Función de las Palomitas (o de Thomae). Es la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x=0 \ \text{ó} \ x=1 \\ 0 & \text{si} \quad x\in[0,1]\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si} \quad x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \text{ con } x=\frac{p}{q} \text{ y } m.c.d.\{p.q\}=1. \end{cases}$$

A título de ejemplo:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{5}) &= f(\frac{2}{5})=f(\frac{4}{10})=\frac{1}{5}. \\ f(\frac{1}{\sqrt{2}}) &= f(\frac{2}{e})=f(\frac{1}{\pi})=0. \end{aligned}$$

Propiedad 1: Dado $0<\varepsilon<1$, sea $A_\varepsilon:=\{x\in[0,1]:f(x)\geq\frac{\varepsilon}{2}\}$. Entonces A_ε es un conjunto finito.

En efecto: Puesto que $\frac{1}{q}\geq\varepsilon$ si, y solo si, $q\leq\frac{1}{\varepsilon}$ obtenemos que, si $n_0:=\max\{n\in\mathbb{N}:n\leq\frac{1}{\varepsilon}\}$, entonces $x\in A_\varepsilon$ y solo si $x=\frac{p}{q}$ con $0<p\leq q\leq n_0$ siendo además el $m.c.d.$ $\{p,q\}=1$. Las fracciones que son así han de pertenecer al conjunto

$$\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},...,\frac{1}{n_0},\frac{2}{n_0},...,\frac{n_0-1}{n_0}\}\cup\{0,1\},$$

(en el que también hay elementos, como el $\frac{2}{4}$, que hay que descartar por ser $m.c.d.$ $\{p.q\}\neq1$). En consecuencia el cardinal de A_ε es finito.

Propiedad 2: $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0.$

En efecto: Dado $0<\varepsilon<1$ como el cardinal de A_ε es finito, sea k_0 dicho cardinal. Por tanto, $A=\{s_1,...,s_{k_0}\}\subseteq[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{2k_0}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. (Esto es que $n\geq\frac{4k_0}{\varepsilon}$).

Sea P_n la partición que divide a $[0,1]$ en n partes iguales. Así

$$P_n:=\{x_0,x_1,...,x_n\}=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,1\}.$$

siendo, $x_k-x_{k-1}=\frac{1}{n}$ para cada $k=1,...,n$. Sea

$$M_k=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}.$$

Nótese que $M_k\leq1$, para cada $k=1,...,n$ (ya que $\operatorname{Im}f\subseteq[0,1]$ por definición de f). Sea

$$B=\{k\in\{1,...,n\}:[x_{k-1},x_k]\cap A_\varepsilon\neq\emptyset\}.$$

Como cada $s_j\in A$ está contenido a lo sumo en dos subintervalos $[x_{k-1},x_k]$ (esto último ocurriría si $s_j=x_k$ para algún $k\in\{1,...,n-1\}$) se tiene que cada elemento de A_ε aporta como mucho dos elementos al conjunto B. Así,

$$\operatorname{card}(B)\leq2k_0.$$

Si $k \notin B$ entonces $[x_{k-1}, x_k] \cap A_\varepsilon = \emptyset$ de donde $M_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Además,

$$\sum_{k \notin B} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k \notin B} \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = 1.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k \in B} M_k \frac{1}{n} + \sum_{k \notin B} M_k \frac{1}{n} \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \operatorname{card}(B) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin B} \frac{1}{n} \leq \frac{2k_0}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, si $\widetilde{n}_0 \geq \frac{4k_0}{\varepsilon}$ entonces $S(f, P_n) < \varepsilon$ para cada $n \geq \widetilde{n}_0$. Esto es que

$$\lim_{n \to \infty} S(f, P_n) = 0$$

y como $I(f, P_n) = 0$ (de hecho $I(f, P) = 0$ par acada partición P del intervalo $[0, 1]$) obtenemos que

$$\lim_{n \to \infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0.$$

Esto prueba que f es integrable. Dado que $I(f) = 0$ concluimos finalmente que

$$\int_0^1 f(x) = dx = 0.$$