Práctica 2

Diferenciabilidad

2.0. Planteamiento

Complementamos la práctica 1 con algunas ideas útiles para estudiar la diferenciabilidad de un campo escalar. Más concretamente, abordamos ahora el siguiente estudio, más completo que el de la práctica anterior:

Problema. Dado un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, de un campo escalar $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Naturalmente el estudio que vamos a hacer sólo es necesario cuando el problema no pueda resolverse directamente usando las reglas básicas para la diferenciación de una suma, producto, cociente o composición de funciones.

2.1. La parte rutinaria del problema.

Típicamente, las reglas de diferenciación recién mencionadas nos permiten encontrar un conjunto abierto $U \subset \Omega$ tal que $f\big|_U$ es una función de clase C^1. Por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, deduciremos que f es diferenciable, luego también continua, en todo punto de U. Además, habremos calculado las derivadas parciales de f, y sabremos que son continuas, en todo punto de U. Así pues, una primera parte de nuestro estudio constará de los siguientes pasos:

(a.1) *Definir el conjunto U y comprobar que U es abierto*

(a.2) *Comprobar que $f\big|_U$ es una función de clase C^1*

(a.3) *Aplicar el carácter local de la continuidad y la diferenciabilidad*

A partir de este momento, trabajaremos en los puntos de $\Omega \setminus U$.

2.2. Cálculo de las derivadas parciales

Por razones que se entenderán más adelante, conviene ahora dar el siguiente paso:

(b) *Estudiar la existencia de las derivadas parciales de f en cada punto de $\Omega \setminus U$ y, en su caso, calcularlas.*

Se trata de estudiar diversos límites de funciones reales de una variable real, lo que no debe ofrecer dificultad alguna. Como resultado conoceremos el conjunto en el que está definida cada una de las derivadas parciales de f. En cada punto de $a \in \Omega \setminus U$ pueden darse dos casos:

- Si no existe alguna de las derivadas parciales de f en a, entonces sabemos que f no es diferenciable en a. Quedará por estudiar la continuidad de f, mediante los métodos de la práctica 1. Para las derivadas parciales que estén definidas en el punto a, deberemos también estudiar su continuidad en dicho punto, con los mismos métodos.
- Si f es parcialmente derivable en a, disponemos del vector gradiente $\nabla f(a)$, pero no tenemos aún respuesta a ninguna de las tres preguntas planteadas.

2.3. Diferenciabilidad

Suponiendo que f es parcialmente derivable en un punto $a \in \Omega \setminus U$, sabemos que f es diferenciable en a si, y sólo si, se tiene:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \big(\nabla f(a) \,\big|\, x - a\big)}{\|x - a\|} = 0$$

Para comprobarlo, es natural considerar la función $\varphi : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a) - \big(\nabla f(a) \,\big|\, x - a\big)}{\|x - a\|} \qquad \forall x \in \Omega \setminus \{a\}$$

Entonces f es diferenciable en a si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

La norma que aparece en la definición de φ puede ser cualquier norma en $\mathbb{R}^N$, tenemos libertad para elegirla. Habitualmente, la norma euclídea es la mejor opción.

Nótese que no es imprescindible saber si φ tiene límite en el punto a: si probamos que dicho límite, caso de existir, no puede ser 0, sabremos que f no es diferenciable en a. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, cuando un solo límite radial de φ en a no es 0.

2.4. Conclusión del estudio

Suponiendo, para concretar, que f es parcialmente derivable en Ω, las tres cuestiones que quedan por resolver pueden estudiarse mediante los métodos de la práctica 1, pues se trata de estudiar la existencia de límite en cada punto $a \in \Omega \setminus U$ de la función f, de sus derivadas parciales, o de la función φ definida en el apartado anterior.

Conviene ahora tener presente la relación entre las tres propiedades a estudiar. Por una parte, si f es diferenciable en a, también ha de ser continua en dicho punto. Por otra, la condición suficiente de diferenciabilidad nos dice que, si al menos $N-1$ derivadas parciales de f son continuas en un punto, entonces f es diferenciable en dicho punto. Por tanto, la respuesta a una de las preguntas que debemos abordar nos puede dar directamente la respuesta a otra, o incluso a las otras dos. Esto hace que, dependiendo del orden en que abordemos las tres preguntas, podamos ahorrar bastante trabajo. Para comentar las tres opciones posibles, nos centramos en el caso $N = 2$.

Primera opción. Si sospechamos que al menos una de las dos derivadas parciales de f va a ser continua en un punto $a \in \Omega \setminus U$, la mejor opción está muy clara:

(c) *Estudiar primero la continuidad de las dos derivadas parciales de f en a.*

Si al menos una de ellas es continua en a, sabremos que f es diferenciable, luego también continua, en el punto a, y nuestro estudio estará concluido. En caso contrario, habremos resuelto sólo una de las tres cuestiones planteadas, y pasaremos a estudiar las otras dos.

Segunda opción. Es la que conviene, si sospechamos que f no es continua en el punto a:

(c) *Estudiar primero la continuidad de f en a.*

Si f no es continua en a, no podrá ser diferenciable en a y ninguna de sus derivadas parciales podrá ser continua en a, luego nuestro estudio estará concluido. En caso contrario, de nuevo habremos resuelto sólo una de las cuestiones planteadas y pasaremos a estudiar las otras dos.

Tercera opción. Es la más conservadora, porque en ningún caso permite resolver de golpe las tres cuestiones planteadas, pero garantiza que resolveremos dos de ellas:

(c) *Estudiar primero la diferenciabilidad de f en a.*

Si f es diferenciable en a, también será continua en a y quedará estudiar la continuidad de las derivadas parciales. Si por el contrario comprobamos que f no es diferenciable en a, sabremos que ninguna de sus derivadas parciales puede ser continua en a y sólo quedará estudiar la continuidad de f.