Objetivos de aprendizaje Tema 2

Análisis Matemático II

Javier Gómez López

22 de marzo de 2022

1. Conocer la definición de convergencia absoluta de una serie de funciones, así como su relación con la convergencia puntual y la uniforme.

Trabajamos con un conjunto no vacío $C \subset A$. Decimos que una serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ **converge absolutamente** en C, cuando $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ converge puntualmente en C, es decir, cuando la serie de términos positivos $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ es convergente, para todo $x \in C$.

La relación entre la convergencia absoluta y la puntual es inmediata:

- *Si la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente en C, entonces también converge puntualmente en C y se verifica que*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \qquad \forall x \in C$$

La única relación que existe entre la convergencia absoluta y la uniforme es el Test de Weierstrass que estudiaremos más adelante. Por ejemplo, tomando $f_n(x) = (-1)^n/n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, pero no converge absolutamente en ningún punto de $\mathbb{R}$.

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Convergencia de una serie de potencias, conocido su radio de convergencia

Llamamos **serie de potencias** a toda serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n$ en la que, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ venga dada por

$$f_n(x) = c_n(x-a)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\{c_n\}$ es una sucesión de número reales y $c_0, a \in \mathbb{R}$. Se dice que tal serie está **centrada** en el punto $a \in \mathbb{R}$.

Definimos ahora el **radio de convergencia** de una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} c_n(x-a)^n$ como la constante $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ dada por

$$R = 1/L \qquad \text{donde} \qquad L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Así, enunciamos el siguiente resultado:

- *Si J es el intervalo de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} c_n(x-a)^n$, entonces dicha serie converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto compacto de J. En particular, converge absolutamente en J. Por otra parte, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R}\setminus(\overline{J}\cup\{a\})$.*

b) Propiedades de la suma de una serie de potencias
Ahora pretendemos estudiar la **suma de la serie**, es decir, la función $f : J \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n(x-a)^n \qquad \forall x \in J$$

Algunas de sus propiedades son:

- *Las series de potencias $\sum_{n\geq 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geq 0}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n$ tienen el mismo radio de convergencia.*
- *Sea $\sum_{n\geq 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$, y $J \neq \emptyset$ su intervalo de convergencia. Entonces la suma de la serie, es de clase C^∞ en J. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+k)!}{n!}c_{n+k}(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R, y su suma coincide con la k-ésima derivada de f, es decir,*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!}c_{n+k}(x-a)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}c_n(x-a)^{n-k}$$

En particular se tiene que $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ para todo $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

3. Conocer y comprender el test de Weierstrass, incluyendo su demostración.

Teorema 1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, de un conjunto A en $\mathbb{R}$ y C un subconjunto no vacío de A. Supongamos que existe una serie convergente $\sum_{n\geq 1} M_n$ de números reales, verificando*

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \forall x \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente y uniformemente en C.

Demostración. La convergencia absoluta de deduce claramente del criterio de comparación para series de términos positivos. Fijado $x \in C$, como $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge, la desigualdad enunciada nos permite usar dicho criterio para obtener que $\sum_{n\geq 1}|f_n(x)|$ también converge.

Para obtener la convergencia uniforme, usaremos el criterio de Cauchy. Fijado $\varepsilon > 0$, como por hipótesis la serie $\sum_{n\geq 1} M_n$ es una sucesión de Cauchy, existen un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p, q \in \mathbb{N}, \quad m \leq p < q \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{q} M_k \leq \varepsilon$$

Entonces, también para $m \leq p < q$, y para todo $x \in C$, usando la hipótesis, tenemos que

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |f_k(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{q} M_k \leq \varepsilon$$

Esto prueba que la serie estudiada es de Cauchy, y por tanto hemos terminado. ∎