Algunos resultados de Topología I

Rafael López
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Índice general

Capítulo 1

Espacios topológicos

1.1 Definición, bases de topología y de entornos

Definición 1.1.1 *Un espacio topológico es un par (X, τ), donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. *Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a τ.*
2. *Si $\{O_i; i \in I\} \subset \tau$, entonces $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.*
3. *Si $O_1, O_2 \in \tau$, entonces $O_1 \cap O_2 \in \tau$.*

A τ se llama la topología de (X, τ). Los elementos de τ se llaman conjuntos abiertos de (X, τ) o simplemente abiertos.

Definición 1.1.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $F \subset X$. Se dice que F es un conjunto cerrado si $X - F \in \tau$. Se denota por $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los cerrados de un espacio topológico.*

Proposición 1.1.3

1. *Los conjuntos $\emptyset$ y X son cerrados.*
2. *Si $\{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$.*
3. *Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.*

Teorema 1.1.4 *Sea un conjunto X y $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{C}$.*

2. *Si $\{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{C}$, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}$.*

3. *Si $F_1,\ F_2 \in \mathcal{C}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$.*

Entonces existe una única topología τ en X de forma que $\mathcal{F} = \mathcal{C}$.

Definición 1.1.5 *Sea X un conjunto y τ_1 y τ_2 dos topologías en X. Se dice que τ_1 es más fina que τ_2 si $\tau_1 \supset \tau_2$. Se dirá también que τ_2 es menos fina que τ_1.*

Definición 1.1.6 *Una base de la topología (o base de abiertos) de (X,τ) es un subconjunto $\beta \subset \tau$ tal que todo conjunto abierto es unión de elementos de β: para cada $O \in \tau$ existe un conjunto de índices I, tal que*

$$O = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} B_i, \quad B_i \in \beta.$$

La definición es equivalente a la siguiente

Definición 1.1.7 *Una familia β de subconjuntos de X es base si*

1. *$\beta \subset \tau$.*

2. *Para cada abierto O y para cada $x \in O$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset O$.*

Proposición 1.1.8 *Sea β una base de un espacio (X,τ). Entonces*

1. *Sea $A \subset (X,\tau)$. Entonces $A \in \tau$ sii para cada $x \in A$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset A$.*

2. *Si β es una base y $O \in \tau$, entonces $\beta' = \{B; B \in \beta\} \cup \{O\}$ es una base de τ.*

3. *$X = \bigcup_{B\in\beta} B$.*

4. *Si $B_1,\ B_2 \in \beta$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Teorema 1.1.9 *Se considera un conjunto X y una familia β de subconjuntos de X que satisface las dos siguientes propiedades:*

1. *$X = \bigcup_{B\in\beta} B$.*

2. *Si* $B_1,\ B_2 \in \beta$ *y* $x \in B_1 \cap B_2$, *entonces existe* $B_3 \in \beta$ *tal que* $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces existe una única topología τ *que tiene como base a* β. *Se dirá que la topología* τ *está generada por* β *y se escribirá* $\tau(\beta)$.

Proposición 1.1.10 *Sea un conjunto* X *con dos topologías* τ *y* τ'. *Supongamos que* β *es base de* τ *tal que* $\beta \subset \tau'$. *Entonces* $\tau \subset \tau'$.

Definición 1.1.11 *Sean dos bases* $\beta_1,\ \beta_2$ *para topologías* τ_1 *y* τ_2 *respectivamente. Se dice que las bases* β_1 *y* β_2 *son equivalentes si* $\tau_1 = \tau_2$.

Teorema 1.1.12 (Criterio de Hausdorff) *Dadas dos bases* β_1 *y* β_2 *para sendas topologías* τ_1 *y* τ_2 *en un conjunto* X, *son equivalentes los dos siguientes enunciados:*

1. $\tau_1 = \tau_2$.
2.
   - *Para todo* $B_1 \in \beta_1$, $x \in B_1$ *existe* $B_2 \in \beta_2$ *tal que* $x \in B_2 \subset B_1$. $(\Rightarrow \tau_1 \subset \tau_2)$.
   - *Para todo* $B_2 \in \beta_2$ *y* $x \in B_2$ *existe* $B_1 \in \beta_1$ *tal que* $x \in B_1 \subset B_2$. $(\Rightarrow \tau_2 \subset \tau_1)$.

Definición 1.1.13 *Una familia de subconjuntos* $\mathcal{S}$ *de* X *se dice que es una subbase de* τ *si*

$$\beta(\mathcal{S}) = \{\text{intersecciones finitas de elementos de } \mathcal{S}\}$$

es una base de τ.

Proposición 1.1.14 *Sea un conjunto* X *y una familia de subconjuntos* $\mathcal{S}$ *de* X. *Entonces* $\mathcal{S}$ *es una subbase para una cierta topología* τ.

Definición 1.1.15 *Sea un espacio topológico* (X, τ) *y* $x \in X$. *Un conjunto* $U \subset X$ *se llama entorno de* x *si existe* $O \in \tau$ *tal que* $x \in O \subset U$. *Al conjunto de todos los entornos de* x *se llama sistema de entornos y se denota por* $\mathcal{U}_x$.

Proposición 1.1.16 *Sea un espacio topológico* (X, τ) *y* $A \subset X$. *Entonces* A *es un conjunto abierto si y sólamente si* A *es entorno de todos sus puntos.*

Proposición 1.1.17 1. *Si* $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$, *entonces* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$.

2. *Si* $U \in \mathcal{U}_x$ *y* $V \supset U$*, entonces* $V \in \mathcal{U}_x$.

3. *Sea* $U \in \mathcal{U}_x$. *Existe* $W \in \mathcal{U}_x$ *tal que* $U \in \mathcal{U}_y$ *para todo* $y \in W$.

Teorema 1.1.18 *Sea* X *un conjunto y para cada* $x \in X$ *se tiene asignada una familia* $\mathcal{V}_x$ *de subconjuntos de* X *con las siguientes propiedades:*

1. $x \in V$ *para cada* $V \in \mathcal{V}_x$.

2. *Si* $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$*, entonces* $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

3. *Si* $U \in \mathcal{V}_x$ *y* $V \supset U$*, entonces* $V \in \mathcal{V}_x$.

4. *Para cada* $U \in \mathcal{V}_x$*, existe* $W \in \mathcal{V}_x$ *tal que* $U \in \mathcal{V}_y$ $\forall y \in W$.

Entonces existe una única topología en X *cuyo sistema de entornos* $\mathcal{U}_x$ *coincide con* $\mathcal{V}_x$.

Definición 1.1.19 *Sea un espacio topológico* (X, τ). *Un subconjunto* β_x *de* $\mathcal{U}_x$ *es base de entornos de* x *si para cada* $U \in \mathcal{U}_x$ *existe* $V \in \beta_x$ *tal que* $V \subset U$.

Proposición 1.1.20 *Propiedades de base de entornos:*

1. $x \in V$ *para cualquier* $V \in \beta_x$.

2. *Si* $V_1,\ V_2 \in \beta_x$*, existe* $V_3 \in \beta_x$ *tal que* $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

3. *Si* $V \in \beta_x$*, existe* $V_0 \in \beta_x$ *tal que para cada* $y \in V_0$ *existe* $V_y \in \beta_y$ *con* $y \in V_y \subset V$.

Teorema 1.1.21 *Sea un conjunto* X *tal que para cada* $x \in X$ *existe una familia* γ_x *de subconjuntos de* X *con las siguientes propiedades:*

1. $x \in V$ *para cualquier* $V \in \gamma_x$.

2. *Si* $V_1,\ V_2 \in \gamma_x$*, existe* $V_3 \in \gamma_x$ *tal que* $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

3. *Si* $V \in \gamma_x$*, existe* $V_0 \in \gamma_x$ *tal que para cada* $y \in V_0$*, existe* $V_y \in \gamma_y$ *con* $y \in V_y \subset V$.

Entonces existe una única topología en X *de forma que* γ_x *es una base de entornos para cada* $x \in X$.

Teorema 1.1.22 (Criterio de Hausdorff) *Sea un conjunto X y para cada $x \in X$ sean β_x^1, β_x^2 dos bases de entornos para sendas topologías τ_1 y τ_2. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La topología τ_1 coincide con τ_2.*
2. - *Para cada $x \in X$ y $V_1 \in \beta_x^1$, existe $V_2 \in \beta_x^2$ tal que $V_2 \subset V_1$.*
   - *Para cada $x \in X$ y $V_2 \in \beta_x^2$, existe $V_1 \in \beta_x^1$ tal que $V_1 \subset V_2$.*

Proposición 1.1.23 *Dado $A \subset X$, son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El conjunto A es abierto.*
2. *Para cada $x \in A$, $A \in \mathcal{U}_x$.*
3. *Para cada $x \in A$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subset A$.*
4. *Para cada $x \in A$, existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset A$.*

Definición 1.1.24 *Un espacio (X, τ) se llama Hausdorff si para cada $x \neq y$ existen sendos entornos U y V tales que $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 1.1.25 *Sea un espacio topológico (X, τ) y A un subconjunto suyo. Se llama topología relativa o inducida en A por τ a la familia*

$$\tau_{|A} = \{O \cap A; O \in \tau\}.$$

Se dirá que $(A, \tau_{|A})$ es un subespacio topológico de (X, τ). Se denotará al conjunto de todos los cerrados por $\mathcal{F}_{|A}$ y a la familia de entornos de un punto a por $\mathcal{U}_a^A$.

Proposición 1.1.26 *Sea un espacio topológico (X, τ) y A, B subconjuntos de X tales que $B \subset A$. Entonces*

$$\tau_{|B} = (\tau_{|A})_{|B}.$$

Teorema 1.1.27

1. *$\mathcal{F}_{|A} = \{F \cap A; F \in \mathcal{F}\}$.*
2. *Si β es una base de la topología τ, entonces $\beta_A = \{B \cap A; B \in \beta\}$ es una base de la topología $\tau_{|A}$.*
3. *Si $a \in A$, los entornos de a en $(A, \tau_{|A})$ son $\mathcal{U}_a^A = \{U \cap A; U \in \mathcal{U}_a\}$.*

4. *Si β_a es una base de entornos de $a \in A$ para la topología τ, entonces $\beta_a^A = \{B \cap A; B \in \beta\}$ es una base de entornos de a en $\tau_{|A}$.*

Proposición 1.1.28 *Sea un espacio topológico (X, τ) y $A \subset X$.*

1. *Sea $O \subset A$. Si $O \in \tau$ (resp. $O \in \mathcal{F}$), entonces $O \in \tau_{|A}$ (resp. $O \in \mathcal{F}_{|\mathcal{A}}$).*
2. *Sea $A \in \tau$ (resp. $\in \mathcal{F}$) y $O \in \tau_{|A}$ (resp. $O \in \mathcal{F}_{|A}$). Entonces $O \in \tau$ (resp. $O \in \mathcal{F}$).*

1.2 Espacios métricos. La topología de $\mathbb{R}^n$

Definición 1.2.1 *Una distancia en un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que posee las siguientes propiedades:*

1. *$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y sólamente si $x = y$.*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$ (propiedad simétrica).*
3. *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).*

Al par (X, d) se llama espacio métrico y d es su distancia o su métrica.

Definición 1.2.2 *Una bola de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ es $B_r(x) = \{y \in X; d(x, y) < r\}$.*

Teorema 1.2.3 *En un espacio métrico (X, d), el conjunto*

$$\beta = \{B_r(x); r > 0, x \in X\}$$

es una base para una cierta topología τ. A esta topología la se llamará la topología inducida por la distancia d.

Una base de entornos de x es $\beta_x = \{B_r(x); r > 0\}$.

Definición 1.2.4 *Sea X un conjunto y d y d' dos distancias. Se dicen que d y d' son equivalentes si las topologías que generan son las mismas.*

Corolario 1.2.5 *Sea un conjunto X con dos distancias d_1 y d_2. Para cada punto $x \in X$ se considera $\beta_x^1 = \{B_r^1(x); r > 0\}$ y $\beta_x^2 = \{B_r^2(x); r > 0\}$. Entonces las distancias son equivalentes sii para cada $x \in X$ y*

- *para cada $B_r^1(x) \in \beta_x^1$, existe $s > 0$ tal que $B_s^2(x) \subset B_r^1(x)$.*
- *para cada $B_r^2(x) \in \beta_x^2$, existe $s > 0$ tal que $B_s^1(x) \subset B_r^2(x)$.*

Corolario 1.2.6 *Sean dos distancias d_1, d_2 en un conjunto X. Supongamos que existen constantes $k, l > 0$ tale que $kd_1 \leq d_2$ y $ld_2 \leq d_1$. Entonces d_1 y d_2 son distancias equivalentes.*

Proposición 1.2.7 *Sea un espacio métrico (X, d) y τ su topología. Sea $A \subset X$, d_A la distancia inducida en A y τ_{d_A} la topología determinada por d_A. Entonces*

$$\tau_{|A} = \tau_{d_A}.$$

Definición 1.2.8 *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) es convergente a $x \in X$ si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq \nu, d(x_n, x) < \epsilon.$$

Escribiremos en tal caso, $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = x$, o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. A x se llama límite de la sucesión.

Proposición 1.2.9 *Sea un espacio métrico (X, d), una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $x \in X$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La sucesión es convergente a x.*
2. *Para cada $O \in \tau$ con $x \in O$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O$, $\forall n \geq \nu$.*
3. *Para cada $B \in \beta$ con $x \in B$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$, $\forall n \geq \nu$.*
4. *Para cada $U \in \mathcal{U}_x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, $\forall n \geq \nu$.*
5. *Para cada $V \in \beta_x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$, $\forall n \geq \nu$.*

Proposición 1.2.10 *En un espacio métrico, el límite de una sucesión es único.*

Definición 1.2.11 *La distancia usual en $\mathbb{R}^n$ es*

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

La topología asociada se llama la topología usual de $\mathbb{R}^n$, o topología euclídea. Esta distancia es equivalente a las siguientes dos:

$$d_1((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

$$d_2((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \max\{|x_i-y_i|; 1\leq i\leq n\}.$$

Proposición 1.2.12 *Sea una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^m$ y $a\in\mathbb{R}^m$. Supongamos que $a_n=(a_1^n,\dots,a_m^n)$ y $a=(a_1,\dots,a_m)$. Son equivalentes:*

1. *La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a.*
2. *Para cada $i=1,\dots,m$, $\{a_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a_i.*

1.3 Operaciones con subconjuntos

Definición 1.3.1 *Sea un espacio topológico (X,τ) y $A\subset X$ y $x\in X$. Se dice que*

1. *x es un punto interior de A si existe un entorno U de x tal que $U\subset A$.*
2. *x es un punto exterior de A si existe un entorno U de x tal que $U\subset X-A$.*
3. *x es un punto frontera de A si para todo entorno U de x, $U\cap A\neq\emptyset$ y $U\cap(X-A)\neq\emptyset$.*

1. *El interior de A es int$(A)=\overset{\circ}{A}=\{x\in X; x$ es interior de A $\}$.*
2. *El exterior de A es ext$(A)=\{x\in X; x$ es exterior de A $\}$.*
3. *La frontera de A es Fr$(A)=\{x\in X; x$ es frontera de A $\}$.*

Proposición 1.3.2 1. *$X=\overset{\circ}{A}\cup ext(A)\cup Fr(A)$ y es una unión disjunta.*

2. $\overset{\circ}{A} = ext(X - A)$.
3. $ext(A) = int(X - A)$.
4. $Fr(A) = Fr(X - A)$.

Proposición 1.3.3 *Sea un espacio topológico (X, τ), $A \subset X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overset{\circ}{A}$ sii se da alguna de las siguientes propiedades:*

1. *existe $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset A$.*
2. *existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset A$.*
3. *existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset A$.*

Proposición 1.3.4 1. $\overset{\circ}{X} = X$, $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$.

2. *Si $A \subset B$, $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*
3. $int(A \cap B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset int(A \cup B)$.
5. $int(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{A}$.

Proposición 1.3.5 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces:*

1. $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{O \in \tau; O \subset A\}$.
2. *$\overset{\circ}{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A.*

Definición 1.3.6 *Sea un espacio topológico (X, τ), $A \subset X$ y $x \in X$. Se dice que x es un punto adherente de A si para todo entorno $U \in \mathcal{U}_x$, $U \cap A \neq \emptyset$. El conjunto de X formado por todos los puntos adherentes de A se llama adherencia de A o la clausura de A y se denotará por $\overline{A}$.*

Proposición 1.3.7 *Sea un espacio topológico (X, τ), $A \subset X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólamente se da alguna de las siguientes propiedades:*

1. *para cada $O \in \tau$ tal que $x \in O$ se tiene $O \cap A \neq \emptyset$.*

2. *para cada* $B \in \beta$ *tal que* $x \in B$, *se tiene* $B \cap A \neq \emptyset$.
3. *para cada* $V \in \beta_x$, *se tiene* $V \cap A \neq \emptyset$.

Proposición 1.3.8 *Sea un espacio topológico* (X, τ) *y* $A,\ B \subset X$. *Entonces:*

1. $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A) = A \cup Fr(A)$.
2. $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$.
3. $X - \overset{\circ}{A} = \overline{X - A}$.
4. $X - \overline{A} = int(X - A)$.
5. $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$.
6. *Si* $B \subset A$, *entonces* $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$.
7. *Si* $A \subset B$, *entonces* $\overline{A} \subset \overline{B}$.
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
9. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
10. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Proposición 1.3.9 *Sea* A *un subconjunto de un espacio topológico* (X, τ).

1. $\overline{A} = \bigcap \{F \in \mathcal{F}; A \subset F\}$.
2. $\overline{A}$ *es el menor conjunto cerrado que contiene a* A.

Proposición 1.3.10 *Sea* $A \subset (X, \tau)$.

1. $A \in \tau$ *sii* $int(A) = A$.
2. $A \in \mathcal{F}$ *sii* $\overline{A} = A$.

Proposición 1.3.11 *Sea un espacio métrico* (X, d), $A \subset X$ *y* $x \in X$.

1. $x \in \overset{\circ}{A}$ *si existe* $r > 0$ *tal que* $B_r(x) \subset A$.

2. $\in \overline{A}$ *si para todo* $r > 0$*,* $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$*.*

Teorema 1.3.12 *1.* $x \in \overset{\circ}{A}$ *sii para cualquier sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$*, existe* $\nu \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq \nu$*,* $x_n \in A$*.*

2. $x \in \overline{A}$ *sii existe una sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ *tal que* $lim_{n\to\infty}\{a_n\} = x$*.*

Proposición 1.3.13 *Sea un espacio métrico* (X, d)*,* $A \subset X$ *y* $x \in X$*. Definimos la distancia de* x *al conjunto* A *mediante*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}.$$

Entonces $\overline{A} = \{x \in X; d(x, A) = 0\}$*.*

Capítulo 2

Aplicaciones entre espacios topológicos

2.1 Continuidad y caracterizaciones

Definición 2.1.1 *Una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *es continua en* $x \in X$ *si para cada* $V' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$*, existe* $U \in \mathcal{U}_x$ *tal que* $f(U) \subset V'$*. Si* f *es continua en todo punto de* X*, se dice que* f *es continua en* X*.*

Proposición 2.1.2 *Sea considera una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$*. Son equivalentes:*

1. *La aplicación* f *es continua en el punto* x*.*
2. *Para todo* $V' \in \beta'_{f(x)}$ *existe* $U \in \beta_x$ *tal que* $f(U) \subset V'$*.*
3. *Para cada* $B' \in \beta'$ *tal que* $f(x) \in B'$*, existe* $B \in \beta$ *con* $x \in B$ *tal que* $f(B) \subset B'$*.*

Proposición 2.1.3 *Una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *es continua sii para cada* $O' \in \tau'$*,* $f^{-1}(O') \in \tau$*.*

Teorema 2.1.4 *Sea una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *entre dos espacios topológicos. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación* f *es continua en* X*.*

2. $f^{-1}(O') \in \tau'$ *para cada* $O' \in \tau'$.

3. $f^{-1}(F') \in \mathcal{F}'$ *para cada* $F' \in \mathcal{F}'$.

4. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ *para cada* $A \subset X$.

5. *Si* β *es una base de* τ', *entonces para cada* $B' \in \beta'$, $f^{-1}(B') \in \tau$.

Proposición 2.1.5 *Sea una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *y* $x \in X$. *Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. f *es continua en* x.

2. *Para cada* $U \in \mathcal{U}_x$, $f : (U, \tau_{|U}) \to (Y, \tau')$ *es continua en* x.

3. *Existe* $U \in \mathcal{U}_x$ *tal que* $f : (U, \tau_{|U}) \to (Y, \tau')$ *es continua en* x.

4. *Existe un abierto* O, *con* $x \in O$, *tal que* $f : (O, \tau_{|O}) \to (Y, \tau')$ *es continua en* x.

Proposición 2.1.6 *Más propiedades de aplicaciones continuas.*

1. *Las aplicaciones constantes son continuas.*

2. *La aplicación identidad* $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau)$ *es continua.*

3. *Si* $f : X \to Y$ *y* $f : Y \to Z$ *son dos aplicaciones continuas, entonces* $g \circ f : X \to Z$ *es continua.*

4. *La aplicación inclusión* $i : (A, \tau_{|A}) \to (X, \tau)$ *es continua.*

Teorema 2.1.7 *Sean espacios topológicos* (X, τ), (Y, τ') *y* $A \subset X$ *y* $B \subset Y$. *Consideramos una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. *Entonces*

1. *Si* f *es una aplicación continua, entonces la restricción de* f *a* A, $f_{|A} : (A, \tau_{|A}) \to (Y, \tau')$, *es continua.*

2. *Supongamos que* $Im(f) \subset B$. *Entonces* $f : (X, \tau) \to (B, \tau'_{|B})$ *es continua.*

3. *Si* f *es continua, entonces* $f_{|A} : (A, \tau_{|A}) \to (f(A), \tau'_{|f(A)})$ *es continua.*

4. *Si f es continua en todo punto de A, entonces $f_{|A}$ es continua.*

Teorema 2.1.8 *Sea una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y supongamos que $X = A \cup B$, donde $A, B \in \tau$ (resp. $A, B \in \mathcal{F}$). Supongamos además que $f_{|A}$ y $f_{|B}$ son aplicaciones continuas. Entonces f es una aplicación continua.*

Proposición 2.1.9 *Sean $f, g : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones continuas. Entonces:*

1. *$f + g$ y fg son continuas.*
2. *λf es continua con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
3. *f/g es continua en todos los puntos $x \in X$ tales que $g(x) \neq 0$.*

Teorema 2.1.10 *Una aplicación $f : (X, d) \to (Y, d')$ entre espacios métricos es continua en x sii "Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a x, entonces la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $f(x)$".*

Definición 2.1.11 *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio topológico (X, τ). Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$, y escribiremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ si para todo $U \in \mathcal{U}_x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para $n \geq \nu$.*

Proposición 2.1.12 *Sea una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y $x \in X$. Si f es continua en x, entonces para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x se tiene que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge as $f(x)$.*

2.2 Aplicaciones abiertas y cerradas. Homeomorfismos

Definición 2.2.1 *Una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ entre dos espacios topológicos se llama homeomorfismo si es una aplicación biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son continuas. Se escribirá $(X, \tau) \cong (Y, \tau')$.*

Se dice que un espacio topológico (X, τ) es homeomorfo a otro espacio (Y, τ') si existe un homeomorfismo entre (X, τ) e (Y, τ').

Proposición 2.2.2 1. *La aplicación identidad es un homeomofismo.*

2. *La aplicación inversa de un homeomorfismo es un homeomorfismo.*

3. *La composición de dos homeomorfismos es un homeomorfismo.*

Teorema 2.2.3 *Se considera una aplicación biyectiva $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$. Son equivalentes:*

1. *f es homeomorfismo.*
2. *f es continua y $f(O)\in\tau'$ para cualquier $O\in\tau$.*
3. *f es continua y $f(F)\in\mathcal{F}'$ para cualquier $F\in\mathcal{F}$.*
4. *$f(\overline{A})=\overline{f(A)}$ para cualquier subconjunto A de X.*
5. *f es continua y $f(U)$ es entorno de $f(x)$ para cualquier entorno U de $x\in X$.*

Corolario 2.2.4 *Sea una aplicación biyectiva $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ entre espacios topológicos. Entonces son equivalentes:*

1. *f es homeomorfismo.*
2. *$\tau'=\{f(O);O\in\tau\}$.*
3. *$\mathcal{F}'=\{f(F);F\in\mathcal{F}\}$.*
4. *Si β es una base de τ, entonces $f(\beta)$ es base de τ'.*
5. *Si β_x se base de entornos de $x\in X$, entonces $f(\beta_x)$ es una base de entornos de $f(x)$ para cada $x\in X$.*
6. *$\mathcal{U}'_{f(x)}=\{f(U);U\in\mathcal{U}_x\}$.*

Proposición 2.2.5 *Sea $f:(X,\tau)\to\mathbb{R}^n$. Para cada $x\in X$, se considera $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x))$, donde $f_i=p_i\circ f$, con $p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ la i-ésima proyección. Entonces la aplicación f es continua sii las aplicaciones f_i son continuas $\forall i$.*

Proposición 2.2.6 *Sea un homeomorfismo $f(X,\tau)\to(Y,\tau')$ y $A\subset X$. Entonces $f_{|A}:(A,\tau_{|A})\to(f(A),{\tau'}_{f(A)})$ es homeomorfimo.*

Definición 2.2.7 *Una propiedad topológica o un invariante topológico es una propiedad $\mathcal{P}$ de forma que si un espacio topológico (X,τ) satisface $\mathcal{P}$, entonces todos los espacios topológicos homeomorfos a X también la satisface.*

Definición 2.2.8 *Un embebimiento es una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ entre dos espacios topológicos tal que*

$$f : (X, \tau) \to (f(X), \tau'_{|f(X)})$$

es un homeomorfismo. Se dirá entonces que X está embebido en Y mediante f.

Proposición 2.2.9 *Se considera un embebimiento $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y un homeomorfismo $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$. Entonces $g \circ f$ es un embebimiento.*

Proposición 2.2.10 *Sea un espacio topológico (X, τ) y A un subconjunto suyo con una topología τ'. Entonces la aplicación inclusión $i : (A, \tau') \to (X, \tau)$ es un embebimiento sii $\tau' = \tau_{|A}$.*

Definición 2.2.11 *Una aplicación $f(X, \tau) \to (Y, \tau')$ se llama abierta (resp. cerrada) si $f(O) \in \tau'$ $\forall O \in \tau$ (resp. $\forall F \in \mathcal{F}$).*

Proposición 2.2.12 *Sea una aplicación abierta $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y $x \in X$. Entonces para cada $U \in \mathcal{U}_x$, $f(U) \in \mathcal{U}'_{f(x)}$.*

Teorema 2.2.13 *Sea una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. Son equivalentes:*

1. *f es una aplicación abierta.*
2. *$f(\mathring{A}) \subset int\ (f(A))$, para cualquier $A \subset X$.*
3. *Si β es una base de τ, entonces $f(B) \in \tau'$, para cada $B \in \beta$.*
4. *Para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ tal que $V \subset f(U)$.*
5. *Para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}_x$, $f(U)$ es entorno de $f(x)$.*

Corolario 2.2.14 *Sea una aplicación biyectiva $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. Entonces f es homeomorfismo si y sólamente si para todo $A \subset X$ se tiene $f(\mathring{A}) = int\ (f(A)$.*

Teorema 2.2.15 *Sea una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. Entonces f es cerrada sii $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, para cualquier $A \subset X$.*

Proposición 2.2.16 *Sean las aplicaciones proyecciones* $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$,

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

Entonces p_i *es una aplicación abierta pero no es cerrada.*

Proposición 2.2.17 *Se considera* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *aplicaciones entre tres espacios topológicos.*

1. *Si* f *y* g *son aplicaciones abiertas (resp. cerradas), entonces* $g \circ f$ *es abierta (resp. cerrada).*
2. *Si* $g \circ f$ *es una aplicación abierta (resp. cerrada) y* f *es sobreyectiva y continua, entonces* g *es abierta (resp. cerrada).*
3. *Si* $g \circ f$ *es una aplicación abierta (resp. cerrada) y* g *es inyectiva y continua, entonces* f *es abierta (resp. cerrada).*

2.3 Topología producto

Proposición 2.3.1 *Sean dos espacios topológicos* (X_1, τ_1) *y* (X_2, τ_2) *y consideremos la familia de subconjuntos de* $X_1 \times X_2$ *formada por*

$$\tau_1 \times \tau_2 = \{O_1 \times O_2; O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}.$$

Entonces $\tau_1 \times \tau_2$ *es base de una topología en el conjunto* $X_1 \times X_2$. *La topología en* $X_1 \times X_2$ *que tiene por base* $\tau_1 \times \tau_2$ *se llama topología producto de* τ_1 *y* τ_2 *y se notará de nuevo por* $\tau_1 \times \tau_2$.

Proposición 2.3.2

1. *Si* β_1 *y* β_2 *son bases de* τ_1 *y* τ_2 *respectivamente, entonces* $\beta_1 \times \beta_2$ *es una base de la topología* $\tau_1 \times \tau_2$.
2. *Sean* $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ *y* $\mathcal{U}^1_{x_1}$, $\mathcal{U}^2_{x_2}$ *los respectivos sistemas de entornos. Entonces* $\mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2}$ *es base de entornos del punto* (x_1, x_2) *en la topología* $\tau_1 \times \tau_2$.
3. *Sean bases de entornos* $\beta^1_{x_1}$, $\beta^2_{x_2}$ *de* x_1 *e* x_2 *respectivamente. Entonces* $\beta^1_{x_1} \times \beta^2_{x_2}$ *es una base de entornos del punto* (x_1, x_2) *en la topología* $\tau_1 \times \tau_2$.

Proposición 2.3.3 *Sean dos espacios topológicos* (X_1, τ_1) *y* (X_2, τ_2) *y* $A \subset X_1$, $B \subset X_2$. *Entonces:*

1. *int*$(A \times B) = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.

2. *Fr*$(A \times B) = (Fr(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times Fr(B))$.

3. $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

4. $\tau_{1|A} \times \tau_{2|B} = (\tau_1 \times \tau_2)_{|A \times B}$.

Teorema 2.3.4 *Se consideran los espacios euclídeos* $(\mathbb{R}^n, \tau_u^n)$ *y* $(\mathbb{R}^m, \tau_u^m)$ *con sus topologías usuales. Si denotamos por* τ_u^{n+m} *la topología usual de* $\mathbb{R}^{n+m}$*, entonces*

$$\tau_u^n \times \tau_u^m = \tau_u^{n+m}.$$

(estamos identificando $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *y* $\mathbb{R}^{n+m}$ *como conjuntos).*

Proposición 2.3.5 *Sean dos espacios métricos* (X_1, d_1) *y* (X_2, d_2)*. En el conjunto* $X_1 \times X_2$ *se define la distancia producto* d *mediante*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2).$$

Entonces la topología producto de dos espacios métricos (X_1, d_1) *y* (X_2, d_2) *es la topología inducida por la distancia producto.*

Definición 2.3.6 *Se definen las aplicaciones proyecciones como las aplicaciones* $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$*,* $i = 1, 2$*, dadas por*

$$p_i(x_1, x_2) = x_i.$$

Entonces las aplicaciones proyecciones son continuas y abiertas.

Teorema 2.3.7 *La aplicación* $f : X \to X_1 \times X_2$ *es continua sii* $p_i \circ f$*,* $i = 1, 2$*, son continuas.*

Corolario 2.3.8 *Sean dos aplicaciones* $f_i : X \to X_i$*,* $i = 1, 2$*. Definimos la evaluación de* f_1 *y* f_2 *como la aplicación* $e(f_1, f_2) : X \to X_1 \times X_2$ *dada por*

$$e(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Si las aplicaciones f_1, f_2 *son continuas, entonces* $e(f_1, f_2)$ *es continua.*

Teorema 2.3.9 *Sean* (X_i, τ_i), (Y_i, τ_i') $i = 1, 2$ *cuatro espacios topológicos y* $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$ *dos aplicaciones. Se define la aplicación producto* $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ *como*

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

1. $f_1 \times f_2$ *es continua sii* f_1 *y* f_2 *son continuas*
2. $f_1 \times f_2$ *es homeomorfismo sii* f_1 *y* f_2 *son homeomorfismos.*

Corolario 2.3.10 *Sean dos espacios topológicos* $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$. *Entonces tanto* X_1 *como* X_2 *se pueden embeber en* $X_1 \times X_2$.

Corolario 2.3.11 *Sea una aplicación continua* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. *Entonces* X *se embebe en* $X \times Y$ *como el grafo de la aplicación* f.

Corolario 2.3.12 *Sea un espacio topológico* (X, τ). *Entonces* X *se embebe en* $X \times X$ *como el conjunto* $\Delta = \{(x, x) \in X \times X; x \in X\}$.

2.4 Topología cociente

Consideramos una relación de equivalencia R en un conjunto X. Denotamos por X/R el conjunto cociente y a la clase de $x \in X$ por $[x]$. Sea $p : X \to X/R$ la aplicación proyección sobre el conjunto cociente, es decir, $p(x) = [x]$.

Definición 2.4.1 *Dado un espacio topológico* (X, τ) *y una relación de equivalencia* R *en* X, *se define la topología cociente en* X/R *como*

$$\tau/R = \{\bar{O} \subset X/R; p^{-1}(\bar{O}) \in \tau\}.$$

La *R-saturación de A* de un subconjunto $A \subset X$ es $R[A] = p^{-1}p(A)$, es decir,

$$R[A] = \{x \in X; \exists y \in A,\ xRy\}.$$

El conjunto A se llama *R-saturado* si $A = R[A]$. Entonces

$$\tau/R = \{p(O); O \in \tau,\ R[O] = O\}.$$

Proposición 2.4.2 *1. La aplicación proyección $p : (X, \tau) \to (X/R, \tau/R)$ es continua.*

2. La topología τ/R es la topología más fina que existe en X/R que hace que la aplicación p sea continua.

3. Una aplicación $f : (X/R, \tau/R) \to (Y, \tau')$ es continua sii $f \circ p$ es continua.

Definición 2.4.3 *Sea una aplicación sobreyectiva $f : (X, \tau) \to Y$. Se llama topología final en Y determinada por f a la familia*

$$\tau(f) = \{\bar{O} \subset Y; f^{-1}(\bar{O}) \in \tau\}.$$

Definición 2.4.4 *Una identificación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es una aplicación sobreyectiva tal que $\tau' = \tau(f)$.*

Proposición 2.4.5 *1. Sea una identificación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau(f))$. Entonces $\tau(f)$ es la topología más fina en Y que hace continua a la aplicación f.*

2. Sea una identificación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau(f))$ y $g : (Y, \tau(f)) \to (Z, \tau')$ una aplicación. Entonces g es continua sii $g \circ f$ es continua.

3. La composición de identificaciones es una identificación.

4. Sea una identificación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau(f))$ y $g : (Y, \tau(f)) \to (Z, \tau'')$ una aplicación de forma que $g \circ f$ es una identificación. Entonces g es una identificación.

5. Sea una aplicación inyectiva $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. Entonces f es una identificación sii si f es un homeomorfimo.

Proposición 2.4.6 *Sea una aplicación continua $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. En cualquiera de los siguientes casos, f es una identificación:*

1. f es sobreyectiva y abierta.

2. f es sobreyectiva y cerrada.

3. Existe una aplicación continua $s : Y \to X$ tal que $f \circ s = 1_Y$.

Corolario 2.4.7 *Una aplicación continua y sobreyectiva de un espacio compacto en un espacio Hausdorff es una identificación.*

Proposición 2.4.8 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos.*

1. *La relación "$xR_f x'$ si $f(x) = f(x')$" es una relación de equivalencia.*
2. *La aplicación $\bar{f} : X/R_f \to Im(f)$ dada por $\bar{f}([x]) = f(x)$ es biyectiva.*
3. *Se tiene $f = i \circ \bar{f} \circ p$, donde $i : Im(f) \hookrightarrow Y$.*

Teorema 2.4.9 *Sea una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y $\overline{f} : (X/R_f, \tau/R_f) \to (Y, \tau')$, dada por $\overline{f}([x]) = f(x)$. Entonces $\overline{f}$ es un homeomorfismo sii f es una identificación.*

Corolario 2.4.10 *Sea una aplicación continua y sobreyectiva $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, donde (X, τ) es un espacio compacto e (Y, τ') es un espacio Hausdorff. Entonces X/R_f es homeomorfo a Y.*

Teorema 2.4.11 *Sean dos espacios topológicos (X, τ) e (Y, τ') con sendas relaciones de equivalencias R y R'. Sea una aplicación $f : X \to Y$ con la siguiente propiedad:*

$$\text{si } x_1 R x_2 \text{ entonces } f(x_1) R' f(x_2).$$

Sea la aplicación $\overline{f} : (X/R, \tau/R) \to (Y/R', \tau'/R')$ tal que $p' \circ f = \overline{f} \circ p$. Entonces:

1. *Si f es continua, $\overline{f}$ es continua.*
2. *Si f es identificación, $\overline{f}$ es una identificación.*

Corolario 2.4.12 *Sean espacios topológicos $(X, \tau), (Y, \tau')$ con respectivas relaciones de equivalencia R y R' y una aplicación continua $f : X \to Y$ que satisface*

$$x_1 R x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) R' f(x_2).$$

Entonces si f es una identificación, $\overline{f}$ es un homeomorfismo entre X/R e Y/R'.

Capítulo 3

Conexión y compacidad

3.1 Conexión y propiedades. Componentes conexas

Definición 3.1.1 *Un espacio topológico (X, τ) se llama conexo si la única partición por conjuntos abiertos de X es la partición trivial, es decir, si existen conjuntos abiertos A y B tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A, B \in \{\emptyset, X\}$. Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) se llama conexo si $(A, \tau_{|A})$ es un espacio topológico conexo.*

Proposición 3.1.2 *La conexión se mantiene por aplicaciones continuas. En particular, es una propiedad topológica.*

Proposición 3.1.3 *Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *(X, τ) es conexo.*
2. *Los únicos subconjuntos de (X, τ) que son a la vez abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.*
3. *Toda aplicación continua de (X, τ) en un espacio topológico discreto es constante.*
4. *No existen aplicaciones continuas y sobreyectivas de (X, τ) en $\{0, 1\}$.*

Teorema 3.1.4 *Los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos. Y los conjuntos conexos de $A \subset \mathbb{R}$ son los intervalos contenidos en A.*

Teorema 3.1.5 (del valor intermedio) *Sea (X,τ) un espacio topológico conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Si f toma dos valores distintos, entonces toma todos los valores intermedios.*

Teorema 3.1.6 (del punto fijo) *Sea una aplicación continua $f : [0,1] \to [0,1]$. Entonces existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Teorema 3.1.7 *Sea un espacio topológico (X,τ). Si se satisface algunas de las siguientes condiciones, el espacio es conexo:*

1. *Existe una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos conexos de X, tales que $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ y $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.*
2. *Para cualesquiera puntos $x, y \in X$, existe un subconjunto conexo A_{xy} que contiene a x e y.*
3. *Existe $x_0 \in X$ tal que para cada $x \in X$, existe un subconjunto conexo A_x tal que $x, x_0 \in A_x$.*
4. *Existe una familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos conexos de X, tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 3.1.8 *Sean dos espacios topológicos (X,τ) e (Y,τ'). Entonces $(X\times Y, \tau\times\tau')$ es conexo sii (X,τ) e (Y,τ') son conexos.*

Proposición 3.1.9 *Sea un espacio topológico (X,τ) y $A \subset B \subset \overline{A}$. Si A es conexo, entonces B es conexo. En particular, $\overline{A}$ es conexo.*

Teorema 3.1.10 (Borsuk-Ulam) *Sea una aplicación continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$. Entonces existe $p \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(p) = f(-p)$.*

Definición 3.1.11 *Dado $x \in (X,\tau)$, se llama componente conexa del punto x a la unión de todos los subconjuntos conexos que contienen a x. Se denota por C_x.*

Proposición 3.1.12

1. *El conjunto C_x es conexo y es el mayor conexo que contiene al punto x.*
2. *El espacio X es conexo si y sólo si hay una única componente conexa.*
3. *Las componentes conexas determinan una partición de X.*

4. *Las componentes conexas son conjuntos cerrados.*

Proposición 3.1.13 *Sea un espacio topológico (X, τ) y una partición suya por subconjuntos conexos y abiertos $\{A_i; i \in I\}$. Entonces dicha familia de subconjuntos constituyen la partición de componentes conexas.*

Proposición 3.1.14 *Sean dos espacios topológicos (X, τ) e (Y, τ') y un punto $(x, y) \in X \times Y$. Entonces $C_{(x,y)} = C_x \times C'_y$.*

Proposición 3.1.15 *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua.*

1. $f(C_x) \subset C'_{f(x)}$.
2. *Si f es homeomorfismo, $f(C_x) = C'_{f(x)}$.*

Corolario 3.1.16 *El número de componentes conexas es un invariante topológico.*

3.2 Compacidad y propiedades

Definición 3.2.1 *Un recubrimiento por abiertos de un espacio (X, τ) es una familia $\{O_i; i \in I\}$ de abiertos tal que $X = \cup_{i \in I} O_i$. Un subrecubrimiento de un recubrimiento es un subconjunto del recubrimiento que a su vez también es un recubrimiento.*

Definición 3.2.2 *Un espacio (X, τ) es compacto si todo recubrimiento por conjuntos abiertos de X tiene un subrecubrimiento finito, es decir,*

$$\text{Si } X = \cup_{i \in I} O_i,\ O_i \in \tau, \text{ entonces existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } X = O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}.$$

Un subconjunto A de (X, τ) se dice que es compacto si $(A, \tau_{|A})$ es compacto.

Proposición 3.2.3 *Sea $A \subset X$. Entonces A es compacto sii para cualquier familia de abiertos de X, $\{O_i; i \in I\}$, con $A \subset \cup_{i \in I} O_i$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$.*

Teorema 3.2.4 *El intervalo $[0, 1]$ es compacto.*

Teorema 3.2.5 *Son equivalentes:*

1. *El espacio* (X, τ) *es compacto.*

2. *Para cualquier familia de cerrados* $\{F_i; i \in I\} \subset \mathcal{F}$ *tal que* $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \emptyset$*.*

3. *Sea* β *una base de abiertos. Entonces de todo recubrimiento de* X *por elementos de* β*, existe un subrecubrimiento finito.*

Corolario 3.2.6 *La compacidad se mantiene por aplicaciones continuas. En particular, es una propiedad topológica.*

Proposición 3.2.7 *Si* (X, τ) *es compacto y* $F \in \mathcal{F}$*, entonces* F *es compacto.*

Proposición 3.2.8 *Si* (X, τ) *es Hausdorff y* $A \subset X$ *es compacto, entonces* $A \in \mathcal{F}$*.*

Corolario 3.2.9 *En un espacio métrico, todo subconjunto compacto es cerrado y acotado.*

Corolario 3.2.10 *En un espacio topológico Hausdorff, la intersección de dos subconjuntos compactos es compacto.*

Teorema 3.2.11 *Sea* $f : X \to Y$ *una aplicación continua,* X *compacto e* Y *Hausdorff. Entonces:*

1. *La aplicación* f *es cerrada.*

2. *Si* f *es una aplicación biyectiva, entonces es un homeomorfismo.*

3. *Si* f *es una aplicación inyectiva, entonces es un embebimiento.*

Teorema 3.2.12 *Sean dos espacios topológicos* (X, τ)*,* (Y, τ')*. Entonces* X *e* Y *son compactos sii* $X \times Y$ *es compacto.*

Teorema 3.2.13 (Heine-Borel) *Los subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}^n$ *son los conjuntos cerrados y acotados.*

Corolario 3.2.14 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación continua y X compacto. Entonces la aplicación f está acotada y alcanza un máximo y un mínimo*

Corolario 3.2.15 *Sea un espacio métrico (X, d), $x \in X$ y A un subconjunto compacto. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a)$.*

Proposición 3.2.16 (Bolzano-Weiertrass) *Sea un espacio compacto (X, τ). Entonces todo subconjunto infinito de X posee un punto de acumulación.*

Corolario 3.2.17 *Todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación.*

Corolario 3.2.18 *Si un espacio topológico es conexo (resp. compacto), cualquier cociente suyo también es conexo (resp. compacto).*

Corolario 3.2.19 *Sea una aplicación sobreyectiva $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, donde (X, τ) es un espacio compacto e (Y, τ') es un espacio Hausdorff. Entonces X/R_f es homeomorfo a Y.*