y-x|}\left|\int_x^y (f(t) - f(x))dt\right| \leq \varepsilon$$

válida para todo $y \in J$ con $0 < |y - x| < \delta$. Esto prueba que $\lim_{y \to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x)$, es decir, que F es derivable en el punto x con $F'(x) = f(x)$, como se quería. ■

El resultado previo puede aplicarse en todos los puntos de J, obteniendo así la versión más elemental del teorema fundamental del cálculo. Seguimos trabajando en un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$.

Teorema 1 (Versión elemental teorema fundamental del cálculo)**.** *Sea $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua y F una integral indefinida de f. Entonces F es una función de clase C^1 en J con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in J$.*

Demostración. Acabamos de ver que F es derivable en J con $F' = f$, que es una función continua, luego F es de clase C^1 en J. ■