Demostración existencia de momentos menores

Javier Gómez López

21 de mayo de 2021

Demuestra que si X es una variable aleatoria no negativa

$$\exists E[|X|^\beta], \beta \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists E[|X|^\alpha], \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha \leq \beta$$

Distinguiremos dos casos:

- Si X es discreta y toma valores en E_X, podemos afirmar que

$$\exists E[|X|^\alpha] \iff \sum_{x \in E_X} |x|^\alpha P(X = x) < +\infty$$

Primero, descompongamos la serie en dos:

$$\sum_{x \in E_X} |x|^\alpha P(X = x) = \sum_{x \in E_X / |x| \leq 1} |x|^\alpha P(X = x) + \sum_{x \in E_X / |x| > 1} |x|^\alpha P(X = x)$$

Si ahora las acotamos, vemos que convergen:

$$\sum_{x \in E_X / |x| \leq 1} |x|^\alpha P(X = x) \underset{\substack{\uparrow \\ |x|^\alpha \leq 1}}{\leq} \sum_{x \in E_X / |x| \leq 1} P(X = x) = P(|X| \leq 1) \leq 1$$

$$\sum_{x \in E_X / |x| > 1} |x|^\alpha P(X = x) \underset{\substack{\uparrow \\ |x|^\alpha \leq |x|^\beta}}{\leq} \sum_{x \in E_X / |x| > 1} |x|^\beta P(X = x) \leq \sum_{x \in E_X} |x|^\beta P(X = x) = E[|X|^\beta] < +\infty$$

Como las dos series convergen, la suma también corvenge y queda probada la existencia de $E[|X|^\alpha], \quad \alpha \leq \beta$.

- Si X es continua, usaremos la función de densidad f_X:

$$\int |x|^\alpha f_X(x)dx = \int_{x \leq 1} |x|^\alpha f_X(x)dx + \int_{x > 1} |x|^\alpha f_X(x)dx \leq \int_{x \leq 1} f_X(x)dx + \int_{x > 1} |x|^\beta f_X(x)dx \leq$$

$$\leq P(X \leq 1) + E[|X|^\beta] < +\infty$$

y queda demostrada la existencia de $E[|X|^\alpha]$ para $\alpha \leq \beta$.