EJERCICIOS RELACIÓN 3

3 Decide de forma razonada si son euclídeas o no las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha+4 & -2 & 2 \\ -2 & \alpha+1 & -1 \\ 2 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

- $\det(A_3) = 15 - 5 - 3 = 7 > 0$
- $\det(A_2) = 5 - 1 = 4 > 0$
- $\det(A_1) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ Métrica euclídea

- $\det(C_1) = 2 > 0$
- $\det(C_2) = -10 - 1 = -11 < 0$
- $\det(C) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ La métrica no es euclídea

índice $(C) = 2$ porque las matrices congruentes conservan el signo del determinante $\Rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}}$, $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ ✓

Otra forma rápida de ver que la métrica no es euclídea:

- Si hay un 0 en la diagonal: sabemos que si la métrica es euclídea $g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, por lo que en la matriz C vemos que hay un vector luminoso $\Rightarrow C$ no es euclídea
- Mirando el signo de elementos de la diagonal: Para que sea euclídea $g(v,v) > 0\ \forall v$. Como hay un -5 en la diagonal, no es euclídea.

Vamos con el último apartado:

$\det(D_1) = \alpha + 4 > 0 \Rightarrow \alpha > -4$

$\det(D_2) = (\alpha+4)(\alpha-1) - 4 = \alpha^2 + 5\alpha + \cancel{4} - \cancel{4} = \alpha\underbrace{(\alpha+5)}_{\vee\, 0}$ $\quad \alpha > 0$

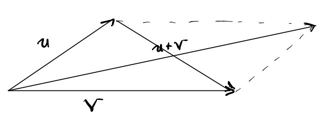
por la conclusión anterior

$\det(D_3) = \alpha^2(\alpha+5) > 0$ (por la condición anterior $\alpha > 0$)

$\Rightarrow$ La métrica asociada a la matriz D es euclídea $\Leftrightarrow \alpha > 0$

4 Dados dos vectores cualesquiera u y v de un espacio vectorial euclídeo (V, g), demuestra que se cumplen estas propiedades

a) Identidad del paralelogramo: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$



$$\boxed{\|v\|_g = \sqrt{g(v,v)}}$$

$\|u+v\|^2 = g(u+v, u+v) = g(u, u+v) + g(v, u+v) = g(u,u) + g(u,v) + g(v,u) + g(v,v) =$

como g es métrica

$= g(u,u) + 2g(u,v) + g(v,v)$

$\|u-v\|^2 = g(u-v, u-v) = g(u, u-v) - g(v, u-v) = g(u,u) - 2g(u,v), g(v,v)$

Luego:

$\|u+v\|^2 + \|u-v^2\| = g(u,u) + \cancel{2g(u,v)} + g(v,v) + g(u,u) - \cancel{2g(u,v)} + g(v,v) =$

$= 2g(u,u) + 2g(v,v) = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

b) Teorema del coseno : $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\measuredangle(u,v))$

Del ejercicio anterior

$\|u-v\|^2 = g(u,u) - 2g(u,v) + g(v,v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2g(u,v) =$

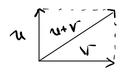
$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\measuredangle(u,v)$

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|}}$$

c) Teorema de Pitágoras : $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

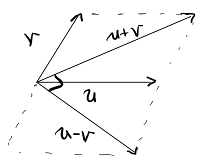
Sabemos que en la desigualdad triangular sólo se da la igualdad si $\cos\measuredangle(u,v) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow u \perp v$



Desigualdad triangular: $\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$
La igualdad se dá si $\cos\measuredangle(u,v) = \frac{\pi}{2}$

d) $\|u\| = \|v\| \iff u+v \perp u-v$



$u+v \perp u-v \iff g(u+v, u-v) = 0$

$g(u+v, u-v) = g(u,u-v) + g(v,u-v) = g(u,u) - \cancel{g(u,v) + g(v,u)} - g(v,v) = 0$

$\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \Rightarrow \|u\|^2 = \|v\|^2$

e) $|\,\|u\| - \|v\|\,| \leq \|u-v\|$

Desigualdad Cauchy-Schwarz
$\lvert g(u,v)\rvert \leq \|u\|\|v\|$
La igualdad se da si son linealmente dependientes

$(\|u\| - \|v\|)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|$

$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2g(u,v) + \|v\|^2$

(1) $-\|u\|\|v\| \leq g(u,v) \leq \|u\|\|v\|$

$\underset{(1)}{\Rightarrow} \|u\|^2 - 2g(u,v) + \|v\|^2 \geq \|u\|^2 - 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$

⑤ Utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio vectorial euclídeo conveniente para probar las siguientes desigualdades y caracterizar cuando se obtiene la igualdad en cada una de ellas.

a) Para cualesquiera números $x_1, \dots, x_n \geq 0$ se cumple que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$g = g_0$ $\quad u: (x_1^{\frac{3}{2}}, \dots, x_n^{\frac{3}{2}})$ $\quad v: (x_1^{\frac{1}{2}}, \dots, x_n^{\frac{1}{2}})$

Desigualdad Cauchy-Schwarz
$\lvert g(u,v)\rvert \leq \|u\|\|v\|$
La igualdad se da si son linealmente dependientes

$g(v,v) = g_0(u,v) = x_1^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} + \dots + x_n^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\|u\|^2 = g_0(u,u) = x_1^3 + \dots + x_n^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3$

$\|v\|^2 = g_0(v,v) = x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

b) Para cada matriz simétrica A de orden n se verifica $(tr(A))^2 \leq n\,tr(A^2)$

$u = I_n \quad v = A$

$g(A,C) = \text{traza}(A \cdot C^t) = \text{traza}(A \cdot C)$

son simétricas

$g(u,v)^2 = \text{traza}(I_n \cdot A)^2 = \text{traza}(A)^2 \quad \Rightarrow \text{traza}(A)^2 \leq n\,\text{traza}(A^2)$

$\|u\|^2 = \text{traza}(I_n) = n$

$\|v\|^2 = \text{traza}(A \cdot A) = \text{traza}(A^2)$

c) Para cualquier función continua $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ se cumple:

$$\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \varphi(t)^2\,dt$$

$g(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(t) f_2(t)\,dt$ (Es una métrica euclídea)

$f_1(t) = 1$ $\qquad \| f_1(t) \|^2 = \int_a^b dt = b-a$

$f_2(t) = \varphi(t)$ $\qquad \| \varphi(t) \|^2 = \int_a^b \varphi^2(t)\,dt$

$$\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \varphi^2(t)\,dt$$

6 Consideramos $\mathbb{R}^4$ con su métrica euclídea usual g_u. Calcula una base ortonormal de (U, g_U) donde U es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x + 4y - z + 3t = 0 \right\}$$

Amplía la base anterior hasta conseguir una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g_u)$. Calcula las coordenadas del vector $u = (1,0,0,1)$ en la base obtenida.

Consideramos $B_u = \{ (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \}$ $\qquad M(g_u, B_u) = Id$

Comenzamos sacando una base de U:

$U = L(\{ (2,-1,0,0), (0,0,3,1), (1,0,2,0) \})$

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt:

Tenemos $\beta = \{ v_1, \ldots, v_n \}$

Para calcular $\beta' = \{ u_1, \ldots, u_n \}$

1) $u_1 = v_1$

2) $u_i = v_i - \frac{g(v_i, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \ldots - \frac{g(v_i, u_{i-1})}{\|u_{i-1}\|^2} u_{i-1}$

Usamos el método de Gram - Schmidt:

$u_1 = (2,-1,0,0)$

$$u_2 = (0,0,3,1) - \cancel{\frac{g((0,0,3,1),(2,-1,0,0))}{\|(2,-1,0,0)\|^2}}^{\to 0} (2,-1,0,0) = (0,0,3,1)$$

$g((0,0,3,1),(2,-1,0,0)) = 0$

$g((2,-1,0,0),(2,-1,0,0)) = 5$

$g((1,0,2,0),(2,-1,0,0)) = 2$

$g((0,0,3,1),(0,0,3,1)) = 10$

$g((1,0,2,0),(0,0,3,1)) = 6$

$$u_3 = (1,0,2,0) - \frac{g((1,0,2,0),(2,-1,0,0))}{\|(2,-1,0,0)\|^2}(2,-1,0,0) - \frac{g((1,0,2,0),(0,0,3,1))}{\|(0,0,3,1)\|^2}(0,0,3,1) =$$

$$= (1,0,2,0) - \frac{2}{5}(2,-1,0,0) - \frac{6}{10}(0,0,3,1) =$$

$$= \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{3}{5} \right) = (1,2,1,-3) \qquad g(u_3, u_3) = \frac{3}{5}$$

$$B_{o_U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(0,0,3,1), \frac{\sqrt{15}}{3}\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{3}{5} \right) \right\}$$

Para ampliar calculamos un vector ortogonal a la base anterior y lo ortonormalizamos:

$$g\left((x,y,z,t), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0,0)\right) = (x,y,z,t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x,y,z,t) \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$$

$$g\left((x,y,z,t),\ \tfrac{1}{\sqrt{10}}(0,0,3,1)\right) = (x,y,z,t)\begin{pmatrix}0\\0\\3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{10}}z + \frac{1}{\sqrt{10}}t = 0$$

$$g\left((x,y,z,t),\ \tfrac{\sqrt{15}}{5}\left(\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{5},\tfrac{1}{5},-\tfrac{3}{5}\right)\right) = (x,y,z,t)\begin{pmatrix}\sqrt{15}/15\\2\sqrt{15}/15\\\sqrt{15}/15\\-3\sqrt{15}/15\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{15}}{15}x + \frac{2\sqrt{15}}{15}y + \frac{\sqrt{15}}{15}z - \frac{3\sqrt{15}}{15}t = 0$$

Planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}}z + \frac{1}{\sqrt{10}}t = 0 \\ \frac{\sqrt{15}}{15}x + \frac{2\sqrt{15}}{15}y + \frac{\sqrt{15}}{15}z - \frac{3\sqrt{15}}{15}t = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z,t) = \left(\tfrac{2}{3}t, \tfrac{4}{3}t, -\tfrac{1}{3}t, t\right) \quad t=3 \Rightarrow (2,4,-1,3)$$

$$g((2,4,-1,3),(2,4,-1,3)) = 4+16+1+9 = 30$$

Por lo que:

$$\mathcal{B} = \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0,0),\ \tfrac{1}{\sqrt{10}}(0,0,3,1),\ \tfrac{\sqrt{15}}{3}\left(\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{5},\tfrac{1}{5},-\tfrac{3}{5}\right),\ \tfrac{1}{\sqrt{30}}(2,4,-1,3) \right\}$$

Sólo falta expresar el vector u como combinación lineal de la base:

$$(1,0,0,1) = \alpha\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0,0) + \beta\frac{1}{\sqrt{10}}(0,0,3,1) + \gamma\frac{\sqrt{15}}{3}\left(\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{5},\tfrac{1}{5},-\tfrac{3}{5}\right) + \lambda\frac{1}{\sqrt{30}}(2,4,-1,3)$$

Queda pendiente resolver el sistema

7) En el espacio vectorial $S_2(\mathbb{R})$ de las de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales se considera la métrica g definida como $g(A,C) = tr(AC)$

a) Prueba que g es una métrica euclídea

Consideramos la B_u de $S_2(\mathbb{R})$ y calculamos la matriz asociada a la métrica:

$M\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad N\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$a_{11} = 1$

$a_{21} = 0 \quad a_{22} = 2$

$a_{31} = 0 \quad a_{32} = 0 \quad a_{33} = 1$

como es métrica

$$\Rightarrow M(g, B_u) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\cdot \det(A_1) = 1 > 0$

$\cdot \det(A_2) = 2 > 0$

$\cdot \det(A_3) = 2 > 0$

$\Rightarrow$ Por el criterio de Sylvester, la métrica es euclídea.

b) Utiliza el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ a partir de la base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix} \right\}$$

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt:
Tenemos $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$
Para calcular $\mathcal{B}' = \{u_1, \dots, u_n\}$
1) $u_1 = v_1$
2) $u_i = v_i - \frac{g(v_i, u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \dots - \frac{g(v_i, u_{i-1})}{\|u_{i-1}\|^2}u_{i-1}$

$$u_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} - \frac{g\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2$$

$$g\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=(1,1,1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=2$$

$$u_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\cancel{\frac{2}{2}}^{\,1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$u_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}-\frac{g\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\frac{g\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=(2\,0\,0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=2$$

$$g\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=0$$

$$g\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=0$$ Para el módulo se interpreta como 1

$$u_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}-\cancel{\frac{2}{2}}_{\,1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\cancel{\frac{0}{1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}^{\,0}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Luego:

$$\beta_0=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$g\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)=2$$

c) Encuentra dos matrices linealmente independientes $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ que sean unitarias y formen un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ con I_2

Tomamos $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}=A$

$$\|A\|_g^2=1 \Rightarrow (a\,b\,c)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=(a\ \ 2b\ \ c)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a^2+2b^2+c=1$$

$$\|I\|_g^2=1$$

$$g(A,I)=(a\,b\,c)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=a+c$$

Luego:

$$\cos(\theta)=\frac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|}\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{g(A,I)}{\|I\|_g\|A\|_g}=\frac{1}{2}=a+c$$

Pendiente

⑧ En el espacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por:

$$g(p(x),q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

Demuestra que la base usual $\mathcal{B}u$ de $\mathbb{R}_2[x]$ no es ortonormal. Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g)$ a partir de $\mathcal{B}u$.

Comenzamos calculando la matriz de la métrica en la base usual:

$q(x)\cdot 1$ $\quad x\cdot q(x)$ $\quad x^2 q(x)$

como la matriz es simétrica

$a_{11} = 2$

$a_{21} = 1 \qquad a_{22} = \frac{2}{3}$

$a_{31} = \frac{2}{3} \qquad a_{32} = \frac{1}{2} \qquad a_{33} = \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow M(f, \mathcal{B}u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2/3 \\ 1 & 2/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$g((1,0,0),(0,1,0)) = (1,0,0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2/3 \\ 1 & 2/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 & 2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \;\; 1 \;\; \tfrac{2}{3})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Los vectores de $\mathcal{B}u$ no son ortogonales (ni ortonormales, obviamente).

$u_1 = (1,0,0)$

$$u_2 = (0,1,0) - \frac{g((0,1,0),(1,0,0))}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,0) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$g((1,0,0),(1,0,0)) = 2$

$\downarrow$ Nos quedamos con a_{11}

$g((0,1,0),(1,0,0)) = 1$

$\downarrow$ Nos quedamos con a_{21}

$$u_3 = (0,0,1) - \frac{g((0,0,1),(1,0,0))}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) - \frac{g((0,0,1),(-\frac{1}{2},1,0))}{\|(-\frac{1}{2},1,0)\|^2}\left(-\frac{1}{2},1,0\right) =$$

$g((0,0,1),(1,0,0)) = \frac{2}{3}$ $\qquad = (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,0,0) - \left(-\frac{1}{2},1,0\right) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$g((0,0,1),(-\frac{1}{2},1,0)) = \frac{1}{6}$ $\qquad g\left(\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, 1\right),\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{2},1\right)\right) = \frac{8}{45}$

$g((-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},1,0)) = \frac{1}{6}$

Luego, la base ortonormal que buscamos es:

$$\mathcal{B}o = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0),\; \sqrt{6}\left(-\frac{1}{2},1,0\right),\; \frac{3\sqrt{5}}{8}\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{2},1\right) \right\}$$

⑨ En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica g, cuya matriz en la base usual es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que es una métrica euclídea.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \det(A_1) = 3 > 0 \\ \bullet \det(A_2) = 2 > 0 \\ \bullet \det(A_3) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Por el criterio de Sylvester, es una métrica euclídea.

b) Calcula el ángulo que forman los vectores $u = (1,1,0)$, $v = (0,-1,1)$

$$\cos(\theta) = \frac{g(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$g(u,v) = (1,1,0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2,0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|u\| = \sqrt{g(u,u)} = \sqrt{2} \qquad \|v\| = \sqrt{g(v,v)}$$

$$g(u,u) = (2\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$g(v,v) = (0,-1,1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

c) Calcular la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector $u = (2,1,0)$ respecto al plano $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$

$$U = L(\{(1,-1,0),(1,0,-1)\})$$

$$U^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, g((x,y,z),(1,-1,0)) = 0,\ g((x,y,z),(1,0,-1)) = 0\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} 4x - 2y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} = L(\{(1,2,0)\})$$

Podríamos haber ortonormalizado y salen cálculos más simples

$$B = \{(1,-1,0),\ (1,0,-1),\ (1,2,0)\}$$

$$(2,1,0) = a(1,-1,0) + b(1,0,-1) + c(1,2,0) \Rightarrow (1,0,1)_B$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2 = a+b+c \Rightarrow 2 = a+c \\ 1 = -a+2c \\ 0 = -b \Rightarrow b = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} 2 = a+c \\ 1 = -a+2c \\ \hline 3 = 3c \Rightarrow c = 1 \\ \quad a = 1 \end{array}$$

Para este tipo de ejercicios:
1) Sacar una base ortogonal del espacio
2) Expresar el vector como combinación lineal de la base

$$(2,1,0) = \underbrace{(1,-1,0) + }_{U}\ \underbrace{+\ (1,2,0)}_{U^\perp}$$

$\pi_U(2,1,0) = (1,-1,0)$ (Nos quedamos con la parte en U)

$\sigma_U(2,1,0) = (1,-1,0) - (1,2,0) = (0,-3,0)$ (Nos quedamos con $U - U^\perp$)

10 En el espacio $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por $g(A,C)=tr(A,C)$. Se definen las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}$$

a) Calcular el ángulo que forman

$$\measuredangle(A,C)=\frac{g(A,C)}{\|A\|\,\|C\|}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \frac{3\pi}{4}=\theta$$

$$g(A,C)=tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}-2&\\&-1\end{pmatrix}=-3$$

$$\|A\|=\sqrt{g(A,A)}=\sqrt{tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\right)}=\sqrt{tr\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}}=\sqrt{3}$$

$$\|C\|=\sqrt{g(C,C)}=\sqrt{tr\left(\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}=\sqrt{tr\begin{pmatrix}5&\\&1\end{pmatrix}}=\sqrt{6}$$

b) Calcular las proyecciones ortogonales de A sobre $U=L(C)$ y sobre $U^{\perp}$.

Para calcular la proyección ortogonal de A sobre U y sobre $U^{\perp}$ calculo una base formada por U y $U^{\perp}$ y expreso A como combinación lineal de esa base. Para $\pi_U(A)$= Parte en U, $\pi_{U^{\perp}}(A)$= Parte en $U^{\perp}$

$$U^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Big/ tr\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Big/ tr\begin{pmatrix}-2a+b&\\&c\end{pmatrix}=0\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Big/ -2a+b+c=0\right\}=L\left(\left\{\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$B=\{U,U^{\perp}\}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}1=-2\alpha+\beta\\0=\alpha\\-1=\alpha+2\beta-\gamma\\1=\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}1=-2\alpha+\beta\\-1=2\alpha+2\beta\\\hline 0=3\beta\quad\boxed{\beta=0}\end{array}\qquad \alpha=-\frac{1}{2},\ \gamma=\frac{1}{2},\ 1=\lambda$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\underbrace{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}}_{U}+\underbrace{+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{U^{\perp}}$$

$$\pi_U\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}$$ Me quedo con la parte en U

$$\pi_{U^{\perp}}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$ Me quedo con la parte $U^{\perp}$

c) Calcula la imagen de A por la simetría respecto al subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ a-b+c-d=0,\ a+d=0 \right\}$$

$$W = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \Big/ g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0,\ g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \Big/ \begin{matrix} a+d=0 \\ b+c=0 \end{matrix} \right\} = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$\mathcal{B} = \{ W, W^{\perp} \}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{W} + \underbrace{\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{W^{\perp}}$$

$\alpha = 1 \quad \gamma = 0$

$\beta = -\frac{1}{2} \quad \lambda = \frac{1}{2}$

$$\sigma_W(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (W - W^{\perp})$$

11 Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Se sabe que $\|v_i\| = 2$ para cada $i = 1, \dots, n$ y que $\measuredangle(v_i, v_j) = \frac{\pi}{3}$ si $i \neq j$. Calcular $M(g, \mathcal{B})$ y una base ortonormal de (V, g).

Pendiente

12 Se consideran los endomorfismos $f,h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dadas por:

$$f(x,y,z) = (2x+y+z \; , \; x+2y+z , \; x+y+2z) \quad , \quad M(h,Bu) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3/2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Demuestra que f y h son autoadjuntos respecto a la métrica euclídea usual. Calcula dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ en las que las matrices f y h sean diagonalizables

$f(1,0,0) = (2,1,1)$
$f(0,1,0) = (1,2,1)$
$f(0,0,1) = (1,1,2)$

$$\Rightarrow M(f,Bu) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para ver si un endomorfismo es autoadjunto vemos si: $M(g,B) \cdot M(f,B)$ es simétrica (B es una base cualquiera)
Si la base B es ortonormal, como g es euclídea $\Rightarrow M(g,B) = Id$
$Id \cdot M(f,B) \Rightarrow M(f,B)$ simétrica

Como para la métrica euclídea usual (g_0), la Bu es una base ortonormal, basta con ver si las matrices $M(f,B)$ y $M(h,B)$ son simétricas.

Efectivamente, ambas matrices son simétricas $\Rightarrow h, f$ son endomorfismos autoadjuntos respecto la métrica g_0

Como tenemos endomorfismos autoadjuntos respecto la métrica g (euclídea) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ admite una base ortonormal de vectores propios $\Rightarrow$ simultáneamente diagonalizable por semejanza y por congruencia

1) Comprobar que tenemos un endomorfismo autoadjunto (hecho arriba)
2) Calcular el polinomio característico
3) Calcular los subespacios propios
- Subespacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales
4) Usar método de Gram-Smicht (si fuera necesario) para conseguir una base ortogonal de cada subespacio propio.
- Usa este método en concreto, porque te aseguras de no salirte del subespacio
5) Juntar las bases y ortonormalizar (Divide cada vector por su módulo)

$$A = M(f,Bu) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(1-4)$$

Calculamos los subespacios propios:

$$V_4 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{matrix} \right\} =$$

$= L\{(1,1,1)\}$

$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+y+z=0 \right\} =$

$L(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\})$

Juntamos ambas bases y obtenemos una base de vectores propios.
Por otro lado, sabemos que $V_1 \perp V_4$. Solo nos falta buscar una base de vectores ortogonales para V_1:

$$g_0((1,0,-1)(0,1,-1)) = 0+0+1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{No son ortogonales}$$

Usamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt:

Tenemos $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$

Para calcular $\beta' = \{u_1, \dots, u_n\}$

1) $u_1 = v_1$

2) $u_i = v_i - \dfrac{g(v_i, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \dots - \dfrac{g(v_i, u_{i-1})}{\|u_{i-1}\|^2} u_{i-1}$

$u_1 = (1,0,-1)$

$u_2 = (0,1,-1) - \dfrac{g_0((1,0,-1),(0,1,-1))}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1) = (0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

$\beta o_{V_1} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right), (1,0,-1) \right\} \rightarrow \left\{ (1,2,-1), (1,0,-1) \right\}$

Como para ortonormalizar divido por la norma para tener vectores unitarios, puedo tomar un vector proporcional

Por lo que una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonaliza el endomorfismo f sería:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \right\}$$

Juntamos los vectores y dividimos por la norma

13) En $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo f que en la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (-1,2,1), (1,1,1)\}$ tiene la siguiente matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudia si f es autoadjunto con respecto a la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ y, en caso de serlo, encuentra una base ortonormal de vectores propios de f.

Seguimos un procedimiento análogo al ejercicio anterior:

$(a,b,c)\cdot(1,0,1)$ $\quad$ $(a,b,c)\cdot(-1,2,1)$ $\quad$ $(a,b,c)\cdot(1,1,1)$

$a_{11} = 2$ $\quad$ $a_{12} = 0$ $\quad$ $a_{13} = 2$

$a_{21} = 0$ $\quad$ $a_{22} = 6$ $\quad$ $a_{23} = 2$

$a_{31} = 2$ $\quad$ $a_{32} = 2$ $\quad$ $a_{33} = 3$

$$\Rightarrow M(g,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Recordamos: Para probar que es autoadjunto $\Leftrightarrow$ $M(g,\mathcal{B})\cdot M(f,\mathcal{B})$ es simétrica

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 16 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$ es simétrica $\Rightarrow$ f es un endomorfismo autoadjunto

Como f es un endomorfismo autoadjunto $\Rightarrow$ Admite una base ortonormal de vectores propios $\Rightarrow$ f es diagonalizable, tanto por semejanza como congruencia.

Calculamos ahora el polinomio característico:

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -a^3 + 7a^2 - 15a + 9 = (x-1)(x-3)^2$$

$(x-1)(x-3)^2 = 0$

	-1	7	-15	9
1		-1	6	-9
	-1	6	-9	$\boxed{0}$
3		-3	9	
	-1	3	$\boxed{0}$	

Calculamos los subespacios propios:

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} 3x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$= L(\{(0,1,-1)\})$

$$V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = L(\{(1,1,0), (1,0,-1)\})$$

$u_1 = (1,1,0)$

$$u_2 = (1,0,-1) - \frac{g((1,0,-1),(1,1,0))}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) = (1,0,-1) - \frac{1}{4}(1,1,0) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -1\right) = (3,-1,-4)$$

$g_0((1,1,0),(1,1,0)) = 2$

$g_0((1,0,-1),(1,1,0)) = 1$

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{26}}(3,-1,-4),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \right\}$$

(14) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo tridimensional. Supongamos que:

$$M(g,\beta)=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en una cierta base β de V. Sea $f: V \to V$ el endomorfismo dado por:

$$M(f,\beta)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Demuestra que f es autoadjunto en (V,g) y encuentra una base ortonormal de (V,g) formada por vectores propios.

Recordamos: Para probar que es autoadjunto $\Leftrightarrow$ $M(g,\beta)\cdot M(f,\beta)$ es simétrica

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ es simétrica $\Rightarrow f$ es un endomorfismo autoadjunto

Como f es un endomorfismo autoadjunto $\Rightarrow$ Admite una base ortonormal de vectores propios $\Rightarrow f$ es diagonalizable, tanto por semejanza como congruencia.
Calculamos ahora el polinomio característico:

$$P_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2$$

Calculamos los subespacios propios

$$V_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} y=0 \\ 4x-4y+2z=0 \end{matrix}\right\} = L(\{(1,0,-2)\})$$

$$V_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{4} & \cancel{-4} & \cancel{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ x=y\right\} = L(\{(0,0,1),(1,1,0)\})$$

Juntamos ambas bases y obtenemos una base de vectores propios.
Por otro lado, sabemos que $V_1 \perp V_3$. Solo nos falta buscar una base de vectores ortogonales para V_3:

$u_1=(0,0,1)$

$$u_2=(1,1,0)-\frac{g((1,1,0),(0,0,1))}{\|(0,0,1)\|^2}(0,0,1)=(1,1,0)-2(0,0,1)=(1,1,-2)$$

$$g((0,0,1),(0,0,1))=(0,0,1)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=1$$

$g((1,1,-2),(1,1,-2))=1$
$g((1,0,-2),(1,0,-2))=1$

$$g((1,1,0),(0,0,1))=(1,1,0)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=2$$

La forma más correcta de dar la base es $\beta=\{e_1,e_2,e_3\}$
$\beta_0=\{e_3, e_1+e_2-2e_3, e_1-2e_3\}$

Por lo que:
$\beta_0=\{(0,0,1),(1,1,-2),(1,0,-2)\}$ es una base ortonormal

(15) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

encuentra una matriz $P \in O(3)$ tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es diagonal

> Dado una matriz A simétrica $\Rightarrow$ A corresponde a un endomorfismo autoadjunto respecto a la métrica euclídea usual en la base usual, por lo que A es diagonalizable.
> Seguimos el mismo procedimiento de siempre

Calculamos el polinomio característico:

$$P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -a^3 - a^2 + 4a + 4 = (x-2)(x+1)(x+2)$$

Calculamos los subespacios propios:

$$V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{-1} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{matrix} -3x+y-z \\ -x-y-z \end{matrix} \right\} = L(\{(1,1,-2)\})$$

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{matrix} x-z=0 \\ y-z=0 \end{matrix} \right\} = L(\{(1,1,1)\})$$

$$V_{-2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{matrix} x+y-z=0 \\ -x-y+3z=0 \end{matrix} \right\} = L(\{(1,-1,0)\})$$

Juntamos ambas bases y obtenemos una base de vectores propios. Como cada vector está asociado a un subespacio propio distinto, sabemos que son ortogonales. Ortonormalizando:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\}$$

Consideramos $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$, la cual verifica que $P^{-1}AP$ es diagonal

(16) Sea g la métrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los valores propios de A y estudia su signo para determinar el índice de g. Clasifícala en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. ¿En algún caso se obtiene la métrica euclídea usual o la métrica lorentziana usual de $\mathbb{R}^3$?

> Calculamos los valores propios de la matriz. El número de valores propios positivos, negativos y nulos (0), nos indican el número de $+1, -1$ y 0, respectivamente, en la matriz respecto a una base ortonormal.

Calculamos el polinomio característico de A:

Es una diferencia de cuadrados

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & b \\ 0 & b & 1-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & b \\ b & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - b^2\right] =$$

$$= (\lambda-a)(1-\lambda+b)(1-\lambda-b) = (\lambda-a)(\lambda-b-1)(\lambda-1+b)$$

$\lambda_1 = a$

$\lambda_2 = b+1$

$\lambda_3 = 1-b$

Hacemos una tabla para distinguir casos

a\b	<-1	-1	$-1<b<1$	1	>1
<0	2−, 1+, índice = 2 indefinida y no degenerada	1cero, 1+, 1−, degenerada, indefinida índice = 1	1+, 2−, índice = 2, no degenerada, indefinida	1cero, 1+, 1−, índice = 1, degenerada, indefinida	1+, 2−, índice = 2, no degenerada, indefinida
0	1cero, 1+, 1−, índice = 1, degenerada e indefinida	2cero, 1+, índice 0, degenerada, semidefinida positiva	1cero, 1+, 1−, degenerada, indefinida índice = 1	2cero, 1+, índice = 0, degenerada, semidefinida positiva	1cero, 1+, 1−, índice = 1, degenerada, indefinida
>0	1−, 2+, índice = 1 no degenerada e indefinida (Lorentziana $\mathbb{R}^3$)	2+, 1cero, índice = 0, degenerada, semidefinida positiva	2+, 1−, índice = 1, no degenerada, indefinida	1cero, 2+, índice = 0, degenerada, semidefinida positiva	2+, 1−, índice = 1, no degenerada, indefinida

(17) Se considera la familia de métricas $g_{a,b}$ en $\mathbb{R}^4$ tales que:

$$M(g_{a,b}, B_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & b & -1 \end{pmatrix}$$

Clasifica, según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, las métricas $g_{a,b}$.

> Calculamos los valores propios de la matriz. El número de valores propios positivos, negativos y nulos (0), nos indican el número de +1, −1 y 0, respectivamente, en la matriz respecto a una base ortonormal.

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1-\lambda & b \\ b & -1-\lambda \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & b \\ b & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Como es una matriz por bloques, podemos escribir el determinante como ■ · ■

$$= [(a-\lambda)^2 - 1][(1-\lambda)(-1-\lambda) - b^2] = (a-\lambda-1)(a-\lambda+1)(\lambda^2-1-b^2) = (\lambda-a+1)(\lambda-a-1)(\lambda-\sqrt{1+b^2})(\lambda+\sqrt{1+b^2})$$

$\lambda_1 = a-1$

$\lambda_2 = a+1$

$\lambda_3 = \sqrt{1+b^2} > 0$ → Estamos en $\mathbb{R}$ y b no anula el radicando

$\lambda_4 = -\sqrt{1+b^2} < 0$

Luego, distinguiendo casos: (b no afecta)

$a<-1$	3 negativos	1 positiva	Indefinida no degenerada, Rg = 4, Índice = 3
$-1<a<1$	2 negativos	2 positivos	Indefinida no degenerada, Rg = 4, Índice = 2
$a>1$	1 negativa	3 positivas	Indefinida no degenerada, Rg = 4, Índice = 1
$a=-1$	2 negativos	1 positivo 1 cero	Indefinida degenerada, Rg = 3, Índice = 2
$a=1$	1 negativo	2 positivos 1 cero	Indefinida degenerada, Rg = 3, Índice = 1

En ningún caso se obtiene métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$, pero sí se obtiene la métrica Lorentziana usual de $\mathbb{R}^3$ para $a = 1$

⑱ Sean V un plano vectorial, B una base de V y g la métrica en V tal que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Consideramos cada $a \in \mathbb{R}$, el endomorfismo $f_a : V \to V$ dado por:

$$M(f_a, B) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Prueba que g es una métrica euclídea sobre V y encuentra los valores de a para los que f_a es autoadjunto en (V,g)

Usando el criterio de Sylvester:

$\cdot \det(A_1) = 2 > 0$
$\cdot \det(A_2) = 3 > 0$ $\Big\} \Rightarrow g$ es una métrica euclídea

Recordemos: Para probar que es autoadjunto $\Leftrightarrow M(g,B)\cdot M(f,B)$ es simétrica

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2a+1 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

Para que sea un endomorfismo autoadjunto debe ser simétrica $\Rightarrow 2a+1 = 1 \Rightarrow \boxed{a=0}$

Luego f_a es autoadjunto $\Leftrightarrow a=0 \Rightarrow f_0 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) ¿Existe algún valor de a tal que f_a es una isometría en (V,g)?

Para comprobar que f es una isometría necesitamos probar:

$$M(g,B) = M(f_a,B)^t \cdot M(g,B) \cdot M(f_a,B)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2a+1 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -a+1 \\ -a+1 & 2a^2+2a+2 \end{pmatrix}$$

Como debe ser igual a $M(g,B)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -a+1 \\ -a+1 & 2a^2+2a+2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2=2 \\ -a+1 = 1 \Rightarrow a=0 \\ -a+1 = 1 \Rightarrow a=0 \\ 2a^2+2a+\cancel{2} = \cancel{2} = 2a(a+1) \Rightarrow a=0,\ \cancel{a=-1} \end{cases}$$

No válido

Luego f_a es una isometría en $(V,g) \Leftrightarrow \boxed{a=0}$

⑲ Describe las isometrías de $(\mathbb{R}^2, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Como estamos en $(\mathbb{R}^2, g_u)$, acudimos al siguiente esquema

Tenemos (V,g) un plano vectorial. Dado $\theta \in \mathbb{R}$ vamos a denotar

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Teorema: Sea $M \in O(2)$, entonces, $\exists_1\ \theta \in [0, 2\pi)$ tal que:

i) $\det(M) = 1 \Rightarrow M = R(\theta)$

ii) $\det(M) = -1 \Rightarrow M = \tilde{R}(\theta)$

Esquema:

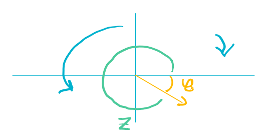
$$f \in Iso(V, g) : \begin{cases} \cdot\ f \in Iso^+(V, g) \ (\det(f) = 1) \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ f = Id \rightarrow \text{Identidad} \\ \cdot\ f = -Id \rightarrow \text{simetría central} \\ \cdot\ f \text{ es una rotación de ángulo } \theta \in (0, \pi) \\ \quad \cos(\theta) = \frac{1}{2} \text{traza}(f) \end{cases} \\ \cdot\ f \in Iso^-(V, g) \ (\det(f) = -1) \Rightarrow \text{Reflexión o simetría axial respecto de } U = V_1 \text{ paralela a } U^\perp = V_{-1} \end{cases}$$

· $\det(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow A \in O^+(2) \Rightarrow f_A \in Iso^+(\mathbb{R}^2, g_u)$

Mirando el esquema vemos que el primer caso corresponde a una rotación de ángulo θ, donde

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\text{traza}(f) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Pequeña aclaración: Recordemos que las rotaciones tienen orientación. Si consideramos $\frac{\pi}{4}$ estamos considerando



, pero también podemos considerar $2\pi - \frac{\pi}{4} = z$

Vamos ahora con el segundo caso:

· $\det(C) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow f \in Iso^-(\mathbb{R}^2, g_u)$

Observando el esquema, se trata de una simetría axial respecto V_1:

$$V_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (\sqrt{2} - 2)x + \sqrt{2}y = 0 \} = L(\{(1, -1+\sqrt{2})\})$$

(20) Sea (V, g) un plano vectorial euclídeo y β una base de V para la que:

$$M(g, \beta) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$$

Estudia si los endomorfismos $f, h : V \rightarrow V$ tales que:

$$M(f, \beta) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad y \quad M(h, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

son isometrías de (V, g). En caso afirmativo, describe tales isometrías.

Recordemos: Para comprobar que $M(g, \beta) = M(f, \beta)^t\ M(g, \beta) \cdot M(f, \beta)$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$$

Luego, f es una isometría. Veamos ahora h:

$$\begin{pmatrix} -7/\sqrt{2} & -5/\sqrt{2} \\ 13/\sqrt{2} & 9/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7/\sqrt{2} & 13/\sqrt{2} \\ -5/\sqrt{2} & 9/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$$

Esquema:

$f \in Iso(V, g)$:
- $f \in Iso^+(V,g)$ ($\det(f)=1$) $\Rightarrow$
  - $f = Id \to$ Identidad
  - $f = -Id \to$ simetría central
  - f es una rotación de ángulo $\theta \in (0,\pi)$, $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ traza (f)
- $f \in Iso^-(V,g)$ ($\det(f)=-1$) $\Rightarrow$ Reflexión o simetría axial respecto de $U = V_1$ paralela a $U^\perp = V_{-1}$

Luego, h es una isometría

Estudiamos ahora f:

$\det(f) = -49+48 = -1 \Rightarrow f \in Iso^-(V,g) \Rightarrow f$ es una simetría axial respecto $U = V_1$

$$V_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{pmatrix} 7-1 & -12 \\ \cancel{4} & \cancel{-7-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 6x - 12y = 0 \right\} = L(\{(2,1)\})$$

Estudiamos h:

- $\det(h) = 1 \Rightarrow f \in Iso^+(V,g) \Rightarrow f$ es una rotación de ángulo θ, donde

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} tr(f) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi$$

Si quisiéramos precisar el sentido del giro, hay que ortonormalizar y ya comparar

(21) En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica euclídea g cuya matriz en la base usual viene dada por

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(5x+2y+z, -10x-y+z, 4x+y+2z)$$

a) Comprueba que f es una isometría

Consideramos $B_u = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$f(1,0,0) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$f(0,1,0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 & 1/3 \\ -10/3 & -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$f(0,0,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Recordemos: Para comprobar que $M(g,B) = M(f,B)^t \, M(g,B) \cdot M(f,B)$

$$\begin{pmatrix} 5/3 & -10/3 & 4/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 & 1/3 \\ -10/3 & -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow f \text{ es una isometría}$$

b) Encuentra una base ortonormal en la que f adopte su forma canónica y clasifícala

Para este tipo de ejercicios:
1) Polinomio característico de la isometría
2) Calcular los subespacios propios
3) Utilizar el esquema para poder clasificarla

4) Calcular una base ortogonal, ortonormalizando los subespacios propios

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5/3 - \lambda & 2/3 & 1/3 \\ -10/3 & -1/3 - \lambda & 1/3 \\ 4/3 & 1/3 & 2/3 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

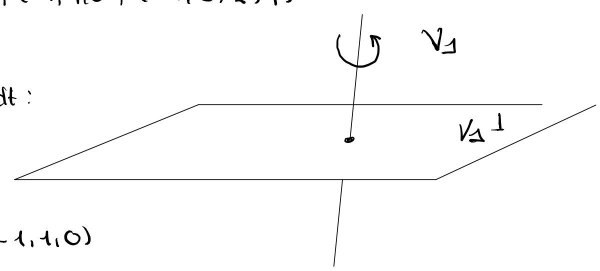
$\downarrow$ Raíces complejas

Como $\det(f) = 1$ y el único valor propio asociado es el 1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Rotación de eje V_1

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -10/3 & -4/3 & 1/3 \\ \cancel{4/3} & \cancel{1/3} & \cancel{-1/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = L(\{(1,-2,2)\})$$

$$V_1^{\perp} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, g((x,y,z),(1,-2,2)) = 0 \} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (1,1,2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R} \,/\, x + y + 2z = 0 \} = L(\{(-1,1,0),(-2,0,1)\})$$



Ortonormalizamos por Gram-Schmidt:

$u_1 = (-1,1,0)$

$$u_2 = (-2,0,1) - \frac{g((-2,0,1),(-1,1,0))}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0)$$

$$g((-2,0,1),(-1,1,0)) = (-1,1,0)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2\ 0\ 1)\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

$\downarrow$ Es métrica

$$g((-1,1,0),(-1,1,0)) = (-2\ 0\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

Luego: $u_2 = (-2,0,1) - \frac{5}{2}(-1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 1\right) \longrightarrow (1,-5,1)$

Como luego dividimos por la norma da igual que sea proporcional

$f(x,y,z) = (x,y,z)$

$B = \{(1,1,1),(0,0,2),(3,2,0)$

$f(1,1,1) = (1,1,$

$$B = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-2,2)}_{=e_1},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)}_{=e_2},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-5,2)}_{=e_3} \right\}$$

bilar

(También podríamos haber combiado de signo el último)

Yo necesito calcular la matriz de f en la base β. Tengo que calcular al menos el sen θ. Yo sé que la 2ª columna o la imagen del 2º vector por lo que lo calculamos con f.

$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,3,-1) = \alpha e_1 + \gamma e_2 + \beta e_3$
como es base ortonormal
$g(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,3,-1), e_3) = \beta$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad 0 \le \theta \le \pi$$

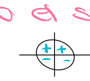
Hacemos esta apreciación por que nosotros queremos $\theta \in [0,\pi]$, pero puede ser que nos salga $\theta \in [\pi, 2\pi]$ (se corrige intercambiando los dos últimos vectores de la base) mirando el signo del

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3,9,-3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,3,-1)$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,3,-1) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,3,1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-5,2)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se estudia seno



22 Describe geométricamente las isometrías de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

> Para este tipo de ejercicios:
> 1) Polinomio característico de la isometría
> 2) Calcular los subespacios propios
> 3) Utilizar el esquema para poder clasificarla

• $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda+1)\underbrace{(\lambda^2 - \lambda + 1)}_{\text{Raíces complejas}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim(V_{-1}) = 1$ y $\dim(V_1) = 0 \Rightarrow f$ es una rotación con eje $U = V_{-1}$ y ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(tr(f)+1)\right)$ compuesta con una simetría especular respecto de $U^{\perp}$.

$$V_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R} \,/\, \begin{matrix} x+y=0 \\ x+z=0 \end{matrix} \right\} = L(\{(1,-1,-1)\})$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\underbrace{\cancel{tr(f)}}_{0} + 1\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

• $D = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

$$P_D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1/3-\lambda & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3-\lambda & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = (x+1)^2(x-1) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & \boxed{0} \\ -1 & & 1 & 1 & \\ \hline & -1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow \dim(V_{-1}) = 2$ y $\dim(V_1) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ es una simetría axial respecto V_1

• $E = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$P_E(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1/3-\lambda & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3-\lambda & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = (x-1)^2(x+1) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ -1 & & 1 & -1 & \\ \hline & -1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow \dim(V_{-1}) = 1$ y $\dim(V_1) = 2 \Rightarrow f$ es una simetría especular respecto V_1

23 Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales se considera la métrica euclídea g tal que la base $\beta = \{1, x, x^2\}$ es ortonormal. Demuestra que el endomorfismo $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dado por:

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \frac{1}{3}\left((2a_0 - a_1 + 2a_2) + (-a_0 + 2a_1 + 2a_2)x + (2a_0 + 2a_1 - a_2)x^2\right)$$

es una isometría en $(\mathbb{R}_2[x], g)$ y descríbela.

Comenzamos calculando la matriz asociada a f respecto la base usual:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ f(0,1,0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ f(0,0,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow M(f, \beta u) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Recordemos: Para comprobar que $M(g,\beta) = M(f,\beta)^t \, M(g,\beta) \cdot M(f,\beta)$

El ejercicio nos hace considerar $g u \Rightarrow M(gu, \beta u) = Id$

$$Id = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot Id \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$Id = Id$$

$\Rightarrow$ Luego, efectivamente, f es una isometría

· $\det(f) = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -1$

$$P_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3-\lambda \end{pmatrix} = -a^3 + a^2 + a - 1 = (x-1)^2(x+1) \Rightarrow$$

	-1	1	1	-1
-1		1	-2	1
	-1	2	-1	$\boxed{0}$
1		-1	1	
	-1	1	$\boxed{0}$	

$\Rightarrow \dim(V_1) = 2$ y $\dim(V_{-1}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ simetría especular respecto V_1

Calculamos V_1:

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ \cancel{-1/3} & \cancel{-1/3} & \cancel{2/3} \\ \cancel{2/3} & \cancel{2/3} & \cancel{-4/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \right\} =$$

$$= L(\{(1,-1,0), (2,0,1)\})$$

(24) Sobre el espacio vectorial euclídeo $(S_2(\mathbb{R}), g)$, donde $g(A,C) = tr(AC)$, se define el endomorfismo $f: S_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}$$

Demuestra que f es una isometría de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ y descríbela.

Consideramos la base usual de $S_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = (a,b,c)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \\ f(0,1,0) = (0,0,-\sqrt{2}) \\ f(0,0,1) = (1,0,0) \end{array}\right| \Rightarrow M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz asociada a g respecto la métrica usual:

$M\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a_{11} = 1$

$a_{21} = 0 \qquad a_{22} = 2$

$a_{31} = 0 \qquad a_{32} = 0 \qquad a_{33} = 1 \quad \Rightarrow \quad M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz es simétrica

Recordemos: Para comprobar que $M(g,B) = M(f,B)^t \, M(g,B) \cdot M(f,B)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ f es una isometría

Calculamos el polinomio característico de f:

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 - 1 = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda+1)\underbrace{(\lambda^2-\lambda+1)}_{\text{Raíces complejas}}$$

$\Rightarrow \dim(V_{-1}) = 1$ y $\dim(V_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es una rotación con eje $U = V_{-1}$ y ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{tr(f)+1}{2}\right)$ compuesta con una simetría especular de $U^\perp = V_{-1}^\perp$

(25) Consideremos $\mathbb{R}^2$ con su métrica euclídea usual.

a) Calcula la matriz $M(f, B_u)$, siendo f la simetría axial con respecto $U = L(\{(2,3)\})$

Calculamos una base ortogonal, expresamos la matriz y multiplicamos por las matrices cambio de base.

$B = \{(2,3), (-3,2)\}$

En $\mathbb{R}^2$, f es simetría axial si $\det(f) = -1$

$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

En $(\mathbb{R}^2, g_u)$ para calcular un vector perpendicular a (x,y) basta con $(-y,x)$

$$M(f,B_u) = M(B,B_u) \cdot M(f,B) \cdot \underbrace{M(B_u,B)}_{= M(B,B_u)^{-1}}$$

$$M(f,B_u) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = M(f,B_u)$$

b) Calcula en las coordenadas usuales, las ecuaciones de un giro que lleve el vector $(-4,3)$ en el vector $(5,0)$

$$(-4,3) \longrightarrow (5,0)$$

Comenzamos comprobando que los dos vectores tienen tienen la misma norma, en caso positivo, existe la isometría, en caso contrario, no existe.

$\|(-4,3)\| = \sqrt{16+9} = 5$

$\|(5,0)\| = \sqrt{25} = 5$

Sabemos que la matriz de un giro en la base usual es:

$$M(f,B_u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Por lo que tenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4\cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta = 5 \\ -4\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = \frac{3}{4}$$

$\cos\theta = \frac{4}{3}\operatorname{sen}\theta$

$-\frac{16}{3}\operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}\theta = 5$

$16\operatorname{sen}\theta + 9\operatorname{sen}\theta = -15$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}(\theta) = -\frac{3}{5}, \quad \cos(\theta) = -\frac{4}{5}}$

Por lo que:

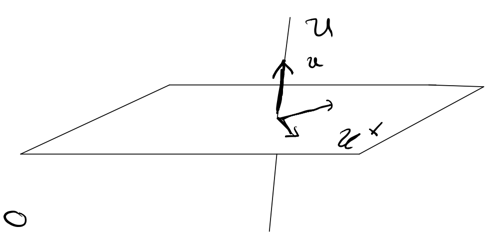
$$\boxed{M(f,B_u) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}}$$

26 Consideremos $\mathbb{R}^3$ con su métrica euclídea usual.

a) Calcula la matriz $M(f,B_u)$, siendo f una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ con eje dado por $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0,\ x-z=0\}$.

Calculamos una base de U:

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y = z\} = L(\{(1,-1,1)\})$



Calculamos una base ortogonal de $U^\perp$

$U^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ g_u((1,-1,1),(x,y,z)) = 0$

$$\mathcal{U}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x-y+z=0 \right\} = \mathcal{L}(\{(1,1,0),(1,0,-1)\})$$

Usamos ahora el método de Gram-Schmidt:

$$u_1 = (1,1,0)$$

$$u_2 = (1,0,-1) - \frac{g_u((1,0,-1),(1,1,0))}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$g_u((1,0,-1),(1,1,0)) = 1 \qquad g_u((1,1,0),(1,1,0)) = 2$$

Luego, una base de $\mathbb{R}^3$ ortogonal sería: $\beta = \{(1,-1,1),(1,1,0),(1,-1,-2)\}$

Si dividimos cada vector por su norma obtenemos:

$$\beta' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2) \right\}$$

Sabemos que $M(f,\beta') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

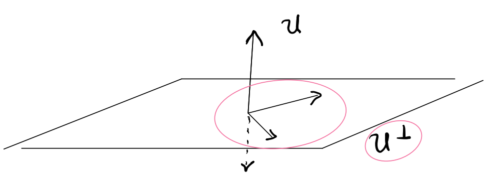
Podemos tomar tanto la traspuesta como la inversa

$$M(f,\beta u) = M(\beta',\beta u)\,M(f,\beta')\,M(\beta u,\beta') = M(\beta',\beta u)\,M(f,\beta')\,M(\beta',\beta u)^{t} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & 1 & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcula, en coordenadas usuales, las ecuaciones de la simetría ortogonal respecto al plano perpendicular a la recta $\mathcal{U}$ del apartado anterior



Nos sirve la base β' del apt a

$$M(f,\beta') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = M(f,\beta u) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$M(f,\beta u) = M(\beta,\beta u) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M(\beta,\beta u)^{t} =$$

Tomamos la base del apt anterior que es ortonormal $\Rightarrow M(\beta,\beta u)^{-1} = M(\beta,\beta u)^{t}$

Si no habría que usar $M(\beta,\beta u)^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calcular $M(f, B_u)$, donde $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una isometría que verifique $f(1,-1,0) = (1,-1,0)$, $f(1,1,5) = (3,3,-3)$ y $\det(f) = 1$.

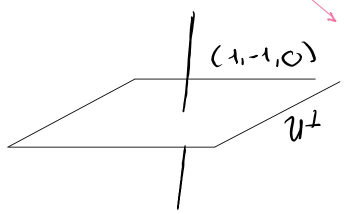
$f(1,1,0) = (1,-1,0) \longrightarrow$ como lo deja invariante está asociado al valor propio 1

$\det(f) = 1$

$f = Id$ (No puede ser porque $f(1,1,5) \neq (3,3,-3)$)

$f =$ simetría axial (No puede ser porque porque $(1,1,5) \notin V_{-1}$ porque $f(1,1,5) \neq (-1,-1,-5)$)

$f =$ rotación (Si es porque $(1,-1,0) \cdot (1,1,5) = 0$)



observemos que $(1,-1,0)$ y $(1,1,5)$ son ortogonales $g_u((1,-1,0),(1,1,5)) = 0$

Vamos a completar hasta tener una base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g_u)$. Sea $U = L\{(1,-1,0), (1,1,5)\}$

Porque es la métrica usual

$$U^\perp = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y,z) \cdot (1,-1,0) = 0,\ (x,y,z) \cdot (1,1,5) = 0 \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} x = y \\ x + y + 5z = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$= L(\{(5,5,-2)\})$

Por tanto:

$\{(1,-1,0), (1,1,5), (5,5,-2)\}$ es una base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g_0)$

Ortonormalizando:

$$\tilde{B} = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)}_{=e_1}, \underbrace{\frac{1}{3\sqrt{3}}(1,1,5)}_{=e_2}, \underbrace{\frac{1}{3\sqrt{6}}(5,5,-2)}_{=e_3} \right\}$$ son una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_u)$

Sabemos que:

$$M(f, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$f\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(1,1,5)\right) = \cos\theta\, e_2 + \operatorname{sen}\theta\, e_3$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}(3,3,-3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(1,1,5) = \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \cdot \frac{1}{3\sqrt{6}}(5,5,-2) = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$M(f, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow M(f, B_u) = M(\tilde{B}, B_u) M(f, \tilde{B}) M(B_u, \tilde{B}) =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(27) En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, calcula la matriz en β_u de $h \circ \sigma_U$, donde σ_U es la simetría ortogonal con respecto al plano U de ecuación $z=0$, y h es el giro de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje OX. Clasifica y describe la métrica resultante.

$$\left.\begin{array}{l} U = \{(x,y,z) \ / \ z=0\} = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) \\ U^\perp = \{(x,y,z) \ / \ x=0, y=0\} = L(\{(0,0,1)\}) \end{array}\right\} \Rightarrow M(\sigma_U, \beta_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos $R =$ eje OX $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y=z=0\} = L(\{(1,0,0)\})$

Calculamos su ortogonal:

$$R^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x=0\} = L(\{(0,1,0),(0,0,1)\})$$

Por lo que:

$$M(h, \beta_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Para componer matrices basta con multiplicarlas

$$M(h \circ \sigma_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la dimensión de los subespacios propios para clasificar la métrica:

$$P_{h\circ\sigma_U}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/2-\lambda & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)$$

$\det(h\circ\sigma_U) = -1$

$\dim(V_{-1}) = 1$, $\dim(V_1) = 2$ $\Rightarrow$ Se trata de una simetría especular respecto al plano:

$$\pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-1 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = \sqrt{3}z\} = L(\{(1,0,0),(0,\sqrt{3},1)\})$$

(28) En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, encuentra si es posible una isometría f que lleva un subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-z=0\}$ en el subespacio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z=0\}$. Si es posible da $M(f, \beta_u)$, clasifícala y describe la isometría f.

1) Calculamos una base de U y W
2) Ampliamos cada base con $U^\perp$ y $W^\perp$ para tener bases de $\mathbb{R}^3$
3) Como $\dim(U) = \dim(W)$ $\Rightarrow$ llevo la base U a la W y la base $U^\perp$ a $W^\perp$

$\mathcal{U} = L(\{(0,1,0),(1,0,1)\})$

$\mathcal{U}^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, g_u((0,1,0),(x,y,z))=0,\ g_u((1,0,1),(x,y,z))=0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} y=0 \\ x+z=0 \end{matrix}\} = L(\{(1,0,-1)\})$

$W = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$

$W^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, g_u((1,0,0),(x,y,z)) = 0,\ g((0,1,0),(x,y,z))=0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\} = L(\{(0,0,1)\})$

$B_1 = \{(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\}$ $\quad B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$f : (\mathbb{R}^3, g_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, g_u)$$

$$(0,1,0) \longrightarrow (1,0,0)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \longrightarrow (0,1,0)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \longrightarrow (0,0,1)$$

$$M(f, B_1 \to \overset{\overset{B_u}{\shortparallel}}{B_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_u) = M(f, B_1 \to B_u)\, M(B_u \to B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\det(f) = 1$

$$p_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0-\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda \end{pmatrix} = \frac{-2a^3 - \sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}a + 2}{2} = (x-1)\text{(complejos)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim(V_1) = 1$, $\dim(V_{-1}) = 0$ $\Rightarrow f$ es una rotación de eje V_1 y ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{tr(f)-1}{2}\right)$