Práctica 1. Continuidad
Ejercicios propuestos

1. Estudiar la existencia de límite en el origen para los campos escalares definidos, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por

$$\textbf{(a)}\quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\textbf{(b)}\quad g(x,y) = \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^2}$$

$$\textbf{(c)}\quad h(x,y) = \frac{\log(1 + x^4)\, \operatorname{sen}^2 y}{y^4 \,+\, x^8}$$

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la continuidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, como se indica:

$$\textbf{(a)}\quad f(x,y) \,=\, \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

$$\textbf{(b)}\quad f(x,y) \,=\, \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si} \quad x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si} \quad x^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\textbf{(c)}\quad f(x,y) \,=\, \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$$

$$\textbf{(d)}\quad f(x,y) \,=\, \begin{cases} \dfrac{x}{y} \operatorname{arc\,tg}(x^2+y^2) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

3. Dado $n \in \mathbb{N}$, estudiar la existencia de límite en el origen para el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) \,=\, \frac{x^n\, y^n}{x^2\, y^2 \,+\, (x-y)^2} \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

4. Dados $\alpha, b \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia de límite en el punto $(0,b)$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) \,=\, x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

5. Dado $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, estudiar la existencia de límite en el punto u del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{u\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y,z) \,=\, \frac{xyz}{|x-a| + |y-b| + |z-c|} \qquad \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{u\}$$