Objetivos de aprendizaje Tema 10
Análisis Matemático I

Javier Gómez López

11 de marzo de 2022

1. Conocer y comprender el enunciado de los siguientes resultados:

a) Teorema del valor medio escalar

Teorema 1. *Sea Ω un abierto de un espacio normado X, $a, b \in \Omega$ tales que $[a, b] \subset \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, y diferenciable en $]a, b[$. Entonces, existe $c \in]a, b[$ tal que*

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a) \tag{1}$$

Como consecuencia, si $M \in \mathbb{R}_0^+$ verifica que $||Df(x)|| \leq M$ para todo $x \in]a, b[$, se tendrá:

$$|f(b) - f(a)| \leq M||b - a|| \tag{2}$$

b) Corolarios de la desigualdad del valor medio

Corolario 1. *Sean X e Y espacios normados, Ω un abierto convexo de X y $f : \Omega \to Y$ una función diferenciable. Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ verificando que $||Df(x)|| \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Entonces f es lipschitziana con constante M, es decir:*

$$||f(b) - f(a)|| \leq M||b - a|| \qquad \forall a, b \in \Omega$$

Corolario 2. *Sean X e Y espacios normados, Ω un subconjunto abierto y conexo de X y $f : \Omega \to Y$ una función diferenciable tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Entonces f es constante.*

2. Conocer y comprender la versión general de la desigualdad del valor medio, incluyendo su demostración, así como la del lema previo.

Lema. *Sea Y un espacio normado y sean $g : [0, 1] \to Y$ y $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[0, 1]$ y derivables en $]0, 1[$, verificando que*

$$||g'(t)|| \leq \alpha'(t) \qquad \forall t \in]0, 1[\tag{3}$$

Se tiene entonces la siguientes desigualdad:

$$||g(1) - g(0)|| \leq \alpha(1) - \alpha(0) \tag{4}$$

Demostración. Fijado $\varepsilon > 0$, consideremos el conjunto

$$\Lambda = \{t \in [0,1] : ||g(t) - g(0)|| \leq \alpha(t) - \alpha(0) + \varepsilon t + \varepsilon\}$$

y a poco que se piense, la demostración estará casi concluida si probamos que $1 \in \Lambda$.

Por ser g y α continuas, la función $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ defindia por

$$\varphi(t) = ||g(t) - g(0)|| - (\alpha(t) - \alpha(0)) - \varepsilon t \qquad \forall t \in [0,1]$$

también es continua, de lo que deduciremos dos consecuencias:

En primer lugar, como $\varphi(0) = 0$, la continuidad de φ en 0 nos permite encontrar $\eta \in]0,1[$ tal que, para $t \in [0,\eta]$, se tenga $\varphi(t) < \varepsilon$, con lo que $[0,\eta] \subset \Lambda$.

Por otra parte, como $\Lambda = \{t \in [0,1] : \varphi(t) \leq \varepsilon\}$, la continuidad de φ nos dice que Λ es un subconjunto cerrado de $[0,1]$, luego es compacto, y en particular tiene máximo. Sea pues $t_0 = \max\Lambda$ y anotemos que $t_0 \geq \eta > 0$. Nuestro objetivo es probar que $t_0 = 1$, así que supondremos que $t_0 < 1$ para llegar a una contradcción.

Al ser $0 < t_0 < 1$, tenemos que g y α son derivables en t_0, luego existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in [0,1]$ con $|t - t_0| \leq \delta$, se tiene

$$||g(t) - g(t_0) - g'(t_0)(t - t_0)|| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}|t - t_0| \qquad \text{y también}$$

$$|\alpha(t) - \alpha(t_0) - \alpha'(t_0)(t - t_0)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}|t - t_0|$$

Obviamente, podemos suponer que $t_0 + \delta < 1$, para tomar $t = t_0 + \delta$ y obtener

$$\begin{aligned} &||g(t_0 + \delta) - g(t_0) - \delta g'(t_0)|| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\delta \qquad \text{así como} \\ &|\alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0) - \delta\alpha'(t_0) \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\delta \end{aligned} \tag{5}$$

Llegaremos a una contradicción viendo que $t_0 + \delta \in \Lambda$. Para ello, usando la primera desigualdad de (5), la hipótesis (3) con $t = t_0$, y el hecho de que $t_0 \in \Lambda$, tenemos:

$$\begin{aligned} ||g(t_0 + \delta) - g(0)|| &\leq ||g(t_0 + \delta) - g(t_0) - \delta g'(t_0)|| + \delta||g'(t_0)|| + ||g(t_0) - g(0)|| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2}\delta + \delta\alpha'(t_0) + \alpha(t_0) - \alpha(0) + \varepsilon t_0 + \varepsilon \end{aligned} \tag{6}$$

Por otra parte, usando la segunda desigualdad de (5) tenemos también

$$\begin{aligned} \delta\alpha'(t_0) + \alpha(t_0) &= \alpha(t_0 + \delta) - (\alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0) - \delta\alpha'(t_0)) \\ &\leq \alpha(t_0 + \delta) + \tfrac{\varepsilon}{2}\delta \end{aligned} \tag{7}$$

De (6) y (7) deducimos claramente que

$$||g(t_0+\delta)-g(0)|| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\delta + \alpha(t_0+\delta) + \tfrac{\varepsilon}{2}\delta - \alpha(0) + \varepsilon t_0 + \varepsilon$$

$$= \alpha(t_0+\delta) - \alpha(0) + \varepsilon(t_0+\delta) + \varepsilon$$

es decir, que $t_0+\delta \in \Lambda$. Esto es una clara contradicción, ya que $t_0+\delta > t_0 = \text{máx}\Lambda$.

Así pues hemos comprobado que $t_0 = 1$ y en particular $1 \in \Lambda$, es decir

$$||g(1)-g(0)|| \leq \alpha(1) + \alpha(0) + 2\varepsilon$$

Como esto es válido para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tenemos (4), como queríamos. ■

Teorema (Desigualdad del valor medio)**.** *Sean X e Y espacios normados, Ω abierto de X, $a,b \in X$ tales que $[a,b] \subset \Omega$ y $f : \Omega \to Y$ una función. Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, y que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $||Df(x)|| \leq M$ para todo $x \in]a.b[$. Se tiene entonces:*

$$||f(b)-f(a)|| \leq M||b-a||$$

Demostración. Basta aplicar el lema anterior a las funciones $g_[0,1] \to Y$ y $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas, para todo $t \in [0,1]$, por

$$g(t) = f((1-t)a+tb) \qquad \text{y} \qquad \alpha(t) = M||b-a||t$$

Es claro que g y α son continuas en $[0,1]$ y derivables en $]0,1[$ con

$$\begin{aligned} ||g'(t)|| &= ||Df((1-t)a+tb)(b-a)|| \\ &\leq ||Df((1-t)a+tb)||||b-a|| \leq M||b-a|| = \alpha'(t) \qquad \forall t \in]0,1[\end{aligned}$$

Aplicando pues el lema anterior, obtenemos la desigualdad buscada:

$$||f(b)-f(a)|| = ||g(1)-g(0)|| \leq \alpha(1) - \alpha(0) = M||b-a||$$

■