TEMA 3:

TEMA 3: ESPACIOS CONEXOS Y COMPACTOS

ESPACIOS CONEXOS

26 NOV 2021

DEFINICIÓN 1: Sea (X,T) un espacio topológico. Diremos que es CONEXO si no existen $A,B \in T$ tales que:

1. $A,B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = X$
3. $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo 1: $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, (T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ no es conexo

$\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
$(-\infty,0), (0,+\infty) \in T_u \Rightarrow \in (T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$
$(-\infty,0), (0,+\infty) \neq \emptyset$
$(-\infty,0) \cap (0,+\infty) = \emptyset$

Intuitivamente, un e.top. conexo no se puede partir en trozos abiertos

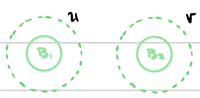
NOTA: Si existen $A,B \subset X \mid A \cup B = X,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow B = X\setminus A,\ A = X\setminus B$.
Si $A,B \in T$ tales que $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, entonces $A,B \in C_T$.
En la definición de conjuntos conexos podemos cambiar abierto por cerrado:

(X,T) es conexo si $\nexists F,G \in C_T$ tales que:
1. $F,G \neq \emptyset$
2. $F \cup G = X$
3. $F \cap G = \emptyset$.

DEFINICIÓN 2: un SUBCONJUNTO $C \subset (X,T)$ es CONEXO si (C,T_C) es conexo.

Si (C,T_C) es conexo, $\nexists A,B \in T_C$ tales que
1. $A,B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = C$
3. $A \cap B = \emptyset$

Si $A \in T_C \Rightarrow \exists U \in T \mid A = U \cap C$
Si $B \in T_C \Rightarrow \exists V \in T \mid B = V \cap C$
Si (C,T_C) es conexo, no existen $U,V \in T$ tales que
1. $U\cap C,\ V \cap C \neq \emptyset$
2. $(U \cap C) \cup (V \cap C) = C \Leftrightarrow C \subset U \cup V$ *
3. $(U\cap C) \cap (V \cap C) = \emptyset \Leftrightarrow U \cap V \cap C = \emptyset$



$C = B_1 \cup B_2$ no es un espacio conexo de $(\mathbb{R}^2, T_u)$

Ejemplo 1: un intervalo es un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ verificando: si $x,y \in I$, entonces $[x,y] = \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\} \subset I$

Si $J \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, entonces J no es conexo.
$\exists x,y \in J$, $x<y$ tales que existe $x<z<y$, $z \notin J$ (J no intervalo)

- $\left.\begin{array}{l} U = (-\infty,z) \\ V = (z,+\infty) \end{array}\right\} \in T_u$ $\quad x \in U \cap J \Rightarrow U \cap J \neq \emptyset$; $\quad y \in V \cap J \Rightarrow V \cap J \neq \emptyset$
- $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap V \cap J = \emptyset$
- $J \subset \mathbb{R}\setminus\{z\} = (-\infty,z) \cup (z,+\infty) = U \cup V$ *

Esto es equivalente a: si $J \subset \mathbb{R}$ es conexo $\Rightarrow$ es intervalo

Ejemplo 2: Sea (X,T) un e.top. verificando: si $A,B \in T$, $A,B \neq \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Entonces (X,T) es conexo.

1) (X,T_t): el único abierto no vacío es X
2) (X,T_{CF}): X infinito. $A = X \setminus F_1$, $B = X \setminus F_2 \Rightarrow A \cap B = \underbrace{X}_{\text{inf}} \setminus \underbrace{(F_1 \cup F_2)}_{\text{finito}} = (F_1 \cup F_2)^c \neq \emptyset$
3) (X,T_{CN}): X no numerable. $A = X \setminus N_1$, $B = X \setminus N_2 \Rightarrow A \cap B = \underbrace{X}_{\text{no num}} \setminus \underbrace{(N_1 \cup N_2)}_{\text{num}} \neq \emptyset$

Ejemplo 2: (X,T_D), T_D = top. discreta.

- Si $\# X = 1$ $(X = \{p\})$ $\Rightarrow T_D = T_t \Rightarrow (X,T_D)$ conexo
- Si $\# X \geq 2$ Sean $x,y \in X$, $x \neq y$. $A = \{x\} \in T_D$, $y \in B = X \setminus \{x\} \in T_D \rightarrow$
  $\Rightarrow (X,T_D)$ no es conexo.

1. $A,B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = X$
3. $A \cap B = \emptyset$

(X,T_D) es conexo $\Leftrightarrow$ X sólo tiene un punto.

TEOREMA 1: En $(\mathbb{R},T_u)$, un subconjunto es conexo si, y sólo si, es un intervalo.

Demostración:

$\Rightarrow)$ Ya probado

$\Leftarrow)$ Sea $I \subset \mathbb{R}$. Supongamos que I es un intervalo y que no es conexo, y busquemos la reducción al absurdo. Existen $A,B \in T_I = (T_u)_I$ tales que $A,B \neq \emptyset$, $A \cup B = I$, $A \cap B = \emptyset$. Sean $a \in A$, $b \in B$. Como $a \neq b$ porque $A \cap B = \emptyset$, supongamos $a < b$ (no resta generalidad). Sea $z = \sup \{A \cap [a,b]\}$. Entonces, existe una sucesión $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A \cap [a,b]$ que converge a z en $(\mathbb{R},T_u)$. Entonces, $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ y $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset [a,b] \subset I$ (por ser $a \in A \subset I$, $b \in B \subset I$, I intervalo).

Como $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to z$ en $(\mathbb{R},T_u)$ y $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset I$, entonces $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to z$ en $(I,T_I) \Rightarrow$ $\Rightarrow z \in \bar{A}$ ($\bar{A}$ en (I,T_I)). $\bar{A} = A$ en (I,T_I) porque $I \setminus A = B \in T_I \Rightarrow z \in \bar{A} = A \Rightarrow z \in A$.

Como $z \in A \in T_I$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(z-\varepsilon, z+\varepsilon) \cap I \subset A$ $^{*\text{fpt}}$. Como $a<b$, tomamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $z + \varepsilon < b$. $[z, z+\varepsilon) \subset A \cap [a,b] \Rightarrow$ $\Rightarrow z \neq \sup \{A \cap [a,b]\}$!!!

La contradicción proviene de suponer I un intervalo no conexo, luego si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces es conexo.

COROLARIO 1: $(\mathbb{R},T_u)$ es conexo

Demostración: $\mathbb{R}$ es un intervalo.

1 Dic 2021

Ejemplo 1: $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ conexo, $\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}$. Entonces, $(\mathbb{X},\mathcal{T}')$ es conexo.

Demostración: Si $(\mathbb{X},\mathcal{T}')$ no es conexo, $\exists A,B\in\mathcal{T}'$ tales que: ${}^{1}A,B\neq\emptyset$, ${}^{2}A\cup B=\mathbb{X}$, ${}^{3}A\cap B=\emptyset$

Como $\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}$, entonces $A,B\in\mathcal{T}$, que verifican 1,2,3 $\Rightarrow$ $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ no es conexo

Ejemplo 2: $(\mathbb{R},\mathcal{T}_S)$ $\mathcal{B}_S=\{[a,b)\,/\,a<b\}$ no es conexo

$A=(-\infty,0)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,0)\in\mathcal{T}_S$ $\qquad$ $B=[0,+\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,n)\in\mathcal{T}_S$

luego $A,B\in\mathcal{T}_S$, $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B=\mathbb{R}$ y $A,B\neq\emptyset$ $\Rightarrow$ $(\mathbb{R},\mathcal{T}_S)$ no conexo

$\mathcal{T}_u\subset\mathcal{T}_S$, $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ conexo, pero $(\mathbb{R},\mathcal{T}_S)$ no conexo

LEMA 1: Sea $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ ET. Son equivalentes:

1. $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ es conexo
2. Cualquier aplicación continua de $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ en un ET discreto es constante
3. Cualquier aplicación continua de $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ en $(\{0,1\},\mathcal{T}_D)$ es constante

Demostración:

1⇒2) Sea $(Y,\mathcal{T}_D)$ ET discreto, y sea $f:(\mathbb{X},\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}_D)$ continua. Supongamos que f no es constante. Sean $y_0,y_1\in \operatorname{Im}(f)$, $y_0\neq y_1$. $\mathcal{U}=\{y_0\}\in\mathcal{T}_D$, $\mathcal{V}=Y\setminus\{y_0\}\in\mathcal{T}_D$. Se tiene $\mathcal{U},\mathcal{V}\neq\emptyset$, $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}=Y$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$. Si definimos $A=f^{-1}(\mathcal{U})$, $B=f^{-1}(\mathcal{V})$, entonces:

$A,B\in\mathcal{T}$ porque f es continua

$A,B\neq\emptyset$

$A\cup B=f^{-1}(\mathcal{U}\cup\mathcal{V})=f^{-1}(Y)=\mathbb{X}$

$A\cap B=f^{-1}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ $\qquad\Rightarrow$ $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ no es conexo

2⇒3) $(\{0,1\},\mathcal{T}_D)$ es un caso particular de 2.

3⇒1) Supongamos que $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ no es conexo. $\exists A,B\in\mathcal{T}$ tales que $A,B\neq\emptyset$, $A\cup B=\mathbb{X}$, $A\cap B=\emptyset$. Definimos $f:\mathbb{X}\to\{0,1\}$ como $f(x)=1$, $x\in A$; $f(x)=0$, $x\in\mathbb{X}\setminus A=B$.
$f:(\mathbb{X},\mathcal{T})\to(\{0,1\},\mathcal{T}_D)$ es continua: $\mathcal{T}_D=\{\emptyset,\{0,1\},\{0\},\{1\}\}$. $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $f^{-1}(\{0,1\})=\mathbb{X}$, $f^{-1}(\{1\})=A$, $f^{-1}(\{0\})=B$. $\emptyset,\mathbb{X},A,B\in\mathcal{T}$. Por tanto, $f:(\mathbb{X},\mathcal{T})\to(\{0,1\},\mathcal{T}_D)$ es continua y no constante.

■

COROLARIO 2: Sea $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un ET, $A\subset\mathbb{X}$ subconjunto conexo. Sea $B\subset\mathbb{X}$ tal que $A\subset B\subset\bar{A}$. Entonces B es un subconjunto conexo. En particular, si A es conexo, $\bar{A}$ es conexo

Demostración: Sea $f:(B,\mathcal{T}_B)\to(\{0,1\},\mathcal{T}_D)$ continua. Queremos ver que f es cte.
$f|_A=f\circ i_A$ $(i_A:(A,\mathcal{T}_A)\to(B,\mathcal{T}_B))$. Como $f|_A:(A,\mathcal{T}_A)\to(\{0,1\},\mathcal{T}_D)$ es continua y A es conexo, entonces $f|_A$ es constante. Es decir, $f(A)$ es un punto de $\{0,1\}$. Como f es continua, se tiene que $f(\bar{A}^B)\subset\overline{f(A)}=f(A)=\{\text{un punto}\}$. $\bar{A}^B=\bar{A}\cap B=B\Rightarrow f(B)=f(\bar{A}^B)\subset\{p\}\Rightarrow$
$\Rightarrow f(B)$ es un punto $\Rightarrow f$ es cte. Entonces $(B,\mathcal{T}_B)$ es conexo

$f(\bar{A}\cap B)\subset f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$

$\mathcal{T}_D\Rightarrow$ todos cerrados

$B\subset\bar{A}$

■

TEOREMA 2: Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es una aplicación continua entre dos ET y (X,T) es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de (Y,T')

Demostración: Sea $g:(f(X),T'_{f(X)})\to(\{0,1\},T_D)$ continua   fijarse en g!!

$$\begin{tikzcd}
(X,T) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & (Y,T') \\
(f(X),T'_{f(X)}) \arrow[ur, "i_{f(X)}"'] &
\end{tikzcd}$$

top inducida para $i_{f(X)}$

f cont $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ cont.

$$(X,T)\xrightarrow{\tilde{f}}(f(X),T'_{f(X)})\xrightarrow{g}(\{0,1\},T_D)$$

$g\circ\tilde{f}:(X,T)\to(\{0,1\},T_D)$ cont. Como (X,T) es conexo, $g\circ\tilde{f}$ es cte $\Rightarrow g(\tilde{f}(x))=z\in\{0,1\}$ $\forall x\in X\Rightarrow g(y)=z$ $\forall y\in f(X)$. Por tanto, g es cte. Entonces, $f(X)$ es un subconjunto conexo de (Y,T') ∎

COROLARIO 3: Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es un homeomorfismo, y (X,T) es conexo, entonces (Y,T') es conexo.

Demostración: Como f es continua y sobreyectiva y (X,T) es conexo, entonces $f(X)=Y$ es un subconjunto conexo de (Y,T'). Es decir, (Y,T') es conexo ∎

NOTA: La conexión es un invariante topológico

TEOREMA 3 (BOLZANO O TVM): Sea $f:(X,T)\to(\mathbb{R},T_u)$ una función continua. Supongamos (X,T) conexo. Si $x,y\in X$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ verifica $f(x)\le\alpha\le f(y)$, entonces $\exists z\in X$ tal que $f(z)=\alpha$

Demostración: Como f es continua y (X,T) es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R},T_u)$. Entonces $f(X)$ es un intervalo. $f(x),f(y)\in f(X)$. Si $f(x)\le\alpha\le f(y)$, entonces $\alpha\in f(X)\Rightarrow\exists z\in X: f(z)=\alpha$ ∎

Observación: Ni la unión ni la intersección de conjuntos conexos son necesariamente conjuntos conexos.

Dem: $A=[0,1]$ $B=[2,3]$ son conexos en $(\mathbb{R},T_u)$ por ser intervalos

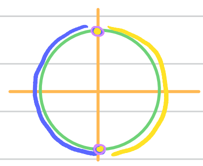
$A\cup B=[0,1]\cup[2,3]$ no es conexo al no ser un intervalo

ojo: En $(\mathbb{R},T_u)$, la intersección de dos intervalos es $\emptyset$ u otro intervalo.

Buscamos el contraejemplo en $(\mathbb{R}^2,T_u^2)$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1,\ x\le 0\}$

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1,\ x\ge 0\}$



$A\cap B=\{(0,1),(0,-1)\}$

$(T_u^2)_{A\cap B}=T_D\Rightarrow A\cap B$ no es conexo al ser un e. discreto con más de un punto.

Veamos ahora A,B conexos. Sea $f:\mathbb{R}\to S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$, $f(x)=(\cos x,\sin x)$.

Sabemos que f es continua de $(\mathbb{R},T_u)$ en (S^1,T_u^2)

$A=f([\pi/2,3\pi/2])$ y $B=f([-\pi/2,\pi/2])\Rightarrow$ son conexos por ser im de intervalos (conexo) por una app continua (preserva conexión)

LEMA 2: Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos conexos de un ET (X,T).

1. Si existe $i_0\in I$ tal que $C_{i_0}\cap C_i\neq\emptyset$ $\forall i\in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.
2. Si $I=\mathbb{N}$ y $C_i\cap C_{i+1}\neq\emptyset$ $\forall i\in\mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ es conexo

NOTA: En particular, si A,B son subconjuntos conexos y $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow A\cup B$ conexo

Demostración:

1) Sea $C=\bigcup_{i\in I} C_i$ y sea $f:(C,T_C)\to(\{0,1\},T_D)$ continua. $f|_{C_i}$ es cte $\forall i\in I$.

si es 1, es igual → En particular, $f|_{C_{i_0}}$ es cte e igual a 0 ($f(x)=0$ $\forall x\in C_{i_0}$). Sea ahora $z\in C=\bigcup_{i\in I} C_i \Rightarrow \exists i'\in I \,/\, z\in C_{i'}$. Por hipótesis, $\exists z_0\in C_{i'}\cap C_{i_0}$. Entonces $f(z_0)=0$.
Como $f|_{C_i}$ es cte y $z,z_0\in C_i \Rightarrow f(z)=f(z_0)=0$. Por tanto, f es constante.

2) Se obtiene de 1. $E_1=C_1$, $E_{n+1}=E_n\cup C_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. $C=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$.
Cada E_i es conexo: $E_1=C_1$ es conexo, $E_2=C_1\cup C_2$ es conexo por 1 ya que C_1 es conexo y C_2 corta a C_1. $E_3=(C_1\cup C_2)\cup C_3$ es conexo por $C_1\cup C_2$ conexo y C_3 cortar a C_2, luego a $C_1\cup C_2$. Además, $E_1\cap E_i=E_1\neq\emptyset$. Aplicando 1, tenemos:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \text{ es conexo} \quad \blacksquare$$

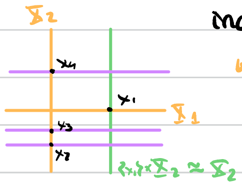
9 Dic 2021

TEOREMA 4: Sean (X_i,T_i), $i\in\Delta_k$ ET. Entonces, $(X_1\times\cdots\times X_k, T_1\times\cdots\times T_k)$ es conexo si, y sólo si, (X_i,T_i) es conexo $\forall i\in\Delta_k$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Si el producto es conexo, como $\pi_i:(X_1\times\cdots\times X_k, T_1\times\cdots\times T_k)\to(X_i,T_i)$ es continua y sobreyectiva, entonces (X_i,T_i) es conexo

$\Leftarrow$) Supongamos (X_i,T_i) conexo $\forall i\in\Delta_k$. Veamos que el producto es conexo por inducción sobre k.



$k=2$ Veamos que $(X_1\times X_2, T_1\times T_2)$ es conexo.

Sea $x_1\in X_1$ fijo. Sea $R(x_1)=\{x_1\}\times X_2$. Veamos que $(X_2,T_2)\approx(R(x_1),T_1\times T_2)$.

- Sea $f:X_2\to R(x_1)$ definida por $f(z)=(x_1,z)$ | $f\circ g=Id_{R(x_1)}$
- Sea $g:R(x_1)\to X_2$ definida por $g(x_1,z)=z$ | $g\circ f=Id_{X_2}$

f continua: tomo $i_{R(x_1)}:R(x_1)\to X_1\times X_2$ inclusión

f cont $\Leftrightarrow i_{R(x_1)}\circ f$ es continua $\Leftrightarrow$ $\pi_1\circ i_{R(x_1)}\circ f=$ apl. cte x_1 continua; $\pi_2\circ i_{R(x_1)}\circ f=Id_{X_2}$ continua

$g=\pi_2|_{R(x_1)}$ continua

Entonces, f es biyectiva, continua y $f^{-1}=g$ continua $\Rightarrow$ f homeomorfismo

Por tanto, $X_2\approx R(x_1)$ y, como X_2 es conexo p.h., $R(x_1)$ es subconj. conexo de $X_1\times X_2$

Razonando de forma similar, $\forall x_2\in X_2$, $X_1\approx L(x_2)=X_1\times\{x_2\}$

Entonces $\{L(x_2): x_2\in X_2\}\cup\{R(x_1)\}$ es una familia de conjuntos conexos de $X_1\times X_2$ y $L(x_2)\cap R(x_1)=\{(x_1,x_2)\}\neq\emptyset$.

Como $X_1\times X_2=\bigcup_{x_2\in X_2} L(x_2)=\left(\bigcup_{x_2\in X_2} L(x_2)\right)\cup R(x_1) \overset{\text{Lema 2}}{\Rightarrow} X_1\times X_2$ es conexo.

sup $k-1$, ¿k? Si $(X_1,T_1),\dots,(X_k,T_k)$ son ET conexos, entonces sabemos que:

$$\underset{\text{conexo por ser homeomorfo a un conexo.}}{(X_1\times\dots\times X_k,\ T_1\times\dots\times T_k)} \approx \underbrace{\big(\underbrace{(X_1\times\dots\times X_{k-1})}_{\text{conexo por hipótesis}}\times X_k\big),\ \big(\underbrace{(T_1\times\dots\times T_{k-1})}_{\text{conexo por hipótesis}}\times T_k\big)}_{\text{conexo (prod de 2 ET conexos)}}\big)$$

∎

COMPONENTES CONEXAS

DEFINICIÓN 3: Sea (X,T) un ET, y $x\in X$. La COMPONENTE CONEXA de (X,T) que contiene al punto x es el conjunto:

$$C_x = \bigcup\{A : A\subset X \text{ conexo}, x\in A\}$$

C_x es la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a x. Como mínimo, $C_x=\{x\}$, porque con la top. inducida, $T_{|\{x\}} = T_0 \Rightarrow \{x\}$ conexo.

PROPIEDADES 1:

1. C_x es conexo y $x\in C_x$
2. Si A es conexo y $x\in A$, $A\subset C_x$

3. $\overline{C_x}=C_x$
4. Si $C_x\cap C_y\neq\emptyset$, entonces $C_x=C_y$ (las componentes conexas forman una partición de X)
5. Si A es abierto y cerrado y $x\in A$, entonces $C_x\subset A$

Demostración:

1. C_x es unión de conjuntos que contienen a $x \Rightarrow x\in C_x$
   Como $\{x\}$ es conexo y $x\in\{x\}$, entonces $\{x\}\in \mathcal{A}(x)=\{A\subset X \text{ conexo} : x\in A\}$
   $(C_x=\bigcup_{A\in\mathcal{A}(x)} A) \Rightarrow C_x$ es la unión de los subs. de $\mathcal{A}(x)$, que cortan a $\{x\}\in\mathcal{A}(x) \overset{\text{Lema 2}}{\Rightarrow} C_x$ conexo
2. $A\subset X$ conexo y $x\in A \Rightarrow A\in\mathcal{A}(x) \Rightarrow A\subset \bigcup_{B\in\mathcal{A}(x)} B = C_x \Rightarrow A\subset C_x$.
3. $\overline{C_x}=C_x$ (siempre $C_x\subset\overline{C_x}$) $\overline{C_x}$ es conexo, $x\in C_x\subset\overline{C_x}\Rightarrow \overline{C_x}\in\mathcal{A}(x)\Rightarrow \overline{C_x}\subset\bigcup_{A\in\mathcal{A}(x)} A = C_x$
   Luego hay doble inclusión y $\overline{C_x}=C_x$.
4. Si $C_x\cap C_y\neq\emptyset \Rightarrow C_x=C_y$. Sea $z\in C_x\cap C_y \Rightarrow C_x\cup C_y$ conexo. Además, $x\in C_x\subset C_x\cup C_y$.
   Por 2, $C_x\cup C_y\subset C_x \Rightarrow C_y\subset C_x$. Análogamente, se prueba $C_y\subset C_x \Rightarrow C_x=C_y$
5. Si $C_x\not\subset A$, $\exists z\in C_x / z\notin A \Rightarrow C_x\cap A^c\neq\emptyset$.
   $C_x = C_x\cap X = C_x\cap(A\cup A^c) = \overset{x\in}{(C_x\cap A)}\cup\overset{z\in}{(C_x\cap A^c)}$.
   $C_x\cap A,\ C_x\cap A^c\neq\emptyset$. $A, A^c\in T \Rightarrow C_x\cap A,\ C_x\cap A^c\in T_{C_x}$
   $C_x=(C_x\cap A)\cup(C_x\cap A^c)$
   $\emptyset=(C_x\cap A)\cap(C_x\cap A^c)$
   } C_x no es conexo! $\Rightarrow \underline{C_x\subset A}$

∎

15 DIC 2021

Ejemplo 1: (X,T) conexo $\Rightarrow C_x = X\ \forall x\in X$

Ejemplo 2: Sea (X,T) un ET tal que los únicos conjuntos conexos son los puntos. Si $x\in X \Rightarrow C_x=\{x\}$

Cumplen la propiedad del ejemplo 2:

- $(\mathbb{R}, T_S)$ $x<y \Rightarrow \exists z \in (x,y) \Rightarrow (-\infty, z), [z, +\infty)$ tiene esta propiedad
  (ningún intervalo es conexo)
- (X, T_D) con 1 o más puntos
- $(\mathbb{Q}, (T_u)_{\mathbb{Q}})$ $q_1 < q_2$. Sea $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $q_1 < r < q_2 \Rightarrow \mathbb{R}\setminus\{r\} = (-\infty, r) \cup (r, +\infty)$
  Si $A \subset \mathbb{Q}$ y $q_1, q_2 \in A$, $q_1 \neq q_2 \Rightarrow A \subset (-\infty, r) \cup (r, +\infty) \Rightarrow A$ no conexo

Ejemplo 3: En $(\mathbb{R}, T_S)$, $C_x = \{x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, que no es abierto (las componentes conexas no son, en general, conjuntos abiertos)

Ejemplo 4: Si (X, T) tiene una cantidad finita de componentes conexas, entonces las comp. conexas son conjuntos abiertos.

$\{C_1, \ldots, C_k\}$ = com. conexas de X $\qquad C_i = X \setminus \big(\overbrace{\bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} C_j}^{\in C_T}\big) \in T$

TEOREMA 5: Sea $f: (X,T) \to (Y,T')$ un homeomorfismo, $x \in X$. Entonces $f(C_x) = C_{f(x)}$.

Demostración:

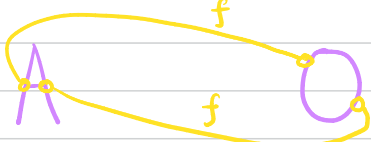
$\subset$) f cont, C_x conexo $\Rightarrow f(C_x)$ conexo. Además, $f(x) \in f(C_x) \Rightarrow f(C_x) \subset C_{f(x)}$

$\supset$) Como f^{-1} es homeomorfismo, análogamente tenemos $f^{-1}(C_{f(x)}) \subset C_x \Rightarrow$
$\Rightarrow C_{f(x)} \subset f(C_x)$ ∎

COROLARIO 4: El cardinal del conjunto de componentes conexas de un ET es un invariante topológico. Si $f: (X,T) \to (Y,T')$ es homeomorfismo, f induce una biyección entre los conjuntos de comp. conexas de X e Y.

EJERCICIO 1: Si $f: (X,T) \to (Y,T')$ es homeomorfismo y $A \subset X$, entonces $f|_A: (A, T_A) \to (f(A), T'_{f(A)})$ es homeomorfismo.
Hecho al final

¿Son homeomorfas las letras A y O? No

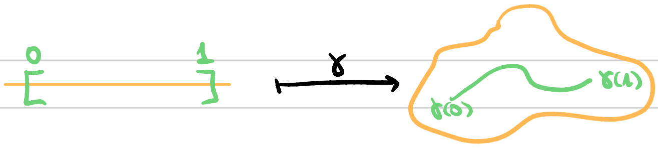
4 comp. c.  2 com. c.

$\Rightarrow$ Si quitamos dos puntos y sus imágenes, no son hom.
Entonces, con los puntos tpoco

\# Un segmento es conexo

CONEXIÓN POR ARCOS

DEFINICIÓN 4: Un ARCO en un ET (X,T) es una aplicación continua $\gamma: ([0,1], T_u|_{[0,1]}) \to (X,T)$. $\gamma(0)$ es el origen del arco y $\gamma(1)$ su extremo.
Si $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$, decimos que el arco γ conecta x e y.



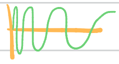
Sabemos que $[\gamma(0),\gamma(1)]$ es conexo.

DEFINICIÓN 5: Un ET (X,T) es CONEXO POR ARCOS si, $\forall x,y\in X$, existe un arco que conecta x e y

PROPOSICIÓN 1: Todo espacio conexo por arcos es conexo

Demostración: Fijamos $x_0\in X$ (arbitrario pero fijo). Sea $x\in X$ arbitrario. Sea $\gamma_x:[0,1]\to X$ un arco que conecta x_0 con x. Sea $A_x=\gamma_x([0,1])$. A_x es conexo (imagen por f. continua de un intervalo (conexo)) y contiene a x_0 y a x. Entonces, $X=(\bigcup_{x\in X}A_x)\cup\underbrace{\{x_0\}}_{\text{conexo}}\Rightarrow (X,T)$ conexo. (unión de conexos que cortan a otro con)

Ejemplo 1: Sea $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(1/x)$ continua



$\mathbb{R}^2\supset Gr(f)=\{(x,f(x)):x\in(0,1]\}\cong(0,1]$ es conexo por ser intervalo en $\mathbb{R}$

$$(0,0)\in\overline{Gr(f)}\ \overset{\text{dem}}{\rightsquigarrow}\ \overset{\in Gr(f)}{\left(\tfrac{1}{k\pi},0\right)}\xrightarrow{k\to\infty}(0,0)\ \rightsquigarrow\ \underbrace{Gr(f)}_{\text{conexo}}\Rightarrow\subset\underbrace{Gr(f)\cup\{(0,0)\}}_{\text{conexo}}\subset\Leftarrow\underbrace{\overline{Gr(f)}}_{\text{conexo}}$$

¡Pero! $Gr(f)\cup\{(0,0)\}$ no es conexo por arcos aunque $Gr(f)$ sí lo sea.

Trivialmente, si $A\subset B$ y B es conexo por arcos, A también lo es.

ESPACIOS COMPACTOS

DEFINICIÓN 6: Sea $A\subset X$ un conjunto. Una familia de conjuntos de X $\{U_i\}_{i\in I}$ es un RECUBRIMIENTO de A si $A\subset\bigcup_{i\in I}U_i$. Si $A=X\Rightarrow A=\bigcup_{i\in I}U_i$

DEFINICIÓN 7: Si (X,T) es un ET, $A\subset X$, diremos que un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de A es abierto si $U_i\in T$ $\forall i\in T$.

DEFINICIÓN 8: Dado un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de A, un SUBRECUBRIMIENTO es una subfamilia $\{U_j\}_{j\in J}$ con $J\subset I$ tal que $A\subset\bigcup_{j\in J}U_j$

DEFINICIÓN 9: Un ET (X,T) es COMPACTO si, de todo recubrimiento abierto del espacio, se puede extraer un subrecubrimiento finito (también será abierto)

Ejemplo 1: (X,T) ET y $\#T$ finito (hay una cantidad finita de abiertos). Entonces, (X,T) es compacto. $T=\{A_1,\dots,A_k\}$, $\{U_i\}_{i\in I}$ rec. abierto $\Rightarrow M=\{m\in\{1,\dots,k\}\ /\ \exists i\in I$ con $A_m=U_i\}$

$\bigcup_{i\in I}U_i=\underbrace{\bigcup_{m\in M}A_m}_{\text{subrecubrimiento finito.}}$

$\forall m\in M$, elijo $i(m)\in I$ tal que $A_m=U_{i(m)}$. $J=\{i(m)\ /\ m\in M\}$

Ejemplo 2: Si X es finito, (X,T) es compacto. $T\subset P(X)$, $\# P(X) = 2^{\# X}$

Ejemplo 3: (X, T_D) es compacto $\Leftrightarrow$ X es finito

$\Rightarrow$ | Sea $\{U_x\}_{x\in X}$ el rec. abierto tal que $U_x = \{x\}$ $\forall x \in X$.

Si (X,T) es compacto, existe $J = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X = I$ tal que

$$X = \bigcup_{x\in J} U_x = \bigcup_{x\in\{x_1,\dots,x_k\}} \{x\} = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_k\} = \{x_1, \dots, x_k\} = X \text{ finito}$$

$\Leftarrow$ | Ejemplo 2

Ejemplo 3: $(\mathbb{R}, T_u)$ no es compacto. $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n,n)$, $U_n = \{(-n,n) : n\in\mathbb{N}\}$

Si podemos extraer un subr. finito, entonces $\mathbb{R} \subset (-n_1,n_1) \cup \dots \cup (-n_k,n_k) =$
$= (-\max\{n_1,\dots,n_k\}, \max\{n_1,\dots,n_k\})$!!! Imposible por la prop. Arquimediana.

Ejemplo 4: un EM compacto es acotado $(:= X = B(x_0,r))$. Fijamos $x_0 \in X$.
La familia $\{B(x_0,r) : r>0\}$ es un rec. abierto de X. Si X es compacto, $\exists r_1, \dots, r_k$ tales que $X = B(x_0,r_1) \cup \dots \cup B(x_0,r_k) = B(x_0,r)$ con $r = \max\{r_1, \dots, r_k\}$

DEFINICIÓN 10: Sea (X,T) un ET. Diremos que $A\subset X$ es un SUBCONJUNTO COMPACTO si (A, T_A) es un ET compacto.

PROPIEDAD 2: Sea (X,T) un ET, $A\subset X$. Son equivalentes:

1. (A, T_A) es compacto.
2. De todo recubrimiento de A por abiertos de X se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Demostración:

$1\Rightarrow 2$ | Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un rec. de A por abiertos de X. Sea $V_i = \overset{\in T}{U_i} \cap A \in T_A$ $\forall i \in I$. Como $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Leftrightarrow A = (\bigcup_{i\in I} U_i)\cap A = \bigcup_{i\in I}(U_i\cap A) = \bigcup_{i\in I} V_i \in T_A$. Entonces, $\{V_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de A por abiertos de T_A. Ahora, como (A,T_A) es compacto, existe $J\subset I$ finito tal que $A = \bigcup_{j\in J} V_j \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.
Queda probado 2.

$2\Rightarrow 1$ | Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un rec. de A por abiertos de T_A. Por la definición de T_A, para cada $i\in I$, existe $U_i \in T$ verificando $V_i = U_i\cap A$.

$A = \bigcup_{i\in I} V_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \{U_i\}_{i\in I}$ es un rec. de A por abiertos de X.

Por 2, existe $J\subset I$ finito tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j \Rightarrow A = (\bigcup_{j\in J} U_j)\cap A =$
$= \bigcup_{j\in J}(U_j\cap A) = \bigcup_{j\in J} V_j \Rightarrow (A,T_A)$ compacto. ■

TEOREMA 6: Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$. Entonces $([a,b], (T_u)_{|[a,b]})$ es un ET compacto ($[a,b]$ es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, T_u)$).

Demostración: Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un rec. de $[a,b]$ por abiertos de $(\mathbb{R}, T_u)$. Sea $s = \sup \underbrace{\{r \in [a,b] : [a,r] \text{ se puede recubrir por una cantidad finita de conjuntos } U_i\}}_{\to A}$

Veamos que $s=b$ y que $s \in \{r\in[a,b] : \dots\} = A \Rightarrow s = \max A$

- **$s>a$** Si $a \in [a,b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ / $a \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in T_u$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U_{i_0}$. En particular, tomando $r \in \mathbb{R}$ tal que $a < r < a+\varepsilon$, entonces $[a,r] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Como $r \in A$ $\forall a<r<a+\varepsilon \Rightarrow (a, a+\varepsilon) \subset A \Rightarrow s = \sup A > a$

- **$s=b$** Supongamos que $s<b \Rightarrow s \in [a,b) \subset [a,b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I$ tal que $s \in U_{i_0}$ $\exists \varepsilon>0$ tal que $[s-\varepsilon, s+\varepsilon] \subset U_{i_0}$. Como $s-\varepsilon < s$, el conjunto $[a, s-\varepsilon]$ puede recubrirse por una cantidad finita de abiertos $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ del recubrimiento. (Hemos tomado $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño para que $s-\varepsilon > a$). Entonces:
$$[a,s] = [a, s-\varepsilon] \cup [s-\varepsilon, s] \subset (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}) \cup U_{i_0}.$$
Pero $[a, s+\varepsilon] = [a, s-\varepsilon] \cup [s-\varepsilon, s+\varepsilon] \subset (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}) \cup U_{i_0}$ (Podemos tomar $\varepsilon > 0$ suf. peq. para $s+\varepsilon<b$)
Pero entonces, $s+\varepsilon \in A$ y $s = \sup A$!!! $\Rightarrow s=b$

- **$b \in A$** Ya sabemos que $b = \sup A$. Elegimos $U_{i_0} \in \{U_i\}_{i\in I}$ tal que $b \in U_{i_0}$. $\exists \varepsilon > 0$: $[b-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset U_{i_0}$. Si $b \in A$ no hay nada que probar. Si $b \notin A$, como $b = \sup A$, podemos tomar ε para que $b-\varepsilon \in A$. Entonces, $[a,b] = [a, b-\varepsilon] \cup [b-\varepsilon, b]$.
$b-\varepsilon \in A \Rightarrow \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ / $[a, b-\varepsilon] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \Rightarrow [a,b] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup U_{i_0}$

NOTA: $(a,b) = \bigcup_{\substack{n \text{ suf grande} \\ (n > \frac{b-a}{2})}} (a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}) \Rightarrow (a,b)$ no compacto. (rec. infinito)

En otras palabras, un conjunto no cerrado en $(\mathbb{R}, T_u)$ no es compacto.

16 Dic 2021

DEFINICIÓN 11: Sea X un conjunto y $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la PROPIEDAD DE LA INTERSECCIÓN FINITA si se verifica $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ para todo $J \subset I$, J finito.

TEOREMA 8: Sea (X, T) un ET. Son equivalentes:

1. (X,T) es compacto
2. Toda familia de conjuntos cerrados con la prop de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración:

$1 \Rightarrow 2)$ Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados con la p.i.f. Supongamos por contradicción que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} F_i^c \Rightarrow \{F_i\}_{i\in I}$ es recubrimiento abierto de X. Como (X,T) es compacto, $\exists J\subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J} F_j^c \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{j\in J} F_j$!!! es un absurdo porque $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la pif. Por tanto, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

$2 \Rightarrow 1)$ Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un rec. abierto de (X,T). Queremos ver que $\exists J\subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J} U_j$. Supongamos que, $\forall J\subset I$ finito, $X \neq \bigcup_{j\in J} U_j \Rightarrow$
$\Rightarrow \emptyset \neq \bigcap_{j\in J} U_j^c$ $\forall J\subset I$ finito. La familia de cerrados $\{U_i^c\}_{i\in I}$ tiene la pif $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ aplicamos 2 y: $\bigcap_{i\in I} U_i^c \neq \emptyset \Rightarrow X \neq \bigcup_{i\in I} U_i$!!! Absurdo porque $\{U_i\}_{i\in I}$ es recubrimiento de X. Luego X es compacto.

Ejemplo 1: Sea $\{[a_i,b_i]\}_{i\in I}$ una familia de intervalos cerrados tales que $[a_i,b_i]\subset[a_{i-1},b_{i-1}]$ $\forall i\geq 2$ (es decreciente). Entonces, $\bigcap_{i\in \mathbb{N}} [a_i,b_i] \neq \emptyset$. $\{[a_i,b_i]\}_{i\in I}$ son cerrados en el espacio compacto $([a_1,b_1], T_{u|[a_1,b_1]})$. $\{[a_i,b_i]\}_{i\in I}$ tiene pif.

PROPOSICIÓN 2: Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación continua. Si (X,T) es compacto, entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de (Y,T'). En particular, si f es homeomorfismo y (X,T) es compacto, entonces (Y,T') es compacto.

Demostración: Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un rec. abto de $f(X)$ por abiertos de (Y,T').
$f(X) = \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow X \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\in T} \Rightarrow \{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es rec. abierto de X.
Como (X,T) es compacto, $\exists J\subset I$ tal que $X\subset \bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j) \Rightarrow f(X)\subset f(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)) \subset \bigcup_{j\in J} V_j$
La segunda afirmación se desprende fácilmente.

PROPOSICIÓN 3:

1. Si (X,T) es compacto, y $F\subset X$ es cerrado, entonces F es un subconjunto compacto de X.
2. Si (X,T) es Hausdorff y $K\subset X$ es un subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado
3. Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es continua, (X,T) compacto e (Y,T') Hausdorff, entonces f es una aplicación cerrada.

Demostración:

$1)$ Tomamos $\{U_i\}_{i\in I}$ rec. abto (por abtos de T) de F. Entonces $\{U_i\}_{i\in I}\cup\{X\setminus F\}$ es rec. abto de X. Como X es compacto, $\exists J\subset I$ finito tal que $X\subset (\bigcup_{j\in J} U_j)\cup\{X\setminus F\} \Rightarrow F\subset \bigcup_{j\in J} U_j \Rightarrow F$ compacto.

2) Supongamos (X,T) Hausdorff y $K \subset X$ compacto. Queremos ver K cerrado $\Leftrightarrow X \setminus K$ abierto. Veamos que $\forall x \in X \setminus K$ $(x \notin K)$ existe $U \in T$ tal que $x \in U$, $U \cap K = \emptyset \Rightarrow U \subset X \setminus K$. U es abierto $\Leftrightarrow$ U es entorno de todos sus puntos

Fijamos $x \in X \setminus K$. $\forall y \in K$ $(y \neq x)$, existen dos abiertos U_y, V_y tales que $y \in U_y$, $x \in V_y$, $U_y \cap V_y = \emptyset$. $\{U_y\}_{y \in K}$ es un rec. abierto de K. Como K es compacto, $\exists y_1, \dots, y_r \in K$ tales que $K \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_r} = U$.

Definimos $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_r} \in T$, $x \in V$. $K \cap V \subset U \cap V = (U_{y_1} \cap V) \cup \dots \cup (U_{y_r} \cap V) \subset$

$\subset (U_{y_1} \cap V_{y_1}) \cup \dots \cup (U_{y_r} \cap V_{y_r}) = \emptyset \cup \dots \cup \emptyset = \emptyset \Rightarrow K \cap V = \emptyset \Rightarrow V \subset X \setminus K$.

3) Se sigue de 1 y 2. Si $F \subset X$ es cerrado, como X es compacto, F también. $f(F)$ es compacto por ser f continua y, como (Y,T') es Hausdorff, $f(F)$ es cerrado.

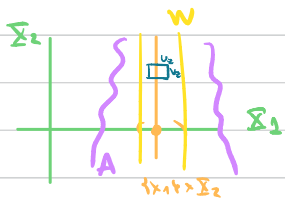
EJERCICIO 2: (X, T_{CF}) es compacto y cualquier subconjunto es compacto. Los subconjuntos compactos no son cerrados en general.

Hecho al final

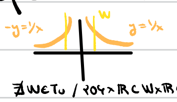
22 Dic 2021

LEMA 3 (DEL TUBO): (X_2,T_2) compacto, (X_1,T_1) ET arbitrario, $x_1 \in X_1$, $A \in T_1 \times T_2$ tal que $\{x_1\} \times X_2 \subset A \Rightarrow \exists W \in T_1 \,/\, \{x_1\} \times X_2 \subset W \times X_2 \subset A$

Demostración:



Fundamental que el espacio sea compacto $\to$ contraejemplo



$\nexists W \in T_u \,/\, \{0\} \times \mathbb{R} \subset W \times \mathbb{R} \subset A$

$A \in T_1 \times T_2$

$\forall z \in X_2$, $(x_1, z) \in \{x_1\} \times X_2 \subset A \Rightarrow \exists V_z \in T_1$, $\exists U_z \in T_2$ tales que $(x_1,z) \in V_z \times U_z \subset A$

X_2 compacto

$\{V_z\}_{z \in X_2}$ rec. abierto de $X_2 \Rightarrow \exists F \subset X_2$ finito tal que $X_2 = \bigcup_{z \in F} V_z$

F finito

$x_1 \in W = \bigcap_{z \in F} U_z \in T_1 \rightsquigarrow \{x_1\} \times X_2 \subset W \times X_2 \subset W \times \left(\bigcup_{z \in F} V_z\right) = \bigcup_{z \in F} (W \times V_z)$

Ahora, como $W \subset U_z$ $\forall z \in F$, podemos reformular como sigue:

$$W \times (V_{z_1} \cup \dots \cup V_{z_k}) = (W \times V_{z_1}) \cup \dots \cup (W \times V_{z_k}) \subset (U_{z_1} \times V_{z_1}) \cup \dots \cup (U_{z_k} \times V_{z_k}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{z \in F} W \times V_z \subset \bigcup_{z \in F} U_z \times V_z \Rightarrow \{x_1\} \times X_2 \subset W \times X_2 = W \times \bigcup_{z \in F} V_z \subset \bigcup_{z \in F} U_z \times V_z \subset A$$

■

TEOREMA 9 (TIJONOV): $X_1 \times \dots \times X_k$ compacto $\Leftrightarrow X_i$ compacto $\forall i \in \Delta_k$

Demostración:

$\Rightarrow$) $X_1 \times \dots \times X_k$ compacto $\Rightarrow X_i = p_i(X_1 \times \dots \times X_k) \Rightarrow X_i$ es compacto

cont

$\Leftarrow$) Basta probarlo para $k=2$. Sean X_1 y X_2 compactos. Consideremos $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $X_1 \times X_2$.
$\forall x \in X_1$, $\{x\} \times X_2$ es compacto $\Rightarrow \{x\}\times X_2 \subset X_1 \times X_2 \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists F_x \subset I$ finito tal que $\{x\} \times X_2 \subset \bigcup_{i\in F_x} U_i \in T_1 \times T_2$
Ahora aplicamos el lema del tubo: $\exists W_x \in T_1$ verificando que
$\{x\} \times X_2 \subset W_x \times X_2 \subset \bigcup_{i\in F_x} U_i$ (tomando $x_1 = x$ y $A = \bigcup_{i\in F_x} U_i$). Entonces,
$\{W_x\}_{x\in X_1}$ es recubrimiento abierto de X_1. → F no tiene que ver con F_x
Como X_1 es compacto, $\exists F \subset X_1$ finito / $X_1 \subset \bigcup_{x\in F} W_x$
Entonces, $X_1 \times X_2 \subset \left(\bigcup_{x\in F} W_x\right) \times X_2 = \bigcup_{x\in F} (W_x \times X_2) \subset \bigcup_{x\in F}\left(\bigcup_{i\in F_x} U_i\right) = \bigcup_{i \in \bigcup_{x\in F} F_x} U_i$
El conjunto $\bigcup_{x\in F} F_x$ es finito $\Rightarrow X_1 \times X_2$ compacto. ∎

Consecuencia del T$^{\text{ma}}$ de Tijonov

TEOREMA 10 (HEINEL - BÖREL - LEBESGUE): $K \subset \mathbb{R}^n$ con la topología usual es compacto $\Leftrightarrow$ K es cerrado y acotado (para la d. euclídea)

Demostración:

$\Rightarrow$) Sup K compacto $\Rightarrow$ K acotado para d = dist. euclídea ($T_u^n = T_d$).
$\Rightarrow$ K cerrado por ser $(\mathbb{R}^n, T_u^n)$ Hausdorff.

$\Leftarrow$) Sup K cerrado y acotado para la d. euclídea. K acotado $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists r>0 : K \subset \bar{B}_d(0,r) \subset \bar{B}_\infty(0,r) = \prod_{i=1}^{n} [-r,r]$ compacto por T$^{\text{ma}}$ Tijonov. (→ compacto en $\mathbb{R}$)
Entonces, K es cerrado y está contenido en un conjunto compacto, luego K es compacto.

PROPOSICIÓN 4: Sea $f: (X,T) \to (\mathbb{R}, T_u)$ continua, con (X,T) compacto. Entonces, $\exists x_{min}, x_{max} \in X$ tales que $f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$ $\forall x \in X$. Es decir, f alcanza un máximo y un mínimo (que no han de ser únicos)

Demostración: $f(X) \subset \mathbb{R}$ es compacto $\Rightarrow f(X)$ es cerrado y acotado superior e inferiormente para la distancia euclídea. Luego existen $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $a = \inf(f(X))$ y $b = \sup(f(X))$. Pero, como $f(X)$ es cerrado, a es el mínimo y b es el máximo por ser $a \in f(X)$, $b \in f(X)$.
Concluimos sin dificultad que $\exists x_{min} \in X : f(x_{min}) = a$ y $\exists x_{max} \in X : f(x_{max}) = b$
Si $z \in f(X) \Rightarrow a \le z \le b \Rightarrow \exists x \in X / f(x) = z \Rightarrow a \le f(x) \le b \Rightarrow f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$ ∎

TEMA 3 TERMINADO :)

EJERCICIO 1: Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es homeomorfismo y $A\subset X$, entonces $f_{|A}:(A,T_A)\to(f(A),T'_{f(A)})$ es homeomorfismo.

Como f es biyectiva, $f_{|A}$ también lo será, con $(f_{|A})^{-1}=(f^{-1})_{|f(A)}$

Cualquier restricción de una función continua es, a su vez, continua, por lo que $f_{|A}$ es continua por serlo f y $(f_{|A})^{-1}=(f^{-1})_{|f(A)}$ también es continua debido a la continuidad de f^{-1}.

Se verifica, pues, lo que nos pedían probar.

NOTA: No entiendo por qué pone este ejercicio ahora (no sé si habría que usar alguna propiedad de espacios conexos), pero yo veo la demostración bastante obvia, lo mismo estoy metiendo la pata en algún lado.

EJERCICIO 2: (X,T_{CF}) es compacto y cualquier subconjunto es compacto. Los subconjuntos compactos no son cerrados en general.

Ya lo haré (luego te lo paso) :)