Relación Ejercicios 1

Javier Gómez López

2020/2021

Ejercicio 1. Estudiar la derivabilidad de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

c) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$

Al tener un valor absoluto, podemos reescribir $f(x)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-x} & si \quad x \leq 0 \\ \\ \frac{2x}{1+x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Así, observamos que la función es claramente $\mathbb{R}$ puesto que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

Ahora estudiaremos si la función es derivable en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow f'(0^-) = f'(0^+)$$

Así, la función es claramente derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) $A = \mathbb{R}_0^+$ y $f(x) = x^x$ si $x \in \mathbb{R}^+$, y $f(0) = 0$.

Podemos observar que la función es claramente continua en $\mathbb{R}^+$, puesto que cualquier número $y \in \mathbb{R}^+$ elevado siempre a y siempre está determinado.

Ahora estudiaremos la continuidad de la función en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \to 0^+} \ln x^x$$

$$\ln L = \lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \to +0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Aplicamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Y deshacemos el logaritmo que hemos aplicado antes:

$$\ln L = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$

Por lo tanto, podemos afirmar que al no ser $f(x)$ continua en $x = 0$, tampoco puede ser derivable en dicho punto.

Ahora estudiaremos si la función es derivable en $\mathbb{R}^+$:

$$f(x) = x^x \Rightarrow \ln(f(x)) = x \cdot \ln x$$

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{d}{dx}(x\ln(x)) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + 1$$
$$f'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$$

De esta manera queda probado que f es derivable en todo $\mathbb{R}^+$.

Ejercicio 2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Determinar los valores de α y β que hacen que el punto (2,4) perteneza a la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de la ecuación $2x - y = 0$.

En primer lugar, establezcamos la condición de que el punto (2,4) pertenezca a la gráfica de f, esto es, $f(2) = 4$:

$$f(2) = 2^2 + 2\alpha + \beta = 4$$

$$2\alpha + \beta = 0 \tag{1}$$

Ahora, recordemos la ecuación de la recta tangente a un punto a de una función:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Usando los datos del enunciado, podemos afirmar que la otra condición que se nos pide satisfacer es que $f'(2) = 2$.

$$f'(x) = 2x + \alpha$$

$$f'(2) = 4 + \alpha \Rightarrow \alpha = -2$$

Sustituyendo en (1):

$$2 \cdot (-2) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 4$$

Así, concluimos que $\alpha = -2$ y $\beta = 4$ y por tanto $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

Ejercicio 3. Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

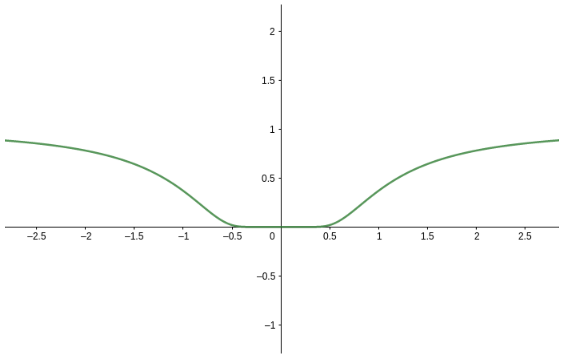
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

y determinar su imagen.

Primero de todo, observando la función nos damos cuenta de que los posibles puntos problemáticos son $x = 0$ únicamente. Por tanto, estudiemos la continuidad de f en $x = 0$:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{-\frac{1}{0^+}} = 0$$



Podemos observar que la función es continua en $x = 0$. Pasamos ahora a estudiar la función derivada.

Por lo ya demostrado antes (que la f es continua), solo nos queda probar que $f'(0^-) = f'(0^+)$ para poder afirmar que la función f es derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0^- + h) - f(0^-)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{\overset{\downarrow}{=}} \\ \qquad \lim_{h \to 0^-} 2 \cdot \frac{\frac{1}{h^2}}{\frac{3}{h^3} \cdot e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \to 0^-} 2 \cdot \frac{h}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0 \\ \\ f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0^+ + h) - f(0^+)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{\overset{\downarrow}{=}} \\ \qquad \lim_{h \to 0^+} 2 \cdot \frac{\frac{1}{h^2}}{\frac{3}{h^3} \cdot e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \to 0^+} 2 \cdot \frac{h}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0 \end{cases}$$

Puesto que hemos demostrado que f es continua en $x = 0$, y $f'(0^-) = f'(0^+)$, podemos afirmar que f es derivable en $x = 0$. De hecho, al ser $f'(0) = 0$, en este punto encontramos un posible máximo o mínimo.

En $\mathbb{R} - \{0\}$, f es una función elemental continua y derivable. Interpretando los resultados obtenidos anteriormente, podemos afirmar que f es continua y derivable en todo su dominio, $\mathbb{R}$.

Por otro lado, para calcular la imagen de $f(x)$ estudiaremos su monotonía. Sabemos que $Im(e^{-\frac{1}{x^2}} \subseteq \mathbb{R}^+$ por ser esponencial, y como $f(0) = 0 \notin \mathbb{R}^+$, deducimos que en $x = 0$ hay un mínimo no relativo, si no absoluto. Podemos centrarnos ahora en el resto de puntos de la función, estudiando su monotonía a través de su derivada:

$$f'(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}x^3}{\to} f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Sin embargo, $\nexists x \in \mathbb{R}$ que verifique tal condición, por lo que no encontramos más extremos relativos en la función.

Deducimos que en $]-\infty, 0[$ $f(x)$ es decreciente y en $]0, +\infty[$ es creciente. Para hallar $Im(f)$ ya solo nos queda calcular los límites en el infinito (que van a coincidir al estar la variable x elevada al cuadrado):

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

Así, concluimos que $Im(f) = [0, 1[$.

Ejercicio 4. Estudiar la derivabilidad y el comportamiento en $\pm\infty$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & si \quad x < 0 \\ x & si \quad 0 \le x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad de una función primero debemos estudiar su continuidad, pues esta es necesaria para que dicha función sea derivable:

- Para $x < 0$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$. En este caso f está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$. Por tanto al tomar x valores inferiores a 0, podemos afirmar que $f(x)$ es continua para $x < 0$.
- Para $0 < x < 1$, $f(x) = x$ lo cual es un polinomio y por tanto continua en todo $\mathbb{R}$. Así, $f(x)$ continua para $0 < x < 1$.
- Para $x > 1$, $f(x) = \sqrt[5]{x}$. En este caso f está definida en $\mathbb{R}_0^+$ y por tanto afirmamos que $f(x)$ continua para $x > 1$.

Ahora estudiaremos la continuidad en los puntos en los que la f cambia de expresión:

- Estudiamos para $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{c} f(0) = 0 \\ \\ \text{lím}_{x\to0^-} f(x) = \text{lím}_{x\to0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \\ \text{lím}_{x\to0^+} f(x) = \text{lím}_{x\to0^+} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to0^-} \neq \lim_{x\to0^+}$$

  Por lo tanto concluimos que $f(x)$ no es continua en $x = 0$. Presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

- Estudiamos para $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{c} f(1) = 1 \\ \\ \text{lím}_{x\to1^-} f(x) = \text{lím}_{x\to1^-} x = 1 \\ \\ \text{lím}_{x\to1^+} f(x) = \text{lím}_{x\to1^+} \sqrt[5]{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1} = f(1) = 1$$

  Concluimos que $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Así, f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Ahora estudiaremos la derivabilidad de f:

- Como $f(x)$ es discontinua en $x=0$, entonces la función no será derivable en dicho punto.
- En $x=1$, dado que las funciones que componen f son derivables, podemos afirmar que:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x-1)}{x^2} & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad 0\leq x<1 \\ \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{x^4}} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

$f'(1)$ existiría, si y solo si, $f'_-(1)=f'_+(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(1)=1 \\ f'_+(1)=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{1^4}}=\frac{1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Al no coincidir, } \nexists f'(1)$$

Por tanto, $Dom(f')=\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Ahora estudiaremos el comportamiento de la función en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^\infty}\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x} = +\infty$$

Ejercicio 5. Calcular la imagen de las siguientes funciones:

a) $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x+\arctan x$, para cada $x\in[0,1]$.

Se trata de una función continua $\forall x\in[0,1]$ ya que x y $\arctan x$ son dos funciones continuas, y por tanto, su suma también es continua.

Ahora estudiaremos la derivada para ver si la función alcanza algún máximo o algún mínimo en su dominio y ver su decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Igualamos a 0 para comprobar si cambia su signo:

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{1+x^2} &= 0 \\ \frac{1}{1+x^2} &= -1 \\ 1 &= -1-x^2 \\ x &= \sqrt{2}\notin\mathbb{R} \end{aligned}$$

Así, concluimos que $f'(x)$ no se anula en ningún punto y además que es continua y al ser positiva, $f(x)$ es creciente.

Calculamos $f(0)$ y $f(1)$ para ver los extremos de la imagen:

$$f(0) = 0 + \arctan 0 = 0$$

$$f(1) = 1 + \arctan 1 = 1 + \frac{1}{4}\pi = 1{,}79$$

Así:

$$Im(f) = [0,\ 1.79]$$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \arctan x$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

El análisis de la continuidad y la derivabilidad realizado en el apartado anterior es análogo al que procedería en este apartado y por ello no lo vamos a repetir.

Así, para estudiar la imagen de la función bastará con estudiar los límites en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + \arctan x = -\infty$$

$$\lim x\ to + \infty f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \arctan x = +\infty$$

Así:

$$Im(f) = [-\infty, +\infty]$$

c) $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)}$, para cada $x \in]0, 1[$.

Observamos que $f(x)$ está definida $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, y por lo tanto podemos afirmar que es continua para todo su dominio de definición:

$$x(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = -1$$

Ahora estudiaremos su derivada para comprobar si alcanza algún máximo o mínimo en su dominio:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + x) - (2x - 1)(2x + 1)}{(x^2 + x)^2} = \frac{2x^2 + 2x - (4x^2 - 1)}{(x^2 + x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)^2}$$

Ahora comprobamos cuando se anula para estudiar la monotonía de la función:

$$\frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x \approx 1,36 \text{ ó } x \approx -0{,}36$$

$$\{-0{,}36, 1{,}36\} \notin]0, 1[$$

Así, concluimos que la f es monótona y con calcular sus valores cuando se acerca a los extremos del intervalo obtendremos su imagen:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x - 1}{x(x + 1)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

Concluimos que:

$$Im(f) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

d) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, para cada $x \in [-1, 1]$.

Observamos que $f(x)$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$1 + x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

Esto no es una raíz real y por tanto la f es continua en todo $\mathbb{R}$ y por ello en $[-1, 1]$, su dominio de definición.

Ahora estudiamos su derivada para encontrar máximos y mínimos de la función:

$$f'(x) = \frac{2x(1 + x^2) - (x^2 \cdot 2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
f'	$f'(-1) = -\frac{1}{2}$	$f'(1) = \frac{1}{2}$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Por lo tanto $x = 0$ es un mínimo y al ser el único punto donde se anula la derivada concluimos que es mínimo absoluto. Si ahora calculamos el valor de f en los extremos del intervalo obtendremos la cota superior de la aplicación.

$$f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$$

Y concluimos que:

$$Im(f) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

e) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$, para cada $x \in [-1, 1]$.

Podemos reescribir la función como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-x} & si \quad x \leq 0 \\ \\ \frac{2x}{1+x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Estudiamos su continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

y podemos afirmar que f es continua en $x = 0$.

Ahora estudiamos su derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1-x)^2} & si \quad x \leq 0 \\ \\ \frac{2}{(1+x)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f_-(0) = f_+(0) = 2$$

y por tanto f también es derivable en todo su dominio.

Estudiemos si f' se anula en algún punto:

$$\frac{2}{(1-x)^2} = 0 \text{ ó } \frac{2}{(1+x)^2} = 0 \Rightarrow 2 = 0$$

por tanto, f' no se anula en ningún punto y podemos afirmar que la aplicación es continua en todo su dominio de definición.

Estudiando sus valores en los extremos de el intervalo donde está definida obtendremos su imagen:

$$f(-1) = -1 \quad f(1) = 1$$

Así:

$$Im(f) = [-1, 1]$$

f) $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x(1-x^2)^{-1/2}$, para cada $x \in]-1, 1[$.

Reescribamos la función:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Podemos afirmar que en el dominio donde está definida la función es continua:

$$1 - x^2 > 0 \Rightarrow x < \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$1 - x^2$	$1 - (-2)^2 = -3$	$1 - 0^2 = 1$	$1 - 2^2 = -3$
	-	+	-

Por lo tanto la f es continua en todo su dominio de definición.

Estudiemos ahora su derivada:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1 - x^2 + x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

Claramente la f' no se anula en ningún punto, así la aplicación es monótona y por tanto con calcular sus límites en su dominio de definición tendremos la imagen de esta:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Así:

$$Im(f) = (-\infty, +\infty)$$

Ejercicio 6. Demostrar las siguientes desigualdades para los valores de x indicados en cada caso.

a) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0$

Empecemos con la primera desigualdad: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$. Sea $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, la cual es claramente continua en su dominio de definición.

Estudiemos ahora su derivada:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g'(1) = \frac{1}{4} > 0$$

Por lo tanto g es creciente a partir del 0. Para que se cumpla la desigualdad, $g(0) \geq 0$:

$$g(0) = \ln(0+1) - \frac{0}{1-0} = 0$$

Queda probada la primera desigualdad.

Ahora estudiemos la segunda: $\ln(1+x) < x$. Sea $h : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x - \ln(1+x)$, la cual también es claramente continua en su dominio de definición.

Estudiemos ahora su derivada:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$h'(1) = \frac{1}{2} > 0$$

Por lo tango h es creciente a partir del 0. Para que se cumpla la desigualdad, $h(0) \geq 0$:

$$h(0) = \frac{0}{1+0} = 0$$

Y queda probado que:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad \forall x > 0$$

b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Definamos la función $g : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$ la cual es continua en su dominio de definición.

Estudiemos ahora su derivada:

$$g'(x) = -\sin x + x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g'(1) > 0$$

Por tanto, g es creciente a partir de $x = 0$ y si se verifica que $g(0) \geq 0$ quedará probada la desigualdad:

$$g(0) = 0$$

Y queda probado que $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

c) $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x < \tan x \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Demostremos primero $\frac{2x}{\pi} < \sin x \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Definamos $h(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ y buscamos sus raíces:

$$h(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi} = 0 \Rightarrow x = o \text{ o } x = \frac{\pi}{2}$$

Como $h(x)$ corta al eje x en dos ocasiones, pero no está definido en ninguno de esos puntos. En el intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ tendrá signo constante.

$$h(\frac{\pi}{4}) > 0 \Rightarrow h(x) > 0 \qquad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

Para asegurarnos, estudiemos la primera derivada:

$$h'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} = 0 \Rightarrow x \approx 0{,}88$$

	$(-\infty, 0{,}88)$	$(0{,}88, +\infty)$
h'	$h'(\frac{1}{2}) \approx 0{,}24$	$h'(1) \approx -0{,}09$
h	$\nearrow$	$\searrow$

Comprobamos si es máximo o es mínimo:

$$h''(x) = -\sin x$$

$$h''(0{,}98) < 0$$

Concluimos que h tiene un máximo relativo en 0,88. Por tanto, h toma valores positivos en el intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, luego se verifica $\frac{2x}{\pi} < \sin x \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Comprobemos ahora que $\sin x < x \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Sea $g(x) = x - \sin x$. Si calculamos las raices de $g(x)$ obtenemos que:

$$g(x) = 0 \iff x = 0$$

Como $g(\frac{\pi}{4}) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Estudiemos la primera derivada:

$$g'(x) = 1 - \cos x = 0 \iff x = 0$$

Como $g'(\frac{1}{2}) = 0{,}12 > 0 \Rightarrow g$ creciente en $]0, \frac{\pi}{2}[$. Luego hemos obtenido que $g(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ y se verifica la desigualdad.

Por último veamos que $\tan x > x \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Sea $f(x) = \tan x - x$. Si calculamos las raíces de f, $f(x) = 0 \iff x = 0$. Como $f(\frac{pi}{4}) > 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Calculemos ahora la derivada: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 0 \iff x = 0$ o $x = \pi$. Como $f'(\frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow \ f$ es creciente en el intervalo $]0, \pi[$, y por tanto en el intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Así, se verifica que $\tan x > 0 \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.