Relación de ejercicios 2 Javier Gómez López

1 Programa la resolución de un sistema triangular superior compatible determinado. Aplicalo al sistema de matriz de coeficientes y vector de términos independientes:

```
--> matrix([ 0 . 34, − 1 . 99, 2 / 7, 0],[ 0, 1 . 1, 2 . 3, − 3 . 57],[ 0, 0, 3 . 2, 33],
    [ 0, 0, 0, 66 . 72]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0.34 & -1.99 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1.1 & 2.3 & -3.57 \\ 0 & 0 & 3.2 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 66.72 \end{pmatrix}$$

```
--> [ 1, 34, 78, − 9 . 42] ;
```

$$[1, 34, 78, -9.42]$$

Primero generamos la matriz y el vector

```
--> u : matrix([ 0 . 34, − 1 . 99, 2 / 7, 0],[ 0, 1 . 1, 2 . 3, − 3 . 57],[ 0, 0, 3 . 2, 33],
    [ 0, 0, 0, 66 . 72]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0.34 & -1.99 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1.1 & 2.3 & -3.57 \\ 0 & 0 & 3.2 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 66.72 \end{pmatrix}$$

```
--> b :[ 1, 34, 78, − 9 . 42] ;
```

$$[1, 34, 78, -9.42]$$

```
--> n : matrix_size( u)[ 1] ;
```

$$4$$

```
--> x : makelist( 0, i, 1, n) ;
```

$$[0, 0, 0, 0]$$

```
--> for i : n thru 1 step − 1 do x[ i] : 1 / u[ i, i]·( b[ i] − sum( u[ i, j]. x[ j], j, i + 1, n)) ;
```

$$\mathrm{done}$$

```
--> x ;
```

$$[-156.6572049746565, -23.55938010954871, 25.83099145683453, -0.1411870503597122]$$

2 Programa el método de Gauss y úsalo para resolver el sistema con matriz de coeficientes y vector de términos independientes

```
--> matrix([ 0 . 24, 1 . 1, 3 / 2, 3 . 45],[ − 1 . 2, 1, 3 . 5, 6 . 7],[ 33 . 1, 1, 2, − 3 / 8],[ 4,
```

```
17, 71, − 4 / 81]) ;
--> [ 1, 2, 4, − 21 / 785] ;
```

Declaramos las matrices

```
--> a : matrix([ 0 . 24, 1 . 1, 3 / 2, 3 . 45],[ − 1 . 2, 1, 3 . 5, 6 . 7],[ 33 . 1, 1, 2, − 3 / 8],[
    4, 17, 71, − 4 / 81]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0.24 & 1.1 & \frac{3}{2} & 3.45 \\ -1.2 & 1 & 3.5 & 6.7 \\ 33.1 & 1 & 2 & -\frac{3}{8} \\ 4 & 17 & 71 & -\frac{4}{81} \end{pmatrix}$$

```
--> b : transpose([ 1, 2, 4, − 21 / 785]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -\frac{21}{785} \end{pmatrix}$$

```
--> N : matrix_size( a)[ 1] ;
```

$$4$$

Implementación

```
--> m : 0 ;
    for k : 1 thru N do(

      for i : k + 1 thru N do(

        m : a[ i][ k] / a[ k][ k],

        for j : k thru N do(

          a[ i][ j] : a[ i][ j] − m· a[ k][ j]

        ),
        b[ i] : b[ i] − m· b[ k]

      )

    ) ;
    a ; b ;
```

$$0$$

$$\text{done}$$

$$\begin{pmatrix} 0.24 & 1.1 & \frac{3}{2} & 3.45 \\ 0.0 & 6.5 & 11.0 & 23.95 \\ 0.0 & 0.0 & 50.16987179487182 & 79.11474358974363 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -128.7338968666914 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7.0 \\ 28.38461538461541 \\ -42.55955680541491 \end{pmatrix}$$

Ahora implementamos la resolución del sistema hacia atrás

```
--> x : transpose( makelist( 0, i, 1, N)) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
--> for i : N step − 1 thru 1 do (
      x[ i] :( 1 / a[ i][ i]).( b[ i] − sum( a[ i][ j]. x[ j], j, i + 1, N)
      )) ;
```

done

```
--> x ;
```

$$\begin{pmatrix} 0.1284446578136524 \\ -0.2164089146507665 \\ 0.04443306058363874 \\ 0.3306010137290169 \end{pmatrix}$$

3 Programa el método de Crout y aplicalo para encontrar la solución del sistema con matriz de coeficientes y vector de términos independientes, respectivamente

```
--> A : matrix([ 3, 6, 9],[ 1, 4, 11],[ 0, 4, 19]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 11 \\ 0 & 4 & 19 \end{pmatrix}$$

```
--> b :[ 1 / 2, − 2 / 3, − 3 / 4] ;
```

$$[\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}]$$

```
--> U : ident( matrix_size( A)[ 1]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
--> L : genmatrix( lambda([ i, j], 0), matrix_size( A)[ 1], matrix_size( A)[ 1]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
--> N : matrix_size( A)[ 1] ;
```

3

```
--> i : 1 ;
```

1

```
--> while i< = N do(
      for j : i thru N do( L[ j, i] : A[ j, i] − sum( U[ k, i]· L[ j, k], k, 1, i − 1) ),
      for j : i + 1 thru N do( U[ i, j] :( 1 / L[ i, i])·( A[ i, j] − sum( U[ k, j]· L[ i, k], k, 1, i −
    1)) ),

      i : i + 1
    ) ;
```

done

```
--> U ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
--> L ;
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que es buena:

```
--> if A = L. U then print( "Factorización buena") else print ( "Factorización erronea") ;
```

Factorización buena

Factorización buena

Resolvemos el sistema

```
--> y : makelist( 0, i, 1, N) ;
```

$$[0, 0, 0]$$

```
--> x : y ;
```

$$[0, 0, 0]$$

```
--> for i : 1 thru N do (
      y[ i] :( 1 / L[ i, i])·( b[ i] − sum( L[ i, j]· y[ j], j, 1, i − 1))) ;
```

done

```
--> for j : N − 1 step − 1 thru 1 do(
      x[ j] :( 1 / U[ j, j])·( y[ j] − sum( U[ j, i]· x[ i], i, j + 1, N))) ;
```

done

```
--> x ;
```

$$\left[\frac{91}{36}, -\frac{59}{36}, \frac{11}{36}\right]$$

4 Programa los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel y aplicalos, partiendo de la iteración inicial x_0 y

realizando 15 iteraciones, para obtener una aproximación de la solución del sistema con matriz de coeficientes y vector de términos independientes, respectivamente:

```
--> A : matrix([ 3, − 2, 0 . 25],[ 2, 9, − 5],[ 2, 3, − 6]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0.25 \\ 2 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

```
--> b :[ 1 . 1, 2 . 2, 3 . 3] ;
```

$$[1.1, 2.2, 3.3]$$

Empezamos con el método de Jacobi

```
--> iteraciones : 15 ;
```

$$15$$

```
--> N : matrix_size( A)[ 1] ;
```

$$3$$

```
--> x0 :[ 1, − 1 . 34, 1 . 456] ;
```

$$[1, -1.34, 1.456]$$

```
--> x : x0 ;
```

$$[1, -1.34, 1.456]$$

```
--> for iteracion : 1 thru iteraciones do(
      for i : 1 thru N do(
         x[ i] :( 1 / A[ i, i])·( b[ i] − sum( A[ i, j]· x0[ j], j, 1, i − 1) − sum( A[ i, j]· x0[ j], j, i
    + 1, N))),
    x0 : x) ;
```

$$\mathrm{done}$$

```
--> x ;
```

$$[0.3393174570092825, -0.102013966967479, -0.4879011644806453]$$

```
--> A. x ;
```

$$\begin{pmatrix} 1.100005013842644 \\ 2.20001503371448 \\ 3.3 \end{pmatrix}$$

Aproximadamente es igual

Continuemos con el método de Gauss-Seidel

```
--> for iteracion : 1 thru iteraciones do(
      for i : 1 thru N do(
         x[ i] :( 1 / A[ i, i])·( b[ i] − sum( A[ i, j]· x[ j], j, 1, i − 1) − sum( A[ i, j]· x0[ j], j, i
    + 1, N)),
      x0[ i] : x[ i])) ;
```

$$\mathrm{done}$$

```
--> x ;
```

$$[0.3393145161339642, -0.1020161290287946, -0.4879032258030759]$$

```
--> A. x ;
```

$$\begin{pmatrix} 1.100000000008713 \\ 2.200000000024156 \\ 3.299999999999999 \end{pmatrix}$$

Vemos que aproximadamente también es lo mismo

----

5 Ejercicios extra: Factorización Cholesky y Doolittle

```
--> kill( all) ;
```

$$\mathrm{done}$$

5.1 Doolittle

```
--> A : matrix([ 3, − 2, 0 . 25],[ 2, 9, − 5],[ 2, 3, − 6]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0.25 \\ 2 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

```
--> L : ident( matrix_size( A)[ 1]) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
--> U : genmatrix( lambda([ i, j], 0), 3, 3) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
--> N : matrix_size( A)[ 1] ;
```

$$3$$

```
--> for i : 1 thru N do(
      for j : i thru N do(
         U[ i, j] : A[ i, j] − sum( L[ i, k]· U[ k, j], k, 1, i − 1)),
      for j : i + 1 thru N do(
         L[ j, i] :( 1 / U[ i, i])·( A[ j, i] − sum( L[ j, k]· U[ k, i], k, 1, i − 1)))
    ) ;
```

$$\mathrm{done}$$

```
--> U ;
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0.25 \\ 0 & \frac{31}{3} & -5.166666666666667 \\ 0 & 0 & -3.999999999999999 \end{pmatrix}$$

```
--> L ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{31} & 1 \end{pmatrix}$$

```
--> L. U ;
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0.25 \\ 2 & 9 & -5.0 \\ 2 & 3 & -6.0 \end{pmatrix}$$

Observamos que coincide

5.2 Cholesky

```
--> B : matrix(
    [ 4, 2, − 2],
    [ 2, 2, − 3],
    [ − 2, − 3, 14]
    ) ;
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

```
--> N : matrix_size( B)[ 1] ;
```

$$3$$

```
--> U : ident( N) ;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
--> for j : 1 thru N do(
      for i : 1 thru j − 1 do(
         U[ i, j] :( 1 / U[ i, i])·( B[ i, j] − sum( U[ k, i]· U[ k, j], k, 1, i − 1))),
      U[ j, j] : sqrt( B[ j, j] − sum( U[ k, j]· U[ k, j], k, 1, j − 1))
      ) ;
```

$$\text{done}$$

```
--> U ;
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
--> transpose( U). U ;
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Created with wxMaxima.