AVISO LEGAL

Con motivo de la suspensión temporal de la actividad docente presencial en la Universidad de Granada, se informa de las condiciones de uso de este material que ha sido elaborado, por la profesora responsable de la asignatura Cálculo II del Grado de Matemáticas y del Doble Grado de Matemáticas-Física (Grupo A), para su impartición por docencia virtual.

“Queda prohibida la captación y/o grabación de la sesión así como su reproducción o difusión, en todo o en parte sea cual sea el medio o dispositivo utilizado. Cualquier actuación indebida comportará una vulneración de la normativa vigente, pudiendo derivarse las pertinentes responsabilidades legales”. (Instrucción de la Secretaria General de 20 de abril de 2020, para la aplicación de la normativa de protección de datos en el uso de las herramientas digitales).

Puesto que este material forma parte de dichas sesiones docentes, queda prohibida expresamente su difusión o reproducción en todo o en parte.

CONCAVIDAD

Una propiedad relevante de las funciones definidas en un intervalo es la concavidad. En el caso de que la función sea derivable, la concavidad esta relacionada con el crecimiento o decrecimiento de la función derivada. Pero podemos hablar de la concavidad de funciones no derivables como vemos a continuación.

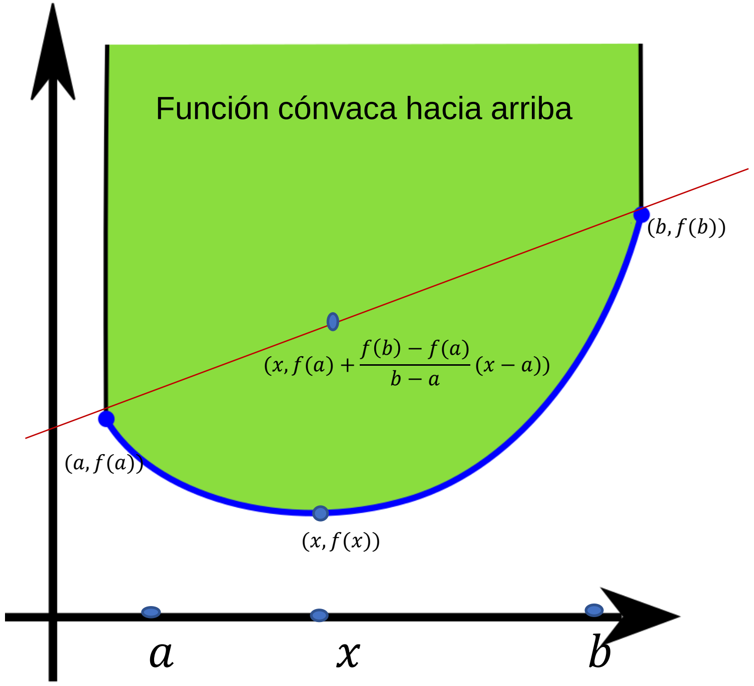
En lo que sigue I denotará (como siempre) un intervalo (no trivial) que puede ser de cualquier tipo, acotado, no acotado, abierto, cerrado, semiabierto, etc.

Definición. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **cóncava hacia arriba** (o **convexa**) en el intervalo I cuando para cada $a, x, b \in I$ tales que $a < x < b$ se verifica que

$$f(x) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Análogamente decimos que f es **cóncava hacia abajo** si

$$f(x) \ge f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$



Recordamos la siguiente definición:

Definición. Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ y dado $a \in I$, definimos el cociente incremental de f respecto del punto a como la función $f_a : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ dada por

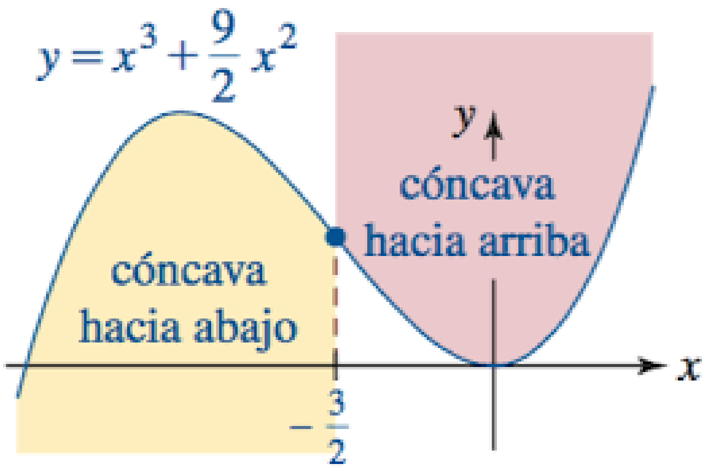
$$f_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

La propiedad $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ para $a < x < b$, se reescribe como que $f_a(x) \leq f_a(b)$.

En consecuencia:

Observación. La función $f : I \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba en I si, y solo si, para cada $a \in I$ el cociente incremental f_a es una función creciente en $I \cap]a,+\infty[$.

Análogamente, f es cóncava hacia abajo si cada $a \in I$ el cociente incremental f_a es una función decreciente en $I \cap]a,+\infty[$.



Pero veremos que $I \cap]a,+\infty[$ es reemplazable por $I\backslash\{a\}$.

Observación. La recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ también puede expresarse como

$$r(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

Como f es cóncava hacia arriba en I si, y solo si, $f(x) \leq r(x)$, para cada $a, x, b \in I$ con $a < x < b$ obtenemos:

$$f(x) \leq r(x) \Leftrightarrow f(x) \leq f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - b) \Leftrightarrow f(x) - f(b) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - b) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(nótese que $(x - b) < 0$). Puesto que $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ resulta que $f(x) \leq r(x) \Leftrightarrow f_b(a) \leq f_b(x)$.

Llegamos así a siguiente reformulación:

La función $f : I \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba en I si, y solo si, para cada $b \in I$ el cociente incremental f_b es una función creciente en $I \cap]-\infty, b[$.

Uniendo esto con lo que teníamos tenemos que:

f es cóncava hacia arriba en I si, y solo si, para cada $a \in I$ el cociente incremental f_a es una función creciente en$]-\infty, a[\cap I$ y en $I \cap]a, +\infty[$.

Como f_a está definida en $I \backslash \{a\}$ cabe preguntarse por el crecimiento de f_a en $I \backslash \{a\}$.

Supongamos que para cada $a \in I$ tenemos que f_a es una función creciente en $]-\infty, a[\, \cap I$ y en $I \cap\,]a, +\infty[$. Para probar que entonces cada f_a es creciente en $I \backslash \{a\}$, solo nos falta ver que si $x < a < b$, con $x, b \in I$ entonces $f_a(x) \leq f_a(b)$ (dado que si partimos de que si ambos valores, x y b, caen a la derecha o a la izquierda de a entonces se verifica la desigualdad). Veámoslo:

Puesto que $f_b(x) \leq f_b(a)$ (por ser f_b creciente a la izquierda de b), y $f_x(a) \leq f_x(b)$ (por ser f_x creciente a la derecha de x), tenemos que

$$f_a(x) = f_x(a) \leq f_x(b) = f_b(x) \leq f_b(a) = f_a(b),$$

por lo que f_a es creciente en $I \backslash \{a\}$, para cada $a \in I$.

Acabamos de probar que dada $f : I \to \mathbb{R}$ son equivalentes:
(i) f_a es una función creciente en $I \cap]a, +\infty[$, para cada $a \in I$.
(ii) f_a es una función creciente en $]-\infty, a[\cap I$ y en $I \cap\,]a, +\infty[$, para cada $a \in I$.
(iii) f_a es una función creciente en $I \backslash \{a\}$, para cada $a \in I$.

En particular hemos demostrado lo siguiente:

Teorema. $f : I \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba en I si, y solo si el cociente incremental $f_a : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ es creciente en $I \backslash \{a\}$, para cada $a \in I$.

CONCAVIDAD

Proposición. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba si, y solo si $-f : I \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia abajo.

Dem. Si $a \in I$, entonces $[-f]_a(x) = \frac{-f(x)-(-f)(a)}{x-a} = -[f_a(x)]$, para cada $x \in I \backslash \{a\}$. En consecuencia, $[-f]_a$ es creciente (resp. decreciente) en $I/\{a\}$ si, y solo si, f_a es decreciente (resp. creciente), y el resultado se obtiene por la proposición anterior. ■

Observación. $$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b). \quad (*)$$

Además,

$$\frac{b-x}{b-a} + \frac{x-a}{b-a} = 1.$$

Esto da lugar a la siguiente reformulación de la propiedad:

Proposición (caracterización de la concavidad hacia arriba). Dada $f : I \to \mathbb{R}$ son equivalentes:

(i) $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, para cada $a, x, b \in I$ tales que $a < x < b$.

(ii) $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$ para cada $a, b \in I$ siendo $a < b,$ y cada $t \in [0,1]$.

Dem. (i) ⇒ (ii) Hágase $t = \frac{b-x}{b-a}$ en (*) y nótese que entonces $x = ta + (1-t)b$.

(ii) ⇒ (i) se deduce del hecho de que $x = ta + (1-t)b$ siendo $t = \frac{b-x}{b-a}$, junto con (*). ■

Observación. En virtud del resultado anterior muchos autores definen las funciones cóncavas hacia arriba como aquellas funciones $f : I \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

para cada $a, b \in I$ siendo $a < b$, y cada $t \in [0,1]$.

Obviamente, las cóncavas hacia abajo son las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b),$$

para cada $a, b \in I$ siendo $a < b$, y cada $t \in [0,1]$.

En lo que sigue obviaremos hacer comentarios de este tipo. Por tanto:

Cualquier resultado que se enuncie para funciones cóncavas hacia arriba tendrá su versión análoga para funciones cóncavas hacia abajo.

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$. De hecho

$$|ta + (1-t)b| \leq t|a| + (1-t)\ |b|,$$

para cada $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y cada $t \in [0,1]$.

CONCAVIDAD

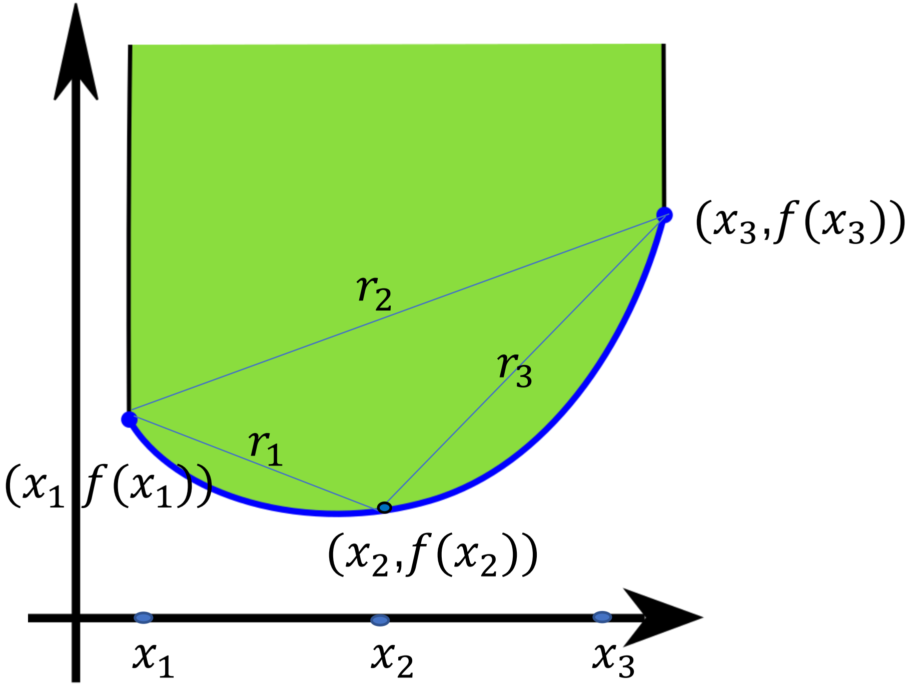
Teorema (Caracterización de la concavidad hacia arriba). Sea $f: I \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

(i) f es cóncava hacia arriba en I.

(ii) $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$, para cada $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

(iii) f_a es creciente en $I \backslash \{a\}$, para cada $a \in I$.

Observación. La equivalencia (i)⇔ (ii) se conoce como Teorema de las tres secantes.



Sean:

- r_1 la recta que pasa por $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$
- r_2 la recta que pasa por $(x_1, f(x_1))$ y $(x_3, f(x_3))$
- r_3 la recta que pasa por $(x_2, f(x_2))$ y $(x_3, f(x_3))$
- m_i la pendiente de la recta r_i para $i = 1,2,3$.

El Teorema de las tres secantes lo que afirma que

$$m_1 \leq m_2 \leq m_3$$

Hay una caracterización análoga para cóncavas hacia abajo que como hemos dicho no enunciamos.

Dem. (i) ⇔ (iii) ya está probado.

(iii) ⇔ (ii). Deseamos ver que si, $m_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $m_2 = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$ y $m_3 = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$, donde $x_1 < x_2 < x_3$, entonces $m_1 \leq m_2 \leq m_3$.

Nótese que $m_1 \leq m_2 \Leftrightarrow f_{x_1}(x_2) \leq f_{x_1}(x_3)$, y que esta última desigualdad se verifica por ser f_{x_1} creciente.

Análogamente $m_2 \leq m_3 \Leftrightarrow f_{x_3}(x_1) \leq f_{x_3}(x_2)$ y esta última desigualdad se verifica por ser f_{x_3} creciente. ■

En el siguiente resultado vamos a ver que si bien no podemos afirmar que la concavidad implica la derivabilidad, sí que "casi lo hace".

Recordamos que por I^0 denotamos el interior del intervalo I. (Esto es I desprovisto de sus extremos, cuando los tenga).

Teorema. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba entonces f es continua en I^0 y derivable por la izquierda y por la derecha en todo punto a de I^0. De hecho,

$$f'_-(a) := \sup\{f_a(x) : \ x \in I \text{ siendo } x < a\}$$
$$f'_+(a) := \inf\{f_a(x) : \ x \in I \text{ siendo } x > a\}.$$

Dem. Sea $a \in I^0$. Como f_a es creciente, $\{f_a(x) : \ x \in I \text{ siendo } x < a\}$ está mayorado por cualquier $f_a(b)$ con $b > a$, luego existe su supremo que coincide con $\lim_{x \to a^-} f_a(x) = f'_-(a)$. Análogamente con $\lim_{x \to a^+} f_a(x) = f'_+(a)$.

Para la continuidad, $0 \leq |f(x) - f(a)| = |f_a(x)|\,|x - a|$, y $f_a(x)$ está acotada en un entorno de a por tener límites laterales en a. (Tómese la definición de límite por la derecha y por la izquierda para $\varepsilon = 1$, por ejemplo, y se obtiene dicho entorno de a para el mínimo de los δ). ■

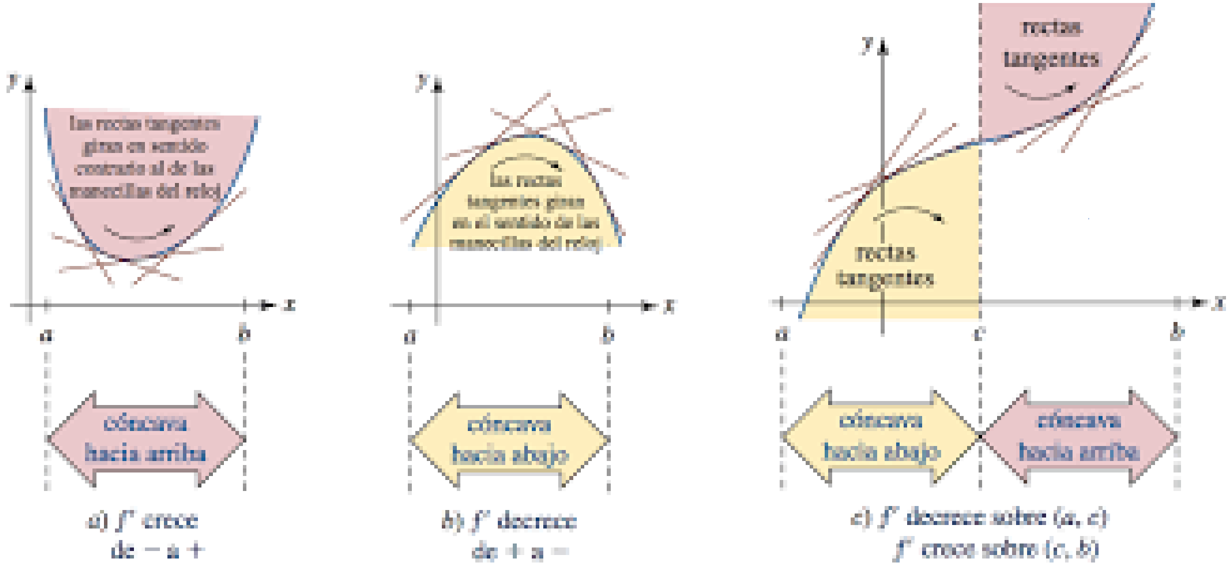
Observación.

(i) Hay funciones cóncavas hacia arriba en un intervalo que no son derivables en el interior del intervalo, como $f(x) = |x|$ en $[-1,1]$. Luego en el teorema anterior no cabría esperar que f fuese derivable en I^0.

(ii) La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3$ si $x \in]0,1[$ y $f(0) = f(1) = 4$ es cóncava hacia arriba y no es continua en I, por lo que no podemos reemplazar continua en I^0 por continua en I en la tesis del teorema anterior.

Puesto que si $f : I \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba entonces existen $f'_-(a)$ y $f'_+(a)$ para cada $a \in I^0$, es razonable preguntarse ¿qué propiedades específicas tienen las funciones derivables en I^0 que son cóncavas hacia arriba?

La respuesta a esta cuestión se aborda a continuación.



CONCAVIDAD

Recordamos que $f: I \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba en I si, y solo si, el cociente incremental $f_a: I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ es creciente en $I\backslash\{a\}$ para cada $a \in I$. Si f es derivable tenemos la siguiente información adicional.

Teorema. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en I^0. Son equivalentes:

(i) f es cóncava hacia arriba,

(ii) f' es creciente en I^0,

(iii) $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$, para cada $a \in I^0$ y cada $x \in I$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii). Como f es cóncava hacia arriba, f_a es creciente. Así, dados $a, b \in I^0$ con $a < b$ y $a < x < b$,

$$f'(a) = f'_+(a) = \inf\{f_a(x) : x \in I \text{ siendo } x > a\} \leq f_a(x) = f_x(a) \leq f_x(b) = f_b(x).$$

luego $f'(a) \leq \lim_{x \to b^-} f_b(x) = f'_-(b) = f'(b)$. Esto prueba que f' es creciente en I^0.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si f' es creciente en I^0, dado $a \in I^0$ y $x \in I$, por el T.V.M., existe c entre a y x, tal que

- Si $x < a$ entonces $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$ por ser $f'(c) \leq f'(a)$ (f' creciente) y $(x-a) < 0$.
- Si $x > a$ entonces $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$ por ser $f'(c) \geq f'(a)$ (f' creciente) y $(x-a) > 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Por (iii), tenemos que si $a < x < b$, entonces $x \in I^0$ siendo

$$f(a) \geq f(x) + f'(x)(a-x) \qquad \text{y} \qquad f(b) \geq f(x) + f'(x)(b-x) \qquad (**)$$

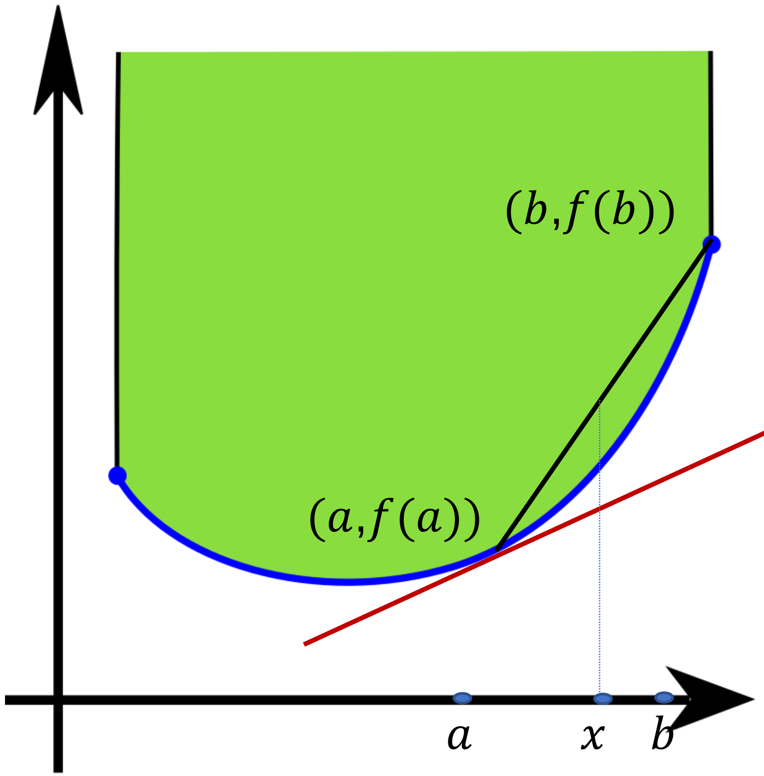
de donde

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \underset{(*)}{=} \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \underset{(**)}{\geq} \frac{b-x}{b-a}\left(f(x) + f'(x)(a-x)\right) + \frac{x-a}{b-a}\left(f(x) + f'(x)(b-x)\right) = f(x). \blacksquare$$

Observación. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I y derivable en I^0. Si f es cóncava hacia arriba entonces, para cada $a \in I^0$ y cada $x, b \in I$ con $a < x < b$ se tiene que

$$f(a) + f'(a)(x-a) \le f(x) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

(valor asignado a x en la recta tangente) (valor asignado a x en la recta secante)



Que la primera desigualdad se verifique para cada $a \in I^0$ y cada $x \in I$ es equivalente a la propiedad de ser cóncava hacia arriba así como a la propiedad de que f' sea creciente en I^0.

La segunda desigualdad (para cada $a, x, b \in I$ con $a < x < b$) no es más que la definición de función cóncava hacia arriba.

Corolario. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua en I y dos veces derivable en I^0 entonces f es cóncava hacia arriba en I si, y solo si, $f''(x) \ge 0$, para cada $x \in I^0$.

Dem. Puesto que $f' : I^0 \to \mathbb{R}$ es derivable en I^0, concluimos que f' es creciente en I^0 si y solo si $f''(x) \ge 0$, para cada $x \in I^0$, y por consiguiente el resultado se obtiene del anterior. ■

Observación. Como ya se advirtió, todos estos resultados tienen sus análogos para funciones cóncavas hacia abajo. Así, por ejemplo:

Corolario. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua en I y dos veces derivable en I^0 entonces, f es cóncava hacia abajo en I si, y solo si, $f''(x) \leq 0$, para cada $x \in I^0$.

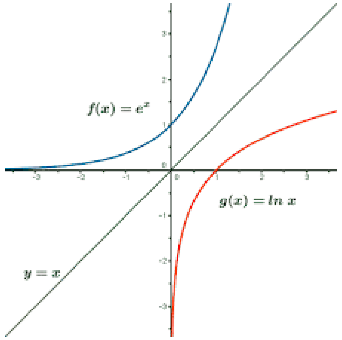
Dem. Este resultado es consecuencia del anterior teniendo en cuenta que f es cóncava hacia abajo si y solo si $-f$ es cóncava hacia arriba. ■

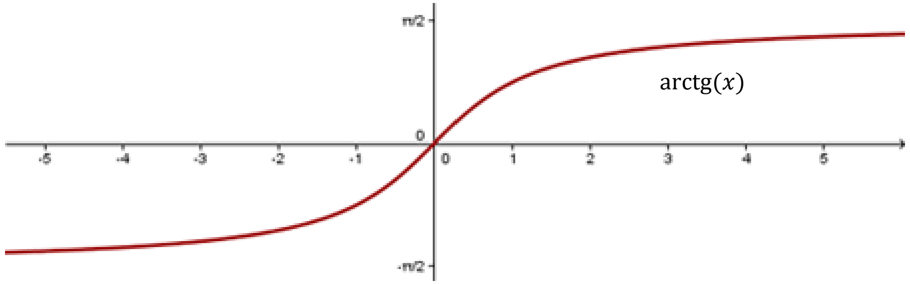
Ejemplos.

(i) $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$ si, y solo si, $a > 0$. Análogamente f es cóncava hacia abajo si, y solo si $a < 0$.

(ii) La exponencial es una función cóncava hacia arriba y el logaritmo es una función cóncava hacia abajo (en sus respectivos dominios de definición).

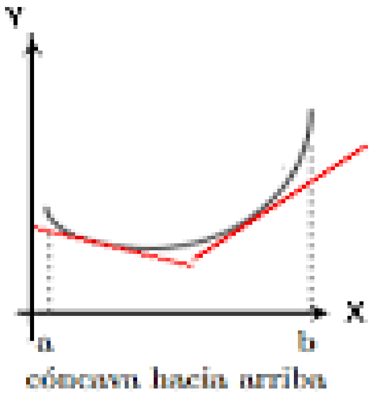
(iii) El arco-tangente es una función cóncava hacia arriba en $]-\infty, 0]$ y cóncava hacia abajo en $[0, +\infty[$.

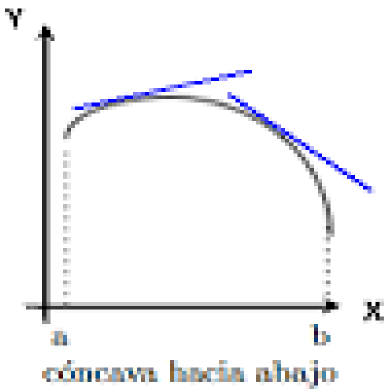


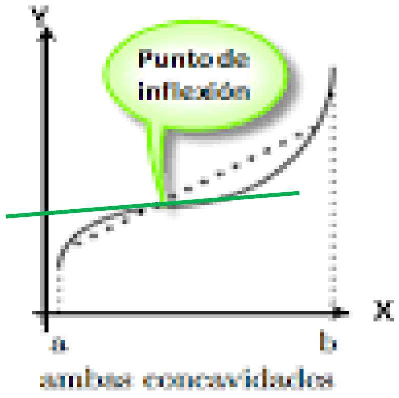


Definición. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ y sea $c \in I^0$. Se dice que f tiene un punto de inflexión en c si existe $r > 0$ tal que $]c-r, c+r[\subseteq I$ y f es cóncava hacia arriba en $]c-r, c[$ y cóncava hacia abajo en $]c, c+r[$, o al revés (esto es cóncava hacia abajo en $]c-r, c[$ y cóncava hacia arriba en $]c, c+r[$).

Observación. Esto es que la función f, en el punto c, pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo o al revés.







Cuando f es derivable en el punto de inflexión, la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(c, f(c))$ atraviesa dicha gráfica.

Esto se debe a que al pasar, por ejemplo, de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba entonces, la función pasa de estar por debajo de la tangente (a la izquierda de c) a estar por encima (a la derecha de c) y de ahí que atraviese a la gráfica.

A continuación presentamos una condición necesaria de punto de inflexión de una función dos veces derivable.

Proposición. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\in I^0$ y sea $c \in I^0$. Si f tiene un punto de inflexión en c y es dos veces derivable en c entonces $f''(c) = 0$.

Dem. Como existe $r > 0$ tal que la función f es cóncava hacia arriba en $I\, \cap]c-r, c[$ y cóncava hacia abajo en $I\, \cap]c, c+r[$ (o al revés) tenemos que f' ha de ser creciente en $I\, \cap]c-r, c[$ y decreciente en $I\, \cap]c, c+r[$ (o la revés). En consecuencia f' tiene un extremo relativo en $x = c$, y por la condición necesaria de extremo relativo concluimos que $f''(c) = 0$. ■

Observación. La función f pudiera no ser dos veces derivable en $x = c$, pero si lo es entonces $f''(c) = 0$. Los puntos $c \in I^0$ tales que o bien no existe $f''(c)$ o bien $f''(c) = 0$ se denominan puntos críticos de segunda especie. Por el resultado anterior, **ser punto crítico de segunda especie es condición necesaria para ser punto de inflexión**. Sin embargo, **un punto de inflexión puede no ser punto crítico** (o punto crítico de primera especie).

Ejemplo (curva de Gauss). Sea $f(x) = e^{-x^2}$. Su único punto crítico es $x = 0$ puesto que $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 0$ si, y solo si, $4x^2 - 2 = 0$, esto es $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Como $f''(x) \leq 0$ en $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ y $f''(x) \geq 0$ en $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\, \cup\,]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$, concluimos que f tiene un punto de inflexión en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (por pasar de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo) y otro en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (por pasar de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba). Nótese que ninguno de estos dos puntos son críticos (aunque sí lo son de segunda especie).

CONCAVIDAD

Definición. Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Sea $c \in I^0$. Se dice que f es cóncava hacia arriba en el punto c (resp. cóncava hacia abajo en c) si existe $r > 0$ tal que $]c-r, c+r[\subseteq I$, siendo f cóncava hacia arriba en $]c-r, c+r[$ (resp. cóncava hacia abajo).

Teorema (Criterio de la derivada de mayor orden). Sea $f: I \to \mathbb{R}$ de clase $C^{n+1}(I)$ y sea $c \in I^0$ tal que

$$f''(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0 \text{ y } f^{(n+1)}(c) \neq 0.$$

(i) Si $n+1$ es par entonces:

(a) $f^{(n+1)}(c) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en $x = c$. Además si $f'(c) = 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$.

(b) $f^{(n+1)}(c) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en $x = c$. Además si $f'(c) = 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$.

(ii) Si $n+1$ es impar entonces f tiene un punto de inflexión en $x = c$.

Dem. Para cada $x \in I$, existe d comprendido entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-c)^{n+1}.$$

Puesto que $f''(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0$, obtenemos que

$$f(x) - (f(c) + f'(c)(x-c)) = \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-c)^{n+1}.$$

$$f(x)-(f(c)+\ f'(c)(x-c))=\frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-c)^{n+1}$$

- **Si $\boldsymbol{f^{(n+1)}(c)}$ >0** entonces, por la continuidad $f^{(n+1)}$ ha de existir $r>0$ tal que $]c-r,c+r[\subseteq I,$ siendo $f^{(n+1)}(c)$ >0 para cada $x\in\,]c-r,c+r[$. Por tanto, $f^{(n+1)}(d)>0$, para cada d entre c y x.
- **Si $\boldsymbol{f^{(n+1)}(c)<0}$**, análogamente, por la continuidad de $f^{(n+1)}$ en c obtenemos que de $f^{(n+1)}(x)<0$ para cada cada $x\in\,]c-r,c+r[$. Por tanto, $f^{(n+1)}(d)<0$, para cada d entre c y x.

Concluimos así que **el signo de $\boldsymbol{f^{(n+1)}(d)}$ coincide con el signo de $\boldsymbol{f^{(n+1)}(c)}$**.

(i) Si $(\boldsymbol{n+1})$ es par, resulta que $(x-c)^{n+1}>0$ y por consiguiente,

- **Si $\boldsymbol{f^{(n+1)}(c)>0}$**, entonces $\frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-c)^{n+1}>0$ y en consecuencia $f(x)-(f(c)+\ f'(c)(x-c))>0,$ para cada $x\in]c-r,c+r[$ con $x\neq c$. Esto prueba que f es cóncava hacia arriba en $x=c$.
  En particular, si $f'(c)=0,$ entonces $f(x)-f(c)\ >0$, de donde $x=c$ es un mínimo relativo.

- **Si $\boldsymbol{f^{(n+1)}(c)<0}$** concluimos de forma análoga que f es cóncava hacia abajo en $x=c,$ por ser $f(x)-\big(f(c)+\ f'(c)(x-c)\big)<0$, para cada $x\in]c-r,c+r[$ con $x\neq c$. Además, si $f'(c)=0,$ entonces $f(x)-f(c)<0$ y así $x=c$ es un máximo relativo.

(ii) Si (n+1) es impar entonces el signo de $(x-c)^{n+1}$ cambia a derecha y a izquierda de $c,$ por lo que el signo de $f(x)-(f(c)+\ f'(c)(x-c))$ lo hace igualmente (al hacerlo el signo de $\frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-c)^{n+1}$).
En consecuencia f presenta en $x=c$ un punto de inflexión. ■

Corolario. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^{n+1}(I)$ y sea $c \in I^0$ tal que

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0 \ \text{ y } \ f^{(n+1)}(c) \neq 0,$$

(i) Si $(n+1)$ es par y $f^{(n+1)}(c) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$.
(ii) Si $(n+1)$ es par y $f^{(n+1)}(c) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$.
(iii) Si $(n+1)$ es impar entonces f tiene un punto de inflexión en $x = c$.

Observación. Para la afirmación (iii) no se requiere que sea $f'(c) = 0$.

Corolario. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^3(I)$. Sea $c \in I^0$.
(i) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0,$ entonces f tiene un máximo relativo en c.
(ii) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0,$ entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$.
(iii) Si $f''(c) = 0,$ y $f'''(c) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = c$.

Observaciones.
(i) Para las afirmaciones (i) y (ii) basta con que la función f sea de clase $C^2(I)$.
(ii) Si f es clase $C^2(I)$ y $f''(c) < 0,$ entonces f es cóncava hacia abajo en $x = c$.
(iii) Si f es clase $C^2(I)$ y $f''(c) > 0,$ entonces f es cóncava hacia arriba en $x = c$.

Ejemplo. La función $f\,(x) = \ln[(1+x^2)^2]$ es cóncava hacia abajo en $]-\infty,-1[$ y en $]1,+\infty[$ y cóncava hacia arriba en $]-1,1[$. De hecho, $f'(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, y $f''(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. En consecuencia $x=-1$ y $x=1$ son puntos de inflexión.
La función f decrece en $]-\infty,0[$, crece en $]0,+\infty[$ y presenta un mínimo relativo (y absoluto) en $x=0$.

Ejemplo. La función $f(x) = 3x^4 - 10\,x^3 - 12x^2 + 12$ es tal que $f''(x) = 36x^2 - 60x - 24$, de donde $f''(x)$ =0 si, y solo si, $x = -\frac{1}{3}$ o $x=2$. Como $f'''(x) = 72x - 60$, y $f'''\left(-\frac{1}{3}\right) = -84 \neq 0$ y $f'''(2) = 84 \neq 0$ concluimos que f presenta un punto de inflexión en $x = -\frac{1}{3}$ y otro en $x=2$.
Como $f''(x) = 36(x+\frac{1}{3})(x-2)$ concluimos que f es cóncava hacia arriba en $]-\infty,-\frac{1}{3}[$ y en $]2,+\infty[$ y cóncava hacia abajo en $]-\frac{1}{3},2[$. Los extremos relativos son $\frac{5\pm\sqrt{57}}{4}$ (mínimos relativos) y 0 (máx. relativo).

Ejemplo. La función $f(x) = -2x^5 + 7x - 1$ es tal que $f'(x) = -10x^4 + 7$. Como $f''(x) = -40x^3$, tenemos que $f''(x) = 0$ si, y solo si, $x=0$ siendo $f'''(0) = -40 \neq 0$ concluimos que $x=0$ es un punto de inflexión siendo f cóncava hacia arriba en $]-\infty, 0\,[$ y cóncava hacia abajo en $]0,+\infty[$.
Puesto que $f'(x) = 0$ si y solo si $|x| = \sqrt[4]{\frac{7}{10}}$, esto es $x = \pm\sqrt[4]{\frac{7}{10}}$, siendo $f''\left(\sqrt[4]{\frac{7}{10}}\right) < 0$ y $f''\left(-\sqrt[4]{\frac{7}{10}}\right) > 0$ concluimos que f tiene un máximo relativo en $\sqrt[4]{\frac{7}{10}}$ y un mínimo relativo en $-\sqrt[4]{\frac{7}{10}}$.