

Objetivos de aprendizaje Tema 1

Análisis Matemático I

Javier Gómez López

23 de enero de 2022

1. Conocer y comprender las siguientes definiciones:

a) Espacio euclídeo N -dimensional

\mathbb{R}^N es el producto cartesiano de N copias de \mathbb{R} , es decir, el conjunto de todas las posibles N -uplas de números reales:

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) : x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}\}$$

En \mathbb{R}^N disponemos de las operaciones de **suma** y **producto por escalares**, que vienen definidas, para $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, por

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N)$$

Sabemos que, con estas operaciones, \mathbb{R}^N tiene estructura de *espacio vectorial*. El espacio vectorial \mathbb{R}^N tiene *dimensión* N . Destacamos la *base usual*, $\Phi = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ donde para cada $k \in \Delta_N$, llamamos e_k a la N -upla cuya k -ésima componente es 1 y las demás se anulan, es decir:

$$e_k(k) = 1 \quad \text{y} \quad e_k(j) = 0 \quad \forall j \in \Delta_N \setminus \{k\}$$

Recordemos que \mathbb{R}^N es, salvo isomorfismos, el *único* espacio vectorial de dimensión N .

Presentado \mathbb{R}^N como espacio vectorial, definamos ahora el concepto de **producto escalar**. El producto escalar de dos vectores $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ es el número real $(x|y)$ dado por:

$$(x|y) = \sum_{k=1}^N x_k y_k$$

que verifica las siguientes propiedades

$$\text{P1)} \quad (\lambda u + \mu v|y) = \lambda(u|y) + \mu(v|y)$$

$$\text{P2)} \quad (x|y) = (y|x)$$

$$\text{P3)} \quad (x|x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

Si asociamos \mathbb{R}^N con el producto escalar definido es un espacio pre-hilbertiano, conocido como el espacio euclídeo N -dimensional.

b) Espacio pre-hilbertiano

Un **espacio pre-hilbertiano** es, por definición, un espacio vectorial dotado de un producto escalar. El *producto escalar de dos vectores* $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ es, por definición el número real $(x|y)$ dado por

$$(x|y) = \sum_{k=1}^N x_k y_k = \sum_{k=1}^N x(k) y(k) \quad (1)$$

y decimos también que la aplicación $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $(x, y) \mapsto (x|y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^N$, es el **producto escalar** en \mathbb{R}^N .

En general, el producto escalar en \mathbb{R}^N tiene tres propiedades claras:

$$\begin{array}{ll} \text{(P.1)} & (\lambda u + \mu v|y) = \lambda(u|y) + \mu(v|y) \quad \forall u, v, y \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \text{(P.2)} & (x|y) = (y|x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N \\ \text{(P.3)} & (x|x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \end{array}$$

Un **producto escalar** en un espacio vectorial X es una forma bilineal simétrica en X , cuya forma cuadrática asociada es definida positiva. Por tanto, \mathbb{R}^N con el producto escalar definido como en (1) es un espacio pre-hilbertiano, que se conoce como el **espacio euclídeo** N -dimensional.

c) Espacio normado

Se define la **norma de un vector** $x \in X$ como la raíz cuadrada del producto escalar de x por sí mismo, es decir, el número real no negativo $\|x\|$ dado por

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \quad (2)$$

Una **norma** es un espacio vectorial X es una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada $x \in X$ hace corresponder un número real $\|x\|$, verificando las tres condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{(N.1)} & \text{Desigualdad triangular: } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X \\ \text{(N.2)} & \text{Homogeneidad por homotecias: } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{(N.3)} & \text{No degeneración: } x \in X, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0 \end{array}$$

Un **espacio normado** es un espacio vectorial X , en el que hemos fijado una norma $\|\cdot\|$. En un mismo espacio vectorial X podemos tener varias normas distintas. Con cada una de esas normas, tendremos un espacio normado diferente.

Si $\|\cdot\|$ es una norma en un espacio vectorial X , usando la homogeneidad por homotecias con $\lambda = -1$, vemos que $\|-x\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Pero entonces, la desigualdad triangular implica que

$$0 = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \quad \forall x \in X$$

así que una norma nunca puede tomar valores negativos.

d) Espacio métrico

Dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^N$, el segmento que va de x a y se obtiene trasladando el que va del origen a $y - x$, luego la longitud del vector $y - x$ nos da la distancia de x a y .

Si X es un espacio normado, se define la *distancia entre dos puntos* de X por

$$d(x, y) = \|y - x\| \quad \forall x, y \in X \quad (3)$$

Obtenemos así una función de dos variables $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, a partir de la cual podemos recuperar la norma de X , puesto que evidentemente

$$\|x\| = d(0, x) \quad \forall x \in X \quad (4)$$

Por tanto, una **distancia** en un conjunto no vacío E es una función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ verificando las siguientes condiciones:

- (D.1) *Desigualdad triangular:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ $\forall x, y, z \in E$
- (D.2) *Simetría:* $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in E$
- (D.2) *No degeneración:* Para $x, y \in E$, se tiene: $d(x, y) = 0 \iff x = y$

2. Conocer la relación entre los conceptos anteriores y los ejemplos que permitan distinguir entre ellos

Todo espacio pre-hilbertiano es un espacio normado, con la norma asociada a su producto escalar. En particular, el espacio euclídeo N -dimensional (que es un espacio pre-hilbertiano con producto escalar definido como en (1)) es un espacio normado, \mathbb{R}^N con la norma euclídea.

Antes de ver otros ejemplos, conviene comentar que, en todo espacio normado X , la norma de cada vector se interpreta siempre como la longitud que asignamos al vector.

La norma euclídea en \mathbb{R} coincide con el valor absoluto. Salvo cambios de escala, el valor absoluto es la única norma que cabe considerar en \mathbb{R} .

Para $N > 1$, es sencillo definir en \mathbb{R}^N normas que no son proporcionales a la euclídea. Concretamente, podemos definir la **norma del máximo**, $\|\cdot\|_\infty$, y la **norma de la suma**, $\|\cdot\|_1$, escribiendo, para $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_k| : k \in \Delta_N\} \quad \text{y} \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^N |x_k| \quad (5)$$

Estas dos normas no proceden de ningún producto escalar en \mathbb{R}^N .

Consideremos de nuevo el espacio vectorial $C[0, 1]$, formado por las funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ en \mathbb{R} . Conocemos en este espacio un producto escalar que lo convierte en un espacio pre-hilbertiano, luego es un espacio normado con la norma dada por

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} = \left(\int_0^1 x(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad \forall x \in C[0, 1]$$

Por otro lado, para $x \in C[0, 1]$, tenemos que

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(t)| : t \in [0, 1]\} \quad \text{y} \quad \|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt \quad (6)$$

Estas normas tampoco proceden del producto escalar, y por tanto, tenemos dos ejemplos de espacios normados de dimensión infinito, que no son espacios pre-hilbertianos.

3. Conocer los siguientes resultados, incluyendo su demostración:

a) Desigualdad de Cauchy-Schwartz

En todo espacio pre-hilbertiano X , se tiene:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in X \quad (7)$$

Además, se verifica la igualdad si, y sólo si, x e y son linealmente dependientes

Demostración. Si $x, y \in X$ son linealmente dependientes, se tendrá que $y = 0$, o bien, $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. En el primer caso la igualdad buscada es trivial y en el segundo basta usar (N.2):

$$|(x|y)| = |(\lambda y|y)| = |\lambda| \|y\|^2 = \|x\| \|y\|$$

Supongamos pues que $x, y \in X$ son linealmente independientes, y en particular no nulos, para probar la desigualdad estricta en (7). Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$0 < (x - \lambda y|x - \lambda y) = \|x\|^2 - 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2$$

Podemos suponer que $(x|y) \neq 0$, pues en otro caso la desigualdad buscada es obvia, lo que nos permite tomar $\lambda = \frac{\|x\|^2}{(x|y)}$, obteniendo

$$0 < -\|x\|^2 + \frac{\|x\|^4 \|y\|^2}{(x|y)^2} \Rightarrow \|x\|^2 (x|y)^2 < \|x\|^4 \|y\|^2$$

Basta ahora dividir ambos miembros por $\|x\|^2 > 0$ y tomar raíces cuadradas.

b) Desigualdad triangular para la norma de un espacio pre-hilbertiano

Para cada $x, y \in X$, basta pensar que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Podemos tomar raíces cuadradas en ambos miembros de la desigualdad, puesto que son números reales positivos, y por tanto quedaría probada la desigualdad triangular.