21/10/2020

Problemas del tema 1

1. $X = \{a, b\}$ ¿Cuántas topologías?

En un conjunto finito hay una cantidad finita de topologías

$\# X$ = cardinal de X = nº elementos de X

$\# X = K$ $\quad \# P(X) = 2^K$ $\quad T \subset P(X)$ una topología T es un subconjunto de $P(X)$. ¿Cuántos subconjuntos tiene $P(X)$?

$\# P(X) = 2^K$ $\quad \# P(P(X)) = 2^{2^K}$ El número de topologías en X finito con $\# X = K$ es menor que igual que 2^{2^K}

Si $X = \{a, b\} \Rightarrow$ el nº de top en X es finito y $\underline{\underline{\leq 2^{2^2} = 16}}$

$T_t = \{\phi, X\}$, $T_D = P(X)$

- $\underline{T_a = \{\phi, \{a\}, X\}}$ $\quad T_b = \{\phi, \{b\}, X\}$

$T_t, P(X), T_a, T_b$ son todas las posibles topologías en X.

$T_a = P(X) \setminus \{\{b\}\}$ (no se pueden añadir más conjuntos)

T_a, T_b = topología de Sierpinski

$\cancel{\boxed{P(X) \setminus \{b\}}}$

- $P(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$
  4

$\underset{\text{subconj}}{\underline{A \subset X}}$ $\quad \underset{\text{elemento de } P(X)}{\underline{A \in P(X)}}$ $\quad \cancel{\boxed{A \subset P(X)}}$

2. (a) $X \neq \emptyset$ $\quad T = \{\emptyset, A_1, \dots, A_k, X\}$ $\quad \emptyset \neq A_1 \subset \dots \subset A_k \neq X$

podemos suponer $A_i \neq A_j$, $i \neq j$

Sí es topología

1. $\emptyset, X \in T$

2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T$ $\quad U_i = \emptyset$ ó A_j ó X

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \begin{cases} X & \text{si } U_i = X \text{ para algún } i \in I \\ A_j & \text{si } U_i = A_j \text{ para algún } i \text{ y } U_r \neq A_{j+1}, \dots, A_k, X \ \forall r \in I \\ \emptyset & \text{si } U_i = \emptyset \ \forall i \in I \end{cases}$$

3. $U_1, \dots, U_r \in T \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_r \in T.$

Existe $U_{i_0} \in \{U_1, \dots, U_r\}$ tal que $U_{i_0} \subset U_j \ \forall j \in \{1, \dots, r\}$

$U_1 \cap \dots \cap U_r = U_{i_0}$ $\qquad U_{i_0} \subset U_{i_1} \subset \dots \subset U_{i_r}$

$$\left.\begin{array}{l} U_{i_0} \subset U_j \ \forall j \Rightarrow U_{i_0} \subset U_1 \cap \dots \cap U_r \\ U_1 \cap \dots \cap U_r \subset U_{i_0} \end{array}\right\} \Rightarrow U_{i_0} = U_1 \cap \dots \cap U_r$$ ◻

$X = \{a, b, c\}$ $\qquad T = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ es top en X

$\emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset X$

2 (a) $X \neq \emptyset$ $\quad T = P(A) \cup \{X\}$ $\qquad P(A) = \{B : B \subset A\}$

1. $\emptyset \in P(A) \Rightarrow \emptyset \in T$; $X \in T$

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T \Rightarrow U_i \subset A$ ó $U_i = X$

$$\begin{cases} \text{Si algún } U_{i_0} = X = \bigcup_{i\in I} U_i = X \\ \text{Si ningún } U_i = X \Rightarrow U_i \subset A \ \forall i\in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \subset A \Rightarrow \underline{\bigcup_{i\in I} U_i} \in P(A) \subset \underline{T} \end{cases}$$

3. $U_1, \dots, U_k \in T$

Si $U_i = X \ \forall i\in\{1,\dots,k\} \Rightarrow U_1\cap\dots\cap U_k = X \in T$

Supongamos que algún $U_{i_0} \in P(A) \Rightarrow U_{i_0} \subset A \Rightarrow U_1\cap\dots\cap U_k \subset U_{i_0} \subset A$
$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in P(A) \subset T$

$$\boxed{\begin{array}{lll} T = \{\phi, \{a\}, X\} & X = \{a,b\} & P(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\} \\ & P(\{a\}) \cup X = \{\phi, \{a\}, X\} & \end{array}}$$

3 (c) $X = \mathbb{N}$ $\quad T = \{\underbrace{[n,+\infty) \cap \mathbb{N}}_{= U_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\underline{\phi, \mathbb{N}}\}$

$\uparrow$ $\quad U_n \supset U_{n+1}$

1. $\phi, X \in T$

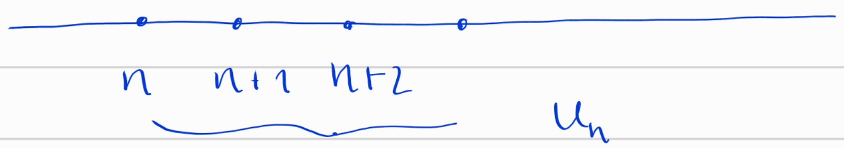
2. $\bigcup_{i\in I} V_i \in T$. $\quad \boxed{\exists V_{i_0} \text{ tal que } V_i \subset V_{i_0} \quad \forall i\in I}$

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} V_i = V_{i_0} \in T}$$

22/10/2020

2 (c) $X = \mathbb{N}$ $\quad T = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ $\quad U_n = [n, +\infty) \cap \mathbb{N}$

$= \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$



1. $\emptyset, \mathbb{N} \in T$

2. $\{V_i\}_{i \in I} \subset T \Rightarrow \bigcup V_i \in T$

→ Si algún $V_{i_0} = X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i = X \in T$

→ Si $\underline{\underline{V_i \neq X}}$ $\forall i \in I \Rightarrow V_i = U_{n_i}$ ó $V_i = \emptyset$

Si $V_i = \emptyset$ $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i = \emptyset$

Si algún $V_{i_0} = U_{n_{i_0}}$ Tomamos $\underline{\underline{m}} = \min\{n : [n, +\infty) = V_j$ para algún $j \in I\}$

$[m, +\infty) = V_{j_0} \supset V_i$ $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i = V_{j_0} = [m, +\infty) \in T$

3. $V_1, \ldots, V_K \in T \Rightarrow V_1 \cap \ldots \cap V_K \in T$

Si $V_i = \emptyset$ para algún $i \in I \Rightarrow V_1 \cap \ldots \cap V_K = \emptyset \in T$

Si $V_i \neq \emptyset$ para todo $i \Rightarrow V_i = U_{n_i}$ ó $V_i = X$

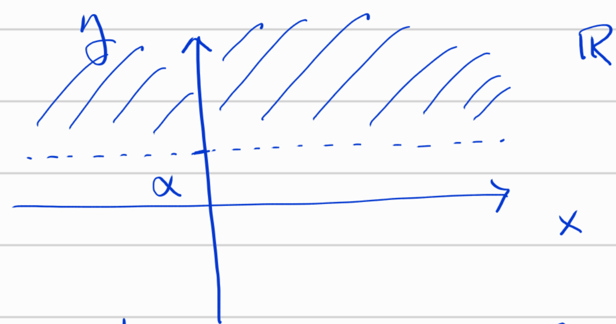
Supongamos que algún $V_i \neq X$ (si $V_i = X$ $\forall i \in I \Rightarrow V_1 \cap \ldots \cap V_K = X \in T$)

Sea $\underline{\underline{m}} = \max\{n : [n, +\infty) = V_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, K\}\}$

$V_{i_0} = [m, +\infty) \subset V_1, V_2, \dots, V_K \Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_K = V_{i_0} = [n, +\infty) \in T$ ■

③ Grabación

4. $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad U_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \alpha\} = \mathbb{R} \times [y, +\infty)$



(a) $T = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, \mathbb{R}^2\}$ es una top en $\mathbb{R}^2$

1. $\phi, \mathbb{R}^2 \in T$

2. $\{V_i\}_{i \in I} \subset T$. Siempre existe V_{i_0}, con $i_0 \in I$, tal que $\boxed{V_{i_0} \supset V_i}$ $\forall i \in I$.
   Si algún $V_i = \mathbb{X}$ tomamos ese elemento como V_{i_0}.
   Si ningún $V_i = \mathbb{X}$ tomamos $V_i = \phi$ (si todos los $V_i = \phi$) o
   $V_i = \mathbb{R} \times (m, +\infty)$ $\quad m = \min\{n : \mathbb{R} \times (n, +\infty) = V_i$ para un cierto $i \in I\}$

   $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i = V_{i_0} \in T$

3. $V_1, \dots, V_K \in T$. Siempre existe $V_{i_0} \in T$ tal que $V_{i_0} \subset V_i$ $\forall i = 1, \dots, K$

Si todos los $V_i = \phi$, se toma $V_{i_0} = \phi$. Si $V_i \neq \phi$ para todo i, se toma $V_{i_0} = \mathbb{X}$ si $V_i = \mathbb{X}$ $\forall i \in \{1, \dots, K\}$, y en caso de que algún $V_i \neq \mathbb{X}$ se toma $V_{i_0} = \mathbb{R} \times (m, +\infty)$ con $m = \max\{n : \mathbb{R} \times (n, +\infty) = V_i$ para $i \in$
$i \in \{1, \dots, K\}\}$

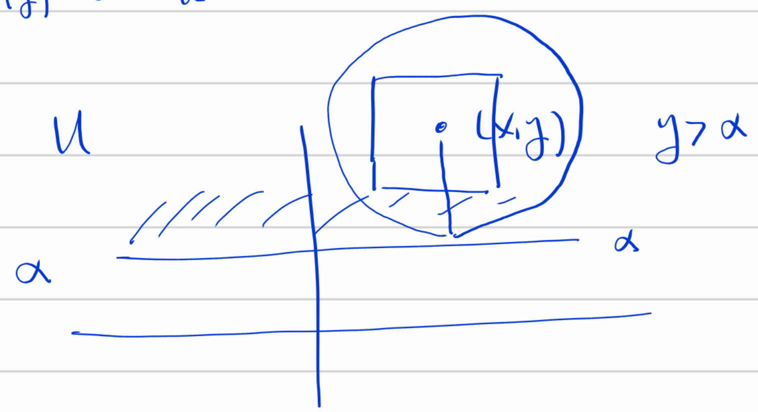
$\Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_k = V_{i_0} \in T$

(b) $T \subset T_u$ ó $T_u \subset T$

$U \in T$. Si $U \neq \phi, \mathbb{R}^2$, entonces $U = \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Veamos que U es abierto para T_u. Para ello vamos a tomar $(x,y) \in U$ y vamos a ver que existe $V_{(x,y)} \in T_u$ tal que $(x,y) \in V_{(x,y)} \subset U$

Entonces $U = \bigcup_{(x,y) \in U} V_{(x,y)} \in T_u$

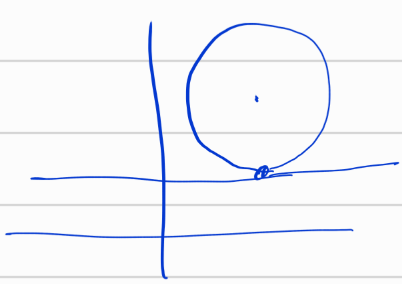


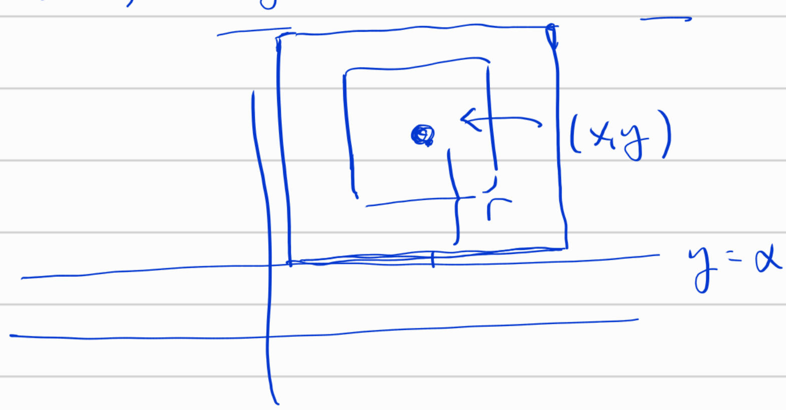
$(x,y) \in U \Rightarrow y > \alpha$ Sea $r = y - \alpha > 0$ Entonces el conjunto

$V_{(x,y)} = (x-r, x+r) \times (y-r, y+r) = B_{d_\infty}((x,y), r) \in T_u$ (d_∞, d_2 son equiv.)

$\boxed{V_{(x,y)} \subset U}$ Sea $(x',y') \in V_{(x,y)} \Rightarrow x' \in (x-r, x+r)$, $y' \in (y-r, y+r)$

$\Rightarrow x' \in \mathbb{R}$, $y' > y - r = \alpha \Rightarrow (x',y') \in \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty) = U$





Se puede comprobar que $B_{d_2}((x,y),r) \subset U$.

$U \in T \Rightarrow$ si $U = \emptyset, \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{U \in T_u}$. Si $U = \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty) \Rightarrow \underline{U \in T_u}$

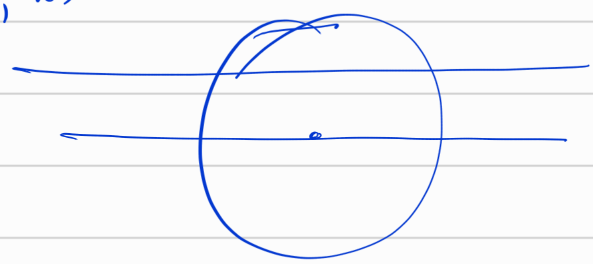
Por tanto, $T \subset T_u$

$\boxed{T_u \not\subset T}$

Sea $U = B_{d_2}((0,0),1)$. No existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\underset{\text{acotado}}{U} = \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty) \leftarrow$ no acotado

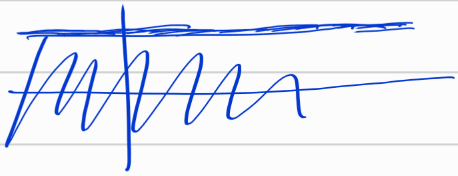
siempre existe $(x,y) \in \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty)$ con $y > 1$.

$\mathbb{R} \times (\alpha, +\infty)$



(c) $G_T = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{C_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ $C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \alpha\}$.

$C_\alpha = \mathbb{R}^2 \setminus U_\alpha$.



(5.) Grabación

(6) Grabación

7. Sea (X, T) e. top $A \subset X$

$T_A = \{ U \cap A : U \in T \}$ es una top. en A

(A, T_A) es espacio topológico. T_A es la top. inducida en A.

1. $\phi, A \in T_A$ $\qquad \underset{\underset{T}{\cap}}{\phi} = \phi \cap A, \qquad A = \underset{\underset{T}{\cap}}{X} \cap A \in T_A$

2. Sea $\{V_i\}_{i \in I} \subset T_A \Rightarrow \forall i \in I, \exists \underline{U_i \in T} \,/\, V_i = U_i \cap A$.

$$\underline{\bigcup_{i \in I} V_i} = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \Big(\underset{\underset{T}{\cap}}{\bigcup_{i \in I} U_i} \Big) \cap A \in T_A$$

3. $V_1, \dots, V_K \in T_A \Rightarrow \exists\, U_1, \dots, U_K \in T \,/\, V_1 = U_1 \cap A, \dots, V_K = U_K \cap A$

$$V_1 \cap \dots \cap V_K = (U_1 \cap A) \cap \dots \cap (U_K \cap A) = \underset{\underset{T}{\cap}}{(U_1 \cap \dots \cap U_K)} \cap A \in T_A$$

(8) Grabación $\qquad A \subset B \subset X$

T_A = top. ind. por X
T_B = " " " "

$A \subset B \qquad (T_B)_A = T_A$

La topología inducida en A por B = top. inducida en A en $\mathbb{X}$

9. $(\mathbb{X}, T)$ e.t. $\quad A \subset \mathbb{X} \quad \mathcal{B}$ base de T

$$\mathcal{B}_A = \{ B \cap A : B \in \mathcal{B} \}$$

base de T_A

Tomamos $V \in T_A$, $V \neq \phi$. Existe $U \in T$ tal que $V = U \cap A$

Como $\mathcal{B}$ es base de T, existe $\{B_i\}_{i \in I}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$

$$\underset{T_A}{\underset{\cap}{V}} = U \cap A = \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap A = \bigcup_{i \in I} \underset{\mathcal{B}_A}{\underset{\cap}{(B_i \cap A)}}$$

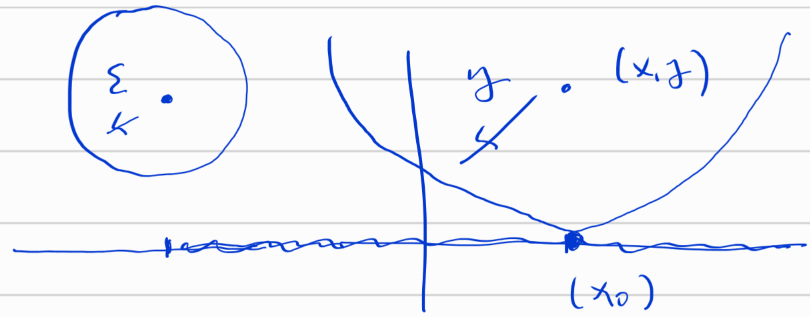
$\Rightarrow \mathcal{B}_A$ es base de T_A

10 Grabación

11 $\quad x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in N_x, \ U \cap A \neq \phi$

$\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_x, \ B \cap A \neq \phi$

12 Semiplano de Moore



$\mathbb{R}_2^+ = \{(x,y) : y \geq 0\}$

$\mathcal{B}_M = \{ B((x,y),\varepsilon) : y>0,\ 0<\varepsilon<y \} \cup \{ B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} \}$

$\mathcal{B}_M$ es base de una top. en $\mathbb{R}_2^+$

1. $\forall\, p \in \mathbb{R}^2_+$, existe $B \in \mathcal{B}_M$ tal que $p \in B$ $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathbb{R}^2_+ \right)$

$p=(x,y)$. Si $y>0$, tomamos $\underset{\substack{\ni \\ p}}{B((x,y),\varepsilon)}$ con $\varepsilon = \frac{y}{2}$. $\in \mathcal{B}_M$

Si $y=0$ tomamos $\underset{\substack{\ni \\ p}}{B((x,1),1)} \cup \{\underset{\substack{\| \\ p}}{(x,0)}\} \in \mathcal{B}_M$

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_M$ y $p \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}_M$ tal que $p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Para probar esta propiedad, siempre podemos suponer que $B_1 \neq B_2$
(si $B_1 = B_2$, tomamos $B_3 = B_1 = B_1 \cap B_2$)

Sean $B_1 \neq B_2$

Si $B_1 \neq B_2$ entonces $B_1 \cap B_2$ no contiene punto del eje x

Sea $\mathcal{B}_M^1 = \{ B((x,y),\varepsilon) : y>0,\ 0<\varepsilon<y \}$
$\mathcal{B}_M^2 = \{ B((x,y),y) : y>0 \} \cup \{(x,0)\}\}$

- $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_M^1 \Rightarrow B_1, B_2$ son bolas euclídeas $B_i \cap \{y=0\} = \phi$

$\Rightarrow B_1 \cap B_2$ es abto en T_u (top. usual de $\mathbb{R}^2$)

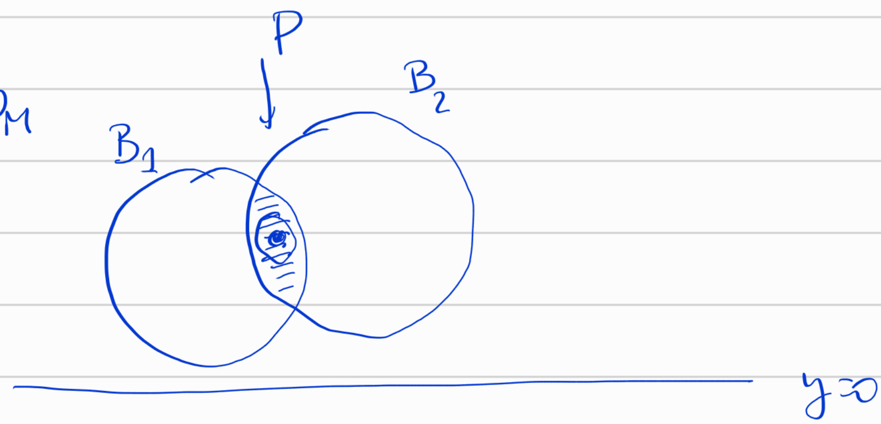
$\underline{B_1 \cap B_2} \cap \{y=0\} = \phi$

$B_1 \cap B_2 \in T_u$; $B_1 \cap B_2 \subset \mathbb{R}^2_+ \setminus \{y=0\}$.

Sea $p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow p=(x,y)$, $y>0$. Como $B_1 \cap B_2 \in T_u$, $p \in B_1 \cap B_2$ existe $\varepsilon>0$ (que podemos tomar $< y$) tal que

$$B((x,y),\varepsilon) \subset B_1 \cap B_2$$

$$\mathcal{B}_M^1 \subset \mathcal{B}_M$$



- $B_1 \in \mathcal{B}_M^1$, $B_2 \in \mathcal{B}_M^2$

$B_1 = B((x,y),\varepsilon)$ $\qquad 0<\varepsilon<y \qquad y>0$

$B_2 = B((x',y'),y') \cup \{(x',0)\}$ $\qquad y'>0$

$B_1 \cap B_2 = B((x,y),\varepsilon) \cap B((x',y'),y')$ $\qquad (x',0) \notin B_1$

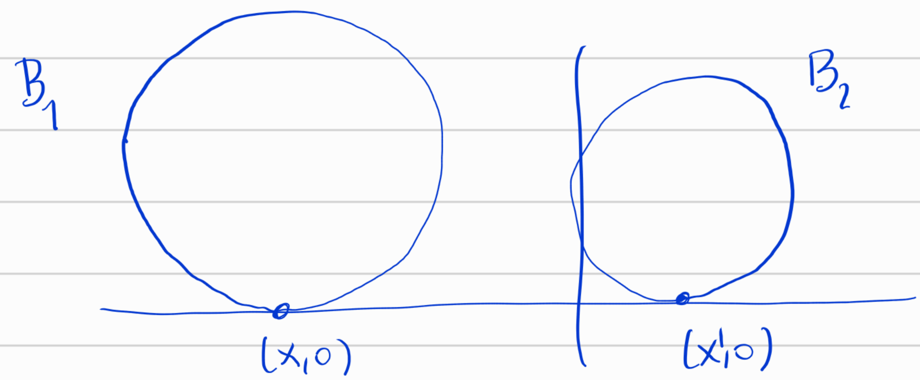
Estamos en el caso anterior $\qquad \underline{p \in B_1 \cap B_2} = B((x,y),\varepsilon) \cap B((x',y'),y')$

$\underline{p=(p_1,p_2)}$ $\qquad p_2>0$

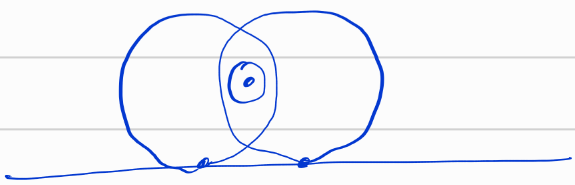
Sea $0<\varepsilon<p_2$ tal que $B((p_1,p_2),\varepsilon) \subset B_1 \cap B_2$
$$\underset{\mathcal{B}_M^1}{\cap}$$

- $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_M^2$

$B_1 = B((x,y),y) \cup \{(x,0)\}$
$B_2 = B((x',y'),y') \cup \{(x',0)\}$.

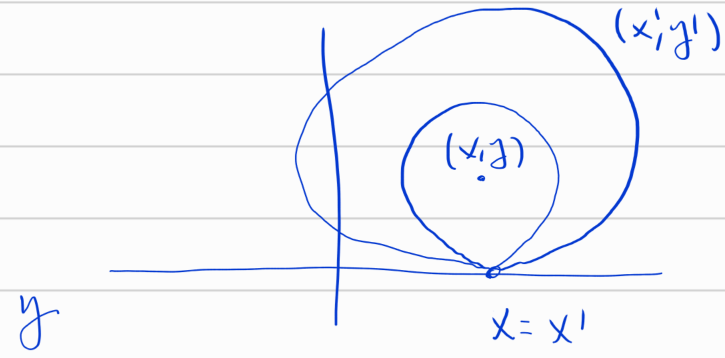


→ Si $x \neq x' \Rightarrow (x,0) \notin B_2$ y $(x',0) \notin B_1$
$\Rightarrow B_1 \cap B_2 = B((x,y),y) \cap B((x',y'),y')$ $\quad B_1 \cap B_2 \cap \{y=0\} = \phi$



Razonamos como antes y encontramos, para todo $p \in B_1 \cap B_2$, $\varepsilon>0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subset B_1 \cap B_2$ y $B(p,\varepsilon) \in \mathcal{B}_M^1$.

→ Si $x = x'$



$B_1 = B((x,y),y) \cup \{(x,0)\}$ $\qquad x = x'$
$B_2 = B((x',y'),y') \cup \{(x,0)\}$

Si $y = y' \Rightarrow B_1 = B_2$ y tomamos $B_3 = B_1 = B_2$

Si $y \neq y'$, podemos suponer que $y < y'$. Es fácil ver

$$(*) \quad B((x,y),y) \subset B((x,y'),y')$$

$\Rightarrow B_1 \subset B_2$ y $B_1 \cap B_2 = B_1$. Tomamos $B_3 = B_1 = B_1 \cap B_2$

Probamos $(*)$. Sea $\underline{(z_1,z_2) \in B((x,y),y)} \Rightarrow (x-z_1)^2 + (y-z_2)^2 < y^2$.
Veamos que $\underline{(z_1,z_2)} \in B((x,y'),y')$. Calculamos

$$(x-z_1)^2 + (y'-z_2)^2 = (x-z_1)^2 + (y'-y+y-z_2)^2 =$$
$$= (x-z_1)^2 + 2(y'-y)\cdot(y-z_2) + (y'-y)^2 + (y-z_2)^2$$
$$< y^2 + 2(y'-y)(y-z_2) + (y'-y)^2 \overset{?}{<} (y')^2$$
$$\Updownarrow$$

$(*)$ $y^2 + 2(y'-y)(y-z_2) + \cancel{(y')^2} - 2yy' + y^2 < \cancel{(y')^2}$ 0

$$\cancel{y^2} + \cancel{2y'y} - \cancel{2y^2} + 2y'(-z_2) + 2(-y)(-z_2) - \cancel{2yy'} + \cancel{y^2} < 0$$

$$2(-y'z_2 + yz_2) < 0$$

$$\underline{2(y-y')z_2 < 0} \quad \text{cierto} \quad y - y' < 0 \quad z_2 > 0$$

$\Rightarrow B((x,y),y) \subset B((x,y'),y') \Rightarrow B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} \subset$

$\subset B((x,y'),y') \cup \{(x,0)\}$

La topología inducida por $\mathcal{B}_M$ en $\mathbb{R}^2_+$ es la topología de Moore T_M.
$A = \{y=0\} \subset \mathbb{R}^2_+$

$(A,(T_M)_A)$ es la topología discreta en A.

$$\{(x,0)\} = \underbrace{\left(B((x,1),1) \cup \{(x,0)\} \right)}_{\in\ \mathcal{B}_M \subset T_M} \cap A \in T_A$$

13. $\mathbb{R}$

$T_1 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$
$T_2 = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$

1. T_1 topología (Se hace igual que 2(c)).

2. T_2 no topología

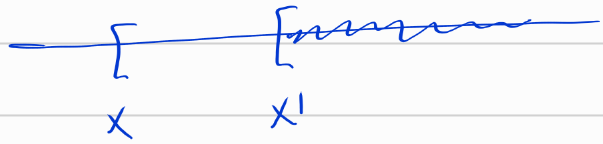
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n},+\infty\right) = (0,+\infty) \notin T_2$$

no existe un elemento de esta familia que sea el mayor de todos.

13 (b) T_2 es base de una topología en $\mathbb{R}$.

$$[x,+\infty) \cap [x',+\infty) = [\max\{x,x'\}, +\infty)$$

Si $x' \geq x \Rightarrow [x,+\infty) \supset [x',+\infty)$.



13 (c) Si T es la topología generada por T_2 vamos a comparar T con T_1 y T_u.

23/10/2020

$\mathcal{T}_1 = \{(a,+\infty) : a\in\mathbb{R}\}\cup\{\phi,\mathbb{R}\}$ topología en $\mathbb{R}$

$\mathcal{T}_2 = \{[a,+\infty) : a\in\mathbb{R}\}\cup\{\phi,\mathbb{R}\}$ base de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}$

$\mathcal{T}_u$ = topología usual

13(c) Comparar $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_u$ Comparar $\mathcal{T}, \mathcal{T}_u$

- $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_u$ $(a,+\infty)\in\mathcal{T}_u$ $x\in(a,+\infty) \Rightarrow x>a \Rightarrow r_x = x-a>0$

$\Rightarrow (x-r_x, x+r_x)\subset(a,+\infty)$

$\Rightarrow (a,+\infty) = \bigcup_{x\in(a,+\infty)} (x-r_x, x+r_x)$

$\mathcal{T}_u \not\subset \mathcal{T}_1$: $(0,1)\in\mathcal{T}_u$ $(0,1)\notin\mathcal{T}_1$

$\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_u$

- $\mathcal{T}\not\subset\mathcal{T}_u$ $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}$ $\underline{[0,+\infty)\in\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}}$, pero $[0,+\infty)\notin\mathcal{T}_u$

No existe $r>0$ tal que $(-r,r)\subset[0,+\infty) \Rightarrow [0,+\infty)\notin\mathcal{T}_u \Rightarrow$
$\mathcal{T}\not\subset\mathcal{T}_u$

$\mathcal{T}_u\not\subset\mathcal{T}$ $(0,1)\in\mathcal{T}_u$ $(0,1)\in\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x\in(0,1)$,
existe $B\in\mathcal{T}_2$ tal que $x\in B\subset(0,1)$. Si $x\in B \Rightarrow B\neq\phi$
$\Rightarrow$ o bien $B=\mathbb{R}$ o bien $B=[a,+\infty)$ para cierto $a\in\mathbb{R}$
En ninguno de los dos casos, $B\subset(0,1)$. $\Rightarrow \mathcal{T}_u\not\subset\mathcal{T}$

Las topologías T_1 T_h no son comparables

13 (d) Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$ ¿Es cierto que $\bigcap_{i\in I} U_i \in T$?

$U_n = [-\frac{1}{n}, +\infty) \in T_1 \subset T \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, +\infty) = [0,+\infty)$

$\Big\}$ no sirve

$\{U_i\}_{i\in I} \subset T$. Si $\bigcap_{i\in I} U_i = \phi \Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i$ es abto. Sup $\bigcap_{i\in I} U_i \neq \phi$.

Sea $\underline{x \in \bigcap_{i\in I} U_i} \Rightarrow \underline{x \in U_i \ \forall i \in I} \Rightarrow \exists B_i \in T_1$ tal que $x \in B_i \subset U_i$

$B_i = \mathbb{R}$ o $B_i = [a, +\infty)$. En cualquiera de los dos casos, $[x,+\infty) \subset B_i \subset U_i$
$\forall i \in I \Rightarrow \underline{[x,+\infty)} \subset \bigcap_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i \in T.$

28/10/2020

13. (d) En $(\mathbb{R}, T)$, la intersección arbitraria de abiertos es abierto.
Tomamos $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$. Veamos que $\bigcap_{i\in I} U_i \in T$. Supongamos que $\bigcap_{i\in I} U_i \neq \phi$.

Fijamos $\underline{x \in \bigcap_{i\in I} U_i}$ $\Rightarrow$ $x \in U_i \ \forall i \in I$ $\quad$ T = top generada por $T_2 =$
$= \underline{\{[a,+\infty) : a\in\mathbb{R}\}} \cup \{\phi, X\}$

$\Rightarrow \exists B_x \in T_2$ tal que $\underline{x \in B_x} \subset U_i \ \forall i \in I$
$B_x = \mathbb{R}$ ó $[a,+\infty)$. En cualquiera de los dos casos $[x,+\infty) \subset \mathbb{R}$ ó $[a,+\infty)$
$\Downarrow$
x

$\Rightarrow \forall x \in \bigcap_{i\in I} U_i$, $[x,+\infty) \subset U_i \ \forall i \in I \Rightarrow \underline{[x,+\infty) \subset \bigcap_{i\in I} U_i}$

Por tanto

$$\bigcap_{i\in I} U_i = \bigcup_{x\in \bigcap_{i\in I} U_i} \underbrace{[x,+\infty)}_{\cap\ T_2 \subset T} \in T. \qquad \blacksquare$$

14. Grabación

15. $\mathbb{R}$ $\qquad T := \{U \subset \mathbb{R} : 0 \notin U\} \cup \{U \subset \mathbb{R} : (-1,1) \subset U\}$

- Si $U \in T$ y $0 \in U \Rightarrow (-1,1) \subset U$

(a) Probamos que T es una top en $\mathbb{R}$.

1. $0 \notin \phi \Rightarrow \phi \in T$; $(-1,1) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in T$

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$

- Si $0\notin U_i$ para ningún $i\in I \Rightarrow 0 \notin \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T$

- Si $0\in U_{i_0}$ para cierto $i_0\in I \Rightarrow (-1,1)\subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i\in T$

3. $U_1,\dots,U_k\in T$.

- Si $0\in U_i\ \forall i=1,\dots,k \Rightarrow (-1,1)\subset U_i\ \forall i=1,\dots,k \Rightarrow (-1,1)\subset U_1\cap\dots\cap U_k$
$\Rightarrow U_1\cap\dots\cap U_k\in T$

- Si $0\notin U_{i_0} \Rightarrow 0\notin U_1\cap\dots\cap U_k \Rightarrow U_1\cap\dots\cap U_k\in T$

$G=\{F\subset\mathbb{R} : X\setminus F\in T\} = \{F\subset \mathbb{R}: 0\in U\}\cup\{F\subset\mathbb{R}: F\subset \mathbb{R}\setminus(-1,1)\}$ $\leftarrow$

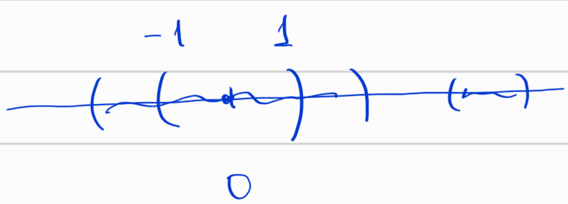
(b) $\mathcal{B}$ base de T con la menor cantidad posible de conjuntos.

- Si $x\neq 0 \Rightarrow \{x\}\in T$
- $(-1,1)\in T$

$\mathcal{B}=\{\{x\}: x\neq 0\}\cup\{(-1,1)\}\subset T$ es base de T.

Sea $U\in T$: • si $0\notin U\Rightarrow U=\bigcup_{x\in U}\underset{\mathcal{B}}{\underset{\cap}{\{x\}}} \Rightarrow U$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$

- si $0\in U \Rightarrow (-1,1)\subset U \Rightarrow U = \underset{0}{\underset{\downarrow}{(-1,1)}}\cup\bigcup_{x\in U\setminus\{0\}}\{x\} \Rightarrow U$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$



Hemos visto que $\mathcal{B}$ es base de T. ¿Podemos eliminar algún conjunto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ sigue siendo base? $(-1,1)$ no podemos eliminarlo porque es el único elemento de $\mathcal{B}$ que contiene a 0. Si $x\neq 0$, tampoco podemos eliminar $\{x\}$ porque $\{x\}$ es el único elemento de $\mathcal{B}$ que contiene a x y está contenido en $\{x\}$.

(c) $x\in\mathbb{R}$. Encontrar $\mathcal{B}_x$

$\underline{x\neq 0}$, $\underline{x\in(-1,1)}$ $\mathcal{B}(x)=\{B\in\mathcal{B}: x\in B\}=\{\underline{\{x\},(-1,1)}\}$ es base de entornos de x

También $\mathcal{B}_x=\{\{x\}\}$ es base de entornos de x

- En general, si $x\neq 0$, $\mathcal{B}_x=\{\{x\}\}$ es base de entornos de x
- Si $x=0$, $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}(0)=\{B\in\mathcal{B}: 0\in B\}=\{(-1,1)\}$

(d) $\overline{[0,1]}$, $\operatorname{int}([0,1])$, $\partial([0,1])$

$0\notin\mathbb{R}\setminus[0,1] \Rightarrow \mathbb{R}\setminus[0,1]\in T \Rightarrow [0,1]\in G \Rightarrow \underline{\underline{\overline{[0,1]}=[0,1]}}$

$\operatorname{int}[0,1]$ = mayor conjunto abierto contenido en $[0,1]$. $\underset{0\notin}{(0,1]}\in T$

¿Es $[0,1]\in T$? No porque $(-1,1)\not\subset[0,1]$

Concluimos $(0,1]\in T$, $(0,1]\subset[0,1]$ y $[0,1]\notin T \Rightarrow (0,1]$ es el mayor conjunto abierto contenido en $[0,1]$. $\operatorname{int}([0,1])=(0,1]$

$x\in\operatorname{int}([0,1]) \Leftrightarrow \exists\, U_x\in N_x$ tal que $x\in U_x\subset[0,1]$.

$x\neq 0 \Rightarrow x\in\underset{N_x}{\underset{\cap}{\{x\}}}\subset[0,1] \Rightarrow x\in\operatorname{int}([0,1])$

Si $x=0$, no existe ningún entorno de 0 contenido en $[0,1]$

Si existe $V \in \mathcal{N}_0$ tal que $0 \in V \subset [0,1]$, entonces $\exists\, U \in T$ tal que

$$\underline{0} \in U \subset V \subset [0,1] \Rightarrow 0 \in \underline{(-1,1)} \subset U \subset V \subset \underline{[0,1]}$$

$\Rightarrow 0 \notin \mathrm{int}([0,1])$

$\mathrm{int}([0,1]) = (0,1]$.

$\partial([0,1]) = \overline{[0,1]} \setminus \mathrm{int}([0,1]) = [0,1] \setminus (0,1] = \{0\}$.

29/10/2020

16 (X,T) e.top. $A, B \subset X$

(a) $A = \mathring{A} \iff A \in T$

$\Rightarrow)$ Si $A = \mathring{A}$, sabemos que $\mathring{A} \in T \Rightarrow A = \mathring{A} \in T$

$\Leftarrow)$ Si $A \in T$, todo punto de A es interior $\Rightarrow A = \mathring{A}$

(b) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$. Sabemos que $\mathring{A} \in T$. Por a), $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

(c) Si $A \subset B$, entonces $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ (si $x \in \mathring{A}$, existe $U \in N_x$ tal que $U \subset A$. Como $A \subset B$, se tiene que $U \subset B \Rightarrow x \in \mathring{B}$)

$\mathring{A}$ es un conjunto abierto contenido en $A \subset B$. Como $\mathring{B}$ es el mayor conjunto abierto contenido en B, entonces $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

(d) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

$\boxed{\supset}$ $int(A) \cap int(B) \subset A \cap B$. Como $int(A \cap B)$ es el mayor conjunto abierto contenido en $A \cap B$ y $int(A) \cap int(B)$ es abierto y está contenido en $A \cap B$, se tiene que:

$$int(A) \cap int(B) \subset int(A \cap B)$$

$\boxed{\subset}$ Sea $x \in int(A \cap B) \Rightarrow \exists\, U \in N_x$ tal que $U \subset A \cap B \subset A, B$
$\Rightarrow x \in int(A)$ y $x \in int(B) = x \in int(A) \cap int(B)$

(e) $int(A \cup B) \neq int(A) \cup int(B)$

$\boxed{\supset}$ $int(A) \cup int(B)$ es abierto contenido en $A \cup B \Rightarrow$
$\Rightarrow int(A) \cup int(B) \subset int(A \cup B)$

[C] $x\in \text{int}(A\cup B) \Rightarrow \exists\, U\in N_x$ tal que $U\subset A\cup B \not\Rightarrow U\subset A$ ó $U\subset B$

<u>Contraejemplo</u> $(\mathbb{R}, T_u)$ $\quad A=(0,1)\quad B=[1,2)$

$A\cup B=(0,2)\in T_u \Rightarrow \text{int}(A\cup B)=(0,2)$

$\text{int}(A)=(0,1)$, $\text{int}(B)=(1,2) \Rightarrow \text{int}(A)\cup \text{int}(B)=(0,1)\cup(1,2)$

$= (0,2)\setminus\{1\}$

$\text{int}(A)\cup \text{int}(B) \subsetneq \text{int}(A\cup B)$

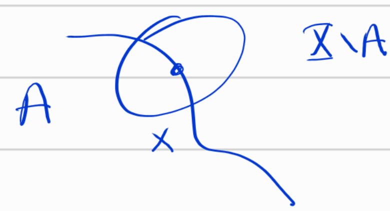
17. Grabación

18. (X,T) e. top $\quad A,B\subset X$

(a) A abierto $\Leftrightarrow A\cap\partial A=\emptyset$.

$\Rightarrow$ Supongamos que existe $\underline{x\in A\cap\partial A}$. Como $x\in\partial A$, esto significa que $\forall U\in N_x$, $U\cap A\neq\emptyset$, $U\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$. La segunda propiedad implica que $U\not\subset A \Rightarrow x\notin \text{int}(A)$

Como $x\in A$, y hemos probado que $x\notin \text{int}(A)$, A no es abierto.



$\Leftarrow$ Supongamos que $A\cap\partial A=\emptyset$. Sabemos que $\text{int}(A)$, ∂A, $\text{ext}(A)$ son una partición de X

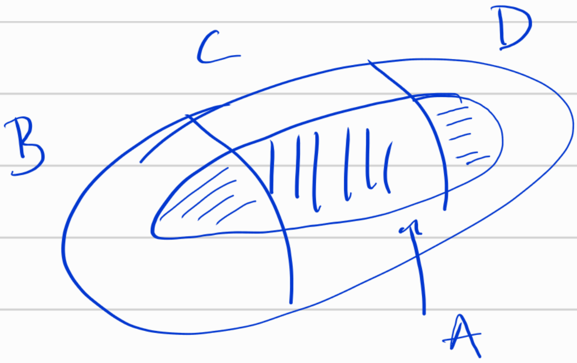
(*) $\quad X = \text{int}(A)\cup\partial A\cup \text{ext}(A) \qquad (\text{ext}(A)=X\setminus\bar{A})$

$\Rightarrow A = X\cap A = (A\cap \text{int}(A))\cup(A\cap\partial A)\cup(A\cap \text{ext}(A))$

$\uparrow \qquad = \text{int}(A)\cup\emptyset\cup\emptyset = \text{int}(A) \Rightarrow A\in T.$

ph

(*) se obtiene de $\bar{A} = \text{int}(A)\cup\partial A$.



$X = C \cup D \cup E$

$A = A \cap X = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (A \cap E)$

(b) A cerrado si y solo si $\partial A \subset A$

$\Rightarrow$ Si A es cerrado, $\underline{A} = \bar{A} = \text{int}(A) \cup \partial A \underline{\supset \partial A}$

$\Leftarrow$ Supongamos que $\partial A \subset A$, sabemos que $\bar{A} = \text{int}(A) \cup \partial A \underset{\text{p.h.}}{\subset} A$

Sabemos que siempre $A \subset \bar{A} \Rightarrow A = \bar{A}$ y A es cerrado

(c) A es abierto y cerrado $\Leftrightarrow \partial A = \phi$

$\Rightarrow$ Sup que A es abierto y cerrado $\underset{(a),(b)}{\Rightarrow} A \cap \partial A = \phi$, $\partial A \subset A \Rightarrow \underset{\phi}{\underset{\parallel}{\partial A}}$

$(\partial A \subset A \Rightarrow \partial A = \partial A \cap A = \phi)$

$\Leftarrow$ Si $\partial A = \phi$ sabemos que $X = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A)$

$\Rightarrow A = X \cap A = (A \cap \text{int}(A)) \cup \underset{\phi}{\underset{\parallel}{(A \cap \text{ext}(A))}} = \text{int}(A)$

$A = \text{int}(A) \Rightarrow A \in T$

$X = A \cup \text{ext}(A) \Rightarrow X \setminus A = \text{ext}(A) \in T \Rightarrow A \in C_T$

(d) $\partial(A\cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

Si $E \subset X$, $\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E}$

$\partial(A\cup B) = \overline{A\cup B} \setminus \text{int}(A\cup B) = \bar{A}\cup\bar{B} \setminus \text{int}(A\cup B) = (*)$

$\text{int}(A\cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$

$= (\bar{A}\cup\bar{B}) \cap (X\setminus \text{int}(A\cup B)) \subset (\bar{A}\cup\bar{B}) \cap (X\setminus(\text{int}(A)\cup\text{int}(B)))$

$= (\bar{A}\cup\bar{B}) \cap (X\setminus\text{int}(A)) \cap (X\setminus\text{int}(B)) =$

$= [\bar{A}\cap(X\setminus\text{int}(A))\cap(X\setminus\text{int}(B))] \cup [\bar{B}\cap(X\setminus\text{int}(A))\cap(X\setminus\text{int}(B))]$

$\subseteq [\bar{A}\cap(X\setminus\text{int}(A))] \cup [\bar{B}\cap(X\setminus\text{int}(B))]$

$= (\bar{A}\setminus\mathring{A}) \cup (\bar{B}\setminus\mathring{B}) = \partial A \cup \partial B.$

Probar que no se da la igualdad en general

$A=(0,1)$, $B=[1,2)$ en $(\mathbb{R}, T_u)$

$A\cup B = (0,2)$ $\qquad \partial(A\cup B) = \{0,2\}$

$\partial A = \{0,1\}$, $\partial B = \{1,2\} \Rightarrow \partial A \cup \partial B = \{0,1,2\} \not\subset \partial(A\cup B)$

19. $\partial\mathring{A} \subset \partial A$. Dar ejemplos donde se de la igualdad y otros donde no se da.

$E \subset X \qquad \partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E} \qquad\qquad \mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$

$\partial \mathring{A} = \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{\mathring{A}} \subset \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A$

$[0,1] \subset \mathbb{R}$ en $(\mathbb{R}, T_u)$ $\quad \mathring{[0,1]} = (0,1) \quad \partial((0,1)) = \partial([0,1]) = \{0,1\}$

$(0,1) \cup \{2\} \qquad \mathrm{int}((0,1) \cup \{2\}) = (0,1)$

$\mathrm{int}\left(\overline{((0,1) \cup \{2\})}\right) = \{0,1\} \subset \{0,1,2\} = \partial((0,1) \cup \{2\})$

¿Qué pasa con $\partial \overline{A}$? Ejercicio

20. $X \qquad \emptyset \neq A \neq X$

$\mathcal{B} = \{ A \cup \{x\} : x \in X \}$

$\mathcal{B}$ es base porque $A \in \mathcal{B}$ puesto que podemos escribir $A = A \cup \{a\}$ con $a \in A$.

5/11/2020

20. $X \neq \emptyset$ $\quad A \subset X \quad A \neq \emptyset, X$

$$\mathcal{B} = \{ A \cup \{x\} : x \in X \}$$

es base de una topología en X.

- $X = \bigcup_{x \in X} \underbrace{A \cup \{x\}}_{\in \mathcal{B}}$. X es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

- Sean $A \cup \{x_1\}, A \cup \{x_2\} \in \mathcal{B}$. $(A \cup \{x_1\}) \cap (A \cup \{x_2\}) \overset{?}{\in} \mathcal{B}$

$$(A \cup \{x_1\}) \cap (A \cup \{x_2\}) = \begin{cases} A \cup \{x_1\}, & \text{si } x_1 = x_2 \\ A, & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

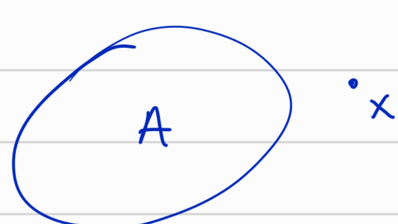
Si $x_1 = x_2 \Rightarrow A \cup \{x_1\} \in \mathcal{B}$

Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow A = A \cup \{a\} \in \mathcal{B} \ \forall a \in A$.

Calcular $\operatorname{int}(A)$ y $\bar{A}$.

$\operatorname{int}(A) = A$ porque $A \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$

$\bar{A} = X$: $\quad A \subset \bar{A}$. Si $x \notin A$, $\mathcal{B}(x) = \{ B \in \mathcal{B} : x \in B \} = \{ A \cup \{x\} \}$ base entornos de x.



$A \cup \{x\}$ es el único conjunto de $\mathcal{B}$ que contiene a x.

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}(x),\ B \cap A \neq \phi.$

Como $\mathcal{B}(x) = \{A \cup \{x\}\}$ y $(A \cup \{x\}) \cap A = A \neq \phi \Rightarrow x \in \bar{A}\ \ \forall x \notin A.$

Por tanto, $\bar{A} = X$. (A es abierto denso en (X, T)).

21. $(\mathbb{R}, T_{cf})$ $\quad T_{cf} = \{U \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus U \text{ finito}\} \cup \{\phi\}$. Calcular $\bar{A}, \mathring{A}, \partial A$
si $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \{1,2\}$

de:

- $\mathring{A}$ $\quad x \in \mathring{\underline{\mathbb{N}}} \Leftrightarrow \exists U \in N_x$ tal que $U \subset \mathbb{N} \Rightarrow \exists V \in T_{cf}$ tal que $x \in V \subset U \subset \mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}}_{\text{infinito}} \subset \mathbb{R} \setminus U \subset \underline{\mathbb{R} \setminus V \text{ finito}}$

$\mathring{\mathbb{N}} = \phi$. (Todo conjunto de $(\mathbb{R}, T_{cf})$ con complementario infinito tiene interior vacío. Si $\mathbb{R} \setminus A$ es infinito y $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists U \in T$ tal que $x \in U \subset A \Rightarrow \underbrace{\mathbb{R} \setminus A}_{\text{infinito}} \subset \underbrace{\mathbb{R} \setminus U}_{\text{finito}}$)

$\mathring{\mathbb{N}} = \mathring{\mathbb{Z}} = \mathring{\mathbb{Q}} = \operatorname{int}(\{1,2\}) = \phi.$

- $\bar{A}$ = menor conjunto cerrado que contiene a A.
  Si A es finito $\Rightarrow \bar{A} = A$
  Si A es infinito $\Rightarrow \bar{A} = \mathbb{R}$ (el único cerrado que contiene a $A \neq \phi$ es $\mathbb{R}$)

$\bar{\mathbb{N}} = \bar{\mathbb{Z}} = \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \qquad \overline{\{1,2\}} = \{1,2\}.$

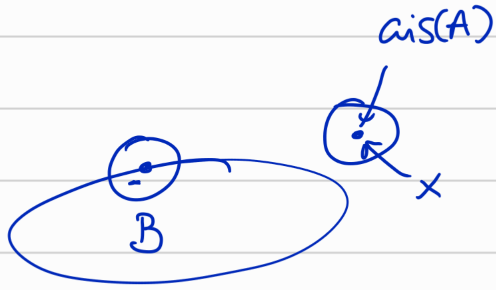
- $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ $\qquad \partial\mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \phi = \mathbb{R}$
$\partial\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \phi = \mathbb{R}$
$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \phi = \mathbb{R}$
$\partial\{1,2\} = \{1,2\} \setminus \phi = \{1,2\}.$

22. Grabación

23. Calcular $A' = \{\text{puntos de acumulación de } A\}$ $\text{ais}(A) = \{\text{aislados de } A\}$.

$x \in A' \iff \forall U \in N_x,\ (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

$x \in \text{ais}(A) \iff \exists\, U \in N_x$ tal que $U \cap A = \{x\}$



$A = B \cup \{x\}$.

(a) (X, T_t) $A \subset X$ $\# A \geq 2$.

A' $\text{ais}(A)$ $x \in X$, $N_x = \{X\}$.

$A' = X$ si $x \in X$, el único entorno de x es X y $(X \setminus \{x\}) \cap A =$
$= A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ porque A contiene 2 o más puntos.

$\text{ais}(A) = \emptyset$ Si $x \in X$, el único entorno de x es X y $X \cap A = A$
que contiene al menos dos puntos $\Rightarrow X \cap A \neq \{x\}$

(b) (X, T_D) $A \subset X$

$A' = \emptyset$ porque $\{x\} \in N_x$ y $(\{x\} \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$
$\text{ais}(A) = A$. porque $\{x\} \in N_x$ y $\{x\} \cap A = \{x\}$.

(c) (X, T_{CF}) y $A \subset X$ finito. Si X es finito, $T_{CF} = T_D$ y estamos en el caso del apartado (b). Supongamos que X es infinito.

$A' = \phi$ Si $A = \{x_1, \dots, x_k\}$, entonces tomamos como entorno del punto x_1 el conjunto $X \setminus \{x_2, \dots, x_k\} \in T_{CF}$, $x_1 \in X \setminus \{x_2, \dots, x_k\}$.
$X \setminus \{x_2, \dots, x_k\} \in N_{x_1}$

$$\Big(\underbrace{(X \setminus \{x_2, \dots, x_k\}) \setminus \{x_1\}}_{(X \setminus A)} \Big) \cap A = \phi$$
$$(X \setminus A) \cap A$$

$\Rightarrow x_1 \notin A'$. De la misma forma se demuestra que $x_2, \dots, x_k \notin A'$.

$ais(A) = A$. $x_1 \in ais(A)$ porque $\underset{N_{x_1}}{\underset{\cap}{\left(X \setminus \{x_2, \dots, x_k\}\right)}} \cap A = \{x_1\}$.

De la misma forma se demuestra que $x_2, \dots, x_k$ son puntos aislados

(d) $(\mathbb{R}, T_S)$ $\mathcal{B}_S = \{[a,b) : a<b, a,b \in \mathbb{R}\}$ $A = (0,1]$

$x \in A' \Leftrightarrow \forall U \in N_x, (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$.
$\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{B}_S(x), (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$ $\mathcal{B}_S(x) = \{B \in \mathcal{B}_S : x \in B\}$.
$\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{B}_x, (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$.
(demostración como en el ejercicio 11).

Podemos tomar como base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T_S)$ la familia
$$\mathcal{B}_x = \{[x, x+r) : r > 0\}.$$

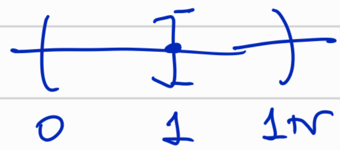
$A = (0,1]$ $x \in A$ $\underline{0 < x < 1} \Rightarrow$

$$[x, x+r) \cap (0,1] = \begin{cases} [x, x+r) & x+r \leq 1 \\ [x, 1] & x+r > 1 \end{cases}$$

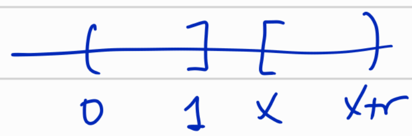
$$([x,x+r)\setminus\{x\})\cap(0,1] = \begin{cases}(x,x+r)\subset(0,1] & \text{si } x+r\le 1\\ (x,1] & \text{si } x+r>1\end{cases} \neq \emptyset$$

- Si $x\in(0,1)$, entonces $x\in A'$.

- $1\notin A'$ porque $([1,1+r)\setminus\{1\})\cap(0,1]=\emptyset$ $\quad((0,1]\cap[1,1+r)=\emptyset)$



- $x>1 \Rightarrow x\notin A'$



- Si $x=0$ $\quad([0,r)\setminus\{0\})\cap(0,1]\neq\emptyset \Rightarrow 0\in A'$.

- Si $x<0$ $\quad([x,0)\setminus\{x\})\cap(0,1]=\emptyset \Rightarrow x\notin A'$.

Por tanto $A'=[0,1)$ $\qquad (A=(0,1])$

$ais(A)$. $\quad x\in ais(A) \Leftrightarrow \exists B\in\mathcal{B}_x$ tal que $B\cap A=\{x\}$.

Si $x\in ais(A) \Rightarrow \exists r>0$ tal que $[x,x+r)\cap(0,1]=\{x\}$.

Si $0<x<1 \Rightarrow [x,x+r)\cap(0,1] = \begin{cases}[x,x+r) & x+r\le 1\\ [x,1] & \text{si } x+r>1\end{cases}$ contiene

más puntos además de $x \Rightarrow x\notin ais(A)$.

Si $x=1 \Rightarrow \underset{N_1}{\underset{\cap}{[1,2)}} \cap (0,1] = \{1\} \Rightarrow 1 \in ais(A)$.

$A=(0,1] \Rightarrow A' = [0,1)$ $\quad ais(A) = \{1\}$.

24. Grabación

12/11/2020

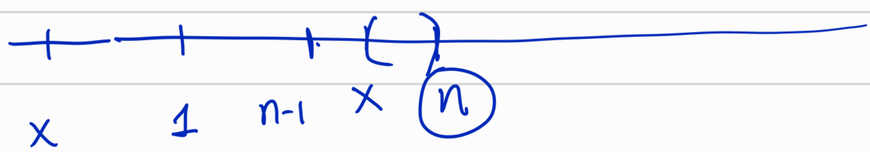
25. $(\mathbb{R}, T_S)$ $\quad \mathcal{B}_S = \{[a,b) : a<b\}$ $\quad T_u \subset T_S$

(a) Calcular clausura de $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}, \{-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$.

(b) Calcular la frontera de $(a,b]$, $[a,b)$.

(b) $\overline{\mathbb{N}}$, $\quad \mathbb{N}\subset\overline{\mathbb{N}}$. Veamos qué puntos $x\notin\mathbb{N}$ están en $\overline{\mathbb{N}}$

Si $x\in\mathbb{R}$, $x\notin\mathbb{N}$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x<n$ y en el intervalo (x,n) no hay más números naturales



Entonces $[x,n)\in\mathcal{B}_S\subset T_S$ y $x\in[x,n)$ $\Rightarrow$ $[x,n)\in N_x$

$$\underline{[x,n)}\cap\mathbb{N} = (\{x\}\cup(x,n))\cap\mathbb{N} = \underbrace{(\{x\}\cap\mathbb{N})}_{=\emptyset}\cap\underbrace{((x,n)\cap\mathbb{N})}_{=\emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow x\notin\overline{\mathbb{N}}$ (existe un entorno de x que no corta a $\mathbb{N}$)

Por tanto, $\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}$.

$\overline{\mathbb{Q}}$, $\quad \mathbb{Q}\subset\overline{\mathbb{Q}}$. Veamos que $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$. Sea $x\in\mathbb{R}$, y sea $U\in N_x$, entonces existe $[a,b)\in\mathcal{B}_S$ tal que $x\in[a,b)\subset U$. Sabemos que $a<b$ y sabemos que existe $q\in\mathbb{Q}$ tal que $a<q<b$. Por tanto

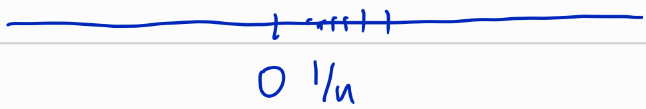
$$\emptyset\neq[a,b)\cap\mathbb{Q}\subset U\cap\mathbb{Q}$$

$\Rightarrow U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ para todo entorno $U \in \mathcal{N}_x$. $\Rightarrow x \in \overline{\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ $\qquad$ $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}$.

Sea $x \notin \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Entonces



$x < 0$, ó

$x = 0$, ó

$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$, para un cierto $n \in \mathbb{N}$, ó

$1 < x$

<u>NO</u> Si $x < 0 \Rightarrow [x,0) \in \mathcal{N}_x$ y $[x,0) \cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}$

<u>SI</u> Si $x = 0 \Rightarrow \forall\, U \in \mathcal{N}_x$, existe $[0,r) \subset U$ y $[0,r) \cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow U \cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \neq \emptyset \Rightarrow 0 \in \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}$

<u>NO</u> Si $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0+1} < x < \frac{1}{n_0}$ entonces $[x, \frac{1}{n_0}) \cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \emptyset$

$\Rightarrow x \notin \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}$

<u>NO</u> Si $1 < x$ entonces $[x, x+1) \in \mathcal{N}_x$ tal que $[x,x+1) \cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \emptyset$

$\Rightarrow x \notin \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}$

$$\overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$\overline{\{-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}}$. Si $x \notin \underline{\{-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}}$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} x<-1, \text{ ó} \\ \exists\, n_0\in\mathbb{N} \text{ tal que } -\frac{1}{n_0} < x < -\frac{1}{n_0+1}, \text{ ó} \\ x \geq 0. \end{array}\right\}$$

NO $\cdot$ $x<-1 \Rightarrow [x,-1)\in N_x$ y $[x,-1)\cap\{-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\} = \phi \Rightarrow$
$\Rightarrow x\notin \overline{\{\frac{-1}{n} : n\in\mathbb{N}\}}$

NO $\cdot$ $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ tal que $-\frac{1}{n_0} < x < -\frac{1}{n_0+1}$. Entonces $[x, -\frac{1}{n_0+1})\in N_x$
y $[x,-\frac{1}{n_0+1})\cap\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\} = \phi \Rightarrow x\notin\overline{\{-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}}$

NO $\cdot$ $x\geq 0$. Entonces $[x,x+1)\in N_x$ y $[x,x+1)\cap\{-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\} = \phi$
$\Rightarrow x\notin\overline{\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}}$

$\Rightarrow$ $\overline{\{-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}} = \{-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$

En particular $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0.

(b) $\partial((a,b])$ $\partial([a,b))$

$\partial((a,b]) = \overline{(a,b]} \setminus \text{int}((a,b])$

$\overline{(a,b]}$. $(a,b] \subset \overline{(a,b]}$. Sea $x\notin (a,b]$

- $x<a$ $\qquad [x,a) \in \mathcal{N}_x$ y $[x,a) \cap (a,b] = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{(a,b]}$

- $x=a$ $\qquad$ Si $\underline{U \in \mathcal{N}_x}$, entonces existe $r>0$ tal que $[a,a+r) \subset U$

$$\underline{\emptyset \neq} [a,a+r) \cap (a,b] \subset \underline{U \cap (a,b]}$$

$\Rightarrow a \in \overline{(a,b]}$

- $x>b \Rightarrow x \notin \overline{(a,b]}$

$$\overline{(a,b]} = [a,b]$$

$\text{int}((a,b])$ $\qquad \text{int}((a,b]) \subset (a,b]$. Sea $\underline{x \in (a,b]}$

SI $\quad$ • Si $x<b \Rightarrow [x,b) \subset (a,b] \Rightarrow x \in \text{int}((a,b])$

NO $\quad$ • Si $x=b$, $U \in \mathcal{N}_x$, entonces existe $r>0$ tal que $[b,b+r) \subset U$

$$[b,b+r) \not\subset (a,b] \Rightarrow U \not\subset (a,b].$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$$\underline{\emptyset \neq} [b,b+r) \cap (\mathbb{R} \setminus (a,b]) \subset \underline{U \cap (\mathbb{R} \setminus} (a,b])$$

Por tanto $x=b \notin \text{int}((a,b])$

$$\text{int}((a,b]) = (a,b)$$

$$\partial((a,b]) = \overline{(a,b]} \setminus \text{int}((a,b]) = [a,b] \setminus (a,b) = \{a,b\}$$

Calculamos ahora $\partial([a,b))$. Tenemos que calcular $\overline{[a,b)}$ e $\text{int}([a,b))$.

$$[a,b) \in \mathcal{B}_S \subset T_S \Rightarrow \text{int}([a,b)) = [a,b)$$

$\overline{[a,b)}$ $\quad [a,b) \subset \overline{[a,b)}$. Sea $x \notin [a,b)$

$x < a \Rightarrow \underline{[x,a)} \in N_x$ y $[x,\underline{a) \cap [a},b) \underline{=\phi} \Rightarrow x \notin \overline{[a,b)}$

$x \geq b \Rightarrow [x,x+1) \in N_x$ y $\underset{b \leq x \leq}{[x,x+1)} \cap \underset{<b}{[a,b)} = \phi \Rightarrow x \notin \overline{[a,b)}$

$$\overline{[a,b)} = [a,b).$$

$[a,b)$ es cerrado. Hay otra forma de ver que $[a,b)$ es cerrado

$$\mathbb{R} \setminus [a,b) = (-\infty,a) \cup [b,+\infty)$$

$$= \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{B}_S \\ \cap \\ T_S}}{[-n,a)}\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{B}_S \\ \cap \\ T_S}}{[b,b+n)}\Big) \in T_S$$

Por tanto $\partial([a,b)) = \overline{[a,b)} \setminus \text{int}([a,b)) = [a,b) \setminus [a,b) = \phi$

(Si A es abto. y cerrado, $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus A = \phi$)

26. (Recta discriminada) $\mathbb{R}$

$T = \{A \cup B : A \in T_u, B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = números irracionales.

(a) T topología

1. $\emptyset, \mathbb{R} \in T_u \Rightarrow \emptyset, \mathbb{R} \in T$ $\quad (\emptyset \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \quad U \in T_u \Rightarrow U \cup \emptyset = U \in T)$

2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T \Rightarrow U_i = A_i \cup B_i$, $A_i \in T_u$, $B_i \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\forall i \in I$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$$

- $A = \bigcup_{i \in I} A_i \in T_u$ porque T_u es topología en $\mathbb{R}$
- $B = \bigcup_{i \in I} B_i \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i = A \cup B, \quad A \in T_u, \ B \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T.$$

3. $U_1, \dots, U_k \in T \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T$

Cada U_i se expresa como $A_i \cup B_i$, con $A_i \in T_u$, $B_i \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$U_1 \cap \dots \cap U_k = (A_1 \cup B_1) \cap \dots \cap (A_k \cup B_k) =$

$$\underbrace{(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2)} \cap \dots (A_k \cap B_k)$$

$$\big((A_1 \cup B_1) \cap A_2\big) \cup \big((A_1 \cup B_1) \cap B_2\big) \cap \ldots$$

$$= (A_1 \cap A_2) \cup \underbrace{(B_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)} \cap \ldots$$

$$= \Big(\underbrace{(A_1 \cap A_2)} \cup \underset{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}{\underset{\cap}{B_{12}}}\Big) \cap \ldots \cap (A_k \cap B_k)$$

$$= \underset{T_u}{\underset{\cap}{(A_1 \cap \ldots \cap A_k)}} \cup \underset{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}{\underset{\cap}{B_{12\ldots k}}} \qquad B_{12\ldots k} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_k \in T.$$

19/11/2020

26. Recta diseminada. $\mathbb{R}$

$$T = \{A \cup B : A \in T_u, \ B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

B está formado por números irracionales.

$T_u \subset T$. Además, si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces $\{x\} \in T$.

(a) fácil

(b) $[a,b]$ y $[c,d)$ $d \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son cerrados en $(\mathbb{R}, T)$.

$$\mathbb{R}\setminus[a,b] = \underbrace{(-\infty,a)}_{\in T_u \subset T} \cup \underbrace{(b,+\infty)}_{\in T_u \subset T} \in T. \Rightarrow [a,b] \in C_T$$

$$\mathbb{R}\setminus[c,d) = (-\infty,c) \cup [d,+\infty) = \Big(\underbrace{(-\infty,c)}_{\in T_u \subset T} \cup \overbrace{\underbrace{\{d\}}_{\subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}^{T}\Big) \cup \underbrace{(d,+\infty)}_{\in T_u \subset T} \in T$$

$\Rightarrow [c,d) \in C_T$.

(c) Calcular interior, clausura y frontera de $[0,1]$ y $[0,\sqrt{2})$

$\overline{[0,1]} = [0,1]$

$\overline{[0,\sqrt{2})} = [0,\sqrt{2})$

} ambos son cerrados por (b).

• $\mathrm{int}([0,1])$

⊛ $0 \notin \mathrm{int}([0,1])$. Si $U \in \mathcal{N}_0$, existe $V \in T$ tal que $0 \in V \subset U$

$V = A \cup B$, con $A \in T_u$, $B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $0 \in V = A \cup B \Rightarrow 0 \in A$.

$\Rightarrow 0 \in A \subset V \subset U$

Si $U \subset [0,1] \Rightarrow \underset{\substack{\cap \\ T_u}}{0 \in A} \subset U \subset [0,1] \Rightarrow 0$ sería punto interior de $[0,1]$ en $(\mathbb{R}, T_u)$

⊛ $1 \notin int([0,1])$ por los mismos argumentos.

⊛ $0 < x < 1$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\underset{\substack{\cap \\ T_u \subset T}}{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} \subset [0,1]$

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in N_x \Rightarrow x \in int([0,1])$.

$int([0,1]) = (0,1)$.

$\partial[0,1] = \overline{[0,1]} \setminus int([0,1]) = [0,1] \setminus (0,1) = \{0,1\}$.

- $int([0,\sqrt{2}))$.

⊛ $0 \notin int([0,\sqrt{2}))$ por las mismas razones que antes

⊛ Si $0 < x < \sqrt{2}$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\underset{\substack{\cap \\ N_0}}{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} \subset [0,\sqrt{2})$

$\Rightarrow x \in int([0,\sqrt{2}))$

$int([0,\sqrt{2})) = (0,\sqrt{2})$

$\overline{[0,\sqrt{2})} = [0,\underline{\sqrt{2})}$

$\partial [0,\sqrt{2}) = [0,\sqrt{2}) \setminus (0,\sqrt{2}) = \{0\}$.

(d) Calculamos base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$.

- Si $x \in \mathbb{Q}$. Sea $U \in N_x$; existe $V \in T$ tal que $x \in V \subset U$
  $V = A \cup B$ con $A \in T_u$, $B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $x \in A$. Entonces

$$x \in A \subset V \subset U$$

Cualquier base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T_u)$ es base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$. P.e. $\{\underline{(x-r, x+r)} : r > 0\}$. Como $A \in T_u$, $x \in A$, $\exists r > 0$ tal que

$$(x-r, x+r) \subset A \subset U$$

$\{(x-r, x+r) : r > 0\}$ son entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$ (son abiertos que contienen a x.

- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $\{x\} \in T$. Entonces $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x: si $U \in N_x$, entonces $x \in U \Rightarrow \underline{\underline{x \in \{x\} \subset U}}$

(e) Obtener $\overline{\{x\}}$, $\operatorname{int}(\{x\})$, $\partial(\{x\})$ para $x \in \mathbb{R}$.

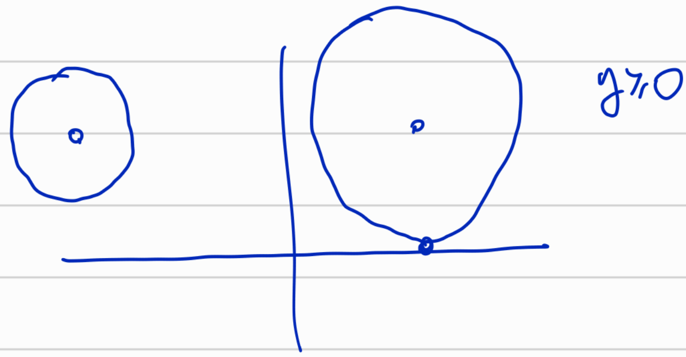
$\overline{\{x\}}$ · Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, +\infty) \in T_u \subset T \Rightarrow \{x\} \in G$

$\operatorname{int}(\{x\})$:
- Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $\operatorname{int}(\{x\}) = \phi$ (ningún elemento de la base de entornos $\{(x-r, x+r) : r > 0\}$ está contenido en $\{x\}$.)
- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces $\operatorname{int}(\{x\}) = \{x\}$. ($\{x\}$ abierto)

$$\partial(\{x\}) = \overline{\{x\}} \setminus \operatorname{int}(\{x\}) = \begin{cases} \{x\} \setminus \phi = \{x\}, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \{x\} \setminus \{x\} = \phi, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

27. Grabación

28. Semiplano Moore definido en ejercicio 12.



$\underline{B_x} = B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} \in \mathcal{B} \subset \underline{T}.$

$L = \{y=0\}$. $\qquad \underline{L} \cap \underline{B_x} = \{(x,0)\} \Rightarrow \{(x,0)\} \in T_L$. (top. inducida)

(L,T_L) es un espacio discreto porque todo conjunto $\{(x,0)\}$ con $(x,0) \in L$ pertenece a T_L.

29. T_1, T_2 top. en X tales que $T_1 \subset T_2$

- $\operatorname{int}_{T_1}(A) \subset \operatorname{int}_{T_2}(A)$
- $\overline{A}^{T_1} \supset \overline{A}^{T_2}$

$\overline{A}^{T_1}$ = menor conjunto cerrado en T_1 que contiene a A.

$T_1 \subset T_2 \Rightarrow C_{T_1} \subset C_{T_2}$

$$\underset{\substack{\cap \\ C_{T_2}}}{\overline{A}^{T_1}} \supset A \Rightarrow \underbrace{\overline{A}^{T_1}} \supset \underbrace{\overline{A}^{T_2}} \supset A$$

En general no se da la igualdad: $X = \mathbb{R}$, $T_1 = T_u$, $T_2 = T_D$

$$A = [0,1] \qquad \mathrm{int}_{T_1}(A) = (0,1) \subsetneq \mathrm{int}_{T_2}(A) = [0,1].$$

Sea ahora $X = \mathbb{R}$, $T_1 = T_t$, $T_2 = T_u$

$$A = [0,1] \qquad \overline{A}^{T_1} = \mathbb{R} \supsetneq [0,1] = \overline{A}^{T_2}$$

30. (X,T) admite un subconjunto denso no trivial si y solo si T no es la topología discreta. (no trivial significa distinto de X)

$A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$.

Supongamos que existe $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$ y $A \neq X$. Entonces $T \neq T_D$ porque si $T = T_D$ entonces $\overline{A} = A \neq X$.
Supongamos ahora que $T \neq T_D$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\{x\} \notin T$. (Si todo $\{x\} \in T_D$ entonces $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \in T \Rightarrow T = T_D$)
Tomamos $A = X \setminus \{x\}$. Entonces A no es cerrado. Por tanto $A \subset \overline{A}$ pero $\overline{A} \neq A$. Como $A = X \setminus \{x\}$, el único subconjunto de X que contiene a A y es distinto de A es X. Por tanto $\overline{A} = X$
Es decir, A es denso. $\blacksquare$

31, 32 Grabaciones.

33. (X,T) AN-II. Sea $\mathcal{B}$ base numerable. Si $x \in X$, entonces

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

es base de entornos de x y es numerable. Por tanto, (X,T) es AN-I

Si $(\mathbb{R}, T_D)$ $\mathbb{R}$ es AN-I $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$, pero no es AN-II porque si $\mathcal{B}$ es base, entonces $\{x\} \in \mathcal{B}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{B}$ no sería numerable

34. $(\mathbb{R}, T_S)$ no es AN-II.

26/11/20

34. $(\mathbb{R}, T_S)$ T_S generada por $\mathcal{B}_S = \{[a,b) : a<b\}$
es AN-I, pero no es AN-II.

$x \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{B}_x = \{[x, x+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es base de entornos de x.

$\mathcal{B}_x \subset N_x$ porque los elementos de $\mathcal{B}_x$ son conjuntos abiertos que contienen a x.

Sea $U \in N_x$, entonces existe $V \in T_S$ tal que $x \in V \subset U$. Como $V \in T_S$ y $x \in V$, existe $B \in \mathcal{B}_S$ tal que $x \in B \subset V \subset U$. B es de la forma $[a,b)$, con $a<b$. $\Rightarrow x \in [a,b) \Rightarrow x \in [x,b)$. Tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x + \frac{1}{n_0} < b$. $(\frac{1}{n_0} < b-x)$. Entonces $x \in [x, x+\frac{1}{n_0}) \subset [x,b)$

$$\underbrace{[x, x+\tfrac{1}{n_0})}_{\in\, \mathcal{B}_x} \subset [x,b) \subset [a,b) = B \subset V \subset U.$$

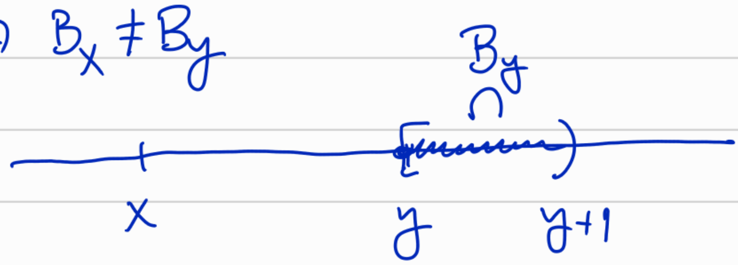
Como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos numerable y $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario, entonces $(\mathbb{R}, T_S)$ es AN-I

$(\mathbb{R}, T_S)$ no es AN-II. Sea $\mathcal{B}$ una base cualquiera de $(\mathbb{R}, T_S)$. Vamos a probar que no es numerable. Para cada $x \in \mathbb{R}$, tomamos el conjunto $[x, x+1) \in T_S$. Como $\mathcal{B}$ es base, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_x \subset [x, x+1).$$

Vamos a comprobar que si $x \neq y$, entonces $B_x \neq B_y$. Si comprobamos esta propiedad, entonces $\{B_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es una familia no numerable de conjuntos contenida en $\mathcal{B}$. Por tanto, $\mathcal{B}$ sería no numerable.

Si $x \neq y$, podemos suponer $x < y$. Entonces $x \in B_x$, pero $x \notin [y, y+1) \supseteq B_y$
$\Rightarrow x \notin B_y \Rightarrow B_x \neq B_y$



Esto significa que toda base $\mathcal{B}$ de $(\mathbb{R}, T_S)$ es no numerable. Por tanto, $(\mathbb{R}, T_S)$ no es AN-II.

(Si (X, T) es AN-II $\quad \mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ base ent. de x.
Si $\mathcal{B}$ es numerable, $\mathcal{B}(x)$ es numerable $\Rightarrow (X, T)$ es AN-I).

35. (X, T_D)

1. $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x finita (numerable)

2. (X, T_D) es AN-II $\Leftrightarrow$ X es numerable

$\Leftarrow]$ Si X es numerable, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base numerable de $T_D \Rightarrow (X, T_D)$ es AN-II

$\Rightarrow]$ (X, T_D) AN-II y $\mathcal{B}$ es una base, entonces:

$\{x\}\in\mathcal{B} \quad \forall x\in X.$

Tomamos $\{x\}\in T_D$. Como $\mathcal{B}$ es base existe $B\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B\subset\{x\} \Rightarrow \{x\}\subset B\subset\{x\} \Rightarrow \{x\}=B\in\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ es numerable, como acabamos de probar que

$$\{\{x\} : x\in X\}\subset\mathcal{B},$$

entonces $\{\{x\} : x\in X\}$ es numerable $\Rightarrow X$ es numerable. ■

36. (X,d) e. métrico. $x_i\to x \iff \forall\varepsilon>0, \exists i_0\in\mathbb{N} : d(x,x_i)<\varepsilon$ $\forall i\geq i_0$

$x_i\in B(x,\varepsilon)$

$d(x,x_i) = |x-x_i| \leftarrow (\mathbb{R},d_u)$

(X,T). $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión en X. Diremos que x_i converge a x si $\forall U\in N_x$, $\exists i_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_i\in U$ $\forall i\geq i_0$

(X,d)

(X,T)

(cada entorno del punto límite contiene a casi todos los elementos de la sucesión).

$x=\lim_{i\to\infty} x_i \quad (\forall U\in N_x, \exists i_0\in\mathbb{N} \,/\, x_i\in U \ \forall i\geq i_0)$

(a) En un e. top. una sucesión puede converger a más de un punto.

En $(\mathbb{X}, T_t)$ cualquier sucesión converge a todos los puntos del espacio.

Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{X}$. Sea $x\in\mathbb{X}$ cualquiera, $N_x=\{\mathbb{X}\}$

$x_i\in\mathbb{X}$ $\forall i\geq 1$ y $\mathbb{X}$ es el único entorno de x. Por tanto,

$x=\lim\limits_{i\to\infty} x_i$.

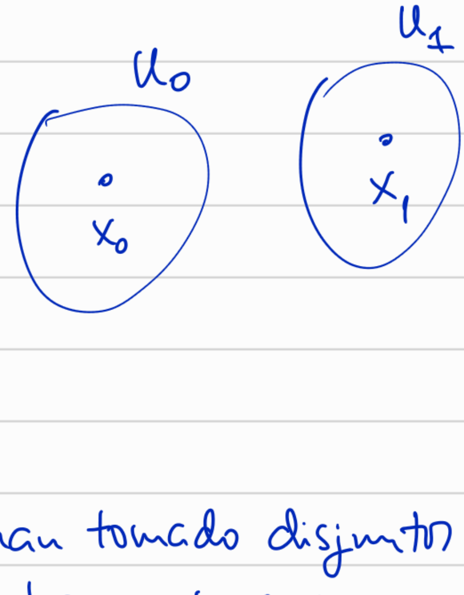
(b) En un e. top. Hausdorff, los límites de sucesiones son únicos.

Sea $(\mathbb{X},T)$ Hausdorff, sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{X}$ que converge a $x_0\in\mathbb{X}$. Veamos que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no puede converger a otro punto.

Razonamos por contradicción suponiendo que existe $x_1\neq x_0$ tal que $x_1=\lim\limits_{i\to\infty} x_i$. Como $x_0\neq x_1$, existen entornos $U_0\in N_{x_0}$, $U_1\in N_{x_1}$ tales que $U_0\cap U_1=\phi$.

Como $x_0=\lim\limits_{i\to\infty} x_i$, dado U_0, existe $i_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_i\in U_0$ $\forall i\geq i_0$

Como $x_1=\lim\limits_{i\to\infty} x_i$, dado U_1, existe $i_1\in\mathbb{N}$ tal que $x_i\in U_1$ $\forall i\geq i_1$



Si tomamos $i_{max}=\max\{i_0,i_1\}$, entonces

$$x_i\in U_0\cap U_1 \qquad \forall i\geq i_{max}$$

Esto es una contradicción porque U_0, U_1 se han tomado disjuntos. Esta contradicción procede de suponer que hay otro punto x_1 que es límite de la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Por tanto, x_0 es el único límite de la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Pregunta: sea (X,T) un e.top. tal que los límites de sucesiones son únicos. ¿Es (X,T) Hausdorff?

(c) Sea (X,T) e.top., $A\subset X$. Si existe una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a $x\in X$, entonces $x\in\bar{A}$.

Sea $U\in N_x$. Sabemos que existe $i_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_i\in U$ para todo $i\geq i_0$

$\Rightarrow a_i\in A\cap U \quad \forall i\geq i_0 \Rightarrow A\cap U\neq\emptyset$.

Por tanto, $x\in\bar{A}$.

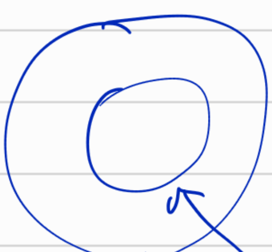
3/12/2020

36. (d) (X, T) e.top AN-I. Si $x \in \bar{A}$, existe $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que
$x = \lim_{i\to\infty} a_i$

Sea $\mathcal{B}_x = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ una base de entornos numerable. Tomamos la familia

$$\mathcal{B}_x' = \{B_i' : i \in \mathbb{N}\} \qquad B_i' = B_1 \cap \dots \cap B_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

- $B_i' \in N_x \quad \forall i$ (intersección finita de entornos es entorno)
- $B_i' \subset B_i \quad \forall i$
- $B_{i+1}' \subset B_i'$
- $\mathcal{B}_x'$ es base de entornos de x. Sea $\underline{U \in N_x}$, como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos, existe $B_i \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_i \subset U$. Como $\underline{B_i'} \subset B_i \subset \underline{U}$, obtenemos el resultado



$x \in \bar{A}$, entonces $B_i' \cap A \neq \emptyset \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Tomamos $a_i \in \underline{B_i'} \cap A$. Veamos que $x = \lim_{i\to\infty} a_i$.

Sea $\underline{U \in N_x}$, entonces existe $\underline{i_0 \in \mathbb{N}}$ tal que $B_{i_0}' \subset U$.
$\forall i \geq i_0, \quad a_i \in B_i' \subset B_{i_0}' \subset U$ ■

Contraejemplo: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $(\mathbb{R}, T_{CN})$. $C_{T_{CN}} = \{\text{conj. numerables}\} \cup \{\mathbb{R}\}$

$\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$ (el único que contiene a $\mathbb{I}$ no numerable es $\mathbb{R}$)

En el ejercicio 40 probaremos que $x = \lim_{i \to \infty} x_i \iff x_i = x \ \forall i \geq i_0$.

$\Rightarrow q \in \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{I}}$ pero no es límite de puntos de $\mathbb{I}$.

40 $(\mathbb{R}, T_{CN})$ $\quad x = \lim_{i \to \infty} x_i \iff \exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = x \ \forall i \geq i_0$

$\Leftarrow)$ trivial

$\Rightarrow)$ Consideramos el conjunto $N = \{x_i : i \in \mathbb{N},\ x_i \neq x\}$. El conjunto N es numerable. Por tanto $\mathbb{R} \setminus N$ es un conjunto abierto. y $x \in \mathbb{R} \setminus N$. ($x \notin N$). Es decir, $U = \mathbb{R} \setminus N$ es entorno de x. $\exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_i \in U = \mathbb{R} \setminus N \qquad \forall i \geq i_0$$

$$\Rightarrow x_i = x \qquad \forall i \geq i_0$$

(En U no hay ningún punto de la sucesión distinto de x).

39. (X, T_D) $\quad x = \lim_{i \to \infty} x_i \iff \exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = x \ \forall i \geq i_0$

$\Leftarrow)$ trivial

$\Rightarrow)$ $U = \{x\}$ es ent. de $x \Rightarrow \exists\, i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U \ \forall i \geq i_0$

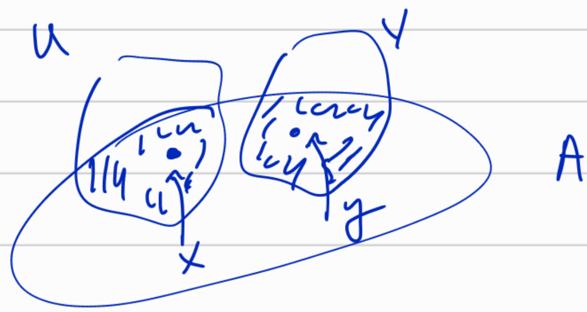
$\Rightarrow x_i = x \ \forall i \geq i_0$ $\qquad (x_i \in \{x\} \ \forall i \geq i_0)$

37, 38 grabación

41. (X,T) e.top. $A\subset X$, $A\neq\emptyset$.

(a) (X,T) Hausdorff $\Rightarrow$ (A,T_A) también lo es.

Sean $a,b\in A$, $a\neq b$. Como (X,T) es Hausdorff, existen $U,V\in T$ tales que $a\in U$, $b\in V$, $U\cap V=\emptyset$. Entonces $a\in U\cap A$, $b\in V\cap A$, $U\cap A, V\cap A\in T_A$, y $(U\cap A)\cap(V\cap A)=(U\cap V)\cap A=\emptyset$ porque $U\cap V=\emptyset$



(b) Si (X,T) es AN-I, entonces (A,T_A) es AN-I

Sea $a\in A$. $\mathcal{B}_a=\{$base de entornos de a en $X\}$. Entonces

$$\mathcal{B}_a^A=\{B\cap A : B\in\mathcal{B}_a\}$$

es base de entornos de a en (A,T_A). Si tomamos $\mathcal{B}_a$ numerable, entonces $\mathcal{B}_a^A$ es numerable. Como $a\in A$ es arbitrario, (A,T_A) es AN-I.

(c) Si (X,T) es AN-II, sea $\mathcal{B}$ una base numerable. Entonces

$$\mathcal{B}^A=\{B\cap A : B\in\mathcal{B}\}$$

es base numerable de (A,T_A). Es claro que $\mathcal{B}^A$ es numerable. Para ver que es base, tomamos $V\in T_A$. Existe entonces $U\in T$ tal que

$$T_A\ni V=U\cap A=\Big(\bigcup_{i\in I}B_i\Big)\cap A \qquad B_i\in\mathcal{B}$$

$$= \bigcup_{i\in I} (B_i \cap A) \qquad B_i \cap A \in \mathcal{B}^A$$

(d) Si (X,T) es metrizable, entonces (A,T_A) es metrizable.

Si (X,T) es metrizable, existe d distancia en X tal que $T_d = T$. Consideramos d restringida al conjunto A. La llamamos d_A. Queremos ver que $T_{d_A} = T_A$.

Una base de $T_d = T$ es $\mathcal{B} = \{B(x,r) : x \in X, r>0\}$. Por tanto

$$\mathcal{B}^A = \{B(x,r)\cap A : x\in X, r>0\}$$

es una base de T_A.

Por otra parte, $d_A(x,y) = d(x,y)$, $\forall x,y \in A$, es una distancia en A. Por tanto

$$\mathcal{B}_d^A = \{B_A(a,r) : a\in A, r>0\}$$

forman una base de T_{d_A}.

Queremos ver que ambas bases generan la misma topología.

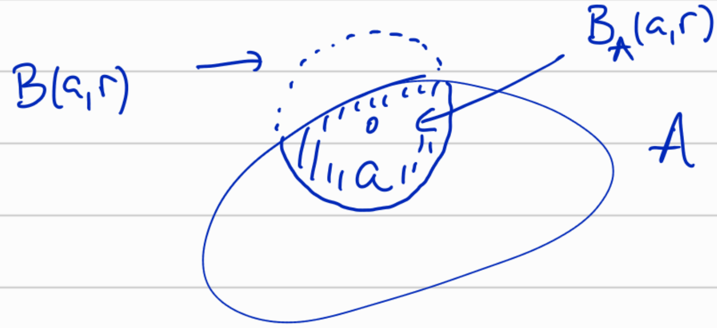
1. $\forall B \in \mathcal{B}_d^A$, $\forall a \in B$, $\exists B' \in \mathcal{B}^A$ tal que $a \in B' \subset B$.
2. $\forall B' \in \mathcal{B}^A$, $\forall a \in B'$, $\exists B \in \mathcal{B}_d^A$ tal que $a \in B \subset B'$.

1. $B \in \mathcal{B}_d^A$

$$B = B_A(a,r) = \{b\in A : d_A(b,a) < r\}$$
$$= \{b \in A : d(b,a) < r\}$$
$$= \underbrace{B(a,r)}_{\text{bola en } X} \cap A \in \mathcal{B}^A.$$

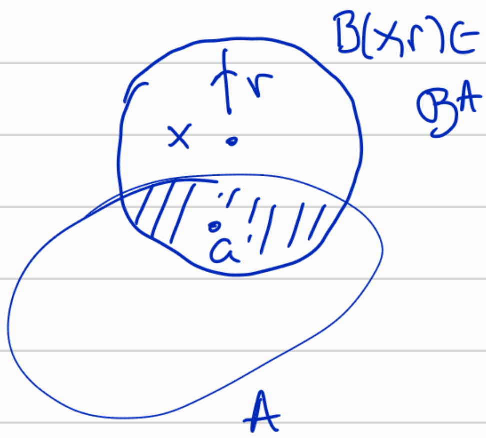
$$\boxed{B_A(a,r) = B(a,r)\cap A}$$

$\mathcal{B}_d^A \subset \mathcal{B}^A$.

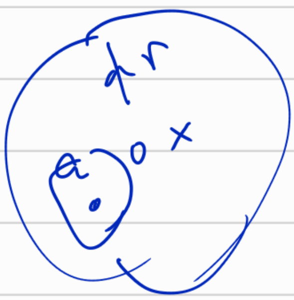


Para probar 1, tomamos $B \in \mathcal{B}_d^A$ y $B' = B$.

2. Sea $B' = B(x,r) \cap A \in \mathcal{B}^A$



Sea $a \in B' = B(x,r) \cap A$



$$s = r - d(x,a) > 0 \Rightarrow B(a,s) \subset B(x,r)$$

$$\Rightarrow B(a,s) \cap A \subset B(x,r) \cap A$$

$$\Rightarrow \underbrace{B_A(a,s)}_{=B} \subset B(x,r) \cap A = B'$$

$$a \in B \in \mathcal{B}_d^A$$

Acabamos de comprobar que $T_{d_A} = T_A$. (la distancia d_A genera la topología T_A).

42. Un e. top. AN-II es separable. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable del espacio (X,T). $\mathcal{B} = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$. Elegimos $x_i \in B_i \ \forall i \in \mathbb{N}$. El conjunto $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ es numerable. Veamos que $\bar{D} = X$. Solo hay que comprobar que $X \subset \bar{D}$. Sea $x \in X$. Sea $U \in N_x$ y sea $V \in T$ tal que $x \in V \subset U$. Existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in B_{i_0} \subset V \subset U.$$

$$x_{i_0} \in U \cap D. \Rightarrow U \cap D \neq \phi. \underset{\substack{\uparrow \\ U \in N_x \text{ arbitrario}}}{\Rightarrow} x \in \overline{D} \underset{\substack{\uparrow \\ x \text{ arbitrario}}}{\Rightarrow} X \subset \overline{D}$$ $\blacksquare$

43. Si (X,d) es AN-II $\underset{(42)}{\Rightarrow}$ es separable

Si (X,d) es separable, entonces existe D denso y numerable $(\overline{D} = X, \ \#D = \#\mathbb{N})$.

$$\mathcal{B} = \{ B(q, \tfrac{1}{n}) : q \in D, \ n \in \mathbb{N} \}$$

$\mathcal{B}$ es numerable. Veamos que $\mathcal{B}$ es base de T. Obviamente $\mathcal{B} \subset T$.

Sea $U \in T$. Si $x \in U$, $\exists\, r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$. Como $x \in X = \overline{D}$, $B(x, \frac{1}{n}) \cap D \neq \phi$ y existe $q \in D$ tal que $d(x,q) < \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$. Entonces

$$x \in \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{B}}}{B(q, \tfrac{1}{n})} \underset{\uparrow}{\subset} B(x,r) \subset U$$

Si $m \in B(q, \frac{1}{n})$, $d(m,x) \leq d(m,q) + d(q,x) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \Rightarrow m \in B(x,r)$

Hemos probado que $\forall\, U \in T$, $\forall\, x \in U$, $\exists\, B(q, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B(q, \frac{1}{n}) \subset U$. Esta propiedad implica que $\mathcal{B}$ es base. Por tanto, (X, T_d) es AN-II. $\blacksquare$