Relacion2-Resuelta.pdf

ppicky

Geometría II

1º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada


BURGER KING
Menú Doble Texas®
Menú Long Chicken®
2x7€
Menú Crispy Chicken® BBQ con queso
Menú Big King®
AUTO KING
PARA LLEVAR
RESTAURANTE
Válido hasta 10/05/21. Elección de 2 menús pequeños entre menú Crispy Chicken® BBQ con queso, Big King®, Doble Texas o Long Chicken®. Por +0,50€/menú mediano, por +1€/menú grande. Patatas Supreme excepto para menús pequeños. Agua de 0,33cl en menú pequeño y 0,5cl en el resto de menús. Excluidos refrescos embotellados. Cerveza no disponible en menús pequeños. Restaurantes no adheridos en www.burgerking.es. COCA-COLA® y COCA-COLA ZERO® son marcas registradas de THE COCA-COLA COMPANY. TM Burger King Corporation. © 2021 Burger King Europe GmbH. BURGER KING® se reserva el derecho a ampliar el periodo promocional. Todos los derechos reservados.

GEOMETRÍA II. RELACIÓN DE PROBLEMAS 2

TEMA 2: FORMAS BILINEALES Y MÉTRICAS

Curso 2015-16

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Dadas dos formas lineales $\varphi, \psi \in V^*$ definimos su *producto tensorial* $\varphi \otimes \psi : V \times V \to \mathbb{R}$ como $(\varphi \otimes \psi)(u,v) = \varphi(u)\,\psi(v)$.

   a) Prueba que $\varphi \otimes \psi$ es bilineal.

   b) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ su base dual. Demuestra que $B' = \{\varphi_i \otimes \varphi_j \,/\, i, j = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\mathcal{B}(V)$.

   c) Describe la base B' cuando $V = \mathbb{R}^n$ y $B = B_u$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Denotemos por $\mathcal{L}(V, V^*)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de V en su dual V^*. Se define $F : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}(V, V^*)$ como $F(b)(u)(v) = b(u,v)$, $b \in \mathcal{B}(V)$, $u, v \in V$. Prueba que F está bien definida y que es un isomorfismo.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado un endomorfismo $f : V \to V$ y una formal bilineal $b : V \times V \to \mathbb{R}$, se define la aplicación $b_f : V \times V \to \mathbb{R}$ como $b_f(u,v) = b(f(u), f(v))$. Demuestra que b_f es una forma bilineal, que además es simétrica si lo es b.

4. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales reales. Consideremos el espacio producto $V = V_1 \times V_2$, donde la suma y el producto por escalares se realizan coordenada a coordenada. Dadas formas bilineales $b_i : V_i \times V_i \to \mathbb{R}$ definimos $b : V \times V \to \mathbb{R}$ como

$$b\big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\big) = b_1(u_1,v_1) + b_2(u_2,v_2).$$

   Demuestra que b es una forma bilineal sobre V, que además es simétrica si lo son b_1 y b_2.

5. Se considera la forma bilineal $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 2yy' - 3zz' + 2xy' - 3yz'.$$

   a) Calcula $M(b, B_u)$. ¿Es b una métrica sobre $\mathbb{R}^3$?

   b) Utiliza la expresión matricial de b respecto a B_u para calcular $b((1,-2,1),(1,-2,4))$.

c) Se considera la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Calcula $M(b,B)$ mediante la relación de congruencia.

d) Calcula $b(u,v)$, sabiendo que las coordenadas de u y v en la base B son $(1,-2,1)$ y $(2,1,2)$, respectivamente.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión tres, b una forma bilineal sobre V y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Sabiendo que

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula $b(u,v)$ para $u = v_1 + v_3$ y $v = v_2 + 3v_3$.

b) ¿Existe algún vector $w \neq 0$ tal que $b(w,w) = 0$?

c) Calcula $M(b,B')$ siendo $B' = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2\}$.

7. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ se considera la aplicación $b : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx\ .$$

a) Comprueba que b es una forma bilineal.

b) Calcula $M(b,B)$ para $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

c) Consideremos la descomposición de b como suma de una métrica b_s y de una forma bilineal antisimétrica b_a. Calcula $M(b_s,B)$ y $M(b_a,B)$.

d) Calcula b_s y b_a sobre una pareja cualquiera de polinomios en $\mathbb{R}_3[x]$.

8. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera la aplicación $b : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(A,C) = \text{traza}(A \cdot C)\ .$$

a) Comprueba que b es una forma bilineal y simétrica.

b) Calcula $M(b,B)$ para B la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. Demuestra que si dos matrices cuadradas A y C son congruentes, entonces A es simétrica si y sólo si lo es C. Utilizar este hecho para encontrar dos matrices A y C que sean semejantes y no sean congruentes. ¿Son dos matrices congruentes necesariamente semejantes?

10. Sea ω_g la forma cuadrática asociada a una métrica g. Si sabemos que para dos vectores u y v se verifica que $\omega_g(u) = \omega_g(2v) = 2$ y $\omega_g(u+v) = 3$, ¿cuánto vale $g(u+v,v)$?

11. Sea g la métrica en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Escribe la expresión de la forma cuadrática ω_g asociada a g sobre cualquier $v \in \mathbb{R}^3$.

b) Calcula el rango, la nulidad y el radical de g. ¿Es g degenerada?

c) Encuentra B base de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(g,B)$ sea diagonal. Clasifica g como métrica.

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ definimos la forma bilineal

$$g(a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2) = a_0b_0+a_0b_1+a_0b_2+a_1b_0+a_1b_2+3a_2b_1+2a_2b_2.$$

a) Calcula $M(g,B_u)$, donde B_u es la base usual de $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Consideremos la descomposición de g como suma de una métrica g_s y de una forma bilineal antisimétrica g_a. Calcula $M(g_s,B_u)$, $M(g_a,B_u)$ y las expresiones de g_s y g_a sobre dos polinomios cualquiera en $\mathbb{R}_2[x]$.

c) Estudia si g_s es degenerada y calcula su radical.

d) Encuentra una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ para g_s. Clasifica g_s como métrica.

13. Sea ω la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\omega(x,y,z) = 2x^2+2y^2+z^2+4xy+4xz+4yz.$$

Encuentra una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que si (a,b,c) son las coordenadas de un vector v en esa base, $\omega(v) = a^2-b^2$.

14. Clasifica las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices respecto a la base usual vienen dadas, respectivamente, por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Decide también si cualquier par de las matrices anteriores son congruentes.

15. Estudia si las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pueden representar a una misma métrica sobre $\mathbb{R}^2$. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $N = P^tMP$.

16. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y para cada número real a fijo, se considera la métrica g_a asociada a la forma cuadrática dada por:

$$\omega_a(x,y,z) = x^2 + y^2 + 8z^2 + 2axz - 4ayz.$$

Clasifica g_a según los valores del parámetro a.

(15) 17. ¿Existen números reales x, y, z no todos nulos tales que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 0$? ¿Y cumpliendo $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy = 0$?

(16) 18. Calcula todas las soluciones a la ecuaciones:

a) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2yz = 0$,

b) $3x^2 + y^2 - xy = 0$,

c) $x^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz = 0$.

(17) 19. Se considera la métrica $g : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p'(x)\, q'(x)\, dx,$$

donde $'$ representa la derivada respecto de x.

a) Calcula el radical de g.

b) Calcula el subespacio ortogonal a $\mathbb{R}_1[x]$ con respecto a g.

c) Encuentra una base ortogonal para g.

20. Se considera la métrica $g : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(A, C) = \operatorname{tr}(A C^t).$$

a) Prueba que g es no degenerada.

b) Calcula $A_2(\mathbb{R})^\perp$, siendo $A_2(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices antisimétricas.

c) Encuentra una base ortogonal para g formada por matrices simétricas y antisimétricas.

Parecido al 16

21. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Clasifica la métrica g_a según el valor de a. En el caso $a = -1$ calcula la forma cuadrática asociada y encuentra una base del subespacio ortogonal al plano de ecuación $z = 0$.

22. Calcula el índice, el rango y clasifica, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la métrica g_a en $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por

$$\omega_a(x,y,z) = x^2 + y^2 + az^2 + 2axz - 4ayz.$$

23. Sea g la métrica de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base usual es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentra una base ortonormal para g del plano de ecuaciones $x+y=0$, $z+t=0$.

24. En $\mathbb{R}^3$ se considera el plano U de ecuación $y-z=0$ y la recta $W = L(\{(1,1,-1)\})$. Encuentra la expresión de una métrica g en $\mathbb{R}^3$ cuyo radical sea W y cuya restricción a U sea lorentziana.

25. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de polinomios de grado menor o igual que dos, y para cada número real m fijo, se considera la métrica g_m dada por

$$g_m(p(x), q(x)) = p(m)q(m)\ .$$

a) Calcula una base del radical de g_m, una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g_m)$, el rango y el índice de g_m. Clasifica g_m.

b) Determina si para $m=1$ existe una base B de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $M(g_1, B)$ es la matriz cuyas entradas son todas iguales a 1.

26. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas g_1, g_2 y g_3 que vienen representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Son los planos $(\mathbb{R}^2, g_1)$, $(\mathbb{R}^2, g_2)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$ isométricos entre sí? En caso afirmativo construye una isometría.

27. En $\mathbb{R}^4$ se considera g la métrica representada, en la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula su radical.

b) Calcula una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g)$.

c) Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 = 0$ con la métrica inducida por g.

d) Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 + x_2 = 0$ con la métrica inducida por g.

e) ¿Son isométricos los hiperplanos anteriores?

28. Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) ¿Es bilineal la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g((x,y),(x',y')) = xy$?

b) Toda forma bilineal $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la forma $g(x,y) = axy$ con $a \in \mathbb{R}$.

c) Si dos matrices cuadradas son congruentes, entonces tienen la misma traza. ¿Deben tener el mismo determinante?

d) En $\mathbb{R}^2$ existe una mÈtrica tal que $(L(\{(2,1)\}))^\perp = L(\{(2,1)\})$.

e) Sea V un espacio vectorial real y g una métrica no degenerada en V. Supongamos que en la diagonal de $M(g,B)$ respecto de una cierta base B existen dos números a y b con $ab < 0$. Entonces g es indefinida.

f) Si una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ está representada en una cierta base por una matriz con determinante negativo entonces se trata de una métrica lorentziana.

g) Sea V un espacio vectorial real de dimensión tres y g una métrica. Supongamos que existen vectores $u, v \in V$ linealmente independientes, ortogonales entre sí y luminosos. Entonces, g es degenerada.

h) Sea V un espacio vectorial real y g una métrica. Si todos los elementos diagonales de la matriz de g en una cierta base B son negativos, entonces g es definida negativa.

i) Toda métrica indefinida sobre un plano vectorial real tiene vectores luminosos no nulos.

j) Dos vectores perpendiculares y no nulos de una métrica g son linealmente independientes. ¿Y si los dos vectores no son luminosos?

k) Si g es una métrica semidefinida, entonces un vector $v \in V$ es luminoso si y sólo si está en el radical de g. ¿Y si g es degenerada pero no semidefinida?

l) En $\mathbb{R}^3$ con la métrica $g_{2,1}$ un plano vectorial de ecuación $ax + by + cz = 0$ es degenerado si y sólo si $g(v,v) = 0$, donde $v = (a,b,c)$.

RELACIÓN DE EJERCICIOS 2

(1) V esp. vect. $\dim_{\mathbb{R}} V = n$; $\varphi, \psi \in V^*$ formas lineales.

$\varphi \otimes \psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\varphi \otimes \psi)(u,v) = \varphi(u)\psi(v)$ Producto tensorial.

(a) Probar $\varphi \otimes \psi$ es bilineal.

• $(\varphi \otimes \psi)(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(\varphi \otimes \psi)(u,w) + \beta(\varphi \otimes \psi)(v,w)$?

$(\varphi \otimes \psi)(\alpha u + \beta v, w) = \varphi(\alpha u + \beta v)\psi(w) \underset{\uparrow \atop \varphi \text{ lineal}}{=} \big(\alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)\big)\psi(w) =$

$= \alpha\varphi(u)\psi(w) + \beta\varphi(v)\psi(w) =$

$= \alpha(\varphi \otimes \psi)(u,w) + \beta(\varphi \otimes \psi)(v,w)$.

• $(\varphi \otimes \psi)(u, \alpha v + \beta w) = \alpha(\varphi \otimes \psi)(u,v) + \beta(\varphi \otimes \psi)(u,w)$?

$(\varphi \otimes \psi)(u, \alpha v + \beta w) = \varphi(u)\psi(\alpha v + \beta w) \underset{\uparrow \atop \psi \text{ lineal}}{=} \varphi(u)[\alpha\psi(v) + \beta\psi(w)]$

$= \alpha\varphi(u)\psi(v) + \beta\varphi(u)\psi(w) =$

$= \alpha(\varphi \otimes \psi)(u,v) + \beta(\varphi \otimes \psi)(u,w)$

$\Rightarrow \varphi \otimes \psi$ es bilineal.

(b) $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V
$B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ su base dual. $\Big\} \Rightarrow B' = \{\varphi_i \otimes \varphi_j \,/\, i,j = 1, \dots, n\}$ base de $\mathcal{B}(V)$

• Veamos si son l. indeps en $\mathcal{B}(V)$

$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(\varphi_i \otimes \varphi_j) = b_0$ (forma bilineal nula).

$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(\varphi_i \otimes \varphi_j)(v_k, v_l) = 0$ $\qquad \varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\varphi_i(v_k)\varphi_j(v_l) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl} = \alpha_{kl} = 0$

$\Rightarrow \forall \alpha_{kl} = 0$, $1 \leq k, l \leq n$

$\Rightarrow \{\varphi_i \otimes \varphi_j\}_{1 \leq i,j \leq n}$ linealm. indeps en $\mathcal{B}(V) \Rightarrow B'$ es base.

ⓒ Describir la base B' cuando $V = \mathbb{R}^n$, $B = B_u$.

$B' = \{\varphi_i \otimes \varphi_j \ , \ 1 \leq i,j \leq n\}$

$(\varphi_i \otimes \varphi_j)(e_k, e_\ell) = \varphi_i(e_k)\varphi_j(e_\ell) = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$

$M(\varphi_i \otimes \varphi_j, B)_{ij} = 1$.

$M(\varphi_k \otimes \varphi_\ell, B)_{k\ell} = 0 \quad k \neq i \ , \ \ell \neq j$

- $n = 2$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$\varphi_1\otimes\varphi_1 \ , \ \varphi_1\otimes\varphi_2 \ , \ \varphi_2\otimes\varphi_1 \ , \ \varphi_2\otimes\varphi_2$$

② $V \to \dim_{\mathbb{R}} V = n \qquad \mathcal{L}(V, V^*) \to$ espacio vect. de las aplic. lineales de V en su dual V^*

$F: \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathcal{L}(V, V^*)$

$F(b)(u)(v) = b(u,v) \ , \quad b \in \mathcal{B}(V) \ , \ u, v \in V$.

F bien definida? F isomorfismo?

$$F: \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathcal{L}(V, V^*)$$
$$b \longmapsto F(b)(u) : V \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$v \longmapsto F(b)(u)(v) = b(u,v)$$

$F(b)(u) \in V^*$

- $F(b)(u)(\alpha v + \beta v') = b(u, \alpha v + \beta v') \overset{\text{b bilineal}}{=} \alpha b(u,v) + \beta b(u,v') =$
$= \alpha F(b)(u)(v) + \beta F(b)(u)(v') =$

- $F(b)(\alpha u + \beta u')(v) = b(\alpha u + \beta u', v) \overset{\text{b bilineal}}{=} \alpha b(u,v) + \beta b(u',v) =$
$= \alpha F(b)(u)(v) + \beta F(b)(u')(v)$.
$= (\alpha F(b)(u) + \beta F(b)(u'))(v)$

$\Rightarrow$ Está bien definida.

• Para ver que es un isomorfismo:

• Veamos que es lineal:

$F(\alpha b+\beta b') = \alpha F(b)+\beta F(b')$?

$F(\alpha b+\beta b')(u)(v) = (\alpha b+\beta b')(u,v) = \alpha b(u,v)+\beta b'(u,v) =$

$= \alpha F(b)(u)(v)+\beta F(b')(u)(v) =$

$= (\alpha F(b)+\beta F(b')).(u)(v)$ Es bilineal porque es lineal en u y en v.

$H: \mathcal{L}(V,V^*) \longrightarrow \mathcal{B}(V)$

$\phi: V \to V^*$ $\qquad b_\phi(u,v) = \phi(u)(v)$

$\Rightarrow$ Está bien definida y es lineal. Además es la inversa de F.

③ V esp. vect. sobre $\mathbb{R}$

$f: V \to V$ y forma bilineal $b: V\times V \to \mathbb{R}$

$b_f(u,v) = b(f(u),f(v))$ $\Rightarrow$ Probar b_f es una forma bilineal.

Probar b_f es simétrica si b es simétrica.

• $b_f(\alpha u+\beta u',v) = \alpha b_f(u,v)+\beta b_f(u',v)$?

$b_f(\alpha u+\beta u',v) = b(f(\alpha u+\beta u'),f(v)) \underset{\uparrow}{=}$

f lineal (por ser endomorfismo)

$= b((\alpha f(u)+\beta f(u')),f(v)) \underset{\uparrow}{=}$

b bilineal.

$= \alpha b(f(u),f(v))+\beta b(f(u'),f(v)) = \alpha b_f(u,v)+\beta b_f(u',v)$

• $b_f(u,\alpha v+\beta v') = \alpha b_f(u,v)+\beta b_f(u,v')$?

$b_f(u,\alpha v+\beta v') = b(f(u),f(\alpha v+\beta v')) \overset{f \text{ lineal}}{=} b(f(u),\alpha f(v)+\beta f(v')) =$

$\underset{\uparrow}{=} \alpha b(f(u),f(v))+\beta b(f(u),f(v')) = \alpha b_f(u,v)+\beta b_f(u,v')$

b bilineal.

$\Rightarrow b_f$ es bilineal.

• b_f es simétrica si $b_f(u,v) = b_f(v,u)$.

$$b_f(u,v) = b(f(u), f(v)) \underset{\uparrow}{=} b(f(v), f(u)) = b_f(v,u)$$

si b es simétrica

$\Rightarrow b_f$ simétrica. si b es simétrica.

(4) V_1, V_2 esp. vect. reales. $V = V_1 \times V_2$ donde suma y producto por escalares se realizan coordenada a coordenada.

$b_i : V_i \times V_i \longrightarrow \mathbb{R}$ formas bilineales.

$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = b_1(u_1,v_1) + b_2(u_2,v_2)$$

• b forma bilineal sobre V ?

(-) $b(\alpha(u_1,u_2) + \beta(u_1',u_2'), (v_1,v_2)) = \alpha b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) + \beta b((u_1',u_2'),(v_1,v_2))$

$b(\alpha(u_1,u_2)+\beta(u_1',u_2'),(v_1,v_2)) = b((\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1', \beta u_2'), (v_1,v_2))$

$= b((\alpha u_1 + \beta u_1', \alpha u_2 + \beta u_2'), (v_1,v_2)) =$ b_1, b_2 formas bilineales.

$= b_1(\alpha u_1 + \beta u_1', v_1) + b_2(\alpha u_2 + \beta u_2', v_2) \overset{\downarrow}{=}$

$= \underline{\alpha b_1(u_1,v_1)} + \beta b_1(u_1',v_1) + \underline{\alpha b_2(u_2,v_2)} + \beta b_2(u_2',v_2) =$

$= \alpha b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) + \beta b((u_1',u_2'),(v_1,v_2))$

(-) $b((u_1,u_2), \alpha(v_1,v_2) + \beta(v_1',v_2')) = \alpha b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) + \beta b((u_1,u_2),(v_1',v_2'))$?

$b((u_1,u_2), \alpha(v_1,v_2) + \beta(v_1',v_2')) = b((u_1,u_2),(\alpha v_1 + \beta v_1', \alpha v_2 + \beta v_2')) =$

$= b_1(u_1, \alpha v_1 + \beta v_1') + b_2(u_2, \alpha v_2 + \beta v_2') =$

$= \underline{\alpha b_1(u_1,v_1)} + \beta b_1(u_1,v_1') + \underline{\alpha b_2(u_2,v_2)} + \beta b_2(u_2,v_2')$

$= \alpha b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) + \beta b((u_1,u_2),(v_1',v_2'))$

$\Rightarrow$ b es forma bilineal.

∘ b es bilineal si $b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = b((v_1,v_2),(u_1,u_2))$

$b((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = b_1(u_1,v_1) + b_2(u_2,v_2) \underset{\uparrow}{=} b_2(v_1,u_1) + b_1(v_2,u_2) =$

$= b((v_1,v_2),(u_1,u_2))$ si b_1, b_2 son simétricas

$\Rightarrow$ b es simétrica si b_1 y b_2 son simétricas.

5) $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$b((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 2yy' - 3zz' + 2xy' - 3yz'$.

a) $M(b, B_u)$? $B_u = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$b((1,0,0),(1,0,0)) = 1$ $b((0,1,0),(1,0,0)) = 0$

$b((1,0,0),(0,1,0)) = 2$ $b((0,1,0),(0,1,0)) = -2$

$b((1,0,0),(0,0,1)) = 0$ $b((0,1,0),(0,0,1)) = -3$

$b((0,0,1),(1,0,0)) = 0$

$b((0,0,1),(0,1,0)) = 0$

$b((0,0,1),(0,0,1)) = -3$

$$M(b,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

¿b es métrica sobre $\mathbb{R}^3$? No, ya que la matriz asociada a la forma bilineal no es simétrica:

$b((1,0,0),(0,1,0)) = 2 \neq b((0,1,0),(1,0,0)) = 0$

b) Usando la expresión matricial, calcular:

$$b((1,-2,1),(1,-2,4)) = (1 \ \ -2 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ \ 6 \ \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \ //$$

[redacted]

ⓒ $B=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\} \Rightarrow$ ¿$M(b,B)$ mediante relación de congruencia?

$$M(b,B)=M(1_V,B,B_u)^t\, M(b,B_u)\, M(1_V,B,B_u)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-2&-3\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&-3\\1&0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&1&-2\\1&1&-5\end{pmatrix}$$

ⓓ $b(u,v)$? coords de u en $B \to (1,-2,1)$
coords de v en $B \to (2,1,2)$

$$b(u,v)=(1\ \ -2\ \ 1)\begin{pmatrix}1&3&3\\1&1&-2\\1&1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=(0\ \ 2\ \ 2)\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=6 //$$

⑥ V esp. vect, $\dim_{\mathbb{R}} V=3$ $\quad b: V \to V$ forma bilineal sobre V

$B=\{v_1,v_2,v_3\}$ base de V.

$$M(b,B)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}$$

ⓐ ¿$b(u,v)$ tq $u=v_1+v_3$, $v=v_2+3v_3$?

$u=(1,0,1)$, $v=(0,1,3)$

$$b(u,v)=(1\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=(4\ \ 1\ \ 3)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=10 //$$

OTRA FORMA

$$b(v_1+v_3, v_2+3v_3)=b(v_1,v_2)+3\,b(v_1,v_3)+b(v_3,v_2)+3\,b(v_3,v_3)$$

$$=2+3-1+6=10 //$$

ⓑ ¿$\exists\, w \neq 0$ tq $b(w,w)=0$?

$$b(w,w) = w\, M(b,B)\, w^t = (a\ b\ c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= (a+2b+3c \quad 2a-c \quad a-b+2c)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= a^2+2ab+3ac+2ab-bc+ac-bc+2c^2 =$$

$$= a^2+2c^2+4\underset{\uparrow}{ab}+4ac-2\underset{\uparrow}{bc} = 0$$

Si consideramos $a=c=0$ y $b=x$; $x\neq 0 \Rightarrow b(w,w)=0$

$\Rightarrow \boxed{w=(0,x,0)}$, $x \neq 0$

ⓒ $M(b,B')$? $B' = \{v_1+v_2,\ v_1-v_3,\ v_2\}$ Congruencia.

$= \{(1,1,0),(1,0,-1),(0,1,0)\}$

$$M(b,B') = M(1_V,B',B)^t\, M(b,B)\, M(1_V,B',B)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA:

$B' = (v_1+v_2,\ v_1-v_3,\ v_2) = (u_1,u_2,u_3)$

$$b(u_1,u_1) = (1\ \ 1\ \ 0)\, M(b,B)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b(u_1,u_2) = (1\ \ 1\ \ 0)\, M(b,B)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(...) Así con todos.

⑦ $\mathbb{R}_3[x]$ $\qquad b: \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)\, q'(x)\, dx .$$

ⓐ b bilineal ?

$\bullet)$ $b(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x), q(x)) = \alpha b(p_1(x), q(x)) + \beta b(p_2(x), q(x))$?

$$b(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x), q(x)) = \int_0^1 (\alpha p_1(x) + \beta p_2(x))\, q'(x)\, dx \underset{\uparrow}{=}$$

Propiedades de la integral.

$$= \alpha \int_0^1 p_1(x)\, q'(x)\, dx + \beta \int_0^1 p_2(x)\, q'(x)\, dx =$$

$$= \alpha b(p_1(x), q(x)) + \beta b(p_2(x), q(x))$$

$\bullet)$ $b(p(x), \alpha q_1(x) + \beta q_2(x)) = \alpha b(p(x), q_1(x)) + \beta b(p(x), q_2(x))$?

$$b(p(x), \alpha q_1(x) + \beta q_2(x)) = \int_0^1 p(x) \left[\alpha q_1(x) + \beta q_2(x)\right]' dx \underset{\uparrow}{=}$$

Props derivada

$$= \int_0^1 p(x) \left(\alpha q_1'(x) + \beta q_2'(x)\right) dx \underset{\uparrow}{=} \alpha \int_0^1 p(x)\, q_1'(x)\, dx + \beta \int_0^1 p(x)\, q_2'(x)\, dx$$

Props

$$= \alpha b(p(x), q_1(x)) + \beta b(p(x), q_2(x))$$

$\Rightarrow$ b es bilineal.

ⓑ $M(b, B)$ para $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$b(1,1) = \int_0^1 0\, dx = 0$ $\qquad$ $b(x,1) = \int_0^1 0\, dx = 0$

$b(1,x) = \int_0^1 1\, dx = 1$ $\qquad$ $b(x,x) = \int_0^1 x\, dx = 1/2$

$b(1,x^2) = \int_0^1 2x\, dx = 1$ $\qquad$ $b(x,x^2) = \int_0^1 2x^2\, dx = 2/3$

$b(1,x^3) = \int_0^1 3x^2\, dx = 1$ $\qquad$ $b(x,x^3) = \int_0^1 3x^3\, dx = 3/4$.

$b(x^2,1)=\int_0^1 0\,dx=0$ $\qquad$ $b(x^3,1)=\int_0^1 0\,dx=0$

$b(x^2,x)=\int_0^1 x^2dx=1/3$ $\qquad$ $b(x^3,x)=\int_0^1 x^3dx=1/4$.

$b(x^2,x^2)=\int_0^1 2x^3dx=1/2$ $\qquad$ $b(x^3,x^2)=\int_0^1 2x^4dx=2/5$

$b(x^2,x^3)=\int_0^1 3x^4dx=3/5$ $\qquad$ $b(x^3,x^3)=\int_0^1 3x^5dx=1/2$.

$$M(b,B)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1/2&2/3&3/4\\0&1/3&1/2&3/5\\0&1/4&2/5&1/2\end{pmatrix}$$

ⓒ $b=b_s+b_a$. $\quad M(b_s,B)$? $\qquad M(b_a,B)$?

$M_n(\mathbb{R})=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.

$$M(b_s,B)=\frac{1}{2}\left(M(b,B)+M(b,B)^t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1/2&2/3&3/4\\0&1/3&1/2&3/5\\0&1/4&2/5&1/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1/2&1/3&1/4\\1&2/3&1/2&2/5\\1&3/4&3/5&1/2\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$M(ba,B) = \frac{1}{2}\left(M(b,B) - M(b,B)^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 3/5 \\ 0 & 1/4 & 1/5 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1 & 2/3 & 1/2 & 2/5 \\ 1 & 3/4 & 3/5 & 1/2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ -1 & -1/3 & 0 & 1/5 \\ -1 & -1/2 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

d) b_s y b_a ? $\quad p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

- $b_s(p(x), q(x)) = (a \ \ b \ \ c \ \ d)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\left(b+c+d \quad a+b+c+d \quad a+b+c+d \quad a+b+c+d\right)\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a'(b+c+d) + b'(a+b+c+d) + c'(a+b+c+d) + d'(a+b+c+d)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a'(b+c+d) + (b'+c'+d')(a+b+c+d)\right]$$

OTRA FORMA :

- $b_s(p(x), q(x)) = \frac{1}{2}\left[b(p(x), q(x)) + b(q(x), p(x))\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 p(x)\,q'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,p'(x)\,dx\right]$$

- $b_a(p(x), q(x)) = \frac{1}{2}\left[b(p(x), q(x)) - b(q(x), p(x))\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 p(x)\,q'(x)\,dx - \int_0^1 q(x)\,p'(x)\,dx\right]$$

(8) $M_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \quad b: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b(A,C) = \text{traza}(A \cdot C)$$

(a) b forma bilineal ?

- $b(\alpha A + \beta A', C) = \alpha b(A,C) + \beta b(A',C)$?

$b(\alpha A + \beta A', C) = \text{traza}((\alpha A + \beta A')C) = \text{traza}(\alpha AC + \beta A'C) =$
$= \text{traza}(\alpha AC) + \text{traza}(\beta A'C) = \alpha \,\text{traza}(AC) + \beta\, \text{traza}(A'C) =$
$= \alpha b(A,C) + \beta b(A',C)$

- $b(A, \alpha C + \beta C') = \alpha b(A,C) + \beta b(A,C')$?

$b(A, \alpha C + \beta C') = \text{traza}(A(\alpha C + \beta C')) = \text{traza}(A\alpha C + A\beta C') =$
$= \alpha\, \text{traza}(AC) + \beta\, \text{traza}(AC') = \alpha b(A,C) + \beta b(A,C')$.

b simétrica ?

$b(A,C) = \text{traza}(AC) \underset{\uparrow}{=} \text{traza}(CA) = b(C,A)$.

Propiedades de traza

(b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$b\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$.

$b\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$b\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$b\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$b\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$b\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$b\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$b\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$M(b,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

A semejante $\not\Rightarrow$ A congruente
$\not\Leftarrow$

$$b\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$$

$$b\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = \text{traza}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=1$$

⑨ $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ congruentes $\Rightarrow$ A simétrica $\Leftrightarrow$ C simétrica.

Sabemos $\exists P \in Gl_n(\mathbb{R})$ tq $A = P^t C P$

$\Leftarrow$| C simetrica $\Rightarrow C = C^t$

$$A = P^tCP \Rightarrow A^t = (P^tCP)^t = P^t \cdot C^t \cdot (P^t)^t = P^t \cdot C^t \cdot P \overset{\text{C simetrica}}{=} P^t C \cdot P = A$$

$\Rightarrow A^t = A \Rightarrow$ A es simétrica

$\Rightarrow$| A simétrica $\Rightarrow A = A^t \Rightarrow P^tCP = (P^tCP)^t$

$$P^tCP = (P^tCP)^t = P^tC^tP$$

$$(P^t)^{-1} \cdot \underbrace{P^t C P}(P^{-1}) = (P^t)^{-1} \cdot \underbrace{P^t C^t \cdot P}(P^{-1}) \Rightarrow C = C^t.$$

$\Rightarrow$ C es simétrica.

- Buscar A y C semejantes pero no congruentes.

$$A = \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Son semejantes porque las dos son diagonalizables y tienen el mismo polinomio característico.
No son congruentes ya que C es simétrica y A no.

- Dos matrices congruentes son semejantes?

$$A = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}}_{P^t}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}}_{P} = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}}_{A}$$

$\Rightarrow$ Vemos que A y C son congruentes pero no son semejantes

$\text{Nulidad}(g) = \dim(\text{Rad}(g)) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Nulidad}(g) = 1}$

$$\text{Rad}(g) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} x + 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} y = 0 \\ z = -x \end{matrix} \right\}$$

$$= \{ (x,0,-x) / x \in \mathbb{R} \} = L(\{(1,0,-1)\})$$

$\hookrightarrow \boxed{\text{Rad}(g) = L(\{(1,0,-1)\})}$

g es degenerada ya que $\det(M(g, B_u)) = 0$.

© $M(g,B)$ diagonal ? $\Rightarrow$ Buscar B base ortogonal.

$\mathbb{R}^3 = W \perp \text{Rad}(g)$ $\quad g_W$ no degenerada.

Buscamos $u_1 \in W$ tq $g(u_1, u_1) \neq 0$

$\hookrightarrow W = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$

Para obtener la ecuación implícita: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\hookrightarrow W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \}$

$u_1 = (1,0,0)$, $g(u_1,u_1) = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{U}_1 = L(\{(1,0,0)\})$

$W = \mathcal{U}_1 \perp \mathcal{U}_1^{\perp(W,g_W)}$ $\qquad \mathcal{U}_1^{\perp(W,g_W)} = \mathcal{U}_1^{\perp} \cap W$

$$\mathcal{U}_1^{\perp} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{(1 \quad 2 \quad 1)}_{(1\ 0\ 0) M(g,B_u)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \}$$

$\hookrightarrow z = -x - 2y$

$$= \{ (x,y,-x-2y) / x,y \in \mathbb{R} \} = L(\{(1,0,-1),(0,1,-2)\})$$

$$\mathcal{U}_1^{\perp(W,g_W)} = \mathcal{U}_1^{\perp} \cap W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} z = 0 \\ x = 2y \end{matrix} \} = \{ (2y,y,0) / y \in \mathbb{R} \} =$$

$$= L(\{(2,1,0)\})$$

⑩ ω_g forma cuadrática asociada a métrica g.

$$\left.\begin{array}{l}\omega_g(u)=\omega_g(2v)=2.\\ \omega_g(u+v)=3\end{array}\right\} \Rightarrow ¿g(u+v,v)?$$

$$\omega_g(u)=g(u,u)=\omega_g(2v)=g(2v,2v)=4g(v,v)=2$$

$$\Rightarrow \quad g(v,v)=\omega_g(v)=1/2$$

$$\omega_g(u+v)=g(u+v,u+v)=\underbrace{g(u+v,u)}_{g(u,u)+\underbrace{g(u,v)}_{g(u+v-v,v)=g(u+v,v)-g(v,v)}}+g(u+v,v)=3.$$

$$\omega_g(u+v)=g(u,u)+g(u+v,v)-g(v,v)+g(u+v,v)=$$

$$=2+2g(u+v,v)-1/2=3$$

$$\Rightarrow \quad g(u+v,v)=\frac{3+1/2-2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(u+v,v)=3/4}$$

⑪ g métrica en $\mathbb{R}^3$

$$H(g,B_u)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

ⓐ $\omega_g: V\longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega_g(v)=g(v,v)=(a\ b\ c)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=$$

$$=(a+2b+c \quad 2a+2c \quad a+2b+c)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=$$

$$=a^2+2ba+ca+2ab+2cb+ac+2bc+c^2=$$

$$=a^2+c^2+4ab+2ac+4bc$$

ⓑ $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&0&2\\1&2&1\end{vmatrix}=0\ ,\ \begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}=-4\neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rango}(g)=2}$

$$\boxed{B = \{\overbrace{(1,0,0)}^{U_1}, \overbrace{(-2,1,0)}^{U_1^{\perp(W,g_W)}}, \overbrace{(1,0,-1)}^{Rad}\}}$$ base octogonal.

$$M(g,B) = M(1_V, B, B_u)^t \, M(g, B_u) \, M(1_V, B, B_u) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Matriz diagonal.

$$g((-2,1,0),(-2,1,0)) = (-2, 1 \;\; 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \;\; -4 \;\; 0) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

$\Rightarrow$ g es indefinida degenerada.

(12) $\mathbb{R}_2[x]$

$$g(a_0 + a_1 x + a_2 x^2, b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + a_1 b_0 + a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + 2a_2 b_2$$

(a) $M(g, B_u)$? $B_u = \{1, x, x^2\}$.

$g(1,1) = 1$ $\quad g(x,1) = 1$ $\quad g(x^2,1) = 0$

$g(1,x) = 1$ $\quad g(x,x) = 0$ $\quad g(x^2,x) = 3$

$g(1,x^2) = 1$ $\quad g(x,x^2) = 1$ $\quad g(x^2,x^2) = 2$

$$M(b, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ⓑ $g = g_s + g_a \Rightarrow M(g_s, B_u),\ M(g_a, B_u)$?

$$M(g_s, B_u) = \frac{1}{2}\left(M(g, B_u) + M(g, B_u)^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M(g_a, B_u) = \frac{1}{2}\left(M(g, B_u) - M(g, B_u)^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_s(a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2) = \frac{1}{2}(a_0\ a_1\ a_2)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(a_0 + a_1 + \frac{a_2}{2} \quad a_0 + 2a_2 \quad \frac{a_0}{2} + 2a_1 + 2a_2\right)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a_0b_0 + a_1b_0 + \frac{a_2b_0}{2} + a_0b_1 + 2a_2b_1 + \frac{a_0b_2}{2} + 2a_1b_2 + 2a_2b_2$$

$$g_a(a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2) = \frac{1}{2}(a_0\ a_1\ a_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{-a_2}{2} \quad a_2 \quad \frac{a_0}{2} - a_1\right)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{-a_2b_0}{2} + a_2b_1 + \frac{a_0b_2}{2} - a_1b_2$$

(13) $\omega(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$.

B? base de $\mathbb{R}^3$ tq si $(a,b,c) \rightarrow$ coordenadas de un vector v

en esa base $\rightarrow \omega(v) = a^2 - b^2$.

$$M(g_\omega, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sabemos que $\omega(x,y,z) = (x\ y\ z)\, M(g_\omega, B_u) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0) \right\}$$

(c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2-2-4=-4 \neq 0 \Rightarrow g_S$ no degenerada.

Como g_S es no degenerada, su radical es es trivial $\boxed{Rad(g_S)=\{0\}}$

(d) Base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ para g_S ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 7/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 7/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ (matriz ortogonal)}$$

Base ortogonal ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-2, 3/2, 1)\}$ base ortogonal.

g es no degenerada indefinida.

★ Si me pidieran una base ortonormal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Base ortonormal:

$B' = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1, 3/4, 1/2)\}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(14) Clasificar las métricas sobre $\mathbb{R}^3$.

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \det(A_3) = \det(A) = -17 < 0 \\ \det(A_2) = -4 < 0 \\ \det(A_1) = 1 > 0 \end{array}\right\}$ Métrica no degenerada indefinida. Rango $= 3 \Rightarrow$ Índice $= 1$ ó 2.

• $C = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \det(C_3) = \det(C) = 4 > 0 \\ \det(C_2) = 24 > 0 \\ \det(C_1) = 14 > 0 \end{array}\right\}$ Métrica no degenerada definida positiva.

• $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \det(D_3) = \det(D) = 20 > 0 \\ \det(D_2) = 8 > 0 \\ \det(D_1) = 3 > 0 \end{array}\right\}$ Métrica no degenerada definida positiva.

• La métrica asociada a la matriz A no puede ser congruente a ninguna de las otras 2 ya que las otras son definidas positivas y esta es indefinida.

• Las métricas asociadas a las matrices C y D sí son congruentes.

(15) Estudiar si M y N representan a una misma métrica.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = -3 < 0 \Rightarrow M$ no degenerada indefinida.

$\det(N) = -5 < 0 \Rightarrow N$ no degenerada indefinida.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P_1^t M P_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P_2^t N P_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P_1^t M P_1 = P_2^t N P_2 \\ (P_2^t)^{-1} P_1^t M P_1 (P_2)^{-1} = N \\ N = (P_2^{-1})^t P_1^t M P_1 P_2^{-1} \end{array}$$

$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(A \cdot B)^t = B^t A^t$

$$N = \underbrace{(P_1 \cdot P_2^{-1})^t}_{} M \underbrace{(P_1 \cdot P_2^{-1})}_{} = P^t M P$$

M

$u_1 = (1,0)$; $g_1(u_1,u_1) = (1 \ \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \mathcal{U}_1 = L(\{(1,0)\})$

$\mathcal{U}_1^\perp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (1 \ \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (1 \ \ 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\} = \{(-2y, y) / y \in \mathbb{R}\} = L(\{(-2,1)\})$

$u_2 = (-2,1)$

$$\left.\begin{array}{l} u_1' = u_1 \\ u_2' = \dfrac{u_2}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} g(u_2,u_2) = (-2 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ \ -3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow B_1 = \left\{ (1,0), \left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B_1 = \{(1,0), (-2\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)\}$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

16) $\mathbb{R}^3 \quad \forall a \in \mathbb{R} \to \omega_a(x,y,z) = x^2 + y^2 + 8z^2 + 2axz - 4ayz$

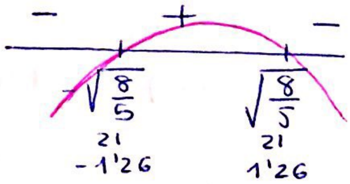
Clasificar g_a según a.

$$A_a = M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2a \\ a & -2a & 8 \end{pmatrix}$$

$\det(A_a) = 8 - 4a^2 - a^2 = 8 - 5a^2$

$\det(A_{a_2}) = 1 > 0$

$\det(A_{a_1}) = 1 > 0$



$8 - 5a^2 = 0 \iff 5a^2 = 8 \iff a = \pm\sqrt{\frac{8}{5}}$

- Si $a \in \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{8}{5}}\right) \Rightarrow g_a$ definida positiva.
- Si $a \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{8}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{8}{5}}, +\infty\right) \Rightarrow g_a$ no degenerada indefinida
- Si $a = -\sqrt{\frac{8}{5}}$ ó $a = \sqrt{\frac{8}{5}} \Rightarrow g_a$ es semidefinida positiva

OTRA FORMA (Th Sylvester).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2a \\ a & -2a & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 2a & 8-a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & -2a & 8-a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 8-5a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8-5a^2 \end{pmatrix}$$

$-$ $\quad -\sqrt{8/5} \quad$ $+$ $\quad \sqrt{8/5} \quad$ $-$

$8-5a^2=0 \iff a = \pm\sqrt{\frac{8}{5}}$

- Si $a \in \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{8}{5}}\right) \Rightarrow 8-5a^2>0 \Rightarrow$ Definida positiva.
- Si $a \in \left(-\infty, -\sqrt{8/5}\right) \cup \left(\sqrt{8/5}, +\infty\right) \Rightarrow 8-5a^2<0 \Rightarrow$
- Si $a=-\sqrt{\frac{8}{5}}$ ó $a=\sqrt{\frac{8}{5}} \Rightarrow 8-5a^2=0 \Rightarrow$ Semidef. positiva.

17) ¿ $\exists x,y,z \neq 0$ tq $x^2+y^2+z^2+2xy=0$?

$\omega_g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xy$

$$A = M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A)=0 \Rightarrow A$ es degenerada $\Rightarrow A$ tiene radical no trivial.

$$Rad(g) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} x+y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} = \{(x,-x,0) \,/\, x \in \mathbb{R}\}.$$

$$= L(\{(1,-1,0)\}) = C$$

$C' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, g_\omega((x,y,z),(x,y,z))=0\} = Rad(g)$.

$\exists\, x,y,z \neq 0$ tq $2x^2+2y^2+2z^2+2xy=0$?

$\omega_{g'}(x,y,z) = 2x^2+2y^2+2z^2+2xy$.

$$M(g',B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A'$$

$$\left.\begin{aligned} \det(A') &= 6>0 \\ \det(A'_2) &= 3>0 \\ \det(A'_1) &= 2>0 \end{aligned}\right\}$$ A' es no degenerada y definida positiva $\Rightarrow \nexists\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, g((x,y,z),(x,y,z))=0$.

(18) Calcular las soluciones:

(a) $x^2+5y^2+z^2+4xy+2yz=0$.

$\omega_g(x,y,z) = x^2+5y^2+z^2+4xy+2yz$.

$$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A .$$

$C' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / g((x,y,z),(x,y,z))=0\}$ (solución).

$$\left.\begin{aligned} \det(A) &= 0 \\ \det(A_2) &= 1>0 \\ \det(A_1) &= 1>0 \end{aligned}\right\}$$ Métrica degenerada semidefinida positiva $\Rightarrow$ Radical no trivial y $C' = Rad(g)$.

$$C' = Rad(g) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} x=-2y \\ z=-y \end{matrix}\right\} = \{(-2y, y, -y) / y\in\mathbb{R}\} = L(\{(-2,1,-1)\})$$

$\Rightarrow$ Solución: $C' = L(\{(-2,1,-1)\})$

★ $W = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$, $\mathbb{R}^3 = W \perp Rad(g)$.

ⓑ $3x^2+y^2-xy=0$

$$\omega_{g'}(x,y,z)=3x^2+y^2-xy \longrightarrow M(g',B_u)=\begin{pmatrix}3 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=A'$$

$$\left.\begin{array}{l}\det(A')=0\\ \det(A'_2)=3>0\\ \det(A'_1)=3>0\end{array}\right\}\ \text{Métrica degenerada semidefinida positiva} \Rightarrow G=Rad(g).$$

$$G=Rad(g)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix}3 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l}3x-\frac{1}{2}y=0\rightarrow x=0\\ y=0\end{array}\right\}=\{(0,0,z)\,/\,z\in\mathbb{R}\}$$

$$=L(\{(0,0,1)\}) \longrightarrow \text{Solución: } G=L(\{(0,0,1)\})$$

ⓒ $x^2+z^2+4xy+2xz+4yz=0$

$$\omega(x,y,z)=x^2+z^2+4xy+2xz+4yz \rightarrow M(g,B_u)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=A$$

$$\left.\begin{array}{l}\det(A)=0\\ \det(A_2)=-4<0\\ \det(A_1)=1>0\end{array}\right\}\ \text{Degenerada indefinida} \Rightarrow \text{Radical no trivial}$$

Buscamos una base ortogonal.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim$$

$$M(g,B)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow B=\{(1,0,0),(-2,1,0),(-1,0,1)\}\ \text{base ortogonal.}$$

Si (a,b,c) son las coordenadas de u en la base B

$$\omega(u) = (a\ b\ c)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = (a\ \ -4b\ \ 0)\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} =$$

$$= a^2 - 4b^2 = (a-2b)(a+2b)$$

$$G' = \{u \notin \mathbb{R}^3 /\ a-2b=0\} \cup \{u \in \mathbb{R}^3 / a+2b=0\}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = M(1_V, B, B_u)\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-2b-c\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = M(1_V, B, B_u)^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$x = a-2b+c \longrightarrow a = x+2b-c = x+2y+z$

$y = b \longrightarrow \boxed{b=y}$ $\quad \hookrightarrow \boxed{a = x+2y+z}$

$z = -c \longrightarrow \boxed{c=-z}$

$$G' = \{(x,y,z) \ /\ x+2y+z-2y=0\} \cup \{(x,y,z)/\ x+2y+z+2y=0\}$$

$$G' = \{(x,y,z)/\ z=-x\} \cup \{(x,y,z)\ /\ z=-x-4y\}$$

$$G' = L(\{(1,0,-1)\}) \cup L(\{(1,0,-1),(0,1,-4)\})$$

(19) $g: \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ métrica

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)\,dx$$

1°) sacamos la matriz asociada a la métrica.

$B_u = \{1, x, x^2\}$

$g(1,1) = 0$

$g(1,x) = 0 = g(x,1)$

$g(1,x^2) = 0 = g(x^2,1)$

$g(x,x) = \int_{-1}^{1} dx = 2.$

$g(x, x^2) = \int_{-1}^{1} 2x\,dx = 0 = g(x^2, x)$

$g(x^2,x^2) = \int_{-1}^{1} 4x^2 dx = 8/3$

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

ⓐ $\det(M(g,B_u)) = 0 \Rightarrow \text{Rango}(M(g,B_u)) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \text{Rad}(g) = 3 - 2 = 1. \Rightarrow \boxed{\text{Rad}(g) = L(\{1\})}$

ya que $g(1,1) = g(1,x) = g(1,x^2) = 0$

ⓑ $U = \underbrace{\mathbb{R}_1[x]}_{L(\{1,\, x\})} \leq \mathbb{R}_2[x].$

$$U^\perp = \left\{ a+bx+cx^2 \,/\, \begin{matrix} g(1, a+bx+cx^2) = 0 \\ g(x, a+bx+cx^2) = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ a+bx+cx^2 \,/\, \begin{matrix} (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ (0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow 2b = 0.$$

$= \{a+bx+cx^2 \,/\, b=0\} = \{a+cx^2 \,/\, a, c \in \mathbb{R}\} = L(\{1, x^2\})$

Rad

$\Rightarrow \boxed{U^\perp = L(\{1, x^2\})}$

ⓒ Base ortogonal para g:

$B = \{1, x, x^2\}$

Base ortonormal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow B' = \{1, \frac{\sqrt{2}}{2}x, \frac{\sqrt{6}}{4}x^2\} \rightarrow M(g, B') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20 $g: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$g(A, C) = tr(AC^t)$

Primero sacamos la matriz asociada a la métrica.

$$B_u = \{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_4}\}$$

$g(A_1, A_1) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$

$g(A_1, A_2) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = g(A_2, A_1)$

$g(A_1, A_3) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = g(A_3, A_1)$

$g(A_1, A_4) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = g(A_4, A_1)$

$g(A_2, A_2) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$g(A_2, A_3) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = g(A_3, A_2)$

$$g(A_2,A_4)=tr\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=0=g(A_4,A_2)$$

$$g(A_3,A_3)=tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=1$$

$$g(A_3,A_4)=tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0=g(A_4,A_3)$$

$$g(A_4,A_4)=tr\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=1$$

$$M(g,B_u)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4.$$

(a) $\det(M(g,B_u))=1\neq 0 \Rightarrow g$ es no degenerada

es definida positiva, $\text{Rango}(g)=4$ $\quad$ $\text{Índice}(g)=0$.

(b) $A_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix} / b\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}\right)$

$$A_2(\mathbb{R})^\perp=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) \Big/ (0\ \ 1\ \ -1\ \ 0)\, I_4\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) \Big/ (0\ \ 1\ \ -1\ \ 0)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) \Big/ b-c=0\rightarrow c=b\right\}=S_2(\mathbb{R})$$

$\hookrightarrow M_2(\mathbb{R})=A_2(\mathbb{R})\oplus S_2(\mathbb{R})$.

ⓒ Base ortogonal para g formada por matrices simétricas y antisimétricas.

Basta con buscar una base ortogonal de $S_2(\mathbb{R})$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(A_1, A_2) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$S_2(\mathbb{R}) \cap L(\{A_1\})^{\perp} \cap L(\{A_4\})^{\perp} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \Bigg/ \begin{array}{l} (1\ 0\ 0\ 0)\, I_4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \\ (0\ 0\ 0\ 1)\, I_4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \Big/ \begin{array}{l} a = 0 \\ d = 0 \end{array} \right\} = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

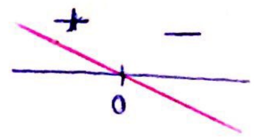
$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S_2(\mathbb{R}) \cap L(\{A_1\})^{\perp} \cap L(\{A_4\})^{\perp}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_2(\mathbb{R}) \cap\ ?} \right\} \text{ base ortogonal.}$$

(21) $a \in \mathbb{R}$, métrica g_a de $\mathbb{R}^3$

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Clasificar la métrica según a.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 4a = -3a \longrightarrow -3a = 0 \iff a = 0$$



$$\det(A_2) = a \longrightarrow \begin{cases} = 0 & \text{si } a = 0 \\ < 0 & \text{si } a < 0 \\ > 0 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

$$\det(A_1) = a \searrow \begin{cases} = 0 & \text{si } a = 0 \\ < 0 & \text{si } a < 0 \\ > 0 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

- Si $a=0 \Rightarrow g$ es degenerada.

- Si $a<0 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \det(A)=\det(A_3)>0 \\ \det(A_2)<0 \\ \det(A_1)<0 \end{array}\right\}$ g es no degenerada indefinida

- Si $a>0 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \det(A)=\det(A_3)<0 \\ \det(A_2)>0 \\ \det(A_1)>0 \end{array}\right\}$ g es no degenerada indefinida.

* Si $a=-1$

$$\Rightarrow M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_g(x\ y\ z) = -x^2+y^2+z^2+4yz.$$

¿Base ortogonal al plano de ecuación $z=0$?

$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z=0\} = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$

$\hookrightarrow B_u = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

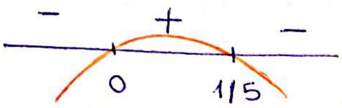
$\Rightarrow$ Base ortogonal $\Rightarrow B_u = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

(22) $\omega_a(x,y,z) = x^2+y^2+az^2+2axz-4ayz$.

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2a \\ a & -2a & a \end{pmatrix} = A$$

$\det(A_3) = \det(A) = a - a^2 - 4a^2 = -5a^2 + a \Rightarrow -5a^2+a = 0$

$\Leftrightarrow a(-5a+1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \end{cases}$



$\det(A_2) = 1 > 0$

$\det(A_1) = 1 > 0$

- Si $a \in (0, 1/5) \Rightarrow g_a$ es definida positiva no degenerada.
- Si $a \in (-\infty, 0) \cup (1/5, +\infty) \Rightarrow g_a$ no degenerada indefinida
- Si $a = 0$ ó $a = 1/5 \Rightarrow g_a$ es degenerada semidefinida positiva.

$\text{Rango}(g_a) = 2$ si $a = 0$ ó $a = 1/5$

$\text{Rango}(g_a) = 3$ si $a \neq 0$ ó $a \neq 1/5$.

- Si $a \in (0, 1/5) \Rightarrow$ Índice $= 0$
- Si $a \in (-\infty, 0) \cup (1/5, +\infty) \Rightarrow$ Índice $= 1$ ó 2.
- Si $a = 0$ ó $a = 1/5 \Rightarrow$ Índice $= 0$.

(23) g métrica de $\mathbb{R}^4$

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Base ortonormal para g del plano $\begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases}$

$$\mathcal{U} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{matrix} x+y=0 \\ z+t=0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \,/\, \begin{matrix} y=-x \\ t=-z \end{matrix} \right\} = \{ (x,-x,z,-z) \,/\, x,z \in \mathbb{R} \}$$

$$= L(\{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)\})$$

$B = \{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)\}$ base de $\mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ ¿$M(g_u, B)$?

$$g_u((1,-1,0,0),(1,-1,0,0)) = (1\ -1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (1\ -1\ -1\ -3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \quad (1)$$

$$g_u((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)) = (1\ -1\ -1\ -3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$g_u((0,0,1,-1),(0,0,1,-1)) = (0\ 0\ 1\ -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1\ -3\ 1\ -2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow M(g_u, B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1ª FORMA

$u_1 = (1,-1,0,0) \longrightarrow \mathcal{U}_1 = L(\{(1,-1,0,0)\})$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_1^{\perp(\mathcal{U}, g_u)}$

$$\mathcal{U}_1^{\perp} = \left\{(x,y,z,t) \,/\, \begin{array}{l} x+y=0 \\ z+t=0 \\ x-y-z-3t=0 \end{array}\right\} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{array}{l} y=-x \\ t=-z \\ 2x+2z=0 \\ \hookrightarrow x=-z \end{array}\right\}$$

$$= \{(-z,z,z,-z) \,/\, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,1,-1)\})$$

Ponemos (1)

$B' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1,0,0), (-1,1,1,-1)\right)$ base ortonormal.

$$g((-1,1,1,-1),(-1,1,1,-1)) = (-1\ 1\ 1\ -1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-2\ -2\ 2\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.$$

2ª FORMA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B' = \{(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0, 0), (-1,1,1,-1)\}$ base ortonormal.

(24) $\mathbb{R}^3$, plano: $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y-z=0 \to z=y\}$

recta: $W = L(\{(1,1,-1)\})$

¿ g tal que $Rad(g) = W$, y g_U métrica lorentziana? $\begin{cases} \text{no degen.} \\ \text{def. posit.} \\ \text{índice 1} \end{cases}$

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = y\} = L(\{(1,0,0),(0,1,1)\})$

$B = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (No es única; he cogido la más sencilla)

$$M(g,B_u) = M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, B)^t M(g,B) M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, B).$$

$$M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, B) = M(1_{\mathbb{R}^3}, B, B_u)^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}^{-1}$$

$\det(A) = -2$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to M(g,B_u) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g((x,y,z),(x',y',z')) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\frac{1}{2} =$$

$$= (2x-y+z \quad -x-z \quad x-y)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (2xx'-yx'+zx'-xy'-zy'+xz'-yz')\frac{1}{2}$$

(25) $\mathbb{R}_2[x]$ $\quad \forall m \in \mathbb{R} \rightarrow g_m$ métrica :

$$g_m(p(x), q(x)) = p(m)\, q(m).$$

(a) Base del radical de g_m ? Base ortonormal ? Rango ? Índice ?

1º Escribimos la matriz asociada a la métrica :

$B_u = \{1, x, x^2\}.$

$g_m(1,1) = 1.$ $\qquad g(x,x) = m^2$

$g_m(1,x) = g_m(x,1) = m$ $\qquad g(x,x^2) = g(x^2,x) = m^3.$

$g_m(1,x^2) = g_m(x^2,1) = m^2$ $\qquad g(x^2,x^2) = m^4.$

$$M(g_m, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m^3 \\ m^2 & m^3 & m^4 \end{pmatrix}$$

Rango $(g_m) = 1$ (ya que todas las filas son proporcionales a la 1ª)

$\dim_{\mathbb{R}} Rad(g_m) = 3 - 1 = 2.$

↳ El suplementario del radical tiene dimensión 1 ⇒ Si encontramos un elemento que no esté en el radical y tal que $g(*,*) > 0$ ⇒ Es definida positiva.

$g_m(1,1) = 1 > 0 \Rightarrow g_m$ es semidefinida positiva

Índice $(g_m) = 0$

$$Rad(g_m) = \left\{ a + bx + cx^2 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ \cancel{m} & \cancel{m^2} & \cancel{m^3} \\ \cancel{m^2} & \cancel{m^3} & \cancel{m^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \{ a + bx + cx^2 \,/\, a + mb + m^2c = 0 \} =$$
$$\hookrightarrow a = -mb - m^2c$$

$$= \{ (-mb - m^2c) + bx + cx^2 = b(-m + x) + c(-m^2 + x^2) \,/\, b, c \in \mathbb{R} \} =$$

$$= L(\{ -m + x, -m^2 + x^2 \})$$

$\Rightarrow B = \{ -m + x, -m^2 + x^2 \}$ base del radical.

Como ya tenemos una base del radical y tenemos $g(1,1) = 1 > 0$

Base ortonormal de g_m :

$$B' = \{1, -m+x, -m^2+x^2\}$$

(b) $m = 1 \Rightarrow$ ¿$\exists B$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ tq $M(g_1, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

es la matriz cuyas entradas son todas $= 1$?

sí// Para la base usual. $B_u = \{1, x, x^2\}$

(26) $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ métricas g_1, g_2, g_3

$G_1 = M(g_1, B_u) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $G_2 = M(g_2, B_u) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$G_3 = M(g_3, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$(\mathbb{R}^2, g_1), (\mathbb{R}^2, g_2), (\mathbb{R}^2, g_3)$ isométricos entre sí ?

$(V, g), (V', g')$ isométricos $\Leftrightarrow \begin{cases} \dim(V) = \dim(V') \\ \text{rango}(g) = \text{rango}(g') \\ \text{índice}(g) = \text{índice}(g') \end{cases}$.

$\left.\begin{array}{l} \det(G_1) = 7 > 0 \\ a_{11} = 4 > 0 \end{array}\right\}$ g_1 no degenerada def. positiva $\begin{cases} \text{rango}(g_1) = 2 \\ \text{índice}(g_1) = 0 \end{cases}$

$\det(G_2) = -9 < 0 \Rightarrow g_2$ no degenerada indefinida $\begin{cases} \text{rango}(g_2) = 2 \\ \text{índice}(g_2) = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \det(G_3) = 8 > 0 \\ a_{11} = 3 > 0 \end{array}\right\}$ g_3 no degenerada def. positiva $\begin{cases} \text{rango}(g_3) = 2 \\ \text{índice}(g_3) = 0 \end{cases}$

g_1 y g_3 son isométricas pero g_2 no es isométrica a ninguna de las otras dos.

Ahora tenemos que construir una isometría entre g_1 y g_3

Basta con encontrar B_1 y B_3 bases ortonormales de $(\mathbb{R}^2, g_1)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$ y definir $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que lleve B_1 en B_3.

• G_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{7}/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{7}/7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{7}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{7}/7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{7}/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{7}/14 \\ 0 & 2\sqrt{7}/7 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow B_1 = \{(1/2, 0), (-\sqrt{7}/14 \quad 2\sqrt{7}/7)\}$ base ortonormal de G_1

• G_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 8/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/12 \\ 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow B_3 = \{(\sqrt{3}/3, 0), (\sqrt{6}/12, \sqrt{6}/4)\}$ base ortonormal de G_3

OTRA FORMA DE CALCULAR LA BASE ORTONORMAL B_3 :

$u_1 = (1,0)$; $g_3((1,0)(1,0)) = (1 \ 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$

$\hookrightarrow \mathcal{U}_1 = L(\{(1,0)\})$

$$\mathcal{U}_1^{\perp} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 / (1 \ 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y = 0\}$$

$= \{(x, 3x) / x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,3)\}) \rightsquigarrow u_2 = (1,3)$

$$g_3(u_2,u_2) = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (0 \quad 8)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 24 \neq 0$$

$$u_1' = \frac{u_1}{\sqrt{g(u_1,u_1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

$$u_2' = \frac{u_2}{\sqrt{g(u_2,u_2)}} = \frac{1}{\sqrt{24}}(1,3) = \left(\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow B_3 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right) \right\}$$

* OTRA FORMA DE CALCULAR LA BASE ORTONORMAL B_1.

$u_1 = (1,0)$ $\quad g(u_1,u_1) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$

$\hookrightarrow \mathcal{U}_1 = L(\{(1,0)\})$

$$\mathcal{U}_1^\perp = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x + y = 0\}$$

$$= \{(x, -4x) / x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,-4)\}) \rightarrow u_2 = (1,-4).$$

$$g_1(u_2,u_2) = (1 \quad -4)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = (0 \quad -7)\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 28 \neq 0.$$

$$u_1' = \frac{1}{2}(1,0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$u_2' = \frac{1}{\sqrt{28}}(1,-4) = \left(\frac{\sqrt{7}}{14}, -\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$\Rightarrow B_1 = \left\{ (1/2, 0), \left(\sqrt{7}/4, -2\sqrt{7}/7\right) \right\}$$

27 $\mathbb{R}^4$ g métrica $\qquad M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(a)

(b) Base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B' = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2, 0), \underline{(1,1,1,1)}\}$ base ortonormal

$\Rightarrow Rad(g) = L(\{(1,1,1,1)\})$

ⓒ Base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 = 0$ con métrica inducida por g.

$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 = 0\} = \{(0, x_2, x_3, x_4) / x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$= L(\{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\})$

$B_{\mathcal{U}} = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

$$M(g_{\mathcal{U}}, B_{\mathcal{U}}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -3 \\ 0 & 0 & 9/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5/2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5/2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vemos que la métrica restringida a U
es definida positiva.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5/2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/5 \\ 0 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \\ 0 & \sqrt{10}/5 & 3\sqrt{10}/5 \\ 0 & 0 & \sqrt{10}/2 \end{pmatrix}$$

$$B_u' = \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}, 0\right), \left(0, \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \right\}$$

(d) Base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 + x_2 = 0$ con la métrica inducida por g.

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_2 = -x_1\} =$$
$$= \{(x_1, -x_1, x_3, x_4) \,/\, x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= L(\{(1,-1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\})$$

$$\hookrightarrow B_W = \{\underbrace{(0,0,1,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{u_2}, \underbrace{(1,-1,0,0)}_{u_3}\}$$

$$M(g_W, B_W) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$g((0,0,1,0),(1,-1,0,0)) = g((0,0,1,0),(1,0,0,0)) - g((0,0,1,0),(0,1,0,0))$$
$$= 1 + 1 = 2.$$

$$g((0,0,0,1),(1,-1,0,0)) = g((0,0,0,1),(1,0,0,0)) - g((0,0,0,1),(0,1,0,0)) = -1$$

$$g((1,-1,0,0),(1,-1,0,0)) = g((1,0,0,0),(1,0,0,0)) - 2g((1,0,0,0),(0,1,0,0))$$
$$+ g((0,1,0,0),(0,1,0,0)) = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 11/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 11/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 1 & -5\sqrt{6}/12 \\ 0 & 1 & -\sqrt{6}/4 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/4 \end{pmatrix}$$

$$B'_W = \left\{ \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), (0, 0, 1, 1), \left(\sqrt{\frac{6}{4}}, -\sqrt{\frac{6}{4}}, -\frac{5\sqrt{6}}{12}, -\sqrt{\frac{6}{4}}\right) \right\}$$

OTRA FORMA:

$\det(M(g_W, B_W)) \neq 0$

$w_1 = (0,0,1,0) \rightarrow W_1 = L(\{(0,0,1,0)\})$ $\quad g(w_1, w_1) = 3 \neq 0$

$$\bullet\ W_1^{\perp(W, g_W)} = W \cap W_1^{\perp} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{matrix} x_2 + x_1 = 0 \\ \underbrace{(0,0,1,0) M(g, B_u)}_{(1\ -1\ 3\ -3)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{matrix} x_2 = -x_1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x_1 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \}$$

$$\omega_2 = (0,0,1,1) \longrightarrow W_2 = L(\{(0,0,1,1)\})$$

$$g(\omega_2,\omega_2) = 1 \neq 0$$

$$\bullet\ \underbrace{W_1 \cap W_1^{\perp}}_{W_1^{\perp}(W,g_W)} \cap W_2^{\perp} = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \Big/ \begin{array}{l} x_2 = -x_1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_4 = x_2 = -x_1 \end{array} \right\} \overset{(*)}{=}$$

$$W_2^{\perp} = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \Big/ \underbrace{(0\ 0\ 1\ 1)\, M(g,B_u)}_{(0\ -1\ 0\ 1)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \{ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 / -x_2 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 = x_2 \}$$

$$\overset{(*)}{=} \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 / x_1 + x_1 + 3x_3 + 3x_1 = 0 \rightarrow 5x_1 + 3x_3 = 0 \hookrightarrow x_3 = \frac{-5}{3}x_1 \right\}$$

$$= L\left(\left\{\underbrace{\left(1,-1,\frac{-5}{3},-1\right)}_{\omega_3}\right\}\right)$$

$$\omega_1' = \frac{\omega_1}{\sqrt{3}} = \left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$$

$$\omega_2' = \omega_2 = (0,0,1,1).$$

$$\omega_3' = \frac{\omega_3}{\sqrt{8/3}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{-\sqrt{6}}{4}, \frac{-5\sqrt{6}}{12}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$g(\omega_3,\omega_3) = \left(1,-1\ \ \frac{-5}{3}\ \ -1\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\ \ \frac{-4}{3}\ \ 0\ \ 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \neq 0.$$

$$B_W' = \left\{ \left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right), (0,0,1,1), \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{-\sqrt{6}}{4}, \frac{-5\sqrt{6}}{12}, \frac{-\sqrt{6}}{4}\right) \right)$$

ⓒ (U, g_U) definida positiva (W, g_W) definida positiva

$$\left.\begin{array}{l} \dim(U) = \dim(W) = 3 \\ \text{Rango}(g_U) = \text{Rango}(g_W) \\ \text{índice}(g_U) = \text{índice}(g_W) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (U, g_U) \text{ y } (W, g_W) \text{ son isométricos}$$

(28) Verdadero / Falso

ⓐ $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$g((x,y),(x',y')) = xy$ es bilineal?

$g((1,1),(1,0)) = 1.$

$g((1,1), 2(1,0)) = 1 \neq 2g((1,1),(1,0)) = 2$

$\Rightarrow$ No es bilineal.

ⓑ $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal es de la forma
$g(x,y) = axy$, $a \in \mathbb{R}$ <u>VERDADERO</u>.

$g(x,y) = x\,(a) \cdot y = axy.$

ⓒ Si 2 matrices son congruentes $\Rightarrow$ Tienen misma traza

A y C congruentes si $C = P^t A P$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{P^t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}_{P} \Rightarrow \text{C y A son congruentes}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{traza}(A) = 3 \\ \text{traza}(C) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A pesar de ser congruentes no tienen la misma base.}$$

NO deben tener el mismo determinante ya que

$\det(A) = 2 \neq \det(C) = 1.$

(d) En $\mathbb{R}^2$ $\exists g$ métrica tq $(L(\{(2,1)\}))^\perp = L(\{(2,1)\})$

UNA FORMA

$g((2,1),(2,1)) = 0$

$M(g,B) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

0 debe ser $\neq 0$ ya que si fuera 0 $\Rightarrow B \in L(\{(2,1)\})^\perp$

$B = \{(1,0),(2,1)\}$.

$M(g,B_u) = M(1_{\mathbb{R}^2}, B_u, B)^t M(g,B) M(1_{\mathbb{R}^2}, B_u, B)$

$M(1_{\mathbb{R}^2}, B_u, B) = M(1_{\mathbb{R}^2}, B, B_u)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Adj(\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L(\{(2,1)\})^\perp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (2\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (1\ \ -2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = 0\} =$

$= L(\{(2,1)\})$

OTRA FORMA:

$L(\{(2,1)\})^\perp = \{x(1,0) + y(2,1) / (0\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$

$= \{x(1,0) + y(2,1) / (1\ \ 0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\} =$

$= \{x(1,0) + y(2,1) / x = 0\} = L(\{(2,1)\})$

~~(e) Ver~~

(e) V esp. vect. real g métrica no degenerada en V.

$M(g,B) = \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ tq $ab<0 \Rightarrow$ g indefinida.

$\exists u,v \in V$ tq $g(u,u) = a > 0 \Rightarrow$ g no es semidef. tiva.

$g(v,v) = b < 0 \Rightarrow$ g no es semidef. positiva

(Hemos supuesto así las desigualdades pero podría ser al revés)

$\Rightarrow$ g es indefinida.

(f) Métrica sobre $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ g tq $\det(M(g,B))<0 \Rightarrow$ g métrica lorentz.

Verdadero $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(g) V esp. vect. real tq $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ g métrica.

$\exists u,v \in V$ linealm. indeps, ortogonales y luminosos $\Rightarrow$ g degenerada

Verdadero

$\left.\begin{array}{l} g(u,v) = 0 \\ g(u,u) = 0 \\ g(v,v) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ g es degenerada $M(g,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \otimes \end{pmatrix}$

(h) V esp. vect. real, g métrica. Si $a_{ii} < 0 \Rightarrow$ g def. negativa.

Falso

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A = M(g,B) \rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow$ g es degenerada

(i) Toda métrica g indefinida sobre plano vectorial real tiene vectores luminosos no nulos.

- $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ g indefinida degenerada $\Rightarrow Rad(g) \neq \{0\}$

  $\rightarrow$ Cualquier vector de $Rad(g)$ es luminoso.

- $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ g indefinida no degenerada.

$M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B base ortonormal $B = \{u_1, u_2\}$

(e) V, g métrica. $M(g,B) = \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ tq $ab<0$

$\exists u,v \in V$ tq $g(u,u)=a>0 \Rightarrow g$ no es semidef. negat.

$g(v,v)=b<0 \Rightarrow g$ no es semidef. posit.

(Hemos supuesto así las desigualdadades pero podría ser al revés

$\Rightarrow g$ es indefinida Verdadero

(f) $\mathbb{R}^2$, g $\det(M(g,B))<0 \Rightarrow g$ métrica de Lorentz.

Verdadero $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(g) $\dim V = 3$, g métrica u,v lin. indep.

$\left.\begin{array}{l} g(u,v)=0 \\ g(u,u)=0 \\ g(v,v)=0 \end{array}\right\}$ luminosos $\Rightarrow g(u,u)=0$, $g(v,v)=0$. $\Rightarrow g$ es degenerada.

Sea w un vector ~~indep.~~ linealm. indep. de u y v.

$B=(u,v,w)$.

$M(g,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \rightarrow \det(M(g,B))=0 \Rightarrow g$ es degenerada.

(h) (V,g) Falso

$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow g$ es degenerada.

$\Rightarrow$ no es definida negativa.

(i) V, $\dim V = 2$. g indefinida.

g indefinida degenerada $Rad(g) \neq \{0\}$ Cualquier vector de $rad(g)$ es luminoso.

g indefinida no degenerada $M(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B base ortonormal $B = \{u_1,u_2\}$

$C' = \{ x u_1 + y u_2 \,/\, (x \quad y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \} =$

$= \{ x u_1 + y u_2 \,/\, \begin{matrix} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-y)(x+y) = 0 \end{matrix} \} =$

$= \{ x u_1 + y u_2 \,/\, x - y = 0 \} \cup \{ x u_1 + y u_2 \,/\, x + y = 0 \}$

(j) • u, v vectores, $g(u,v) = 0$; $u, v \neq 0$ ~~no luminosos~~. $\Rightarrow u, v$ linealm. indeps. Falso

Contraejemplo:

Siempre que haya vectores luminosos esto es falso.

$g(u,v) = 0$ y u, v no son lin. indep.

$v = u$.

• u, v vectores no luminosos, $g(u,v) = 0$; $u, v \neq 0$ $\Rightarrow u, v$, lin. indep. Verdadero

$\alpha u + \beta v = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$g(\alpha u + \beta v, u) = \alpha g(u,u) + \beta \cancel{g(u,v)}^{0} = \alpha \underbrace{g(u,u)}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha = 0$

$\cancel{\alpha u}^{0} + \beta \underset{\neq 0}{v} = 0 \Rightarrow \beta = 0$

(con uno que no sea luminoso ya tenemos suficiente)

(k) g métrica semidef. $v \in V$ luminoso $\Leftrightarrow v \in Rad(g)$

$\Leftarrow)$ $v \in Rad(g) \to v$ luminoso. $\quad Rad(g) \subseteq C'$

$\Rightarrow)$ $V = W \oplus Rad(g)$ $\quad g_W$ es def. positiva o def negativa.

$v = w + u$, $w \in W$, $u \in Rad(g)$

$0 = g(v,v) = g(w+u, w+u) = g(w,w) \Rightarrow w = 0$.

• Si g es indef. $\Rightarrow$ es cierto? NO $\to$ 18 c).

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(g, B_u) \rightsquigarrow$ Vectores luminosos: $C' = \}$

$$G' = \{ xu_1 + yu_2 \ / \ (x \ \ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \} =$$

$$= \left\{ xu_1 + yu_2 \ / \ \begin{matrix} x^2 - y^2 = 0 \\ \hookrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \{ xu_1 + yu_2 \ / \ x - y = 0 \} \cup \{ xu_1 + yu_2 \ / \ x + y = 0 \}$$

(j) $g(u,v) = 0$, $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ linealm. indeps
u, v luminosos

Falso

$g(u,v) = 0$, $v = u \Rightarrow u, v$ no linealm. indeps.

$\Rightarrow$ Siempre que haya vectores luminosos esto es falso.

• $g(u,v) = 0$, $u, v \neq 0 \Rightarrow u, v$ linealm. indeps.
$\hookrightarrow u, v$ no luminosos

$\alpha u + \beta v = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$g(\alpha u + \beta v, u) = \alpha g(u,u) + \beta \cancel{g(u,v)}^{0} = \alpha g(u,u) = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 0}$

$g(u,u) \neq 0$

$\cancel{\alpha u}^{0} + \beta v = 0 \Rightarrow \underline{\beta = 0}$ verdadero

$g(v,v) \neq 0$

(Con que solo uno de ellos no sea luminoso hay suficiente)

(k) g métrica semidefinida. $\Rightarrow v \in V$; $g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v \in Rad(g)$

$\Leftarrow$) $v \in Rad(g)$

$\Rightarrow \forall u \in V \Rightarrow g(u,v) = 0$, en particular $g(v,v) = 0$.

$\Rightarrow v$ luminoso.

$\Rightarrow$) $V = W \perp Rad(g)$.

g_W es definida positiva o definida negativa.

$v = w + u$, $w \in W$, $u \in Rad(g)$ $\quad g(u,u) = g(w,u) = 0 \quad w \notin Rad(g)$

$g(v,v) = 0 \Rightarrow 0 = g(v,v) = g(w+u, w+u) = g(w,w) \Rightarrow w = 0$

• Si g es indefinida $\Rightarrow$ No es cierto $\rightarrow$ Contraejemplo 18 c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(g, B_u)$$

vectores luminosos.

$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 0 \} =$$

$$\hookrightarrow (x-y)(x+y) = 0$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0 \} \cup \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \}$$

$$Rad(g) = \{ (0,0,z), z \in \mathbb{R} \} = L(\{ (0,0,1) \})$$

(l) $\mathbb{R}^3$, métrica $g_{2,1}$

$\uparrow$ nº unos $\quad \uparrow$ nº menos unos.

$$\mathcal{U} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0 \}$$

$g_{\mathcal{U}}$ degenerado $\Leftrightarrow g(v,v) = 0, \ v \ (a,b,c)$

$$\mathcal{U} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{g((a,b,-c),(x,y,z))} = 0 \right\} = L(\{(a,b,-c)\})^{\perp}$$

g es no degenerada

$g_{\mathcal{U}}$ es no degenerada $\Leftrightarrow \mathbb{R}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp} \Leftrightarrow g_{\mathcal{U}^{\perp}}$ no degenerada.

$g_{\mathcal{U}}$ es degenerada $\Leftrightarrow \mathbb{R}^3 \neq \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp} \Leftrightarrow g_{\mathcal{U}^{\perp}}$ es degenerada.

$$\mathcal{U}^{\perp} = \left(L(\{(a,b,-c)\})^{\perp} \right)^{\perp} = L(\{(a,b,-c)\})$$

$$\Leftrightarrow g((a,b,-c),(a,b,-c)) = 0 \Leftrightarrow g((a,b,c),(a,b,c)) = 0.$$