Continuidad Uniforme (ideas)

① (i) A cerrado + acotado, $f: A \to \mathbb{R}$ continua $\Big\} \Rightarrow f(A)$ cerrado + acotado

(ii) A acotado, $f: A \to \mathbb{R}$ unif. continua $\Big\} \Rightarrow f(A)$ acotado

(i) A cerrado + acotado, $f: A \to \mathbb{R}$ continua $\Big\} \Rightarrow f(A)$ cerrado + acot.

<u>$f(A)$ cerrado</u>. En efecto: si $\{f(x_n)\} \to y \in \mathbb{R}$ entonces $y \in f(A)$ pues al ser $\{x_n\}$ una sucesión de A que es acotado se tiene que $\exists\, x_{\sigma(n)} \to x \in \mathbb{R}$ y como A es cerrado $x \in A$ por lo que $x_{\sigma(n)} \to x$ en A. Al ser f continua se tiene que $f(x_{\sigma(n)}) \to f(x)$. Pero $f(x_{\sigma(n)}) \to y$ por lo que $y = f(x) \in f(A)$

<u>$f(A)$ acotado</u>: Si no lo está $\exists\, \{x_n\}$ en A con $|f(x_n)| \to +\infty$. Como antes $x_{\sigma(n)} \to x \in A$ por lo que $f(x_{\sigma(n)}) \to f(x)$ (al ser f continua)

Pero $|f(x_{\sigma(n)})| \to +\infty$ ¡absurdo!

(ii) A acotado, $f: A \to \mathbb{R}$ unif. cont $\Big\} \Rightarrow f(A)$ acotado

Si no lo está $\exists\, \{x_n\}$ en A con $|f(x_n)| \to +\infty$

Como A está acotado $\exists\, x_{\sigma(n)}$ con $x_{\sigma(n)} \to x \in \mathbb{R}$.

Como $\{|f(x_{\sigma(n)})|\} \to +\infty$ por paso a otra parcial $x_{\tilde{\sigma}(n)}$ de $x_{\sigma(n)}$ podemos conseguir que

$$|f(x_{\tilde{\sigma}(n+1)})| \geq |f(x_{\tilde{\sigma}(n)})| + 1.$$

Así $x_{\tilde{\sigma}(n+1)} - x_{\tilde{\sigma}(n)} \longrightarrow x - x = 0$ y

$$|f(x_{\tilde{\sigma}(n+1)}) - f(x_{\tilde{\sigma}(n)})| \geq 1.$$ ¡absurdo!

Observaciones

(i) Si $\{x_n\} \to +\infty$ entonces $x_{\sigma(n)} \to +\infty$ para toda parcial de $\{x_n\}$.

(ii) Si $x_n \to x$ y $p \in \mathbb{N}$ entonces $x_{n+p} \to x$ por lo que $x_{n+p} - x_n \to 0$.

En particular $x_{n+1} - x_n \to 0$

(iii) Existen funciones continuas que no transforman acotados en acotados (obviamente no son unif. continuas)

Ej $f =]0,1] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$.

③ $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ unif. continua $\Leftrightarrow$
$\exists\ \hat{f} = [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\hat{f}/_{]a,b[} = f$.

$\Leftarrow$) Si $\hat{f} = [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $\hat{f}/_{]a,b[} = f$ entonces $\hat{f}$ es unif. continua (T. de Heine) y f es unif continua por ser restricción de $\hat{f}$ que es unif continua.

$\Rightarrow$) Si $f =]a,b[\to \mathbb{R}$ es unif continua, para definir $\hat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\hat{f}/_{]a,b[} = f$ necesitamos probar que $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$; $\exists \lim\limits_{x\to b} f(x)$

Sea $\{x_n\} \to a$ (con $x_n \in]a,b[\ \forall n \in \mathbb{N}$)
Como $\{x_n\}$ es de Cauchy y f es unif cont
$\Rightarrow f(\{x_n\})$ es de Cauchy $\Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{R}$ con $f(\{x_n\}) \to y$ (pues $\mathbb{R}$ es completo)

Si ahora $\{\tilde{x}_n\} \to a$ igualmente se tiene que $\{f(\tilde{x}_n)\} \to \tilde{y} \in \mathbb{R}$. Nótese que ha de ser $y = \tilde{y}$ pues de no ser así perderemos la continuidad uniforme al ser $x_n - \tilde{x}_n \to a - a = 0$ y ser $|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \to |y - \tilde{y}| > 0$ (por lo que tomando $0 < \varepsilon_0 < |y - \tilde{y}|$ tendríamos que $|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon_0\ \forall n \geq n_0$)
Por tanto $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y = \tilde{y}$. Análog. $\exists \lim\limits_{x\to b} f(x)$

<u>Nota</u>: $]a,b[$ es reemplazable por $[a,b[$ y por $]a,b]$ pero <u>no</u> por un intervalo no acotado

2. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ con A acotado. Entonces:
f unif continua en $A \Leftrightarrow f$ transforma sucesiones de Cauchy en suc. de Cauchy.

$\Rightarrow$) Si f es unif continua entonces $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Sea $\{x_n\}$ una suc. de Cauchy. Entonces $\exists n_0$ tal que $|x_n - x_m| < \delta\ \forall n, m \geq n_0$ por lo que $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0$ y así $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy.

$\Leftarrow$) Si $f(\{x_n\})$ es de Cauchy $\forall \{x_n\}$ suc. de Cauchy en A entonces f es unif continua.

En efecto: (RA) Si no lo es existen x_n, y_n, $\varepsilon_0 > 0$ en A tales que $x_n - y_n \to 0$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$

Como $\{x_n\}$ está acotada (A es acotado) $\Rightarrow$ $\exists \{x_{\tilde{\sigma}(n)}\} \to x \in \mathbb{R}$ y como $\{y_{\tilde{\sigma}(n)}\}$ es acotada $\Rightarrow \exists \{y_{\sigma(n)}\}$ parcial de $\{y_{\tilde{\sigma}(n)}\}$ tal que $\{y_{\sigma(n)}\} \to y \in \mathbb{R}$

Por tanto: $x_{\sigma(n)} \to x \in \mathbb{R}$; $y_{\sigma(n)} \to y \in \mathbb{R}$.

Como $x_n - y_n \to 0$ tenemos que $x - y = 0$

Sea z_n la sucesión de términos $\{x_{\sigma(1)}, y_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, y_{\sigma(2)}, \dots\}$

Esto es $z_{2n-1} = x_{\sigma(n)}$; $z_{2n} = y_{\sigma(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\{z_n\}$ es de Cauchy (de hecho $z_n \to x = y$)

pero $\{f(z_n)\}$ no lo es puesto que

$$|f(z_{2n-1}) - f(z_{2n})| = |f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \geq \varepsilon_0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. ¡Absurdo! ($f(z_n)$ debería ser de Cauchy)