Objetivos de aprendizaje Tema 6

Análisis Matemático I

Javier Gómez López

30 de noviembre de 2021

1. Conocer y comprender el concepto general de función diferenciable y de diferencial de una tal función

Recordemos el concepto de derivada para funciones reales de variable real. Si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, sabemos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in A \cap A'$, cuando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \tag{1}$$

en cuyo caso $\lambda = f'(a)$ es la *derivada* de f en a. De entrada, cuando f está definida en un subconjunto del espacio normado X, el cociente de incrementos que aparece en (1) no tiene sentido, simplemente no podemos dividir por el vector $x - a$. Para resolver este problema con el denominador, reescribimos (1) en la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \lambda(x - a)}{x - a} = 0$$

lo que a su vez se puede expresar de dos formas equivalentes:

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \lambda(x - a)|}{|x - a|} = 0, \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \lambda(x - a)}{|x - a|} = 0 \tag{2}$$

Esto resuelve el problema que teníamos con el denominador de (1): para $a, x \in X$, bastará escribir $||x - a||$ en lugar de $|x - a|$.

Ahora, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ consideramos la aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que consiste en multiplicar por α, esto es, la aplicación $T_\alpha \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dada por $T_\alpha(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, con la identificación $\lambda = f'(a)$, se obtiene la aplicación $T_\lambda \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que será la diferencial de f en a, y diremos que f es diferenciable en el punto a. Es claro que las igualdades (2) se expresan equivalentemente en términos de la diferencial. Decimos que $f : A \to \mathbb{R}$ es *diferenciable* en el punto $a \in A \cap A'$ cuando existe $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ verificando que

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - T(x - a)|}{|x - a|} = 0, \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{|x - a|} = 0$$

en cuyo caso T es única, y la llamamos *diferencial* de f en a, que se denota por $Df(a)$. En el caso particular de $\mathbb{R}$, tenemos que *f es diferenciable en a si, y sólo si, es derivable en a*, en cuyo caso se tiene $f'(a) = Df(a)(1)$, o lo que es lo mismo, $Df(a)x = f'(a)x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, en el caso general, la distinción entre derivada y diferencial se vuelve crucial.

En todo lo que sigue, X e Y serán espacio normados arbitrarios, si bien se descartan siempre los casos triviales $X = \{0\}$ e $Y = \{0\}$. Fijamos una función $f : A \to Y$, donde A es un subconjunto no vacío de X, y un punto $a \in A^\circ$.

Pues bien, se dice que f es *diferenciable* en el punto a cuando existe una aplicación lineal y continua $T \in L(X, Y)$ verificando las siguientes condiciones, que son equivalentes:

$$\lim_{x \to a} \frac{||f(x) - f(a) - T(x - a)||}{||x - a||} = 0, \quad \text{o bien,} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{||x - a||} = 0 \qquad (3)$$

También podemos trasladar el cálculo al origen, usando el conjunto $B = \{x - a : x \in A\}$, que verifica $0 \in B^\circ$. Mediante el cambio de variable $x = a + h \in A$ con $h \in B$, teniendo en cuenta que $x \to a$ cuando $h \to 0$ y que $x \neq a$ para $h \neq 0$, deducimos de (3) que

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(a + h) - f(a) - T(h)||}{||h||} = 0, \quad \text{o bien,} \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - T(h)}{||h||} = 0$$

Ahora comentaremos algunas características de la diferencial:

- *Si f es diferenciable en a, la aplicación $T \in L(X, Y)$ que aparece en (3) es única.*
  Si f es diferenciable en a, a la única $T \in L(X, Y)$ que verifica (3), la llamamos **diferencial** de f en a, y se denota por $Df(a)$. Por tanto, $Df(a) \in L(X, Y)$ se caracteriza por
  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(a - x)}{||x - a||} = 0$$
  y como consecuencia verifica también que
  $$Df(a)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \qquad \forall v \in X$$
- *Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.*
  Podemos interpretar la diferenciabilidad exactamente igual que para funciones reales de variable real: que f sea diferenciable en a significa que, çerca"del punto a, f admite una "buena aproximación"mediante una función sencilla: la función $g : X \to Y$ dada por
  $$g(x) = f(a) + Df(a)(x - a) = f(a) + Df(a)(x) - Df(a)(a) \qquad \forall x \in X$$
- *Si $U \subset A$ y $a \in U^\circ$, entonces f es diferenciable en a si, y sólo si, $f|_U$ es diferenciable en a, en cuyo caso se tiene $Df(a) = D(f|_U)(a)$.*
- *La diferenciabilidad de f en a, así como su diferencial $Df(a)$, se conservan al sustituir las normas de X e Y por otras equivalentes a ellas.*
  En el caso que nos interesa, los espacios normados X e Y tendrán dimensión finita, luego para estudiar la diferenciabilidad de una función f podemos considerar cualquier norma en dichos espacios.

Por último presentemos las funciones que son diferenciables en todos sus puntos. Sean pues X e Y espacios normados, Ω un subconjunto abierto de X y $f : \Omega \to Y$ una función. Cuando f sea diferenciable en todo punto $x \in \Omega$, diremos simplemente que f es **diferenciable**, y $D(\Omega, Y)$ será el conjunto de todas las funciones diferenciables de Ω en Y, contenido en el conjunto $\mathcal{C}(\Omega, Y)$ de todas las funciones continuas de Ω en Y.

Para $f \in D(\Omega, Y)$ podemos considerar la función $Df : \Omega \to L(X,Y)$ que a cada punto $x \in \Omega$ hace corresponder la diferencial $Df(x) \in L(X,Y)$, y decimos que Df es la función diferencial de f, o simplemente la **diferencial** de f.

Como $L(X,Y)$ es a su vez un espacio normado, tiene sentido plantearse la continuidad de la función Df. Decimos que $f \in D(\Omega, Y)$ es una **función de clase $\mathbf{C}^1$** cuando Df es continua, y denotamos por $C^1(\Omega, Y)$ al conjunto de todas las funciones de clase C^1 de Ω en Y. Por ahora resaltamos la relación entre los conjuntos de funciones recién definidos:

$$C^1(\Omega, Y) \subset D(\Omega, Y) \subset \mathcal{C}(\Omega, Y)$$

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Diferenciabilidad del producto de dos funciones con valores reales
Primero, debemos mostrar un resultado que necesiteramos posteriormente:

- *La función $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $P(x,y) = xy$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene:*

$$DP(x,y)(h,k) = yh + xk \qquad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$$

Podemos ya probar la regla para la diferenciación de un producto de funciones:

- *Sea Ω un abierto de un espacio normado X y $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en un punto $a \in \Omega$. Entonces ($f\ g$ es diferenciable en a con*

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a) \tag{4}$$

Si $f, g \in D(\Omega)$ se tendrá $fg \in D(\Omega)$ con $D(fg) = gDf + fDg$, luego $f, g \in C^1(\Omega)$ siempre que $f, g \in C^1(\Omega)$. Así pues, $D(\Omega)$ y $C^1(\Omega)$ son subanillos de $\mathcal{C}(\Omega)$.

Demostración. La función $h = (f,g) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable en a por serlo sus componente f y g, pero es claro que $fg = P \circ h$ donde $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función estudiada en el resultado anterior.
Puesto que P es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$, la regla de la cadena nos dice que $f\ g$ es diferenciable en a. Para calcular su diferencial basta con observar que, para todo $x \in X$ tenemos claramente:

$$\begin{aligned} D(fg)(a)(x) &= [DP(hh(a)) \circ Dh(a)](x) = DP(f(a), g(a))(Df(a9(x), Dg(a)(x)) \\ &= g(a)Df(a)(x) + f(a)Dg(a)(x) \end{aligned}$$

■

Otro resultado interesante es el siguiente:

- *Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$, se tiene $\mathcal{P}(\Omega) \subset C^1(\Omega)$, es decir, toda función polinómica en Ω es de clase C^1.*

Pasamos a estudiar ahora la diferenciabilidad de un cociente de funciones diferenciables:

- *Sea Ω un abierto no vacío de un espacio normado X y sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciables en un punto $a \in \Omega$, con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$. Entonces la función cociente f/g) es diferenciable en a con*

$$D(f/g)(a) = \frac{1}{g(a)^2}(g(a)Df(a) - f(a)Dg(a))$$

  Por tanto, si $f, g \in D(\Omega)$ se tiene $f/g \in D(\Omega)$, y $f/g \in C^1(\Omega)$ siempre que $f, g \in C^1(\Omega)$.

Otro resultado interesante es el siguiente:

- *Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, se tiene $\mathcal{R}(\Omega) \subset C^1(\Omega)$, es decir, toda función racional en Ω es de clase C^1.*

3. Conocer y comprender la regla de la cadena, sobre la diferenciabilidad de una composición de funciones, incluyendo su demostración

Teorema 1. *Sean X,Y,Z tres espacios normados, Ω y U abiertos no vacíos de X e Y respectivamente, y sean $f : \Omega \to U$ y $g : U \to Z$ dos funciones. Si f es diferenciable en un punto $a \in \Omega$ y g es diferenciable en $b = f(a)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en a, con*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

Por tanto, si $f \in D(\Omega, Y)$ y $g \in D(U, Z)$, entonces $g \circ f \in D(\Omega, Z)$.

Demostración. Para mayor claridad, la dividimos en tres etapas.

(a). Primero traducimos la diferenciabilidad de f y g, con una notación que haga más fáciles los cálculos. Por una parte, definimos una función $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ de la siguiente forma:

$$\Phi(x) = \frac{||f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)||}{||x-a||} \qquad \forall x \in \Omega \setminus \{a\} \text{ y } \Phi(a) = 0 \tag{5}$$

Por ser f diferenciable en a, tenemos que Φ es continua en a, y verifica:

$$||f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)|| = \Phi(x)||x-a|| \qquad \forall x \in \Omega \tag{6}$$

Análogamente, definimos $\Psi : U \to \mathbb{R}_0^+$ por

$$\Psi(x) = \frac{||g(y) - g(b) - Dg(b)(y-b)||}{||y-b||} \qquad \forall y \in U \setminus \{b\} \text{ y } \Psi(b) = 0 \tag{7}$$

Entonces Ψ es continua en b y verifica:

$$||g(y) - g(b) - Dg(b)(y-b)|| = \Psi(y)||y-b|| \qquad \forall y \in U \tag{8}$$

Por último, sólo para abreviar la notación, definimos también $\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ por

$$\Lambda(x) = ||(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - (Dg(b) \circ Df(a)(x-a))|| \qquad \forall x \in \Omega$$

Puesto que $Dg(b) \circ Df(a) \in L(X, Z)$, bastará comprobar que $\lim_{x \to a} \frac{\Lambda(x)}{||x-a||} = 0$.

(b). En una segunda fase, obtenemos una desigualdad clave, que relaciona Λ con Φ y Ψ. Para $x \in \Omega$, escribimos $y = f(x) \in U$, y usamos en Z la desigualad triangular:

$$0 \leq \Lambda(x) \leq ||g(y) - g(b) - Dg(b)(y - b)|| + ||Dg(b)[y - b - Df(a)(x - a)]|| \quad (9)$$

Trabajamos ahora por separado con los dos sumandos que han aparecido.
El último es el más sencillo, usamos la definición de la norma en $L(Y, Z)$ junto con (6):

$$\begin{aligned} ||Dg(b)[y - b - Df(a)(x - a)]|| &\leq ||Dg(b)|| \cdot ||y - b - Df(a)(x - a)|| \\ &= ||Dg(b)|| \cdot ||f(x) - f(a) - Df(a)(x - a)|| \\ &= ||Dg(b)|| \cdot \Phi(x)||x - a|| \end{aligned} \quad (10)$$

En vista de (8), el otro sumando es:

$$||g(y) - g(b) - Dg(b)(y - b)|| = \Psi(y)||f(x) - f(a)||$$

La desigualdad triangular en Y, junto con (6) y la definición de la norma en $L(X, Y)$, nos dan

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(a)|| &\leq ||f(x) - f(a) - Df(a)(x - a)|| + ||Df(a)(x - a)|| \\ &\leq [\Phi(x) + ||Df(a)||]||x - a|| \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$||g(y) - g(b) - Dg(b)(y - b)|| \leq \Psi(f(x))[\Phi(x) + ||Df(a)||]||x - a|| \quad (11)$$

Usando (10) y (11), deducimos de (9) la desigualdad que buscábamos:

$$0 \leq \Lambda(x) \leq \Psi(f(x))[\Phi(x) + ||Df(a)||]||x - a|| + ||Dg(b)||\Phi(x)||x - a|| \quad (12)$$

(c). Usando la desigualadad (12), junto con las propiedades conocidas de Φ y Ψ, concluimos fácilmente la demostración. Para $x \in \Omega \setminus \{a\}$, de (12) deducimos que

$$0 \leq \frac{\Lambda(x)}{||x - a||} \leq \Psi(f(x))[\Phi(x) + ||Df(a)||] + ||Dg(b)||\Phi(x) \quad (13)$$

luego bastará probar que el último miebro de esta igualdad tiene límite 0 en el punto a.
Como f es diferenciable, luego continua, en el punto a, y Ψ es continua en $b = f(a)$, veremos que $\Psi \circ f$ es continua en a. Además, Φ es continua en a, luego tenemos

$$\lim_{x \to a} \Psi(f(x)) = \Psi(f(a)) = \Psi(b) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} \Phi(x) = \Phi(a) = 0$$

Así pues, concluimos claramente que

$$\lim_{x \to a} [\Phi(f(x))[\Phi(x) + ||Df(a)||] + ||Dg(b)||\Phi(x)] = 0$$

y (13) nos dice que $\lim_{x \to a} \frac{\Lambda(x)}{||x - a||} = 0$, como queríamos demostrar.

■