Ensayo 1

Javier Gómez López

$M_2(\mathbb{R})$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12} \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$

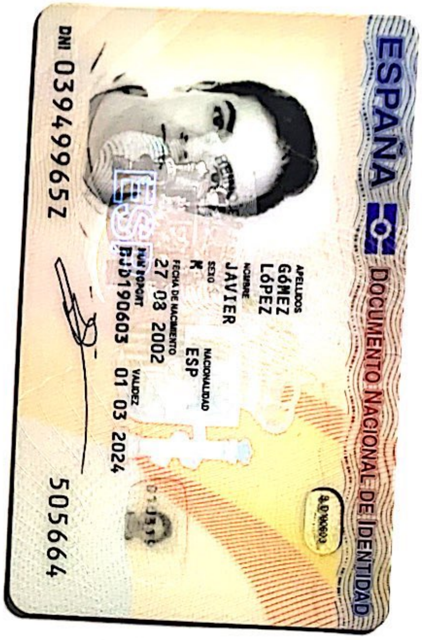
1. $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ $\quad f(U) = W \quad f \circ f = -Id_{M_2(\mathbb{R})}$

Hallamos base de U $\quad$ sea $B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base usual de $M_2(\mathbb{R})$

Podemos expresar cualquier vector de U como:

$v = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad v \in U$ y $a, b \in \mathbb{R}$

Así, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de U



Hallamos base de W

Podemos expresar cualquier vector de W como:

$w = c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad w \in W$ y $c, d \in \mathbb{R}$

Así, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de W

Tomamos la Base de U y la ampliamos a una de $M_2(\mathbb{R})$

$\bar{B} = B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Y definimos f:

$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Así, tenemos que $f(U) = W \rightarrow f\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Y además $f \circ f = -Id_{M_2(\mathbb{R})} \Rightarrow f\left(f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f\left(f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f\left(f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f\left(f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Base de la Imagen de f^t del an(U)

Calculemos an(U)

Tenemos: $B = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \right\}$. $B_U^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ la base dual de la usual

Una forma arbitraria $\varphi \in V^*$ tiene la forma

$\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4$. Para que $\varphi \in$ an$(U) \Rightarrow$

$\varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = 0$

Entonces, $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = a_1 = 0$

y $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = a_2 = 0$

Así, unas ecuaciones implícitas del an(U) respecto de B_U^* son

$a_1 = 0 \quad a_3 = \alpha$

$a_2 = 0 \quad a_4 = \beta$

Base de an$(U) = \left\{ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$

Base de an$(U) = \{\varphi_3, \varphi_4\}$

Por otro lado, tenemos que $M(f, B_U) = \begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

$M(f^t, B_U^*) = (M(f, B_U))^t = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$

$f^t(\varphi_3) = f^t\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c&0\\0&0\end{pmatrix} = \varphi_1$

$f^t(\varphi_4) = f^t\begin{pmatrix}0&0\\0&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix} = \varphi_2$

$f^t(\text{an}(U)) = \{\varphi_1, \varphi_2\}$