Ejercicios Exámenes MNI

1. $a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$, $h: b-a$, $f \in C^2([a,b])$, $I_1 f \in \mathbb{P}_1$ tal que

$$I_1 f(a) = f(a) \quad I_1 f(b) = f(b)$$

$$E_1 f(x) = f(x) - I_1 f(x)$$

Demostrar que $\|E_1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} h^2$

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a,b]$. Como $f \in C^2([a,b])$, sabemos por teoría que la expresión del error puntual viene dada por:

$$E_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\varepsilon)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$$

$$\Big\Downarrow \text{En este caso}$$

$$E_1 f(x) = \frac{f''(\varepsilon)}{2!} \omega_2(x)$$

Como esto ocurre a nivel puntual, para pasar al error en todos los puntos tomamos norma infinito en la expresión anterior:

$$\|E_1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \|\omega_2(x)\|_\infty$$

Sabemos que $\omega_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$, en este caso nuestro nodos son a y b por lo que $\omega_2(x) = (x-a)(x-b)$. Vamos a intentar acotar $\|\omega_2(x)\|_\infty$. Como $x \in [a,b]$, $x = a + th$ con $t \in [0,1]$. Procedamos:

$$|\omega_2(x)| = |(x-a)(x-b)| = (x-a)(b-x) =$$

$$= (a+th-a)(b-a-th) = th(h-th) = \underbrace{-h^2t^2 + h^2 t}$$

$$g(t) = -h^2t^2 + h^2 t$$

$$\Big\Downarrow \text{Hallamos su máximo}$$

$$g'(t) = -2h^2 t + h^2$$

$$g'(t) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-2h^2 t + h^2 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{2}}$$

$$g''(t) = -2h^2 < 0 \Rightarrow \text{Es máximo} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = -h^2 \frac{1}{4} + h^2 \frac{1}{2} = \boxed{\frac{h^2}{4}}$$

Como $|\omega_2(x)| = g(t)$ y hemos visto que $g(t) \leq \frac{h^2}{4}$,

claramente $\max_{x\in[a,b]} |\omega_2(x)| = \|\omega_2(x)\|_\infty = \frac{h^2}{4}$ y retomando

la expresión inicial:

$$\underbrace{\|E_1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \|\omega_{n+1}(x)\|_\infty = \frac{\|f''\|_\infty}{2} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{\|f''\|_\infty}{8} h^2}$$

Uniendo principio y final

$$\|E_1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} h^2$$

b) $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$

encontrar $S_N^1 f \in S_1^0(P) : [i = 0, \ldots, N \Rightarrow S_N^1 f(x_i) = f(x_i)]$

Deducir con lo de antes que:

$$\|f - S_N^1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} \left(\max_{i=0,\ldots,N-1} (x_{i+1} - x_i)\right)^2$$

Tomando nuevamente la expresión del error puntual empezamos acotando el error de interpolación:

$$E_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\varepsilon)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$$

Usando el apartado anterior

$$\hookrightarrow \|E_N f\|_\infty = \|f - S_N^1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2!} \|\omega_{N+1}\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} h^2$$

siendo $h = (x_i - x_{i-1})$

Tengamos en cuenta que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $S_N^1 f$ es un polinomio de grado menor o igual que 1 así que podemos acotar $\omega_{N+1}(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)$ en cada subintervalo por la mayor diferencia al cuadrado que exista entre nodos consecutivos: $\max_{i=0,\ldots,N-1} (x_{i+1} - x_i)$. En mi caso, $\max_{i=0,\ldots,N-1} (x_i - x_{i-1})$. El error de interpolación en todos los subintervalos estará claramente acotado por:

$$\underbrace{\|E_N f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} (x_{i-1} - x_i)^2}_{\text{En un subintervalo concreto}} \leq \underbrace{\frac{\|f''\|_\infty}{8} \left(\max_{i=0,\ldots,N-1} (x_{i-1} - x_i)\right)^2}_{\text{Para todos los subintervalos}}$$

2. a) $x_0, \dots, x_N$ reales distintos, $x \in \mathbb{R}$ y

$a := \min\{x, x_0, \dots, x_N\}$ $b := \max\{x, x_0, \dots, x_N\}$

$f \in C^{N+1}([a,b])$

Demostrar que $\exists \mathcal{E} \in]a,b[$ tal que $E_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\mathcal{E})}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$

Para demostrar este resultado usaremos la siguiente función auxiliar: $G(t) = E_N f(t) - \frac{E_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)} \omega_{N+1}(t)$. Consideramos $x \neq x_i \; \forall i \in \{0, \dots, N\}$ ya que esto no nos quita generalidad pues para ese caso la desigualdad se cumple:

$$E_N f(x_i) = f(x_i) - \ell_N f(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0 = \frac{f^{N+1}(\mathcal{E})}{(N+1)!} \underbrace{\omega_{N+1}(x_i)}_{0} = 0$$

Por lo tanto, $x \neq x_i$. Claramente $G(t)$ es de $C^{N+1}([a,b])$ por serlo $\omega_{N+1}(t)$. Además, tiene $N+2$ ceros:

$N+1$ ceros $\Rightarrow$ Los nodos $x_0, \dots, x_N$ la anulan:

$$G(x_i) = E_N f(x_i) - \frac{E_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)} \cdot \underbrace{\omega_{N+1}(x_i)}_{0} = E_N f(x_i) =$$

$$= f(x_i) - \ell_N f(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

1 cero $\Rightarrow$ $G(x) = E_N f(x) - \frac{E_N f(x)}{\cancel{\omega_{N+1}(x)}} \cancel{\omega_{N+1}(x)} = 0$

Aplicando el Tma Rolle $N+1$ veces, sabemos que $\exists \mathcal{E} \in]a,b[: G^{N+1}(\mathcal{E}) = 0$:

¿ $G^{N+1}(t)$?

$$(E_N f(t))^{N+1} = f^{N+1}(t) + \underbrace{(\ell_N f(t))^{N+1}}_{0 \text{ porque } \in \mathbb{P}^N} = f^{N+1}(t)$$

$$G^{N+1}(t) = f^{N+1}(t) - \frac{E_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)} (N+1)!$$

$$G^{N+1}(\mathcal{E}) = 0 = f^{N+1}(\mathcal{E}) - \frac{E_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)} (N+1)!$$

$$\boxed{E_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\mathcal{E})}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)}$$

b) Si $f \in C^{\infty}([a,b])$ y $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que

$$N \geq 1 \Rightarrow \|f^{N}\|_{\infty} \leq M$$

entonces $\lim\limits_{N \to \infty} \|E_N f\|_{\infty} = 0$

Aplicando lo demostrado antes:

Como $E_N f(x) = \dfrac{f^{N+1}(\varepsilon)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x)$

$$\Downarrow$$

$$\|E_N f\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{N+1}\|_{\infty}}{(N+1)!}\|\omega_{N+1}\|_{\infty} \leq \frac{M\|\omega_{N+1}\|_{\infty}}{(N+1)!}$$

Tengamos en cuenta que $\omega_{N+1}(x) = \prod\limits_{j=0}^{N}(x-x_j)$, por lo que $\|\omega_{N+1}\|_{\infty} \leq (b-a)^{N+1}$:

$$\|E_N f\|_{\infty} \leq \frac{M(b-a)^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Este hecho no se puede aplicar en Bernstein ya que $f(x) = |x|$ no es derivable.

3. b) $S := \text{lin}\{1, 7x, x^4\} \subset C([-1,1])$

La función de S más próxima a $f(x) = x^3$ es $g(x) = \frac{3}{5}x$

Comprobar. $\int_{-1}^{1} 1\, dx = [x]_{-1}^{1} = 2$ $\quad \int_{-1}^{1} (7x)^2 dx = \left[\frac{49x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{98}{3}$

$\int_{-1}^{1} x^8 dx = \left[\frac{x^9}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{9}$

$\int_{-1}^{1} 7x\, dx = \left[\frac{7x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$ $\quad \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right] = \frac{2}{5}$ $\quad \int_{-1}^{1} 7x^5 dx = \left[\frac{7x^6}{6}\right]_{-1}^{1} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/5 \\ 0 & 98/3 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/9 \end{bmatrix}$$

$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$ $\quad \int_{-1}^{1} 7x^4 dx = \left[\frac{7x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{14}{5}$ $\quad \int_{-1}^{1} x^7 dx = \left[\frac{x^8}{8}\right]_{-1}^{1} = 0$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/5 \\ 0 & 98/3 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14/5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{35}$$

$$\Downarrow$$

Luego $g(x) = x_2 \cdot 7x = \frac{3}{35} \cdot 7x = \frac{3}{5}x$ ✓

a) Enunciar teorema de la mejor aproximación en un espacio euclídeo cualquiera

Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo, S un subespacio vectorial finito dimensional con base $\{a_1, \dots, a_N\}$ y $v \in E$. Decimos que $u \in S$ es la mejor aproximación de v sobre S (o la proyección ortogonal de v sobre S) si cumple que:

$$\|u - v\| \leq \min\{\|w - v\| : w \in S\}$$

y sus coordenadas x vienen caracterizadas por las ecuaciones normales $Ax = b$, siendo $A = [\langle a_i, a_j\rangle]$ y $b = \begin{bmatrix} \langle a_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle a_N, v\rangle \end{bmatrix}$ o bien $\forall i \in \{1, \dots, N\} \Rightarrow \langle a_i, v - \sum_{j=1}^{N} x_j a_j \rangle = 0$.

4. $y = ax^3 + b$

$(0,1), (1,2), (-1,-1), (-1,1)$

$S = \mathcal{L}\{x^3, 1\}$ $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = x^3 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$

$S = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad x = [a, b]$

Los vectores de S son de la forma Ax con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Se nos está pidiendo hallar la mejor aproximación de b sobre S, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 3b = 2 \\ 3a + 4b = 3 \end{cases} \Downarrow$$

$\boxed{b = 1}$ $\boxed{a = -\frac{1}{3}}$

$$\boxed{y = -\frac{1}{3}x^3 + 1}$$