Examen de teoría y problemas 2

11 de junio de 2019

Métodos Numéricos I_Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas_UGR

DURACIÓN: 2 horas

MODELO 1

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI/PASAPORTE: FIRMA:

PREGUNTA 1
0.5+0.5 puntos

a) Calcula el radio espectral de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

¿Qué podemos afirmar sobre la sucesión $\{\mathbf{A}^n\}_{n\geq 1}$?

b) Sean $N \geq 1$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ de forma que $\mathbf{A}$ es regular y

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & \cdots & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & \cdots & 1/4 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1/(N+1) \end{bmatrix}.$$

Supongamos además que $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ y consideremos el método iterativo

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N \text{ dado} \\ n \geq 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_n = \mathbf{B}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{c} \end{array} \right. .$$

¿Podemos asegurar que dicho método iterativo converge a la solución del sistema unisolvente $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (de hecho, independientemente de la estimación inicial $\mathbf{x}_0$)? ¿Habría que exigir alguna hipótesis adicional?

PREGUNTA 2
0.8+0.7 puntos

a) Sean $x_0, x_1, \ldots, x_N$ números reales distintos, sea $x \in \mathbb{R}$ y sean

$$a := \text{mín}\{x, x_0, x_1, \ldots, x_N\} \quad \text{y} \quad b := \text{máx}\{x, x_0, x_1, \ldots, x_N\}.$$

Supongamos además que $f \in C^{N+1}([a,b])$. Demuestra que existe $\xi \in]a,b[$ tal que

$$\mathbf{E}_N f(x) = \frac{f^{N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x),$$

donde ω_{N+1} es el polinomio nodal de grado $N+1$.

b) Deduce que si $f \in C^{\infty}([a,b])$ y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$N \geq 1 \;\Rightarrow\; \|f^{N)}\|_\infty \leq M,$$

entonces

$$\lim_{N\to\infty} \|\mathbf{E}_N f\|_\infty = 0.$$

¿Por qué este hecho no es aplicable al ejemplo de Bernstein?

PREGUNTA 3
0.7+0.8 puntos

a) Enuncia el teorema de la mejor aproximación en un espacio euclídeo cualquiera.

b) Comprueba que la función del subespacio vectorial $S := \mathrm{lin}\{1, 7x, x^4\}$ de $C([-1,1])$ (producto escalar usual) más próxima a $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3, \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

es $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{3x}{5}, \qquad (-1 \leq x \leq 1).$$