Ejercicios del libro:

② Para el endomorfismo f del ejemplo anterior, $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y+z,\ 2y+z,\ 3z)$. Probar que 5 no es un autovalor de f:

Tenemos $u = (a,b,c)$ verifica $f(u) = 5u$, entonces $(a+b+c, 2b+c, 3c) = 5(a,b,c) = (5a, 5b, 5c)$, de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b+c = 5a \\ 2b+c = 5b \\ 3c = 5c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a+b+c=0 \\ -3b+c=0 \\ -2c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=0$$

y como u no puede ser el vector nulo, entonces 5 no es un autovalor de f.

③ Consideramos de nuevo el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y calculamos el subespacio propio V_2 asociado al autovalor 2:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que:

$$(x,y,z) \in V_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ z=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

④ Consideramos el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico será:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

Descomponiendo por el método de Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 2 & 5 & -6 \\
1 & & -1 & 1 & 6 \\
\hline
 & -1 & 1 & 6 & \boxed{0} \\
3 & & -3 & -6 & \\
\hline
 & -1 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda)$$

Por tanto, los autovalores de f son:

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 3$$
$$\lambda_3 = -2$$

Hay que tener cuidado con el cuerpo sobre el que está definido el espacio, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ no cuentan las raíces complejas, pero si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si hay que tenerlas en cuenta.

(7) Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico $p(\lambda) = (2-\lambda)^3$, luego A tiene un autovalor $\lambda_1 = 2$ de multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 3$. Veamos cuál es su multiplicidad geométrica:

$$d_1 = 3 - rg(A - 2I) = 3 - rg\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

(8) Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

Descomponiendo $p(\lambda)$ por el método de Ruffini, obtenemos

$$p(\lambda) = (2-\lambda)^2(5-\lambda)$$

Así pues, los autovalores de A y sus multiplicidades algebraicas son:

$$\lambda_1 = 2 \qquad \alpha_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 5 \qquad \alpha_2 = 1$$

Calculamos ahora las multiplicidades geométricas:

$$d_1 = 3 - rg(A-2I) = 3 - rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

Para $1 \leq d_2 \leq \alpha_2 = 1 \Rightarrow d_2 = 1$ $\boxed{1 \leq d_i \leq \alpha_i}$

Como $d_1 = \alpha_1$ y $d_2 = \alpha_2$, la matriz A es diagonalizable y su forma diagonal será

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de paso, necesitaremos bases de los subespacios propios:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x,y,z) \in V_2 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \{ x+y+z=0$$

Pasamos a paramétricas

$$V_2 \equiv \begin{cases} x = -\mu - \gamma \\ y = \mu \\ z = \gamma \end{cases}$$

y de aquí obtenemos la base de V_2:

$$\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$$

De igual forma:

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(x,y,z) \in V_5 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

El sistema es equivalente al sistema escalonado reducido:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Así pues V_5 tiene ecuaciones paramétricas:

$$V_5 = \begin{cases} x = \delta \\ y = \delta \\ z = \delta \end{cases}$$

y, por tanto, una base es $\{(1,1,1)\}$

En consecuencia una base formada por vectores propios es
$$\{(-1,1,0),\ (-1,0,1),\ (1,1,1)\}$$

Es importante que los vectores de esta base estén en el mismo orden en que figuren los autovalores correspondientes en la forma diagonal.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

56 Probar que si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces su polinomio característico se puede calcular como:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

De igual forma, si A es de orden 3, entonces

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A)\lambda^2 - (\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})\lambda + det(A)$$

· Nos piden probar: $A \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A) + det(A)$

Supongamos una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb =$$

$$= ad - \lambda a - \lambda d + \lambda^2 - cb \underset{\substack{\downarrow \\ \text{permutando}}}{=} ad - cb - (\lambda a + \lambda d) + \lambda^2 = \lambda^2 - tr(A) + det(A)$$

· Nos piden probar: $A \in M_3(\mathbb{R}) \Rightarrow p(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A)\lambda^2 - (\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})\lambda + det(A)$

Consideramos
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha_{11}-\lambda)(\alpha_{22}-\lambda)(\alpha_{33}-\lambda) + (\alpha_{32}\alpha_{21}\alpha_{13}) + (\alpha_{23}\alpha_{12}\alpha_{31}) - (\alpha_{31}(\alpha_{22}-\lambda)\alpha_{13}) -$$
$$- (\alpha_{21}\alpha_{12}(\alpha_{33}-\lambda)) - (\alpha_{23}\alpha_{32}(\alpha_{11}-\lambda)) = \text{acabar, o multiplicar y permutar}$$

(57) Sean f y g endomorfismos de un espacio vectorial V. Demostrar que si $v \in V$ es vector propio para f y g, entonces es vector propio para af $(a \in \mathbb{K})$. Si λ es el valor propio asociado a v respecto de f y μ respecto de g, ¿quiénes son los valores propios respecto de af y $f+g$? Demostrar, dando ejemplos, que si λ y μ son valores propios de f y g, $\lambda+\mu$ no es necesariamente valor propio para $f+g$.

$f(v) = \lambda v \Rightarrow af(v) = (a\lambda)v \Rightarrow v$ vector propio y $a\lambda$ su valor propio

$f(v) = \lambda v$, $g(v) = \mu v \Rightarrow (f+g)(v) = f(v)+g(v) = \lambda v + \mu v = (\lambda+\mu)v \Rightarrow$

$\Rightarrow v$ vector propio y $\lambda+\mu$ su valor propio

contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mu = 2$, $\lambda = 1$ valores propios de A y B, respectivamente

$\mu + \lambda = 3$ no es valor propio de $A+B$.

(58) Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo dado en cierta base por la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha-1 & 1-\alpha \\ \alpha-2 & \alpha & 2-\alpha \\ \alpha-2 & \alpha-1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

¿Qué valores debe tomar el parámetro α para que algún valor propio del endomorfismo tenga orden de multiplicidad 2?

Calculamos el polinomio:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \alpha-1 & 1-\alpha \\ \alpha-2 & \alpha-\lambda & 2-\alpha \\ \alpha-2 & \alpha-1 & 3-\alpha-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \alpha-1 & 0 \\ \alpha-2 & \alpha-\lambda & 2-\lambda \\ \alpha-2 & \alpha-1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

(59) Estudiar si son diagonalizables o no las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Condiciones para que una matriz sea diagonalizable

1) Calculamos polinomio característico

2) Calculamos multiplicidad geométrica

3) vemos si todos los $a_i = g_i$

4) si se cumple 3 es diagonalizable

Matriz A

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)^2$$

Igualando a 0 se obtiene:

Multiplicidad algebraica

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$

$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_2 \neq d_2 \Rightarrow A$ no admite diagonalización

$d_1 = 1 \qquad d_2 = 1$

Multiplicidad algebraica

Se calcula como

$d_i = \dim(V_i) = \dim(V) - rg(A - \lambda I)$

Matriz B

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Igualando a 0:

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$

$\alpha_1 = 2 \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \Rightarrow \alpha_1 = d_1,\ \alpha_2 = d_2 \Rightarrow$ La matriz B admite diagonalización

$d_1 = 2 \qquad d_2 = 1$

Matriz C

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 4-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - 2 - 2\right] = (4-\lambda)(12 - 8\lambda + \lambda^2)$$

Igualado a 0:

$(4-\lambda)(12 - 8\lambda + \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(\lambda - 6)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = 6 \qquad \lambda_3 = 2$

$d_1 = 1 \qquad d_2 = 1 \qquad d_3 = 1 \qquad \Rightarrow d_i = d_i \quad i \in \{1,2,3\} \Rightarrow C$ diagonalizable

$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_3 = 1$

60 Estudiar para que valores de los parámetros a y b la matriz siguiente es diagonalizable

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Comenzamos calculando el polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)(b-\lambda)$$

Igualando a 0:

$$(5-\lambda)(1-\lambda)(b-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 1$$

- Caso 1: $b \neq 5, 1 \Rightarrow$ Tres autovalores distintos $\Rightarrow$ Matriz diagonalizable
- Caso 2: $b = 5 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 5 \Rightarrow \alpha_2 \neq d_2 \Rightarrow$ No es diagonalizable

  $\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2$

  $d_1 = 1 \quad d_2 = 1$
- Caso 3: $b = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 5 \Rightarrow \alpha_1 \neq d_1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow \text{diagonalizable} \\ a \neq 0 \Rightarrow \text{No diagonalizable} \end{cases}$

  $\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 1$

  $d_1 = 1 \quad d_2 = 1$

62 Sabemos que la matriz A admite como vectores propios $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (-1,0,2)$, $v_3 = (0,1,-1)$. Hallar los elementos de dicha matriz así como sus valores propios.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$$

Cada autovector está asociado a un único autovalor, como estos son l.i, cada uno está asociado a uno diferente. Como hay 3 autovalores distintos, entonces la matriz admite diagonalización.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si denotamos los autovalores como λ, μ, γ, su forma diagonal será:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que:

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu & \lambda - \mu & \lambda - \mu \\ 2\lambda - 2\gamma & \lambda + 2\gamma & \lambda - \gamma \\ -2\mu + 2\gamma & 2\mu - 2\gamma & 2\mu + \gamma \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu & \lambda - \mu & \lambda - \mu \\ 2\lambda - 2\gamma & \lambda + 2\gamma & \lambda - \gamma \\ -2\mu + 2\gamma & 2\mu - 2\gamma & 2\mu + \gamma \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos que:

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 3 \\ \lambda + 2\gamma = 6 \\ 2\mu - 2\gamma = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 0 \\ \gamma = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Relación

1 Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tal que $f \circ f = -I_V$. Demuestra que f no tiene valores propios y, por tanto, no es diagonalizable. ¿Se puede llegar a la misma conclusión si V es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$? Concluye que el endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $f(x,y) = (y, -x)$ no es diagonalizable.

Tomamos $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, asociado al valor propio λ:

$$f(v) = \lambda v \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(f \circ f)(v) = -v = \lambda f(v) = \lambda^2 v \Rightarrow -v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2 v + v = 0 \Rightarrow$$

$$v(\lambda^2 + 1) = 0$$

$v = 0$ No puede ser por hipótesis

$\lambda^2 = -1$ solución compleja

$\Rightarrow f$ no tiene valores propios en $\mathbb{R}$, por lo que no es diagonalizable, aunque sí tendría valores propios en $\mathbb{C}$

2 Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $f \circ f = r\, Id_V$. Demuestra que los únicos valores propios posibles de f son $\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$.

Pendiente

3 Prueba que toda matriz cuadrada de orden 2 con coeficientes reales simétrica o con determinante negativo es diagonalizable. ¿Es cierto que todos los automorfismos de $\mathbb{R}^2$ son diagonalizables?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad P_f(\lambda) = \lambda^2 - \text{traza}(A)\,\lambda + \det(A) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}$$

Al ser un polinomio de grado 2 nos fijamos en el discriminante:

$b^2 - 4ac = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12})^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0 \Rightarrow$ Tiene sol.

Si el discriminante es negativo:

$$b^2 - 4ac = (a_{11} + a_{22})^2 - 4\underset{\hat{0}}{\det(A)} > 0$$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(M(f, B_u)) = 1 \quad \text{automorfismo}$$

La respuesta a que todos los automorfismos son diagonizables es falso. Contraejemplo:

④ Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $f: V \to V$ un endomorfismo de V tal que $\mathrm{nul}(f) \geq n-1$ y se cumple $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Demuestra que f es diagonalizable.

$n-1 \leq \mathrm{nul}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq n$

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = V \Rightarrow f = 0 \Rightarrow f$ diagonalizable

nulidad $(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1$:

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$
$$n = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$
$$\cancel{n} = \cancel{n} - 1 + \dim(\mathrm{Im}(f))$$
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 \longrightarrow \text{Esta generado por un vector}$$

$\mathrm{Im}(f) = L(\{v\})$ $v \neq 0$, $v \in V$

$f(v) = \lambda v$ v vector propio

$\in \mathrm{Im}(f)$

$V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

$B \Rightarrow$ base de $\mathrm{Ker}(f)$ entonces $B \cup \{v\}$ es una base de V formada por vectores propios de $f \Rightarrow f$ es diagonalizable

⑤ En el espacio $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{R}$ se define el endomorfismo $f: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ como $f(p(x)) = x p'(x)$, donde $p'(x)$ representa la derivada de $p(x)$ con respecto x. Calcula los valores propios y los subespacios propios de f. Encuentra, si es posible, una base de $\mathbb{R}_n[x]$ formada por vectores de f.

formada por todos los binomios

$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$ $\Rightarrow$ Esta ya es una base de vectores propios $\{0, 1, \ldots, n-1, n\}$

$f(1) = 0$

$f(x) = x$ $\ldots$ $f(x^i) = x i x^{i-1} = \boxed{i x^i}$

Todos los elementos de esa base son vectores propios $\Rightarrow$ El vector x^i está asociado al valor propio i

Luego, f es diagonalizable.

⑥ Estudia las siguientes matrices con coeficientes reales son diagonalizables

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Analiza si son semejantes.

Comenzamos con la matriz A:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^3 + 1 + 1 + 1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - \cancel{3\lambda} - 1 + 5 + \cancel{3\lambda} =$$
$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline & -1 & -4 & -4 & \boxed{0} \\ -2 & & +2 & 4 & \\ \hline & -1 & -2 & \boxed{0} & \\ -2 & & 2 & & \\ \hline & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\qquad$ $\lambda_2 = -2$

$\alpha_1 = 1$ $\qquad$ $\alpha_2 = 2$

$d_1 = 1$ $\qquad$ $d_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-3} \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

como $\forall \alpha_i = d_i$ $i = \{1, 2\}$ $\Rightarrow f$ es diagonalizable

Sacamos una matriz diagonal, para ello calculamos los subespacios propios:

$$V_{\lambda=-2} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x+y+z = 0 \right\}$$

$\dim(V_{\lambda=-2}) = \dim(\mathbb{R}^3) - n^o$ ecuaciones $= 2$. Una base del subespacio sería $\{(0,1,-1),(1,-1,0)\}$

$$V_{\lambda=1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3y+3z=0,\ x+y-2z=0 \right\}$$

$\dim(V_{\lambda=1}) = \dim(\mathbb{R}^3) - n^o$ ecuaciones $= 1$. Una base del subespacio es $\{(1,1,1)\}$

Luego, la matriz P será:

$$\beta = \{(1,1,1),(1,-1,0),(0,1,-1)\} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = M(\beta, \beta u)$$

Vamos ahora con la matriz C:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2(-1-\lambda)+1+\lambda = -\lambda^2-\lambda^3+\lambda+1 = 0$$

	-1	-1	1	1
1		-1	-2	-1
	-1	-2	-1	$\boxed{0}$
-1		1	1	
	-1	-1	$\boxed{0}$	
-1		1		
	-1	$\boxed{0}$		

$-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 = (\lambda-1)(\lambda+1)^2$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$

$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 2$

$d_1 = 1 \qquad d_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

Como $\alpha_i = d_i\ \forall i \in \{1,2\} \Rightarrow C$ es diagonalizable. Calculamos ahora la matriz de paso P.

$$V_{\lambda=1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x-y-z=0,\ y-z=0 \right\}$$

$\dim(V_{\lambda=1}) = \dim(\mathbb{R}^3) - n^o$ ecuaciones $= 1$. Una base del subespacio es $\{(-1,1,1)\}$

$$V_{\lambda=-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -y-z=0 \right\}$$

$\dim(V_{\lambda=-1}) = \dim(\mathbb{R}^3) - n^o$ ecuaciones $= 2$. Una base podría ser $\{(1,0,0),(0,-1,1)\}$

Luego, la matriz de paso será
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑧ Consideremos el endomorfismo $f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b+c \\ 2a-2c & 4d \end{pmatrix}$$

¿Es f diagonalizable? En caso de serlo, proporciona una base de vectores propios.

Tomamos la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ y expresamos las matrices como vectores:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (0,0,2,0) \\ f(0,1,0,0) &= (1,1,0,0) \\ f(0,0,1,0) &= (0,1,-2,0) \\ f(0,0,0,1) &= (0,0,0,4) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Estudiamos si la matriz A es diagonalizable:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left[(-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda)+2\right] =$$

$$= (4-\lambda)\left[(-\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda)+2\right] =$$

$$= (4-\lambda)\,(2\lambda+\lambda^2-2\lambda^2-\lambda^3+2) =$$

$$= (4-\lambda)(-\lambda^3-\lambda^2+2\lambda+2) =$$

$$= -4\lambda^3-4\lambda^2+8\lambda+8+\lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda$$

$$= \lambda^4-3\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda+8$$

Igualando a 0 tenemos que:

$$\lambda^4-3\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda+8 = 0 \iff \lambda=4,\ \lambda=-1,\ \lambda=\sqrt{2},\ \lambda=-\sqrt{2}$$

Hay 4 valores propios distintos $\Rightarrow \exists$ 4 vectores propios, los cuales, forman una base, por tanto, f es diagonalizable

⑨ Estudia si la siguiente matriz con coeficientes reales es semejante a una matriz regular.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)-4-6-2(-1-\lambda)+3(3-\lambda)+4(3-\lambda)\right] =$$

$$= (1-\lambda)\left[(-3-3\lambda+\lambda+\lambda^2)(3-\lambda)-10+2+2\lambda+7(3-\lambda)\right] =$$

$$= (1-\lambda)\left[-9-9\lambda+3\lambda+3\lambda^2+3\lambda+3\lambda^2-\lambda^2-\lambda^3-10+2+2\lambda+21-7\lambda\right.$$

$$= (1-\lambda)(4-8\lambda+5\lambda^2-\lambda^3) =$$

$$= 4-8\lambda+5\lambda^2-\lambda^3-4\lambda+8\lambda^2-5\lambda^3+\lambda^4 =$$

$$= 4-12\lambda+13\lambda^2-6\lambda^3+\lambda^4$$

Igualando a 0 tenemos: $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0 \iff (x-1)^2 (x-2)^2 = 0$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -6 & 13 & -12 & 4 \\ 1 & & 1 & -5 & 8 & -4 \\ \hline & 1 & -5 & 8 & -4 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & -4 & 4 & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} & \\ 2 & & 2 & -4 & & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Luego tenemos que:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = 2 \\ \alpha_1 = 2 & \alpha_2 = 2 \\ d_1 = 2 & d_2 = 1 \end{array}\right\} \; d_2 \neq \alpha_2 \Rightarrow A \text{ no es diagonalizable} \Rightarrow \nexists P \,/\, B = P^{-1}AP$$

$$A_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-3} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10 En el espacio vectorial real $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales consideramos la base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y el endomorfismo $f: S_2(\mathbb{R}) \longrightarrow S_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula los valores propios de f. Discute si existe una base de $S_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de f. Calcula los subespacios propios de f y encuentra una base de cada uno.

Comenzamos calculando el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 5 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) + 6 - 10 - 5(1-\lambda) - 2(-2-\lambda) + 6(2-\lambda) =$$

$$= 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2)(-2-\lambda) \cancel{-4} - 5 + 5\lambda \cancel{+4} + 2\lambda + 12 - 6\lambda =$$

$$= -4 + 6\lambda - 2\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 7 + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$$

Igualando a 0:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0 \iff (x+1)^2 (x-3) = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & -1 & 2 & 3 & \boxed{0} \\ -1 & & 1 & -3 & \\ \hline & -1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

Luego tenemos que:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & \lambda_2 = 3 \\ \alpha_1 = 2 & \alpha_2 = 1 \\ d_1 = 1 & d_2 = 1 \end{array} \Rightarrow \alpha_1 \neq d_1 \Rightarrow f \text{ no es diagonalizable}$$

$$A_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 8 & -8 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{\lambda=3} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

Como f no es diagonalizable $\Rightarrow \nexists$ una base de vectores propios.
Calculemos los subespacios propios de f:

$$V_{\lambda=-1} = \Big\} r \in S_2(\mathbb{R}) \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 8z = 0 \\ x + y - z = 8 \end{cases} \Big\{$$

$$\mathrm{Dim}\,(V_{\lambda-1}) = \mathrm{Dim}\,(S_2(\mathbb{R})) - n^{o}\text{ ecuaciones} = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \quad B = \Big\} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Big\{$$

$$V_{\lambda=3} = \Big\} r \in S_2(\mathbb{R}) \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -11z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Big\{$$

$$\mathrm{Dim}\,(V_{\lambda=3}) = \mathrm{Dim}\,(S_2(\mathbb{R})) - n^{o}\text{ ecuaciones} = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \quad B = \Big\} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Big\{$$

(12) Dada la matriz con coeficientes reales:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide lo siguiente:

a) Estudiar si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Comenzamos calculando el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 0-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) - \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{\lambda} + \cancel{2} - \cancel{\lambda} + 2 - \lambda =$$
$$= (-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) + 2 - \lambda = 2 - 5\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3$$

Luego tenemos que:

$$2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \iff (x-2)(x-1)^2$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & -1 & 2 & -1 & \boxed{0} \\ 1 & & -1 & 1 & \\ \hline & -1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2 \quad \Rightarrow \forall i \in \{1,2\}\ d_i = \alpha_i \Rightarrow$

$d_1 = 1 \quad d_2 = 2 \quad \Rightarrow f$ diagonalizable

$$A_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos los subespacios propios:

$$V_{\lambda=2} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -y+z=0,\ -x-y=0 \}$$

$\dim(V_{\lambda=2}) = \dim(\mathbb{R}^3) -$ nº ecuaciones $= 3 - 2 = 1 \Rightarrow B = \{(1,-1,-1)\}$

$$V_{\lambda=1} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y+z=0 \}$$

$\dim(V_{\lambda=1}) = \dim(\mathbb{R}^3) -$ nº ecuaciones $= 3 - 1 = 2 \Rightarrow B = \{(1,-1,0),(0,1,-1)\}$

Luego, una base de vectores propios es $B = \{(1,-1,-1),(1,-1,0),(0,1,-1)\}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

b) ¿Existe una matriz C con coeficientes reales, tal que $C^4 = A$?

Inciso

Para comprender el apartado b, hagamos antes el siguiente ejercicio

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^n:

1) Vemos si es diagonalizable

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = -6 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 12 = 6 + 7\lambda + \lambda^2$$

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \iff (x-6)(x-1) = 0 \Rightarrow$ como existen 2 valores propios diferentes $\Rightarrow A$ es diagonalizable

Calculamos bases de los subespacios propios:

$$V_{\lambda=6} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x+y=0 \}$$

$\dim(V_{\lambda=6}) = \dim(\mathbb{R}^2) -$ nº ecuaciones $= 2 - 1 = 1$

Una base $B = \{(1,1)\}$

$$V_{\lambda=1} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x+2y=0 \}$$

$\dim(V_{\lambda=1}) = \dim(\mathbb{R}^2) -$ nº ecuaciones $= 1 \Rightarrow B = \{(2,-3)\}$

2) En caso de que sea diagonalizable $A^n = P \, \underbrace{M(f_A, B)^n}_{\text{Elevas cada elemento de la diagonal a } n} \, P^{-1}$

Luego tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(f_A, B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = P$$

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$A^n = P\, M(f_A, B)^n\, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2*) Podemos usar también el Teorema de Cayley-Hamilton

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) + \alpha\lambda + \beta$$

$$A^n = q(A)(A^2 - 7A + 6) + \alpha A + \beta I_2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda = 6 & 6^n = 6\alpha + \beta \\ \lambda_1 = 1 & 1 = \alpha + \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \frac{6 - 6^n}{5} \qquad \alpha = \frac{6^n - 1}{5}$$

$$A^n = \frac{6^n - 1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \frac{6 - 6^n}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como nuestra matriz es diagonalizable, usamos el primer procedimiento:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(f_A, B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$A^n = P^{-1} M(f_A, B) P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos que:

(13) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}$$

se pide lo siguiente:

¿Para qué valores de a hay un valor propio de f con multiplicidad algebraica 3?

Calculamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2a+4-\lambda & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2-\lambda \end{vmatrix} = (2a+4-\lambda)(4-a-\lambda)(4-a^2-\lambda)$$

Igualando a 0:

$$(2a+4-\lambda)(4-a-\lambda)(4-a^2-\lambda) = 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\lambda_1 = 2a+4 \qquad \lambda_2 = 4-a \qquad \lambda_3 = 4-a^2$$

Sí, tomando $a=0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4 \Rightarrow \alpha = 3$

(14) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcula a para que 2 sea un valor propio de f.

Calculamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & 4-\lambda & a \\ 1 & -a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - a^2\lambda - 12\lambda + 3a^2 - 4a + 8$$

como 2 tiene que ser un valor propio $\Rightarrow p(2) = 0$

$$-2^3 + 7 \cdot 2^2 - 2a^2 - 12 \cdot 2 + 3a^2 - 4a + 8 = 0$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \iff a = 2$$

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, determina si f es diagonalizable. Si f es diagonalizable calcula una base $\mathbb{R}^3$ que diagonalice el endomorfismo.

$a = 2 \Rightarrow p(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 2^2\lambda - 12\lambda + 12 \cancel{-8} \cancel{+8} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$

$x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = 0 \iff (x-2)^2(x-3) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 7 & -16 & 12 \\ 2 & & -2 & 10 & -12 \\ \hline & -1 & 5 & -6 & \boxed{0} \\ 3 & & -3 & 6 & \\ \hline & -1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3$

$\alpha_1 = 2 \qquad \alpha_2 = 1 \Rightarrow \forall i \in \{1,2\} \quad d_i = d_i \Rightarrow$

$d_1 = 2 \qquad d_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ es diagonalizable.

Calculamos los subespacios propios:

$$V_{\lambda=2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \Rightarrow x - y + z = 0 \left. \right\}$$

$\dim(V_{\lambda=2}) = d_1 = 2 \Rightarrow B = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$

$$V_{\lambda=3} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -y+z=0,\ -2x+y-2z=0 \right\}$$

$\dim(V_{\lambda=3}) = d_2 = 1 \Rightarrow B = \{(-\frac{1}{2}, 1, 1)\}$

Luego, una base que diagonalice a la matriz será:

$$B = \{(1,1,0),(0,1,1),(-\tfrac{1}{2},1,1)\} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1} - \tfrac{1}{2} - \cancel{1} = -\tfrac{1}{2} \neq 0$$

c) Estudia si la matriz

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. ¿Puede ser $\bar{A}$ la matriz de endomorfismo f respecto alguna base?

Calculamos su polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3$$

$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 1 \Rightarrow$

$d_1 = 2 \quad d_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \forall i \in \{1,2\} \quad d_i = \alpha_i \Rightarrow \bar{A}$ diagonalizable

Para ver si representan al mismo endomorfismo vemos si son semejantes. Para ello miramos si tienen el mismo determinante, el mismo rango y la misma traza

- $rg(A) = 3 = rg(\bar{A})$
- $det(A) = 12 = det(\bar{A})$
- $traza(A) = 7 = traza(\bar{A})$

$\Rightarrow A$ es semejante a $\bar{A} \Rightarrow$ Representan al mismo endomorfismo.

6 Sea V un espacio vectorial real tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f: V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

a) $f(u) = u$ con $u = 6v_1 + 2v_2 + 5v_3$

b) $U = \{v \in V \;/\; x + 6y - 3z = 0\}$ es un subespacio propio de f. Aquí, x, y, z representan las coordenadas de v respecto B.

c) La traza de f es 5.

Calcula los valores propios de f y $M(f, B)$

Como sabemos que $f(v) = \lambda v$

a) $\Rightarrow f(u) = 1 \cdot u \Rightarrow \lambda = 1$ valor propio

b) $\Rightarrow$ Sabemos que el valor propio que genera el subespacio propio U tiene multiplicidad 2 (aparece 2 veces)

Por ahora tenemos

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

c) $\Rightarrow$ Como $tr(D) = 5$ (Son matrices semejantes, es decir, tienen la misma traza). Luego:

$$1+\lambda+\lambda = 5 \Rightarrow 2\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2$$

Luego la matriz diagonal a la que f es semejante es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

17 Sea V un espacio vectorial real tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f: V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

a) $f(v_1) = 3v_1 + 2v_2 + 2v_3$

b) $f(v_2) = 2v_1 + 2v_2$

c) El vector $v = 2v_1 - 2v_2 - v_3$ está en el núcleo de f.

Calcular $M(f, B)$ y estudiar si f es diagonalizable. En caso afirmativo, da una base B' de V tal que $M(f, B')$ sea diagonal.

a) $\Rightarrow$ $f(v_1) = (3, 2, 2)_B$

b) $\Rightarrow$ $f(v_2) = (2, 2, 0)_B$

c) $\Rightarrow$ $f(v) = 0 \Rightarrow f(2v_1 - 2v_2 - v_3) = 2f(v_1) - 2f(v_2) - f(v_3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(3,2,2) - 2(2,2,0) = f(v_3) \Rightarrow f(v_3) = (2, 0, 4)_B$

Luego tenemos que:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos su polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(4-\lambda) =$$

$$= (6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) - 8 + 4\lambda - 16 + 4\lambda =$$

$$= \cancel{24} \cancel{-6\lambda} - 20\lambda + 5\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{-24} + \cancel{8}\lambda \overset{2\lambda}{=}$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda$$

Luego tenemos: $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0 \Rightarrow$ Tiene 3 valores propios ($\lambda = 0$, $\lambda = 6$, $\lambda = 3$) y como cada autovector está asociado a autovalores diferentes $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ base de vectores propios $\Rightarrow f$ diagonalizable.

Calculamos los subespacios propios:

$V_{\lambda=0} = \{ (x, y, z) \in V \ / \ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y + 2z = 0, \ x + 2z = 0 \}$

$V_{\lambda=0} = L(\{(-2,-2,1)\})$

$V_{\lambda=3} = \{ (x, y, z) \in V \ / \ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cancel{0} & 0 & 2 \\ \cancel{2} & -1 & 0 \\ \cancel{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -y - z = 0, \ 2x + z = 0 \}$

$V_{\lambda=3} = L(\{(1,2,-2)\})$

$V_{\lambda=6} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \;/\; \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x-2y=0,\ x-z=0\}$

$V_{\lambda=6} = L(\{(2,1,2)\})$

Luego, $B' = \{(-2,-2,1),(1,2,-2),(2,1,2)\}$ $\quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

(10) Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifica:

$f(0,1,1) = (-4,-3,-3)$, $f(0,1,0) = (-3,-2,-3)$, $f(1,-1,0) = (7,5,6)$

a) calcular la matriz de f respecto la base canónica

$B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$

$f(0,1,1) = f(e_2)+f(e_3) = -4e_1-3e_2-3e_3 \Rightarrow f(e_3) = -e_1-e_2$

$f(e_2) = -3e_1-2e_2-3e_3$

$f(1,-1,0) = f(e_1)-f(e_2) = 7e_1+5e_2+6e_3 \Rightarrow f(e_1) = 4e_1+3e_2+3e_3$

Por lo que:

$$M(f,B_c) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula los valores propios de f y una base de cada uno de los subespacios propios asociados.

Calculamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 3 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(-\lambda^2+2\lambda-1) \quad \lambda=0 \quad \lambda=1$$

$V_{\lambda=1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y+z=0\}$

$\dim(V_{\lambda=1}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{nº ecuaciones} = 3-1 = 2 \Rightarrow V_{\lambda=1} = L(\{(1,-1,0),(0,1,-1)\})$

$V_{\lambda=0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y-3z=0,\ -x-y=0\}$

$\dim(V_{\lambda=1}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{nº ecuaciones} = 3-2 = 1 \Rightarrow V_{\lambda=0} = L(\{-3,3,1\})$

c) ¿Es f un monomorfismo?

monomorfismo $\Leftrightarrow$ f inyectiva $\Leftrightarrow$ $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ l.i $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = 0$

$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0+\cancel{9}+\cancel{9}-\cancel{6}-\cancel{12} = 0 \Rightarrow rg(f) \leq 2 \Rightarrow Ker(f) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f no es un morfismo

Al tener el 0 de valor propio $\Rightarrow Ker(f) \neq 0 \Rightarrow$ f no es inyectiva ni sobreyectiva

d) Determina si f es diagonalizable. En caso afirmativo, calcula una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice el endomorfismo

Calculado en el apt b $\quad B = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(-3,3,1)\}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-\cancel{3}+\cancel{3} \neq 0$

e) Calcular $f^{50}(0,0,\pi)$

Aprovechando que f es diagonalizable:

$M(f_A, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad f^{50} = P^{-1} M(f_A, B_c)^{50} \cdot P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} M(f_A, B_c)^1 P = f$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Luego $f^{50}(0,0,\pi) = f(0,0,\pi) = \pi f(0,0,1) = \pi(-1,-1,0) = (-\pi,-\pi,0)$

20 Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Demuestra que A no es diagonalizable. ¿Es diagonalizable si se considera con entradas en $\mathbb{C}$? Utiliza el Teorema de Cayley-Hamilton para poner A^{2018} como combinación lineal de $\{A^2, A, I_3\}$

Comenzamos calculando el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -4 \\ 8 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-2-\lambda)(1-\lambda) - 12 - 32 + 16(1-\lambda) - 2\lambda - 12(-2-\lambda) =$$

$$= -\lambda(-2+2\lambda-\lambda+\lambda^2) - 44 + 16 - 16\lambda - 2\lambda + 24 + 12\lambda =$$

$$= 2\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - 4 - 30\lambda \Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda - 4$$

Igualando a 0:

$$-(\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i \Rightarrow$$ Como sólo hay un valor propio de $\mathbb{R}$,

	1	1	4	4
-1		-1	0	-4
	1	0	4	$\boxed{0}$

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2i$$

entonces no existe una base de vectores propios asociados a valores propios en $\mathbb{R} \Rightarrow A$ no es diagonalizable en $\mathbb{R}$, pero sí lo es en $\mathbb{C}$, por que al existir 3 valores propios, entonces existe una base de vectores propios asociados a valores propios en $\mathbb{C} \Rightarrow$ A es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

2º parte del ejercicio

Recordatorio

El Teorema de Cayley-Hamilton dice que toda matriz es raíz de su polinomio característico, es decir, si en el polinomio característico sustituimos λ por la matriz y multiplicamos el término independiente por la identidad de orden correspondiente, entonces obtenemos la matriz nula del orden correspondiente.

$$\lambda^{2018} = P_A(\lambda) \cdot g(\lambda) + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$$

usamos la base del enunciado

→ Lo que hacemos es tomar λ^{2018}, que es la potencia que nos piden y lo dividimos entre su polinomio característico. Aplicando el teorema del resto tenemos que $\frac{D \,|\, d}{r \;\; c}$ $D = dc + r$

sustituimos λ por A

$$A^{2018} = \cancel{P_A(A)\, g(A)} + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton el polinomio característico en la matriz se anula

$$A^{2018} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

Sustituimos por los valores propios:

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda = -1 & 1 = \alpha - \beta + \gamma \\ \lambda = 2i & 2^{2018} \cdot i^{2018} = -2^{2018} = -4\alpha + 2i\beta + \gamma \\ \lambda = -2i & -2^{2018} = -4\alpha - 2i\beta + \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma = 1 - \alpha \Rightarrow \gamma = \frac{4 - 2^{2018}}{5} \\ \beta = 0 \\ -2^{2018} = -4\alpha + 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2^{2018}+1}{5} \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Luego, respecto $\{A^2, A, I_3\}$ $\quad \lambda^{2018} = \frac{2^{2018}+1}{5} A^2 + \frac{4 - 2^{2018}}{5} I_3$