Análisis Matemático II

Tema 1: Ejercicios propuestos

1. Se considera la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si, C está acotado.

2. Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$g_n(x) = \frac{2\,n\,x^2}{1 + n^2\,x^4} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, probar que $\{g_n\}$ converge uniformemente en $[\,\delta\,,\,+\infty\,[$, pero no en el intervalo $[\,0\,,\,\delta\,]$.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : [\,0\,,\,\pi/2\,] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g_n(x) = n\,(\cos x)^n \operatorname{sen} x \qquad \forall\, x \in [\,0\,,\,\pi/2]$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < \pi/2$, probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en el intervalo $[\,\rho\,,\,\pi/2\,]$, pero no en $[\,0\,,\,\rho\,]$.

4. Sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{1 + n\,|\,x\,|} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

5. Se considera la sucesión $\{\psi_n\}$ de funciones de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\psi_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dados $r, \rho \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1 < \rho$, estudiar la convergencia uniforme de $\{\psi_n\}$ en los conjuntos $[\,0\,,\,r\,]$, $[\,r\,,\,\rho\,]$ y $[\,\rho\,,\,+\infty\,[$.