TEMA 1

TEMA 1: ESPACIOS TOPOLÓGICOS

23 SEPT 2021

Sea X un conjunto no vacío.

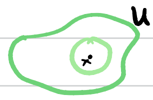
DEFINICIÓN 1: una TOPOLOGÍA en X es una familia T de subconjuntos de X, tal que $T \subset P(X)$, que verifica:

1. $\emptyset \in T$ y $X \in T$
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$
3. $U_1, \ldots, U_k \in T \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_k \in T \quad (k \in \mathbb{N})$

A los elementos de T los llamaremos conjuntos abiertos de la topología T.

DEFINICIÓN 2: un ESPACIO TOPOLÓGICO (X, T) es un par formado por un conjunto X no vacío con una topología T en X.

Ejemplo 1: Sea (X, d) un EM



$$T_d = \{U \subset X \ / \ \forall x \in U, \exists r > 0 \text{ con } B(x,r) \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$

Entonces, T_d es una topología en X. La llamaremos topología asociada a la distancia d.

PROBLEMA: Dado un espacio topológico (X, T), ¿existe una distancia d en X tal que $T_d = T$? En general, NO

DEFINICIÓN 3: Un ET (X, T) es METRIZABLE si existe una distancia d en X tal que $T_d = T$

(Hay un T^{ma} que afirma esto, pero es de muy alto nivel)

Ejemplo 2: Sea $X \neq \emptyset$, la TOPOLOGÍA TRIVIAL es aquella topología en X con el menor número de conjuntos, siendo $T_t = \{\emptyset, X\}$. Si T es otra topología en X, entonces $T_t \subset T$ $\quad U \in T_t \Rightarrow U \in T$

Ejemplo 3: Sea $X \neq \emptyset$, la TOPOLOGÍA DISCRETA es aquella topología en X con el mayor número de conjuntos, siendo $T_D = P(X) = \{U \ / \ U \subset X\}$. Si T es otra topología en X, entonces $T \subset T_D$.

PROPIEDAD 1: Sea $X \neq \emptyset$, d = distancia discreta, T_D = topología discreta en X. Entonces, $T_d = T_D$. Por tanto, el ET (X, T_D) es metrizable.

*en la distancia discreta, los puntos son bolas abiertas ⇒ conjuntos abiertos

Demostración: Queremos ver que $T_d = T_D$.

La inclusión $T_d \subset T_D$ se sigue de que $T \subset T_D$ $\forall T$ de X

Por otro lado, sea $U \in T_D$. Si $U = \emptyset \Rightarrow U \in T_d$ porque T_d es topología.
Si $U \neq \emptyset$, consideremos $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} = \bigcup_{x \in U} \underbrace{B(x, 1/2)}_{\in T_d} \in T_d$. Entonces, $U \in T_D \Rightarrow U \in T_d \Rightarrow T_D \subset T_d$
↖ en un EM, una bola abierta es un conjunto abierto

Concluimos que $T_d = T_D$

Si T es una topología en X, $T_t \subset T \subset T_D$

¿Cuándo coinciden T_t y T_D? Sólo cuando $X = \{p\}$ (tiene un único elemento)

¿Cuántas topologías hay en un conjunto con un elemento? $T = \{\emptyset, X\}$

EJERCICIO 1: ¿Cuántas topologías hay en un conjunto con dos elementos? ¿Y tres?

NOTA: $2 \leq \#\{\text{topologías en un conjunto con } k \text{ elementos}\} \leq 2^{2^k}$

X con k elementos $\Rightarrow \#P(X) = 2^k$, $\#P(P(X)) = 2^{2^k}$

$\#X = 2 \Rightarrow \#P(X) = 2^2 = 4$

Ejemplo 4: Sea $X \neq \emptyset$

$T_{CF} = \{U \subset X \,/\, U^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. T_{CF} es una topología en X llamada TOPOLOGÍA DE LOS COMPLEMENTOS FINITOS. Probemos que es una topología:

1. $\emptyset \in T_{CF}$, $X^c = \emptyset$ (0 elementos ⇒ finito) $\Rightarrow X \in T_{CF}$
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T_{CF}$. Si $U_i = \emptyset$ $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \in T_{CF}$

   Supongamos que $\exists i_0 \in I \,/\, U_{i_0} \neq \emptyset \Rightarrow U_{i_0}^c$ es finito

   $U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)^c \subset U_{i_0}^c$ finito

   ⇓ finito por ser subconjunto de un conjunto finito $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T_{CF}$

EJERCICIO 2: 3. $U_1, \ldots, U_k \in T_{CF} \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_k \in T_{CF}$

$\left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{k} U_i^c$. Como U_i^c es finito $\forall i \in \Delta_k$ y la unión finita de conjuntos finitos es, a su vez, finita, tenemos que la intersección finita de conjuntos de T_{CF} pertenece a dicha topología por ser su complemento finito. Esto suponiendo que $U_i \neq \emptyset$ $\forall i \in \Delta_k$

En caso contrario, $\bigcap_{i=1}^{k} U_i = \emptyset \in T_{CF}$

24 SEPT 2021

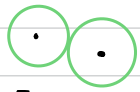
Si X es finito, T_{CF} coincide con T_D, pues los conjuntos cuyo complementario es finito son todos, esto es, $P(X)$.

PROPIEDAD 2: $U, V \in T_{CF}$, $U, V \neq \emptyset$. Si X es infinito, $U \cap V \neq \emptyset$

Demostración: $U \cap V \neq \emptyset \Leftrightarrow \underline{U^c \cup V^c \neq X}$

↳ La unión de dos conjuntos finitos nunca puede ser un conjunto infinito

Si X es infinito, (X, T_{CF}) no es metrizable. No existe una distancia d en X tal que $T_d = T_{CF}$. Esto se comprueba con la ppdad 2 y con lo que sigue (de ser metrizable, llegaríamos a un absurdo).

Si (Y,d) es un EM, sean $x,y \in Y$ con $x \neq y \Rightarrow \exists U_x \in T_d,\ U_y \in T_d \ /\ U_x \cap U_y = \emptyset$ 

En un EM, siempre podemos encontrar dos abiertos $U, V \in T_d$ tales que $U \cap V = \emptyset$

DEFINICIÓN 4: Un ET (X,T) es HAUSDORFF (o verifica el axioma de separabilidad en T_2, o es T_2) cuando, para todo par de puntos $x,y \in X$, con $x \neq y$, existen dos abiertos $U_x, U_y \in T$ tales que:

1. $x \in U_x,\ y \in U_y$
2. $U_x \cap U_y = \emptyset$

NOTA 1: Si (X,d) es un EM, entonces (X, T_d) es Hausdorff

NOTA 2: Si X es infinito, (X, T_{CF}) no es Hausdorff

NOTA 3: Si (X, T_D) es un espacio discreto, entonces es Hausdorff:

Dem: si $x \neq y$, $U_x = \{x\}$, $U_y = \{y\} \in T_D$. Como $x \neq y \Rightarrow \{x\} \cap \{y\} = \emptyset \Rightarrow U_x \cap U_y = \emptyset$

otra forma de verlo es tener en cuenta que (X, T_D) es metrizable: si d es la distancia discreta en X, entonces $T_d = P(X) = T_D$

NOTA 4: Sea $X \neq \emptyset$. Supongamos que X es, al menos, numerable. La TOPOLOGÍA DE LOS COMPLEMENTOS NUMERABLES es:

$$T_{CN} = \{U \subset X \ /\ U^c \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$$

(numerable → finito o infinito numerable)

Si X es numerable, entonces $T_{CN} = T_D$ (Si $U \subset X$ es cualquier conjunto, $U^c \subset X$. Como X es numerable y $U^c \subset X$, U^c también es numerable $\Rightarrow U \in T_{CN} \Rightarrow T_{CN} = T_D$)

Comprobemos que, verdaderamente, es una topología:

EJERCICIO 3:
1. $\emptyset \in T_{CN}$ $\quad X \in T_{CN}$ porque $X \subset X$ y $X^c = \emptyset$, numerable
2. $\{U_i\}_{i \in I} \Rightarrow U_i^c$ numerable $\forall i \in I \Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} U_i^c \Rightarrow$ intersección de numerables es numerable $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T_{CN}$ $\quad$ CASO $U_i = \emptyset \ \forall i \in \Delta_k$
3. $U_1, \ldots, U_k \in T_{CN} \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_k \in T_{CN}$

   $(U_1 \cap \ldots \cap U_k)^c = U_1^c \cup \ldots \cup U_k^c$.

   Si $U_i \neq \emptyset \ \forall i \in \Delta_k \Rightarrow U_i^c$ es numerable $\forall i \in \Delta_k$. Como una familia finita de conjuntos numerables es numerable, $U_1^c \cup \ldots \cup U_k^c$ es numerable. Por tanto, $U_1 \cap \ldots \cap U_k \in T_{CN}$.

   Si algún $U_i = \emptyset$, entonces $U_1 \cap \ldots \cap U_k = \emptyset \in T_{CN}$.

Si X es infinito, ¿es (X, T_{CN}) metrizable?

- Si X es numerable $\Rightarrow T_{CN} = T_D \Rightarrow (X, T_{CN})$ es metrizable usando la d. discreta.
- Si X no es numerable $\Rightarrow (X, T_{CN})$ no es Hausdorff (Si $U, V \neq \emptyset \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$)

  $U, V \in T_{CN}$, $U, V \neq \emptyset$. Si X no es numerable $U \cap V \neq \emptyset$

  $U \cap V \neq \emptyset \iff U^c \cup V^c \neq X$ } la unión de dos conjuntos numerables es numerable y X no lo es por tanto, $U^c \cup V^c \neq X \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$.

DEFINICIÓN 5: Sean T_1, T_2 dos topologías en X. Diremos que T_1 es MÁS FINA que T_2 si $T_2 \subset T_1$. También diremos que T_2 es MÁS GRUESA que T_1.

EJERCICIO 4: Sean $X \neq \emptyset$ y $A \subset X$ (arbitrario). Definimos $T(A) = \{U \subset X \,/\, A \subset U\} \cup \{\emptyset\}$.
Probar que $T(A)$ es una topología en X. Comprobar, además:

1. Si $A = \emptyset$, $T(A) = T_D$
2. Si $A = X$, $T(A) = T_t$

¿Es $(X, T(A))$ Hausdorff?

0) Probar que es una topología:

1. $\emptyset \in T(A)$ $\quad A \subset X \Rightarrow \underbrace{X}_{=U} \subset \underbrace{X}_{=U} \Rightarrow X \in T(A)$
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T(A)$

podemos juntarlo en un mismo caso.
$\Rightarrow$ si $U_i = \emptyset$ para algún/algunos $i \in I$, sabemos que $A \subset U_i$ en el resto de subconjuntos $U_i \subset X$. Entonces, $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T(A)$
$\Rightarrow$ si $U_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$, razonamos análogamente y $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \subset T(A)$
$\Rightarrow$ si $U_i = \emptyset$ $\forall i \in I$, $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \in T(A)$

3. $U_1, \ldots, U_k \in T(A)$ → podría haber sido $\{U_i\}_{i \in I}$ familia infinita $\Rightarrow$ En $(X, T(A))$ la intersección arbitraria de abiertos es un conjunto abierto
$\Rightarrow$ si $U_i = \emptyset$ para algún $i \in I$, $U_1 \cap \ldots \cap U_k = \emptyset \in T(A)$
$\Rightarrow$ si $U_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$, $A \subset U_i$ $\forall i \in I \Rightarrow A \subset U_1 \cap \ldots \cap U_k \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_k \in T(A)$.

1) $A = \emptyset \Rightarrow T(A) = T_D$

Sabemos que $T_D = \{U \,/\, U \subset X\}$. Como, si $A = \emptyset$, $A \subset U$ $\forall U \subset X$, deducimos que
$T(A) = \{U \subset X \,/\, A \subset U\} = \{U \subset X \,/\, \emptyset \subset U\} = \{U \,/\, U \subset X\} = T_D$

2) $A = X \Rightarrow T(A) = T_t$

Sabemos que $T_t = \{X, \emptyset\}$. Como $\exists! U \subset X \,/\, X \subset U$, y es el propio X, tenemos que
$\{U \subset X \,/\, A \subset U\} = \{U \subset X \,/\, X \subset U\} = \{X\}$. De esta manera, $T(A) = \{X\} \cup \{\emptyset\} = \{X, \emptyset\} = T_t$

3) ¿Es $T(A)$ Hausdorff?

Hay que distinguir casos:

- $T(A) = T_D \Rightarrow$ Hausdorff
- $T(A) = T_t \Rightarrow$ NO Hausdorff
- $A \neq X$, $A \neq \emptyset$. INCOMPLETO.

No es Hausdorff porque dos abiertos no vacíos tienen intersección no vacía (contienen a A).

$x, y \in X$, $x \neq y$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} x \in U \in T(A) \Rightarrow A \subset U \\ y \in V \in T(A) \Rightarrow A \subset V \end{array}\right\} A \subset U \cap V \neq \emptyset$

29 SEPT 2021

DEFINICIÓN 6: Sea (X, T) un ET. Diremos que $F \subset X$ es CERRADO si $X \setminus F = F^c$ es abierto. A la familia de todos los conjuntos cerrados de (X, T) la llamaremos C_T.

PROPIEDADES 3: Sea (X,T) un ET. Entonces:

- C1. $\phi, X \in C_T$
- C2. Si $\{F_i\}_{i\in I} \subset C_T \Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i \in C_T$
- C3. Si $F_1, \dots, F_k \in C_T \Rightarrow F_1 \cup \dots \cup F_k \in C_T$

Demostración: Análoga al caso en un EM.

NOTA: Si tenemos un conjunto X y una familia $C \subset P(X)$ que cumple:

- C1. $\phi, X \in C$
- C2. $\{F_i\}_{i\in I} \subset C \Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i \in C$
- C3. $F_1, \dots, F_k \in C \Rightarrow F_1 \cup \dots \cup F_k \in C$

, entonces, existe una única topología T en X tal que $C_T = C$

DEFINICIÓN 7: Definimos $T = \{F^c / F \in C\}$. Como $C \subset P(X)$, verifica C1, C2 y C3, pasando al complementario, T verifica las propiedades T1, T2 y T3.

Ejemplo: $C2 \Rightarrow T2$

Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset T \Rightarrow \{U_i^c\}_{i\in I} \overset{\text{def } T}{\subset} C$. Por C2, $\bigcap_{i\in I} U_i^c \in C \Rightarrow (\bigcap_{i\in I} U_i^c)^c \in T \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T$ ✓

→ Tenemos que ver que $C = C_T$:

Sea $F \in C_T = \{\text{conjuntos cerrados de } (X,T)\} \Rightarrow F^c \in T = \{G^c / G \in C\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists G \in C / F^c = G^c \Rightarrow \exists G \in C / F = G \Rightarrow F \in C$. Hemos probado $C_T \subset C$

Sea $F \in C$. $F \in C_T \Leftrightarrow F^c \in T = \{G^c / G \in C\}$. Hemos probado $C \subset C_T$
def: $F \in C_T$

Concluimos, finalmente, que $C_T = C$.

Ejemplo 1: $(X, C_{T_{CF}}) = \{F \subset X / F \text{ es finito}\} \cup \{X\}$

Ejemplo 2: (X, T_D) $\quad C_{T_D} = P(X) = T_D$
→ los conjuntos abiertos son todos los subconjuntos

Ejemplo 3: (X, T_t) $\quad C_{T_t} = \{\phi, X\} = T_t$

Ejemplo 4: (X, d) EM, T_d. ¿Son los puntos cerrados?

Sea $x_0 \in X$. $\bigcap_{r>0} \bar{B}(x_0, r) \supset \{x_0\}$. Veamos la otra inclusión:

Sea $y \neq x_0 \Rightarrow d(y, x_0) = s > 0 \Rightarrow y \notin \bar{B}(x_0, s/2)$ (Si $y \in \bar{B}(x_0, s/2)$, $d(x_0, y) \leq s/2 < s = d(x_0, y)$!!!)
$\Rightarrow y \notin \bigcap_{r>0} \bar{B}(x_0, r)$

Por tanto, $\{x_0\} = \bigcap_{r>0} \bar{B}(x_0, r)$. Como x_0 es intersección de cerrados, x_0 es cerrado

NOTA: En un EM, los puntos son conjuntos cerrados.

La demostración que acabamos de ver utiliza bolas, elementos propios de un EM. Veamos otra demostración diferente:

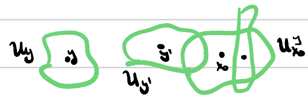
PROPIEDAD 4: En un ET Hausdorff, todo punto es cerrado

Demostración: Sea $x_0 \in X$. $\{x_0\} \in C_T \Leftrightarrow X \setminus \{x_0\}$ es abierto

Sea $y \in X\setminus\{x_0\} \Rightarrow y \neq x_0 \Rightarrow \exists\, U_y, U_{x_0}^y \in T$ con $y \in U_y$, $x_0 \in U_{x_0}^y$ / $U_y \cap U_{x_0}^y = \emptyset$ $\overset{H}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow x_0 \notin U_y \Rightarrow U_y \subset X\setminus\{x_0\} \Rightarrow X\setminus\{x_0\} = \bigcup_{y\neq x_0} U_y \in T \Rightarrow \{x_0\} \in C_T$

↳ $X\setminus\{x_0\}$ abierto



¿Si todo punto es cerrado, el espacio es Hausdorff? NO

Contraejemplo: X infinito, (X, T_{CF}). No es Hausdorff (ya lo probamos)

los puntos son cerrados (son conjuntos finitos)

DEFINICIÓN 8: Si (X,T) es un ET, una BASE DE LA TOPOLOGÍA T es una familia $\mathcal{B} \subset T$ (los elementos de $\mathcal{B}$ son conjuntos abiertos) con la propiedad de que todo conjunto abierto no vacío de T puede expresarse como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

1. $\forall U \in T, \exists \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B} \,/\, U = \bigcup_{i\in I} B_i$
2. $\mathcal{B} \subset T$

Ejemplo 1: Sea (X,d) un EM. $\mathcal{B} = \{B(x,r) \,/\, x\in X, r>0\}$ es una base de T_d.

Ejemplo 2: Sea (X,d) un EM. $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{B}(x,r) \,/\, x \in X, r>0\}$ no es, en general, una base de T_d. Aunque sabemos que todo abierto de T_d se puede expresar como unión de bolas cerradas (1), en general $\bar{\mathcal{B}} \not\subset T_d$ (2). Por ejemplo, en T_D $\bar{\mathcal{B}}$ sí es una base.

Ejemplo 3: Sea (X, T_D). $\mathcal{B} = \{\{x\} \,/\, x\in X\} \subset T_D$. $\emptyset \neq U = \bigcup_{x\in U} \{x\}$. Cualquier base de (X, T_D) debe contener a $\mathcal{B}$.

30 SEPT 2021

EJERCICIO 5: Sea (X,d) un EM. Sea $r_0 > 0$. Definimos $\mathcal{B}_{r_0} = \{B(x,r) \,/\, x\in X, 0<r<r_0\}$

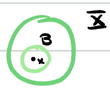
$\mathcal{B}_{r_0}$ es base de T_d $\forall r_0 > 0$

NOTA: Si d=dist. discreta en X, $\mathcal{B}_{1/2} = \{B(x,r) \,/\, x\in X, 0<r<1/2\} = \{\{x\} \,/\, x\in X\}$

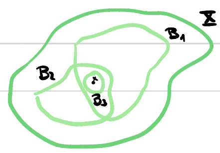
Hecho al final

PROPIEDADES 5: Sea (X,T) un ET, $\mathcal{B}$ base de T. Entonces:

1. $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$



2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B} \,/\, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$



Demostración:

1. $\mathbb{X} \in T \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B} \;/\; \bigcup_{i\in I} B_i = \mathbb{X}$

$x \in \mathbb{X} = \bigcup_{i\in I} B_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \;/\; x \in B_{i_0} \rightsquigarrow$ Tomemos $B = B_{i_0}$

2. $x \in B_1 \cap B_2 \in T$ por ser intersección finita de abiertos.
$\exists \{B_j\}_{j\in J} \;/\; B_1 \cap B_2 = \bigcup_{j\in J} B_j$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 = \bigcup_{j\in J} B_j \supset B_{j_0} \Rightarrow \exists j_0 \in J \;/\; x \in B_{j_0} \subset B_1 \cap B_2 \Rightarrow B_{j_0} = B_3$

TEOREMA 1: Sea $\mathbb{X}$ un conjunto, $\mathcal{B} \subset P(\mathbb{X})$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{X}$ tal que:

1. $\forall x \in \mathbb{X}, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B} \;/\; x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Entonces existe en $\mathbb{X}$ una única topología T tal que $\mathcal{B}$ es base de T.

Demostración: Definimos $T = \{\mathcal{U} \subset \mathbb{X} \;/\; \forall x \in \mathcal{U}, \exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset \mathcal{U}\} \cup \{\emptyset\}$.

Entonces,

T1. $\emptyset \in T$ por def. $\mathbb{X} \in T$ por 1 ($\forall x \in \mathbb{X}, \exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset \mathbb{X}$)

T2. Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$ ¿$\bigcup_{i\in I} U_i \in T$?

- Si $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \in T$
- Si $x \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \;/\; x \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in T, \exists B \in \mathcal{B} \;/\; x \in B \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$

  Por tanto, $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$

T3. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in T$ ¿$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in T$?

- Si $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset \in T$
- Si $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \Rightarrow x \in \mathcal{U}_1$ y $x \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B} \;/\; x \in B_1 \subset \mathcal{U}_1$ y $x \in B_2 \subset \mathcal{U}_2 \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2$.

  Hago uso de (2): $\exists B_3 \in \mathcal{B} \;/\; x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \Rightarrow \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in T$

  Por inducción, concluimos que $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k \in T \Rightarrow \mathcal{U}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{U}_k \in T$

Hemos probado que T es una topología. Veamos ahora que $\mathcal{B}$ es base de T.

Tenemos que comprobar que:

1. $\mathcal{B} \subset T$

   Sea $B \in \mathcal{B}$. $\forall x \in B, x \in B \subset B$ (se toma $B = \mathcal{U}$) $\Rightarrow \mathcal{B} \subset T$

2. Todo $\mathcal{U} \in T \setminus \{\emptyset\}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$

   Sea $\mathcal{U} \in T, \mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists B_x \in \mathcal{B} \;/\; x \in B_x \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_{x\in\mathcal{U}} B_x \Rightarrow \mathcal{U}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$

tienen la misma base $\Rightarrow$ son la misma topología

Veamos por último la unicidad de T. Sea T' otra topología en $\mathbb{X}$ tal que $\mathcal{B}$ es base de T'. Veamos que $T = T'$.

$\underline{T \subset T'}$ | Sea $\mathcal{U} \in T \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B} \;/\; \mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} B_i \Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} B_i \in T' \Rightarrow T \subset T'$

($\mathcal{B}$ base de T) ($\mathcal{B}$ base de T')

$\underline{T' \subset T}$ | Análogamente.

Con esto, queda probado el teorema. ∎

Ejemplo 1: Topología de SORGENFREY o del límite inferior

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_s = \{[a,b) \ / \ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$

$\mathcal{B}_s$ es base de una topología en $\mathbb{R}$, T_s, a la que llamaremos topología de Sorgenfrey. Verificamos las dos propiedades del T^{ma} anterior.

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\in[x,x+1)\in\mathcal{B}_s$
2. $B_1=[a_1,b_1)$, $B_2=[a_2,b_2)\in\mathcal{B}_s$. Sea $x\in B_1\cap B_2 = [a_1,b_1)\cap[a_2,b_2)$. Entonces,
   $[a_1,b_1)\cap[a_2,b_2) = [\max\{a_1,a_2\}, \min\{b_1,b_2\}) = B_3\in\mathcal{B}_s$.
   $\forall x\in B_1\cap B_2$, $\exists B_3\in\mathcal{B}_s / \ x\in B_3 = B_1\cap B_2$

1 OCT 2021

Ejemplo 2: Topología de KURATOWSKI. Sea $K=\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$.

Definimos $\mathcal{B}_K = \underbrace{\{(a,b);\ a,b\in\mathbb{R}, a<b\}}_{\mathcal{B}_1} \cup \underbrace{\{(a,b)\setminus K;\ a,b\in\mathbb{R}, a<b\}}_{\mathcal{B}_2}$. Probemos que $\mathcal{B}_K$ es base de una topología en $\mathbb{R}$:

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $(x-1,x+1)\in\mathcal{B}_K$, $x\in(x-1,x+1)$
2. Sean $B_1, B_2\in\mathcal{B}_K$. Hay tres posibilidades:

   a) $B_1=(a_1,b_1)$, $B_2=(a_2,b_2)$

   $x\in B_1\cap B_2 = (\max\{a_1,a_2\}, \min\{b_1,b_2\})\in\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}_K$. Se toma $B_3=B_1\cap B_2$

   b) $B_1=(a_1,b_1)$, $B_2=(a_2,b_2)\setminus K$ Podemos intercambiarlos.

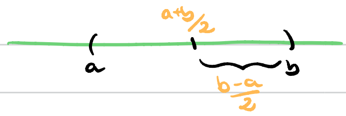
   $x\in B_1\cap B_2 = (a_1,b_1)\cap((a_2,b_2)\cap K^c) = ((a_1,b_1)\cap(a_2,b_2))\cap K^c = (\max\{a_1,a_2\}, \min\{b_1,b_2\})\setminus K\in\mathcal{B}_2\in\mathcal{B}_K$

   c) $B_1=(a_1,b_1)\setminus K$, $B_2=(a_2,b_2)\setminus K$

   $x\in B_1\cap B_2 = ((a_1,b_1)\cap K^c)\cap((a_2,b_2)\cap K^c) = ((a_1,b_1)\cap(a_2,b_2))\cap K^c\in\mathcal{B}_2\in\mathcal{B}_K$

Por tanto, $\exists!$ topología T_K en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}_K$ es base de T_K

Recordamos que las bolas abiertas en $\mathbb{R}$ son base de T_u. Llamaremos TOPOLOGÍA USUAL a aquella topología cuya base son las bolas abiertas. En $\mathbb{R}$, tenemos que $\mathcal{B}_u = \{(a,b) \ / \ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$



$(a,b) = B\left(\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{\frac{a+b}{2}}, \underset{\overset{\shortparallel}{r}}{\frac{b-a}{2}}\right)$

PROPOSICIÓN 1: Sea $X\neq\emptyset$. Sean T, T' topologías en X, y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de las topologías, respectivamente. Son equivalentes:

1. $T\subset T'$ un abierto de T es abierto de T'
2. $\forall B\in\mathcal{B}$, $\forall x\in B$, $\exists B'\in\mathcal{B}' \ / \ x\in B'\subset B$.

Demostración:

$\underline{1\Rightarrow 2}|$ Sean $B\in\mathcal{B}$, $x\in B\in\mathcal{B}\subset T\subset T'$. Como $B\in T'$ y $\mathcal{B}'$ es base de T', entonces $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists B'\in\mathcal{B}' / x\in B'\subset B$ ($B\in T' \Rightarrow \exists\{B_i'\}_{i\in I} \ / \ \overset{x\in}{B} = \bigcup_{i\in I} B_i' \Rightarrow \exists i_0\in I \ / \ x\in B_{i_0}' \subset \bigcup_{i\in I} B_i' = B$)

$\underline{2\Rightarrow 1}|$ Sea $U\in T$. Queremos ver que $U\in T'$. Como $\mathcal{B}$ es base de $T\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\{B_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{B} \ / \ U=\bigcup_{i\in I} B_i$

Veamos que 2 implica que cada B_i pertenece a T'. Fijamos $i\in I$. Si $x\in B_i\in\mathcal{B} \overset{2}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \exists B_x'\in\mathcal{B}' / x\in B_x'\subset B_i \Rightarrow B_i = \bigcup_{x\in B} B_x'\in\mathcal{B}'\subset T' \Rightarrow B_i\in T' \Rightarrow U = \bigcup_{i\in I} \overset{\in T'}{B_i}\in T'$

Así, $T\subset T'$.

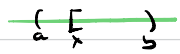
NOTA: Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, la condición (2) se cumple trivialmente. ¿Por qué? Si $B \in \mathcal{B}, x \in B \Rightarrow B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Podemos tomar $B' = B$ y $x \in B = B' \subset B \Rightarrow T \subset T'$

PROPIEDAD 6: 1. $T_u \subset T_K$ y 2. $T_u \subset T_S$.

Demostración:

1. $T_u \subset T_K$ se sigue de $\mathcal{B}_K = \underbrace{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_u} \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_u \cup \mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}_u \Rightarrow T_u \subset T_K$

2. Sean $B = (a,b) \in \mathcal{B}_u$, con $a<b$, y $x \in (a,b)$. Queremos encontrar $B' \in \mathcal{B}_S$ tal que $x \in B' \subset (a,b)$. Tomando $B' = [x,b)$, $x \in [x,b) \subset (a,b)$



PROPIEDAD 7:

EJERCICIO 6: Probar que 1. $T_u \neq T_S$, 2. $T_u \neq T_K$ y 3. $T_K \not\subset T_S$ y $T_S \not\subset T_K$

1. $\boxed{T_u \neq T_S}$ $\overset{T_u \subset T_S}{\Rightarrow}$ $T_S \not\subset T_u$. Buscamos $U \in T_S \setminus T_u$ — 6 OCT 2021

Sea $U = [0,1) \in \mathcal{B}_S \subset T_S$. Veamos que $U \notin T_u$, suponiendo $U \in T_u$ y buscando el absurdo.

$U \in T_u \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}_u$. Entonces $x = 0 \in [0,1) = U = \bigcup_{i\in I} B_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \,/\, 0 \in B_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} B_i = U$

Sabemos que $B_{i_0} = (a,b)$ con $a<b$. Si $0 \in (a,b) \subset [0,1) \Rightarrow a<0$. Tomamos $z \in (a,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in (a,b)$ PERO $z \notin [0,1) \Rightarrow (a,b) \not\subset [0,1)$!!

Esta contradicción proviene de suponer que $U \in T_u \Rightarrow U \notin T_u$ pero $U \in T_S \Rightarrow \underline{T_S \not\subset T_u}$

2. $\boxed{T_u \neq T_K}$ $\overset{T_u \subset T_K}{\Rightarrow}$ $T_K \not\subset T_u$. Buscamos $U \in T_K \setminus T_u$.

Sea $U = (-1,1) \setminus K \in T_K$. Supongamos que $U \in T_u \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}_u \,/\, U = \bigcup_{i\in I} B_i$.

Tomamos $x = 0 \in U = \bigcup_{i=I} B_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \,/\, 0 \in \overset{=(a,b)}{B_{i_0}} \subset U \Rightarrow 0<b$ y $(a,b) \subset (-1,1) \setminus \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, 1/n < b \;\; \forall n \geq n_0$, porque $\{1/n\} \to 0$. Entonces, para $n \geq n_0$ $\frac{1}{n} \in (a,b)$, pero $\frac{1}{n} \notin U = (-1,1) \setminus K \Rightarrow$

$\Rightarrow \overset{B_{i_0} \not\subset (-1,1)\setminus K}{(a,b) \not\subset (-1,1) \setminus K}$.

La contradicción hallada procede de suponer que $U = (-1,1) \setminus K \in T_u$. Por tanto, $(-1,1) \setminus K \notin T_u \Rightarrow$

$\Rightarrow T_u \neq T_K$

Concluimos que: $T_u \subsetneq T_S$ y $T_u \subsetneq T_K$

COROLARIO 1: Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de T, T' resp. Son equivalentes:

1. $T = T'$
2. a) $\forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \,/\, x \in B' \subset B$ $\quad (T \subset T')$

   b) $\forall B' \in \mathcal{B}', \forall x \in B', \exists B \in \mathcal{B} \,/\, x \in B \subset B'$ $\quad (T' \subset T)$

$S \subset P(X)$. ¿$\exists$ top en X / $S \subset T$? Sí. La topología discreta.

$S = \{\{x\}\}$ $\quad T = \{\emptyset, \{x\}, X\}$ es top. en X Se comprueba fácilmente.

¿$\exists T$ top en X que sea la más gruesa que contiene a S? Sí

LEMA 1: Sea $\mathbb{X}$ es un conjunto, y $\{T_i\}_{i\in I}$ es una familia de topologías en $\mathbb{X}$.

Entonces: $T=\bigcap_{i\in I} T_i = \{U\subset \mathbb{X} / U\in T_i \ \forall i\in I\}$ es una topología en $\mathbb{X}$

Demostración:

1. $\emptyset, \mathbb{X}\in T_i \ \forall i\in I$
2. $\{U_j\}_{j\in J}\subset T \Rightarrow U_j\in T\ \forall j\in J \Rightarrow U_j\in T_i\ \forall i\in I, \forall j\in J \overset{T_i\text{ top}}{\Rightarrow} \bigcup_{j\in J} U_j\in T_i\ \forall i\in I \overset{\text{def } T}{\Rightarrow} \bigcup_{j\in J} U_j\in T$
3. $U_1,\dots,U_k\in T\Rightarrow U_1,\dots,U_k\in T_i\ \forall i\in I \underset{T_i\text{ top}}{\Rightarrow} U_1\cap\dots\cap U_k\in T_i\ \forall i\in I \underset{\text{def } T}{\Rightarrow} U_1\cap\dots\cap U_k\in T$

ojo que $S\notin \mathbb{X}$, $S\subset \mathbb{X}$.

PROPOSICIÓN 2: Sea $S\subset P(\mathbb{X})$. Existe una topología $T(S)$ (TOPOLOGÍA GENERADA POR S) en $\mathbb{X}$ tal que $S\subset T(S)$. Además, si T' es otra topología que contiene a S, entonces $T(S)\subset T'$. Es decir, $T(S)$ es la topología más gruesa que contiene a S.

Demostración: $I=\{T'\subset P(\mathbb{X}) / T' \text{ topología}, S\subset T'\}$. $T=\bigcap_{T'\in I} T'$ (intersección de top. es top.)
Por el lema, T es una topología tal que si $U\in S \underset{\text{def } I}{\Rightarrow} U\in T'\ \forall T'\in I \underset{\text{def } T}{\Rightarrow} U\in T \Rightarrow S\subset T$
Llamando $T(S)=T$, tenemos $S\subset T(S)$.

Ahora, si T' es otra topología que contiene a S, $\Rightarrow T'\in I \Rightarrow T(S)=\bigcap_{\tilde{T}\in I}\tilde{T} \overset{T'\in I}{\subset} T'$ ■

7 OCT 2021

DEFINICIÓN 9: $S\subset P(\mathbb{X})$ es una SUBBASE de la topología T si las intersecciones finitas de elementos de S forman una base, que llamaremos $\mathcal{B}(S)$ de la topología T.

Si S es subbase de T, entonces $U\in T\Rightarrow U=\bigcup_{i\in I} B_i$, $B_i\in\mathcal{B}(S)$. $B_i = S_1^i\cap\dots\cap S^i_{k(i)}$ $k(i)\in\mathbb{N}$ depende de B_i
$U\in T\Rightarrow U=\bigcup_{i\in I}(S_1^i\cap\dots\cap S^i_{k(i)})$

PROPOSICIÓN 3: Sea $S\subset P(\mathbb{X})$ tal que, $\forall x\in \mathbb{X}$, existe $V\subset S$ tal que $x\in V$ $(\mathbb{X}=\bigcup_{V\subset S} V)$.
Entonces S es una subbase de $T(S)$.

Ejemplo 1: $S=\{\emptyset, A, \mathbb{X}\}\to \mathcal{B}(S)=\{\emptyset, A, \mathbb{X}\}$

Ejemplo 2: $S=\{\emptyset, A, B, \mathbb{X}\}\rightsquigarrow \mathcal{B}(S)=\{\emptyset, A\cap B, A, B, \mathbb{X}\}$

Demostración: Definimos $\mathcal{B}=\{\bigcap_{i\in I} V_i / V_i\in S, I \text{ finito}\}$. Veamos que:

1. $\mathcal{B}$ es base de una topología T en $\mathbb{X}$ tal que $\mathcal{B}$ es base T^{MA} 1
2. $T=T(S)$

1a. $\forall x\in \mathbb{X}, \exists V\in S / x\in V$. Como $S\subset\mathcal{B}\Rightarrow V\in\mathcal{B}$. $(\forall x\in \mathbb{X}, \exists V\in\mathcal{B}/ x\in V)$

1b. Sean $B_1,B_2\in\mathcal{B}$. $x\in B_1\cap B_2$. $B_1 = V_1^1\cap\dots\cap V^1_{k(1)}$ $V_j^1\in S\ \forall j\in\Delta_{k(1)}$
$B_2=V_1^2\cap\dots\cap V^2_{k(2)}$ $V_j^2\in S\ \forall j\in\Delta_{k(2)}$

$\Rightarrow B_1\cap B_2 = (V_1^1\cap\dots\cap V^1_{k(1)})\cap(V_1^2\cap\dots\cap V^2_{k(2)})\in\mathcal{B}$ (por ser intersección finita de elementos de S)

Tomando $B_3=B_1\cap B_2$, tenemos $x\in B_3=B_1\cap B_2\in\mathcal{B}$.

Así, llamemos T a la única topología que tiene a T como base.

T topología de la que $\mathcal{B}$ es base

menor topología que contiene a $\mathcal{S}$

2. • $\mathcal{B} \subset T$ y $\mathcal{S} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset T \Rightarrow T(\mathcal{S}) \subset T$

• Por último, veamos que $T \subset T(\mathcal{S})$:

Sea $\mathcal{U} \in T \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B} \,/\, \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i$. Cada $B_i = V_1^i \cap \ldots \cap V_{k(i)}^i$ con $V_j^i \in \mathcal{S}$ $\forall j \in \Delta_{k(i)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} (V_1^i \cap \ldots \cap V_{k(i)}^i)$.

Como $\mathcal{S} \subset T(\mathcal{S})$, $\forall i \in I$ se verifica $V_1^i, \ldots, V_{k(i)}^i \in \mathcal{S} \subset T(\mathcal{S}) \overset{T(\mathcal{S})\text{ top}}{\Rightarrow} \underbrace{V_1^i \cap \ldots \cap V_{k(i)}^i}_{=B_i} \in T(\mathcal{S}) \Rightarrow$

$\overset{T(\mathcal{S})\text{ top}}{\Rightarrow} \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i \in T(\mathcal{S}) \Rightarrow \mathcal{U} \in T(\mathcal{S}) \Rightarrow T \subset T(\mathcal{S})$

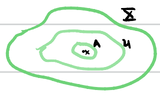
Concluimos que $T = T(\mathcal{S})$

■

ENTORNOS. INTERIOR Y CLAUSURA DE UN CONJUNTO

DEFINICIÓN 10: Sea (X, T) un espacio topológico y sea $x \in X$. Diremos que $\mathcal{U}$ es un ENTORNO de x si existe un conjunto abierto A tal que $x \in A \subset \mathcal{U}$.

NOTA: Los conjuntos abiertos son entornos de cada uno de sus puntos.



DEFINICIÓN 11: Dados (X, T), $x \in X$, llamaremos N_x a la familia de entornos de x (N=Neighborhood). $N_x = \{A \subset X \,/\, \exists \mathcal{U} \in T : x \in \mathcal{U} \subset A\}$

- $N_x \neq \emptyset$ porque $X \in N_x$
- Si $\mathcal{U} \in T$ y $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in N_x$ (los conjuntos abiertos que contienen a x son entornos de x)

DEFINICIÓN 12: Sean (X, T) ET y $x \in X$. Diremos que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{P}(X)$ es BASE DE ENTORNOS de x si se verifica:

1. $\mathcal{B}_x \subset N_x$
2. $\forall \mathcal{U} \in N_x$, $\exists B \in \mathcal{B}_x \,/\, B \subset \mathcal{U}$

Ejemplo 1: (X, T_D), $x \in X$. • $N_x = \{\mathcal{U} \subset X \,/\, x \in \mathcal{U}\}$

8 OCT 2021

$\subset$ trivial

$\supset$ Si $\mathcal{U} \subset X$ y $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in T_D$ y $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in N_x$

• $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x — $\mathcal{B}_x \subset N_x$; Si $V \in N_x \Rightarrow x \in V \Rightarrow \underbrace{\{x\}}_{B} \subset V$

menor base de entornos posible

Ejemplo 2: (X, T_d) EM, T_d = top. asociada a una distancia. $x \in X$

$T_d = \{\mathcal{U} \subset X \,/\, \forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0$ con $B(x,r) \subset \mathcal{U}\} \cup \{\emptyset\}$

$\mathcal{B}_x = \{B(x,r) \,/\, r > 0\}$ es base de entornos de x

Sea $V \in N_x \Rightarrow \exists \mathcal{U} \in T_d \,/\, x \in \mathcal{U} \subset V \overset{\mathcal{U} \in T_d}{\Rightarrow} \exists r > 0 \,/\, \underbrace{B(x,r)}_{\in \mathcal{B}_x} \subset \mathcal{U} \subset V$

Ejemplo 3: Las bolas cerradas $\bar{B}(x,r)$, $r > 0$, son entornos de x por contener a $B(x,r)$.

OJO! Sólo lo tienen que ser del centro, no se verifica de cualquier otro $y \in \bar{B}(x,r)$

Sea $\bar{\mathcal{B}}_x = \{\bar{B}(x,r) \,/\, r > 0\}$ → ¿Es $\bar{\mathcal{B}}_x$ base de entornos de x? Sí :)

→ Sea $V \in N_x \Rightarrow \exists \mathcal{U} \in T_d \,/\, x \in \mathcal{U} \subset V \overset{\mathcal{U} \in T_d}{\Rightarrow} \exists r > 0 \,/\, B(x,r) \subset \mathcal{U} \subset V$

$\cup$

$\bar{B}(x, r/2) \in \bar{\mathcal{B}}_x$

Ejemplo 4: Sea $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de radios (número real positivo) que convergen a 0.
convergencia a 0 ⇒
$(\forall\varepsilon>0, \exists i_0\in\mathbb{N} \,/\, 0<r_i<\varepsilon \ \ \forall i\geq i_0)$. $\mathcal{B}(\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \{B(x,r_i) \,/\, i\in\mathbb{N}\}$ es base de entornos de x.

tomamos $r=\varepsilon$ Sea $V\in N_x \Rightarrow \exists U\in T_d \,/\, x\in U\subset V \Rightarrow \exists r>0 \,/\, B(x,r)\subset U\subset V \Rightarrow \exists i_0\in\mathbb{N} \,/\, r_{i_0}<r \Rightarrow B(x,r_{i_0})\subset B(x,r)\subset U\subset V$.

Podemos escoger cualquier sucesión convergente a cero. A menudo, se escoge $x_n = 1/n$, pero es válida cualquier otra

VENTAJA: La sucesión es numerable. Trabajar con una base de entornos numerable puede resultarnos muy útil.

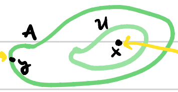
LEMA 2: Sea (X,T) un ET, $x\in X$

1. $x\in V \quad \forall V\in N_x$
2. Si $V_1, V_2\in N_x \Rightarrow V_1\cap V_2\in N_x$
3. Si $V\in N_x$ y $V\subset W \Rightarrow W\in N_x$
4. Si $V\in N_x$, $\exists U\in N_x$ tal que $U\subset V$ y $U\in N_y \ \forall y\in U$. (por 3. $V\in N_y \ \forall y\in U$)

Demostración:

1. Ya probado (definición)
2. Si $V_1, V_2\in N_x \Rightarrow \exists U_1, U_2\in T \,/\, x\in U_1\subset V_1,\ x\in U_2\subset V_2 \Rightarrow x\in \underbrace{U_1\cap U_2}^{\in T}\subset V_1\cap V_2 \Rightarrow V_1\cap V_2\in N_x$
3. Si $V\in N_x \Rightarrow \exists U\in T \,/\, x\in \overset{\in T}{U}\subset V\subset W$
4. Si $V\in N_x$, $\exists W\in T \,/\, x\in W\subset V$. Tomamos $U=W$. Ya sabemos que $U\in N_y \ \forall y\in U$ (por ser $U\in T$).
   U es entorno de cada uno de sus puntos por ser abierto.

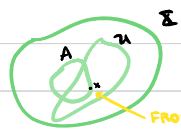
DEFINICIÓN 13: Sea (X,T) un ET, $A\subset X$, $A\neq\emptyset$. Diremos que x es un PUNTO INTERIOR de A si existe $U\in N_x$ tal que $U\subset A$.



DEFINICIÓN 14: Sea (X,T) un ET, $A\subset X$, $A\neq\emptyset$. Diremos que x es un PUNTO ADHERENTE de A si $\forall U\in N_x$, se tiene que $U\cap A\neq\emptyset$ (un interior es adherente)

DEFINICIÓN 15: Sea (X,T) un ET, $x\in X$. Diremos que x es un PUNTO FRONTERA de A si $\forall U\in N_x$, se tiene que $U\cap A\neq\emptyset$ y $U\cap A^c\neq\emptyset$.

→ Todo punto frontera es adherente
→ dos puntos interiores no son puntos frontera



13 OCT 2021

DEFINICIÓN 16: Sea (X,T) un ET, $x\in X$. Diremos que x es un PUNTO DE ACUMULACIÓN de A si $\forall U\in N_x$, se tiene que $(U\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$

→ $A=\{x\} \Rightarrow x$ es pto adherente de A
$\Rightarrow x$ no es pto de acumulación de A

Creo que en T_0 no hay puntos de acumulación

DEFINICIÓN 17: Sea (X,T) un ET, $x\in X$. Diremos que x es un PUNTO AISLADO de A si $\exists U\in N_x$ tal que $U\cap A=\{x\}$

NOTACIÓN:

$A \subset X$. Denotamos por:

- $\text{int}(A)$ ó $\mathring{A}$: $\{$puntos interiores de $A\}$ = interior de A
- $\text{cl}(A)$ ó $\overline{A}$: $\{$puntos adherentes de $A\}$ = clausura o adherencia de A
- $\text{fr}(A)$ ó ∂A : $\{$puntos frontera de $A\}$ = frontera de A
- A' : $\{$puntos de acumulación de $A\}$ = conjunto de ptos de acumulación de A
- $\text{ais}(A)$: $\{$puntos aislados de $A\}$ = conjunto de ptos aislados de A.
- $\text{ext}(A)$: $\{$puntos exteriores de $A\}$ = conjunto de ptos exteriores de A.

DEFINICIÓN 18: Sea (X, T) un ET, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Diremos que x es un PUNTO EXTERIOR de A si x es punto interior de A^c, es decir, $\exists \mathcal{U} \in N_x / \mathcal{U} \subset A^c$. $\text{ext}(A) = \text{int}(A^c)$

PROPIEDAD 8: $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

Demostración:

$\mathring{A} \subset A$ | Sea $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists \mathcal{U} \in N_x / x \in \mathcal{U} \subset A \Rightarrow x \in A$

$A \subset \overline{A}$ | Sea $x \in A \Rightarrow \forall \mathcal{U} \in N_x$, $\mathcal{U} \cap A \supset \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$??

$x \in \mathcal{U}$ $(\mathcal{U} \in N_x)$
$x \in A$ hipótesis

PROPIEDAD 9: $\mathring{A} \in T$. Además, si $\mathcal{U} \in T$ y $\mathcal{U} \subset A$, entonces $\mathcal{U} \subset \mathring{A}$. ($\mathring{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A)

Demostración:

$\mathring{A} \in T$ | • Si $\mathring{A} = \emptyset \Rightarrow \mathring{A} \in T$

• Si $\mathring{A} \neq \emptyset \Rightarrow$ tomo $x \in \mathring{A}$, por definición $\exists \mathcal{U} \in N_x / \mathcal{U} \subset A \xRightarrow{\text{prop 4 entornos}} \exists V \in N_x / \mathcal{U} \in N_y \; \forall y \in V \Rightarrow$ $V \subset \mathcal{U}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mathcal{U} \in N_y \; \forall y \in V \\ \mathcal{U} \subset A \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{def}} y \in \mathring{A} \; \forall y \in V \Rightarrow \underset{x \in}{V} \subset \mathring{A} \Rightarrow \exists W_x \in T / x \in W_x \subset V \subset \mathring{A} \Rightarrow \mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} W_x \in T$ ($V \in N_x$)

$\mathcal{U} \in T, \mathcal{U} \subset A \Rightarrow \mathcal{U} \subset \mathring{A}$ | Sea $\mathcal{U} \in T / \mathcal{U} \subset A \Rightarrow$ si $x \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{U} \in N_x \Rightarrow x \in \mathring{A} \Rightarrow \mathcal{U} \subset \mathring{A}$

$\mathcal{U} \in T$; $x \in \underset{N_x}{\mathcal{U}} \subset A$

PROPIEDAD 10: $\overline{A} \in C_T = \{$conjuntos cerrados en $(X, T)\}$. Además, si $F \in C_T$ y $A \subset F$, entonces $\overline{A} \subset F$ (la clausura de A es el menor conjunto cerrado que contiene a A)

Demostración: $\neg(\forall \mathcal{U} \in N_x / \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset)$

$\overline{A} \in C_T$ | $\Leftrightarrow X \setminus \overline{A} \in T$. Veamos que $\overline{A}^c$ es abierto. Sea $x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists \mathcal{U} \in N_x / \mathcal{U} \cap A = \emptyset$ $\Leftrightarrow \mathcal{U} \subset X \setminus A \Leftrightarrow x \in \text{int}(X \setminus A) \Rightarrow X \setminus \overline{A} = \text{int}(X \setminus A) \Rightarrow X \setminus \overline{A} \in T \Rightarrow \overline{A} \in C_T$

$\mathring{A}$ mayor abierto que contiene a A

$F \in C_T, A \subset F \Rightarrow \overline{A} \subset F$ | $A \subset F \xRightarrow{\text{complementario}} X \setminus A \supset X \setminus F \in T \Rightarrow \underset{X \setminus \overline{A}}{\underset{\shortparallel}{\text{int}(X \setminus A)}} \supset X \setminus F \xRightarrow{\text{complementario}} \overline{A} \subset F$ 14 OCT 2021

COROLARIO 2: 1. $A \in T \Leftrightarrow A = \mathring{A}$

2. $A \in C_T \Leftrightarrow A = \overline{A}$

Demostración:

1 ⇐| Si $A=\mathring{A}$, como $\mathring{A}\in T \Rightarrow A\in T$

⇒| $A\in T$. Siempre $\mathring{A}\subset A$. Además, $\mathring{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A. $A\in T$, $A\subset A \Rightarrow A\subset \mathring{A} \Rightarrow$ doble inclusión y $A=\mathring{A}$

2. ⇐| Si $A=\bar{A}$, como $\bar{A}\in C_T \Rightarrow A\in C_T$

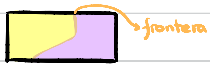
⇒| $A\in C_T$. Siempre $A\subset\bar{A}$. Además, $\bar{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A. $A\in C_T$, $A\subset A\Rightarrow \bar{A}\subset A \Rightarrow$ doble inclusión y $A=\bar{A}$.

NOTA: La igualdad $X\setminus\bar{A} = \operatorname{int}(X\setminus A)$ podemos reescribirla como $X\setminus \bar{A} = ext(A)$

$\Rightarrow \{\underset{C_T}{\underset{\cap}{\bar{A}}}, \underset{T}{\underset{\cap}{ext(A)}}\}$ es una partición de X $(\bar{A})^c = ext(A)$

PROPIEDAD 11: 1. $\bar{A} = \mathring{A}\cup \overset{Fr(A)}{\partial A}$, $\mathring{A}\cap\partial A=\emptyset$ cierre = interior + frontera

2. $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X\setminus A}$. En particular, ∂A es cerrado.



3. $\{\underset{T}{\underset{\cap}{\mathring{A}}}, \underset{C_T}{\underset{\cap}{\partial A}}, \underset{T}{\underset{\cap}{ext(A)}}\}$ es una partición de X

Demostración:

1. $\bar{A}=\mathring{A}\cup\partial A$| • $\mathring{A}\subset A\subset \bar{A}$

• $\partial A\subset\bar{A}$: $x\in\partial A\Rightarrow \forall U\in N_x, U\cap A\neq\emptyset$ (y $U\cap A^c\neq\emptyset$) $\Rightarrow x\in\bar{A}$ } $\mathring{A}\cup\partial A\subset \bar{A}$

me interesa eso

• Sea $x\in\bar{A} \Rightarrow \forall U\in N_x, U\cap A\neq\emptyset$. Si además $U\cap A^c\neq\emptyset$ $\forall U\in N_x \Rightarrow x\in\partial A$

• Si la condición anterior no se verifica, entonces $\exists U\in N_x : U\cap A^c=\emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow U\subset (A^c)^c \Rightarrow U\subset A\Rightarrow x\in\mathring{A}$.

De cualquiera de las maneras, $x\in\bar{A}\Rightarrow x\in\partial A$ ó $x\in\mathring{A} \Rightarrow \bar{A}\subset\mathring{A}\cup\partial A$

Por doble inclusión, queda probado que $\bar{A}=\mathring{A}\cup\partial A$

$A\cap B^c=\emptyset \Leftrightarrow A\subset B$

$\mathring{A}\cap\partial A=\emptyset$| Si $x\in\partial A\Rightarrow\forall U\in N_x, U\cap A^c\neq\emptyset \Leftrightarrow U\not\subset A \Rightarrow x\notin\mathring{A}\Rightarrow \partial A\subset(\mathring{A})^c\Rightarrow \partial A\cap\mathring{A}=\emptyset$

2. $\partial A=\bar{A}\cap\overline{X\setminus A}$| $x\in\partial A \Leftrightarrow \forall U\in N_x \left\langle \begin{array}{ll} U\cap A\neq\emptyset & \Leftrightarrow x\in\bar{A} \\ U\cap(X\setminus A)\neq\emptyset & \Leftrightarrow x\in \overline{X\setminus A} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x\in\bar{A}\cap(\overline{X\setminus A})$

3. $\{\mathring{A},\partial A, ext(A)\}$ partición de X| Se sigue de que $\{\bar{A}, \overset{(\bar{A})^c}{ext(A)}\}$ es una partición de X y $\{\mathring{A},\partial A\}$ es una partición de $\bar{A}$.

Ejemplo 1: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $d(x,y)=\|x-y\|$

$\overline{B(x,r)}$ = clausura de la bola abierta
$\bar{B}(x,r)$ = bola cerrada   } $\operatorname{int}(\bar{B}(x,r)) = B(x,r)$

Para que esta propiedad se cumpla, la distancia debe proceder de una norma. Veámoslo con la distancia discreta, que sabemos no procede de una norma:

Ejemplo 2: (X,d) $d=$dist discreta $\#X\geq 2$

$x\in X$ $\quad B(x,1)=\{x\}$ $\quad \bar{B}(x,1)=X$

en cualquier EM

$\overline{B(x,1)}$ = menor conjunto cerrado que contiene a $B(x,1) \Rightarrow \overline{B(x,1)}\subset \bar{B}(x,1)$

Como T_d es la topología discreta, $\{x\}\in C_{T_d} \Rightarrow \overline{\{x\}}=\{x\} \Rightarrow \overline{B(x,1)}=\{x\}$

Pero $\bar{B}(x,1)=X\neq\{x\}=\overline{B(x,1)}$ porque $\#X>1 \Rightarrow \overline{B(x,1)}\subsetneq \bar{B}(x,1)$

Recordemos que en (X,d), todos los conjuntos son abiertos y, por tanto, todos los conjuntos son cerrados.

Si (X,d) es EM y $x\in X$, $r>0$, entonces $\operatorname{int}(\bar{B}(x,r))$ es el mayor conjunto abierto contenido en $\bar{B}$. Pero $B(x,r)\overset{ET}{\subset}\bar{B}(x,r) \Rightarrow B(x,r)\subset \operatorname{int}(\bar{B}(x,r))$ → en cualquier EM

Si $d=$dist discreta en X y $\#X\geq 2$, $B(x,1)=\{x\}$

$\bar{B}(x,1)=X \Rightarrow \operatorname{int}(\bar{B}(x,1))=\bar{B}(x,1)=X$

Finalmente, $\{x\}=B(x,1)\subsetneq \operatorname{int}(\bar{B}(x,1))=X$

NOTA: Para probar que $\overline{B(x,r)}=\bar{B}(x,r)$ en un espacio normado, la idea es:

$y\in\bar{B}(x,r)$ → • $d(x,y)<r \Rightarrow y\in B(x,r)\subset\overline{B(x,r)}$

• $d(x,y)=r \Rightarrow x+\lambda(y-x)$ Si $s>0$ tomamos λ porque $\|x+\lambda(y-x)-x\|<r \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,x_\lambda)<r \Rightarrow x_\lambda\in B(x,r)$

• $\|x+\lambda(y-x)-x\|<r \Rightarrow d(x,x_\lambda)<r \Rightarrow x_\lambda\in B(x,r)$

• $\|x+\lambda(y-x)-y\|<r \Rightarrow d(y,x_\lambda)<r \Rightarrow x_\lambda\in B(y,s)$

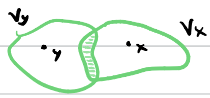
$\Rightarrow B(x,r)\cap B(y,s)\neq\emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow y\in\overline{B(x,r)}$ $s>0$ arbitrario

15 OCT 2021

AXIOMAS DE SEPARACIÓN Y NUMERALIDAD

DEFINICIÓN 18: Diremos que un ET (X,T) es T_1 si $\forall x,y\in X$, $x\neq y$, $\exists V_x\in N_x, V_y\in N_y$ tales que $x\notin V_y$, $y\notin V_x$



NOTA: (X,T) es $T_1 \Leftrightarrow$ Todo punto de X es cerrado.

Demostración:

$\Rightarrow]$ Supongamos (X,T) T_1. Fijamos $x\in X$, y veamos que $\{x\}$ es cerrado probando que $X\setminus\{x\}$ es abierto. Para ello, demostraremos que $\operatorname{int}(X\setminus\{x\})=X\setminus\{x\}$. Ya sabemos que $\operatorname{int}(X\setminus\{x\})\subset X\setminus\{x\}$.

Ahora, sea $y\in X\setminus\{x\} \Rightarrow y\neq x$. Como (X,T) es T_1, $\exists V_x\in N_x, V_y\in N_y$ tales que $x\notin V_y$, $y\notin V_x$.

$\underset{\text{arbitrario}}{y}\in\operatorname{int}(X\setminus\{x\}) \Leftarrow V_y\subset X\setminus\{x\} \Leftarrow \{x\}\cap V_y=\emptyset$

Acabamos de probar que $X\setminus\{x\}\subset\operatorname{int}(X\setminus\{x\}) \Rightarrow X\setminus\{x\}=\operatorname{int}(X\setminus\{x\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow X\setminus\{x\}\in T \Rightarrow \{x\}\in C_T$ $\forall x\in X$

$\Leftarrow]$ Supongamos que todo punto de X es cerrado. Veamos que (X,T) es T_1. Para ello, tomamos $x,y\in X$, $x\neq y$. Por hipótesis, $\{x\}$ es cerrado $\Rightarrow X\setminus\{x\}\in T$. Como $y\neq x$, $y\in X\setminus\{x\}$. Como $X\setminus\{x\}$ es abierto, coincide con su interior $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists V_y\in N_y$ tal que $y\in V_y\subset X\setminus\{x\} \Rightarrow x\notin V_y$.

Análogamente, $\{y\}\in C_T$. Seguimos el mismo razonamiento para ver que $\exists V_x\in N_x \,/\, V_x\subset X\setminus\{y\} \Rightarrow y\notin V_x$.

DEFINICIÓN 19: (X, T) ET es T_2 (o HAUSDORFF) si $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists V_x \in N_x, V_y \in N_y$ tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

NOTA: Estos entornos verifican que $x \notin V_y$, $y \notin V_x$

Consecuencias:

1. Todo espacio T_2 es T_1
2. En un espacio T_2, todo punto es cerrado (por ser T_1) el recíproco no es cierto

Ejemplo 1: $(\mathbb{N}, T_{CF})$ es T_1 pero no T_2

Ya hemos visto en clase que $(\mathbb{N}, T_{CF})$ no es T_2.

Sin embargo, $(\mathbb{N}, T_{CF})$ es T_1 porque todo punto es cerrado (ya que cualquier conjunto finito es cerrado)

NOTA: Existen las propiedades T_3 y T_4, pero no los vamos a ver porque su aplicación es a alto nivel.

DEFINICIÓN 20: Diremos que (X, T) ET verifica el PRIMER AXIOMA DE NUMERABILIDAD, o que es AN-I, si cada punto de X admite una base de entorno numerable.

DEFINICIÓN 21: Diremos que (X, T) ET verifica el SEGUNDO AXIOMA DE NUMERABILIDAD, o que es AN-II, si T admite una base numerable.

Ejemplo 1: sea (X, T_D) ET discreto.

- $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ base de entornos $\Rightarrow (X, T_D)$ es AN-I
- Si X es no numerable, entonces (X, T_D) no es AN-II.

Sea $\mathcal{B}$ una base de T. Si $x \in X$, $\{x\} \in T_D \Rightarrow \{x\} = \bigcup_{i \in I} B_i$, $B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists B_{i_0} \,/\, x \in B_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} B_i = \{x\} \Rightarrow \{x\} \subset B_{i_0} \Rightarrow \{x\} = B_{i_0} \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{B}$.

Como x es arbitrario, $\underbrace{\{\{x\} / x \in X\}}_{\substack{\text{NO NUMERABLE} \\ \text{SI } X \text{ NO NUM}}} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ no numerable (cualquiera de las posibles bases)

LEMA 3: Sea (X, T) un ET. Si $\mathcal{B}$ es una base de T, entonces

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} \,/\, x \in B\}$$

es base de entornos abiertos de x para todo $x \in X$.

Demostración:

1. $\mathcal{B}(x) \subset N_x$ (los elementos de $\mathcal{B}(x)$ son conjuntos abiertos que contienen a x)
2. Sea $U \in N_x \Rightarrow \exists A \in T \,/\, x \in A \subset U$. Como $A \in T \Rightarrow \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B} \,/\, A = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists i_0 \in I \,/\, x \in \overset{\in \mathcal{B}}{B_{i_0}} \subset A \subset U \Rightarrow B_{i_0} \in \mathcal{B}(x)$ y $B_{i_0} \subset U$

■

AN-I $\not\Rightarrow$ AN-II   AN-II $\Rightarrow$ AN-I

lema 3

COROLARIO 3: Si $(X,\mathcal{T})$ es AN-II, entonces es AN-I.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ base numerable de $\mathcal{T}$, $x \in X \Rightarrow \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}$. Por tanto, $\mathcal{B}(x)$ es numerable. ∎

Ejemplo 1: Sea (X,d) un EM.

Ya hemos probado que $\mathcal{B}_x(\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \{B(x,r_i) / i \in \mathbb{N}\}$ es b.e. de $x \in X$
$r_i \to 0$

Tomamos $\mathcal{B}_x = \{B(x,1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ base numerable de x. $\Rightarrow$ Todo métrico es AN-I.

Ejemplo 2: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es AN-II
→ topología usual

Tomamos $\mathcal{B} = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{Q}\}$, base numerable.

Veamos que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}_u$. Sean $A \in \mathcal{T}_u$ y $x \in A \Rightarrow \exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (m_1,m_2) \subset A \Rightarrow m_1 < x < m_2$. Existen $a_x, b_x \in \mathbb{Q}$ (densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) tales que $m_1 < a_x < x < b_x < m_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (a_x,b_x) \subset (m_1,m_2) \subset A \Rightarrow A = \bigcup_{x\in A} (a_x,b_x) \Rightarrow A$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Como conclusión, $\mathcal{B}$ es base numerable de $\mathcal{T}_u$.

∎ FIN DEL TEMA 1.

EJERCICIO 5: Sea (X,d) un EM. Sea $r_0 > 0$. Definimos $\mathcal{B}_{r_0} = \{B(x,r) / x \in X, 0 < r < r_0\}$
$\mathcal{B}_{r_0}$ es base de $\mathcal{T}_d$ $\forall r_0 > 0$

(X,d) EM, $r_0 > 0$ $\mathcal{B}_{r_0} = \{B(x,r) / x \in X, 0 < r < r_0\}$

Sabemos que $\mathcal{T}_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists r > 0$ con $B(x,r) \subset U\} \cup \{\emptyset\}$

$B_d(x,r) \in \mathcal{T}_d$ para cualquier distancia (las bolas abiertas son conjuntos abiertos). Luego $\mathcal{B}_{r_0} \subset \mathcal{T}_d$.

Ahora hay que probar que, para $U \in \mathcal{T}_d$ fijo pero arbitrario $\exists \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}_{r_0} : U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Lo hacemos por doble inclusión.

Como $U \in \mathcal{T}_d$, sabemos que $\bigcup_{x\in U} B_x \subset U$ siendo $B_x = B(x,r)$ la bola que verifica la condición de abierto para todo $x \in U$. Como $B_x \subset U$ $\forall x \in U$, se verifica $\bigcup_{x\in U} B_x \subset U$. Ahora, supongamos que $r \geq r_0$. Entonces, $\forall r' < r_0$, $r' > 0$, $B'_x = B(x,r') \subset B(x,r)$. Luego se verifica que $\bigcup_{x\in U} B'_x \subset \bigcup_{x\in U} B_x \subset U$ (si $r < r_0$, tomamos $B'_x = B_x$). Luego queda probada la primera inclusión.

Ahora, queremos $U \subset \bigcup_{x\in U} B_x$. Para ello, expresamos U como la unión de todos sus puntos. Así, $U = \bigcup_{x\in U} \{x\}$. Pero $\{x\} \subset B(x,r)$ $\forall x \in U$, $\forall r > 0$, luego tomamos $r < r_0$ y tenemos: $U = \bigcup_{x\in U} \{x\} \subset \bigcup_{x\in U} B(x,r)$.
De este modo, queda probada la igualdad y que $\mathcal{B}_{r_0}$ es base. ∎

QUÉ PUEDE ENTRAR EN EL EXAMEN

- Pág 8, T^{ma} 1