Topología I. Convocatoria ordinaria
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
14 de enero de 2022

1.– Para todo $R \geqslant 0$, consideramos el conjunto $S_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = R\}$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Se considera la topología T en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B} = \{S_R : R \geqslant 0\}$.

a) Estudiar cuando el conjunto $\{x_0\}$, con $x_0 \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, es cerrado en $(\mathbb{R}^2, T)$.
b) Demostrar que $(\mathbb{R}^2, T)$ es AN-I pero no AN-II.
c) Calcular la clausura, el interior y la frontera en $(\mathbb{R}^2, T)$ del conjunto $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |b| \leqslant 1\}$.
d) Probar que A es conexo en $(\mathbb{R}^2, T)$ si y sólo si existe $R \geqslant 0$ tal que $A \subset S_R$. Determinar las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, T)$.
e) Demostrar que A es compacto en $(\mathbb{R}^2, T)$ si y sólo si existe $J \subset [0, +\infty)$ finito tal que $A \subset \bigcup_{R\in J} S_R$.

2.– Enunciar y demostrar el teorema de Tijonov. Si se hace uso del lema del tubo, entonces éste debe enunciarse y probarse previamente.

3.– Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

a) Decidir si los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, T_u)$ son homeomorfos entre sí dos a dos:
  - $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|x\| < 4\}$,
  - $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant \|x\| \leqslant 4\}$,
  - $A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

b) Sean (X_1, T_1) y (X_2, T_2) espacios topológicos. Para $i = 1, 2$, sea R_i una relación de equivalencia en X_i tal que la proyección $p_i : (X_i, T_i) \to (X_i/R_i, T_i/R_i)$ es abierta. Demostrar que
$$(X_1 \times X_2/R) \cong (X_1/R_1, T_1/R_1) \times (X_2/R_2, T_2/R_2),$$
donde R es la relación de equivalencia en $X_1 \times X_2$ definida por
$$(x_1, x_2)\, R\, (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 R_1 y_1 \text{ y } x_2 R_2 y_2.$$

c) Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre espacios topológicos tal que $f(A)$ es conexo en (Y, T') para cada A conexo en (X, T). ¿Es f continua?

Primera pregunta: 4,5 puntos

Segunda pregunta: 2,5 puntos

Tercera pregunta: 3 puntos

Todos los apartados tienen la misma valoración

Duración del examen: 3 horas

Soluciones

4.– Observamos que $S_0 = \{0\}$ y que S_R es la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ de centro 0 y radio R cuando $R > 0$. La familia $\mathcal{B}$ forma una partición de $\mathbb{R}^2$.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ con $U \neq \emptyset$. Como $\mathcal{B}$ es base de T entonces $U \in T$ si y sólo si para cada $x \in U$ existe $S_R \in \mathcal{B}$ tal que $x \in S_R \subset U$ (y, por tanto, $R = \|x\|$). Así, los abiertos no vacíos de T aparte de $\{0\}$ son uniones de circunferencias centradas en 0. En particular, $S_R \in T$ si $R \geqslant 0$.

a) Estudiar cuando el conjunto $\{x_0\}$, con $x_0 \in \mathbb{R}^2$, es cerrado en $(\mathbb{R}^2, T)$.

Notese que $\{0\} \in C_T$. Esto se debe a que $\{0\}^c = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \bigcup_{R>0} S_R$, que es abierto en $(\mathbb{R}^2, T)$ por serlo cada S_R.

Por otro lado $\{x_0\} \notin C_T$ si $x_0 \neq 0$. Supongamos lo contrario, es decir, $\{x_0\}^c \in T$. Como $-x_0 \in \{x_0\}^c$, existiría $R \geqslant 0$ tal que $-x_0 \in S_R \subset \{x_0\}^c$. Como $R = \| -x_0\| = \|x_0\|$, entonces $x_0 \in S_R \subset \{x_0\}^c$, que es una contradicción.

b) Demostrar que $(\mathbb{R}^2, T)$ cumple el IAN pero no cumple el IIAN.

Sea $x \in \mathbb{R}^2$. Sabemos que la familia $\mathcal{V}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ es una base de entornos de x en $(\mathbb{R}^2, T)$. Como el único $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$ es el conjunto S_R con $R = \|x\|$ concluimos que $\mathcal{V}_x$ es una base de entornos de x en $(\mathbb{R}^2, T)$ con un único entorno. En particular, $(\mathbb{R}^2, T)$ cumple el IAN.

Por otro lado, como $\mathcal{B}$ es no numerable, para probar que $(\mathbb{R}^2, T)$ no cumple el IIAN es suficiente verificar que $\mathcal{B}$ es una base mínima para T. Sea $\mathcal{B}'$ otra base en $(\mathbb{R}^2, T)$. Veamos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Como $0 \in \{0\}$ y $\{0\} = S_0 \in T$, debe existir $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $0 \in B' \subset \{0\}$. Esto implica que $B' = \{0\}$, de donde $S_0 = B' \in \mathcal{B}'$. Sea ahora $R > 0$ y tomemos $x \in S_R$. Como $S_R \in T$ y $\mathcal{B}'$ es base, debe existir $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset S_R$. Además, como $x \in B'$, $B' \in T$ y $\mathcal{B}$ es base, debe existir $R' \geqslant 0$ tal que $x \in S_{R'} \subset B' \subset S_R$. Como la familia $\mathcal{B}$ es una partición de $\mathbb{R}^2$, se sigue que $S_{R'} = B' = S_R$, de donde $S_R \in \mathcal{B}'$.

c) Calcular el cierre, el interior y la frontera en $(\mathbb{R}^2, T)$ de $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid |b| \leqslant 1\}$.

Veamos que $\overline{S} = \mathbb{R}^2$, es decir, S es denso en $(\mathbb{R}^2, T)$. Dado $x \in \mathbb{R}^2$, sabemos que $x \in \overline{S}$ si y sólo si $B \cap S \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$. Esto equivale a que $S_R \cap S \neq \emptyset$ cuando $R = \|x\|$. Pero esta propiedad se cumple para cada $x \in \mathbb{R}^2$, ya que $(R, 0) \in S_R \cap S$.

Veamos que $S^\circ = \overline{B}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$. Si $x \in S^\circ$ entonces $S \in \mathcal{N}_x$ y, por tanto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset S$. Esto último equivale a que $S_R \subset S$, donde $R = \|x\|$. Dado que $(0, \|x\|) \in S_R$ y $S_R \subset S$, se sigue que $\|x\| \leqslant 1$ por definición de S. Recíprocamente, dado $x \in \overline{B}(0, 1)$ se tiene que $x \in S^\circ$. Esto se debe a que $x \in S_R$ con $R = \|x\|$ y $S_R \subset S$ (si $(a, b) \in S_R$ entonces $|b| \leqslant \|(a, b)\| = R = \|x\| \leqslant 1$).

Finalmente deducimos que $\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\}$.

d) Probar que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es conexo en $(\mathbb{R}^2, T)$ si y sólo si existe $R \geqslant 0$ tal que $A \subset S_R$. Determinar las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, T)$.

$\Longrightarrow$) Supongamos que A es conexo en $(\mathbb{R}^2, T)$, es decir, $(A, T_{|A})$ es conexo. Como $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{R \geqslant 0} S_R$ y $A \neq \emptyset$, debe existir $R \geqslant 0$ tal que $A \cap S_R \neq \emptyset$. Veamos que $A \subset S_R$. De lo contrario, tendríamos que $A \cap S_R^c \neq \emptyset$. Ahora, el conjunto S_R^c es abierto en T (porque coincide con $\bigcup_{r \geqslant 0,\, r \neq R} S_r$). Así, la familia $\{S_R \cap A, S_R^c \cap A\}$ sería una separación no trivial de $(A, T_{|A})$, lo que contradice que A es conexo en $(\mathbb{R}^2, T)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que existe $R \geqslant 0$ tal que $A \subset S_R$. Queremos ver que $(A, T_{|A})$ es conexo. Como $A \subset S_R$ y $T_{|A} = (T_{|S_R})_{|A}$, entonces A es conexo en $(\mathbb{R}^2, T)$ si y sólo si A es conexo en

$(S_R, T_{|S_R})$. Como $\mathcal{B}$ es una base de $(\mathbb{R}^2, T)$, entonces $\mathcal{B}_{|S_R} = \{S_r \cap S_R \mid r \geqslant 0\} = \{S_R\}$ es una base de $(S_R, T_{|S_R})$. Esto implica que $T_{|S_R}$ coincide con la topología trivial T_t en S_R. Y como todo subconjunto de un espacio topológico trivial es conexo, concluimos que A es conexo en $(S_R, T_{|S_R})$ y, por tanto, en $(\mathbb{R}^2, T)$.

Por último, nótese que la familia $\mathcal{B}$ es una partición de $\mathbb{R}^2$ formada por conjuntos abiertos y conexos para T. Por un resultado probado en clase $comp(\mathbb{R}^2, T) = \mathcal{B} = \{S_R \mid R \geqslant 0\}$.

e) Demostrar que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es compacto en $(\mathbb{R}^2, T)$ si y sólo si existe $J \subset [0, +\infty)$ finito tal que $A \subset \bigcup_{R\in J} S_R$.

$\Longrightarrow$) Si A es compacto en $(\mathbb{R}^2, T)$ entonces cumple la PHB. Como $\mathcal{B} = \{S_R \mid R \geqslant 0\}$ es un recubrimiento de A por abiertos de T entonces existe $J \subset \mathbb{R}_0^+$ finito tal que $A \subset \bigcup_{R\in J} S_R$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que existe $J \subset [0, +\infty)$ finito tal que $A \subset \bigcup_{R\in J} S_R$. Entonces, tenemos:

$$A = A \cap \Big(\bigcup_{R\in J} S_R\Big) = \bigcup_{R\in J} (S_R \cap A).$$

Cada $S_R \cap A$ es compacto en $(S_R, T_{|S_R})$ (porque $T_{|S_R}$ es la topología trivial en S_R) y, por tanto, en $(\mathbb{R}^2, T)$. Así, A es compacto en $(\mathbb{R}^2, T)$ por ser unión finita de compactos.

5.– Los enunciados y demostraciones pedidas están en los apuntes de teoría de la asignatura.

6.– Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

a) Decidir si los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, T_u)$ son o no 2 a 2 homeomorfos entre sí:
- $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|x\| < 4\}$,
- $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant \|x\| \leqslant 4\}$,
- $A_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

El conjunto A_2 es compacto en $(\mathbb{R}^2, T_u)$ porque es cerrado y acotado. El conjunto A_1, que es abierto en $(\mathbb{R}^2, T_u)$, no es compacto en $(\mathbb{R}^2, T_u)$ porque no es cerrado (de serlo tendríamos un conjunto a la vez abierto y cerrado distinto del vacío y de $\mathbb{R}^2$, lo que contradice que $(\mathbb{R}^2, T_u)$ es conexo). Por otro lado A_3 no es compacto porque no es acotado. Todo esto nos dice que $A_2 \ncong A_1$ y $A_2 \ncong A_3$. Por último, se tiene que $A_1 \cong A_3$. Una forma de probarlo es a partir del ejercicio 5 de la relación 2.2. Allí demostramos que $A_3 \cong \mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$ y $A_2 \cong \mathbb{S}^1 \times (1, 4)$. Como 2 intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos entre sí, se sigue que:

$$A_2 \cong \mathbb{S}^1 \times (1, 4) \cong \mathbb{S}^1 \times (0, +\infty) \cong A_3,$$

donde se ha usado que el producto de dos homeomorfismos es un homeomorfismo.

b) Sean (X_1, T_1) y (X_2, T_2) espacios topológicos. Para cada $i = 1, 2$, sea R_i una relación de equivalencia en X_i tal que la proyección al cociente $p_i : (X_i, T_i) \to (X_i/R_i, T_i/R_i)$ es abierta. Demostrar que:

$$(X_1 \times X_2/R) \cong (X_1/R_1, T_1/R_1) \times (X_2/R_2, T_2/R_2),$$

donde R es la relación de equivalencia en $X_1 \times X_2$ dada por $(x_1, x_2)\, R\, (y_1, y_2)$ si y sólo si $x_1\, R_1\, y_1$ y $x_2\, R_2\, y_2$.

Consideremos la aplicación producto

$$f = p_1 \times p_2 : (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2) \to (X_1/R_1, T_1/R_1) \times (X_2/R_2, T_2/R_2)$$

definida por $f(x_1, x_2) = (p_1(x_1), p_2(x_2))$. Como cada p_i es continua, abierta y sobreyectiva, sabemos (por propiedades de la aplicación producto) que f también lo será. Esto implica que f es una identificación. En consecuencia, un teorema conocido nos dice que:

$$(X_1 \times X_2/R_f) \cong (X_1/R_1, T_1/R_1) \times (X_2/R_2, T_2/R_2).$$

Por último, nótese que:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2)\, R_f\, (y_1, y_2) &\iff f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) \iff p_1(x_1) = p_1(y_1),\ p_2(x_2) = p_2(y_2) \\ &\iff x_1\, R_1\, y_1,\ x_2\, R_2\, y_2 \iff (x_1, x_2)\, R\, (y_1, y_2).\end{aligned}$$

c) Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre espacios topológicos tal que $f(A)$ es conexo en (Y, T') para cada A conexo en (X, T). ¿Es f continua?

Esto es falso. Lo más simple para construir contraejemplos es considerar aplicaciones no continuas entre espacios cuyos únicos subconjuntos conexos sean unipuntuales. Espacios de este tipo son, por ejemplo, los espacios discretos, $(\mathbb{R}, T_S)$ y $(\mathbb{Q}, T_{u|\mathbb{Q}})$. Así, las aplicaciones $I_{\mathbb{Q}} : (\mathbb{Q}, T_{u|\mathbb{Q}}) \to (\mathbb{Q}, T_D)$ y $I_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, T_S) \to (\mathbb{R}, T_D)$ llevan conexos en conexos (puntos en puntos) pero no son continuas (la imagen inversa de un punto no es un abierto).