Tema 3

Continuidad y límite funcional

Generalizando lo que conocemos para funciones reales de variable real, vamos a estudiar las nociones de *límite* y *continuidad* para funciones entre dos espacios métricos cualesquiera. Las definimos de forma que quede claro que se trata de nociones topológicas. Analizamos con detalle el *carácter local* de ambas nociones, aclaramos la relación entre ellas y comprobamos que la composición de aplicaciones preserva la continuidad. Al considerar el límite de una composición de funciones, obtenemos una regla de cambio de variable, útil en la práctica para el cálculo de límites. Prestamos especial atención al caso particular de funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ y con valores en $\mathbb{R}^M$ donde $M \in \mathbb{N}$, que se denominan *campos escalares* cuando $M = 1$, o *campos vectoriales* cuando $M > 1$.

3.1. Continuidad en un punto

Para motivar la definición de continuidad, recordemos el caso conocido de una función real de variable real, es decir, una función $f : E \to \mathbb{R}$, donde E es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Sabemos que f es continua en un punto $x \in E$, cuando verifica la siguiente condición:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ y \in E,\ |y - x| < \delta\ \Rightarrow\ |f(y) - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

Pensemos en $\mathbb{R}$ como espacio métrico con la distancia usual, y en E como subespacio métrico de $\mathbb{R}$, en el que tenemos la distancia inducida. Usando bolas abiertas en ambos espacios métricos, (1) toma la forma:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ f\big(B(x,\delta)\big) \subset B\big(f(x),\varepsilon\big) \tag{2}$$

Como ha ocurrido otras veces, podemos sustituir las bolas abiertas por entornos arbitrarios. Más concretamente, usando los entornos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$ y los de x en E, es claro que (2) equivale a

$$\forall\, V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)\ \exists\, U \in \mathcal{U}(x)\ :\ f(U) \subset V \tag{3}$$

La última inclusión equivale a $U \subset f^{-1}(V)$, con la notación habitual para la imagen inversa de un conjunto por una función: $f^{-1}(V) = \{y \in E\ :\ f(y) \in V\}$. Finalmente, que $f^{-1}(V)$ contenga un entorno de x, equivale a que $f^{-1}(V)$ sea entorno de x.

En resumen, considerando tanto en E como en $\mathbb{R}$ la topología usual, hemos visto que f es continua en x si, y sólo si, la imagen inversa por f de cada entorno de $f(x)$ en $\mathbb{R}$ es un entorno de x en E. Tenemos así expresada la continuidad de una forma que sólo involucra entornos en los espacios métricos de partida y llegada de nuestra función. Esta condición es la que tomaremos como definición de continuidad para una función entre dos espacios métricos cualesquiera, definición que podríamos usar también para espacios topológicos. En todo lo que sigue, E y F serán espacios métricos arbitrarios, cuyas distancias se denotan ambas por d.

Decimos que una función $f : E \to F$ es **continua en un punto** $x \in E$ cuando la imagen inversa por f de cada entorno de $f(x)$ en el espacio F es un entorno de x en E:

$$V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big) \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

Puede llamar la atención que sólo consideremos funciones definidas en todo el espacio E y no sólo en un subconjunto suyo. No perdemos generalidad, pues cualquier subconjunto de E es a su vez un espacio métrico con la distancia inducida.

Ha quedado muy claro que la continuidad de una función en un punto es una propiedad topológica. Sin embargo, sustituyendo como siempre entornos por bolas abiertas, tenemos una caracterización de la continuidad en términos de las distancias que estemos usando. Además, como no podía ser de otra forma, tenemos una caracterización *secuencial* de la continuidad, es decir, en términos de convergencia de sucesiones:

- *Para $f : E \to F$ y $x \in E$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (i) *f es continua en el punto x*
  (ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ y \in E, \ d(y,x) < \delta \ \Rightarrow \ d\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$
  (iii) $x_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to x \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to f(x)$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Dado $\varepsilon > 0$, $B\big(f(x),\varepsilon\big)$ es entorno de $f(x)$ en F, luego su imagen inversa por f será entorno de x en E, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset f^{-1}\big[B\big(f(x),\varepsilon\big)\big]$. Para $y \in E$ con $d(y,x) < \delta$ se tiene entonces $f(y) \in B\big(f(x),\varepsilon\big)$, es decir, $d\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Para $\varepsilon > 0$, tenemos $\delta > 0$ dado por (ii). Por ser $\{x_n\} \to x$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $d(x_n,x) < \delta$, luego $d\big(f(x_n), f(x)\big) < \varepsilon$. Esto prueba que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Si f no es continua en x, vemos que no se verifica (iii). Existe $V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$ tal que $f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}(x)$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(V)$ no puede contener a la bola abierta de centro x y radio $1/n$, así que existe $x_n \in E$ tal que $d(x_n,x) < 1/n$ pero $f(x_n) \notin V$. Está claro entonces que $\{x_n\} \to x$ pero $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$. ■

Conviene aclarar una cuestión sencilla, que se refiere al espacio de llegada de una función. Si F es subespacio métrico de otro espacio G, una función $f : E \to F$ puede verse también como función de E en G. Pues bien, la continuidad de f en un punto $x \in E$ no depende de que consideremos F o G como espacio métrico de llegada. Ello es obvio con cualquiera de las condiciones equivalentes del enunciado anterior. Por ejemplo, la segunda sólo involucra las distancias $d(f(y), f(x))$ para ciertos puntos $y \in E$, que son las mismas en F que en G, precisamente porque F es subespacio métrico de G.

Cuestión diferente se plantea cuando cambiamos el espacio métrico de partida, al restringir nuestra función. La relación entre la continuidad de f y la de sus restricciones es la que sigue.

- *Sea $f : E \to F$ una función y sea A un subconjunto no vacío de E, que consideramos como espacio métrico con la distancia inducida. Para $x \in A$ se tiene:*
  - (i) *Si f es continua en x, entonces $f\big|_A$ es continua en x.*
  - (ii) *Si $f\big|_A$ es continua en x y A es entorno de x en E, entonces f es continua en x.*

(i). Si $V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$ sabemos que $f^{-1}(V)$ es un entorno de x en el espacio métrico E, de donde deducimos que $\big(f\big|_A\big)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ es entorno de x en el espacio métrico A.

(ii). Si $V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$, sabemos ahora que $\big(f|_A\big)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ es entorno de x en A, luego $f^{-1}(V) \cap A \supset U \cap A$ donde U es un abierto de E tal que $x \in U$. Entonces $U \cap A$ es entorno de x en E, luego igual le ocurre a $f^{-1}(V)$, pues $U \cap A \subset f^{-1}(V)$. ■

Queda claro que, para decidir si una función es continua en un punto, basta conocerla en un entorno de dicho punto, tan pequeño como se quiera. Por ello decimos que el resultado anterior pone de manifiesto el *carácter local* de la continuidad, en el que enseguida insistiremos.

3.2. Continuidad global

Decimos que una función $f : E \to F$ es **continua en un conjunto** no vacío $A \subset E$ cuando es continua en todo punto $x \in A$. Si f es continua en E decimos simplemente que f es **continua**. Reunimos en un sólo enunciado tres caracterizaciones de esta propiedad:

- *Para cualquier función $f : E \to F$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *f es continua*
  - (ii) *Para todo abierto $V \subset F$, se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto de E*
  - (iii) *Para todo cerrado $C \subset F$, se tiene que $f^{-1}(C)$ es un cerrado de E*
  - (iv) *f preserva la convergencia de sucesiones: para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de E, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $V = V^\circ \subset F$ y $x \in f^{-1}(V)$, como $V \in \mathcal{U}(f(x))$, la continuidad de f en x nos dice que $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$, luego $f^{-1}(V)$ es entorno de todos sus puntos, es decir, es abierto.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $x \in E$ y $W \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$, existe un abierto V de F, tal que $f(x) \in V \subset W$, con lo que $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$. Por (ii) sabemos que $f^{-1}(V)$ es abierto, luego $f^{-1}(W) \in \mathcal{U}(x)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si $C = \overline{C} \subset F$, como $F \setminus C$ es abierto, (ii) nos dice que $f^{-1}(F \setminus C)$ es abierto, pero $f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)$, luego $f^{-1}(C)$ es cerrado.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Es enteramente análoga: si $V = V^\circ \subset F$, (iii) nos dice que $f^{-1}(F \setminus V)$ es cerrado, luego $f^{-1}(V)$ es abierto.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Es evidente.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Sea $x \in E$ y $\{x_n\} \to x$ con $x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para ver que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $y_{2n-1} = x_n$, e $y_{2n} = x$, es claro que $\{y_n\} \to x$, y (iv) nos dice que $\{f(y_n)\}$ es convergente. Como $f(y_{2n}) = f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\{f(y_n)\} \to f(x)$, luego $\{f(x_n)\} = \{f(y_{2n-1})\} \to f(x)$, como queríamos. ■

Las caracterizaciones de la continuidad, dadas por las condiciones (ii) y (iii), se usan a menudo para probar que ciertos subconjuntos de E son abiertos o cerrados. Por ejemplo, tomando $F = \mathbb{R}$ observamos que, si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces los conjuntos

$$\{x \in E \ : \ f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^+) \qquad \text{y} \qquad \{x \in E \ : \ f(x) < 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^-)$$

son abiertos, mientras que el conjunto $\{x \in E \ : \ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1\} = f^{-1}\big([0,1]\big)$ es cerrado.

Volvamos a la relación entre la continuidad de una función y la de sus restricciones, pero pensando en la continuidad en un conjunto no vacío $A \subset E$. Es obvio que, si $f : E \to F$ es continua en A, entonces $f\big|_A$ es continua. En general, el recíproco es falso, pero sí se verifica cuando A es abierto. En efecto, para cada $x \in A$ tenemos que A es entorno de x, y de ser $f\big|_A$ continua en x se deduce que f es continua en x. Así pues:

- *Si A es un subconjunto abierto no vacío de E, una función $f : E \to F$ es continua en A si, y sólo si, $f\big|_A$ es continua.*

En la práctica, esta observación se usa frecuentemente para estudiar la continuidad de una función que viene definida mediante una disyuntiva. Un ejemplo sencillo es el siguiente:

- *Supongamos que $E = U \cup V$ donde U y V son subconjuntos abiertos de E. Entonces, una función $f : E \to F$ es continua si, y sólo si, $f\big|_U$ y $f\big|_V$ son continuas.*

Resaltamos que la continuidad de f, no sólo en un punto, sino en todo el espacio E, tiene **carácter local**, en el sentido de que se puede comprobar con sólo conocer f *localmente*: f es continua si, y sólo si, para cada $x \in E$ existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $f\big|_U$ es continua.

3.3. Límite funcional y su relación con la continuidad

Recordemos la definición de límite en un punto para una función real de variable real. Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, y dados $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \big[\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ : \ x \in A,\ 0 < |x - \alpha| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon\big]$$

Está muy claro cómo podemos reformular la afirmación anterior de forma que tenga sentido para una función entre espacios métricos cualesquiera. Seguimos trabajando con dos espacios métricos E y F cuyas distancias se denotan por d, pero ahora tendremos una función $f : A \to F$ donde A es un subconjunto no vacío de E. No nos limitamos al caso $A = E$, para poder hablar de límite de f en puntos de $E \setminus A$, que deberán ser puntos de acumulación de A.

Así pues, dado $\alpha \in A'$, decimos que f **tiene límite** en el punto α cuando existe $L \in F$ verificando la siguiente condición:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ : \ x \in A,\ 0 < d(x,\alpha) < \delta \ \Rightarrow \ d\big(f(x), L\big) < \varepsilon \tag{4}$$

Comprobaremos enseguida que entonces L es único, le llamamos **límite** de f en el punto α y escribimos $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$.

En efecto, si $L_1, L_2 \in F$ verifican (4), dado $\varepsilon > 0$ podemos claramente encontrar $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < d(x,\alpha) < \delta$ se tiene $d\big(f(x), L_1\big) < \varepsilon$ y también $d\big(f(x), L_2\big) < \varepsilon$. Como $\alpha \in A'$, existe efectivamente $x \in A$ con $0 < d(x,\alpha) < \delta$, y usando un tal x, deducimos que $d(L_1, L_2) \leqslant d\big(L_1, f(x)\big) + d\big(f(x), L_2\big) < 2\varepsilon$, desigualdad que es válida para todo $\varepsilon > 0$. Tenemos por tanto $d(L_1, L_2) = 0$, es decir, $L_1 = L_2$. Nótese que la condición $\alpha \in A'$ es la que permite asegurar la unicidad del límite.

La primera observación sobre el concepto de límite funcional es muy clara: para que tenga sentido hablar de límite de la función f en un punto $\alpha \in A'$ no es necesario que f esté definida en el punto α y, aún cuando $\alpha \in A \cap A'$, el valor que tome f en α no afecta para nada a la existencia del límite, ni al valor de dicho límite, caso de que exista.

En segundo lugar, el límite funcional es una *propiedad topológica*. La definición utiliza las distancias de E y F, pero se puede reformular fácilmente para que sólo aparezcan sus topologías. Basta sustituir en (4), como hemos hecho otras veces, la bola abierta $B(L,\varepsilon)$ del espacio F por un entorno V de L, y la bola abierta $B(\alpha,\delta)$ por un entorno U de α en el espacio E. Por otra parte, el límite funcional se puede caracterizar en términos de convergencia de sucesiones. En resumen, tenemos las siguientes equivalencias, cuya demostración es muy similar a la que se hizo para la continuidad.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \quad &\iff \quad \forall\, V \in \mathcal{U}(L) \;\; \exists\, U \in \mathcal{U}(\alpha) \;:\; f\big(U \cap (A \setminus \{\alpha\})\big) \subset V \\ &\iff \quad \big[\, x_n \in A \setminus \{\alpha\} \;\; \forall n \in \mathbb{N}\,, \;\; \{x_n\} \to \alpha \;\;\Rightarrow\;\; \{f(x_n)\} \to L \,\big]\end{aligned}$$

Resaltemos el *carácter local* del límite funcional: para saber si nuestra función $f : A \to F$ tiene límite en un punto $\alpha \in A'$, basta conocerla “cerca” de α. Concretamente, fijemos $r \in \mathbb{R}^+$ arbitrario y consideremos el conjunto $B = \{x \in A \,:\, 0 < d(x,\alpha) < r\}$, que verifica $\alpha \in B'$. Es claro que, para $L \in F$, se tiene $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = L$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to\alpha} f\big|_B(x) = L$.

Las nociones de límite y continuidad guardan entre sí la misma relación que conocíamos para funciones reales de variable real. En primer lugar, cuando a es punto aislado de A, es decir, $a \in A \setminus A'$, no tiene sentido hablar de límite de f en a, pero f siempre es continua en el punto a. Basta observar que el conjunto $\{a\}$ es entorno del punto a en el espacio métrico A. En lo que sigue estudiamos las otras dos situaciones posibles.

- *Para $a \in A \cap A'$ se tiene que f es continua en a si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

El límite indicado consiste en que, fijado $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que se tenga $d\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon$ siempre que $x \in A$ verifique $0 < d(x,a) < \delta$. Para la continuidad, la única diferencia es que no se excluye el caso $x = a$, pero en ese caso, la desigualdad $d\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon$ es obvia. ■

- *Si $\alpha \in A' \setminus A$, entonces f tiene límite en el punto α si, y sólo si, se puede definir una función $g : A \cup \{\alpha\} \to F$ que es continua en el punto α y verifica que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. En tal caso se tiene $g(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, y en particular g es única.*

Si existe tal función g se tiene claramente $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = g(\alpha)$, donde hemos usado el resultado anterior, pues g es continua en α. Esto prueba una implicación y la última afirmación del enunciado. Recíprocamente, si f tiene límite en el punto α, basta definir $g(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ y $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, para tener la extensión de f que es continua en el punto α. ■

3.4. Composición de funciones: cambio de variable

Como otra propiedad básica de la continuidad, comprobamos enseguida que se conserva al componer dos funciones:

- *Sean G, E y F espacios métricos, consideremos dos funciones $\varphi : G \to E$ y $f : E \to F$, y su composición $f \circ \varphi : G \to F$. Si φ es continua en un punto $z \in G$ y f es continua en el punto $x = \varphi(z)$, entonces $f \circ \varphi$ es continua en z. Por tanto, si φ y f son continuas, entonces $f \circ \varphi$ es continua.*

La comprobación es evidente: para $W \in \mathcal{U}\big[(f \circ \varphi)(z)\big] = \mathcal{U}\big(f(x)\big)$, la continuidad de f en el punto x nos dice que $f^{-1}(W) \in \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}\big(\varphi(z)\big)$, con lo que la continuidad de φ en z nos dice que $\varphi^{-1}\big(f^{-1}(W)\big) = \big(f \circ \varphi\big)^{-1}(W) \in \mathcal{U}(z)$, como queríamos. ■

Usaremos muy frecuentemente el resultado anterior, pues para funciones de varias variables, la composición tiene más utilidad si cabe, que en el caso de una variable. El resultado análogo para el límite de una composición de funciones es una útil regla para el cálculo de límites.

- *Sean E y F espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E, $f : A \to F$ una función y $\alpha \in E$. Sea ahora T un subconjunto no vacío de otro espacio métrico G, $\varphi : T \to E$ una función y $z \in T'$. Supongamos que se cumplen las siguientes dos condiciones:*
$$\lim_{t \to z} \varphi(t) = \alpha \qquad y \qquad \varphi(t) \in A \setminus \{\alpha\} \quad \forall t \in T \setminus \{z\} \tag{5}$$
Entonces $\alpha \in A'$ y se verifica la siguiente implicación:
$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \in F \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to z} f\big(\varphi(t)\big) = L \tag{6}$$

Sea $\{t_n\}$ una sucesión de puntos de $T \setminus \{z\}$ tal que $\{t_n\} \to z$. Tenemos entonces por hipótesis que $\{\varphi(t_n)\}$ es una sucesión de puntos de $A \setminus \{\alpha\}$ tal que $\{\varphi(t_n)\} \to \alpha$. Esto nos dice de entrada que $\alpha \in A'$, pero además, de $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$, deducimos que $\big\{f\big(\varphi(t_n)\big)\big\} \to L$. Esto prueba que $\lim\limits_{t \to z} f\big(\varphi(t)\big) = L$, como queríamos. ■

La principal utilidad del resultado anterior consiste en que nos permite estudiar la existencia del límite de una función, usándolo como una *regla de cambio de variable*, pensando que el límite que aparece a la derecha de la implicación (6) se deduce del que aparece a la izquierda, mediante el cambio de variable $x = \varphi(t)$, siempre que φ verifique las condiciones (5). Para concretar, supongamos que queremos estudiar la existencia del límite de f en un punto $\alpha \in A'$. Podemos entonces elegir libremente la función φ, cuidando que se verifique (5), y estudiar la existencia del límite en z de la función $f \circ \varphi$. Dada la libertad que tenemos para elegir φ, lo haremos de forma que la función $f \circ \varphi$ sea más fácil de estudiar que f. Lo más habitual es tomar $G = \mathbb{R}$ y T un intervalo, con lo que $f \circ \varphi$ es una función de variable real, típicamente más sencilla que f. Veamos entonces la forma de usar el resultado anterior:

- Si φ verifica (5) y $f \circ \varphi$ no tiene límite en z, concluimos que f no tiene límite en α, pues en otro caso (6) nos llevaría a contradicción.

- Si por el contrario tenemos $\lim_{t \to z} f\big(\varphi(t)\big) = L \in F$, no podemos concluir que L sea el límite de f en α, pues (6) es sólo una implicación, no una equivalencia. Sin embargo, sí sabemos que L es el *único posible límite* de f en α, pues si se tuviera $\lim_{x \to \alpha} f(x) = L' \in F$ con $L' \neq L$, (6) nos llevaría de nuevo a contradicción.

- En particular, si encontramos dos funciones φ_1 y φ_2, ambas verificando (5), tales que tanto $f \circ \varphi_1$ como $f \circ \varphi_2$ tienen límite en el punto z, pero dichos límites no coinciden, está claro que f tampoco tiene límite en α.

Siempre que usamos (6), solemos decir que hacemos un **cambio de variable**. Deberemos concretar la función φ que estamos usando y comprobar (5). Todo ello se puede indicar de forma breve diciendo que *usamos el cambio de variable* $x = \varphi(t) \in A$ *con* $t \in T$*, teniendo en cuenta que* $x \to \alpha$ *cuando* $t \to z$ *y que* $x \neq \alpha$ *para* $t \neq z$. Casi nunca son necesarias tantas precisiones, podemos omitir todo aquello que se deduzca claramente del contexto.

3.5. Primeros ejemplos de funciones continuas

Para dos espacios métricos arbitrarios E y F, ejemplo obvio de funciones continuas son las *constantes*. Si $y_0 \in F$ y $f(x) = y_0$ para todo $x \in E$, la continuidad de f es obvia.

En general, puede no haber más ejemplos, pues tanto E como F pueden reducirse a un punto, pero aún excluyendo estos casos triviales, puede ocurrir que toda función continua de E en F sea constante.

Por ejemplo, supongamos que F es un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $F^\circ = \emptyset$, de forma que F no contiene intervalos no triviales. Considerando en $\mathbb{R}$ la distancia usual y en F la inducida, toda función continua $f : \mathbb{R} \to F$ es constante. En efecto, viendo f como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, podemos aplicar el teorema del valor intermedio, obteniendo que $f(\mathbb{R})$ es un intervalo. Pero como $f(\mathbb{R}) \subset F$, deducimos que $f(\mathbb{R})$ se reduce a un punto, es decir, f es constante. Así pues, viendo a $\mathbb{Q}$ como subespacio métrico de $\mathbb{R}$, toda función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ es constante.

Supongamos que E es un subespacio métrico de F. Entonces la *inclusión* de E en F, definida por $I(x) = x$ para todo $x \in E$, es continua. En efecto, para todo abierto $V \subset F$, se tiene que $I^{-1}(V) = V \cap E$ es un abierto de E. En el caso particular $E = F$, vemos que la función *identidad* en cualquier espacio métrico E es continua.

La *distancia* d, de todo espacio métrico E, es un ejemplo importante de función continua, de $E \times E$ en $\mathbb{R}$, entendiendo que $E \times E$ es el espacio métrico producto. Para comprobarlo, observamos que si $x, y, u, v \in E$, se tiene

$$|d(u,v) - d(x,y)| \leqslant |d(u,v) - d(x,v)| + |d(x,v) - d(x,y)| \leqslant d(u,x) + d(v,y)$$

Dado $\varepsilon > 0$, y teniendo en cuenta la definición de la distancia d_∞ en $E \times E$, vemos que basta tomar $d_\infty\big((u,v),(x,y)\big) < \varepsilon/2$ para tener $|d(u,v) - d(x,y)| < \varepsilon$.

Para cualquier espacio normado X, conviene destacar tres funciones continuas, ligadas a su estructura. En primer lugar, de la desigualdad

$$\big|\,\|y\| - \|x\|\,\big| \leqslant \|y - x\| \qquad \forall x,y \in X$$

se deduce claramente que la *norma* de X es una función continua $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$.

En segundo lugar, la función *suma*, $(x,y) \mapsto x+y$ es una función continua, definida en el espacio normado producto $X \times X$ y con valores en X. Ello se deduce claramente de la siguiente desigualdad, válida para cualesquiera $x,y,u,v \in X$:

$$\|\,(u+v)-(x+y)\,\| \leqslant \|u-x\| + \|v-y\| \leqslant 2\,\|\,(u,v)-(x,y)\,\|_\infty$$

Lo mismo ocurre con el *producto por escalares*, $(\lambda,x) \mapsto \lambda x$, que es una función continua en el espacio normado producto $\mathbb{R} \times X$ con valores en X. Lo comprobamos usando ahora la caracterización secuencial de la continuidad. Si $\big\{(\lambda_n,x_n)\big\}$ es una sucesión en $\mathbb{R} \times X$ que converge a $(\lambda,x) \in \mathbb{R} \times X$, es decir, con $\{\lambda_n\} \to \lambda$ y $\{x_n\} \to x$, debemos ver que $\{\lambda_n x_n\} \to \lambda x$. Ello se deduce claramente de la siguiente desigualdad, válida para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|\,\lambda_n x_n - \lambda x\,\| &\leqslant |\lambda_n|\,\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\,\|x\| \\ &\leqslant |\lambda_n - \lambda|\,\|x_n - x\| + |\lambda|\,\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\,\|x\|\end{aligned}$$

3.6. Funciones con valores en un producto

Encontraremos con frecuencia funciones que toman valores en un producto de espacios métricos o de espacios normados, por lo que conviene aclarar algunas cuestiones básicas sobre este tipo de funciones.

Si $M \in \mathbb{N}$ y $F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_M$ es un producto cartesiano de conjuntos no vacíos, para cada $k \in \Delta_M$ tenemos una aplicación sobreyectiva $\pi_k : F \to F_k$, que a cada M-upla $y \in F$ hace corresponder su k-ésima componente, esto es, $\pi_k(y) = y(k)$ para todo $y \in F$. Suele decirse que estas funciones son las **proyecciones coordenadas** del producto F sobre cada uno de sus factores, o más concretamente, π_k es la k-ésima proyección coordenada, para todo $k \in \Delta_M$.

Si E es otro conjunto no vacío y $f : E \to F$ una función, para cada $k \in \Delta_M$ podemos considerar la composición $f_k = \pi_k \circ f$, y decimos que $f_k : E \to F_k$ es la k-ésima **componente** de f, de modo que f tiene M componentes $f_1, f_2, \ldots, f_M$ que la determinan mediante la obvia igualdad siguiente:

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_M(x)\big) \qquad \forall x \in E$$

Es por ello que escribimos $f = (f_1, f_2, \ldots, f_M)$ para indicar las componentes de una función que toma valores en un producto cartesiano.

Pues bien, si $F_1, F_2 \ldots F_M$ son espacios métricos cuyas distancias se denotan todas por d y consideramos en F la distancia d_∞ del espacio métrico producto, es claro que las proyecciones coordenadas son funciones continuas, pues para todo $k \in \Delta_M$ tenemos de hecho la desigualdad

$$d\big(\pi_k(y), \pi_k(z)\big) \leqslant d_\infty(y,z) \qquad \forall y,z \in F$$

Si E es otro espacio métrico y una función $f : E \to F$ es continua en un punto $x \in E$, la regla sobre la continuidad de una composición nos dice que la k-ésima componente f_k también es continua en x, para todo $k \in \Delta_M$. Recíprocamente, si todas las componentes de f son continuas en x, dada una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E tal que $\{x_n\} \to x$, la sucesión $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$, de puntos de F, verifica que $\{y_n(k)\} = \{f_k(x_n)\} \to f_k(x)$ para todo $k \in \Delta_M$, luego $\{y_n\} \to f(x)$ y concluimos que f es continua en el punto x. Así pues, la continuidad de f equivale a la de sus componentes:

- *Sea E un espacio métrico y $F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_M$ un producto de espacios métricos. Una función $f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) : E \to F$ es continua en un punto $x \in E$ si, y sólo si, f_k es continua en x, para todo $k \in \Delta_M$.*

Enunciamos el resultado análogo para el límite funcional, cuya demostración es muy similar a la que hemos hecho para la continuidad.

- *Sea E un espacio métrico y $F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_M$ un producto de espacios métricos. Sea A un subconjunto no vacío de E, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) : A \to F$ una función y $\alpha \in A'$. Entonces, para $y \in F$ se tiene:*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to\alpha} f_k(x) = y(k) \quad \forall k \in \Delta_M$$

3.7. Operaciones con funciones continuas

Vamos a comentar algunas operaciones algebraicas que podemos hacer con funciones y a comprobar que tales operaciones preservan la continuidad. Si E, Y son conjuntos no vacíos, denotamos por $\mathcal{F}(E,Y)$ al conjunto de todas las funciones de E en Y. Si $Y = \mathbb{R}$, escribimos simplemente $\mathcal{F}(E)$ en lugar de $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$.

Cuando Y es un espacio vectorial, $\mathcal{F}(E,Y)$ también lo es, con la **suma y producto por escalares** definidos de manera natural:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) && \forall x \in E \quad \forall f,g \in \mathcal{F}(E,Y) \\ (\lambda g)(x) &= \lambda g(x) && \forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall g \in \mathcal{F}(E,Y) \end{aligned}$$

De hecho tenemos una operación más general que el producto por escalares. En vez del escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ podemos usar una función $\Lambda \in \mathcal{F}(E)$. Entonces, para $g \in \mathcal{F}(E,Y)$ podemos considerar la función **producto** $\Lambda g \in \mathcal{F}(E,Y)$ dada por

$$\big(\Lambda g\big)(x) = \Lambda(x)\, g(x) \qquad \forall x \in E$$

En particular, cuando $Y = \mathbb{R}$ hemos definido el producto de dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(E)$ que nos da una función $fg \in \mathcal{F}(E)$. Tenemos por tanto un producto en $\mathcal{F}(E)$ que, junto con la suma antes definida, convierte a $\mathcal{F}(E)$ en un anillo conmutativo con unidad. Podemos finalmente considerar el **cociente** de dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(E)$, siempre que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in E$. Naturalmente, dicho cociente es la función $f/g \in \mathcal{F}(E)$ dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in E$$

En el contexto adecuado, todas las operaciones anteriores preservan la continuidad:

- *Sea E un espacio métrico e Y un espacio normado. Si $f,g \in \mathcal{F}(E,Y)$ y $\Lambda \in \mathcal{F}(E)$ son funciones continuas en un punto $x \in E$, entonces $f+g$ y Λg son continuas en x. En el caso $Y = \mathbb{R}$, si $g(E) \subset \mathbb{R}^*$, entonces f/g es continua en x.*

Todo se comprueba sin dificultad usando la convergencia de sucesiones, pero merece la pena comentar un razonamiento alternativo, más elegante.

Consideramos las funciones $\Phi = (f,g) : E \to Y \times Y$ y $\Psi = (\Lambda, g) : E \to \mathbb{R} \times Y$, es decir,

$$\Phi(x) = \big(f(x), g(x)\big) \qquad \text{y} \qquad \Psi(x) = \big(\Lambda(x), g(x)\big) \qquad \forall x \in E$$

Denotemos por $\sigma : Y \times Y \to Y$ a la suma, y $\tau : \mathbb{R} \times Y \to Y$ al producto por escalares, del espacio vectorial Y, es decir, $\sigma(y,z) = y+z$ y $\tau(\lambda, y) = \lambda y$ para cualesquiera $y,z \in Y$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es claro entonces que $f+g = \sigma \circ \Phi$ y $\Lambda g = \tau \circ \Psi$.

Como f, g y Λ son continuas en x, también lo son Φ y Ψ, pero sabemos que σ y τ son funciones continuas, luego las composiciones $f+g$ y Λg son continuas en x.

En el caso $Y = \mathbb{R}$, para el cociente f/g, observamos que $\Phi(E) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ y podemos escribir $f/g = q \circ \Phi$ donde $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ viene dada por $q(y,z) = y/z$ para $(y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Es claro que q es continua, luego f/g es continua en x, por serlo Φ. ■

Si E es un espacio métrico e Y un espacio normado, denotamos por $\mathcal{C}(E,Y)$ al subconjunto de $\mathcal{F}(E,Y)$ formado por las funciones continuas de E en Y. De nuevo escribimos $\mathcal{C}(E)$ en lugar de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$. Por el resultado anterior, tenemos:

- *$\mathcal{C}(E,Y)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E,Y)$. Además, $\mathcal{C}(E)$ es un subanillo de $\mathcal{F}(E)$. Si $f,g \in \mathcal{C}(E)$ y $g(E) \subset \mathbb{R}^*$, entonces $f/g \in \mathcal{C}(E)$.*

El resultado anterior sobre operaciones con funciones continuas tiene una versión análoga para el límite funcional, que nos da las reglas básicas para calcular límites de funciones. Lo enunciamos brevemente y omitimos su demostración, que no tiene dificultad.

- *Sea E un espacio métrico, $A \subset E$ y $\alpha \in A'$. Sea Y un espacio normado y consideremos tres funciones $f,g : A \to Y$ y $\Lambda : A \to \mathbb{R}$ que tengan límite en el punto α, es decir,*

  $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = y \in Y, \qquad \lim_{x \to \alpha} g(x) = z \in Y \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \alpha} \Lambda(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$

  Se tiene entonces que:

  $$\lim_{x \to \alpha} \big(f+g\big)(x) = y+z \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \alpha} \big(\Lambda f\big)(x) = \lambda y$$

  En particular, cuando $Y = \mathbb{R}$ se tiene que $\lim_{x \to \alpha} \big(f\,g\big)(x) = yz$. Finalmente, también en el caso $Y = \mathbb{R}$, si $g(A) \subset \mathbb{R}^*$ y $z \in \mathbb{R}^*$ se tiene:

  $$\lim_{x \to \alpha} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{y}{z}$$

3.8. Campos escalares y vectoriales

Prestemos ahora atención a las funciones que más nos interesan. Un **campo escalar** es una función real de N-variables reales, es decir, una función $f : A \to \mathbb{R}$, donde A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$. Una función de N-variables reales que tome valores vectoriales, es decir, una función $f : A \to \mathbb{R}^M$ con $M > 1$, recibe el nombre de **campo vectorial**. Naturalmente, a la hora de discutir límites y continuidad de un campo escalar o vectorial, se trabaja siempre con la topología usual, tanto en el conjunto de definición A como en el espacio de llegada, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^M$.

Como caso particular de las operaciones antes estudiadas vemos que, fijados $M \in \mathbb{N}$ y un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^N$, el conjunto $\mathcal{F}(A,\mathbb{R}^M)$ de todos los campos vectoriales definidos en A y con valores en $\mathbb{R}^M$, es un espacio vectorial, del que los campos vectoriales continuos forman el subespacio vectorial $\mathcal{C}(A,\mathbb{R}^M)$.

Cada campo vectorial $f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R}^M)$ tiene M componentes, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_M)$, que son campos escalares. Recordemos que, para cada $k \in \Delta_M$, se tiene $f_k = \pi_k \circ f$, donde $\pi_k : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ es la k-ésima proyección coordenada, es decir, $\pi_k(y) = y(k)$ para todo $y \in \mathbb{R}^M$. Sabemos que, para estudiar límites y continuidad de un campo vectorial, basta trabajar con sus componentes. Concretamente, f es continuo en un punto $a \in A$, o tiene límite en un punto $\alpha \in A'$ si, y sólo si, lo mismo le ocurre a f_k para todo $k \in \Delta_M$. Esta equivalencia se repetirá con todas las propiedades de los campos vectoriales que trataremos más adelante.

Recordemos que el conjunto $\mathcal{F}(A)$ de los campos escalares definidos en A no es sólo un espacio vectorial, sino también un anillo, en el que los campos escalares continuos forman el subanillo y subespacio vectorial $\mathcal{C}(A)$.

Tras las funciones constantes, los ejemplos más sencillos de campos escalares continuos son las restricciones al conjunto A de las proyecciones coordenadas en $\mathbb{R}^N$. Podemos ahora considerar el subanillo de $\mathcal{F}(A)$ engendrado por las constantes y esas restricciones, que se denota por $\mathcal{P}(A)$. Cuando $f \in \mathcal{P}(A)$ decimos que f es una **función polinómica** en A. Como hemos incluido en $\mathcal{P}(A)$ a las funciones constantes, vemos que $\mathcal{P}(A)$ también es subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$. Además, como $\mathcal{C}(A)$ es un subanillo de $\mathcal{F}(A)$, tenemos que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{C}(A)$. Hemos obtenido así abundantes ejemplos de campos escalares continuos, que conviene describir con más detalle.

Es claro que cada función polinómica $f \in \mathcal{P}(A)$ ha de venir definida por

$$f(x) = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_N=0}^{p} \lambda_{j_1 j_2 \ldots j_N}\, x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_N^{j_N} \qquad \forall x = (x_1,x_2,\ldots,x_N) \in A$$

donde $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y, para cualesquiera $j_1, j_2, \ldots, j_N \in \{0,1,2,\ldots,p\}$, el coeficiente $\lambda_{j_1 j_2 \ldots j_N}$ es un número real.

De manera más general podemos considerar cocientes de funciones polinómicas. Se dice que $h : A \to \mathbb{R}$ es una **función racional** en A, si existen funciones polinómicas $f, g \in \mathcal{P}(A)$ tales que $g(x) \neq 0$ y $h(x) = f(x)/g(x)$ para todo $x \in A$. Denotamos por $\mathcal{R}(A)$ al conjunto de las funciones racionales en A y tenemos claramente:

$$\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{C}(A) \subset \mathcal{F}(A)$$

donde cada conjunto de funciones es subanillo y subespacio vectorial de los que le siguen.

3.9. Ejercicios

1. Sean E y F espacios métricos y $f : E \to F$ una función. Probar que f es continua si, y sólo si, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ para todo conjunto $A \subset E$.

2. Dado un subconjunto A de un espacio métrico E, la *función característica* de A es la función $\chi_A : E \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\chi_A(x) = 1 \quad \forall x \in A \qquad \text{y} \qquad \chi_A(x) = 0 \quad \forall x \in E \setminus A$$
Probar que χ_A es continua en un punto $x \in E$ si, y sólo si, $x \in A^\circ \cup (E \setminus A)^\circ$. Deducir que χ_A es continua si, y sólo si, A es a la vez abierto y cerrado.

3. Si E y F son espacios métricos, se dice que una función $f : E \to F$ es *localmente constante* cuando, para cada $x \in E$, existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $f\big|_U$ es constante. Probar que entonces f es continua. Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y una función localmente constante $f : A \to \mathbb{R}$, cuya imagen $f(A)$ sea un conjunto infinito.

4. Sea E un espacio métrico con distancia d y A un subconjunto no vacío de E. Probar la continuidad de la función $f : E \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = d(x,A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{d(x,a) : a \in A\} \qquad \forall x \in E$$

5. Sea E un espacio métrico con distancia d, y consideremos el espacio producto $E \times E$. Probar que, para todo $r \in \mathbb{R}_0^+$, el conjunto $\{(x,y) \in E \times E : d(x,y) < r\}$ es abierto, mientras que $\{(x,y) \in E \times E : d(x,y) \leqslant r\}$ es cerrado. En particular se tiene que la *diagonal* $\Delta(E) = \{(x,x) : x \in E\}$ es un conjunto cerrado. Deducir que, si F es otro espacio métrico y $f,g : E \to F$ son funciones continuas, entonces $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es un subconjunto cerrado de E.

6. Sean E, F espacios métricos y $f : E \to F$ una función continua. Probar que su *gráfica*, es decir, el conjunto $\operatorname{Gr} f = \left\{\big(x, f(x)\big) : x \in E\right\}$, es un subconjunto cerrado del espacio métrico producto $E \times F$.

7. Sea E un espacio métrico e Y un espacio pre-hilbertiano. Para $f,g \in \mathcal{F}(E,Y)$, se define una función $h \in \mathcal{F}(E)$ por $h(x) = \big(f(x) \,\big|\, g(x)\big)$ para todo $x \in E$. Probar que, si f y g son continuas en un punto $a \in E$, entonces h también lo es.

8. Sea E un espacio métrico y $f,g : E \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un punto $a \in E$. Probar que la función $h : E \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \max\left\{f(x), g(x)\right\}$ para todo $x \in E$, también es continua en a.

9. Probar que si Y es un espacio normado, E un espacio métrico y $f : E \to Y$ una función continua en un punto $a \in E$, entonces la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|f(x)\|$ para todo $x \in E$, también es continua en el punto a.

10. Probar las siguientes igualdades:
$$\text{(a)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \qquad \text{(b)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4} = 1$$