Examen de teoría y problemas 1

10 de abril de 2019

Métodos Numéricos I_Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas_UGR

DURACIÓN: 110 minutos

MODELO 1

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI/PASAPORTE: FIRMA:

PREGUNTA 1
0.6 puntos

Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de números reales definida para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ como

$$x_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx.$$

Justifica razonadamente que esta sucesión verifica la recurrencia

$$x_0 = \log(6/5)$$

y

$$n \geq 1 \;\Rightarrow\; x_n = \frac{1}{n} - 5x_{n-1}$$

(utiliza para ello la identidad

$$\frac{x}{x+5} = 1 - \frac{5}{x+5},$$

multiplica por x^{n-1} e integra). Analiza la propagación del error cuando se parte de $x_0 + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$. Expresa x_n como $f_n(x_0)$, para una conveniente función f_n y comprueba que su condicionamiento (relativo) en x_0 diverge cuando $n \to \infty$.

PREGUNTA 2

0.6 puntos

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 10^{-5} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

cuya solución es

$$x_1 = \frac{200000}{100001}, \quad x_2 = \frac{100003}{100001}.$$

a) Resuélvelo mediante el método de Gauss, trabajando en el sistema de punto flotante $\mathbb{F}(10, 5, -4, 6)$ y con redondeo.

b) Aplica el método de Gauss con pivotaje, también con redondeo en $\mathbb{F}(10, 5, -4, 6)$.

c) ¿A qué se debe el mejor comportamiento frente a los errores de redondeo del segundo método frente al primero?

PREGUNTA 3
0.8 puntos

Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y el correspondiente **método de Jacobi**

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. ,$$

a) deduce razonadamente que $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) < 1$ (calcula alguna de las normas matriciales que conoces de la matriz $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$).

b) ¿Es diagonalmente estrictamente dominante la matriz de coeficientes del sistema? ¿Contradice este hecho el resultado obtenido en el apartado anterior?

c) Calcula dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** del sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$.

d) ¿Admite la matriz de coeficientes del sistema una factorización LU? En caso afirmativo, ¿puede ser, de hecho, tipo Cholesky?

Examen de teoría y problemas 1

10 de abril de 2019

Métodos Numéricos I_Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas_UGR

DURACIÓN: 110 minutos

MODELO 4

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI/PASAPORTE: FIRMA:

PREGUNTA 1
0.8 puntos

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y el correspondiente **método de Jacobi**

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow \mathbf{x}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. .$$

a) Deduce razonadamente que $\rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) < 1$ (calcula alguna de las normas matriciales que conoces de la matriz $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$).

b) ¿Es diagonalmente estrictamente dominante la matriz de coeficientes del sistema? ¿Contradice este hecho el resultado obtenido en el apartado anterior?

c) Calcula dos iteraciones del **método de Gauss–Seidel** del sistema anterior, partiendo de la iteración inicial $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$.

d) ¿Admite la matriz de coeficientes del sistema una factorización LU? En caso afirmativo, ¿puede ser, de hecho, tipo Cholesky?

PREGUNTA 2

0.6 puntos

Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de números reales definida para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ como

$$x_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+4} dx.$$

Justifica razonadamente que esta sucesión verifica la recurrencia

$$x_0 = \log(5/4)$$

y

$$n \geq 1 \;\Rightarrow\; x_n = \frac{1}{n} - 4x_{n-1}$$

(utiliza para ello la identidad

$$\frac{x}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4},$$

multiplica por x^{n-1} e integra). Analiza la propagación del error cuando se parte de $x_0 + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$. Expresa x_n como $f_n(x_0)$, para una conveniente función f_n y comprueba que su condicionamiento (relativo) en x_0 diverge cuando $n \to \infty$.

PREGUNTA 3
0.6 puntos

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 10^{-5} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

cuya solución es

$$x_1 = \frac{200000}{100001}, \quad x_2 = \frac{100003}{100001}.$$

a) Resuélvelo mediante el método de Gauss, trabajando en el sistema de punto flotante $\mathbb{F}(10, 5, -4, 6)$ y con redondeo.

b) Aplica el método de Gauss con pivotaje, también con redondeo en $\mathbb{F}(10, 5, -4, 6)$.

c) ¿A qué se debe el mejor comportamiento frente a los errores de redondeo del segundo método frente al primero?