Ejercicio 16/9/2021

Javier Gómez López

16 de septiembre de 2021

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico (d distancia en X). Tomemos $r > 0$. Definimos $d_r : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d_r(x, y) = r \cdot d(x, y), \quad x, y \in X$$

Probar que d_r es una distancia en X.

Debemos probar las 3 propiedades que definen una distancia:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$

   $\boxed{\Rightarrow}$

   $$d_r(x, y) = 0 \Rightarrow r \cdot d(x, y) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ r>0}}{\Rightarrow} d(x, y) = 0$$

   Puesto que por definición d es una distancia, $x = y$.

   $\boxed{\Leftarrow}$

   $$x = y \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow d_r(x, y) = \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{d(x, y)} \cdot r \Rightarrow d_r(x, y) = 0$$

2. $d(x, y) = d(y, x)$

   $$d_r(x, y) = r \cdot d(x, y) = r \cdot d(y, x) = d_r(y, x)$$

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)\ \forall x, y, z \in X$

   Primero de todo definamos

   $$d_r(x, y) = r \cdot d(x, y) \quad d_r(x, z) = r \cdot d(x, z) \quad d_r(y, z) = r \cdot d(y, z)$$

   $$d_r(x, y) \leq d_r(x, z) + d_r(y, z) \Rightarrow r \cdot d(x, y) \leq r \cdot ((d(x, z) + d(y, z)) \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

Y queda probado que d_r es una distancia en X.