AVISO LEGAL

Con motivo de la suspensión temporal de la actividad docente presencial en la Universidad de Granada, se informa de las condiciones de uso de este material que ha sido elaborado, por la profesora responsable de la asignatura Cálculo II del Grado de Matemáticas y del Doble Grado de Matemáticas-Física (Grupo A), y del Doble Grado Matemáticas-Informática para su impartición por docencia virtual.

“Queda prohibida la captación y/o grabación de la sesión así como su reproducción o difusión, en todo o en parte sea cual sea el medio o dispositivo utilizado. Cualquier actuación indebida comportará una vulneración de la normativa vigente, pudiendo derivarse las pertinentes responsabilidades legales”. (Instrucción de la Secretaria General de 20 de abril de 2020, para la aplicación de la normativa de protección de datos en el uso de las herramientas digitales).

Puesto que este material forma parte de dichas sesiones docentes, queda prohibida expresamente su difusión o reproducción en todo o en parte.

CONTINUIDAD UNIFORME

La continuidad uniforme es una perfección de la continuidad que poseen, en particular, las funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado (Teorema de Heine). Dicha perfección consiste en eliminar de la propiedad de la continuidad, en su definición $\varepsilon - \delta$, que esta asociación dependa del punto x considerado (de ahí el adjetivo "uniforme"). Este resultado se usará en la teoría integración.

Una condición suficiente y útil para garantizar la continuidad uniforme es la propiedad de ser Lipschitziana.

Recordamos que si $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en A si, para cada $x \in A$ se cumple la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que dependerá de ε y de x) siendo tal que si $y \in A$ verifica que $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Cuando δ depende de ε pero no de x, llegamos a la siguiente definición.

Definición. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A si para cada cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que dependerá de ε) verificando que si $x, y \in A$ son tales que $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

El siguiente resultado es obvio.

Proposición. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A entonces es continua en A.

El recíproco del resultado anterior no se verifica.

Ejemplo. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función $f(x)=x^2$. Tenemos que f es continua en $\mathbb{R}$, y sin embargo no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. De hecho, para $\varepsilon=1$ no existe $\delta>0$ con la deseada propiedad de que si $x,y\in\mathbb{R}$ son tales que $|y-x|<\delta$, entonces $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. En concreto, si $x_n=n$ e $y_n=n+\frac{1}{n}$ es claro que $|y_n-x_n|=\frac{1}{n}$ mientras que $|f(y_n)-f(x_n)|=2+\frac{1}{n^2}>1$, lo que impide que δ exista.

Observaciones.

(i) Puesto que la función identidad $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ (lo cual es obvio haciendo $\delta=\varepsilon$) resulta que, a la vista del ejemplo anterior, e*l producto de dos funciones uniformemente continuas en A pudiera no ser una función uniformemente continua en A*.

(ii) Veremos que la función $f(x)=x^2$ sí es uniformemente continua en cualquier intervalo cerrado y acotado, por lo que es imprescindible determinar el subconjunto del dominio de f que estamos considerando cuando hablamos de continuidad uniforme. (La continuidad uniforme es una propiedad global, no local).

Puesto que $f:A\to\mathbb{R}$ **no** es uniformemente continua en A si existe $\varepsilon_0>0$, tal que para cada $\delta>0$ encontramos $x_\delta, y_\delta\in A$ tales que $|y_\delta-x_\delta|<\delta$, y $|f(y_\delta)-f(x_\delta)|\geq\varepsilon_0$, podemos probar lo siguiente:

Proposición. Una función $f:A\to\mathbb{R}$ **no** es uniformemente continua en A si, y solo si, existe $\varepsilon_0>0$, para el que podemos encontrar sucesiones x_n e y_n en A tales que $y_n-x_n\to 0$ pero $|f(y_n)-f(x_n)|\geq\varepsilon_0$.

Dem. Ejercicio. ([$\Rightarrow$] $\delta=\frac{1}{n}$; [$\Leftarrow$] obvia).

CONTINUIDAD UNIFORME

Una propiedad más fuerte que la continuidad uniforme pero más fácil de verificar es la siguiente:

Definición. Se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es lipschitziana en A si existe $M > 0$ tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|,$$

para cada $x, y \in A$.

Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Observación. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es es lipschitziana en A entonces, la constante M más pequeña que podamos poner en la desigualdad anterior es la llamada constante de Lipschitz, que viene dada por

$$M_0 := \sup\left\{\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} : \ x, y \in A \text{ con } x \neq y\right\}.$$

Proposición. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es lipschitziana en A entonces f es uniformemente continua en A.

Observación. Si para $M > 0$ verifica se que $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$, para cada $x, y \in A$, entonces dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ para concluir que si $|y - x| < \delta$ entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. ∎

Gracias al TVM vamos a caracterizar las funciones derivables en un intervalo que tienen la propiedad de ser lipschitzianas (veremos que serán aquellas cuya derivada está acotada).

Recordamos que una función $h : A \to \mathbb{R}$ está acotada cuando su imagen lo está, lo que se traduce en la existencia de una constante $M \geq 0$ tal que $|h(x)| \leq M$, para cada $x \in A$.

Teorema. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable I^o. Son equivalentes:

(i) f es lipschitziana en I.

(ii) f' está acotada en I^o.

En caso de que se verifiquen (i) e (ii) (que son equivalentes) la constante de Lipschitz de f viene dada por

$$M_0 := \sup\{ |f'(x)| : x \in I^o\}.$$

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii). Puesto que f es lipschitziana en I ha de existir $M > 0$ tal que $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq M$, si $x, y \in I$, con $x \neq y$. De ahí que $|f'(x)| \leq M$ para cada $x \in I^o$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Por el TVM si $x, y \in I$, con $x \neq y$ entonces existe c entre x e y tal que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$, de donde, si $M > 0$ es tal que $|f'(x)| \leq M$ para $x \in I^o$, entonces $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$. El resto es claro. ■

Por tanto las funciones que son derivables en un intervalo son lipschitzianas en dicho intervalo si y solo si, su derivada está acotada en el intervalo. En particular:

Corolario. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1([a,b])$ entonces f es lispschitziana con constante de Lipschitz

$$M_0 := \sup\{\, |f'(x)| : \; x \in\,]a,b[\, \}.$$

Dem. Como por hipótesis f' es continua en $[a,b]$ el resultado es obvio por el teorema anterior. ■

Observación. Hay funciones uniformemente continuas que no son lipschitzianas, luego estas dos propiedades no son equivalentes.

Ejemplo. La función $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$, para cada $x \geq 0$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_0^+$ pero no es lipschitziana en $\mathbb{R}_0^+$. De hecho, si $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ son tales que $0 \leq x < y$, entonces

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} \leq \frac{y-x}{\sqrt{y-x}} = \sqrt{y-x}.$$

En consecuencia $\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|y-x|}$, para cada $x, y \in \mathbb{R}_0^+$. Así, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \varepsilon^2$ para afirmar que si $|y - x| < \delta$ entonces $\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| < \varepsilon$. Esto prueba la continuidad uniforme de f en $\mathbb{R}_0^+$.
Puesto que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, para cada $x > 0$, concluimos por el teorema anterior que f no es lipschitziana en $\mathbb{R}_0^+$ dado que $f'(x)$ no está acotada en $\mathbb{R}^+$. ■

CONTINUIDAD UNIFORME

Observación. Las funciones uniformemente continuas son continuas, pero sabemos que hay funciones continuas, definidas en un intervalo, que no son uniformemente continuas. En este caso podríamos afirmar que el intervalo sobre el que hemos definido la función no es cerrado y acotado. De hecho, para funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, la continuidad y la continuidad uniforme son propiedades equivalentes como demostramos a continuación.

Eduard Heine (1821-1881)

Teorema de Heine. Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es uniformemente continua en $[a,b]$ si, y solo si, es continua en $[a,b]$.

Dem. Supongamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua pero no es uniformemente continua en $[a,b]$. Entonces, existe $\varepsilon_0>0$, para el que podemos encontrar sucesiones x_n e y_n en A tales que $y_n-x_n\to 0$ pero $|f(y_n)-f(x_n)|\geq\varepsilon_0$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, como x_n e y_n están acotadas, existe una parcial $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $x_{\sigma(n)}\to x$ y $y_{\sigma(n)}\to y$ (primero se obtiene una parcial $y_{\tilde{\sigma}(n)}\to y$. Luego se obtiene una parcial convergente $x_{\sigma(n)}\to x$ de $x_{\tilde{\sigma}(n)}$, y esta última es la parcial - que es una parcial de la parcial – es la sucesión parcial buscada).

Puesto que $y_n-x_n\to 0$ e $y_{\sigma(n)}-x_{\sigma(n)}\to y-x$, concluimos que $y=x$. Pero, por la continuidad de f, ha de ser $f(y_{\sigma(n)})-f(x_{\sigma(n)})\to f(y)-f(x)=0$ (por ser $x=y$), lo que contradice que $|f(y_n)-f(x_n)|\geq\varepsilon_0$. Esto prueba que si f es continua en $[a,b]$ entonces es uniformemente continua en $[a,b]$, y el recíproco es obvio. $\blacksquare$