Análisis Matemático II

Tema 2: Ejercicios propuestos

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n :]-1\,,\,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 - x^n} \qquad \forall\, x \in]-1\,,\,1[$$

Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1\,,\,1[$ y uniformemente en cada compacto $K \subset]-1\,,\,1[$, pero no converge uniformemente en $]-1\,,\,1[$.

2. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se define:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^{\alpha}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y que, si $\alpha > 1$, dicha serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\,x) \log\left(1 + \frac{|x|}{n}\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} h_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las siguientes series de potencias:

(a) $$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)}$$ **(b)** $$\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}\,(x-1)^n$$