Relacion-1-DG-1920.pdf

parse01

Geometría II

1º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada


BURGER KING
Menú Doble Texas®
Menú Long Chicken®
2x7€
Menú Crispy Chicken® BBQ con queso
Menú Big King®
AUTO KING
PARA LLEVAR
RESTAURANTE
Válido hasta 10/05/21. Elección de 2 menús pequeños entre menú Crispy Chicken® BBQ con queso, Big King®, Doble Texas o Long Chicken®. Por +0,50€/menú mediano, por +1€/menú grande. Patatas Supreme excepto para menús pequeños. Agua de 0,33cl en menú pequeño y 0,5cl en el resto de menús. Excluidos refrescos embotellados. Cerveza no disponible en menús pequeños. Restaurantes no adheridos en www.burgerking.es. COCA-COLA® y COCA-COLA ZERO® son marcas registradas de THE COCA-COLA COMPANY. TM Burger King Corporation. © 2021 Burger King Europe GmbH. BURGER KING® se reserva el derecho a ampliar el periodo promocional. Todos los derechos reservados.

GEOMETRÍA II. RELACIÓN DE PROBLEMAS 1

TEMA 1: DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS

Curso 2019-20

1. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tal que $f \circ f = -I_V$. Demuestra que f no tiene valores propios y, por tanto, no es diagonalizable. ¿Se puede llegar a la misma conclusión si V es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$? Concluye que el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $f(x,y) = (y,-x)$ no es diagonalizable.

2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $f \circ f = r I_V$. Demuestra que los únicos valores propios posibles de f son $\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$.

3. Prueba que toda matriz cuadrada de orden 2 con coeficientes reales simétrica o con determinante negativo es diagonalizable. ¿Es cierto que todos los automorfismos de $\mathbb{R}^2$ son diagonalizables?

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ un endomorfismo de V tal que $\mathrm{nul}(f) \geq n-1$ y se cumple $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Demuestra que f es diagonalizable.

5. En el espacio $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{R}$ se define el endomorfismo $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ como $f(p(x)) = xp'(x)$, donde $p'(x)$ representa la derivada de $p(x)$ con respecto a x. Calcula los valores propios y los subespacios propios de f. Encuentra, si es posible, una base de $\mathbb{R}_n[x]$ formada por vectores propios de f.

6. Estudia si las siguientes matrices con coeficientes reales son diagonalizables:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -8 \\ -2 & -3 & 7 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$
Analiza también si cualesquiera dos matrices de las de arriba son semejantes.

7. Estudia si las siguientes matrices con coeficientes complejos son diagonalizables:
$$A = \begin{pmatrix} -3+\mathrm{i} & -3 & -3-2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 3\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 3 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -3 & -1-4\mathrm{i} \\ -1+2\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & 2+2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 3 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$
Analiza también si cualesquiera dos matrices de las de arriba son semejantes.

8. Consideremos el endomorfismo $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b+c \\ 2a-2c & 4d \end{pmatrix}.$$

¿Es f diagonalizable? En caso de serlo, proporciona una base de vectores propios.

9. Estudia si la siguiente matriz con coeficientes reales es semejante a una matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. En el espacio vectorial real $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales consideramos la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

y el endomorfismo $f : S_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R})$ tal que

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores propios de f. Discute si existe una base de $S_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de f. Calcula los subespacios propios de f y encuentra una base de cada uno.

11. Estudia para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la matriz de coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -a & a \\ a+2 & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Para dichos valores, encuentra P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

12. Dada la matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide lo siguiente:

   a) Estudia si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

b) ¿Existe una matriz cuadrada C con coeficientes reales tal que $C^4 = A$? Kyle Hamilton y Diagonalizar

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}.$$

Se pide lo siguiente:

a) ¿Para qué valores de a hay un valor propio de f con multiplicidad algebraica 3?

b) Estudia para qué valores de a el endomorfismo f es diagonalizable.

c) Para $a = 1$ y $a = 2$ encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f.

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide lo siguiente:

a) Calcula a para que 2 sea un valor propio de f.

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, determina si f es diagonalizable. Si f es diagonalizable calcula una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice el endomorfismo.

c) Estudia si la matriz

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. ¿Puede ser $\widetilde{A}$ la matriz del endomorfismo f respecto de alguna base?

15. Se considera la siguiente matriz cuadrada con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix},$$

donde a y b son números reales con $a \geq b$. Se pide lo siguiente:

a) Calcula el polinomio característico y los valores propios de A.

b) Calcula las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de A. Estudia cuando A es diagonalizable.

$c)$ En los casos en los que A sea diagonalizable, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

16. Sea V un espacio vectorial real tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f : V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

    $a)$ $f(u) = u$, con $u = 6v_1 + 2v_2 + 5v_3$.

    $b)$ $U = \{v \in V \,/\, x + 6y - 3z = 0\}$ es un subespacio propio de f. Aquí x, y, z representan las coordenadas de v con respecto a B.

    $c)$ La traza de f es 5.

    Calcula los valores propios de f y la matriz $M(f, B)$.

17. Sea V un espacio vectorial real tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f : V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

    $a)$ $f(v_1) = 3v_1 + 2v_2 + 2v_3$.

    $b)$ $f(v_2) = 2v_1 + 2v_2$.

    $c)$ El vector $v = 2v_1 - 2v_2 - v_3$ está en el núcleo de f.

    Calcula $M(f, B)$ y estudia si f es diagonalizable. En caso afirmativo, da una base B' de V tal que $M(f, B')$ sea diagonal.

18. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in M_2(\mathbb{K})$. Definimos $F_A : M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$ como $F_A(X) = AX$.

    $a)$ Prueba que F_A es un endomorfismo de $M_2(\mathbb{K})$. Calcula la matriz que representa a F_A en la base usual de $M_2(\mathbb{K})$.

    $b)$ Demuestra que el polinomio característico de F_A coincide con $p_A(\lambda)^2$.

    $c)$ Prueba que si A es diagonalizable, entonces F_A también lo es.

19. Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifica:

    $$f(0,1,1) = (-4,-3,-3) \quad , \quad f(0,1,0) = (-3,-2,-3) \quad , \quad f(1,-1,0) = (7,5,6)\ .$$

    $a)$ Calcula la matriz de f respecto a la base canÛnica.

    $b)$ Calcula los valores propios de f y una base de cada uno de los subespacios propios asociados.

    $c)$ ¿Es f un monomorfismo?

    $d)$ Determina si f es diagonalizable. En caso afirmativo, calcula una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice el endomorfismo.

    $e)$ Calcula $f^{50}(0,0,\pi)$.

20. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

Demuestra que A no es diagonalizable. ¿Es diagonalizable si se considera con entradas en $\mathbb{C}$? Utiliza el Teorema de Cayley-Hamilton para poner A^{2018} como combinación lineal de $\{A^2, A, I_3\}$.

21. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ se define la matriz cuadrada de orden $n \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

a) Prueba que $\lambda_1 = a - b$ y $\lambda_2 = a + (n-1)b$ son valores propios de A. (Ayuda: Para λ_1 comprueba que $\det(A - \lambda_1 I_n) = 0$ y para λ_2 comprueba que $(1, 1, \dots, 1)$ es un vector propio asociado a λ_2).

b) Se definen los vectores $v_1 = (1, -1, 0, \dots, 0)$, $v_2 = (1, 1, -2, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $v_{n-1} = (1, 1, 1, \dots, 1, -(n-1))$, $v_n = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)$. Prueba que

i) $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ son vectores propios asociados a λ_1 y que v_n es un vector propio asociado a λ_2.

ii) $v_i \cdot v_j = 0$ para $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

iii) La matriz que tiene por columnas los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ tiene determinante $n!$. (Ayuda: utiliza inducción sobre n).

iv) Como consecuencia de i) y iii) se tiene que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A, A es diagonalizable, los únicos valores propios de A son λ_1 con multiplicidad $n-1$ y λ_2 con multiplicidad 1, el polinomio característico de A es $p_A(t) = (a-b-t)^{n-1} \cdot (a + (n-1)b - t)$, el subespacio propio asociado a λ_1 es $L(\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\})$ y el subespacio propio asociado a λ_2 es $L(\{v_n\})$.

c) Se definen los vectores $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \dots, 0)$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}}(1, 1, -2, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $w_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(n-1) \cdot n}}(1, 1, 1, \dots, 1, -(n-1))$, $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, 1, \dots, 1, 1)$. Prueba que la matriz P que tiene por columnas los vectores $w_1, w_2, \dots, w_n$ verifica:

i) $P^t \cdot P = P \cdot P^t = I_n$. (Ayuda: utiliza el apartado 2.ii)).

ii)

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+(n-1)b \end{pmatrix}.$$

21. Discute de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Si $f : V \to V$ es un endomorfismo diagonalizable, entonces el endomorfismo traspuesto $f^t : V^* \to V^*$ también es diagonalizable.

    b) La suma de dos valores propios de un endomorfismo es siempre un valor propio del mismo endomorfismo.

    c) Si A es diagonalizable, entonces A^n también lo es para cada $n \in \mathbb{N}$.

    d) Si una matriz de orden dos es singular, entonces es diagonalizable.

    e) Si el polinomio característico de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es $(1-\lambda)(1+\lambda^2)$ entonces f no es diagonalizable.

    f) Si dos endomorfismos son diagonalizables y tienen los mismos valores propios, entonces son iguales.

    g) Toda matriz cuadrada regular es diagonalizable.

    h) Si un endomorfismo f de un espacio vectorial V cumple $f \circ f = f$, y 0 no es un valor propio de f, entonces $f = I_V$.

    i) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y+2z = 0\}$, y tal que $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 13$ son valores propios de f. Entonces, f es diagonalizable.

    j) Si dos matrices tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico, entonces son semejantes.

    k) Un endomorfismo diagonalizable puede ser diagonalizado en varias bases diferentes.

    l) Si A y C son matrices cuadradas diagonalizables entonces $A+C$ y $A \cdot C$ son diagonalizables.

    m) Existe un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que verifica:

        1) 2 y 5 son los únicos valores propios de f.
        2) Las multiplicidades algebraicas y geométricas de dichos valores coinciden.
        3) f no es diagonalizable.

    n) Si λ es un valor propio de una matriz regular $M \in M_n(\mathbb{K})$, entonces $\lambda \neq 0$ y $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de M^{-1}.

    ñ) Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces A es diagonalizable si y sólo si $A + aI_n$ es diagonalizable $\forall a \in \mathbb{K}$.

    o) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ que verifica $A(A - I_n) = 0_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden n y 0_n la matriz nula de orden $n \times n$. Si λ es un valor propio de A entonces $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$ y A es diagonalizable.

21/02/20

Determinante matriz por bloques:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & D \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} A\in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}) \\ C \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K}) \\ D \in \mathcal{M}_{(n-k)}(\mathbb{K}) \\ O \in \mathcal{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{K}) \end{array}$$

$$= \det(A)\cdot\det(D)$$

Inducción sobre k

• Si $k=1$ $\det\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & c_1 \cdots c_{n-k} \\ \hline 0 & \\ \vdots & D \\ 0 & \end{array}\right) = a_{11}\cdot\det(D) = \det(A)\cdot\det(D)$ (desarrollamos por a).

• Supongamos que es cierto para $k-1$. Veamos que es cierto para k.

$$\det\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1n-k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & c_{21} & \cdots & c_{2n-k} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kn-k} \\ \hline & O & & & D & \end{array}\right) = a_{11}\det\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{22} & \cdots & a_{2k} & c_{21} & \cdots & c_{2n-k} \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kn-k} \\ \hline & O & & & D & \end{array}\right) - a_{21}\det\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{12} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1n-k} \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kn-k} \\ \hline & O & & & D & \end{array}\right) +$$

$$+ \cdots + (-1)^{k+1} a_{k+1}\det\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{k2} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1n-k} \\ a_{k-12} & \cdots & a_{k-1k} & c_{k+1} & \cdots & c_{k+1\,n-k} \\ \hline & O & & & D & \end{array}\right) = a_{11}\cdot A_{11}\cdot\det(D) - a_{21}\cdot A_{21}\cdot\det D + \cdots +$$

¡det de cada cofactor A.

$$+ (-1)^{k+1} a_{k+1}\cdot A_{k+1\,1}\cdot\det(D) =$$

$$(a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + \cdots + (-1)^{k+1} a_{k} A_{k1})\det(D)$$

$$\det(A)\cdot\det(D)$$

Donde ponga a_{k+1} es a_k

1. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tal que $f \circ f = -I_V$. Demuestra que f no tiene valores propios y, por tanto, no es diagonalizable. ¿Se puede llegar a la misma conclusión si V es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$? Concluye que el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $f(x,y) = (y,-x)$ no es diagonalizable.

$f \in End(V)$ $\quad f \circ f = -I_V$

Suponemos $\exists v \neq 0$ vector propio asociado al valor propio λ.

$f(v) = \lambda \cdot v$

$(f \circ f)(v) = \lambda \cdot f(v)$

$-v = \lambda f(v) = \lambda^2 v$

$(\lambda^2+1)v = 0$ $\quad \lambda^2 = -1$, no tiene solución en $\mathbb{R}$. En $\mathbb{C}$ sí tendría valores propios.

$(f \circ f)(x,y) = (-x,-y) = -Id_V \Rightarrow$ no es diagonalizable.

Si consideramos $\mathbb{C}$ en vez de $\mathbb{R}$, la ecuación tendría las soluciones $\lambda_1 = i$ $\lambda_2 = -i$, y el endomorfismo sería diagonalizable.

$f(x,y) = (y,-x)$

$f(x,y) = (y,-x)$

$f(y,-x) = (-x,-y)$

$f \circ f = -Id_V \Rightarrow f$ no diagonalizable en $\mathbb{R}$.

2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $f \circ f = rI_V$. Demuestra que los únicos valores propios posibles de f son $\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$.

Supongamos $\exists v$ $v \neq 0$ eigenvector asociado a λ eigenvalue

$f(v) = \lambda v$

Si aplico f

$f \circ f(v) = \lambda f(v)$

$rv = \lambda^2 v$ $\quad v \neq 0$ $\qquad v(r - \lambda^2) = 0$

$r = \lambda^2$ $\qquad r - \lambda^2 = 0$

$\lambda = \pm \sqrt{r}$ $\qquad \lambda = \pm \sqrt{r}$

3. Prueba que toda matriz cuadrada de orden 2 con coeficientes reales simétrica o con determinante negativo es diagonalizable. ¿Es cierto que todos los automorfismos de $\mathbb{R}^2$ son diagonalizables?

Probar que $\forall M_2(\mathbb{R})$ simétrica es diagonalizable.

Pongamos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Estudiamos su polinomio característico

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}^2 =$$

$$= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

Solo nos fijamos en el discriminante

- $\Delta = b^2 - 4ac = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0$

$$= a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 =$$

$$= (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$$

Si fuera igual a 0

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$$ que ya es diagonal

Si fuera mayor que 0 $\exists \lambda_1, \lambda_2$ distintos luego

Toda matriz simétrica es diagonalizable

Para la segunda parte del ejercicio:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= ((a-\lambda)(d-\lambda) - cb)) =$$

$$= ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - cb =$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - cb)$$

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-cb)}}{2}$$

Existirán 2 valores propios si

$$(a+d)^2 - 4(ad-cb) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$cb > ad \Rightarrow \det(A) < 0$$

Contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_\lambda(A) = (1-\lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$\lambda = 1 \quad a_{\lambda_1} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} x - y = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$$

$$= -y = 0$$

$$g_{\lambda_1} = 1$$

$$a_{\lambda_1} \neq g_{\lambda_1}$$

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ un endomorfismo de V tal que $\mathrm{nul}(f) \geq n-1$ y se cumple $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Demuestra que f es diagonalizable.

Si $\mathrm{nul}(f) = n-1 \Rightarrow \dim(V) = 1$

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$

$n-1 \quad + \quad 1 \quad = n$

Como $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = V \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall v \in V$ se puede expresar como combinación de un vector del núcleo y de la imagen.

$\forall v \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(v) = 0 + 0 \cdot f(v)$ siendo 0 valor propio $\forall v \in \mathrm{Ker}(f)$
$\forall v \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow f(v) = 0 + \lambda f(v)$ siendo λ valor propio $\forall v \in \mathrm{Im}(f)$

Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) > n-1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n \Rightarrow f(v) = 0_V$, por lo que cualquier vector de f es propio.

Forma análoga para $n-1$

$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}(\{f(v_1)\})$ $v_1 \in V$, se ampliamos la base con vectores del núcleo,

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ $v_2, v_3 \in \mathrm{Ker}(f)$

$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonal.

5. En el espacio $\mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{R}$ se define el endomorfismo $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ como $f(p(x)) = xp'(x)$, donde $p'(x)$ representa la derivada de $p(x)$ con respecto a x. Calcula los valores propios y los subespacios propios de f. Encuentra, si es posible, una base de $\mathbb{R}_n[x]$ formada por vectores propios de f.

$f(p(x)) = 0 \iff xp'(x) = 0 \iff p'(x) = 0 \Rightarrow$

$p(x) = k \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{nul}(f) = 1$

$\text{Ker}(f) = \mathcal{L}(\{1\}) \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = n+1-1 = n$

$\text{Im}(f) = \mathcal{L}(\{x, x^2, x^3, \dots, x^n\})$

Ya sabemos que $\lambda = 0$ es valor propio

$f(k) = \lambda \cdot k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Ahora sea $p(x) \in \mathbb{R}^n(x)$

$f(p(x)) = \lambda p(x) \Rightarrow f(p(x)) = xp'(x) =$

$= \lambda p(x) \Rightarrow \lambda = \dfrac{xp'(x)}{p(x)}$

Si $p(x) = x^p$ $\quad p'(x) = px^{p-1} \Rightarrow xp'(x) =$

$= px^p \Rightarrow \lambda = \dfrac{p\cancel{x^p}}{\cancel{x^p}} = p$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Los subespacios propios serán, por tanto

$\{1\}, \{x\}, \{x^2\}, \ldots, \{x^n\}.$

6. Estudia si las siguientes matrices con coeficientes reales son diagonalizables:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -8 \\ -2 & -3 & 7 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analiza también si cualesquiera dos matrices de las de arriba son semejantes.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Primero obtenemos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -(1-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & -(1-\lambda) \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -(1-\lambda) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\left((-1-\lambda)^2 - 1\right) - (-1-\lambda-1) + (1+1+\lambda) =$$

$$= (-1-\lambda)^3 + 1 + \lambda + 2 + \lambda + 2 + \lambda = (-1-\lambda)^3 + 3\lambda + 5 =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - \cancel{3\lambda} - 1 + \cancel{3\lambda} + 5 =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

	1	3	0	-4
1		1	4	4
	1	4	4	0

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+4) = (\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

Tenemos dos soluciones:

$\lambda_1 = 1 \quad a_{\lambda_1} = 1$

$\lambda_2 = -2 \quad a_{\lambda_2} = 2$

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{matrix}\right\}$$

$g_{\lambda_1} = 1 = a_{\lambda_1} = 1$

$$V_{\lambda_2} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{ x + y + z = 0 \right\}$$

$g_{\lambda_2} = 2 = a_{\lambda_2} = 2$ Es diagonalizable

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -8 \\ -2 & -3 & 7 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & -8 \\ -2 & -3-\lambda & 7 \\ 2 & 9 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 7 \\ 9 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} -2 & -3-\lambda \\ 2 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)(3+3\lambda+\lambda+\lambda^2-63) - 8(-18+6+2\lambda) =$$

$$= (-6-6\lambda-2\lambda-2\lambda^2+126-3\lambda-3\lambda^2-\lambda^2-\lambda^3+63\lambda+144-48-16\lambda =$$

$$= -x^3-6x^2+36x+216$$

$\lambda_1 = 6 \quad a_{\lambda_1} = 2$

$\lambda_2 = -6 \quad a_{\lambda_2} = 1$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ -2 & -9 & 7 \\ \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{-7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -x \quad -z = 0 \\ -2x - 9y + 7z = 0 \end{array} \right\}$$

$g_{\lambda_1} = 1 \neq a_{\lambda_1} = 2$, el endomorfismo no es diagonalizable

Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, así que ninguna de las matrices es semejante.

7. Estudia si las siguientes matrices con coeficientes complejos son diagonalizables:

$$A=\begin{pmatrix} -3+i & -3 & -3-2i \\ i & 3i & 3+i \\ -i & 3 & 2i \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -1-i & -3 & -1-4i \\ -1+2i & 3i & 2+2i \\ 1-2i & 3 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Analiza también si cualesquiera dos matrices de las de arriba son semejantes.

$$C=\begin{pmatrix} -1-i & -3 & -1-4i \\ -1+2i & 3i & 2+2i \\ 1-2i & 3 & 1+i \end{pmatrix}$$

$$\det(C-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -1-i-\lambda & -3 & -1-4i \\ -1+2i & 3i-\lambda & 2+2i \\ 1-2i & 3 & 1+i-\lambda \end{vmatrix}$$

Si hacemos ambos determinantes llegamos a que son ambas diagonalizables pero no con los mismos valores propios, así que no son semejantes ni a la misma matriz diagonal ni entre ellas.

8. Consideremos el endomorfismo $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b+c \\ 2a-2c & 4d \end{pmatrix}.$$

¿Es f diagonalizable? En caso de serlo, proporciona una base de vectores propios.

Sea $B_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M(f, B_u) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^4 - 3\lambda^2 + 2$$

$\lambda^4 - 3\lambda^2 + 2 = 0$

	1	0	-3	0	2
-1		-1	1	2	-2
	1	-1	-2	2	0
1		1	0	-2	
	1	0	-2	0	

$\lambda^2 - 2 = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{2}$

Tenemos cuatro soluciones:

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = \sqrt{2} \quad \lambda_4 = -\sqrt{2} \quad a_{\lambda_i} = 1$

$$V_{\lambda_4} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2 : \begin{pmatrix} \cancel{1\sqrt{2}} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (1+\sqrt{2})y + z = 0 \\ 2x \quad (-2+\sqrt{2})z = 0 \\ (1+\sqrt{2})t = 0 \end{array} \right\} = L(\{($$

9. Estudia si la siguiente matriz con coeficientes reales es semejante a una matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es decir $D = P^{-1} A \cdot P$, es decir, hay que ver si nuestra matriz es diagonalizable.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1-\lambda \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda)(-3+\lambda-3\lambda+\lambda^2+4) - 3(-3+\lambda+2) + (-4+2+2\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) - 3(\lambda-1) + 2(\lambda-1) =$$

$$= (3-\lambda-3\lambda+\lambda^2)(\lambda^2-2\lambda+1) - 3\lambda - 3 + 2\lambda - 2 =$$

$$= 3\lambda^2 - 6\lambda + 3 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 3\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda + \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$$

$$= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$(x-1)^2(x-2)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad a_{\lambda_1} = a_{\lambda_2} = 2$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad g_{\lambda_1} = 2$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-3} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$g_{\lambda_2} = 1 \neq a_{\lambda}\ 2$

No es diagonalizable

10. En el espacio vectorial real $S_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales consideramos la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

y el endomorfismo $f : S_2(\mathbb{R}) \to S_2(\mathbb{R})$ tal que

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores propios de f. Discute si existe una base de $S_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de f. Calcula los subespacios propios de f y encuentra una base de cada uno.

$$\det(M(f,B) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 5 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2+6) + 2(2+\lambda-5) + (6-5+5\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$$

	-1	1	5	3
-1		1	-2	-3
	-1	2	3	0
3		-3	-3	
	-1	-1	0	

$\lambda_1 = -1 \quad a_{\lambda_1} = 2$

$\lambda_2 = 3 \quad a_{\lambda_2} = 1$

$-x - 1 = 0$

$x = -1$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ \cancel{5} & \cancel{-6} & \cancel{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ \hline 2x \quad = -2 \end{array} \right\} =$$

$g_{\lambda_1} = 1$, no es diagonalizable $= L(\{(-1,-1,1)\})$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{1} \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -x - 2y + z = 0 \\ 5x - 6y - 5z = 0 \end{array} \right\} = L(\{(1,0,1)\})$$

$$\begin{array}{l} -2y + z = 1 \\ -6y - 5z = -5 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} -10y + 5z = 5 \\ -6y - 5z = -5 \\ \hline -16y \quad 0 = 0 \\ \qquad y = 0 \end{array} \right.$$

$$g_{\lambda_2} = 1 = a_{\lambda_2}$$

No podemos encontrar una base de $S_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de f puesto que el endomorfismo no es diagonalizable.

11. Estudia para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la matriz de coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -a & a \\ a+2 & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Para dichos valores, encuentra P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a+1-\lambda & -a & a \\ a+2 & -a-\lambda & a-1 \\ 2 & -1 & \cancel{0}\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -a & a \\ -a-\lambda & a-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+1-\lambda & a \\ a+2 & a-1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} a+1-\lambda & -a \\ a+2 & -a-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-a^2 + a + a^2 + a\lambda) + (a^2 - a + a - 1 - a\lambda + \lambda - a^2 - 2a) - \lambda(-a^2 - a\lambda - a - \lambda + a\lambda + \lambda^2 + a^2 + 2a) =$$

$$= \cancel{2a} + \cancel{2a\lambda} + \cancel{a^2} - 1 - \cancel{a\lambda} + \lambda \cancel{- a^2 - 2a} + \cancel{a^2\lambda} + \cancel{a\lambda^2} + \cancel{a\lambda} + \lambda^2 - \cancel{a\lambda^2} - \lambda^3 - \cancel{a^2\lambda} - \cancel{2a\lambda} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad a_{\lambda_1} = 2 \qquad \lambda_2 = -1 \quad a_{\lambda_2} = 1$

Para $\lambda=1$, si la matriz tiene $rg=1$, el endomorfismo es diagonalizable

$$\begin{pmatrix} a & -a & a \\ \cancel{a+2} & \cancel{-a-1} & \cancel{a-1} \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & -a \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -a+2a = 0 \Rightarrow a=0$$

$$\begin{vmatrix} a & a \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -a+2a = 0 \Rightarrow a=0$$

$$\begin{vmatrix} -a & a \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = a+a = 0 \Rightarrow a=0$$

Para $a=0$ el endomorfismo es diagonalizable

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ 2x-y-z=0 \}$$

$$= L(\{(1,2,0),(1,0,2)\})$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2x=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array} \right\}$$

$$L(\{(0,1,1)\}) \qquad \underset{M(B,B_u)}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Dada la matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide lo siguiente:

a) Estudia si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

a) Hallemos los eigenvalues de A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2+1) + \underbrace{\cancel{(2-\lambda-1) - (1-\lambda)}}_{0} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

$\lambda_1 = 2 \quad a_{\lambda_1} = 1$

$\lambda_2 = 1 \quad a_{\lambda_2} = 2$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ x - y - z = 0 \} = L(\{(1,1,0),(1,0,1)\})$$

$g_{\lambda_2} = 2 = a_{\lambda_2}$

$\Downarrow$

El endomorfismo es diagonalizable

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \mathcal{L}(\{(-1,-1,1)\})$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿Existe una matriz cuadrada C con coeficientes reales tal que $C^4 = A$?

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\sqrt[4]{A} = P \cdot \sqrt[4]{D} \cdot P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^{1/4} = \begin{pmatrix} 2^{1/4} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1/4} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$P \cdot D^{1/4} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -2^{1/4} & 1 & 1 \\ -2^{1/4} & 1 & 0 \\ 2^{1/4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2a+4 & 1-a & -2a-a^2\\ 0 & 4-a & 0\\ 0 & 0 & 4-a^2\end{pmatrix}.$$

Se pide lo siguiente:

a) ¿Para qué valores de a hay un valor propio de f con multiplicidad algebraica 3?

b) Estudia para qué valores de a el endomorfismo f es diagonalizable.

c) Para $a=1$ y $a=2$ encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2a+4-\lambda & 1-a & -2a-a^2\\ 0 & 4-a-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 4-a^2-\lambda\end{vmatrix}=(2a+4-\lambda)(4-a-\lambda)(4-a^2-\lambda)$$

a) Para que haya un valor propio con $a_\lambda=3 \Rightarrow$

Para $a=0$, nos queda $(4-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda)=(4-\lambda)^3$,

Tenemos $\lambda=-4$ con $a_\lambda=3$.

b) • Si $2a\neq a\neq a^2$, es decir, hay n autovalores, el endomorfismo es diagonalizable, siempre que $a\neq 0$.

• Si $a=0 \Rightarrow (4-\lambda)^3=0$ $\lambda=4$ $a_\lambda=3 \Rightarrow$ no es diagonalizable

pq $\dim(V_\lambda)=g_\lambda=2$.

c) $a=2$

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -8\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & -8\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(6-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)$$

$\lambda_1=6$ Obviamos el cálculo de multiplicidades porque al haber n autovalores distintos nuestro endomorfismo es diagonalizable.

$\lambda_2=2$

$\lambda_3=0$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-8} \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -4y = 0 \\ -6z = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\{(1,0,0)\}\right)$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 4x - y + 8z = 0 \\ -2z = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\{(1,4,0)\}\right)$$

$$V_{\lambda_3} = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 6x - y + 8z = 0 \\ 2y = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\{(1,0,3/4)\}\right)$$

$$B_\lambda = \{(1,0,0),(1,4,0),(1,0,3/4)\}$$

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide lo siguiente:

a) Calcula a para que 2 sea un valor propio de f.

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, determina si f es diagonalizable. Si f es diagonalizable calcula una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice el endomorfismo.

c) Estudia si la matriz

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. ¿Puede ser $\widetilde{A}$ la matriz del endomorfismo f respecto de alguna base?

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & 4-\lambda & a \\ 1 & -a & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 4-\lambda \\ 1 & -a \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2+a^2) + 2(\lambda-a) - 2(a-4+\lambda)$$

$$\cancel{2\lambda} - 2a - 2a + 8 \cancel{-2\lambda}$$

$$8-4a = 0$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+a^2) \quad a=2$$

$$(\lambda-2)^2$$

Si $a=2$

$\lambda_1 = 3 \quad a_{\lambda_1} = 1$

$\lambda_2 = 2 \quad a_{\lambda_2} = 2$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ x - 2y - 2z = 0 \right\} = L(\{(4,1,1),(2,0,1)\})$$

$$g_{\lambda_2} = 2 = a_{\lambda_2}$$

Tenemos que nuestro endomorfismo es diagonalizable.

Nos faltaría ver el otro subespacio propio para conseguir una base que nos diagonalice.

c) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Sea $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = M(f, B_D)$ $\quad B_D = \{(4,1,1),(2,0,1), e_3\}$

Si hacemos $e_3 - (2,0,1) = e_3'$

$$(0,0,3)_{B_D} = (0,1,3)_{B'}$$

$$\tilde{A} = M(f, B') \qquad B' = \{(4,1,1),(2,0,1),(0,1,3)\}$$

15. Se considera la siguiente matriz cuadrada con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix},$$

donde a y b son números reales con $a \geq b$. Se pide lo siguiente:

a) Calcula el polinomio característico y los valores propios de A.

b) Calcula las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de A. Estudia cuando A es diagonalizable.

a) Primero calculamos el pol. característico:

$$\begin{vmatrix} 2a-b-\lambda & 0 & 2a-2b \\ 1 & a-\lambda & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a-\lambda)[\lambda^2-(a+b)\lambda+ab]$$

$$\lambda^2-(a+b)\lambda+ab=0$$

$$\lambda = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2-4ab}}{2}$$

$$\lambda = \frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2}}{2}$$

$$\lambda = \frac{a+b \pm (a-b)}{2}$$

$$\lambda = \frac{2a}{2} = a \qquad \text{Como } a > b$$

$$\lambda = \frac{2b}{2} = b \qquad \lambda_1 = a \quad a_{\lambda_1} = 2$$

$$\lambda_2 = b \quad a_{\lambda_2} = 1$$

Si $a = b$ $\lambda_1 = a$ $a_{\lambda_1} = 3$

e)

• $a > b$

$\lambda_1 = a \quad a_{\lambda_1} = 2$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \cancel{a-b} & \cancel{0} & \cancel{2a-2b} \\ 1 & 0 & 2 \\ \cancel{-a+b} & \cancel{0} & \cancel{-2a+2b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ x + 2z = 0 \} = \mathcal{L}(\{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\})$$

$g_{\lambda_1} = 2 = a_{\lambda_1}$ ✓

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \cancel{2a-2b} & \cancel{0} & \cancel{2a-2b} \\ 1 & a-b & 2 \\ -a+b & 0 & -a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x + (a-b)y + 2z = 0 \\ (-a+b)x + (-a+b)z = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}(\{(a-b, 1, b-a)\})$$

$g_{\lambda_2} = 1 = a_{\lambda_1}$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

• $a = b$

$\lambda_1 = a \quad a_{\lambda_1} = 3 \quad g_{\lambda_1} = 2 < 3$

f no es diagonalizable

16. Sea V un espacio vectorial real tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f : V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

    a) $f(u) = u$, con $u = 6v_1 + 2v_2 + 5v_3$.

    b) $U = \{v \in V \,/\, x + 6y - 3z = 0\}$ es un subespacio propio de f. Aquí x, y, z representan las coordenadas de v con respecto a B.

    c) La traza de f es 5.

    Calcula los valores propios de f y la matriz $M(f, B)$.

a) $f(u) = u \;,\; u = 6v_1 + 2v_2 + 5v_3$

Esta primera condición implica que uno de los valores propios de nuestro endomorfismo es $\lambda_1 = 1 \quad a_{\lambda_1} = 1$

b) $U = \{v \in V \,/\, x + 6y - 3z = 0\} = \quad g_{\lambda_U} = 2$

$= \mathcal{L}(\{(-3, 1, 1), (-6, 1, 0)\})$

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$M(f, B)$ es semejante a $M(f, B_D) \Rightarrow$

$Tr(M(f, B)) = Tr(M(f, B_D))$

$\overset{1}{\lambda_1} + 2\lambda_2 = 5$

$2\lambda_2 = 4$

$\lambda_2 = 2$

$A = P D P^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ -2/3 & -2 & 2 \\ -5/3 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

$D = P^{-1} A P$

$$P(B_D, B) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}(B, B_D) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -1 \\ -\frac{5}{3} & -10 & 6 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

17. Sea V un espacio vectorial real tridimensional y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Supongamos que $f : V \to V$ es un endomorfismo del que sabemos lo siguiente:

a) $f(v_1) = 3v_1 + 2v_2 + 2v_3$.

b) $f(v_2) = 2v_1 + 2v_2$.

c) El vector $v = 2v_1 - 2v_2 - v_3$ está en el núcleo de f.

Calcula $M(f,B)$ y estudia si f es diagonalizable. En caso afirmativo, da una base B' de V tal que $M(f,B')$ sea diagonal.

$$f(v_1) = 3v_1 + 2v_2 + 2v_3$$

$$f(v_2) = 2v_1 + 2v_2$$

$$v = 2v_1 - 2v_2 - v_3 \in \operatorname{Ker}(f)$$

$$f(2v_1 - 2v_2 - v_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(v_1) - 2f(v_2) - f(v_3) = 0$$

$$2(3v_1 + 2v_2 + 2v_3) - 2(2v_1 + 2v_2) - f(v_3) = 0$$

$$f(v_3) = 6v_1 + \cancel{4v_2} + 4v_3 - 4v_1 - \cancel{4v_2} =$$

$$= 2v_1 + 4v_3$$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2(-4+2\lambda) + (4-\lambda)(6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4)$$

$$= -8 + 4\lambda + (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) =$$

$= -8 + 4\lambda + (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) = -8 + 4\lambda + 4\lambda^2 - 20\lambda + 8 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda$

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda$

$\lambda_1 = 0$

$-\lambda^2 + 9\lambda - 18 = 0$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = 6$

$a_{\lambda_1} = g_{\lambda_1} = 1 = a_{\lambda_2} = a_{\lambda_3} = g_{\lambda_2} = g_{\lambda_3}$

El endomorfismo es diagonalizable

El cálculo de B' se haría con los subespacios propios

e) $V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \cancel{3\ 2\ 2} \\ 2\ 2\ 0 \\ 2\ 0\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$= \left\{ \begin{matrix} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{matrix} \right\} = L\left(\left\{ \left(1, -1, -\frac{1}{2}\right) \right\}\right)$ -> esto lo tenemos cuando me hallan del núcleo

$V_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 2y + 2z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{matrix} \right\}$

$= L\left(\left\{ \left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right) \right\}\right)$

$V_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} \cancel{-3\ \ 2\ \ 2} \\ 2\ \ -4\ \ 0 \\ 2\ \ 0\ \ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2x - 4y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{matrix} \right\}$

$L\left\{ \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \right\}$ $\quad B' = \left\{ v_1 - \frac{1}{2}v_1 - v_2 + v_3,\ v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_3 \right\}$

18. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in M_2(\mathbb{K})$. Definimos $F_A : M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$ como $F_A(X) = AX$.

a) Prueba que F_A es un endomorfismo de $M_2(\mathbb{K})$. Calcula la matriz que representa a F_A en la base usual de $M_2(\mathbb{K})$.

b) Demuestra que el polinomio característico de F_A coincide con $p_A(\lambda)^2$.

c) Prueba que si A es diagonalizable, entonces F_A también lo es.

a) Para probar que $F_A \in End_K(M_2(K))$, veamos que si $F_A(X) = AX \Rightarrow AX \in M_2(K)$

Sea $B_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$F_A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$F_A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$M(F_A, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

e)

$$M(F_A, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Primero calculamos $P_{F_A}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & b & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 & b \\ c & 0 & d-\lambda & 0 \\ 0 & c & 0 & d-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= (a-\lambda) \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & b \\ 0 & d-\lambda & 0 \\ c & 0 & d-\lambda \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ a-\lambda & 0 & b \\ c & 0 & d-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a-\lambda)\left((a-\lambda)\begin{vmatrix} d-\lambda & 0 \\ 0 & d-\lambda \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & d-\lambda \\ c & 0 \end{vmatrix}\right) + c\left(-b\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & a-\lambda \end{vmatrix}\right)$$

$$= (a-\lambda)\left((a-\lambda)(d-\lambda)^2 + b(+c\lambda - cd)\right) - cb\left((a-\lambda)^2 - cb\right) =$$

$$= (a-\lambda)^2(d-\lambda)^2 + (ba - b\lambda)(c\lambda - cd) - cb(a-\lambda)^2 + c^2b^2 =$$

$$= (a^2 - 2a\lambda + \lambda^2)(d^2 - 2d\lambda + \lambda^2) + (acb\lambda - abcd - bc\lambda^2 + bcd\lambda)$$

$$- cb(a^2 - 2\lambda + \lambda^2) + c^2b^2 =$$

$$= a^2d^2$$

c) Probar que si A es diagonalizable, entonces F_A también lo es.

19. Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifica:

$$f(0,1,1) = (-4,-3,-3) \quad , \quad f(0,1,0) = (-3,-2,-3) \quad , \quad f(1,-1,0) = (7,5,6) \,.$$

a) Calcula la matriz de f respecto a la base canÛnica.

b) Calcula los valores propios de f y una base de cada uno de los subespacios propios asociados.

c) ¿Es f un monomorfismo?

d) Determina si f es diagonalizable. En caso afirmativo, calcula una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice el endomorfismo.

e) Calcula $f^{50}(0,0,\pi)$.

a) $B_u = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$f(1,0,0) = f(1,-1,0) + f(0,1,0) = (4,3,3)$

$f(0,1,0) = (-3,-2,-3)$

$f(0,0,1) = f(0,1,1) - f(0,1,0) = (-1,-1,0)$

$$M(f,B_u) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Para el cálculo de valores propios

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 3 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(+2\lambda+\lambda^2-3) + 3(-3\lambda+3) - (-9+6+3\lambda)$$

$$= 8\lambda + 4\lambda^2 - 12 - 2\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 9\lambda + 9 + 9 - 6 - 3\lambda -$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$$

$$-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=0$$

$$\lambda_1=0 \quad a_{\lambda_1}=1$$

$$-\lambda^2+2\lambda-1=0$$

$$\lambda_2=1 \quad a_{\lambda_2}=2$$

$$V_{\lambda_1}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}\cancel{4}&\cancel{-3}&\cancel{-1}\\3&-2&-1\\3&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}3x-2y-z=0\\3x-3y=0\end{array}\right\}=L(\{(1,1,1)\})$$

$$\begin{array}{r}\cancel{3x}-2y=1\\-\cancel{3x}+3y=0\\\hline y=1\end{array}$$

$$V_{\lambda_2}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}3&-3&-1\\3&-3&-1\\3&-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right.$$

$$=\left\{3x-3y-z=0\right\}=L(\{(1,0,3),(1,1,0)\})$$

c) f será monomorfismo si $Ker(f)=\{0\}$

$$Ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}4&-3&-1\\3&-2&-1\\3&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=V_{\lambda_1}\Rightarrow Ker(f)=L(\{(1,1,1)\})$$

d) Como $g_{\lambda_1}=1$ $g_{\lambda_2}=2$ y $g_{\lambda_1}+g_{\lambda_2}=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo es diagonalizable.

$B_D=\{(1,0,3),(1,1,0),(1,1,1)\}$

e) Calcula $f^{50}(0,0,\pi)$

Sabemos que $M(f,B_D)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, por lo que podemos asegurar que se trata de una proyección $\Rightarrow f\circ f=f$

$f^{50}(0,0,\pi)=f(0,0,\pi)$

$$\begin{pmatrix}4&-3&-1\\3&-2&-1\\3&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\pi\\-\pi\\0\end{pmatrix}$$

20. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

Demuestra que A no es diagonalizable. ¿Es diagonalizable si se considera con entradas en $\mathbb{C}$? Utiliza el Teorema de Cayley-Hamilton para poner A^{2018} como combinación lineal de $\{A^2, A, I_3\}$.

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -4 \\ 8 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -2(6-8+8\lambda) + 4(6+3\lambda-8) - \lambda(\cancel{-2}+2\lambda-\lambda+\lambda^2\cancel{+2})$$

$$= -12+16-16\lambda+24+12\lambda-32-\lambda^2-\lambda^3 =$$

$$= -\lambda^3-\lambda^2-4\lambda-4$$

$$-\lambda^3-\lambda^2-4\lambda-4 = 0$$

$\lambda_1 = -1 \quad a_{\lambda_1} = 1$

$\lambda_2 = 2i \quad a_{\lambda_2} = 1$

$\lambda_3 = -2i \quad a_{\lambda_3} = 1$

Si consideramos $\mathbb{R}$, la matriz no es diagonalizable pq solo hay un valor propio.
Si consideramos $\mathbb{C}$ tenemos $n = \dim(\mathbb{R}^3)$ valores propios distintos $\Rightarrow$ A sería diagonalizable

Teorema de Cayley-Hamilton

$\Downarrow$

Toda matriz es raíz de su $p(\lambda)$

dividimos

$$\lambda^{2018} = p_A(\lambda)\cdot q(\lambda) + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Dividendo Divisor Cociente Resto

0 por Cayley-Hamilton

$$A^{2018} = \cancel{p_A(A)}\cdot q(A) + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

$$A^{2018} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$ → lo que nos pide el ej.

$\lambda = -1$ $\quad 1 = \alpha - \beta + \gamma$

$\lambda = 2i$ $\quad -2^{2018} = -4\alpha + 2i\beta + \gamma$

$\lambda = -2i$ $\quad -2^{2018} = -4\alpha - 2i\beta + \gamma$

restamos

$$0 = 4i\beta \qquad \beta = 0$$

$$\gamma = 1 - \alpha$$

$$-2^{2018} = -4\alpha + 1 - \alpha$$

$$-2^{2018} = -5\alpha + 1$$

$$\alpha = \frac{2^{2018}+1}{5}$$

$$\gamma = 1 - \frac{2^{2018}+1}{5}$$

21. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ se define la matriz cuadrada de orden $n \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

a) Prueba que $\lambda_1 = a - b$ y $\lambda_2 = a + (n-1)b$ son valores propios de A. (Ayuda: Para λ_1 comprueba que $\det(A - \lambda_1 I_n) = 0$ y para λ_2 comprueba que $(1, 1, \dots, 1)$ es un vector propio asociado a λ_2).

b) Se definen los vectores $v_1 = (1, -1, 0, \dots, 0)$, $v_2 = (1, 1, -2, 0, \dots, 0)$, ..., $v_{n-1} = (1, 1, 1, \dots, 1, -(n-1))$, $v_n = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)$. Prueba que

i) $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ son vectores propios asociados a λ_1 y que v_n es un vector propio asociado a λ_2.

ii) $v_i \cdot v_j = 0$ para $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$.

iii) La matriz que tiene por columnas los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ tiene determinante $n!$. (Ayuda: utiliza inducción sobre n).

iv) Como consecuencia de i) y iii) se tiene que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A, A es diagonalizable, los únicos valores propios de A son λ_1 con multiplicidad $n-1$ y λ_2 con multiplicidad 1, el polinomio característico de A es $p_A(t) = (a - b - t)^{n-1} \cdot (a + (n-1)b - t)$, el subespacio propio asociado a λ_1 es $L(\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\})$ y el subespacio propio asociado a λ_2 es $L(\{v_n\})$.

c) Se definen los vectores $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \dots, 0)$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}}(1, 1, -2, 0, \dots, 0)$, ..., $w_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(n-1) \cdot n}}(1, 1, 1, \dots, 1, -(n-1))$, $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, 1, \dots, 1, 1)$. Prueba que la matriz P que tiene por columnas los vectores $w_1, w_2, \dots, w_n$ verifica:

i) $P^t \cdot P = P \cdot P^t = I_n$. (Ayuda: utiliza el apartado 2.ii)).

ii)

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+(n-1)b \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \qquad b \neq 0 \quad n \geq 2$$

a) $\lambda_1 = a - b$, $\lambda_2 = a + (n-1)b$ son valores propios de A

$\det(A - \lambda_1 I_n) = 0$?

$\det(B) = 0$ → Todos son b

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+(n-1)b \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = a+(n-1)b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ya está comprobado

b) $v_1 = (1, -1, 0, \dots, 0)$ $\qquad v_i = (1, \dots, 1, \underset{i\text{-ésimo}}{-i}, 0 \dots 0)$

$v_2 = (1, 1, -2, 0 \dots 0)$ $\qquad i = 1, \dots, n-1$

$\vdots$

$v_{n-1} = (1, \dots, 1, -(n-1))$

$v_n = (1, \dots, 1)$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con los demás pasa lo mismo

ii) $r_i \cdot v_n = \overbrace{1 + \cdots + 1}^{i \text{ veces}} - i = 0$ ← si vacamos esto

$i \neq j$

$r_i \cdot v_j = (1, \dots, 1, i, 0, \dots, 0)$
$i \neq j \quad 1 \leq i < j \leq n-1$
$(1, \dots + \dots, 1, 1, 0, \dots, 0) = 1 + \overbrace{\cdots}^{i \text{ veces}} + 1 - i = 0$

más a la derecha $j > i$

iii) $\det \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & -2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & & -(n+1) & 1 \end{pmatrix}}^{M} = n!$

Inducción sobre n.

$n = 2 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 = 2!$

Supongamos que se verifica para n-1 y veamos que se verifica para n.

→ Desarrollamos por la últ fila

$\det(M_n) = -(-1)^{2n-1}(n-1) \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ -1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & & -(n-2) & 1 \end{pmatrix}}_{M_{n-1}} + (-1)^{2n} \det(M_{n-1}) = (n - \cancel{1} + \cancel{1}) \det M_{n-1}$

$= n \cdot (n-1)! = n!$

iv) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de vectores propios

$\lambda_1 = a - b \quad a_{\lambda_1} = g_{\lambda_1} = n-1$

$\lambda_2 = a + (n-1)b \quad a_{\lambda_2} = g_{\lambda_2} = 1$

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1$

divido por su módulo

$w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} v_2$

$w_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} v_{n-1}$

$w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, \dots, 1)$

$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

$$P = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$$

Su inversa es su Traspuesta

$$P^T \cdot P = P \cdot P^T = I_n$$

$$\begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1^T \cdot w_1 = w_1 \cdot w_1 = \|w_1\|^2 = 1$$

$$w_i \cdot w_j = k_i \, v_i \cdot v_j = 0$$

$i \neq j$

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide lo siguiente:

a) Calcula a para que 2 sea un valor propio de f.

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, determina si f es diagonalizable. Si f es diagonalizable calcula una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice el endomorfismo.

c) Estudia si la matriz

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. ¿Puede ser $\widetilde{A}$ la matriz del endomorfismo f respecto de alguna base?

$$A = M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

a) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 + (-12 - a^2)\lambda + 3a^2 - 4a + 8$

$0 = p_A(2) = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{}} \iff a = 2$

b) $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$
$= -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$

	-1	7	-16	12
2		-2	10	-12
	-1	5	-6	0

$\lambda_1 = 2 \quad a_{\lambda_1} = 2 \quad g_{\lambda_1}$??

$\lambda_2 = 3 \quad a_{\lambda_2} = 1 \Rightarrow g_{\lambda_2} = 1$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 2z = 0 \} = \mathcal{L}(\{(-2,1,0),(-2,0,1)\})$$

$$g_{\lambda_1} = 2 = a_{\lambda_1}$$

$a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} = 3 \Rightarrow f$ es diagonalizable

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{matrix} \right\} = \mathcal{L}(\{(-1,1,-1)\})$$

$$\mathcal{B} = \{(-2,1,0),(-2,0,1),(-1,1,-1)\}$$

c) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$p_{\tilde{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{-(\lambda-2)^2(\lambda-3)}_{\text{Igual que antes}}$$

$\lambda_1 = 2 \quad a_{\lambda_1} = 2 = g_{\lambda_2} = 2$

$\lambda_2 = 3 \quad a_{\lambda_2} = \underbrace{1}_{\text{Inmediato si es 1}} = g_{\lambda_2}$

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\tilde{A}$ es diagonalizable y como tiene los mismos valores propios que A, A y $\tilde{A}$ son semejantes

Existe P regular $P^{-1} \cdot \tilde{A} \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$

$$\tilde{A} = \underbrace{PQ^{-1}}_{} \cdot A \cdot \underbrace{QP^{-1}}_{}$$

Inversa de

$$M(f,\tilde{\mathcal{B}}) = M(\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}u)^{-1} M(f,\mathcal{B}u)\, M(\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}u)$$

21. Discute de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $f : V \to V$ es un endomorfismo diagonalizable, entonces el endomorfismo traspuesto $f^t : V^* \to V^*$ también es diagonalizable.

b) La suma de dos valores propios de un endomorfismo es siempre un valor propio del mismo endomorfismo.

c) Si A es diagonalizable, entonces A^n también lo es para cada $n \in \mathbb{N}$.

d) Si una matriz de orden dos es singular, entonces es diagonalizable.

e) Si el polinomio característico de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es $(1-\lambda)(1+\lambda^2)$ entonces f no es diagonalizable.

f) Si dos endomorfismos son diagonalizables y tienen los mismos valores propios, entonces son iguales.

a) Sea $M(f, B) \Rightarrow (M(f,B))^T = M(f^T, B^*)$.

Estas matrices se relacionan por trasposición

f diagonalizable $\Rightarrow f^T$ también

$P^{-1} \cdot A \cdot P = P^T \cdot A^T \cdot (P^{-1})^T \Rightarrow D = D^T \Rightarrow A^T$ diagonalizable, son semejantes a la misma matriz diagonal. Verdadero.

e) Sea $Id(v) = v \quad \forall v \in V$, como vemos, el único valor propio de este endomorfismo es $\lambda = 1$ Falso

c) A diagonalizable $\Rightarrow D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow$

$\Rightarrow P \cdot D \cdot P^{-1} = A \Rightarrow (P \cdot D \cdot P^{-1})^n = A^n \Rightarrow P \cdot D^n \cdot P^{-1} = A^n$, es decir, siempre es semejante a una matriz diagonal. Verdadero.

d) Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Sabemos por hipótesis

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = ad - \lambda a - \lambda d + \lambda^2 - cb =$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - cb)$$

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-cb)}}{2}$$

$$(a+d)^2 - 4(\cancel{ad - cb}) \geq 0$$

Si $a = d = 0 \Rightarrow \exists! \lambda \Rightarrow$ endomorfismo no diagonalizable

Falso

e) $p_f(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda^2)$

$\lambda = 1$

$\lambda = +i$

$\lambda = -i$

Sólo tiene 1 valor propio en $\mathbb{R}$. Luego no es diagonalizable. Verdadero.

f) Puede ocurrir que dos endomorfismos tengan los mismos valores propios pero que los subespacios propios tengan diferente dimensión.

Falso.

g) Toda matriz cuadrada regular es diagonalizable.

h) Si un endomorfismo f de un espacio vectorial V cumple $f \circ f = f$, y 0 no es un valor propio de f, entonces $f = I_V$.

i) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + 2z = 0\}$, y tal que $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 13$ son valores propios de f. Entonces, f es diagonalizable.

j) Si dos matrices tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico, entonces son semejantes.

k) Un endomorfismo diagonalizable puede ser diagonalizado en varias bases diferentes.

l) Si A y C son matrices cuadradas diagonalizables entonces $A + C$ y $A \cdot C$ son diagonalizables.

g) Falso. Contraejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = (2-\lambda)(2-\lambda)$

$\lambda = 2 \quad a_\lambda = 2 \quad g_\lambda = 1 < a_\lambda = 2$, no es diagonalizable.

$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

h) $f(f(v)) = f(v) \Rightarrow f(v) = v \quad \forall v \in V \Rightarrow$

$\nexists$ valor propio de $f \Rightarrow f = I_V$

$f \circ f(v) = f(v)$

$f(\underbrace{f(v) - v}_{\text{Vector del núcleo}}) = 0$ Tiene que ser 0.

$f(v) = v \quad \forall v \in V$

Verdadero

i) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1 \Rightarrow$

0 valor propio de f. Tenemos tres valores propios $\Rightarrow f$ diagonalizable. Verdadero

j) Traza, det, vol car. iguales

Son semejantes ⇒ diagonalizables.

Sean $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Tr = 0$ en ambos casos

$\det = 0$ en ambos casos.

$p(\lambda) = \lambda^2$ en ambos casos

No son diagonalizables ⇒ falso

k)

l)

m) Existe un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que verifica:

1) 2 y 5 son los únicos valores propios de f.
2) Las multiplicidades algebraicas y geométricas de dichos valores coinciden.
3) f no es diagonalizable.

n) Si λ es un valor propio de una matriz regular $M \in M_n(\mathbb{K})$, entonces $\lambda \neq 0$ y $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de M^{-1}.

ñ) Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces A es diagonalizable si y sólo si $A + aI_n$ es diagonalizable $\forall a \in \mathbb{K}$.

o) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ que verifica $A(A - I_n) = 0_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden n y 0_n la matriz nula de orden $n \times n$. Si λ es un valor propio de A entonces $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$ y A es diagonalizable.

o) $A(A - I_n) = 0_n$

Si λ es un valor propio, entonces $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$

A es diagonalizable

$A^2 - A = 0_n$ $\quad A^2 = A$ $\quad f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$M(f_A, B_u) = A$

f_A es una proyección, los únicos valores propios son 0 y 1 y es diagonalizable

Verdadero

m) $\lambda_1 = 2$ $\quad \lambda_2 = 5$

Si $a_{\lambda_1} = 2$ $\quad a_{\lambda_2} = 2$ $\quad g_{\lambda_1} = g_{\lambda_2} = 2$

$2 + 2 = 4$ $\Rightarrow$ f diagonalizable

Sea pues $a_{\lambda_1} = a_{\lambda_2} = g_{\lambda_1} = g_{\lambda_2} = 1$, f no sería diagonalizable, es decir, tiene dos valores propios en $\mathbb{C}$.

Verdadero

n) Si 0 fuera valor propio, M no sería regular.

Sea $\lambda \neq 0$ valor propio $\Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow$

$A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x \Rightarrow x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda} \cdot x$, siendo $\frac{1}{\lambda}$ valor propio de A^{-1}.

Verdadera

ñ) Veamos ambas implicaciones

$\Rightarrow$) A diagonalizable $\Rightarrow \exists P$ regular /

$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \Rightarrow P^{-1}(A + aI_n)P =$

$= P^{-1} \cdot A \cdot P + P^{-1} a I_n P = D + aI_n$ diagonal

$\Leftarrow$) $A + aI_n$ diagonal $\forall a \in K$

$P^{-1}(A + aI_n)P = P^{-1}AP + P^{-1}aI_nP = D \Rightarrow$

$\Rightarrow P^{-1}AP = D - aI_n$ diagonal

Verdadero.

h) $f \in End(V)$ $\quad f \circ f = f \quad$ 0 no es un valor propio entonces $f = Id_V$

f es una proyección $\quad V = \underbrace{U}_{Ker(f - Id_V)} \oplus \underbrace{\cancel{W}}_{Ker(f)}$

f es la identidad

Otra forma

$$f \circ f(v) = f(v)$$

$$f(\underbrace{f(v) - v}_{\text{Vector del núcleo}}) = 0 \quad \text{tiene que ser } 0.$$

$$f(v) = v \quad \forall v \in V$$