WUOLAH

relacion3-DG-1920.pdf

parse01

Geometría II

1º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Dynos

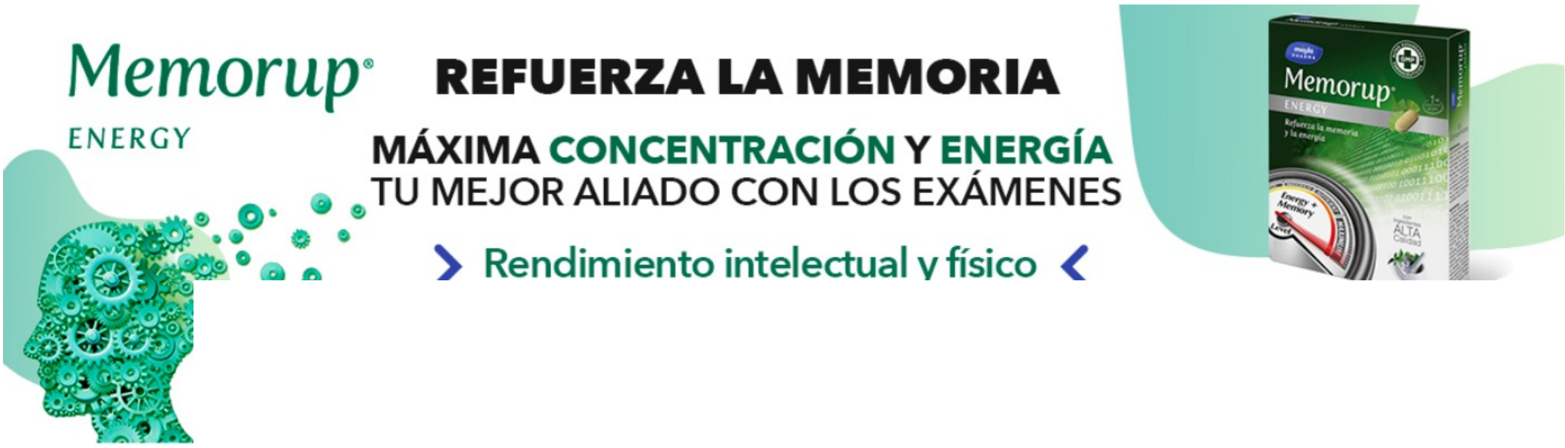
PS5

En dynos
Sorteamos
5 PS5
Participa y gana tu consola next gen!

¡Cada semana sorteamos una PlayStation 5!

Entra en **dynos.es** y confirma tu participación
con tu correo electrónico

¡Aumenta tus posibilidades de ganar participando en nuestras redes sociales!



GEOMETRÍA II. RELACIÓN DE PROBLEMAS 3

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

Curso 2019-20

1. Sea V un espacio vectorial real. Denotemos por $\mathcal{B}_s^+(V)$ al conjunto de todas las métricas euclídeas sobre V. Demuestra que:

   a) Si $g, g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $g + g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   b) Si $a > 0$ y $g \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $a\,g \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   ¿Es $\mathcal{B}_s^+(V)$ un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(V)$?

2. Sean (V,g) y (V',g') dos espacios vectoriales euclídeos. Se define la *métrica producto* $g \times g'$ en $V \times V'$ a partir de la igualdad:

$$(g \times g')\big((u,u'),(v,v')\big) = g(u,v) + g'(u',v').$$

   Demuestra que $g \times g'$ es una métrica euclídea en $V \times V'$.

3. Decide de forma razonada si son euclídeas o no las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha+4 & -2 & 2 \\ -2 & \alpha+1 & -1 \\ 2 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

4. Dados dos vectores cualesquiera u y v de un espacio vectorial euclídeo (V,g), demuestra que se cumplen estas propiedades:

   a) Identidad del paralelogramo: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

   b) Teorema del coseno: $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\|\,\cos\measuredangle(u,v)$.

   c) Teorema de Pitágoras: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Longleftrightarrow u \perp v$.

   d) $\|u\| = \|v\| \iff u+v \perp u-v$.

   e) $\big|\,\|u\| - \|v\|\,\big| \leq \|u-v\|$.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

5. Utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio vectorial euclídeo conveniente para probar las siguientes desigualdades y caracterizar cuando se obtiene la igualdad en cada una de ellas.

   a) Para cualesquiera números $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, se cumple que:

   $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

   b) Para cada matriz simétrica A de orden n se verifica que $(\mathrm{tr}(A))^2 \leq n\,\mathrm{tr}(A^2)$.

   c) Para cualquier función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se cumple que:

   $$\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \varphi(t)^2\,dt.$$

6. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con su métrica euclídea usual g_u. Calcula una base ortonormal de (U, g_U), donde U es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por:

   $$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+4y-z+3t = 0\}.$$

   Amplia la base anterior hasta conseguir una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g_u)$. Calcula las coordenadas del vector $u = (1,0,0,1)$ en la base obtenida.

7. En el espacio vectorial $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales se considera la métrica g definida como $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC)$.

   a) Prueba que g es una métrica euclídea.

   Fáciles

   b) Utiliza el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ a partir de la base:

   $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   c) Encuentra dos matrices linealmente independientes $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ que sean unitarias y que formen ángulo $\pi/3$ con I_2.

8. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por:

   $$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx.$$

   Demuestra que la base usual B_u de $\mathbb{R}_2[x]$ no es ortonormal. Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], g)$ a partir de B_u.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Ojalá un AUTOTUNE para los exámenes - InfoJobs

9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica g, cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Demuestra que la métrica g es euclídea.

   b) Calcula el ángulo que forman los vectores $u = (1,1,0)$ y $v = (0,-1,1)$.

   c) Calcula la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector $u = (2,1,0)$ con respecto al plano $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

10. En el espacio $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC^t)$. Se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcula el ángulo determinado por A y C.

   b) Calcula las proyecciones ortogonales de A sobre $U = L(C)$ y sobre $U^\perp$.

   c) Calcula la imagen de A por la simetría respecto del subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a-b+c-d = 0, -a+d = 0 \right\}.$$

   d) Da una base de $W^\perp$, siendo W el subespacio del apartado anterior.

11. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $B = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V. Se sabe que $\|v_i\| = 2$ para cada $i = 1,\ldots,n$ y que $\measuredangle(v_i,v_j) = \pi/3$ si $i \neq j$. Calcula $M(g,B)$ y una base ortonormal de (V,g).

12. Se consideran los endomorfismos $f,h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dados por:

$$f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z), \quad M(h,B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3/2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

    Demuestra que f y h son autoadjuntos respecto a la métrica euclídea usual. Calcula dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ en las que las matrices de f y h sean diagonales.

13. En $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo f que en la base $B = \{(1,0,1),(-1,2,1),(1,1,1)\}$ tiene la siguiente matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

Estudia si f es autoadjunto con respecto a la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ y, en caso de serlo, encuentra una base ortonormal de vectores propios de f.

14. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo tridimensional. Supongamos que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en una cierta base B de V. Sea $f : V \to V$ el endomorfismo dado por:

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es autoadjunto en (V,g) y encuentra una base ortonormal de (V,g) formada por vectores propios de f.

15. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

encuentra una matriz $P \in O(3)$ tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

16. Sea g la métrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores propios de A y estudia su signo para determinar el índice de g. Clasifícala en función de los parámetros $a,b \in \mathbb{R}$. ¿En algún caso se obtiene la métrica euclídea usual o la métrica lorentziana usual de $\mathbb{R}^3$?

17. Se considera la familia de métricas $g_{a,b}$ en $\mathbb{R}^4$ tales que:

$$M(g_{a,b}, B_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & b & -1 \end{pmatrix}.$$

Clasifica, según los valores de $a,b \in \mathbb{R}$, las métricas $g_{a,b}$.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

18. Sean V un plano vectorial, B una base de V y g la métrica en V tal que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos, para cada $a \in \mathbb{R}$, el endomorfismo $f_a : V \to V$ dado por:

$$M(f_a,B) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Prueba que g es una métrica euclídea sobre V y encuentra los valores de a para los que f_a es autoadjunto en (V,g).

b) ¿Existe algún valor de a tal que f_a es una isometría en (V,g)?

19. Describe las isometrías de $(\mathbb{R}^2, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

20. Sea (V,g) un plano vectorial euclídeo y B una base de V para la que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Estudia si los endomorfismos $f,h : V \to V$ tales que:

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M(h,B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

son isometrías de (V,g). En caso afirmativo, describe tales isometrías.

21. En $\mathbb{R}^3$ se consideran la métrica euclídea g cuya matriz en la base usual viene dada por

$$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(5x+2y+z, -10x-y+z, 4x+y+2z).$$

a) Comprueba que f es una isometría.

b) Encuentra una base ortonormal en la que f adopte su forma canónica y clasifícala.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

22. Describe geométricamente las isometrías de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$D = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

23. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales se considera la métrica euclídea g tal que la base $B = \{1, x, x^2\}$ es ortonormal. Demuestra que el endomorfismo $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dado por:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{1}{3}\left((2a_0 - a_1 + 2a_2) + (-a_0 + 2a_1 + 2a_2)x + (2a_0 + 2a_1 - a_2)x^2\right)$$

es una isometría en $(\mathbb{R}_2[x], g)$ y descríbela.

24. Sobre el espacio vectorial euclídeo $(S_2(\mathbb{R}), g)$, donde $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC)$, se define el endomorfismo $f : S_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es una isometría de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ y descríbela.

25. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con su métrica euclídea usual.

   a) Calcula la matriz $M(f, B_u)$, siendo f la simetría axial con respecto a $U = L((2,3))$.

   b) Calcula, en las coordenadas usuales, las ecuaciones de un giro que lleve el vector $(-4,3)$ en el vector $(5,0)$.

26. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con su métrica euclídea usual.

   a) Calcula la matriz $M(f, B_u)$, siendo f una rotación de ángulo $\pi/2$ con eje dado por $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, x - z = 0\}$.

   b) Calcula, en coordenadas usuales, las ecuaciones de la simetría ortogonal respecto al plano perpendicular a la recta U del apartado anterior.

   c) Calcula $M(f, B_u)$, donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría que verifique $f(1,-1,0) = (1,-1,0)$, $f(1,1,5) = (3,3,-3)$ y $\det(f) = 1$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Subraya esto que cae fijo: 2 menús por solo 7€. Fácil, ¿no?

27. En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, calcula la matriz en B_u de $h \circ \sigma_U$, donde σ_U es la simetría ortogonal con respecto al plano U de ecuación $z = 0$, y h es el giro de ángulo $\pi/3$ alrededor del eje OX. Clasifica y describe la isometría resultante.

28. En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, encuentra si es posible una isometría f que lleve el subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ en el subespacio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Si es posible da $M(f, B_u)$, clasifica y describe la isometría f.

29. Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Si g es una métrica euclídea sobre V, entonces todos los elementos diagonales de la matriz de g en cualquier base de V son positivos. ¿Es cierto el recíproco?

    b) Sea g una métrica cuya matriz en una base B tiene un valor propio negativo. Entonces g no es euclídea.

    c) Sean u y v dos vectores no nulos de un espacio vectorial euclídeo (V, g) que forman un ángulo α. Entonces el ángulo que forman $2u$ y $2v$ es 2α.

    d) Toda base B de un espacio vectorial V es base ortonormal para una única métrica euclídea sobre V.

    e) Si U es un hiperplano de un espacio vectorial euclídeo entonces hay exactamente dos vectores perpendiculares a U y unitarios.

    f) Toda matriz cuadrada con determinante 1 o -1 es ortogonal.

    g) Si dos subespacios de un espacio vectorial euclídeo son perpendiculares y unimos dos bases ortonormales, una de cada uno de ellos, obtenemos una base ortonormal de la suma de los dos subespacios.

    h) Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo (V, g). Entonces, se cumple la igualdad $I_V = 2\pi_U - \sigma_U$, donde π_U and σ_U son la proyección y simetría ortogonales respecto a U.

    i) Todo endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo es automorfismo.

    j) Todo endomorfismo diagonalizable de un espacio vectorial es autoadjunto respecto de alguna métrica euclídea en dicho espacio.

    k) Dos vectores propios linealmente independientes de un endomorfismo autoadjunto son ortogonales.

    l) Si $f : V \to V$ es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V, g) entonces dos vectores propios de f asociados a valores propios distintos son ortogonales.

    m) Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo es un endomorfismo autoadjunto.

    n) En un espacio vectorial euclídeo (V, g), dados dos subespacios vectoriales de la misma dimensión siempre existe una isometría de (V, g) que lleva uno en otro.

    ñ) En $(\mathbb{R}^2, g_u)$ consideramos el giro r_θ de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ y la simetría ortogonal σ con respecto a la recta de ecuación $y = 0$. Entonces, $f = r_\theta \circ \sigma$ es la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuación $(\cos\theta - 1)x + (\operatorname{sen}\theta)y = 0$.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

o) En un plano vectorial euclídeo la composición de dos simetrías axiales es un giro.

p) Si una matriz ortogonal de orden 2 no es diagonal y tiene determinante positivo, entonces no es diagonalizable.

q) Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 5 para la que el subespacio de vectores fijos tiene dimensión 2 tiene determinante -1.

r) Sobre un espacio vectorial euclídeo (V,g) de dimensión impar no existe ninguna isometría f tal que $f \circ f = -I_V$.

s) Si (V,g) es un espacio vectorial euclídeo y f un endomorfismo autoadjunto de g que además es una isometría entonces f es una simetría ortogonal.

t) Si V un espacio vectorial y g y g' son dos métricas euclídeas en V que verifican $g(u,v) = 0 \Longleftrightarrow g'(u,v) = 0$, entonces $g' = \lambda g$, $\lambda > 0$.

u) Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales y la métrica $g(A,C) = \text{traza}(AMC^t)$ donde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Entonces g es una métrica euclídea si y solo si $a > 0$ y $\det(M) > 0$.

v) Sea (V,g) un plano vectorial métrico no degenerado que verifica la siguiente propiedad:

Todo endomomorfismo f de V que cumple

$$g(f(u),v) = g(u,f(v)) \ ,\forall u,v \in V$$

es diagonalizable.

Entonces g es definida positiva o definida negativa.

w) Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible existe P una matriz ortogonal y Q una matriz triangular superior con todos los elementos de su diagonal positivos tal que $A = P \cdot Q$.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Quieres una MÁXIMA concentración y ENERGÍA? ¡Pincha aquí!

En dynos
Sorteamos 5 PS5
Participa y gana tu consola next gen!
¡Participa en dynos.es y en nuestras redes sociales!
FACEBOOK
TWITTER
INSTAGRAM
YOUTUBE
TIKTOK
Dynos

1. Sea V un espacio vectorial real. Denotemos por $\mathcal{B}_s^+(V)$ al conjunto de todas las métricas euclídeas sobre V. Demuestra que:

   a) Si $g, g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $g + g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   b) Si $a > 0$ y $g \in \mathcal{B}_s^+(V)$ entonces $a g \in \mathcal{B}_s^+(V)$.

   ¿Es $\mathcal{B}_s^+(V)$ un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(V)$?

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

2. Sean (V, g) y (V', g') dos espacios vectoriales euclídeos. Se define la *métrica producto* $g \times g'$ en $V \times V'$ a partir de la igualdad:

$$(g \times g')\big((u, u'), (v, v')\big) = g(u, v) + g'(u', v').$$

Demuestra que $g \times g'$ es una métrica euclídea en $V \times V'$.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

3. Decide de forma razonada si son euclídeas o no las métricas sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha+4 & -2 & 2 \\ -2 & \alpha+1 & -1 \\ 2 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Criterio de Sylvester

$\det(A_1) = 1 > 0$

$\det(A_2) = 4 > 0$

$\det(A_3) = 7 > 0$

Estamos ante una métrica euclídea.

$\det(C_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + (-1) > 0$

$\det(C_1) = 2 > 0$

$\det(C_3) < 0$

No es euclídea.

$\det(D_1) = \alpha + 4 > 0 \Rightarrow \alpha > -4$

$\det(D_2) = (\alpha+4)(\alpha+1) - 4 = \alpha^2 + 5\alpha =$

$= \alpha(\alpha+5) > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$

$\det(D_3) = \alpha^2(\alpha+6) > 0$

La métrica es euclídea si $\alpha > 0$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

4. Dados dos vectores cualesquiera u y v de un espacio vectorial euclídeo (V,g), demuestra que se cumplen estas propiedades:

a) Identidad del paralelogramo: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\,(\|u\|^2+\|v\|^2)$.

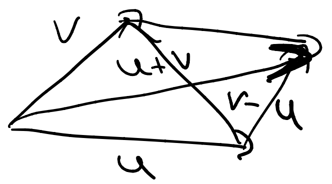
b) Teorema del coseno: $\|u-v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2-2\,\|u\|\,\|v\|\cos\measuredangle(u,v)$.

c) Teorema de Pitágoras: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2 \Longleftrightarrow u\perp v$.

d) $\|u\|=\|v\| \iff u+v\perp u-v$.

e) $|\,\|u\|-\|v\|\,|\leq \|u-v\|$.

a) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$



Se usa la definición de la norma.

$\|u+v\|^2 = g(u+v,u+v) = g(u,u) + \cancel{2g(u,v)} + g(v,v)$ (sim. bil.)

$\|u-v\|^2 = g(u-v,u-v) = g(u,u) - \cancel{2g(u,v)} + g(v,v)$ +

$2g(u,u) + 2g(v,v)$

$2(\|u\|^2+\|v\|^2)$

b) Teorema del coseno:

$\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\measuredangle(u,v)$

Tenemos $\|u\|^2 - 2g(u,v) + \|v\|^2$

$\cos\measuredangle(u,v) = \dfrac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|}$ $\quad g(u,v) = \|u\|\|v\|\cos\measuredangle(u,v)$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

¿Quieres una MÁXIMA concentración y ENERGÍA? ¡Pincha aquí!

¡Participa en dynos.es y en nuestras redes sociales!
FACEBOOK
TWITTER
INSTAGRAM
YOUTUBE
TIKTOK
Dynos

c) Generalización de Tª de Pitágoras

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u \perp v$

$\cos \angle(u,v) = 0$

$\Rightarrow \quad g(u,v) = 0 \iff u \perp v$

$\Leftarrow \quad u \perp v \iff g(u,v) = 0$

Atendiendo a la expresión de antes

d) $\|u\| = \|v\| \iff u+v \perp u-v$

$u+v \perp u-v \iff g(u+v, u-v) = 0$

$g(u+v, u-v) = g(u,u) - \cancel{g(u,v) + g(v,u)} + g(v,v) =$

$= \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \iff \|u\|^{\cancel{2}} = \|v\|^{\cancel{2}}$

e) $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u-v\|$

$(\|u\| - \|v\|)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|$

$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2g(u,v) + \|v\|^2 \geq \|u\|^2 - 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$

Cauchy Schwarz

$-\|u\|\|v\| \leq g(u,v) \leq \|u\|\|v\|$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

5. Utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio vectorial euclídeo conveniente para probar las siguientes desigualdades y caracterizar cuando se obtiene la igualdad en cada una de ellas.

   a) Para cualesquiera números $x_1, \dots, x_n \geq 0$, se cumple que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

   b) Para cada matriz simétrica A de orden n se verifica que $(\mathrm{tr}(A))^2 \leq n\,\mathrm{tr}(A^2)$.

   c) Para cualquier función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \varphi(t)^2\,dt.$$

a) Tomamos el producto escalar

$g = g_0$ $\quad u = (x_1^{3/2}, \dots, x_n^{3/2}) \rightsquigarrow$ Nuestro u

$v = (x^{1/2}, \dots, x_n^{1/2})$

Cauchy: $\{g(u,v)^2\} \leq \|u\|^2 \|v\|^2$

$g(u,v) = g_0(u,v) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\|u\|^2 = g_0(u,u) = x_1^3 + \dots + x_n^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3$

$\|v\|^2 = g_0(v,v) = x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

e) Suponemos:

$g(A, C) = \text{Traza}(A \cdot \underset{C}{C^t})$

$u = I_N \quad v = A$

Cauchy

$g(u,v)^2 = \text{Traza}(I_N \cdot A)^2 = \text{Traza}(A)^2$

$\|u\|^2 = \text{Traza}(I_N) = n$

$\|v\|^2 = \text{Traza}(A \cdot A) = \text{Traza}(A^2)$

$\text{Tr}(A)^2 \leq n \, \text{Tr}(A^2)$

c) Al tener integrales

$g(f_1, f_2) = \int_a^e f_1(t) f_2(t) \, dt$

$f_1 = 1 \qquad \|f_1(t)\|^2 = \int_a^e 1 \, dt = e - a$

$f_2 = \varphi(t) \quad \|\varphi(t)\|^2 = \int_a^e \varphi^2(t) \, dt$

$\left(\int_a^e \varphi(t) \, dt \right)^2 \leq (e-a) \int_a^e \varphi^2(t) \, dt$

$\boxed{\varphi(t) = \lambda}$ $\rightsquigarrow$ igualdad, proporcional a 1

e) $A = \lambda I_N$ $\rightsquigarrow$ igualdad

a) $u = \lambda v \qquad x_i \dots x_N$

$x_i^{3/2} = \lambda x_i^{1/2}$

$x_i^{1/2}(x_i - \lambda) = 0 \quad$ ó 0 ó λ

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descubre nuestros CURSOS GRATUITOS - Escuela de Inteligencia, ¡Click aquí!

6. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con su métrica euclídea usual g_u. Calcula una base ortonormal de (U, g_U), donde U es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+4y-z+3t=0\}.$$

Amplia la base anterior hasta conseguir una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, g_u)$. Calcula las coordenadas del vector $u = (1,0,0,1)$ en la base obtenida.

Primero vamos a calcular una base de U.

$B = \{(2,-1,0,0),(1,0,2,0),(0,0,3,1)\}$

$g_U((2,-1,0,0),(1,0,2,0)) = 2 \neq 0$

Vamos a calcular una base ortonormal de U con el método de Gram-Smith.

$u_1 = (2,-1,0,0) = v_1$

$u_2 = v_2 - \frac{g(v_1,v_2)}{\|u_1\|^2} u_1$

$u_3 = v_3 - \frac{g(u_2,v_3)}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 - \frac{g(u_1,v_3)}{\|u_1\|^2} u_1$

$u_2 = (1,0,2,0) - \frac{g((2,-1,0,0),(1,0,2,0))}{\|(2,-1,0,0\|^2}(2,-1,0,0) =$

$= (1,0,2,0) - \frac{2}{5}(2,-1,0,0) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 2, 0\right) =$

$= (1,-8,10,0) = u_2$

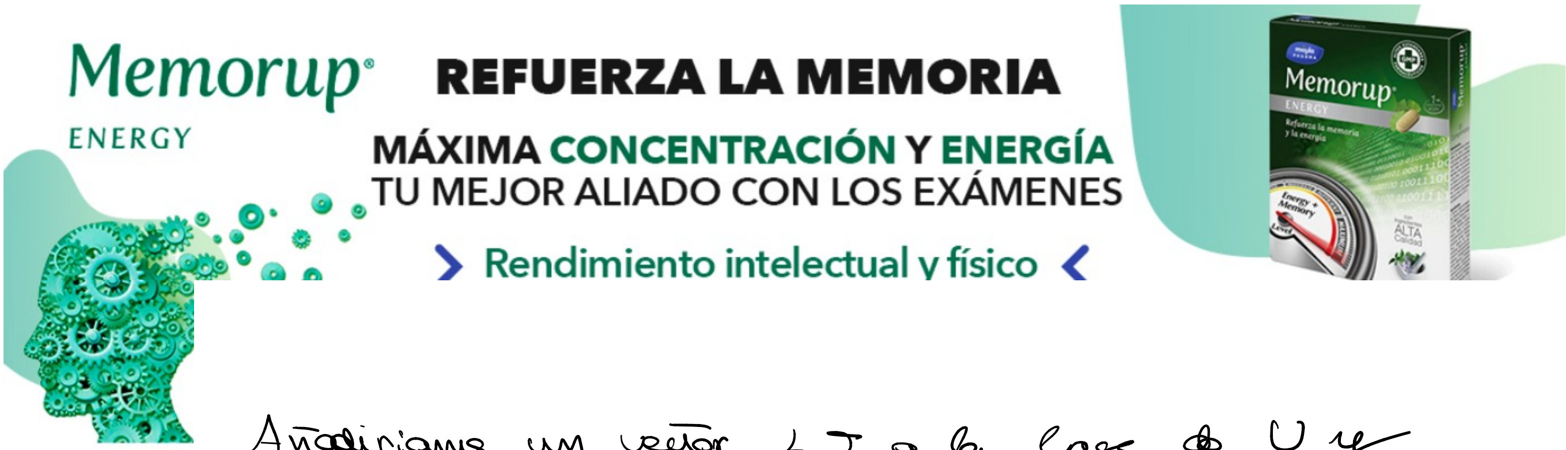
$u_3 = (0,0,3,1) - \frac{g((1,5,10,0),(0,0,3,1))}{\|1,5,10,0\|^2}(1,5,10,0) -$

- - -

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Quieres una MÁXIMA concentración y ENERGÍA? ¡Pincha aquí!



Añadiríamos un vector L.I a la base de U y seguiríamos con Gram-Schmidt

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

7. En el espacio vectorial $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales se considera la métrica g definida como $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC)$.

   a) Prueba que g es una métrica euclídea.

   b) Utiliza el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ a partir de la base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   c) Encuentra dos matrices linealmente independientes $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ que sean unitarias y que formen ángulo $\pi/3$ con I_2.

c) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{g(A, I_2)}{\|A\| \, \|I_2\|} = \frac{g(A, I_2)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$g(A, I_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{Traza}(A \cdot I_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \ell \\ \ell & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \ell \\ \ell & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$\|A\|^2 = 1 \Rightarrow \text{Traza}(A^2) = 1$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \ell \\ \ell & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \ell \\ \ell & 0 \end{pmatrix} = \overset{\text{Traza}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ell^2 & \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ell & \ell^2 \end{pmatrix}} = 1$$

$2\ell^2 = \frac{1}{2}$

$\ell = \pm\frac{1}{2}$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

8. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por:

$$g(p(x),q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx.$$

Demuestra que la base usual B_u de $\mathbb{R}_2[x]$ no es ortonormal. Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x],g)$ a partir de B_u.

$B_u = \{1, x, x^2\}$

$g(1, x^2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \neq 0.$

No es una base ortonormal.

Gram-Schmidt.

$u_1 = (1,0,0) = v_1$

$u_2 = (0,1,0) - \frac{g(1,x)}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) =$

$= (0,1,0)$

$u_3 = (0,0,1) - \cancel{\frac{g(x,x^2)}{\|(0,1,0)\|^2}} \to 0 \; (0,1,0) - \frac{g(1,x^2)}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) =$

$= (0,0,1) - \frac{2/3}{2}(1,0,0) = \left(-\frac{1}{3}, 0, 1\right)$

Base ortonormal $= \{1, x, -\frac{1}{3} + x^2\}$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descubre nuestros CURSOS GRATUITOS - Escuela de Inteligencia, ¡Click aquí!

9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica g, cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestra que la métrica g es euclídea.

b) Calcula el ángulo que forman los vectores $u = (1,1,0)$ y $v = (0,-1,1)$. × BU?

c) Calcula la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector $u = (2,1,0)$ con respecto al plano $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

a) $\det(A_1) = 3 > 0$

$\det(A_2) = 2 > 0$

$\det(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 > 0$

Luego por Sylvester, la métrica es euclídea

b) $\cos(\alpha) = \dfrac{g(u,v)}{\|u\| \, \|v\|}$

$g(u,v) = (1,1,0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$\|u\| = \sqrt{g(u,u)} = \sqrt{(1,1,0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$

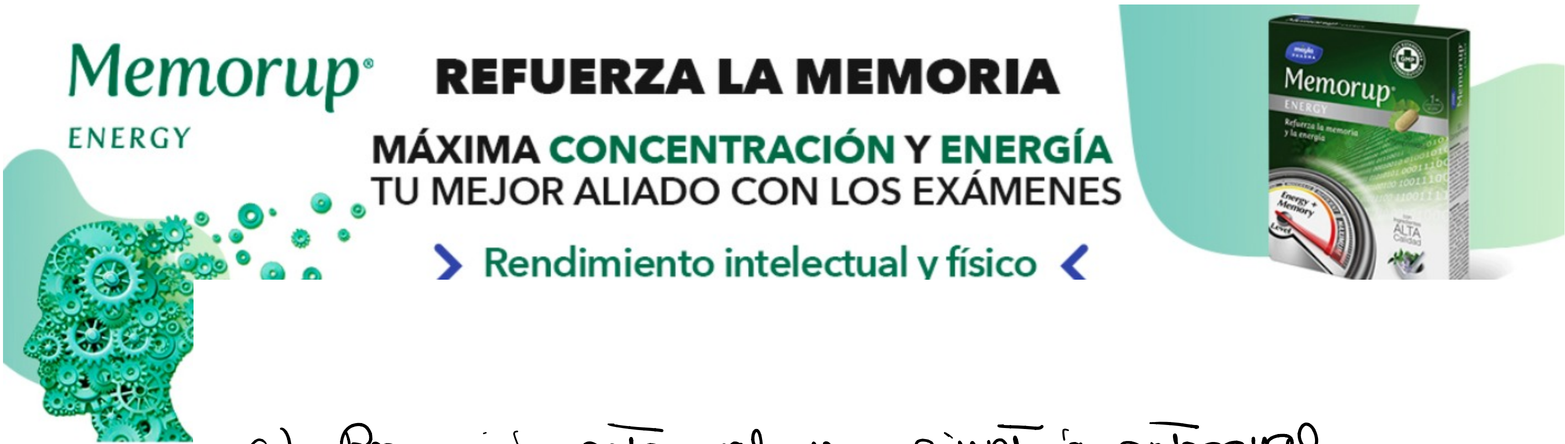
$\|v\| = \sqrt{g(v,v)} = \sqrt{(0,-1,1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!



c) Proyección ortogonal y simetría ortogonal de $u=(2,1,0)$ con respecto al plano

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

Vamos a hallar las matrices de σ_U y π_U

$$U=\mathcal{L}(\{(1,-1,0),(0,1,-1)\})$$

$$U^\perp=\{g((1,-1,0),(x,y,z))=0\ ;\ g((0,1,-1),(x,y,z))=0\}$$

$$(1,-1,0)\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=4x-2y+z$$

$$(0,1,-1)\quad '' \quad '' \quad =-2x+y-z$$

$$U^\perp=\mathcal{L}(\{(1,2,0)\})$$

Considerando la base $B'=B_U\cup B_{U^\perp}$

$$B'=\{(1,-1,0),(0,1,-1),(1,2,0)\}$$

$$M(\pi_U,B')=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M(\sigma_U,B')=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

$$(2,1,0) = a(1,-1,0) + b(0,1,-1) + c(1,2,0)$$

$$a + c = 2 \qquad c = 1$$
$$-a + b + 2c = 1 \qquad b = 0$$
$$-b = 0 \qquad a = 1$$

$$(2,1,0) = (1,0,1)_B$$

$$(2,1,0) = (1,-1,0) + (1,2,0)$$

$$\pi_u(2,1,0) = (1,-1,0)$$ → dos primeros vectores

$$\sigma_u(2,1,0) = (1,-1,0) - (1,2,0) = (0,-3,0)$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Ojalá un AUTOTUNE para los exámenes - InfoJobs

10. En el espacio $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por $g(A,C) = \mathrm{tr}(AC^t)$. Se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula el ángulo determinado por A y C.

b) Calcula las proyecciones ortogonales de A sobre $U = L(C)$ y sobre $U^\perp$.

c) Calcula la imagen de A por la simetría respecto del subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a-b+c-d=0, -a+d=0 \right\}.$$

d) Da una base de $W^\perp$, siendo W el subespacio del apartado anterior → hecho en el C

a) $\measuredangle(A,C)$ $\quad \cos\measuredangle(A,C) = \dfrac{g(A,C)}{\|A\| \, \|C\|} = \dfrac{-3}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$g(A,C) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} -2 & \\ & -1 \end{pmatrix} = -3$

$\|A\| = \sqrt{g(A,A)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$

$\|C\| = \sqrt{g(C,C)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 5 & \\ & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{6}$

$\measuredangle(A,C) = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

e) $\pi_U \quad \mathcal{U} = L(\{c\,h\})$

π_U

$$\mathcal{U}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; Tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; Tr \begin{pmatrix} -2a+b & \\ & c \end{pmatrix} \right\} = 0 =$$

$$= \{ -2a + b + c = 0 \}$$

Base $U^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 = -2\alpha + \beta$

$0 = \alpha + \gamma$

$-1 = \alpha + 2\beta - \gamma$

$1 = \lambda \quad \beta = 0 \quad \alpha = -\frac{1}{2} \quad \gamma = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U} + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U^{\perp}}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

$$\pi_U\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\pi_{U^\perp}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

c) $$W = \left\{ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a-b+c-d=0 \\ -a+d=0 \end{matrix} \right\} = L\left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \right\}$$

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} g\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=0, \\ g\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{cases} a+d=0 \\ b+c=0 \end{cases} = L\left(\left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix} \right\}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} + 1/2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Aquí cambio signo.

$$\sigma_W\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

11. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V. Se sabe que $\|v_i\|=2$ para cada $i=1,\dots,n$ y que $\measuredangle(v_i,v_j)=\pi/3$ si $i\neq j$. Calcula $M(g,B)$ y una base ortonormal de (V,g).

$$\frac{g(v_i,v_j)}{\|v_i\|\|v_j\|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{g(v_i,v_j)}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$i\neq j$

$$\Rightarrow g(v_i,v_j)=2 \quad i\neq j$$

$$\|v_i\|=\sqrt{g(v_i,v_i)}=2\Rightarrow g(v_i,v_i)=4$$

$$M(g,B)=\begin{pmatrix}4&2&2&\cdots&2\\2&4&&&\\\vdots&2&\ddots&&\\2&\cdots&&\ddots&4\end{pmatrix}$$

Ej 21 Relación 1

$$\tilde{B}'=\{\tilde{w}_1',\dots,\tilde{w}_n'\}$$

$$\tilde{w}_i=\frac{w_i'}{\sqrt{2}} \quad i=1,\dots,n-1$$

$$\tilde{w}_n=\frac{w_n'}{4+2(n-1)}=\frac{w_n'}{\sqrt{2+2n}}$$

→ Tenemos la base ortonormal

$$M(g,\tilde{B})=I_N$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Subraya esto que cae fijo: 2 menús por solo 7€. Fácil, ¿no?

12. Se consideran los endomorfismos $f, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dados por:

matriz base usual

Expresión analítica

$$f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z), \quad M(h, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3/2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f y h son autoadjuntos respecto a la métrica euclídea usual. Calcula dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ en las que las matrices de f y h sean diagonales.

con los vectores propios

f y h autoadjuntos respecto de g_0.

Solo hay que ver $M(f, B)$ simétrica

$M(h, B_u)$ simétrica. h es autoadjunto respecto de g_0.

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ Simétrica f es autoadjunto respecto de g_0.

Lo hacemos para la primera, para el segundo es análogo.

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^2(\lambda-4)$$

Base ortonormal de vectores propios

$$V_4 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\} = L(\{(1,1,1)\})$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \} =$

$= \{ x+y+z = 0 \} = \mathcal{L}(\{(1,0,-1);(0,1,-1)\})$

$V_4 \perp V_1$ por ser subesp de un ad. autoadjunto

$(1,0,-1) \perp (0,1,-1)$?

$g_0((1,0,-1),(0,1,-1)) = 1 \neq 0$, no son ort.

Aplicamos Gram Smith a V_1

$\mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_k\}) = \mathcal{L}(\{u_1, \dots, u_k\})$

$u_1 = v_1 = (1,0,-1)$

$u_2 = v_2 - \frac{g_0((1,0,-1),(0,1,-1))}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1)) = (0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) =$

$= (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) = (-1, 2, -1)$

$B_{ORT} = \{(1,1,1), (-1,2,-1), (1,0,-1)\}$

$B_{ORN} = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\}$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Quieres una MÁXIMA concentración y ENERGÍA? ¡Pincha aquí!

En dynos
Sorteamos 5 PS5
Participa y gana tu consola next gen!
PS5
¡Participa en dynos.es y en nuestras redes sociales!
FACEBOOK
TWITTER
INSTAGRAM
YOUTUBE
TIKTOK
Dynos

13. En $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo f que en la base $B = \{(1,0,1),(-1,2,1),(1,1,1)\}$ tiene la siguiente matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudia si f es autoadjunto con respecto a la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ y, en caso de serlo, encuentra una base ortonormal de vectores propios de f.

$M(g,B) \cdot M(f,B)$ simétrica

$$M(g_0,B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 16 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Es simétrica, el end es autoadjunto.

Pero $M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

14. Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo tridimensional. Supongamos que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en una cierta base B de V. Sea $f : V \to V$ el endomorfismo dado por:

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es autoadjunto en (V,g) y encuentra una base ortonormal de (V,g) formada por vectores propios de f.

$$M(g,B) \cdot M(f,B) = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es simétrica, por lo que f es autoadjunto.

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda-3\lambda+\lambda^2) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) \begin{cases} \to \lambda_1 = 3 \text{ doble} \\ \to \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Por ser autoadjunto es diagonalizable.

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z)_B \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{4} & \cancel{-4} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

$$= \{ -2x + 2y = 0 \} = L(\{(0,0,1),(1,1,0)\})$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z)_B \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 2y = 0 \\ 4x - 4y + 2z = 0 \end{matrix} \right\} = \mathcal{L}(\{(1,0,-2)\})$$

Sabemos V_{λ_1} y V_{λ_2} son ortogonales

Aplicamos Gram-Schmidt a la base V_{λ_1}

$v_1 = (0,0,1) \quad v_2 = (1,1,0)$

$u_1 = v_1$

$$u_2 = v_2 - \frac{g((1,1,0),(0,0,1))}{\|(0,0,1)\|^2}(0,0,1)$$

$$g((1,1,0),(0,0,1)) = (0,0,1)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\|(0,0,1)\|^2 = (2,0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$u_2 = (1,1,0) - 2(0,0,1) = (1,1,-2)$

Base ortonormal $= \{(1,0,-2),(0,0,1),(1,1,-2)\}$

Calculamos sus normas con la métrica

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

15. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

encuentra una matriz $P \in O(3)$ tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$P \in O(3)$ ortogonal $\quad P^{-1} A \cdot P$ diagonal

A simétrica, endomorfismo autoadjunto con respecto a la métrica usual en la base usual

$$P_A(\lambda) = (1+\lambda)(2-\lambda)(2+\lambda)$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = -2$$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}(\{(1,1,1)\})$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{-1} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -3x + y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}(\{(1,1,-2)\})$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH
¿Quieres una MÁXIMA concentración y ENERGÍA? ¡Pincha aquí!

En dynos
Sorteamos 5 PS5
Participa y gana tu consola next gen!

¡Participa en dynos.es y en nuestras redes sociales!
FACEBOOK
TWITTER
INSTAGRAM
YOUTUBE
TIKTOK
Dynos

$$V_{-2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}(\{(1,-1,0)\})$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\}$$

Base ortonormal para go.

Si consideramos

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Ortogonal

$P \cdot P^T = I$

$P^{-1} A \cdot P$ diagonal

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

17. Se considera la familia de métricas $g_{a,b}$ en $\mathbb{R}^4$ tales que:

$$M(g_{a,b}, B_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & b & -1 \end{pmatrix}.$$

Clasifica, según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, las métricas $g_{a,b}$.

Calculamos los valores propios de la matriz

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & & \\ 1 & a-\lambda & & \\ & & 1-\lambda & b \\ & & b & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \left((a-\lambda)^2 - 1\right)\cdot\left((\lambda+1)(\lambda-1) - b^2\right) =$$

$$= (a-\lambda-1)(a-\lambda+1)(\lambda^2-1-b^2) =$$

$$= (\lambda-a+1)(\lambda-a-1)(\lambda-\sqrt{1+b^2})(\lambda+\sqrt{1+b^2}) =$$

$\lambda_1 = a-1 \qquad \lambda_3 = \sqrt{1+b^2} > 0$

$\lambda_2 = a+1 \qquad \lambda_4 = -\sqrt{1+b^2} < 0$

$-1 \qquad 1$

$a < -1$ 3- 1+ indef no deg. índice 3

$-1 < a < 1$ 2- 2+ indef no dg índice 2

$a > 1$ 3+ 1- indef no deg índice 1

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

$a=-1$

$2-\ 1+\ 1_0$ indef deg índice 2

$a=1 \quad 2+\ 1-\ 1_0$ indef deg índice 1

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descubre nuestros CURSOS GRATUITOS - Escuela de Inteligencia, ¡Click aquí!

18. Sean V un plano vectorial, B una base de V y g la métrica en V tal que:

$$M(g,B)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Consideremos, para cada $a\in\mathbb{R}$, el endomorfismo $f_a : V\to V$ dado por:

$$M(f_a,B)=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Prueba que g es una métrica euclídea sobre V y encuentra los valores de a para los que f_a es autoadjunto en (V,g).

b) ¿Existe algún valor de a tal que f_a es una isometría en (V,g)?

a) Criterio Sylvester

$\det(A_1) = 2 > 0$ Tenemos una métrica euclídea

$\det(A_2) = 3 > 0$

$$M(g,B)\cdot M(f_a,B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2a+1 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

Simétrica $\iff$ $2a+1 = 1 \Rightarrow a = 0$

b) f_a isometría en (V,g)

$$M(g,B) = M(f_a,B)^T\cdot M(g,B)\cdot M(f_a,B)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -a+1 \\ -a+1 & 2a^2+2a+2 \end{pmatrix}$$

$a = 0$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH
¿Quieres una MÁXIMA concentración y ENERGÍA? ¡Pincha aquí!

Memorup® ENERGY
REFUERZA LA MEMORIA
MÁXIMA CONCENTRACIÓN Y ENERGÍA
TU MEJOR ALIADO CON LOS EXÁMENES
Rendimiento intelectual y físico
CONCENTRACIÓN
MEMORIA
ENERGÍA

19. Describe las isometrías de $(\mathbb{R}^2, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = 1 \quad Iso^+$

$\det(C) = -1 \quad Iso^-$

En el primer caso se ve que no es $-I$, ni I.

$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

Giro de ángulo $2\pi - \frac{\pi}{4}$

C es una simetría axial

r_1 es la recta a partir de la cual se hace la simetría.

$r_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0} \right\}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\sqrt{2} - 2)x + \sqrt{2}y = 0 \} =$

$= L\{(1, -1 + \sqrt{2})\}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

20. Sea (V, g) un plano vectorial euclídeo y B una base de V para la que:

$$M(g,B) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Estudia si los endomorfismos $f, h : V \to V$ tales que:

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M(h,B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

son isometrías de (V, g). En caso afirmativo, describe tales isometrías.

Como B no es ortonormal para g. $\quad B = \{e_1, e_2\}$

$M(g,B) = M(f,B)^T M(g,B) \cdot M(f,B)$

$M(g,B) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$

Efectivamente f es isometría

$\det(f) = -1$ → simetría axial respecto de esta recta

$V_1 = \{ x e_1 + y e_2 \mid \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \{ x - 2y = 0 \} = L(\{ (2e_1 + e_2) \})$

$M(g,B) = M(h,B)^T \cdot M(g,B) \cdot M(h,B)$

Si lo hacemos, h es una isometría también.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

$$\det(h) = \det\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Tiene que ser un giro.

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

No sabemos en qué sentido gira

Tendríamos que calcular una base ortonormal para la métrica y ver la orientación.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descubre nuestros CURSOS GRATUITOS - Escuela de Inteligencia, ¡Click aquí!

21. En $\mathbb{R}^3$ se consideran la métrica euclídea g cuya matriz en la base usual viene dada por

$$M(g,B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(5x+2y+z,-10x-y+z,4x+y+2z)\ .$$

a) Comprueba que f es una isometría.

b) Encuentra una base ortonormal en la que f adopte su forma canónica y clasifícala.

a) f : isometría

$M(g, B_u) = M(f, B_u)^t M(g, B_u) M(f, B_u)$

$M(f, B_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ahora sería producto de matrices.

b) B ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g)$

$M(f, B^{ortn}) = \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$

$0 \leq \theta \leq \pi$

Calculamos los valores propios de la isometría.

$P_f(\lambda) = \det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5-3\lambda & 2 & 1 \\ -10 & -1-3\lambda & 1 \\ 4 & 1 & 2-3\lambda \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3^3} \det\begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} =$

$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$

1 Triple, es una rotación $\det(f) = 1$

Rotación de eje V_1

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

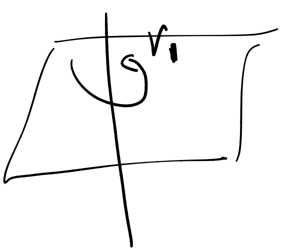
En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

Memorup ENERGY
REFUERZA LA MEMORIA
MÁXIMA CONCENTRACIÓN Y ENERGÍA
TU MEJOR ALIADO CON LOS EXÁMENES
> Rendimiento intelectual y físico <
CONCENTRACIÓN
MEMORIA
ENERGÍA

$$r_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ \cancel{10} & \cancel{4} & \cancel{1}\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}2x+2y+z=0\\ 4x+y-z=0\end{matrix}\right\}$$

$$L(\{(1,-2,2)\})$$



$r_1^\perp$

$$V_1^\perp = \{(x,y,z) \mid \mathbb{R}^3 \mid g((x,y,z),(1,-2,2))\} = \{x+y+2z=0\}$$

$$= L(\{(-1,1,0),(-2,0,1)\})$$

Gram Schmidt a esta y ortogonalizamos, después base ortonormal

$$M(g, B_{ortN}) = \left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \cos(\theta) & \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \end{array}\right)$$

$+$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3,9,-3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,3,-1)$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,3,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-5,2)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$ el seno es negativo

Tengo que intercambiar los dos últimos vectores.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

22. Describe geométricamente las isometrías de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$D = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Como la base usual para la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal, para comprobar que son isometrías: $D^T \cdot D = I_n$

Apartado D)

$D \cdot D^T = I_n$ ✓ Es una isometría

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular el polinomio característico de D

$$P_\lambda(D) = \det\begin{pmatrix} -1/3-\lambda & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3-\lambda & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3-\lambda \end{pmatrix} = -a^3 - a^2 + \frac{11}{9}a + \frac{11}{9}$$

$\det(g) = 1$

El -1 verifica la ecuación del polinomio característico

	-1	-1	$11/9$	$11/9$
-1		1	0	$-11/9$
	-1	0	$11/9$	0

$-\lambda^2 + 11/9 = 0$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Ojalá un AUTOTUNE para los exámenes - InfoJobs

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(g, B_U)$$

$$P_\lambda(g) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) - \lambda(\lambda^2) = -1 - \lambda^3$$

Que solo tiene solución para $\lambda = -1$

Vamos a calcular el subespacio propio:

$$V_{-1} = \left\{ (x,y,z)_{B_U} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}(\{(-1,1,1)\})$$

$\det(g) = -1$

$\dim(V_{-1}) = 1$

$\dim(V_1) = 0$

g es una rotación de eje $U = V_{-1}$ y ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr}(g)+1}{2}\right)$ compuesta con una simetría especular respecto de $U^\perp$.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, = \mathcal{M}(g, \mathcal{B}_0)$$

$$\det(g) = - \begin{vmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{vmatrix} = -\left(-\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\right) = 1$$

Hacemos $P_\lambda(g) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} - \lambda & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\lambda & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$$= -\lambda^3 + \frac{\sqrt{5}}{5} a^2 - \frac{\sqrt{5}}{5} a + 1$$

$$P_\lambda(1) = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & \sqrt{5}/5 & -\sqrt{5}/5 & 1 \\ 1 & & -1 & -\frac{5+\sqrt{5}}{5} & -1 \\ \hline & -1 & -\frac{5+\sqrt{5}}{5} & -1 & 0 \end{array}$$

$$-\lambda^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{5}\lambda - 1 = 0$$

$-4ac = -4$ Discriminante neg.

$$b^2 = \frac{(\sqrt{5} - 5)^2}{25} = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 25}{25} > 0$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

Menú Crispy Chicken® BBQ con queso
2x7€
Menú Big King®
Menú Doble Texas®
Menú Long Chicken®
AUTO KING
PARA LLEVAR
RESTAURANTE
BURGER KING

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5}-1 & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1 & -1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

Menor $\neq 0$ rango 2

$\Downarrow$

$\dim(V_1) = 1$

$\dim(V_{-1}) = 0 \Rightarrow$ Rotación

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

23. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales se considera la métrica euclídea g tal que la base $B = \{1, x, x^2\}$ es ortonormal. Demuestra que el endomorfismo $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dado por:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{1}{3}\left((2a_0 - a_1 + 2a_2) + (-a_0 + 2a_1 + 2a_2)x + (2a_0 + 2a_1 - a_2)x^2\right)$$

es una isometría en $(\mathbb{R}_2[x], g)$ y descríbela.

Como B es ortonormal, bastará con demostrar que $M(f, B_u)^T \cdot M(f, B_u) = I_N$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$f(1) = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$

$f(x) = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$

$f(x^2) = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$M(f, B_u)^T \cdot M(f, B_u) = I_N$

Es una isometría

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Subraya esto que cae fijo: 2 menús por solo 7€. Fácil, ¿no?

$\det(g) = -1$

Para clasificarla, hallamos el polinomio característico.

$$p_\lambda(g) = \begin{pmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3-\lambda \end{pmatrix} = -a^3 + a^2 + a - 1$$

$p_\lambda(1) = 0$

	-1	1	1	-1
1		-1	0	1
	-1	0	1	0

$-\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm 1$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \cancel{-1/3} & \cancel{-1/3} & \cancel{2/3} \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z \right\} \quad \dim(V_1) = 2$$

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} \cancel{5/3} & \cancel{-1/3} & \cancel{2/3} \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

$= \{ \quad \text{Dim} = 1$

Simetría especular respecto de V_1

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

24. Sobre el espacio vectorial euclídeo $(S_2(\mathbb{R}), g)$, donde $g(A,C) = \operatorname{tr}(AC)$, se define el endomorfismo $f : S_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es una isometría de $(S_2(\mathbb{R}), g)$ y descríbela.

Primero vamos a hallar la matriz de g en

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Quieres una MÁXIMA concentración y ENERGÍA? ¡Pincha aquí!

En dynos
Sorteamos 5 PS5
Participa y gana tu consola next gen!
PS5
¡Participa en dynos.es y en nuestras redes sociales!
FACEBOOK
TWITTER
INSTAGRAM
YOUTUBE
TIKTOK
Dynos

25. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con su métrica euclídea usual.

a) Calcula la matriz $M(f, B_u)$, siendo f la simetría axial con respecto a $U = L((2,3))$.

b) Calcula, en las coordenadas usuales, las ecuaciones de un giro que lleve el vector $(-4,3)$ en el vector $(5,0)$.

→ Muy fácil hacer el ortogonal

a) $B = \{(2,3), (-3,2)\}$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Me la piden en la base usual

$$M(f,B_u) = M(B,B_u) \cdot M(f,B) \cdot M(B_u,B)$$

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

b) B_u $(-4,3) \to (5,0)$

Si los vectores no tienen la misma norma, no puede haber isometría.

$\|(-4,3)\| = 5 \quad \|(5,0)\| = 5$

$$M(f,B_u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-4\cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta = 5$

$-4\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(\theta)$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

Si despejamos sen y cos

$$M(g, B_U) = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

26. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con su métrica euclídea usual.

a) Calcula la matriz $M(f,B_u)$, siendo f una rotación de ángulo $\pi/2$ con eje dado por $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0, x-z=0\}$.

b) Calcula, en coordenadas usuales, las ecuaciones de la simetría ortogonal respecto al plano perpendicular a la recta U del apartado anterior.

c) Calcula $M(f,B_u)$, donde $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es una isometría que verifique $f(1,-1,0)=(1,-1,0)$, $f(1,1,5)=(3,3,-3)$ y $\det(f)=1$.

a) Primero calculamos una base de U.

$U = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-y=z\} =$

$= \mathcal{L}(\{(1,-1,1)\})$

Calculamos el ortogonal de U.

$U^\perp = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\} =$

$= \mathcal{L}(\{(1,1,0),(1,0,-1)\})$

Tenemos que calcular una base ortonormal de $U^\perp$, para lo que usaremos Gram-Smith

$u_1=(1,1,0)=v_1 \qquad v_2=(1,0,-1)$

$u_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$

Una base ortonormal sería la resultante de dividir en la ortogonal cada vector por su norma.

$B' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)\right\}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!

Es trivial que:

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz en la base usual

$$M(f, B_u) = M(B', B_u)\, M(f, B')\, M(B_u, B')$$

b) Nos sirve la base ortonormal B' del apartado anterior

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz en la base usual procedemos como antes.

c) $f(1,-1,0) = (1,-1,0)$ $f(1,1,5) = (3,3,-3)$

$\det(f) = 1$

Está claro que nuestra isometría no puede ser la identidad porque $f(1,1,5) \neq (1,1,5)$ y tampoco una simetría axial, porque $(1,1,5) \perp (1,-1,0)$ y $f(1,1,5) \neq (-1,-1,-5)$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Quieres una MÁXIMA concentración y ENERGÍA? ¡Pincha aquí!

En dynos
Sorteamos 5 PS5
Participa y gana tu consola next gen!
PS5
¡Participa en dynos.es y en nuestras redes sociales!
FACEBOOK
TWITTER
INSTAGRAM
YOUTUBE
TIKTOK
Dynos

Sólo nos queda como opción que sea una rotación

$U = L(\{(1,-1,0), (1,1,5)\})$

$U^{\perp} = L(\{(5,5,-2)\})$

$\tilde{B}_{ORTN} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{3\sqrt{3}}(1,1,5), \frac{1}{3\sqrt{6}}(5,5,2)\}$

$$M(g, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(1,1,5)\right) = \cos\alpha\, e_2 + \operatorname{sen}\alpha\, e_3$

$\shortparallel$

$\frac{1}{3\sqrt{3}}(3,3,-3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

Como tenemos base ortonormal

$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(1,1,5) = \cos\alpha$

$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \cdot \frac{1}{3\sqrt{6}}(5,5,-2) = \operatorname{sen}\alpha$

Si calculamos

$$M(g, \tilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Para la base usual igual que antes

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

27. En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, calcula la matriz en B_u de $h \circ \sigma_U$, donde σ_U es la simetría ortogonal con respecto al plano U de ecuación $z = 0$, y h es el giro de ángulo $\pi/3$ alrededor del eje OX. Clasifica y describe la isometría resultante.

$U = \{(x,y,z) \mid z=0\} = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$

$$M(\sigma_U, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{rotación}}$

$R = \text{eje } OX = \{(x,y,z) \mid y=z=0\} = L(1,0,0)$

$R^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\} = L(\{(0,1,0),(0,0,1)\})$

$$M(h, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$M(h \circ \sigma_u) = M(\phi_u, B_u) \cdot M(\sigma_u, B_u)$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ Clasificamos esta como normalmente hacemos.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Asignaturas de universidad con grupos para clases de apoyo - academia-granada.es

28. En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, encuentra si es posible una isometría f que lleve el subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ en el subespacio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Si es posible da $M(f, B_u)$, clasifica y describe la isometría f.

Primero calculamos una base ortonormal de U.

$U = \mathcal{L}(\{(1,0,1), (0,1,0)\}) + (0,0,1)$

Usamos Gram-Smith

$u_1 = v_1 = (0,1,0)$

$u_2 = v_2 - \frac{g(u_1, v_2)}{\|u_1\|^2} u_1 = (1,0,1)$

Tenemos que $B = \{(1,0,1), (0,1,0)\}$ es una base ortonormal de U, para completar hasta una base de $\mathbb{R}^3$, seguimos con Gram-Smith

$u_3 = (0,0,1) - \frac{g(u_2, v_3)}{\|u_2\|^2} u_2 = (0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) =$
$= \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Base ortogonal de U $= \{\underbrace{(0,1,0), (1,0,1)}_{U}, (-1,0,1)\}$

Para base ortonormal

$\tilde{B} = \{(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\}$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descubre nuestros CURSOS GRATUITOS - Escuela de Inteligencia, ¡Click aquí!

Procedemos de igual forma con W, pero este subespacio es más sencillo ya que con la métrica usual

$B_W = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ es ortonormal, y si ampliamos

$B'' = \{\underbrace{(1,0,0),(0,1,0)}_{W},(0,0,1)\}$ es ortonormal

Por tanto la isometría

$$
\begin{aligned}
f : (V, g_U) &\longrightarrow (V, g_U) \\
(0,1,0) &\longrightarrow (0,1,0) \\
\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &\longrightarrow (1,0,0) \\
\underbrace{\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\tilde{B}} &\longrightarrow \underbrace{(0,0,1)}_{B''}
\end{aligned}
$$

$$
M(f, \tilde{B}, B'') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
M(f, B_U) = M(B'', B_U)\, M(f, \tilde{B}, B'') \cdot M(B_U, \tilde{B})^{-1}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1}
$$

$$
M(f, B_U) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Quieres una MÁXIMA concentración y ENERGÍA? ¡Pincha aquí!

Memorup® ENERGY
REFUERZA LA MEMORIA
MÁXIMA CONCENTRACIÓN Y ENERGÍA
TU MEJOR ALIADO CON LOS EXÁMENES
Rendimiento intelectual y físico
CONCENTRACIÓN
MEMORIA
ENERGÍA

Para clasificarla

$$\det(g) = -1$$

$$P_x(g) = -x^3 + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} - 1$$

$P_x(-1) = 0$ $\quad -1$ valor propio

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 & 1/\sqrt{2} \\ \cancel{-1/\sqrt{2}} & \cancel{0} & \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \end{array} \right\}$$

$\dim(V_{-1}) = 1$

$\dim(V_1) = 0$

Rotación compuesta con simetría especular

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

Para clasificar nuestra isometría

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

En DYNOS sorteamos una PS5. ¡Clickea aquí!