Ejercicio 16/9/2021

Javier Gómez López

29 de septiembre de 2021

Ejercicio 1. Sean d_2 y $d =$ distancia discreta. Prueba que no son métricamente equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

Dos distancias son equivalentes si

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha \cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta \cdot d(x,y) \quad \forall x, y \in X \tag{1}$$

El caso en el que $x = y$ cumple la desigualdad y es una comprobación trivial. Recordemos que d_2 es una distancia en $\mathbb{R}^n$ que procede de una norma y por tanto es no acotada. Por otro lado, tomando $x \neq y$, tenemos que de ser métricamente equivalentes, tendríamos que

$$d_2(x,y) \leq \beta \cdot d(x,y) = \beta \Rightarrow d_2(x,y) \leq \beta$$

lo cual es un absurdo y quedaría demostrado.

Ejercicio 2. Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Probar que $d' = \min\{1, d\}$ es una distancia en X.

   Para ello hay que probar las tres propiedades que deben de cumplir todas las distancias.

   a) $d'(x,y) = 0 \iff \min\{1, d(x,y)\} = 0 \iff d(x,y) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ d \text{ es una distancia}}}{\iff} x = y$

   b) $d'(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(y,x)\} = d'(y,x)\ \forall x, y \in X$.

   c) Queremos comprobar la desigualdad triangular:

   $$d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$$

   Podemos afirmar que $d' \leq 1$. Si $d'(x,z) = 1$ o $d'(z,y) = 1$ entonces

   $$d'(x,z) + d'(z,y) \geq 1 \geq d'(x,y)$$

   Ahora supongamos $d'(x,z) < 1$ y $d'(z,y) < 1$. Por tanto

   $$d'(x,z) = d(x,z) \text{ y } d'(z,y) = d(z,y)$$

   $$d'(x,y) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d'(x,z) + d'(z,y)$$

   Y queda demostrado que $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)\ \forall x, y, z \in X$.

2. Si (X, d) es no acotado, d, d' no son métricamente equivalentes.

   Recordemos (1) para definir cuando dos distancias son métricamente equivalentes. Para la parte de la derecha de la desigualdad podemos tomar $\beta = 1$. Si existiera $\alpha > 0 : \alpha \cdot d \leq d' \Rightarrow \alpha \cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq 1\ \forall x, y \in X$, obtendríamos que

   $$d(x,y) \leq \frac{1}{\alpha} \quad \forall x, y \in X$$

   lo cual es un absurdo. Por tanto, $\nexists \alpha : \alpha \cdot d \leq d'$ y queda probado que no son métricamente equivalentes.