Objetivos de aprendizaje Tema 4

Análisis Matemático II

Javier Gómez López

4 de abril de 2022

1. Conocer y comprender las siguientes definiciones:

a) Conjuntos de Borel

Dado un conjunto no vacío Ω, es inmediato comprobar que la intersección de cualquier familia no vacía de σ-álgebras en Ω, es también una σ-álgebra en Ω. Para una familia de conjuntos $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, es obvio que $\mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{T}$. De esta forma, obtenemos una σ-álgebra $\mathcal{A}$, que contiene a $\mathcal{T}$ y está contenida en todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{T}$. Decimos que $\mathcal{A}$ es la **σ-álgebra engendrada** por $\mathcal{T}$, la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{T}$.

Si consideramos Ω como un espacio topológico y $\mathcal{T}$ es la topología de Ω, es decir, la familia de todos los subconjuntos abiertos de Ω. La σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$ recibe el nombre de **σ-álgebra de Borel** de Ω, cuyos elementos se conocen como **conjuntos de Borel**.

b) Conjuntos de Cantor

Llamaremos **sucesión admisible** a toda sucesión $a = \{a_n\}$ de números reales que, tomando por comodidad $a_0 = 1$ verifique:

$$0 < a_n < \frac{a_{n-1}}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Escribiremos también $\rho_n = a_{n-1} - a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, usaremos el conjunto producto cartesiano $U_n = \{0,1\}^n$, formado por todas las n-uplas de ceros y unos. A cada $u \in U_n$ asociamos el intervalo compacto $J(u)$, definido por

$$J(u) = [m(u), m(u) + a_n] \qquad \text{donde} \qquad m(u) = \sum_{j=1}^{n} u(j)\rho_j \qquad \forall u \in U_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

A partir de estos intervalos, definimos ahora:

$$K_n(a) = \bigcup_{u \in U_n} J(u) \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{y} \qquad C(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(a)$$

donde resaltamos la dependencia de la sucesión admisible a que hemos usado en la definición. Se dice que $C(a)$ es el **conjunto de Cantor** asociado a la sucesión a.

2. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Regularidad de la medida de Lebesgue

Podemos distinguir entre dos tipos de regularidades en la medida de Lebesgue:

- **Regularidad exterior**. Por así decirlo, la medida de un conjunto medible puede obtenerse "por fuera", usando los conjuntos abiertos que lo contienen:
  - *Para todo $E \in \mathcal{M}$, se tiene:* $\lambda(E) = \inf\{\lambda(G) : E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N\}$
- **Regularidad interior**. Por así decirlo, la medida de un conjunto medible también puede calcularse "por dentro" usando los conjuntos compactos contenidos en él.
  - *Para todo $E \in \mathcal{M}$, se tiene;* $\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : K$ *compacto* $, K \subset E\}$.

b) Caracterizaciones de los conjuntos medibles, usando la topología de $\mathbb{R}^N$.

- *Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (*i*) *E es medible*
  (*ii*) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, tal que $E \subset G$ y $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$.*
  (*iii*) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe un cerrado, $F \subset \mathbb{R}^N$ tal que $F \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$.*
  (*iv*) *Existe un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, de tipo F_σ tal que $A \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus A) = 0$*
  (*v*) *Existe un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$, de topo G_σ, tal que $E \subset B$ y $\lambda^*(B \setminus E) = 0$*

c) Teoremas de unicidad de la medida de Lebesgue

Teorema (Primer teorema de unicidad)**.** *Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, con $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, y $\mu : A \to [0, \infty]$ una medida, tal que $\mu(J) = \lambda(J)$ para todo intervalo diádico $J \subset \mathbb{R}^N$, entonces $\mu(E) = \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$. En particular, λ es la única medida definida en $\mathcal{M}$, que extiende a la medida elemental de los intervalos acotados.*

Teorema (Segundo teorema de unicidad)**.** *Para $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, sea $\mu : A \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones, tal que $\mu(G) < \infty$ para algún abierto no vacío $G \subset \mathbb{R}^N$. Entonces existe $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(E) = \rho\lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$.*

3. Conocer y comprender la demostración de la existencia de conjuntos no medibles.

Teorema 1. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$, con medida exterior estrictamente positiva, contiene un conjunto no medible.*

Demostración. Dado $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ verificando que $\lambda^*(A) > 0$, podemos escribir $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, donde $A_n = A \cap [-n, n]^N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando entonces que λ^* es σ-subaditiva, se tiene que $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \lambda^*(A_n)$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^*(A_m) > 0$.

Si abreviamos escribiendo $B = A_m \subset A$, tenemos que $\lambda^*(B) > 0$, con la ventaja de que B está acotado, y bastará probar que B contiene un conjunto no medible, pues entonces A también lo contendrá.

Usaremos que $\mathbb{Q}^N$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}^N$, lo que permite considerar el grupo cociente $\mathcal{H} = \frac{\mathbb{R}^N}{\mathbb{Q}^N}$ y la aplicación cociente $q : \mathbb{R}^N \to \mathcal{H}$, que es sobreyectiva. Usando el conjunto $q(B) \subset \mathcal{H}$, el axioma de elección nos dice que existe una aplicación $\phi : q(B) \to B$ tal que $q(\phi(h)) = h$ para todo $h \in q(B)$. Nos interesa la imagen de ϕ, el conjunto $W = \phi(q(B))$.

Observamos que $W \subset B$, y en particular, W está acotado.

En primer lugar, para todo $b \in B$, tenemos $q(b) = h \in q(B)$, pero también $q(\phi(h)) = h$, luego $b - \phi(h) = r \in \mathbb{Q}^N$, de donde $b = \phi(h) + r \in W + \mathbb{Q}^N$. Esto prueba que $B \subset W + \mathbb{Q}^N$.

Por otra parte, si $r, s \in \mathbb{Q}^N$ verifican que $(W + r) \cap (W + s) \neq \emptyset$, tendremos $w_1, w_2 \in W$ tales que $w_1 + r = w_2 + s$, de donde $q(w_1) = q(w_2)$. Escribiendo $w_1 = \phi(h_1)$ y $w_2 = \phi(h_2)$ con $h_1, h_2 \in q(B)$, tenemos entonces $h_1 = q(w_1) = q(w_2) = h_2$, de donde $w_1 = w_2$, y por tanto, $r = s$. Así pues, los conjuntos de la forma $W + r$ con $r \in \mathbb{Q}^N$ son dos a dos disjuntos.

Fijamos ahora una sucesión acotado $\{r_n\}$ de elementos de $\mathbb{Q}^N$, verificando $r_n \neq r_m$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Como W está acotado, el conjunto $C = \biguplus_{n=1}^{\infty} (W + r_n)$ también lo está. Suponemos ahora que W es medible, para llegar a una contradicción.

Para cada $r \in \mathbb{Q}^N$, como la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, de $W \in \mathcal{M}$ deducimos que $W + r \in \mathcal{M}$ con $\lambda(W + r) = \lambda(W)$. Como consecuencia tenemos que $C \in \mathcal{M}$, así como $\lambda(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(W + r_n) = \lambda(W)\infty$. Como C está acotado, también tenemos $\lambda(C) < \infty$, luego $\lambda(W) = 0$. Pero entonces $\lambda(W + r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}^N$ y, como $\mathbb{Q}^N$ es numerable, de $B \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^N} (W + r)$, deducimos que $\lambda^*(B) = 0$, lo cual es una contradicción. ■