# AVISO LEGAL

Con motivo de la suspensión temporal de la actividad docente presencial en la Universidad de Granada, se informa de las condiciones de uso de este material que ha sido elaborado, por la profesora responsable de la asignatura Cálculo II del Grado de Matemáticas y del Doble Grado de Matemáticas-Física (Grupo A), y del Doble Grado de Matemáticas-Informática para su impartición por docencia virtual.

**“Queda prohibida la captación y/o grabación de la sesión así como su reproducción o difusión, en todo o en parte sea cual sea el medio o dispositivo utilizado. Cualquier actuación indebida comportará una vulneración de la normativa vigente, pudiendo derivarse las pertinentes responsabilidades legales”.** (Instrucción de la Secretaria General de 20 de abril de 2020, para la aplicación de la normativa de protección de datos en el uso de las herramientas digitales).

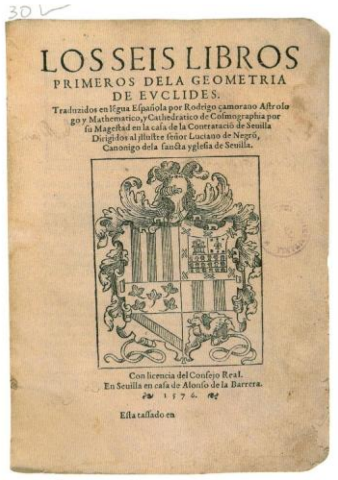
Puesto que este material forma parte de dichas sesiones docentes, queda prohibida expresamente su difusión o reproducción en todo o en parte.

# INTEGRACIÓN

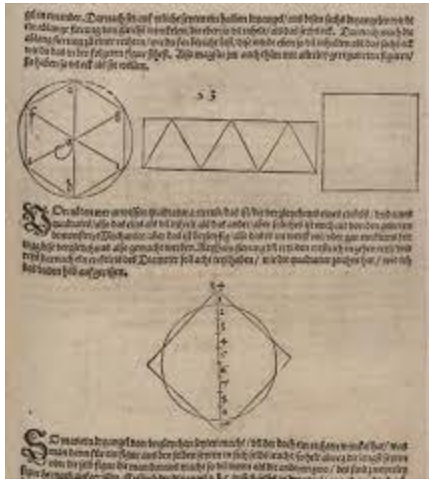
## Orígenes del Cálculo integral

- El cálculo de cuadraturas ya se considera en el Libro de los Elementos de Euclides (c. 300 a.C.). Se pretendía construir un cuadrado (cuadratura) cuya área fuese igual a la de una figura dada.

Libro de los Elementos de Euclides
(Trece libros)




Primera traducción al castellano del libro de los Elemantos



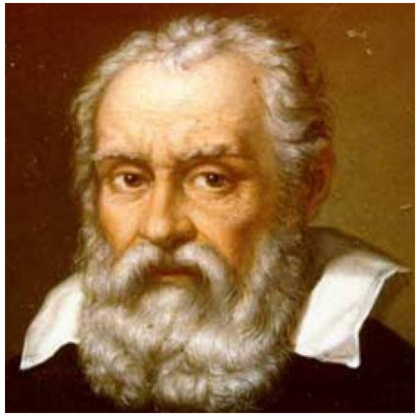
Método exahustivo

**Euclides**
(ca. 325 a. C.
ca. 265 a. C.)

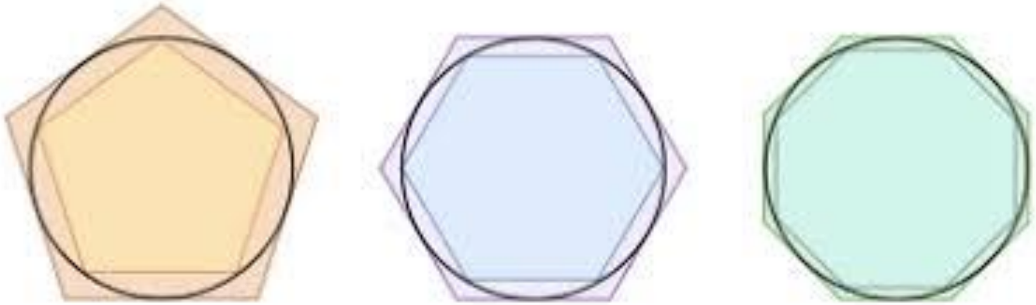
- El Método **Exhaustivo** (Eudoxo de Cnido c. 400-347a.C., Arquímedes c. 287-212 a.C.) es una técnica para calcular el área (resp. el volumen) de una región aproximándola por una sucesión de polígonos (resp. poliedros). Con él, los clásicos, calcularon el área de un segmento de parábola, el volumen de un segmento de paraboloide, volumen de una esfera etc.

# INTEGRACIÓN

**Eudoxio de Cnidos**
c. 400-347 a.C.,
Discípulo de Platón



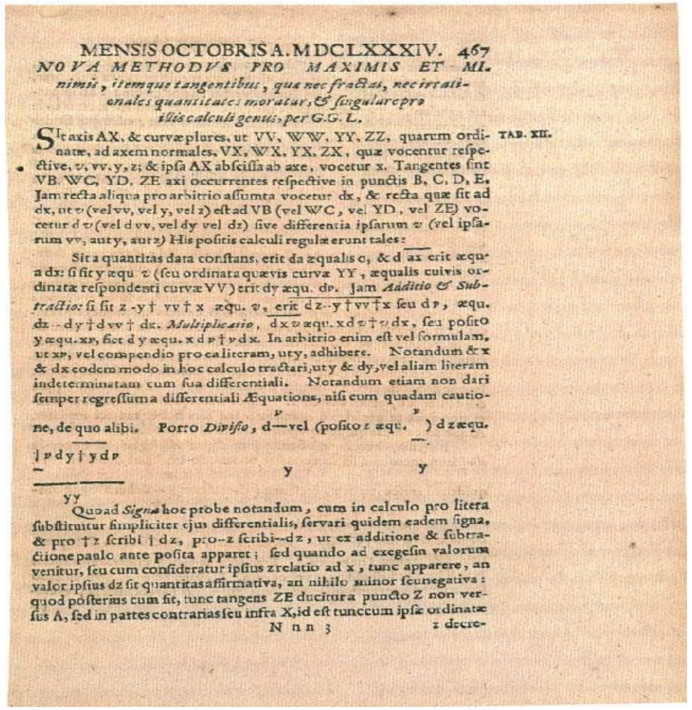
**Arquímedes**
c. 287-212 a.C.,



**Pierre de Fermat**
(1601-1665)

- En el S. XVI aparecen mejoras significativas sobre el método exhaustivo con autores como Cavalieri (Método de los indivisibles), Fermat (cuadraturas de hipérbolas y parábolas), Wallis (integración aritmética), etc.
- En el S. XVII las aportaciones de Barrow y Torricelli, muestran los primeros indicios de una conexión profunda entre la integración y la derivación. El Teorema Fundamental del Cálculo, formulado de manera independiente por Newton y Leibniz, pone de manifiesto esta relación mostrando que *la derivación y la integración son procesos inversos*. Ello propicia del desarrollo del Cálculo Infinitesimal, que proporciona un método reglado para el cálculo de derivadas y otro para el cálculo de primitivas (esto es determinar una función a partir de su derivada). Se relaciona así el cálculo de tangentes con el de áreas y se desarrolla el Cálculo moderno, cuya notación para las integrales que empleamos hoy día es la usada por Leibniz.

# INTEGRACIÓN


MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MI-
nimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrati-
onales quantitates moratur, & singulare pro
illis calculi genus, per G.G. L.

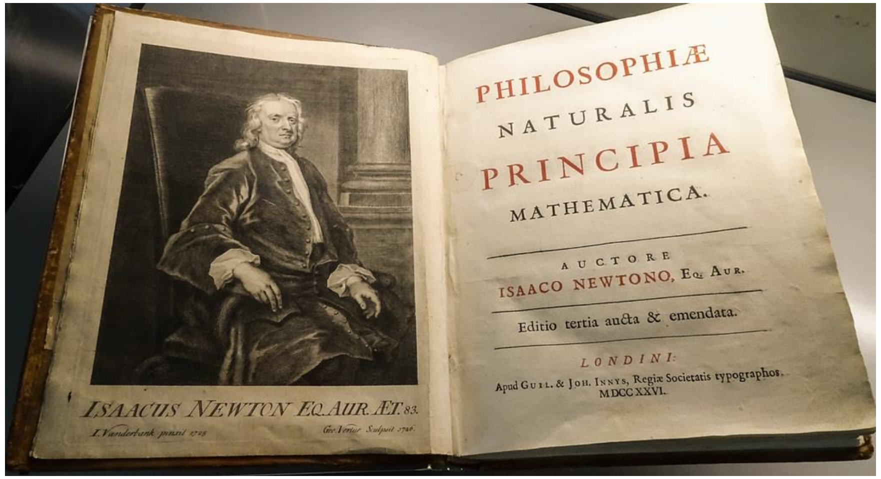
Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordi- TAB. XII.
natæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respe-
ctive, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint
VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E.
Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad
dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vo-
cetur dv (vel dvv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsa-
rum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu.
a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis or-
dinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Sub-
tractio:* si sit z - y † vv † x æqu. v, erit dz - y † vv † x seu dv, æqu.
dz - dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, dxv æqu. xdv † vdx, seu posito
y æqu. xv, fiet dy æqu. xdv † vdx. In arbitrio enim est vel formulam,
ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x
& dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam
indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari
semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautio-
ne, de quo alibi. Porro *Divisio*, d v/y vel (posito z æqu. v/y) dz æqu.
† vdy † ydv / yy

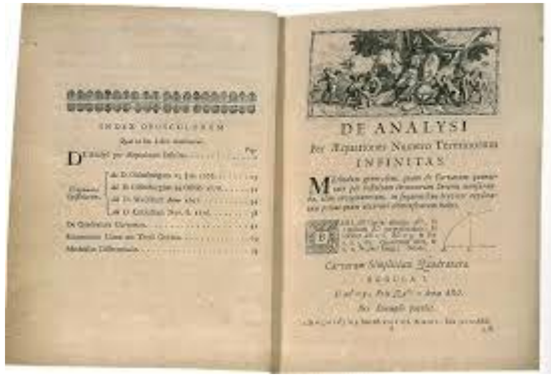
Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera
substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa,
& pro † z scribi † dz, pro - z scribi - dz, ut ex additione & subtra-
ctione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum
venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an
valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa:
quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non ver-
sus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ
N n n 3 z decre-

*Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos*
Leibniz. Acta Eruditorum (1686)

Leibiniz introduce la notación **dx** para la diferencial y $\int$ para la integral.




*Principios Metemáticos de la Filosofía Natural* **(1687)**




*De analyse per aequationes numero terminorum infinitas*
(Obra de I. Newton de 1669 publicada en 1711)

**Isaac Barrow**
(1630-1677)

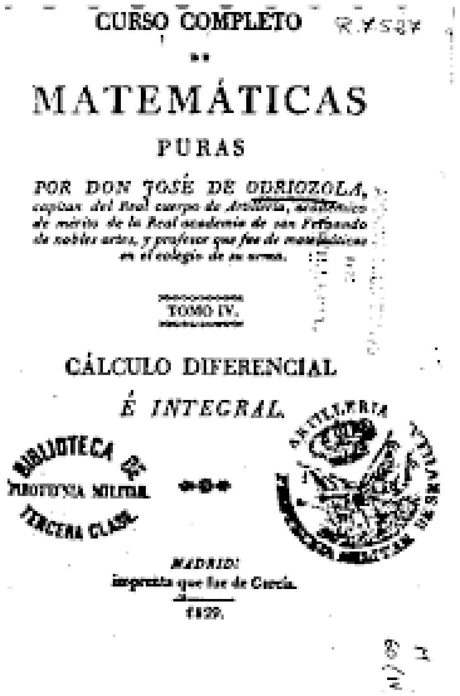
**Evangelista Torricelli**
(1608-1647)

**Isaac Newton**
(1643- 1727)

**Gottfried Wilhelm Leibniz**
(1646-1716)

- Los matemáticos del S XVII y XVIII se dedican al cálculo de primitivas para determinar áreas, volúmenes y longitudes de curvas, para resolver problemas de la Física y otras ciencias. Por ejemplo, Newton añade su Tractus de quadrature curvarum, como un apéndice de su obra Óptica (1704).
- La primera definición rigurosa de integral la proporciona Cauchy en el S. XIX estableciendo la teoría de la integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado (hoy denominada integral de Cauchy).

Augustin Louis Cauchy,
(1789 -1857)



CURSO COMPLETO

MATEMÁTICAS

PURAS

POR DON JOSÉ DE ODRIOZOLA,
capitan del Real cuerpo de Artillería, académico de mérito de la Real academia de san Fernando de nobles artes, y profesor que fue de matemáticas en el colegio de su arma.

TOMO IV.

CÁLCULO DIFERENCIAL

É INTEGRAL.

MADRID:
imprenta que fue de García.
1829.

El Teorema de Heine (1821 - 1881) (probado por Borel en 1895) juega un papel fundamental en ella y Cauchy lo usaba implícitamente.

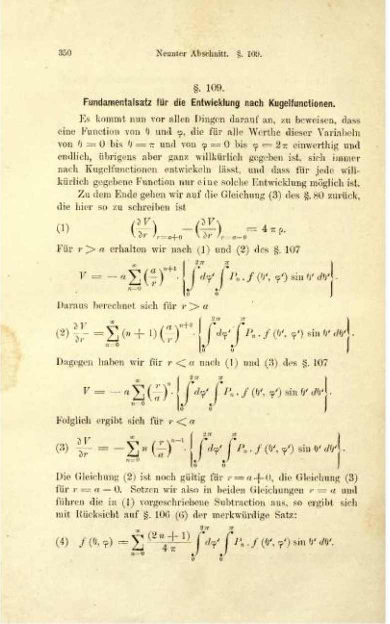
Jean Baptiste Fourier
(1768 -1830)


Peter Gustav Lejeune Dirichelt ,
(1805—1859)

# INTEGRACIÓN

- Con los trabajos de Fourier (1768-1830) sobre representación de funciones mediante series trigonométricas (desarrollo en serie de Fourier) la idea de función evoluciona hasta su concepción actual formulada por Dirichlet en 1837.
- La integral de Cauchy se extiende al caso de las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotadas no necesariamente continuas: Integral de Riemann. También se aborda el caso de las integrales de funciones no acotadas (integrales impropias). Como no todas estas funciones son integrables ya se distingue entre funciones integrables y no integrables

Georg Friedrich Bernhard Riemann
(1826 -1866)



350 Neunter Abschnitt. §. 109.

§. 109.

**Fundamentalsatz für die Entwicklung nach Kugelfunctionen.**

Es kommt nun vor allen Dingen darauf an, zu beweisen, dass eine Function von $\vartheta$ und $\varphi$, die für alle Werthe dieser Variabeln von $\vartheta=0$ bis $\vartheta=\pi$ und von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ einwerthig und endlich, übrigens aber ganz willkürlich gegeben ist, sich immer nach Kugelfunctionen entwickeln lässt, und dass für jede willkürlich gegebene Function nur eine solche Entwicklung möglich ist.

Zu dem Ende gehen wir auf die Gleichung (3) des §. 80 zurück, die hier so zu schreiben ist

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a+0}-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a-0}=4\pi\rho.$$

Für $r>a$ erhalten wir nach (1) und (2) des §. 107

$$V=-a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\cdot\left\{\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}P_n\cdot f(\vartheta',\varphi')\sin\vartheta'\,d\vartheta'\right\}.$$

Daraus berechnet sich für $r>a$

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial r}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\cdot\left\{\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}P_n\cdot f(\vartheta',\varphi')\sin\vartheta'\,d\vartheta'\right\}.$$

Dagegen haben wir für $r<a$ nach (1) und (3) des §. 107

$$V=-a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\cdot\left\{\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}P_n\cdot f(\vartheta',\varphi')\sin\vartheta'\,d\vartheta'\right\}.$$

Folglich ergibt sich für $r<a$

$$(3)\qquad \frac{\partial V}{\partial r}=-\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\cdot\left\{\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}P_n\cdot f(\vartheta',\varphi')\sin\vartheta'\,d\vartheta'\right\}.$$

Die Gleichung (2) ist noch gültig für $r=a+0$, die Gleichung (3) für $r=a-0$. Setzen wir also in beiden Gleichungen $r=a$ und führen die in (1) vorgeschriebene Subtraction aus, so ergibt sich mit Rücksicht auf §. 106 (6) der merkwürdige Satz:

$$(4)\qquad f(\vartheta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}P_n\cdot f(\vartheta',\varphi')\sin\vartheta'\,d\vartheta'.$$

Riemann, en 1854, publica su obra Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Sobre la representación de una función por una serie trigonométrica) para acceder al cargo de Profesor Auxiliar en la Universidad de Göttingen (fue numerario en 1859). En ella analizó las condiciones de Dirichlet para el problema de representación de funciones en serie de Fourier.

En este trabajo, definió el concepto de la hoy denominada Integral de Riemann, consolidando la teoría de las funciones reales de variable real.

- La teoría de integración adquiere entidad propia y en 1902 con la Tesis Doctoral de Lebesgue y su texto Lecons sur L´íntegration et la récherche des fonctions primitives. Con estas aportaciones, reinterpretando las ideas de Leibniz, se consigue un concepto más general de integral, hoy llamado Integral de Lebegue. Con esta noción de integral se asientan las bases para el desarrollo del Análisis Matemático y otras muchas disciplinas, a lo largo del S. XX.

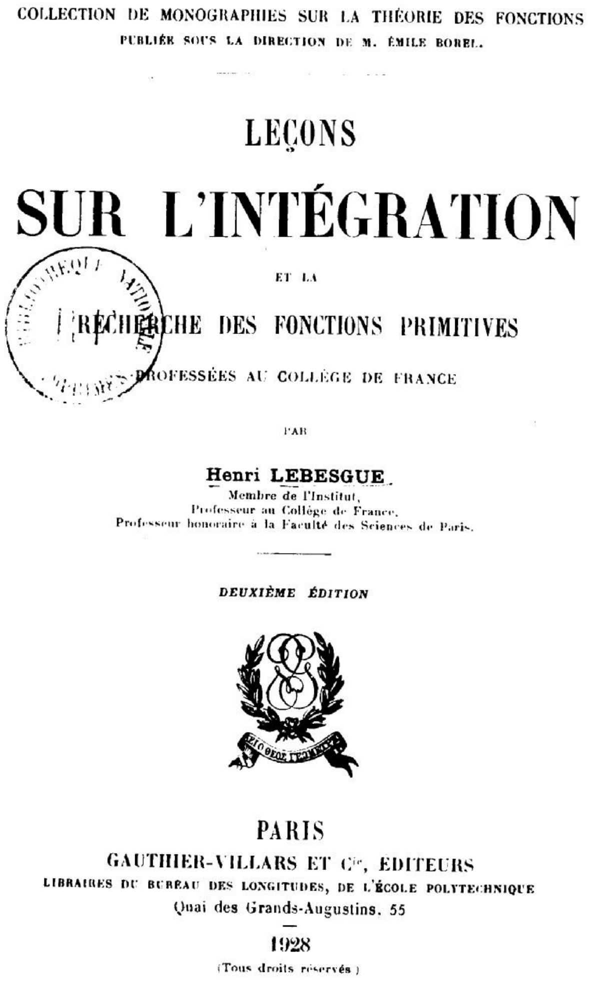
**Henri Lebesgue**
(1875-1941)


THÈSES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR M. HENRI LEBESGUE.

MILAN


COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS
SUR L'INTÉGRATION
ET LA
RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES
PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

Henri LEBESGUE,
Membre de l'Institut,
Professeur au Collège de France,
Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Paris.

DEUXIÈME ÉDITION

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1928

(Tous droits réservés.)

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

## Particiones de un intervalo. Sumas asociadas a una partición dada.

Los intervalos considerados son siempre no triviales.

**Definición.** Se llama partición de $[a,b]$ a cualquier subconjunto finito $P$ contenido en $[a,b]$ tal que $a,b \in P$. Escribimos $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ siendo $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.
(Nótese que cada partición tiene su propio cardinal $n$).

Definimos diámetro de $P$ como

$$\Delta P = \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, \ldots, n\}.$$

La unión de dos particiones de $[a,b]$ es una partición de $[a,b]$.

**Definición.** Sean $P$ y $P'$ dos particiones de $[a,b]$. Decimos que $P$ es más fina que $P'$ si $P' \subseteq P$.

Denotamos por $\mathscr{P}[a,b]$ al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

**Ejemplo.** $P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, P_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ y $P_3 = \left\{0, \frac{1}{4}, 1\right\}$ son particiones de $[0,1]$ siendo $P_2$ más fina que $P_1$. La partición $P_3$ no está relacionada con las anteriores (en el sentido de ser más fina).

# INTEGRACIÓN : LA INTEGRAL DE CAUCHY

Recordamos el Teorema de Weierstrass que establece que una función continua en un intervalo $[a,b]$ alcanza sus valores máximo y mínimo en ciertos puntos del intervalo.
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Sea $P=\{x_0=a, x_1,\ldots, x_n=b\}$ una partición de $[a,b]$.
Como $f$ es continua en $[x_k, x_{k+1}]$ para cada $k=1,\ldots,n$, existen

$$m_k = \min\{f(x) : x \in [\,x_k, x_{k-1}]\}$$
$$M_k = \max\{f(x) : x \in [\,x_k, x_{k-1}]\}$$

**Definición.** Se llama suma inferior de $f$ respecto de partición $P$ al valor $I(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(\,x_k - x_{k-1})$.
Se llama suma superior de $f$ respecto de la partición $P$ al valor $S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(\,x_k - x_{k-1})$.

Si elegimos $t_k \in [\,x_{k-1}, x_k]$, se dice que $\sigma(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\,x_k - x_{k-1})$ es una suma intermedia

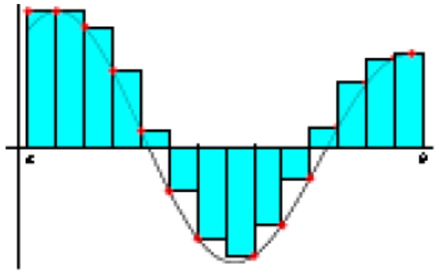
**Observación.** Si $\mathrm{Im}\, f=[m,M]$ (se recuerda que $f$ es continua en $[a,b]$) entonces

$$m(b-a)\le I(f,P)\le\sigma(f,P)\le S(f,P)\le M(b-a).$$

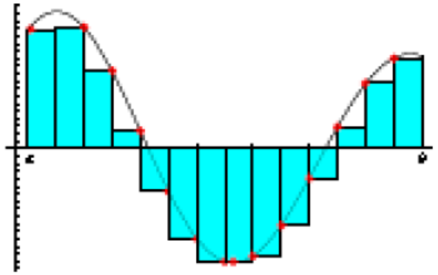
En consecuencia, los siguientes valores existen:

$I(f)=\sup\{I(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\}$,
$S(f)=\inf\{S(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\}$,

siendo $I(f)\le S(f)$.



Suma superior.

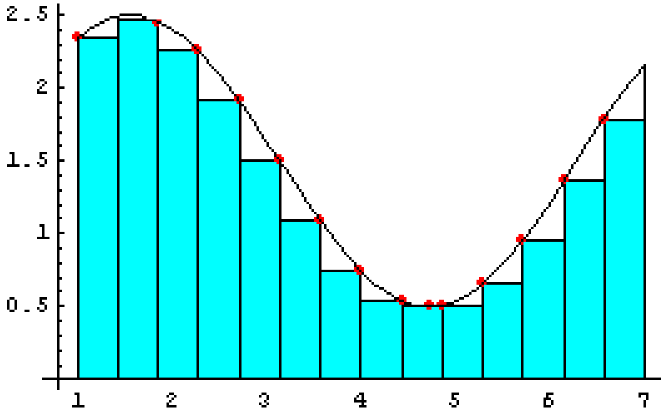


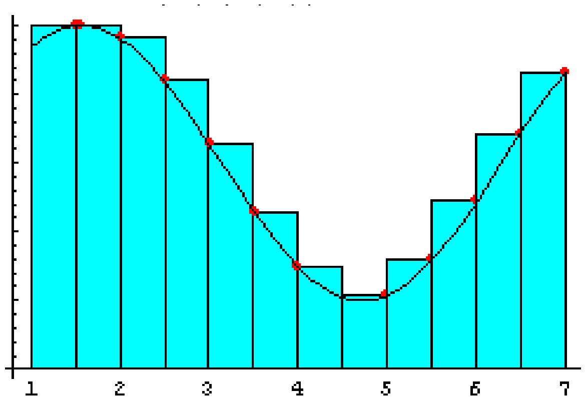
Suma inferior.

Cuando $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y tal que $f(x)\geq 0$ para cada $x\in[a,b]$ entonces:

$I(f,P)$ (y por tanto $I(f)$ es una aproximación por defecto del área que determina la gráfica de la función $f$.

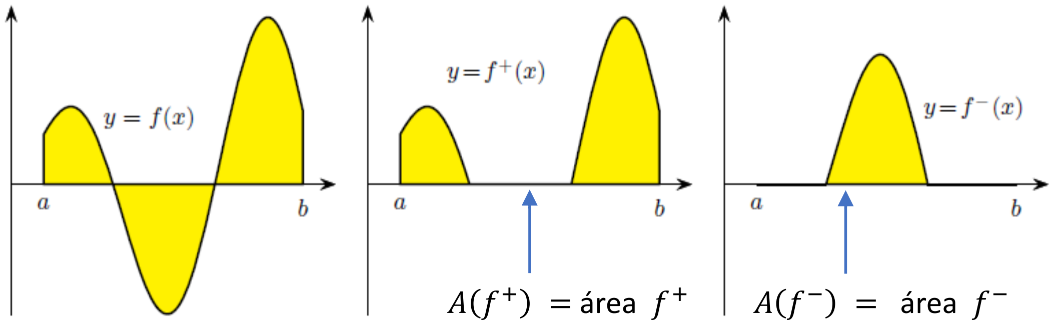
Análogamente, $S(f,P)$ (y por tanto $S(f)$) es una aproximación por exceso.

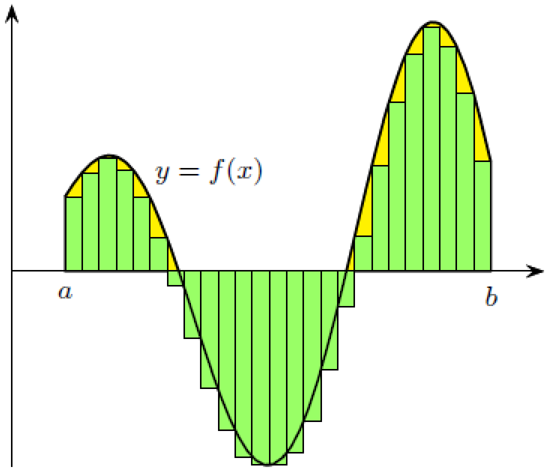


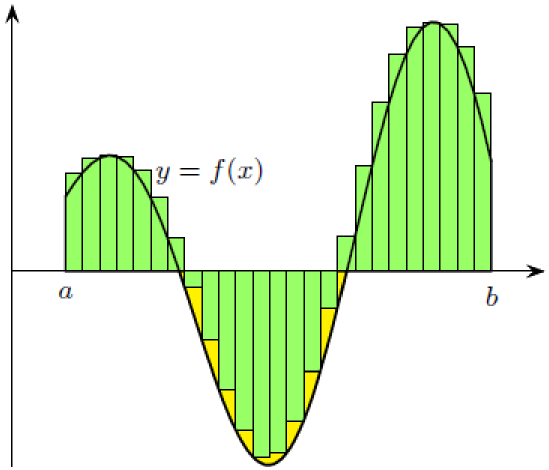

Cuando $f$ toma valores positivos y negativos (siendo continua) la situación cambia:

$$I(f,P)\leq A(f^+)-A(f^-)\leq S(f,P)$$



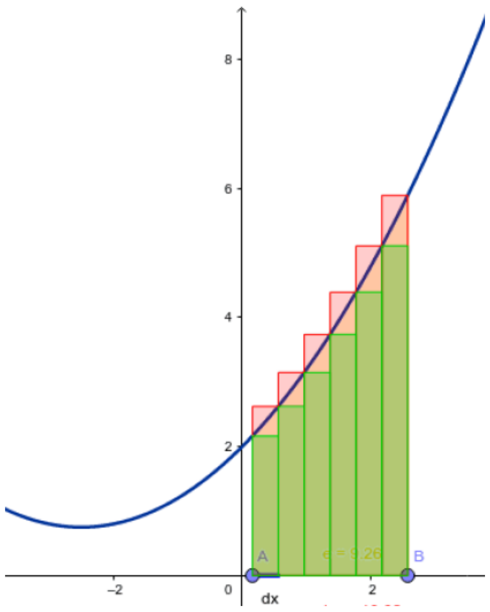

$I(f,P)$




$S(f,P)$

**Teorema.** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si el diámetro de $P\in\mathscr{P}[a,b]$ es $\Delta P<\delta$ entonces $S(f,P)-I(f,P)<\varepsilon$.

**Dem.** Por el Teorema de Heine, $f$ es uniformemente continua en $[a,b]$. Así, asociado a $\frac{\varepsilon}{b-a}$ existe $\delta>0$ tal que si $x,y\in[a,b]$ son tales que $|x-y|<\delta$ entonces $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.




Sea $P\in\mathscr{P}[a,b]$ tal que $\Delta P<\delta$. Si $P=\{x_0=a,x_1,\dots,x_n=b\}$. Entonces, por el Teorema de Weierstrass existen $u_k,v_k\in[x_{k-1},x_k]$ tales que

$$f(u_k)=m_k=\min\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$$
$$f(v_k)=M_k=\max\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\},$$

de donde $|v_k-u_k|<\Delta P<\delta$, por lo que

$$|f(v_k)-f(u_k)|=f(v_k)-f(u_k)=M_k-m_k<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

para $k=1,\dots,n$. Así,

$$S(f,P)-I(f,P)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Como $I(f,P)\le I(f)\le S(f)\le S(f,P)$ de aquí se obtiene, en particular, que $S(f)-I(f)<\varepsilon$ (si existen particiones de diámetro menor que $\delta$)

El teorema anterior se reformula como sigue:

**Corolario.** Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Sea $P_n$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) - I(f,P_n) = 0.$$

**Dem.** Por el teorema anterior, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si el diámetro de $P \in \mathcal{P}[a,b]$ es $\Delta P < \delta$ entonces $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$. Como $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$, dado $\delta$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta P_n \leq \delta$ para cada $n \geq n_0$ de donde $S(f,P_n) - I(f,P_n) < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$ y esto significa que

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) - I(f,P_n) = 0. \qquad \blacksquare$$

**Observación:** Si los límites $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$ y $\lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$ existen, esto nos dice que dichos límites han coincidir.

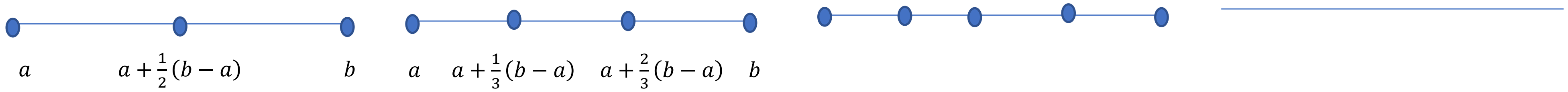
Antes de plantearnos la existencia de tales límites nos cuestionamos algo todavía más básico:

**Cuestión:** ¿Existen particiones de diámetro tan pequeño como se necesite? De ser así, $I(f) = S(f)$.
Veamos que sí y que los límites $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$ y $\lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$ existen y valen $I(f) = S(f)$.

Observación. Existen particiones de $[a,b]$ de diámetro arbitrariamente pequeño.

$$P_n = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}, \qquad x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$\Delta P_n = \frac{(b-a)}{n}$$




$$\Delta P_2 = \frac{(b-a)}{2} \qquad \Delta P_3 = \frac{(b-a)}{3} \qquad \Delta P_4 = \frac{(b-a)}{4}$$

Además podemos conseguir que las particiones estén encajadas. Esto es que $P_n \subseteq P_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
¿Cómo?

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &:= P_1 \\ \tilde{P}_2 &:= P_2 \cup P_1 \\ \tilde{P}_n &:= P_n \cup \cdots \cup P_1 \end{aligned}$$

Está claro que $\tilde{P}_n \subseteq \tilde{P}_{n+1}$ y que $\Delta \tilde{P}_n \leq \Delta P_n = \frac{(b-a)}{n}$. Por tanto:

Para cualquier $[a,b]$ existen particiones $P_n$ tales que $P_n \subseteq P_{n+1}$ y $\Delta P_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

**Teorema (de la Integral de Cauchy).** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Entonces $I(f)=S(f)$.

**Dem.** Sea $P_n \in \mathscr{P}[a,b]$ una sucesión de particiones tal que $P_n \subseteq P_{n+1}$, y $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0.$
Puesto que $P_{n+1}$ es más fina que $P_n$, temenos que

$$I(f,P_n) \le I(f,P_{n+1}) \le I(f) \le S(f) \le S(f,P_{n+1}) \le S(f,P_n),$$

lo que garantiza la existencia de los siguientes límites $\lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$ e $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$. Además

$$\lim_{n\to\infty} I(f,P_n) \le I(f) \le S(f) \le \lim_{n\to\infty} S(f,P_n).$$

Como $f$ es continua y $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0,$ por el teorema anterior, dado $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N},$ tal que $S(f,P_n)-I(f,P_n)<\varepsilon$, para cada $n\ge n_0$, de donde $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)-I(f,P_n)=0$. En consecuencia,

$$S(f)-I(f)=\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)-I(f,P_n)=0. \quad \blacksquare$$

**Definición.** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Se define la integral de $f$ en $[a,b]$ como el valor

$$\int_a^b f(x)dx = I(f) = S(f).$$

**Observación.** El símbolo $dx$ determina la variable de integración que se entiende como una variable muda.

Corolario. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Dada $P_n \in \mathscr{P}[a,b]$ (con $n\in\mathbb{N}$), sea $\sigma(P_n,f)$ una sucesión de sumas intermedias. Si $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n = 0$, entonces se verifica que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sigma(P_n,f).$$

Dem. Por ser $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y ser $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n = 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) - I(f,P_n) = 0.$$

Como

$$I(f,P_n)\le I(f)\le S(f)\le S(f,P_n),$$

Tenemos que

$$0\le S(f,P_n)-S(f)\le S(f,P_n)-I(f,P_n)\to 0.$$

Por tanto, $S(f)=\lim_{n\to\infty}S(f,P_n)$ y análogamente, $I(f)=\lim_{n\to\infty}I(f,P_n)$. Por el teorema anterior sabemos que $I(f)=S(f)$, de donde $S(f)=\lim_{n\to\infty}S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}I(f,P_n)=I(f)$ y puesto que

$$I(f,P_n)\le\sigma(P_n,f)\le S(f,P_n),$$

el resto es claro. ■

**Corolario.** Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$.

**Dem.** Obvia. (El diámetro de la sucesión de particiones considerada tiende a cero).

**Corolario.** Si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es continua entonces $\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Así $\int_0^1 f(x)dx$ puede entenderse como el límite de un promedio de los valores $\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}$.

**Ejemplo.** $\int_a^b xdx=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$.

Sea $P_n=\{x_0=a, x_1,\ldots, x_n=b\}$, donde $x_k=a+\frac{k}{n}(b-a)$ para $k=0,1,\ldots,n$.

Como $\Delta P_n=\frac{(b-a)}{n}\to 0$ temenos que

$$S(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\left(a+\frac{1}{n}(b-a)\right)+\cdots+\frac{b-a}{n}\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)+\cdots+\frac{b-a}{n}\left(a+\frac{n}{n}(b-a)\right)=$$

$$=(b-a)a+\frac{(b-a)^2}{n^2}(1+2+\cdots+n)=(b-a)a+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=(b-a)a+\frac{(b-a)^2}{2}\frac{n(n+1)}{n^2},$$

de donde

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}S(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}\left((b-a)a+\frac{(b-a)^2}{2}\frac{n(n+1)}{n^2}\right)=(b-a)a+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}.$$

La integración sirve de herramienta para usar para sumar series y calcular valores numéricos:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ejemplo. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$

En efecto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

donde $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2\,.$$

Ejemplo. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \ln\sqrt{2}$

En efecto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

para $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

## Propiedades de la integral de Cauchy.

**Linealidad.** Sean $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Dem. Sabemos que $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(\alpha f + \beta g, P_n)$, donde $\sigma(\alpha f + \beta g, P_n)$ es una suma intermedia de $\alpha f + \beta g$ para la partición $P_n \in \mathscr{P}[a, b]$, siendo $P_n$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$.

El resultado se obtiene de los siguientes hechos:

$$\sigma(\alpha f + \beta g, P_n) = \alpha\, \sigma(f, P_n) + \beta\, \sigma(g, P_n),$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n), \quad \text{y} \quad \int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(g, P_n). \qquad \blacksquare$$

**Positividad.** Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Dem. Se obtiene del hecho de que $\sigma(f, P) \geq 0$, para cada partición $P \in \mathscr{P}[a, b]$. $\blacksquare$

Observaciones.

(i) El operador integral $C([a,b]) \to \mathbb{R}$ dado por $f \to \int_a^b f(x)dx$ es un funcional lineal positivo.

(ii) Si establecemos la relación de orden en $C([a,b])$ dada por $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in [a,b]$ entonces

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Corolario. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)dx$.

Dem. Como $-|f| \leq f \leq |f|$, temenos que (por la positividad), $-\int_a^b |f|(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f|(x)dx$. ■

Corolario. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $\mathrm{Im} f(x) = [m,M]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Dem. Si $g_1(x) = m$ y $g_2(x) = M$, es claro que $g_1 \leq f \leq g_2$, de donde se obtiene lo afirmado. ■

**Aditividad respecto del intervalo de integración.** Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $c \in ]a, b[$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dem. Dada $P \in \mathscr{P}[a, b]$, sea $P' = P \cup \{c\}$. Definimos $P_1 = P' \cap [a, c]$ y $P_2 = P' \cap [c, b]$.
Si $P' = \{x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ siendo $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_k = c < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$, es claro que

$$P_1 = \{x_0, \ldots, x_k\}, \quad P_2 = \{x_k, \ldots, x_n\}$$

y que

$$I(f, P) \leq I(f, P') = I(f_{/[a,c]}, P_1) + I(f_{/[c,b]}, P_2) \leq I(f_{/[a,c]}) + I(f_{/[c,b]}) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \,.$$

Tomando supremos,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \,.$$

Aplicando lo anterior a $-f$, deducimos que

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Uniendo las dos últimas desigualdades,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad \blacksquare$$

**Corolario.** Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y tal que $f \geq 0$ en $[a,b]$, pero existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) > 0$, entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$.

**Dem.** No es restrictivo suponer que $x_0 \in ]a,b[$ (pues si fuese $f(a) \neq 0$ ó $f(b) \neq 0$ estó se verificaría). Por el Teorema de conservación del signo, existe $\delta > 0$ tal que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq ]a,b[$. Sea

$$m := \min\{f(x) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\} > 0.$$

Por tanto,

$$0 < 2\delta m \leq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x)dx.$$

En consecuencia,

$$0 < \int_a^{x_0 - \delta} f(x)dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x)dx + \int_{x_0 + \delta}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(por ser la suma de dos números no negativos con uno (estrictamente) positivo). ■

**Corolario.** El operador integral es estrictamente creciente en el sentido de que $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas siendo $f < g$ (esto es $f \leq g$ y $f \neq g$) entonces, $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

**Dem.** Aplicamos lo anterior a $g - f$ y usamos la linealidad de la integral respecto del integrando. ■

**Teorema (del valor medio integral).** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, su promedio integral se alcanza en algún punto $c \in [a, b]$, lo que significa que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

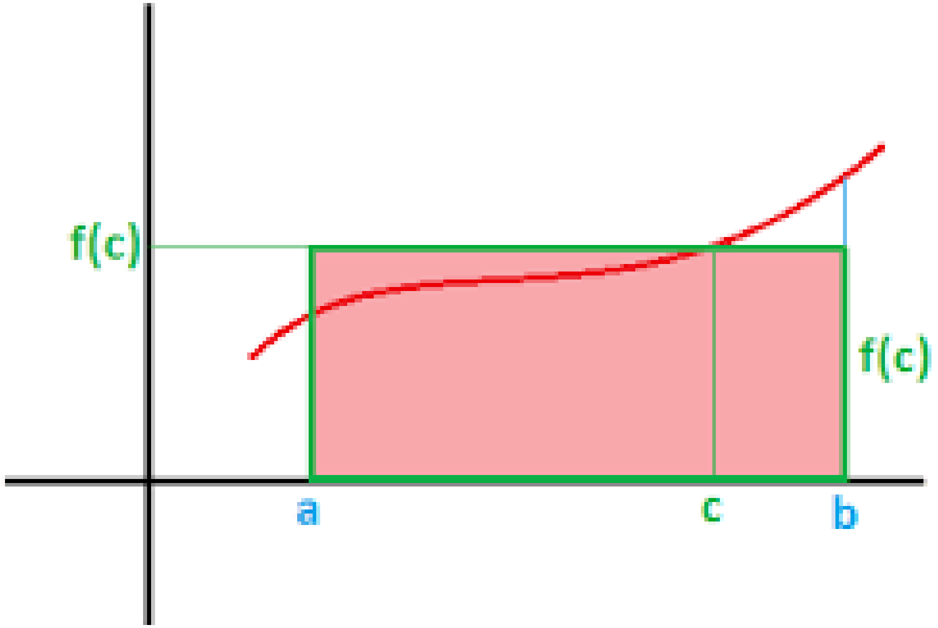
**Dem.** Sea $\mathrm{Im} f = [m, M]$ (Teorema de Weierstrass). Puesto que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

y en consecuencia

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \in [m, M] = \mathrm{Im} f.$$

Así, el resultado es claro por el teorema de los valores intermedios aplicado a la función $f$. ■




**Observación:** El valor $f(c)$ nos proporciona la cuadratura de $f$ en $[a, b]$.

**Teorema (promedio integral ponderado).** Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, siendo $g$ no negativa en $[a,b]$. Entonces existe $c \in [a,b]$, tal que $\int_a^b (fg)(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$.

**Dem.** Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, entonces ha de ser $g = 0$ (por ser continua y no negativa) y el resultado es claro.

Supongamos que $\int_a^b g(x)dx \neq 0$. Sea $\mathrm{Im} f = [m, M]$ (Teorema de Weierstrass).

Puesto que $mg \leq fg \leq Mg$ tenemos que

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b (fg)(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

En consecuencia

$$\frac{\int_a^b (fg)(x)dx}{\int_a^b g(x)dx.} \in Imf = [m, M].$$

Por ello existe $c \in [a,b]$ verificando lo pedido. ■

**Observaciones:**

(i) El valor $f(c)$ recibe el nombre de promedio integral ponderado de $f$ respecto a la función $g$.

(ii) La función producto $fg$ es una función continua en $[a,b]$ (por ser producto de funciones continuas).