Relación II Métodos Númericos I

Javier Gómez López

2020/2021

Ejercicio 1. ¿Es posible aplicar el método de Gauss al sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 8.8 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 3/4 \\ 4/5 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$

¿Por qué?

Para poder aplicar el método de Gauss hasta el paso $n = dim(\text{Matriz})$ se debe comprobar si las submatrices principales de orden $k = 1, \ldots, n$ son regulares, es decir, sus determinantes son distintos de 0.

Observamos que $n = 5$. Empezamos a comprobar:

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$$

$$det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$$

Observamos que A_3 no es regular y por tanto el método de Gauss no se puede aplicar en este sistema hasta el paso $n = 5$.

Ejercicio 2. Describe en forma de algoritmo la obtención, cuando es factible, de la factorización LU tipo Crout de una matriz regular. Prográmalo y aplicalo a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 & 0 & 0 & 1.1 & 0.55 & 1.1 \\ 2 & 5.2 & 6 & 1.2 & 1.2 & 3.2 & 2.2 & 2 \\ 3 & 6 & 10.3 & 0.78 & 0 & 3.91 & 2.54 & 4.17 \\ 0 & 1 & 0.6 & 2.76 & 3.8 & 2.82 & 4.28 & 1.94 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6.5 & 3 & 6.5 & 2 \\ 1 & 3 & 3.7 & 2.42 & 3 & 5.09 & 15.26 & 15.43 \\ 0.5 & 2 & 2.3 & 3.48 & 6 & 11.06 & 57.59 & 60.92 \\ 1 & 2 & 3.9 & 1.54 & 2 & 10.63 & 60.22 & 69.61 \end{bmatrix}$$

Resuelve a partir de esta factorización el sistema que tiene a esta matriz por matriz de coeficientes y por vector de términos independientes $[1,0,-1,0,-2,1,2,2]^T$

Para que una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ admita factorización de Crout esta debe admitir factorización LU. Suponemos que así es. Ahora pasamos a describir el algoritmo:

- Datos: $N \geq 1$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regular
- $U_{11} = \cdots = U_{NN} = 1$
- $i = 1, \ldots, N$

$$j = 1, \ldots, N \Rightarrow l_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} \cdot l_{jk}$$

y supuesto que $l_{ii} \neq 0$

$$j = i+1, \ldots, N \Rightarrow u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{kj} \cdot l_{ik} \right)$$

Ahora resolvemos el sistema usando *Máxima*:

(%i3) A: matrix([1.1,2.2,3.3,0,0,1.1,0.55,1.1], [2,5.2,6,1.2,1.2,3.2,2.2,2], [3,6,10.3,0.78,0,3.91,2.54,4.17], [0,1,0.6,2.76,3.8,2.82,4.28,1.94], [0,1,0,3,6.5,3,6.5,2], [1,3,3.7,2.42,3,5.09,15.26,15.43], [0.5,2,2.3,3.48,6,11.06,57.59,60.92], [1,2,3.9,1.54,2,10.63,60.22,69.61]);

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 & 0 & 0 & 1.1 & 0.55 & 1.1 \\ 2 & 5.2 & 6 & 1.2 & 1.2 & 3.2 & 2.2 & 2 \\ 3 & 6 & 10.3 & 0.78 & 0 & 3.91 & 2.54 & 4.17 \\ 0 & 1 & 0.6 & 2.76 & 3.8 & 2.82 & 4.28 & 1.94 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6.5 & 3 & 6.5 & 2 \\ 1 & 3 & 3.7 & 2.42 & 3 & 5.09 & 15.26 & 15.43 \\ 0.5 & 2 & 2.3 & 3.48 & 6 & 11.06 & 57.59 & 60.92 \\ 1 & 2 & 3.9 & 1.54 & 2 & 10.63 & 60.22 & 69.61 \end{pmatrix} \quad \text{(A)}$$

(%i4) b:[1,0,-1,0,-2,1,2,2];

$$[1,0,-1,0,-2,1,2,2] \quad \text{(b)}$$

(%i5) U:ident(matrix_size(A)[1]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(U)}$$

(%i6) L:genmatrix(lambda([i,j],0), matrix_size(A)[1],matrix_size(A)[1]);

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{L}$$

(%i7) N:matrix_size(A)[1];

$$8 \tag{N}$$

(%i8) i:1;

$$1 \tag{i}$$

(%i9) while i <= N do(for j:i thru N do(L[j,i]:A[j,i] - sum(U[k,i]*L[j,k], k, 1, i-1)), for j:i+1 thru N do(U[i,j]:(1/L[i,i])*(A[i,j] - sum(U[k,j]*L[i,k], k, 1, i-1))),i:i+1);

(%i10) U;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.0 & 2.99999999999 & 0 & 0 & 1.0 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & 1 & 7.4014868308310^{-16} & 0.999999999999 & 0.999999999999 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.599999999999 & -0.0 & 0.699999999999 & 0.799999999999 & 0.899999999 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.99999999999 & 1.0 & 1.99999999999 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.960594732333745 10^{-16} & 0.999999999999 & -5.9211894646674911 0^{-16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7.00000000001 & 8.000000002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.999999999958 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{\%o10}$$

(%i11) L;

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0.0 & 1.300000000000002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5999999999999992 & 1.400000000000001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7.4014868308343761 0^{-16} & 2.0 & 1.500000000000002 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.0 & 0.6999999999999997 & 1.0 & 0.0 & 1.599999999999999 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.7999999999999994 & 2.000000000000001 & 1.0 & 7.0 & 1.699999999999995 & 0 \\ 1 & 0.0 & 0.9000000000000004 & 1.0 & 0.0 & 8.0 & 0.9999999999999929 & 1.799999999999997 \end{pmatrix} \tag{\%o11}$$

(%i12) L.U;

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 & 0.0 & 0.0 & 1.1 & 0.55 & 1.1 \\ 2.0 & 5.2 & 6.0 & 1.2 & 1.2 & 3.2 & 2.2 & 2.0 \\ 3.0 & 6.0 & 10.3 & 0.78 & 0.0 & 3.91 & 2.54 & 4.17 \\ 0.0 & 1.0 & 0.6 & 2.76 & 3.8 & 2.82 & 4.28 & 1.94 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 3.0 & 6.5 & 3.0 & 6.5 & 2.0 \\ 1.0 & 3.0 & 3.7 & 2.42 & 3.0 & 5.09 & 15.26 & 15.43 \\ 0.5 & 2.0 & 2.3 & 3.48 & 6.0 & 11.06 & 57.59 & 60.92 \\ 1.0 & 2.0 & 3.9 & 1.54 & 2.0 & 10.62999999999999 & 60.22 & 69.61 \end{pmatrix} \tag{\%o12}$$

(%i13) y:makelist(0,i,1,N);

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \tag{y}$$

(%i14) x:y;

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \tag{x}$$

(%i15) for i:1 thru N do (y[i]:(1/L[i,i])*(b[i]-sum(L[i,j]*y[j],j,1,i-1)));

(% i16) for j:N-1 step -1 thru 1 do(x[j]:(1/U[j,j])*(y[j]-sum(U[j,i]*x[i],i,j+1,N)));

(% i17)

x;

[41.34023019464165,-9.582148788031109,-9.739728735316927,1.884874928992429,
-4.838608015078577,9.58671774848256,1.434012610483188,-2.351379557261914]

Ejercicio 3. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 16 & 23 \\ 4 & 12 & 24 & 37 \end{bmatrix}$$

y los vectores

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

resuelve los cuatro sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, mediante el método más eficiente.

Puesto que tenemos que resolver cuatro sistemas de ecuaciones lineales con una misma matriz de coeficientes, lo más eficiente sería expresar dicha matriz como un producto de dos matrices triangulares, una superior y otra inferior.

No podemos utilizar el método de Cholesky para factorizar dicha matriz puesto que no es simétrica. Utilizando el algoritmo de el ejercicio anterior en *Máxima*, factorizamos la matriz **A**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$\longrightarrow$ A: matrix([1,2,3,4],[2,5,8,11],[3,9,16,23],[4,12,24,37]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 16 & 23 \\ 4 & 12 & 24 & 37 \end{pmatrix} \qquad (A)$$

$\longrightarrow$ U:ident(matrix_size(A)[1]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (U)$$

$\longrightarrow$ L:genmatrix(lambda([i,j],0), matrix_size(A)[1],matrix_size(A)[1]);

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (L)$$

$\longrightarrow$ N:matrix_size(A)[1];

$$4 \qquad (N)$$

$\longrightarrow$ i:1;

$$1 \tag{i}$$

$\longrightarrow$ while i <= N do(for j:i thru N do(L[j,i]:A[j,i] - sum(U[k,i]*L[j,k], k, 1, i-1)),for j:i+1 thru N do(U[i,j]:(1/L[i,i])*(A[i,j] - sum(U[k,j]*L[i,k], k, 1, i-1))),i:i+1);

$$\mathit{done} \tag{\% o6}$$

$\longrightarrow$ U;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{\% o7}$$

$\longrightarrow$ L;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{\% o8}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos cada sistema:

1. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$

$$\mathbf{L}y = b_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

(% i13) b:[1,4,10,16];

$$[1, 4, 10, 16] \tag{b}$$

(% i14) y:makelist(0,i,1,N);

$$[0, 0, 0, 0] \tag{y}$$

(% i15) x:y;

$$[0, 0, 0, 0] \tag{x}$$

(% i16) for i:1 thru N do (y[i]:(1/L[i,i])*(b[i]-sum(L[i,j]*y[j],j,1,i-1)));

$$\mathit{done} \tag{\% o16}$$

(%i17) y;

$$[1,2,1,0] \tag{\%o17}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(%i18) for j:N-1 step -1 thru 1 do(x[j]:(1/U[j,j])*(y[j]-sum(U[j,i]*x[i],i,j+1,N)));

$$done \tag{\%o18}$$

(%i19) x;

$$[-2,0,1,0] \tag{\%o19}$$

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$

$$\mathbf{L}y = b_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix}$$

(%i20) b:[1,5,13,19];

$$[1,5,13,19] \tag{b}$$

(%i21) y:makelist(0,i,1,N);

$$[0,0,0,0] \tag{y}$$

(%i22) x:y;

$$[0,0,0,0] \tag{x}$$

(%i23) for i:1 thru N do (y[i]:(1/L[i,i])*(b[i]-sum(L[i,j]*y[j],j,1,i-1)));

$$done \tag{\%o23}$$

(%i24) y;

$$[1,3,1,-1] \tag{\%o24}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(%i17) for j:N-1 step -1 thru 1 do(x[j]:(1/U[j,j])*(y[j]-sum(U[j,i]*x[i],i,j+1,N)));

$$done \tag{\%o17}$$

(%i18) x;

$$[-4, 0, 3, -1] \tag{\%o18}$$

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_3$

$$\mathbf{L}y = b_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

(%i19) b:[1,3,7,13];

$$[1, 3, 7, 13] \tag{b}$$

(%i20) y:makelist(0,i,1,N);

$$[0, 0, 0, 0] \tag{y}$$

(%i21) x:y;

$$[0, 0, 0, 0] \tag{x}$$

(%i22) for i:1 thru N do (y[i]:(1/L[i,i])*(b[i]-sum(L[i,j]*y[j],j,1,i-1)));

$$done \tag{\%o22}$$

(%i23) y;

$$[1, 1, 1, 1] \tag{\%o23}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(% i24) for j:N-1 step -1 thru 1 do(x[j]:(1/U[j,j])*(y[j]-sum(U[j,i]*x[i],i,j+1,N)));

$$done \tag{\% o24}$$

(% i25) x;

$$[0, 0, -1, 1] \tag{\% o25}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_4$

$$\mathbf{L}y = b_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(% i26) b:[0,1,4,9];

$$[0, 1, 4, 9] \tag{b}$$

(% i27) y:makelist(0,i,1,N);

$$[0, 0, 0, 0] \tag{y}$$

(% i28) x:y;

$$[0, 0, 0, 0] \tag{x}$$

(% i29) for i:1 thru N do (y[i]:(1/L[i,i])*(b[i]-sum(L[i,j]*y[j],j,1,i-1)));

$$done \tag{\% o29}$$

(% i30) y;

$$[0, 1, 1, 1] \tag{\% o30}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(% i31) for j:N-1 step -1 thru 1 do(x[j]:(1/U[j,j])*(y[j]-sum(U[j,i]*x[i],i,j+1,N)));

$$done \tag{\% o31}$$

(% i32) x;

$$[-1,0,-1,1] \tag{\% o32}$$

$$x=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. Supongamos que una matriz regular y tridiagonal

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_N & a_N \end{bmatrix}$$

admite una descomposición LU tipo Doolittle. Prueba que las correspondientes triangulares adoptan la forma

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & l_{N-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & l_N & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{U}=\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & d_N \end{bmatrix}$$

con

$$d_1=a_1$$

e

$$i=2,\ldots,N \Rightarrow l_i=\frac{b_i}{d_{i-1}}, \quad d_i=a_i-l_ic_{i-1}$$

$$\mathbf{LU}=\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2d_1 & l_2c_1+d_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ l_3d_2 & l_3c_2+d_3 & c_3 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & l_{N-3}d_{N-2} & l_{N-1}c_{N-2}+d_{N+1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & l_Nd_{N-1} & l_Nc_{N-1}+d_N \end{bmatrix}$$

Primera fila: $d_1=a_1 \Rightarrow$ Coincide con la primera fila de **A**.
Después: $\forall i=2,\ldots,N-1$, las filas son de la forma:

$$\underset{\text{Lugar } i-1}{l_id_{i-1}} \quad \underset{\text{Lugar } i}{l_ic_{i-1}+d_i} \quad \underset{\text{Lugar } i+1}{c_i}$$

La posición $i+1$ se cumple en $\mathbf{A}$. A la derecha y a la izquierda de los elementos mencionados hay ceros.

Así, tenemos:

$$l_i d_{i-1} = \frac{b_i}{d_{i-1}} \cdot d_{i-1} = b_i \Rightarrow \text{Lo cual se cumple en } \mathbf{A}$$

$$l_i c_{i-1} + d_i = l_i c_{i-1} + a_i - l_i c_{i-1} = a_i \Rightarrow \text{Lo cual también se cumple en } \mathbf{A}$$

Ahora comprobamos la última fila:

$$l_N d_{N-1} = \frac{b_N}{d_{N-1}} \cdot d_{N-1} = b_N \qquad l_N c_{N-1} + d_N = l_N c_{N-1} + a_N - l_N c_{N-1} = a_N$$

Así, queda demostrado que la factorización tipo Doolittle de $\mathbf{A}$ es $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

Ejercicio 5. Decide razonadamente si la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{bmatrix}$$

es o no definida positiva, y aplica tu argumento para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6+\sqrt{2} \\ 26+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Para comprobar si es o no definida positiva podemos hacerlo mediante los métodos enseñados en la asignatura Geometría II o bien comprobando si admite factorización tipo Cholesky. Optaremos por el segundo método haciendo uso de *Máxima*:

(% i3) A: matrix([2,sqrt(2),sqrt(2)],[sqrt(2),2,5],[sqrt(2),5,18]);

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(% i5) U_t:cholesky(A);

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{B}$$

(% i6) U:transpose(B);

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{C}$$

(% i8) U_t.U;

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{pmatrix} \tag{\% o8}$$

Concluimos que:

$$\exists \mathbf{U} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{A} \text{ admite factorización Cholesky} \Rightarrow \mathbf{A} \text{ definida positiva}$$

Ahora resolvemos el sistema que se plantea en el enunciado:

$$\mathbf{U}^T y = \begin{bmatrix} 2 \\ 6+\sqrt{2} \\ 26+\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6+\sqrt{2} \\ 26+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ b:[2,6+sqrt(2),26+sqrt(2)];

$$[2, \sqrt{2}+6, \sqrt{2}+26] \tag{b}$$

(% i15) N:matrix_size(A)[1];

$$3 \tag{N}$$

(% i20) y:makelist(0,i,1,N);

$$[0,0,0] \tag{y}$$

(% i17) x:y;

$$[0,0,0] \tag{x}$$

(% i21) for i:1 thru N do (y[i]:(1/U_t[i,i])*(b[i]-sum(U_t[i,j]*y[j],j,1,i-1)));

$$done \tag{\% o21}$$

(% i22) y;

$$[\sqrt{2}, 6, 2] \tag{\% o22}$$

$$y = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(% i29) for j:N-1 step -1 thru 1 do(x[j]:(1/U[j,j])*(y[j]-sum(U[j,i]*x[i],i,j+1,N)));

$$done \tag{\% o29}$$

(% i30) x;

$$[1, -2, 2] \tag{\% o30}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

cuya solución exacta es $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

- Demuestra que los correspondientes métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier elección de la estimación inicial.

  Sea B la matriz asociada al método de Jacobi y C al de Gauss-Seidel. Comprobamos que $\rho(B) < 1$ y $\rho(C) < 1$, lo cual es suficiente para que los métodos converjan:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{7} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(B - \lambda I) = \lambda^2 + \frac{4}{35} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\sqrt{35}} i \Rightarrow \rho(B) < 1$$

$$C = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{4}{35} \end{bmatrix} \Rightarrow det(C - \lambda I) \Rightarrow \lambda^2 + \frac{4}{35}\lambda = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda & = & 0 \\ \lambda & = & \frac{4}{35} \end{array} \right. \Rightarrow \rho(C) = \frac{4}{35} < 1$$

- Si modificamos el sistema anterior aplicándolo una transformación elemental que consiste en intercambiar de posición sus ecuaciones obtenemos este otro equivalente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

  Estudia la convergencia de los métodos de Jacaboi y Gauss-Seidel asociados.

  Repetimos el procedimiento del apartado anterior:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{35}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{35}}{2} i \Rightarrow \rho(B) = \frac{\sqrt{35}}{2} > 1$$

$$C = (D+E)^{-1} + F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{35}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow det(C - \lambda I) = \lambda^2 + \frac{35}{4}\lambda = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda & = & 0 \\ \lambda & = & \frac{35}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \rho(C) = \frac{35}{4} > 1$$

  Por tanto, concluimos que ninguno de los dos métodos converge $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

- Ilustra los resultados anteriores realizando 5 iteraciones con ambos métodos iterativos, partiendo en el primer sistema de la estimación inicial de $\mathbf{x}_0 = [-50, -40]^T$ y en el seguno de $\mathbf{x}_0 = [1.1,\ 1.1]^T$.

  Empezamos con el método de Jacobi:

(%i1) A: matrix([5,-2],[2,7]);

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(%i2) b:[13,13];

$$[13, 13] \tag{b}$$

(%i3) N:matrix_size(A)[1];

$$2 \tag{N}$$

(%i4) x0:[-50,-40];

$$[-50, -40] \tag{x0}$$

(%i5) x:x0;

$$[-50, -40] \tag{x}$$

(%i6) for t:1 thru 5 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A[i,i])*(b[i]-sum(A[i,j]
*x0[j],j,1,i-1)-sum(A[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);

$$\mathit{done} \tag{\%o6}$$

(%i8) float(x);

$$[2.997202232403165, 1.000799362170524] \tag{\%o8}$$

Ahora pasamos al método de Gauss-Seidel:

(%i9) A: matrix([5,-2],[2,7]);

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(%i10) b:[13,13];

$$[13, 13] \tag{b}$$

(%i11) N:matrix_size(A)[1];

$$2 \tag{N}$$

(%i12) x0:[-50,-40];

$$[-50, -40] \tag{x0}$$

(% i13) x:x0;

$$[-50, -40] \tag{x}$$

(% i15) for m:1 thru 5 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A[i,i])
*(b[i]-sum(A[i,j]*x[j],j,1,i-1)-sum(A[i,j]*x0[j],j,i+1,N)),x0[i]:x[i]));

$$done \tag{\% o15}$$

(% i16) float(x);

$$[2.997202232403165, 1.000799362170524] \tag{\% o16}$$

Ahora pasamos al segundo sistema y empezamos con el método de Jacobi:

(% i17) A: matrix([2,7],[5,-2]);

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(% i18) b:[13,13];

$$[13, 13] \tag{b}$$

(% i19) N:matrix_size(A)[1];

$$2 \tag{N}$$

(% i21) x0:[1.1,1.1];

$$[1.1, 1.1] \tag{x0}$$

(% i22) x:x0;

$$[1.1, 1.1] \tag{x}$$

(% i24) for m:1 thru 5 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A[i,i])
*(b[i]-sum(A[i,j]*x0[j],j,1,i-1)-sum(A[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);;

$$done \tag{\% o24}$$

(% i25) float(x);

$$[-2048.635742187504, -5128.089355468761] \tag{\% o25}$$

Y ahora realizamos el método de Gauss-Seidel:

(%i17) A: matrix([2,7],[5,-2]);

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(%i18) b:[13,13];

$$[13, 13] \tag{b}$$

(%i19) N:matrix_size(A)[1];

$$2 \tag{N}$$

(%i26) x0:[1.1,1.1];

$$[1.1, 1.1] \tag{x0}$$

(%i27) x:x0;

$$[1.1, 1.1] \tag{x}$$

(%i28) for m:1 thru 5 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A[i,i])*
(b[i]-sum(A[i,j]*x[j],j,1,i-1)-sum(A[i,j]*x0[j],j,i+1,N)),x0[i]:x[i]));;

$$\textit{done} \tag{\%o28}$$

(%i29) float(x);

$$[-2048.635742187504, -5128.089355468761] \tag{\%o29}$$

Ejercicio 7. Para las matrices $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ de la sección 2.2, ilustra con los sistemas de ecuaciones lineales que se descrbien a continuación la velocidad de convergencia absoluta calculada para dichas matrices. En concreto, considera los dos sistemas s_1 y s_2 cuyas matrices de coeficientes son $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, respectivamente, y tienen por vectores de términos independientes los que hacen que la solución sea $\mathbf{x} = [1, 1, 1]^T$. Construye para estos sistemas s_1 y s_2 los 4 y 6 primeros iteradores, respectivamente, generados tanto por el método de Jacobi como por el de Gauss-Seidel, partiendo de la estimación inicial nula.

Los datos que se proporcionan en la sección 2.2 son:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_1$:

$$\rho_{Jacobi} = \rho(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})) = 0.444$$

$$\rho_{Gauss-Seidel} = \rho((\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{F}) = 0.019$$

$\mathbf{A}_2$:

$$\rho_{Jacobi} = \rho(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{F})) = 0.641$$
$$\rho_{Gauss-Seidel} = \rho((\mathbf{D}-\mathbf{E})^{-1}\mathbf{F}) = 0.775$$

Ahora construyamos los sistemas s_1 y s_2:

s_1:

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x} = b_1 \quad \mathbf{x} = [1,1,1]^T$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b_1 \Rightarrow b_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ -14 \end{bmatrix}$$

s_2:

$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} = b_2 \quad \mathbf{x} = [1,1,1]^T$$
$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b_2 \Rightarrow b_2 = \begin{bmatrix} 22 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ahora realizamos las 4 primeras iteraciones para ambos métodos, donde $\mathbf{x}_0 = [0,0,0]^T$:

$\mathbf{A}_1$:

- Jacobi:

(% i5) A1: matrix([4,1,1],[2,-9,0],[0,-8,-6]);

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} \tag{A1}$$

(% i6) b1:[6,-7,-14];

$$[6, -7, -14] \tag{b1}$$

(% i7) N:matrix_size(A1)[1];

$$3 \tag{N}$$

(% i17) x0:[0,0,0];

$$[0, 0, 0] \tag{x0}$$

(% i18) x:x0;

$$[0, 0, 0] \tag{x}$$

(% i19) for m:1 thru 4 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A1[i,i])*
(b1[i]-sum(A1[i,j]*x0[j],j,1,i-1)-sum(A1[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);

$$done \tag{\% o19}$$

(% i21) float(x);

$$[1.000003175328964, 1.000000705628658, 0.9999990591617884] \tag{\% o21}$$

- Gauss-Seidel:

(% i31) for m:1 thru 4 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A1[i,i])*
(b1[i]-sum(A1[i,j]*x[j],j,1,i-1)-sum(A1[i,j]*x0[j],j,i+1,N)),x0[i]:x[i]));

$$done \tag{\% o31}$$

(% i33) float(x);

$$[1.000003175328964, 1.000000705628658, 0.9999990591617884] \tag{\% o33}$$

$\mathbf{A}_2$:

- Jacobi:

(% i44) A2: matrix([7,6,9],[4,5,-4],[-7,-3,8]);

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix} \tag{A2}$$

(% i45) b2:[22,5,-2];

$$[22, 5, -2] \tag{b2}$$

(% i46) N:matrix_size(A1)[1];

$$3 \tag{N}$$

(% i47) x0:[0,0,0];

$$[0, 0, 0] \tag{x0}$$

(% i48) x:x0;

$$[0, 0, 0] \tag{x}$$

(% i49) for m:1 thru 4 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A2[i,i])*
(b2[i]-sum(A2[i,j]*x0[j],j,1,i-1)-sum(A2[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);

$$done \tag{\% o49}$$

(% i50) float(x);

$$[0.1672771436380674, 1.382320449812578, 0.4147376693630258] \tag{\% o50}$$

- Gauss-Seidel:

(%i53) for m:1 thru 4 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A2[i,i])
*(b2[i]-sum(A2[i,j]*x[j],j,1,i-1)-sum(A2[i,j]*x0[j],j,i+1,N)),x0[i]:x[i]));

$$done \tag{\%o53}$$

(%i54) float(x);

$$[0.1672771436380674, 1.382320449812578, 0.4147376693630258] \tag{\%o54}$$

Ahora realizamos las 6 primeras iteraciones para ambos métodos, donde $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$:
$\mathbf{A}_1$:

- Jacobi:

(%i55) A1: matrix([4,1,1],[2,-9,0],[0,-8,-6]);

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} \tag{A1}$$

(%i61) b1:[6,-7,-14];

$$[6, -7, -14] \tag{b1}$$

(%i62) N:matrix_size(A1)[1];

$$3 \tag{N}$$

(%i63) x0:[0,0,0];

$$[0, 0, 0] \tag{x0}$$

(%i64) x:x0;

$$[0, 0, 0] \tag{x}$$

(%i65) for m:1 thru 6 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A1[i,i])
*(b1[i]-sum(A1[i,j]*x0[j],j,1,i-1)-sum(A1[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);

$$done \tag{\%o65}$$

(%i66) float(x);

$$[1.000000001088933, 1.000000000241985, 0.9999999996773532] \tag{\%o66}$$

- Gauss-Seidel:

(%i72) for m:1 thru 6 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A1[i,i])
*(b1[i]-sum(A1[i,j]*x[j],j,1,i-1)-sum(A1[i,j]*x0[j],j,i+1,N)),x0[i]:x[i]));

$$done \tag{\%o72}$$

(%i73) float(x);

$$[1.000000001088933, 1.000000000241985, 0.9999999996773532] \tag{\%o73}$$

$\mathbf{A}_2$:

- Jacobi:

(%i75) A2: matrix([7,6,9],[4,5,-4],[-7,-3,8]);

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix} \tag{A2}$$

(%i76) b2:[22,5,-2];

$$[22, 5, -2] \tag{b2}$$

(%i77) N:matrix_size(A1)[1];

$$3 \tag{N}$$

(%i78) x0:[0,0,0];

$$[0, 0, 0] \tag{x0}$$

(%i79) x:x0;

$$[0, 0, 0] \tag{x}$$

(%i80) for m:1 thru 6 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A2[i,i])
*(b2[i]-sum(A2[i,j]*x0[j],j,1,i-1)-sum(A2[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);;

$$done \tag{\%o80}$$

(%i81) float(x);

$$[1.604310877645299, 0.5714857110100808, 1.368079159568417] \tag{\%o81}$$

- Gauss-Seidel:

(% i82) A2: matrix([7,6,9],[4,5,-4],[-7,-3,8]);

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix} \tag{A2}$$

(% i83) b2:[22,5,-2];

$$[22, 5, -2] \tag{b2}$$

(% i84) N:matrix_size(A1)[1];

$$3 \tag{N}$$

(% i85) x0:[0,0,0];

$$[0, 0, 0] \tag{x0}$$

(% i86) x:x0;

$$[0, 0, 0] \tag{x}$$

(% i87) for m:1 thru 6 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A2[i,i])
*(b2[i]-sum(A2[i,j]*x[j],j,1,i-1)-sum(A2[i,j]*x0[j],j,i+1,N)),x0[i]:x[i]));

$$\mathit{done} \tag{\% o87}$$

(% i88) float(x);

$$[1.604310877645299, 0.5714857110100808, 1.368079159568417] \tag{\% o88}$$

Ejercicio 8. Decide razonadamente cuáles de los siguientes métodos iterativos es convergente para cualquier estimación inicial:

- Jacobi y Gauss-Seidel para el sistema $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 9/2 & 0.5 & -1 \\ 1 & 2 & 3000 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi \\ \sqrt{21} \\ -1234. \end{bmatrix}$

  En este caso, podemos obervar que:

$$|3| > |1| + |0| + |-1| = 2$$
$$|\frac{9}{2}| > |1| + |0.5| + |-1| = \frac{5}{2}$$
$$|3000| > |1| + |2| + |4| = 7$$
$$|40| > |1| + |2| + |3| = 6$$

  Por lo tanto, deducimos que la matriz de coeficientes es diagonalmente estrictamente dominante, luego los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen $\forall x \in \mathbb{R}^4$ inicial.

- Jacobi y Gauss-Seidel para el sistema $\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

  Sea B la matriz asociada al método de Jacobi y C la matriz asociada al método de Gauss-Seidel.

$$D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda &= -1.2 \\ \lambda &= 0.31 \\ \lambda &= 0.9 \end{cases} \Rightarrow \rho(B) = 1.202 > 1 \Rightarrow \text{El método no converge } \forall x_0 \in \mathbb{R}^4$$

$$C = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \Rightarrow det(C - \lambda I) = 0 \Rightarrow 6\lambda^3 - 7\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda &= 0 \\ \lambda &= 2/3 \\ \lambda &= 1/3 \end{cases} \Rightarrow \rho(C) = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{El método converge } \forall x_0 \in \mathbb{R}^4$$

Ejercicio 9. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- prueba que el correspondiente método de Jacobi es convergente y mide su velocidad de convergencia.

  Sean

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -9/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -4/5 \\ -7/11 & -3/11 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(B-\lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 0.97 \Rightarrow \rho(B) = 0.97 < 1$$

  Concluimos que efectivamente el método converge pero muy lentamente pues el valor del radio espectral está muy próximo a 1.

- aplica el método de Jacobi al sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $\mathbf{x}_0 = [0,0,0]^T$ y realizando 12, 45, 100 iteraciones y,

  Comenzamos con 12 iteraciones:

  (% i3) A: matrix([10,9,1],[1,5,4],[7,3,11]);

  $$\begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 11 \end{pmatrix} \tag{A}$$

  (% i4) b:[27,7,2];

  $$[27,7,2] \tag{b}$$

  (% i5) N:matrix_size(A)[1];

  $$3 \tag{N}$$

  (% i6) x0:[0,0,0];

  $$[0,0,0] \tag{x0}$$

  (% i7) x:x0;

  $$[0,0,0] \tag{x}$$

  (% i8) for m:1 thru 12 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A[i,i])*
  (b[i]-sum(A[i,j]*x0[j],j,1,i-1)-sum(A[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);;

  $$done \tag{\% o8}$$

  (% i9) float(x);

  $$[1.026185619730594, 2.00197110660501, -1.017201150720835] \tag{\% o9}$$

  Continuamos con 45:

  (% i10) x0:[0,0,0];

  $$[0,0,0] \tag{x0}$$

  (% i11) x:x0;

  $$[0,0,0] \tag{x}$$

  (% i12) for m:1 thru 45 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A[i,i])*
  (b[i]-sum(A[i,j]*x0[j],j,1,i-1)-sum(A[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);;

  $$done \tag{\% o12}$$

(% i13) float(x);

$$[0.9999999289074133, 2.000000013630881, -0.999999958476776] \quad (\%\ o13)$$

Y finalizamos con 100:

(% i14) x0:[0,0,0];

$$[0, 0, 0] \quad (x0)$$

(% i15) x:x0;

$$[0, 0, 0] \quad (x)$$

(% i16) for m:1 thru 100 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A[i,i])*
(b[i]-sum(A[i,j]*x0[j],j,1,i-1)-sum(A[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);;

$$done \quad (\%\ o16)$$

(% i17) float(x);

$$[1.0, 2.0, -1.0] \quad (\%\ o17)$$

- calcula la solución exacta mediante un adecuado comando de Maxima. ¿Guardan relación los razonamientos del primer apartado y los resultados numéricos del segundo? ¿Por qué?

(% i24) linsolve([10*x+9*y+z=27, x+5*y+4*z=7, 7*x+3*y+11*z=2], [x,y,z]);

$$[x = 1, y = 2, z = -1] \quad (\%\ o24)$$

Comprobamos que la solución coincide con lo calculado tras 100 iteraciones, lo que confirma, primero, que el método converge a la solución, y 2º, que la velocidad de convergencia es baja puesto que toma 100 iteraciones encontrar la solución.

Ejercicio 10. Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 2/11 & 3/7 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 544/770 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix}$$

- estudia la convergencia del correspondiente método de Gauss-Seidel,

  Sean:

$$D = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -2/11 & -3/7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = (D - E)^{-1} F = \begin{bmatrix} 0 & -20/11 & -30/7 \\ 0 & 16/19 & 92/35 \\ 0 & 23/22 & 387/140 \end{bmatrix} \Rightarrow det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda(\lambda^2 - \frac{9593}{2660}\lambda + \frac{157}{931}) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda & = & 0 \\ \lambda & = & 3.55 \\ \lambda & = & 0.04 \end{array} \right. \Rightarrow \rho(B) = 3.55 > 1 \Rightarrow \text{El método no coverge } \forall x \in \mathbb{R}^3$$

- aplica el método de Gauss-Seidel al sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $\mathbf{x}_0 = [0,0,0]^T$ y realizando 9 iteraciones y

(% i58) A: matrix([1/10,2/11,3/7],[4,5,4],[7,3,8]);

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{11} & \frac{3}{7} \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(% i59) b:[547/770,13,18];

$$[\frac{547}{770}, 13, 18] \tag{b}$$

(% i60) N:matrix_size(A)[1];

$$3 \tag{N}$$

(% i62) x0:[0,0,0];

$$[0,0,0] \tag{x0}$$

(% i63) x:x0;

$$[0,0,0] \tag{x}$$

(% i64) for m:1 thru 9 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/A[i,i])*
(b[i]-sum(A[i,j]*x[j],j,1,i-1)-sum(A[i,j]*x0[j],j,i+1,N)),x0[i]:x[i]));

$$done \tag{\% o64}$$

(% i65) x;

$$[\frac{782339490641636322250071725356 59}{2435883377898788787200000000}, -\frac{6570922473405251719918163288554 23}{3044854222373485984000000000}, -\frac{9748277987433479161929933220607787}{4871766755797577574400000000}] \tag{\% o65}$$

(% i66) float(x);

$$[321172.8023352613, -215804.1729920051, -200097.3871713517] \tag{\% o66}$$

- resuelve el sistema anterior mediante un adecuado comando de Maxima y halla el error relativo (norma $||\cdot||_\infty$ del máximo) que se comete al tomar $\mathbf{x}_9$ como aproximación de la solución exacta $\mathbf{x}$. Interpreta dicho error a la luz del primer apartado.

(% i69) linsolve([(1/10)*x+(2/11)*y+(3/7)*z=(547/770), 4*x+5*y+4*z=13,
7*x+3*y+8*z=18], [x,y,z]);

$$[x = 1, y = 1, z = 1] \tag{\% o69}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$x = [1,1,1], \quad x^* = [321172.8, -215804.17, -200097.38]$$

El error relativo se expresa como:

$$\frac{||x^* - x||}{||x||} \tag{1}$$

Además:

$$|| \cdot ||_\infty = \max_{j=1,\dots,N} |x_j| \tag{2}$$

Por tanto:

$$||[321172.8, -215804.17, -200097.38]||_\infty = 321172.8$$

$$||[1,1,1]||_\infty = 1$$

Y el error relativo:

$$\frac{321172.8 - 1}{1} = 321171.8$$

Comprobamos que es un error relativo muy grande, lo cual tiene sentido pues el radio espectral de la correspondiente matriz de Gauss-Seidel era mucho mayor que 1, lo que nos muestra la velocidad de divergencia.

Ejercicio 11. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz regular con $a_{11} \cdots a_{NN} \neq 0$

- Comprueba que la correspondiente matriz del método de Jacobi $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})$ tiene norma infinito menor que estrictamente que 1 si, y solo si, $\mathbf{A}$ es diagonalmente estrictamente dominante.
- Deduce que si $\mathbf{A}$ es diagonalmente estrictamente dominante, entonces el método de Jacobi correspondiente es convergente, cualesquiera sean el vector de términos independientes y la estimación inicial fijados.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz estrictamente dominante, entonces:

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad i = 1, \dots N$$

De aquí:

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad i = 1, \dots, N$$

Ahora, sea B la matriz correspondiente al método de Jacobi y la norma de infinito:

$$||B||_\infty = \max_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|$$

Por la forma que tiene la matriz asociada a el método de Jacobi, podemos afirmar que la forma de B es:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1N}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2N}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{N1}}{a_{NN}} & -\frac{a_{N2}}{a_{NN}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que todos los elementos de cada fila es menor que 1, por lo tanto afirmamos que la norma infinito de la matriz es menor estrictamente que 1. Por otro resultado visto en clase, si cualquiera de las normas inducidas matriciales de una matriz es menor que 1, el método de Jacobi correspondiente converge para cualquier estimación inicial.

Ejercicio 12. Considera un sistema formado por 5 muelles alineados verticalmente y 4 cuerpos entre los mismos de masas $m_1 = 5kg$, $m_2 = 4kg$, $m_3 = 3kg$ y $m_4 = 2kg$, de forma que el extremo superior del muelle de arriba y el extremo inferior del que está abajo permanecen fijos: véase la figura adjunta. Suponemos además que los cuerpos están sometidos unicamente a la acción de sus pesos p_1, p_2, p_3, p_4 y que el sistema está en equilibrio.

- Sabiendo que los coeficientes de elasticidad de los muelles son $c_1 = 1Nw/m$, $c_2 = 1.1Nw/m$, $c_3 = 0.9Nw/m$, $c_4 = 0.2Nw/m$ y $c_5 = 3Nw/m$, expresa los desplazamientos x_1, x_2, x_3 y x_4 de los cuerpos en función de sus pesos mediante un conveniente sistema de ecuaciones lineales
$$\mathbf{Kx} = \mathbf{p}.$$

  Sean:
$$y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix}^T \text{ la fuerza de reacción de los muelles}$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T \text{ desplazamientos de los cuerpos}$$
$$p = \begin{bmatrix} m_1 g & m_2 g & m_3 g & m_4 g \end{bmatrix} \text{ los pesos}$$
$$d_1 = x_1 \quad d_2 = x_2 - x_1 \quad d_3 = x_3 - x_2 \quad d_4 = x_4 - x_3 \quad d_5 = -x_4$$

  Y definimos $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  La matriz de coeficientes de elasticidad es:
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

  Tenemos que por la ley de Hooke ($\mathbf{K}\triangle\mathbf{x} = \mathbf{F}$): $\mathbf{Cd} = \mathbf{y}$

  Como el sistema está en equilibrio
$$j = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow p_j = y_j - y_{j+1} \Leftrightarrow p = \mathbf{A}^T y$$

  Y tenemos que:
$$y^T d = y^T \mathbf{A} x = p^T x$$

  Recapitulando:
$$\mathbf{A}x = d \quad \mathbf{C}d = y \quad \mathbf{A}^T y = p \Rightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{CA}x = p$$

  Y podemos definir la matriz de rigidez como
$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T\mathbf{CA}$$

  Y calculamos K:

(% i1) A: matrix([1,0,0,0],[-1,1,0,0],[0,-1,1,0],[0,0,-1,1],[0,0,0,-1]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(% i2) C: matrix([1,0,0,0,0],[0,1.1,0,0,0],[0,0,0.9,0,0],[0,0,0,0.2,0],[0,0,0,0,3]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{C}$$

(% i4) K:transpose(A).C.A;

$$\begin{pmatrix} 2.1 & -1.1 & 0.0 & 0.0 \\ -1.1 & 2.0 & -0.9 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 & 1.1 & -0.2 \\ 0.0 & 0.0 & -0.2 & 3.2 \end{pmatrix} \tag{K}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2.1 & -1.1 & 0 & 0 \\ -1.1 & 2 & -0.9 & 0 \\ 0 & -0.9 & 1.1 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 & 3.2 \end{bmatrix}$$

- ¿Admite la matriz **K** de coeficientes, conocida en este contexto como matriz de rigidez, una factorización LU tipo Cholesky? En caso afirmativo determínala y úsala para resolver el sistema anterior.

(% i5) cholesky(K);

$$\begin{pmatrix} 1.449137674618944 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7590721152765896 & 1.193234898839924 & 0 & 0 \\ 0.0 & -0.7542521601362729 & 0.7287686045170759 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.2744355324314931 & 1.767677894453354 \end{pmatrix} \tag{\% o5}$$

Comprobamos que sí admite una factoriazión tipo Cholesky.

(% i9) Ut:cholesky(K);

$$\begin{pmatrix} 1.449137674618944 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7590721152765896 & 1.193234898839924 & 0 & 0 \\ 0.0 & -0.7542521601362729 & 0.7287686045170759 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.2744355324314931 & 1.767677894453354 \end{pmatrix} \tag{Ut}$$

(% i10) U:transpose(Ut);

$$\begin{pmatrix} 1.449137674618944 & -0.7590721152765896 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 1.193234898839924 & -0.7542521601362729 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0.7287686045170759 & -0.2744355324314931 \\ 0 & 0 & 0 & 1.767677894453354 \end{pmatrix} \quad (U)$$

(% i6) p:[5*9.8,4*9.8,3*9.8,2*9.8];

$$[49.0, 39.2, 29.4, 19.6] \quad (p)$$

(% i7) y:makelist(1,i,1,4);

$$[1, 1, 1, 1] \quad (y)$$

(% i8) x:y;

$$[1, 1, 1, 1] \quad (x)$$

(% i12) N:matrix_size(K)[1];

$$4 \quad (N)$$

(% i13) for i:1 thru N do (y[i]:(1/Ut[i,i])*(p[i]-sum(Ut[i,j]*y[j],j,1,i-1)));

$$done \quad (\% o13)$$

(% i15) for j:N-1 step -1 thru 1 do(x[j]:(1/U[j,j])*(y[j]-sum(U[j,i]*x[i],i,j+1,N)));

$$done \quad (\% o15)$$

(% i16) x;

$$[94.34071136313057, 135.5595398750675, 142.3825525007681, 26.08610931642149] \quad (\% o16)$$

Y concluimos que

$x = \begin{bmatrix} 94.34071136313057 & 135.5595398750675 & 142.3825525007681 & 26.08610931642149 \end{bmatrix}$

- Demuestra que tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel convergen hacia la solución del sistema, a pesar que de la matriz de rigidez no es diagonalmente estrictamente dominante, y calcula para cada uno de dichos métodos iterativos las 7 primeras iteraciones, partiendo de la estimación inicial $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0, 0]^T$.

  Sean

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.2 \end{bmatrix} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Si comprobamos que la matriz de cada método tiene un radio espectral menor estricto que 1, podremos afirmar que dicho método converge a la solución.

- Jacobi:

  (% i17) D: matrix([2.1,0,0,0],[0,2,0,0],[0,0,1.1,0],[0,0,0,3.2]);

$$\begin{pmatrix} 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.2 \end{pmatrix} \tag{D}$$

  (% i18) E: matrix([0,0,0,0],[1.1,0,0,0],[0,0.9,0,0],[0,0,0.2,0]);

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \tag{E}$$

  (% i19) F: matrix([0,1.1,0,0],[0,0,0.9,0],[0,0,0,0.2],[0,0,0,0]);

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{F}$$

  (% i21) J:invert(D).(E+F);

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.5238095238095238 & 0.0 & 0.0 \\ 0.55 & 0.0 & 0.45 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8181818181818181 & 0.0 & 0.1818181818181818 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0625 & 0.0 \end{pmatrix} \tag{J}$$

  (% i23) float(apply(max,abs(eigenvalues(J)[1])));

$$0.8140642413865695 \tag{\% o23}$$

  Observamos que $\rho(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{F}) = 0.814 < 1$ y concluimos que el método converge.

- Gauss-Seidel:

  (% i24) G:invert(D-E).F;

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.5238095238095238 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2880952380952381 & 0.45 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2357142857142857 & 0.3681818181818181 & 0.1818181818181818 \\ 0.0 & 0.01473214285714285 & 0.02301136363636363 & 0.01136363636363636 \end{pmatrix} \tag{G}$$

  (% i25) float(apply(max,abs(eigenvalues(G)[1])));

$$0.6627005891042911 \tag{\% o25}$$

  Observamos que $\rho((\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{E})\mathbf{F}) = 0.6627 < 1$ y concluimos que el método converge.

Ahora calculamos las 7 primeras iteraciones de cada método:

- Jacobi:

  (%i26) K:transpose(A).C.A;

$$\begin{pmatrix} 2.1 & -1.1 & 0.0 & 0.0 \\ -1.1 & 2.0 & -0.9 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 & 1.1 & -0.2 \\ 0.0 & 0.0 & -0.2 & 3.2 \end{pmatrix} \tag{K}$$

  (%i27) p;

$$[49.0, 39.2, 29.4, 19.6] \tag{\% o27}$$

  (%i28) N;

$$4 \tag{\% o28}$$

  (%i34) x0:[0,0,0,0];

$$[0, 0, 0, 0] \tag{x0}$$

  (%i35) x:x0;

$$[0, 0, 0, 0] \tag{x}$$

  (%i36) for m:1 thru 7 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/K[i,i])*
  (p[i]-sum(K[i,j]*x0[j],j,1,i-1)-sum(K[i,j]*x0[j],j,i+1,N))),x0:x);

$$\textit{done} \tag{\% o36}$$

  (%i37) x;

$$[86.14703266788384, 124.2836783096514, 130.9745956458339, 14.31091222786461] \tag{\% o37}$$

$$x = \begin{bmatrix} 86.147 & 124.284 & 130.975 & 14.311 \end{bmatrix}$$

- Gauss-Seidel:

  (%i44) x0:[0,0,0,0];

$$[0, 0, 0, 0] \tag{x0}$$

  (%i45) x:x0;

$$[0, 0, 0, 0] \tag{x}$$

  (%i48) for m:1 thru 7 do(for i:1 thru N do(x[i]:(1/K[i,i])*
  (p[i]-sum(K[i,j]*x[j],j,1,i-1)-sum(K[i,j]*x0[j],j,i+1,N)),x0[i]:x[i]));

$$\textit{done} \tag{\% o48}$$

(% i49) x;

$$[86.14703266788384, 124.2836783096514, 130.9745956458339, 14.31091222786461] \quad (\% o49)$$

$$x = \begin{bmatrix} 86.147 & 124.284 & 130.975 & 13.311 \end{bmatrix}$$

- Comprueba que para la iteración séptima del método de Gauss-Seidel se verifican las 3 estimaciones del error absoluto establecidas en la Sección 2.3.

  Calculemos primero la norma infinito de **G**:

  $\longrightarrow$ t:apply(max,makelist(apply(-", abs(G[i])),i,1,4));

  $$0.7857142857142857 \quad \text{(b)}$$

  $$||\mathbf{G}||_\infty = 0.7857142857142857$$

  Ahora resolvemos el sistema con Máxima:

  $$x = \begin{bmatrix} 86.147 & 124.284 & 130.975 & 13.311 \end{bmatrix}$$

(% i33) solve:linsolve([2.1*a-1.1*b=49, -1.1*a+2*b-0.9*c=39.2, -0.9*b+1.1*c-0.2*d=29.4, 0.2*c+3.2*d=19.6], [a,b,c,d]);

$$[a = \frac{384258}{4135}, b = \frac{549388}{4135}, c = \frac{1713334}{12405}, d = \frac{183064}{12405}] \quad \text{(solve)}$$

(% i35) s:[92.92817412333737, 132.8628778718258, 138.116404675534, 14.75727529222087];

$$[92.92817412333737, 132.8628778718258, 138.116404675534, 14.75727529222087] \quad \text{(s)}$$

Ahora realizamos las comprobaciones:

- $||x_n - x|| \leq \frac{||B||^n}{1-||B||}||x_1 - x_0||$

  (% i37) diff:apply(max,makelist(abs(s[i]-x[i]),i,1,4));

  $$8.579199562174324 \quad \text{(diff)}$$

  $$||x_n - x|| = 8.579199562174324$$

  $$8.58 \leq \frac{0.78^2}{1-0.78} \cdot 53.26 = 42.525 \Rightarrow \text{ Se cumple}$$

- $||x_n - x|| \leq ||B||||x_6 - x||$

  $$8.58 \leq 0.78 \cdot 12.946 = 10.0979 \Rightarrow \text{ Se cumple}$$

- $||x_n - x|| \leq \frac{||B||}{1-||B||}||x_7 - x_6||$

  $$8.58 \leq \frac{0.78}{1-0.78} \cdot 4.367 = 15.483 \Rightarrow \text{ Se umple}$$