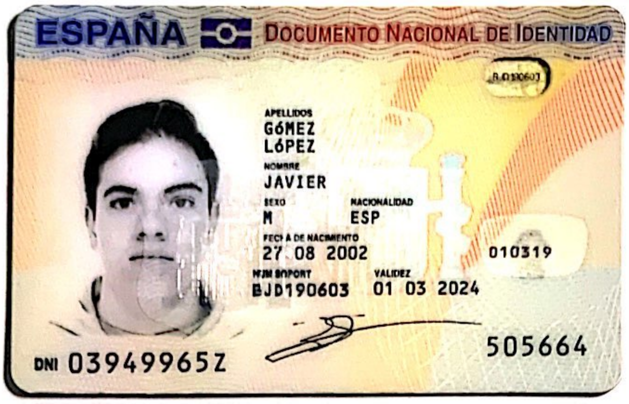
Javier Gómez López

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



1. Sea $B_u = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la base usual de $\mathbb{R}^3$

sabemos que la $Im(f_\mu)$ tiene dimensión 3 (como $\mathbb{R}^3$) cuando la $M(f, B_u)$ tiene rg máximo (3)

Calculemos determinante $M(f_\mu, B_u)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & \mu+8 & \mu+2 \\ -1 & \mu & 2 \end{vmatrix} = 2\mu + 16 - \mu^2 - 2\mu = -\mu^2 + 16 \qquad -\mu^2 + 16 = 0$$

$$\mu = \pm 4$$

Ahora distinguimos casos

· Si $\mu \neq \pm 4 \Rightarrow rg(M(f, B_u)) = 3$

$dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = dim_{\mathbb{R}}(ker(f_\mu)) + dim_{\mathbb{R}}(Im(f_\mu)) \Rightarrow dim_{\mathbb{R}}(ker_\mu) = 0$

Así $Im(f_\mu) = L(\{(1,3,-1), (0,\mu+8,\mu), (0,\mu+2,2)\}) \; \forall \mu \in \mathbb{R} - \{-4,4\}$

y $ker(f) = \{0\}$

Por lo tanto f es una biyección y por tanto un isomorfismo.

· Si $\mu = -4$ $\quad M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$|M(f, B_u)| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Así $Im(f_{-4}) = L(\{(1,3,-1), (0,4,-4)\})$ Puesto que $(1,3,-1)$ y $(0,4,-4)$ son linealmente independiente.

Calculemos base $ker(f_{-4})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 4y - 2z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{array} \right\} 4y - 2z = 0. \qquad \begin{array}{l} \text{Sea } z = \alpha \\ y = \frac{1}{2}\alpha \end{array}$$

Base $ker(f_{+4}) = \{(0, \frac{1}{2}, 1)\}$ f no es isomorfismo

• Si $\mu = 4$ $\quad M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 6 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$|M(f_4, B_c)| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(f_4) = L(\{(1,3,-1),(0,12,4)\})$

puesto que $(1,3,-1)$ y $(0,12,4)$ son l.i.

Calculamos base $\ker(f_4)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 6 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 12y + 6z = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4y + 2z = 0 \\ \text{si } z = \alpha;\ y = -\frac{1}{2}\alpha \end{array}$

Base del $\ker(f_4) = \{(0, -\frac{1}{2}, 1)\}$ y f no es isomorfismo.

b) si $\mu \neq \pm 4$, $\dim(\operatorname{Im}(f_\mu)) = 3$ $\quad \dim(\ker(f_\mu)) = 0$

$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_\mu) + \ker(f_\mu)) = 3$

$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_\mu) + \ker(f_\mu)) = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_\mu)) + \dim_{\mathbb{R}}(\ker(f_\mu)) - \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_\mu) \cap \ker(f_\mu))$

$3 = 3 + 0 + \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_\mu) \cap \ker(f_\mu))$

$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_\mu) \cap \ker(f_\mu)) = 0$ y por tanto $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}(f_\mu) \oplus \ker(f_\mu)$

$\operatorname{Im}(f_\mu) \cap \ker(f_\mu) = \{0\}$ $\quad \operatorname{Im}(f_\mu) + \ker(f_\mu) = L(\{(1,3,-1),(0,\mu+8,\mu),(0,\mu+2,2)\})$

$\forall \mu \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

• Si $\mu = -4$

$\operatorname{Im}(f_{-4}) = L(\{(1,3,-1),(0,4,-4)\})$ $\quad \ker(f_{-4}) = L(\{(0,\frac{1}{2},1)\}) = L(\{(0,1,2)\})$

$\operatorname{Im}(f_{-4}) + \ker(f_{-4}) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 4 = 12 \neq 0$ son l.i.

$\operatorname{Im}(f_{-4}) + \ker(f_{-4}) = L(\{(1,3,-1),(0,4,-4),(0,1,2)\})$

$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_{-4}) \cap \ker(f_{-4})) = 0$ (Análogo al apartado anterior)

$\operatorname{Im}(f_{-4}) \cap \ker(f_{-4}) = \{0\}$

Y podemos afirmar que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}(f_{-4}) \oplus \ker(f_{-4})$

Si $\mu = 4$

$Im(f_4) = L(\{(1,3,-1),(0,12,4)\})$ $\quad$ $Ker(f_4) = L(\{(0,-\frac{1}{2},1)\}) = L(\{(0,-1,2)\})$

$Im(f_4) + Ker(f_4) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 24+4 = 28 \neq 0$ Son l.i.

Así, $Im(f_4) + Ker(f_4) = L(\{(1,3,-1),(0,12,4),(0,-1,2)\})$

Análogamente $\dim_{\mathbb{R}} Im(f_4) \cap Ker(f_4) = 0$

$Im(f_4) \cap Ker(f_4) = \{0\}$ $\quad$ $\mathbb{R}^3 = Im(f_4) \oplus Ker(f_4)$

c) $M(f_\mu, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & \mu+8 & \mu+2 \\ -1 & \mu & 2 \end{pmatrix}$

$M(f^t, B_c^*) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & \mu+8 & \mu \\ 0 & \mu+2 & 2 \end{pmatrix}$

$Ker(f^t_\mu) = an(Im\, f_\mu)$ $\quad$ $Im(f^t_\mu) = an(Ker(f_\mu))$

Si $\mu \neq \pm 4$

$an(Im(f_\mu)) \Rightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = \dim_{\mathbb{R}}(Im(f_\mu)) + \dim_{\mathbb{R}}(an(Im(f_\mu)))$

$\dim_{\mathbb{R}}(an(Im(f_\mu))) = 0$

$\dim_{\mathbb{R}}(Ker(f^t_\mu)) = 0 \Rightarrow Ker(f^t_\mu) = \{0\}$

$an(Ker(f_\mu))$