Práctica 4. Funciones implícitas

Ejercicios resueltos

1. Probar que el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
e^{u+x}\cos(y+v) - x^2 + y^2 &= 0\\
e^{u+x}\,\mathrm{sen}(y+v) - 2xy &= 0
\end{aligned}
$$

define funciones implícitas $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1,0)$, con $u(1,0) = -1$ y $v(1,0) = 0$. Calcular las derivadas parciales de u y v en dicho punto.

Solución

Tomamos $\Omega = \mathbb{R}^4$ y consideramos la función $F = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida, para cualesquiera $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, por

$$
\begin{aligned}
F_1(x,y,u,v) &= e^{u+x}\cos(y+v) - x^2 + y^2\\
F_2(x,y,u,v) &= e^{u+x}\,\mathrm{sen}(y+v) - 2xy
\end{aligned}
$$

Se tiene claramente que $F(1,0,-1,0) = (0,0)$. También es evidente que F_1 y F_2 son funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^4$, pues ambas se obtienen mediante sumas, productos y composiciones de funciones de clase C^1: funciones polinómicas, la exponencial, el seno y el coseno. Por tanto $F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$.

En todo punto $P = (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$, se tiene claramente que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x}(P) &= e^{u+x}\cos(y+v) - 2x & \frac{\partial F_1}{\partial y}(P) &= -e^{u+x}\,\mathrm{sen}(y+v) + 2y\\
\frac{\partial F_1}{\partial u}(P) &= e^{u+x}\cos(y+v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(P) &= -e^{u+x}\,\mathrm{sen}(y+v)\\
\frac{\partial F_2}{\partial x}(P) &= e^{u+x}\,\mathrm{sen}(y+v) - 2y & \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) &= e^{u+x}\cos(y+v) - 2x\\
\frac{\partial F_2}{\partial u}(P) &= e^{u+x}\,\mathrm{sen}(y+v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(P) &= e^{u+x}\cos(y+v)
\end{aligned}
$$

En particular, en el punto $P_0 = (1,0,-1,0)$, obtenemos

$$
\frac{\partial F_1}{\partial x}(P_0) = -1\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(P_0) = 0\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u}(P_0) = 1\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v}(P_0) = 0
$$

$$
\frac{\partial F_2}{\partial x}(P_0) = 0\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) = -1\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u}(P_0) = 0\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v}(P_0) = 1
$$

Así pues, la matriz jacobiana que nos interesa es

$$JF(1,0,-1,0) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como consecuencia tenemos claramente que

$$\det\left(\frac{\partial\,(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 1 \neq 0$$

Por tanto, el teorema de función implícita nos dice que el sistema del enunciado define funciones implícitas $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, que son diferenciables en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ con $(1,0) \in U$, $u(1,0) = -1$ y $v(1,0) = 0$.

Para todo $(x,y) \in U$, el mencionado sistema nos dice ahora que

$$\begin{aligned} &e^{\,x+u(x,y)}\,\cos\big(y+v(x,y)\big) \;-\; x^2 \;+\; y^2 \;=\; 0 \qquad \text{y} \\ &e^{\,x+u(x,y)}\,\operatorname{sen}\big(y+v(x,y)\big) \;-\; 2xy \;=\; 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

Tenemos aquí dos funciones idénticamente nulas en U, cuyas derivadas parciales también deberán ser idénticamente nulas. Así pues, si abreviamos entendiendo que todas las funciones se evalúan en un punto arbitrario $(x,y) \in U$, se tiene:

$$\begin{aligned} e^{\,x+u}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(y+v) \;-\; e^{\,x+u}\,\operatorname{sen}(y+v)\,\frac{\partial v}{\partial x} \;-\; 2x \;=\; 0 \\ e^{\,x+u}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\operatorname{sen}(y+v) \;+\; e^{\,x+u}\,\cos(y+v)\,\frac{\partial v}{\partial x} \;-\; 2y \;=\; 0 \end{aligned}$$

Para $(x,y) = (1,0)$, como $u(1,0) = -1$ y $v(1,0) = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) \;=\; 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) \;=\; 0$$

Análogamente, de $(*)$ deducimos que, para todo $(x,y) \in U$ se tiene:

$$\begin{aligned} e^{\,x+u}\,\cos(y+v)\,\frac{\partial u}{\partial y} \;-\; e^{\,x+u}\,\operatorname{sen}(y+v)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \;+\; 2y \;=\; 0 \\ e^{\,x+u}\,\operatorname{sen}(y+v)\,\frac{\partial u}{\partial y} \;+\; e^{\,x+u}\,\cos(y+v)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \;-\; 2x \;=\; 0 \end{aligned}$$

y en particular, para $(x,y) = (1,0)$ concluimos que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) \;=\; 1$$

Con esto hemos calculado las derivadas parciales de u y v en $(1,0)$. ■

2. Probar que la ecuación

$$x\,y\,z + \log(z-5) - 2\,x - 2\,y - 2\,x^2y^2 = 0$$

define una función implícita $z = z(x,y)$, diferenciable en un entorno de $(1,1)$, con $z(1,1) = 6$. Calcular $\nabla z(1,1)$.

Solución

Consideramos el conjunto $\Omega = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z > 5 \big\}$, que es un abierto de $\mathbb{R}^3$, y la función $F : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y,z) = x\,y\,z + \log(z-5) - 2\,x - 2\,y - 2\,x^2y^2 \qquad \forall\,(x,y,z) \in \Omega$$

que claramente verifican $(1,1,6) \in \Omega$ y $F(1,1,6) = 0$.

La función $(x,y,z) \mapsto \log(z-5)$ es de clase C^1 en Ω, como composición de una función polinómica, que toma valores en $\mathbb{R}^+$, con el logaritmo, que es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^+$. Como F es la suma de la función anterior con otra función polinómica, concluimos que $F \in C^1(\Omega)$.

Para todo $(x,y,z) \in \Omega$ se tiene que

$$\nabla F(x,y,z) = \left(y\,z - 2 - 4\,x\,y^2 \;,\; x\,z - 2 - 4\,x^2y \;,\; x\,y + \frac{1}{z-5} \right)$$

Para $(x,y,z) = (1,1,6)$ obtenemos que $\nabla F(1,1,6) = \big(0,0,2\big)$, y en particular se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,6) = 2 \neq 0$$

El teorema de la función implícita nos dice que la ecuación dada define una función implícita $z = z(x,y)$, diferenciable en un entorno U de $(1,1)$ con $z(1,1) = 6$.

Para todo $(x,y) \in U$ se tiene entonces que

$$x\,y\,z(x,y) + \log\big(z(x,y) - 5\big) - 2\,x - 2\,y - 2\,x^2y^2 = 0$$

y tenemos una función idénticamente nula, cuyas derivadas parciales también lo serán. Por tanto, para todo $(x,y) \in U$, evaluando la función z y sus derivadas parciales en el punto (x,y) obtenemos que

$$y\,z + x\,y\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z-5}\,\frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 4\,x\,y^2 = 0$$
$$x\,z + x\,y\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z-5}\,\frac{\partial z}{\partial y} - 2 - 4\,x^2\,y = 0$$

Para $(x,y) = (1,1)$, teniendo en cuenta que $z(1,1) = 6$, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 0$$

Se tiene por tanto que $\nabla z(1,1) = (0,0)$. ■