Tema 3

Construcción de la medida de Lebesgue

Vamos a estudiar una de las nociones más importantes de toda la Matemática. Se trata, nada más y nada menos, que de definir rigurosamente la *longitud* de un subconjunto de $\mathbb{R}$, así como el *área* de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, el *volumen* de un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y, de manera más general, la *medida N-dimensional* de un subconjunto de $\mathbb{R}^N$, con $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Dicha definición se debe al matemático francés H. Lebesgue (1875-1941), que la estudió en su tesis doctoral, defendida en 1902. No es exagerado afirmar que la publicación de dicha tesis supuso una auténtica revolución en el Análisis Matemático, y de hecho en toda la Matemática. Fue el origen de lo que hoy conocemos como Teoría de la Medida, pero también fue el detonante que dio lugar al nacimiento del Análisis Funcional, e incluso de la Topología General.

3.1. Orden, topología y aritmética en $[0, \infty]$

El uso del infinito es imprescindible para estudiar la medida de Lebesgue, pues por ejemplo, la longitud de un subconjunto de $\mathbb{R}$ podrá ser un número real no negativo, pero hay conjuntos que deben tener longitud *infinita*, como el propio $\mathbb{R}$, o cualquier semirrecta. Es por ello que añadiremos a $\mathbb{R}_0^+$ un nuevo elemento, denotado por ∞, obteniendo así el conjunto

$$[0, \infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

La idea es usar ∞ como un número positivo más, para lo cual, daremos al conjunto anterior una estructura de orden, topológica y algebraica, que extienden a las usuales de $\mathbb{R}_0^+$, mejorándolas en algunos aspectos, como vamos a ver. Convendrá eso sí, prestar atención a los casos contados en que, manejar a ∞ como un número positivo más, pueda llevarnos a un error.

En primer lugar, extendemos el orden usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x \leqslant \infty \qquad \forall x \in [0, \infty]$$

Está claro que de esta forma, $[0, \infty]$ se convierte en un conjunto totalmente ordenado, cuyo máximo es ∞ y cuyo mínimo es 0. De hecho es fácil comprobar que el orden de $\mathbb{R}_0^+$ ha mejorado al pasar a $[0, \infty]$, en el sentido que sigue.

- *Todo subconjunto no vacío de* $[0, \infty]$ *tiene supremo e ínfimo.*

Nótese que cuando, para un conjunto no vacío $A \subset [0, \infty]$, escribimos $\sup A < \infty$, estamos diciendo que $\infty \notin A$ y que A está mayorado en el sentido usual, como subconjunto de $\mathbb{R}$.

Prestemos ahora atención a la topología de $[0, \infty]$, que podemos llamar **usual** y se describe de varias maneras. Por una parte, se trata de la topología del orden, la que puede definirse en cualquier conjunto totalmente ordenado. Los abiertos de $[0, \infty]$ son las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de los tres tipos siguientes, con $\alpha, \beta \in [0, \infty]$.

$$\begin{aligned} [0,\beta[&= \{x \in [0,\infty] : x < \beta\} \\ ]\alpha,\infty] &= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x\} \\ ]\alpha,\beta[&= \{x \in [0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \end{aligned}$$

Estos conjuntos forman pues una base de la topología de $[0, \infty]$, que da lugar a una base de entornos de cada punto. Para cada $x \in \mathbb{R}^+$, la familia $\big\{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\,:\, 0 < \varepsilon < x \big\}$ es base de entornos de x, mientras que $\big\{ [0, \varepsilon[\,:\, \varepsilon > 0 \big\}$ es base de entornos de 0. Vemos así que $[0, \infty]$ induce en $\mathbb{R}_0^+$ la misma topología que $\mathbb{R}$. Finalmente, la familia $\big\{]\alpha, \infty] : \alpha \in \mathbb{R}^+ \big\}$ es base de entornos de ∞. Por tanto, si $x_n \in [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\{x_n\} \to \infty$ si, y sólo si, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \alpha$ para $n \geqslant m$. Cuando $x_n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto equivale a que la sucesión de números reales $\{x_n\}$ diverja positivamente, como cabía esperar.

La mejor forma de entender la topología, y también el orden, de $[0, \infty]$ se consigue usando la función $f : [0, 1] \to [0, \infty]$ dada por

$$f(t) = \frac{t}{1-t} \quad \forall t \in [0,1[\quad \text{y} \quad f(1) = \infty$$

que es biyectiva, con $f^{-1}(x) = x/(1+x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$ y $f^{-1}(\infty) = 1$. Es fácil comprobar que f es continua, con lo que $[0, \infty]$ es compacto y f es un homeomorfismo. Por tanto, como espacio topológico, $[0, \infty]$ se identifica con $[0, 1]$, cuyas propiedades topológicas son bien conocidas. Por ejemplo, vemos que $[0, \infty]$ es un espacio topológico metrizable, compacto y conexo. Observemos también que f es una biyección creciente, luego preserva el orden, así que $[0, \infty]$ también se identifica con $[0, 1]$ como conjunto ordenado.

La topología de $[0, \infty]$ es compatible con el orden, en el siguiente sentido: si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes en $[0, \infty]$, tales que $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene entonces que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Llamamos ahora la atención sobre otro hecho evidente:

- *Toda sucesión monótona de elementos de* $[0, \infty]$ *es convergente. Más concretamente:*

$$\begin{aligned} x_n \in [0, \infty], \quad x_n \leqslant x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \\ x_n \in [0, \infty], \quad x_n \geqslant x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Usaremos a menudo sucesiones monótonas en $[0, \infty]$, por lo que conviene disponer de una notación abreviada para ellas. Si $\{x_n\}$ es una tal sucesión y denotamos por x a su límite, escribiremos $\{x_n\} \nearrow x$ cuando $\{x_n\}$ sea creciente, y $\{x_n\} \searrow x$ cuando sea decreciente.

Para toda sucesión $\{x_n\}$ en $[0,\infty]$, podemos ahora definir sus límites superior e inferior:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{x_k : k \geqslant n\}\big) \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{x_k : k \geqslant n\}\big)$$

Es claro que $\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n$ y que, para $x \in [0,\infty]$ se tiene:

$$\{x_n\} \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$$

Pasemos a las operaciones de $[0,\infty]$. Extendemos la suma usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo

$$x + \infty = \infty + x = \infty \qquad \forall x \in [0,\infty]$$

Se comprueba rutinariamente que la suma así definida es asociativa y conmutativa, con 0 como elemento neutro. Ningún otro elemento de $[0,\infty]$ tiene opuesto, por lo que debemos evitar las diferencias entre elementos de $[0,\infty]$, y tener cuidado con la ley de cancelación: de $x+z=y+z$ con $x,y,z \in [0,\infty]$ sólo se deduce que $x=y$ cuando $z \neq \infty$. Por primera vez si se piensa, la presencia de ∞ supone un inconveniente, hasta ahora todo habían sido ventajas.

Es claro que la suma es compatible con el orden:

$$x,y \in [0,\infty], \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad x+z \leqslant y+z \ \ \forall z \in [0,\infty]$$

luego podemos sumar desigualdades miembro a miembro. Por otra parte, la suma también es compatible con la topología, es decir, es continua. De manera equivalente, si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes en $[0,\infty]$, se tiene que $\{x_n+y_n\}$ también es convergente, con

$$\lim_{n\to\infty} (x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Observemos que, para toda sucesión $\{x_n\}$ en $[0,\infty]$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k \right\}$ es una sucesión creciente, luego converge. Por tanto siempre tiene sentido la suma de una serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Nótese que la desigualdad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$ significa que $x_n \neq \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente en $\mathbb{R}$. Usaremos con frecuencia que la suma de series recién definida es asociativa y conmutativa, típicamente cuando manejamos series dobles:

- *Para toda función* $\alpha : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to [0,\infty]$ *y toda aplicación biyectiva* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, *se tiene:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha(n,m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha\big(\tau(k)\big) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n,m) \tag{1}$$

Fijados $p,q \in \mathbb{N}$, tomando $r = \max\{\tau^{-1}(n,m) : n,m \in \mathbb{N},\ n \leqslant p,\ m \leqslant q\}$ vemos que, para todo $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $n \leqslant p$ y $m \leqslant q$, se tiene $(n,m) = \tau(k)$ con $k \in \mathbb{N}$ y $k \leqslant r$, de donde

$$\sum_{n=1}^{p} \sum_{m=1}^{q} \alpha(n,m) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha\big(\tau(k)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha\big(\tau(k)\big)$$

Podemos ahora tomar límites, haciendo primero $q \to \infty$ y después $p \to \infty$, para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(n,m) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha\big(\tau(k)\big) \tag{2}$$

Recíprocamente, fijado $r \in \mathbb{N}$, es claro que podemos encontrar $p,q \in \mathbb{N}$, de forma que, para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant r$, se tenga $\tau(k) = (n,m)$ con $n \leqslant p$ y $m \leqslant q$, con lo que tenemos

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha\big(\tau(k)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{p} \sum_{m=1}^{q} \alpha(n,m) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(n,m)$$

Al tomar límite, haciendo $r \to \infty$, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha\big(\tau(k)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(n,m) \tag{3}$$

En vista de (2) y (3), hemos probado la primera igualdad de (1), de la que por simetría se obtiene la segunda. ■

La definición del producto en $[0,\infty]$ es algo más problemática. Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\,\infty = \infty\, x = \infty \quad \forall x \in]0,\infty], \qquad 0\,\infty = \infty\, 0 = 0$$

Tomar $\infty\, 0 = 0$ puede ser discutible, y desde luego tiene inconvenientes, pero es perfectamente coherente en nuestro estudio, por razones que más adelante se pondrán de manifiesto. Baste por ahora pensar que una recta horizontal en el plano, cuya área debe ser nula, puede verse como un rectángulo en el que la base tiene longitud ∞ y la altura 0, luego su área debería ser $\infty\, 0$.

Se comprueba rutinariamente sin dificultad que el producto recién definido es asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma. También es claro que el producto es compatible con el orden: si $x,y \in [0,\infty]$ verifican que $x \leqslant y$, entonces $xz \leqslant yz$ para todo $z \in [0,\infty]$. El caso en que $z = \infty$ no causa dificultad, pues si $y = 0$ también se tiene $x = 0$. Podemos por tanto multiplicar miembro a miembro dos desigualdades:

$$x,y,z,t \in [0,\infty], \quad x \leqslant y, \quad z \leqslant t \qquad \Longrightarrow \qquad xz \leqslant yt$$

El haber definido $0\,\infty = 0$ hace obviamente que el producto no sea continuo y esta es la otra cuestión con la que hay que tener cuidado. Concretamente, si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes en $[0,\infty]$, con $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$, sólo se puede asegurar que $\{x_n y_n\} \to xy$ cuando se tenga $\{x,y\} \neq \{0,\infty\}$, pues entonces el producto sí es continuo en el punto (x,y).

Para tener una situación en la que podemos olvidar la salvedad anterior, supongamos además que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son crecientes. Entonces, si $x = 0$, se ha de tener $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\{x_n y_n\} \to xy$ aunque sea $y = \infty$. Resaltemos esta observación:

$$x_n, y_n \in [0, \infty] \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{x_n\} \nearrow x, \quad \{y_n\} \nearrow y \quad \Longrightarrow \quad \{x_n y_n\} \nearrow xy$$

Esto es útil cuando se trabaja con sucesiones de funciones con valores en $[0, \infty]$, como haremos a menudo. Tiene una consecuencia obvia para series en $[0, \infty]$, que son sucesiones crecientes:

$$x_n \in [0, \infty] \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in [0, \infty] \quad \Longrightarrow \quad \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n$$

3.2. Definición de la medida de Lebesgue

Nuestro próximo objetivo es definir la longitud de un subconjunto de $\mathbb{R}$, el área de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, el volumen de un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, y en general, lo que podríamos llamar medida N-dimensional de un subconjunto de $\mathbb{R}^N$.

En lo que sigue mantenemos fijo $N \in \mathbb{N}$ y denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$. Todo lo que haremos depende de N, pero abreviamos olvidando esta dependencia, para evitar que N tenga que aparecer constantemente, complicando la notación. Para $n \in \mathbb{N}$ será útil escribir $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$. Dado $k \in \Delta_N$, denotamos por $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada en $\mathbb{R}^N$, es decir, $\pi_k(x) = x(k)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Para empezar, está claro cual debería ser la longitud de un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, el área de un rectángulo, o el volumen de un ortoedro, lo que nos lleva a las definiciones que siguen.

Un **intervalo** en $\mathbb{R}^N$ será un producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$, y denotaremos por $\mathcal{J}$ al conjunto de todos los **intervalos acotados** en $\mathbb{R}^N$, entendiendo que $\emptyset \in \mathcal{J}$. Para $I \in \mathcal{J} \setminus \{\emptyset\}$ y cada $k \in \Delta_N$, está claro que $\pi_k(I)$ es un intervalo no vacío y acotado en $\mathbb{R}$. Esto nos permite definir la **medida elemental** del intervalo I como el número $M(I) \in \mathbb{R}_0^+$ dado por

$$M(I) = \prod_{k=1}^{N} \big(\sup \pi_k(I) - \inf \pi_k(I) \big) \tag{4}$$

y como es natural, definimos $M(\emptyset) = 0$. Obtenemos así una función $M : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_0^+$ a la que llamaremos **medida elemental de los intervalos acotados**.

La idea clave de Lebesgue consiste en usar la función M para estimar por exceso la medida de cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$. Para ello, consideremos un recubrimiento numerable de E por intervalos acotados, es decir, una sucesión $\{I_n\}$ en $\mathcal{J}$ tal que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Tales recubrimientos existen, pues por ejemplo, $E \subset \mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]^N$. Intuitivamente, la medida de E debería ser menor o igual que $\sum_{n=1}^{\infty} M(I_n)$, pero es igualmente plausible que, eligiendo de forma adecuada la sucesión $\{I_n\}$, dicha suma pueda aproximarse a la medida de E, tanto como se quiera. Ello motiva la definición que sigue.

La **medida exterior de Lebesgue** es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ definida por

$$\lambda^*(E) = \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) \ : \ I_n \in \mathcal{J} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \qquad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \tag{5}$$

Para cada conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice también que $\lambda^*(E)$ es la **medida exterior** de E.

La función recién definida no es la respuesta definitiva al problema que estamos tratando, por la razón que pasamos a explicar. Intuitivamente, si E y F son subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^N$, la medida de $E \cup F$ debería ser la suma de las medidas de E y F. Sin embargo, aunque no es fácil probarlo, veremos más adelante que existen conjuntos $E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, con $E \cap F = \emptyset$, tales que $\lambda^*(E \cup F) < \lambda^*(E) + \lambda^*(F)$. Este inconveniente se evita restringiendo la medida exterior de Lebesgue a una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ en la que dicho inconveniente no pueda presentarse. Lo haremos de una forma distinta a la usada por Lebesgue, que fue propuesta más tarde por el matemático alemán C. Carathéodory (1873-1950), y conduce al mismo resultado, por un camino más corto. Para entender su idea, podemos pensar que los conjuntos E y F antes mencionados “no parten bien” a $E \cup F$, pues de algún modo, la medida exterior λ^* no detecta que E y F son disjuntos. Para evitar que esto pueda ocurrir, nos limitaremos a trabajar con los conjuntos que “parten bien” a cualquier otro, lo que se concreta como sigue.

Diremos que un conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es **medible** cuando verifica la siguiente condición:

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \qquad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \tag{6}$$

y denotaremos por $\mathcal{M}$ a la familia de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$. Obsérvese que, si $E \in \mathcal{M}$ y $F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ verifican que $E \cap F = \emptyset$, tomando $W = E \cup F$ en (6), obtenemos que $\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F)$, luego si nos limitamos a trabajar con conjuntos medibles, el problema antes mencionado no puede presentarse.

La **medida de Lebesgue** en $\mathbb{R}^N$ es la restricción de la medida exterior de Lebesgue a la familia de los conjuntos medibles, es decir, la función $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ definida por

$$\lambda(E) = \lambda^*(E) \qquad \forall\, E \in \mathcal{M} \tag{7}$$

Para cada $E \in \mathcal{M}$ diremos simplemente que $\lambda(E)$ es la **medida** de E.

Hemos querido presentar la definición de la medida de Lebesgue de una forma muy directa, para que quede claro que tal definición puede hacerse de forma bastante intuitiva, en cuatro pasos: mediante la igualdad (4) se define la medida elemental de los intervalos acotados, que se usa en (5) para definir la medida exterior de Lebesgue. Para que dicha función se comporte como esperamos, definimos los conjuntos medibles mediante la condición (6), para finalmente obtener en (7) la medida de Lebesgue como restricción de la medida exterior.

Para todo $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene $W \cap \emptyset = W \setminus \mathbb{R}^N = \emptyset$, mientras que $W \setminus \emptyset = W \cap \mathbb{R}^N = W$. Como $\lambda^*(\emptyset) = 0$, deducimos que $\emptyset, \mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$. Ya hemos dicho que $\lambda(\emptyset) = 0$, pero no está claro que se tenga $\lambda(\mathbb{R}^N) = \infty$, como cabe esperar. De hecho, es muy poco lo que se puede decir sobre la medida de Lebesgue, usando solamente su definición. Para obtener información más relevante sobre ella, hay que estudiar con más detenimiento la medida exterior λ^*, como haremos a partir de ahora.

3.3. La medida exterior de Lebesgue

Resaltamos una propiedad inmediata:

- *La medida exterior de Lebesgue es una función* **creciente**, *es decir:*

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

Como todo recubrimiento de F es también un recubrimiento de E, basta usar que el ínfimo de un conjunto es menor o igual que el de cualquier subconjunto no vacío. ■

Probamos ahora la propiedad más importante de la medida exterior de Lebesgue:

- *Para toda sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ se tiene:*

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) \tag{8}$$

Podemos suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) < \infty$, pues en otro caso, la desigualdad buscada es obvia. En particular tenemos $\lambda^*(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, fijados $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$, por definición de $\lambda^*(E_n)$, existe una familia numerable $\{I(n,m) : m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$ tal que

$$E_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I(n,m) \qquad \text{y} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} M\big(I(n,m)\big) \leqslant \lambda^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Escribiendo $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, la familia $\big\{I(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\big\} \subset \mathcal{J}$ es un recubrimiento de E por intervalos acotados, que por ser numerable, se puede escribir en la forma $\big\{I\big(\tau(k)\big) : k \in \mathbb{N}\big\}$, mediante cualquier biyección $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Usando ahora la definición de $\lambda^*(E)$ y una propiedad conocida de las sumas de series en $[0, \infty]$, obtenemos que

$$\lambda^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} M\big[I\big(\tau(k)\big)\big] = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} M\big(I(n,m)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) + \varepsilon$$

En vista de la arbitrariedad de ε, deducimos que se verifica (8). ■

Se alude a la propiedad recién demostrada, diciendo que la medida exterior de Lebesgue es una función **σ-subaditiva**. Fijados $n \in \mathbb{N}$ y $E_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ para todo $k \in \Delta_n$, podemos usar (8), tomando $E_k = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \Delta_n$. Con ello obtenemos:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(E_k)$$

y decimos ahora que la medida exterior de Lebesgue es **finitamente subaditiva**. En particular, se tiene que $\lambda^*(E \cup F) \leqslant \lambda^*(E) + \lambda^*(F)$ para cualesquiera $E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

Deducimos una consecuencia importante, a la hora de averiguar si un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ es medible. Para todo $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $\lambda^*(W) \leqslant \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E)$, luego para tener $E \in \mathcal{M}$, bastará que se verifique la otra desigualdad. Así pues, para $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene:

$$E \in \mathcal{M} \iff \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \leqslant \lambda^*(W) \quad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \tag{9}$$

Nótese además, que la última desigualdad es obvia cuando $\lambda^*(W) = \infty$.

3.4. Primeras propiedades de la medida de Lebesgue

La observación que acabamos de hacer tiene una consecuencia importante, que muestra ya cierta abundancia de conjuntos medibles:

- *Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:*

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E \in \mathcal{M}, \ \lambda(E) = 0$$

Como λ^* es creciente, para todo $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $\lambda^*(W \cap E) \leqslant \lambda^*(E) = 0$, así como $\lambda^*(W \setminus E) \leqslant \lambda^*(W)$, de donde deducimos que $\lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \leqslant \lambda^*(W)$, y en vista de (9), esto implica que $E \in \mathcal{M}$. Está claro ahora que $\lambda(E) = \lambda^*(E) = 0$. ■

Cuando $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ verifica $\lambda^*(E) = 0$, se dice que E es un **conjunto de medida nula**, pues automáticamente E es medible con $\lambda(E) = 0$. Es fácil ver que esto le ocurre a todo conjunto numerable $E \subset \mathbb{R}^N$. En efecto, si $\phi : \mathbb{N} \to E$ es una aplicación sobreyectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto unitario $I_n = \{\phi(n)\}$ es un intervalo acotado con $M(I_n) = 0$, y de la definición de λ^* deducimos que $\lambda^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) = 0$.

Antes de probar la primera propiedad fundamental de la medida de Lebesgue, conviene fijar una notación, útil para trabajar con uniones de conjuntos dos a dos disjuntos, como haremos a menudo a partir de ahora. La presentamos en general, para un conjunto no vacío Ω arbitrario, denotando también por $\mathcal{P}(\Omega)$ al conjunto de todos los subconjuntos de Ω. Por supuesto, todo lo que se diga sobre Ω será válido cuando $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Si $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$, escribiremos $C = A \biguplus B$ para indicar, no sólo que $C = A \cup B$, sino también que $A \cap B = \emptyset$. Del mismo modo, si $n \in \mathbb{N}$ y $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $k \in \Delta_n$, cuando escribimos que $A = \biguplus_{k=1}^{n} A_k$, no sólo afirmamos que $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, sino también que $A_k \cap A_j = \emptyset$ para $k, j \in \Delta_n$ con $k \neq j$. Finalmente, si $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la igualdad $A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$ indica que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y que $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$.

El siguiente puede considerarse como el primer resultado fundamental acerca de la medida de Lebesgue. Por una parte, describe las propiedades de estabilidad que tiene la familia de los conjuntos medibles, y por otra, nos da la propiedad clave que tiene la medida de Lebesgue.

Teorema. *La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles tiene las siguientes tres propiedades:*

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

(c) $E_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow E \in \mathcal{M}$

A su vez, la medida de Lebesgue $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tiene la siguiente propiedad:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \tag{10}$$

Demostración. Ya sabíamos que $\mathbb{R}^N$ es medible. Para abreviar, denotaremos por E^c al complemento de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, es decir, $E^c = \mathbb{R}^N \setminus E$. Si $E \in \mathcal{M}$, se tiene

$$\lambda^*(W \cap E^c) + \lambda^*(W \setminus E^c) = \lambda^*(W \setminus E) + \lambda^*(W \cap E) = \lambda^*(W)$$

luego $E^c \in \mathcal{M}$ y se verifica **(b)**. Probar **(c)**, y de paso la igualdad (10), será más laborioso.

Dados $E, F \in \mathcal{M}$, para todo $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ tenemos

$$\begin{aligned} \lambda^*(W) &= \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \cap E^c) \\ &= \lambda^*(W \cap E \cap F) + \lambda^*(W \cap E \cap F^c) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F^c) \end{aligned} \tag{11}$$

La igualdad anterior se sigue verificando si sustituimos W por $W \cap (E \cup F)$. Al hacerlo, los tres primeros sumandos del último miembro no se alteran, mientras el otro se anula, y obtenemos

$$\lambda^*\big(W \cap (E \cup F)\big) = \lambda^*(W \cap E \cap F) + \lambda^*(W \cap E \cap F^c) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F) \tag{12}$$

Sustituyendo (12) en (11), obtenemos

$$\lambda^*(W) = \lambda^*\big(W \cap (E \cup F)\big) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F^c) = \lambda^*\big(W \cap (E \cup F)\big) + \lambda^*\big(W \setminus (E \cup F)\big)$$

Esta igualdad, válida para todo $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, nos dice que $E \cup F \in \mathcal{M}$. Usando **(b)** deducimos que también $E \cap F \in \mathcal{M}$ y $E \setminus F \in \mathcal{M}$, ya que $E \cap F = \big(E^c \cup F^c\big)^c$ y $E \setminus F = E \cap F^c$. Mediante una obvia inducción, vemos que toda unión finita de conjuntos medibles es un conjunto medible, que es la versión de **(c)** para una familia finita de conjuntos.

Además, para $E, F \in \mathcal{M}$ con $E \cap F = \emptyset$ la igualdad (12) nos dice que

$$\lambda^*\big(W \cap (E \uplus F)\big) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \cap F) \quad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Razonando de nuevo por inducción, obtenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$E_k \in \mathcal{M} \ \forall k \in \Delta_n, \ E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k \quad \Longrightarrow \quad \lambda^*(W \cap E) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(W \cap E_k) \ \ \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \tag{13}$$

Tomando $W = \mathbb{R}^N$, obtenemos la versión de (10) para una familia finita de conjuntos.

Supongamos ahora que $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para usar lo demostrado, tomamos $F_n = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijados $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ y $n \in \mathbb{N}$, usamos que λ^* es creciente, junto con (13), y como ya sabemos que $F_n \in \mathcal{M}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \lambda^*(W \cap E_k) + \lambda^*(W \setminus E) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(W \cap E_k) + \lambda^*(W \setminus F_n) \\ &= \lambda^*(W \cap F_n) + \lambda^*(W \setminus F_n) = \lambda^*(W)\end{aligned}$$

Esta desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, luego tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(W \cap E_n) + \lambda^*(W \setminus E) \leqslant \lambda^*(W)$$

Como $W \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (W \cap E_n)$ usando que λ^* es σ-subaditiva, de la última desigualdad deducimos que

$$\lambda^*(W) \leqslant \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(W \cap E_n) + \lambda^*(W \setminus E) \leqslant \lambda^*(W)$$

Esto prueba que $E \in \mathcal{M}$ pero además, tomando $W = E$ obtenemos claramente (10).

Finalmente, sea $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles, que ya no tienen por qué ser dos a dos disjuntos, y sea de nuevo $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Tomando $H_1 = E_1$ y $H_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sabemos ya que $H_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se tiene claramente que $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} H_n$, luego usando lo ya demostrado, obtenemos que $E \in \mathcal{M}$. Esto prueba que se verifica **(c)**, lo que concluye la demostración. ■

La familia de los conjuntos medibles tiene otras propiedades de estabilidad, obtenidas en la demostración anterior, que en realidad son consecuencias de **(b)** y **(c)**. Si $n \in \mathbb{N}$ y $E_k \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \Delta_n$, tomando $E_k = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \Delta_n$, de **(c)** deducimos que $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ es medible. Usando **(b)** obtenemos que $\bigcap_{k=1}^{n} E_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k^c \right)^c$ también es medible. Más en general, si $E_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^c \right)^c$ es un conjunto medible. Por último, para $E, F \in \mathcal{M}$, se tiene que $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{M}$. En resumen, la familia $\mathcal{M}$ es estable por todo tipo de operaciones numerables.

Las propiedades **(a)**,**(b)** y **(c)** se resumen diciendo que la familia de los conjuntos medibles es una σ-álgebra en $\mathbb{R}^N$. Concretamente, una **σ-álgebra** en un conjunto no vacío Ω es una familia de conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, estable por uniones numerables y complementos, con $\Omega \in \mathcal{A}$. Razonando exactamente igual que hemos hecho con $\mathcal{M}$, se comprueba que toda σ-álgebra es estable por todo tipo de operaciones numerables.

Se alude a la igualdad (10) diciendo que la medida de Lebesgue es una función **σ-aditiva**. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$E_k \in \mathcal{M} \ \ \forall k \in \Delta_n \quad E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

lo que se expresa diciendo que λ es **finitamente aditiva**.

Destacamos dos propiedades de la medida de Lebesgue, que se pueden deducir de (10), pero en realidad son casos particulares de propiedades de la medida exterior, ya conocidas. Concretamente, es claro que λ es creciente, es decir,

$$E, F \in \mathcal{M}, \ \ E \subset F \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) \leqslant \lambda(F)$$

Además, λ es σ-subaditiva en $\mathcal{M}$, es decir

$$E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

En particular λ es finitamente subaditiva: verifica la desigualdad análoga a la anterior, para una unión finita de conjuntos medibles.

Vamos a probar enseguida otras dos propiedades de la medida de Lebesgue, que son las dos consecuencias más importantes de la σ-aditividad. Para interpretarlas en clave de continuidad, conviene introducir una notación adecuada.

Dado un conjunto no vacío Ω, supongamos que una sucesión $\{A_n\}$ de subconjuntos de Ω es creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, puede entenderse como una especie de *límite* de la sucesión $\{A_n\}$, por lo que escribimos $\{A_n\} \nearrow A$. Por análogas razones, escribimos $\{A_n\} \searrow A$ cuando $\{A_n\}$ es decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y hemos tomado $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Veamos ya los dos tipos de continuidad que tiene la medida de Lebesgue.

- *La medida de Lebesgue* $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *es* **crecientemente continua**, *es decir:*

$$A_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{A_n\} \nearrow A \quad \Longrightarrow \quad \big\{\lambda(A_n)\big\} \nearrow \lambda(A) \tag{14}$$

  También es **decrecientemente continua**, *en el siguiente sentido:*

$$A_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{A_n\} \searrow A, \ \ \lambda(A_1) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \big\{\lambda(A_n)\big\} \searrow \lambda(A) \tag{15}$$

Con vistas a (14), como λ es creciente, sabemos que la sucesión $\{\lambda(A_n)\}$ es creciente, y también sabemos que A es medible, como unión numerable de conjuntos medibles. Se trata por tanto de probar que el límite de $\{\lambda(A_n)\}$ es $\lambda(A)$. Tomando $A_0 = \emptyset$ y $B_n = A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos claramente $A = \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n$, y también $A_n = \biguplus_{k=1}^{n} B_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando ahora que λ es σ-aditiva, y también que es finitamente aditiva, obtenemos:

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(B_k) = \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n)$$

Para probar (15), sabemos que $\{\lambda(A_n)\}$ es decreciente, y que $A \in \mathcal{M}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $A_1 \setminus A_n \in \mathcal{M}$ y $A_1 = (A_1 \setminus A_n) \uplus A_n$. Como también $A_1 \setminus A \in \mathcal{M}$ y $A_1 = (A_1 \setminus A) \uplus A$, la aditividad finita de λ nos dice que

$$\lambda(A_1 \setminus A) + \lambda(A) = \lambda(A_1) = \lambda(A_1 \setminus A_n) + \lambda(A_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ser $\{A_1 \setminus A_n\} \nearrow A_1 \setminus A$, usando (14) obtenemos que $\{\lambda(A_1 \setminus A_n)\} \nearrow \lambda(A_1 \setminus A)$. Pero por otra parte, como $\{\lambda(A_n)\}$ es decreciente, tenemos $\{\lambda(A_n)\} \searrow \alpha \in [0, \infty]$. De las igualdades anteriores se deduce entonces que

$$\lambda(A_1 \setminus A) + \lambda(A) = \lambda(A_1 \setminus A) + \alpha$$

Como $\lambda(A_1 \setminus A) \leqslant \lambda(A_1) < \infty$, concluimos que $\lambda(A) = \alpha$, luego $\{\lambda(A_n)\} \searrow \lambda(A)$. ∎

La diferencia entre la continuidad creciente y la decreciente no puede pasar desapercibida. Estriba en la condición $\lambda(A_1) < \infty$, que no aparece en (14), pero ha sido crucial para (15). De hecho, bastaría suponer que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(A_m) < \infty$, pues si $m > 1$, podemos usar la sucesión $\{A_{n+m-1}\}$, cuyo primer término es A_m, y que también verifica $\{A_{n+m-1}\} \searrow A$. Entonces (15) nos dice que $\big\{\lambda(A_{n+m-1})\big\} \searrow \lambda(A)$, de donde $\big\{\lambda(A_n)\big\} \searrow \lambda(A)$. Aunque sea adelantando acontecimientos, veamos que este tipo de hipótesis no puede suprimirse. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $A_n = [n, +\infty[\subset \mathbb{R}$, veremos más adelante que $\lambda(A_n) = \infty$. Sin embargo, es claro que $\{A_n\} \searrow \emptyset$, así que $\big\{\lambda(A_n)\big\}$ no converge a $\lambda(\emptyset) = 0$. Análogo ejemplo se puede mostrar en $\mathbb{R}^N$, para cualquier $N \in \mathbb{N}$.

Como ya se ha dicho, todas las propiedades que por ahora conocemos de la medida de Lebesgue, son consecuencias de la σ-aditividad. Es natural por tanto que tal propiedad sea la que se usa para definir el concepto general de medida.

Concretamente, una **medida** en un conjunto no vacío Ω, es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definida en una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y es σ-aditiva, es decir;

$$E_n \in \mathcal{A} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Como ya se ha sugerido, cualquier medida tiene todas las propiedades que por ahora conocemos de la medida de Lebesgue. Es finitamente aditiva y también σ-subaditiva, luego finitamente subaditiva. Además, es crecientemente y decrecientemente continua.

Aunque sólo nos interesa la medida de Lebesgue, veamos otro ejemplo más sencillo de medida, que tiene sentido en cualquier conjunto no vacío Ω. Para cada $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, sea $\mu(E)$ el número de elementos de E, entendiendo que $\mu(E) = \infty$ cuando el conjunto E es infinito. Se comprueba sin dificultad que de esta forma se obtiene una medida $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$, que por razones obvias, se conoce como el **número de elementos** en Ω.

Notemos que el primer teorema que hemos probado, acerca de la medida de Lebesgue, se resume diciendo que la familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles es una σ-álgebra en $\mathbb{R}^N$, y que la función $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, aparte de verificar que $\lambda(\emptyset) = 0$, es σ-aditiva. Por tanto, con la nomenclatura recién introducida, el teorema queda como una especie de redundancia: la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es, efectivamente, una medida en $\mathbb{R}^N$.

3.5. Los intervalos acotados y su medida elemental

Para definir la medida de Lebesgue, se tomó como punto de partida la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$, y su medida elemental, la función $M : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_0^+$ definida en (4). Es natural preguntar si los intervalos acotados son conjuntos medibles y si su medida coincide con su medida elemental, es decir, si se tiene $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$ y $\lambda(I) = M(I)$ para todo $I \in \mathcal{J}$. Para que la medida de Lebesgue esté de acuerdo con nuestra intuición, y también para poder avanzar en su estudio, es obligado contestar afirmativamente esta pregunta. Ello requiere estudiar algunas propiedades básicas de $\mathcal{J}$ y M, que intuitivamente se pueden considerar evidentes, pero haremos demostraciones detalladas, que no son del todo inmediatas.

En primer lugar, la intersección de dos intervalos $I,J \subset \mathbb{R}^N$ es un intervalo, lo que es bien sabido cuando $N = 1$. En general, tenemos $I = \prod_{k=1}^{N} I_k$ y $J = \prod_{k=1}^{N} J_k$ donde I_k, J_k son intervalos en $\mathbb{R}$ para todo $k \in \Delta_N$, y vemos que $I \cap J = \prod_{k=1}^{N} \big(I_k \cap J_k \big)$ es un intervalo en $\mathbb{R}^N$, producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$.

Cuando $I,J \in \mathcal{J}$, es obvio que el intervalo $I \cap J$ está acotado. Hemos comprobado así la primera propiedad de $\mathcal{J}$ que conviene resaltar:

- *Para cualesquiera $I,J \in \mathcal{J}$, se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$.*

Está claro que no se verifica la propiedad análoga para uniones, y tampoco para diferencias, pero sí hay una relación entre diferencias y uniones que nos será útil.

- *Para cualesquiera $I,J \in \mathcal{J}$, el conjunto $I \setminus J$ es una unión finita de intervalos acotados dos a dos disjuntos, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \qquad \text{donde} \qquad H_k \in \mathcal{J} \quad \forall k \in \Delta_n \tag{16}$$

Razonamos por inducción sobre N, suponiendo que $J \neq \emptyset$ pues en otro caso no hay nada que demostrar. Para $N = 1$ consideramos los conjuntos

$$J_- = \{ y \in \mathbb{R} : y < x \ \ \forall x \in J \} \qquad \text{y} \qquad J_+ = \{ z \in \mathbb{R} : z > x \ \ \forall x \in J \}$$

que claramente son semirrectas y verifican que $\mathbb{R} = J_- \uplus J \uplus J_+$. Entonces, los intervalos acotados $H_1 = I \cap J_-$ y $H_2 = I \cap J_+$ verifican que $I \setminus J = H_1 \uplus H_2$, luego tomando $n = 2$, hemos probado (16) en el caso $N = 1$.

Fijado $N \in \mathbb{N}$, suponemos cierto el resultado en $\mathbb{R}^N$, para probarlo en $\mathbb{R}^{N+1}$. Si I,J son intervalos acotados en $\mathbb{R}^{N+1}$, escribimos $I = A \times C$ y $J = B \times D$, donde A y B son intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$, mientras que C y D lo son en $\mathbb{R}$. Se tiene entonces claramente que

$$I \setminus J = \big[(A \setminus B) \times C \big] \biguplus \big[(A \cap B) \times (C \setminus D) \big] \tag{17}$$

Por la hipótesis de inducción, y lo ya demostrado en el caso $N = 1$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \setminus B = \biguplus_{j=1}^{m} A_k \qquad \text{y} \qquad C \setminus D = C_1 \biguplus C_2 \tag{18}$$

donde A_k es un intervalo acotado en $\mathbb{R}^N$ para todo $k \in \Delta_m$, mientras que C_1, C_2 son intervalos acotados en $\mathbb{R}$. Tomando entonces

$$H_k = A_k \times C \quad \forall k \in \Delta_m\,, \qquad H_{m+1} = (A \cap B) \times C_1 \quad \text{y} \quad H_{m+2} = (A \cap B) \times C_2$$

vemos claramente que H_k es un intervalo acotado en $\mathbb{R}^{N+1}$ para todo $k \in \Delta_{m+2}$, mientras que de (17) y (18) deducimos que

$$I \setminus J = \left[\biguplus_{k=1}^{m} (A_k \times C) \right] \biguplus \left[(A \cap B) \times C_1 \right] \biguplus \left[(A \cap B) \times C_2 \right] = \biguplus_{k=1}^{m+2} H_k$$

Tomando $n = m+2$, tenemos la igualdad (16) en $\mathbb{R}^{N+1}$, lo que concluye la demostración. ■

El resultado anterior permite obtener fácilmente, partiendo de los intervalos acotados, una familia de conjuntos que ya es estable por operaciones finitas. Concretamente, diremos que un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una **figura elemental**, cuando se pueda expresar como unión finita de intervalos acotados dos a dos disjuntos, es decir, cuando se tenga $A = \biguplus_{k=1}^{n} I_k$ con $n \in \mathbb{N}$ e $I_k \in \mathcal{J}$ para todo $k \in \Delta_n$. Denotaremos por $\mathcal{E}$ a la familia de todas las figuras elementales en $\mathbb{R}^N$. Del resultado anterior deducimos la propiedad de $\mathcal{E}$ que nos interesa.

- *La familia $\mathcal{E}$ es estable por intersecciones finitas, diferencias y uniones finitas.*

En primer lugar, es evidente que toda unión finita de figuras elementales, dos a dos disjuntas, es una figura elemental, es decir

$$m \in \mathbb{N}, \quad A_j \in \mathcal{E} \;\; \forall j \in \Delta_m, \quad A = \biguplus_{j=1}^{m} A_j \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathcal{E}$$

Sean ahora $A, B \in \mathcal{E}$ arbitrarios, y pongamos $A = \biguplus_{k=1}^{n} I_k$ y $B = \biguplus_{j=1}^{m} H_j$, donde $I_k, H_j \in \mathcal{J}$ para cualesquiera $k \in \Delta_n$ y $J \in \Delta_m$. Vemos entonces que

$$A \cap B = \biguplus_{k=1}^{n} \biguplus_{j=1}^{m} \left(I_k \cap H_j \right)$$

es una unión finita de intervalos acotados dos a dos disjuntos, luego $A \cap B \in \mathcal{E}$. Mediante una obvia inducción, deducimos que $\mathcal{E}$ es estable por intersecciones finitas.

Fijando ahora $k \in \Delta_n$, para cada $j \in \Delta_m$ el resultado anterior nos dice que $A_k \setminus B_j \in \mathcal{E}$, y deducimos que $A_k \setminus B \in \mathcal{E}$, ya que $A_k \setminus B = \bigcap_{j=1}^{m} (A_k \setminus B_j)$. Como esto es cierto para todo $k \in \Delta_n$, obtenemos que $A \setminus B \in \mathcal{E}$, ya que $A \setminus B = \biguplus_{k=1}^{n} (A_k \setminus B)$.

Finalmente, como $A \cup B = (A \setminus B) \biguplus (A \cap B) \biguplus (B \setminus A)$, vemos también que $A \cup B \in \mathcal{E}$. Otra vez por inducción, concluimos que $\mathcal{E}$ es estable por uniones finitas. ■

Probamos ahora que la función M es finitamente aditiva, en el siguiente sentido:

- *Si un intervalo $I \in \mathcal{J}$ se subdivide en la forma $I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j$ donde $n \in \mathbb{N}$ y también $I_j \in \mathcal{J}$ para todo $j \in \Delta_n$, entonces se tiene que $M(I) = \sum_{j=1}^{n} M(I_j)$.*

Empezamos trabajando en el caso $N = 1$ y, para que no haya confusión con el caso general, denotamos por $l(H)$, en vez de $M(H)$, a la medida elemental de cada intervalo acotado $H \subset \mathbb{R}$. Se tiene por tanto $l(H) = \sup H - \inf H$ cuando $H \neq \emptyset$, y $l(\emptyset) = 0$.

Pues bien, consideremos dos semirrectas S y T, tales que $\mathbb{R} = S \biguplus T$. Dado un intervalo acotado $H \subset \mathbb{R}$, vamos a comprobar que

$$l(H) = l(H \cap S) + l(H \cap T) \tag{19}$$

Salvo permutación de S y T, podemos suponer que S está mayorada y T minorada, con lo que escribimos $c = \sup S = \inf T$. Suponemos también que $H \cap S \neq \emptyset$ y $H \cap T \neq \emptyset$, pues en otro caso no hay nada que demostrar. Entonces, tomando $a = \inf H$ y $b = \sup H$, tenemos claramente $a \leqslant c \leqslant b$, de donde obtenemos que

$$\inf (H \cap S) = a, \qquad \sup (H \cap S) = c = \inf(H \cap T), \qquad \sup (H \cap T) = b$$

De estas igualdades se deduce (19), ya que

$$l(H \cap S) + l(H \cap T) = (c - a) + (b - c) = b - a = l(H)$$

Trabajando ya en $\mathbb{R}^N$, razonamos por inducción sobre n, teniendo en cuenta que el resultado es obvio para $n = 1$, así que lo probamos para $n > 1$, suponiendo que es cierto para $n - 1$.

Sea $I \in \mathcal{J}$ descompuesto como $I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j$ con $I_j \in \mathcal{J}$ para todo $j \in \Delta_n$. Al ser $I_1 \cap I_n = \emptyset$, existe $p \in \Delta_N$ tal que $\pi_p(I_1) \cap \pi_p(I_n) = \emptyset$. Entonces $\pi_p(I_1)$ y $\pi_p(I_n)$ son intervalos acotados disjuntos, luego existen semirrectas S y T, tales que $\pi_p(I_1) \subset S$, $\pi_p(I_n) \subset T$ y $\mathbb{R} = S \biguplus T$. Consideramos entonces los conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^N$ definidos por

$$A = \{ x \in I : \pi_p(x) \in S \} \qquad \text{y} \qquad B = \{ x \in I : \pi_p(x) \in T \}$$

Se tiene claramente que A y B son intervalos acotados, verificando que $\pi_k(A) = \pi_k(B) = \pi_k(I)$ para todo $k \in \Delta_N \setminus \{p\}$, mientras que $\pi_p(A) = \pi_p(I) \cap S$ y $\pi_p(B) = \pi_p(I) \cap T$. Usando (19), obtenemos que

$$l\big(\pi_p(I)\big) = l\big(\pi_p(A)\big) + l\big(\pi_p(B)\big)$$

mientras que $l\big(\pi_k(I)\big) = l\big(\pi_k(A)\big) = l\big(\pi_k(B)\big)$ para todo $k \in \Delta' = \Delta_N \setminus \{p\}$.

Multiplicando miembro a miembro las N igualdades recién comentadas, obtenemos que

$$\begin{aligned} M(I) &= l\big(\pi_p(I)\big)\prod_{k\in\Delta'} l\big(\pi_k(I)\big) = \big(l\big(\pi_p(A)\big)+l\big(\pi_p(B)\big)\prod_{k\in\Delta'} l\big(\pi_k(I)\big) \\ &= l\big(\pi_p(A)\big)\prod_{k\in\Delta'} l\big(\pi_k(A)\big)+l\big(\pi_p(B)\big)\prod_{k\in\Delta'} l\big(\pi_k(B) = M(A)+M(B) \end{aligned}$$

Para cada $j\in\Delta_n$, lo obtenido para el intervalo acotado I, también es válido para I_j, luego se tiene $M(I_j) = M(A_j)+M(B_j)$, donde $A_j = \{x\in I_j : \pi_p(x)\in S\}$ y $B_j = \{x\in I_j : \pi_p(x)\in T\}$.

Por otra parte, de $I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j$ se deduce claramente que $A = \biguplus_{j=1}^{n} A_j$ y $B = \biguplus_{j=1}^{n} B_j$, pero es claro que $A_n = \emptyset$, porque $\pi_p(I_n)\subset T$, mientras que $B_1 = \emptyset$, ya que $\pi_p(I_1)\subset S$. Por tanto se tiene que $A = \biguplus_{j=1}^{n-1} A_j$ y $B = \biguplus_{j=2}^{n} B_j$.

Tenemos así sendas expresiones de los intervalos acotados A y B como unión de $n-1$ intervalos dos a dos disjuntos, luego podemos usar la hipótesis de inducción para obtener que

$$M(A) = \sum_{k=1}^{n-1} M(A_j) = \sum_{k=1}^{n} M(A_j) \qquad \text{y} \qquad M(B) = \sum_{k=2}^{n} M(B_j) = \sum_{k=1}^{n} M(B_j)$$

donde hemos usado que $M(A_n) = M(B_1) = 0$. Deducimos claramente la igualdad buscada:

$$M(I) = M(A)+M(B) = \sum_{j=1}^{n} M(A_j)+\sum_{j=1}^{n} M(B_j) = \sum_{j=1}^{n} M(I_j) \qquad \blacksquare$$

El siguiente paso consiste en extender la función M, para tenerla definida en la familia $\mathcal{E}$ de las figuras elementales, de forma que siga siendo finitamente aditiva.

- *Existe una función $\widetilde{M} : \mathcal{E}\to\mathbb{R}_0^+$, verificando que $\widetilde{M}(I) = M(I)$ para todo $I\in\mathcal{J}$, que es finitamente aditiva, es decir,*

$$n\in\mathbb{N},\quad A_k\in\mathcal{E}\ \ \forall k\in\Delta_n,\quad A = \biguplus_{k=1}^{n} A_k \quad\Longrightarrow\quad \widetilde{M}(A) = \sum_{k=1}^{n}\widetilde{M}(A_k) \tag{20}$$

A poco que se piense, para $A\in\mathcal{E}$ debemos definir

$$\widetilde{M}(A) = \sum_{k=1}^{n} M(I_k) \quad \text{donde} \quad n\in\mathbb{N},\ I_k\in\mathcal{J}\ \ \forall k\in\Delta_n,\ \ A = \biguplus_{k=1}^{n} I_j \tag{21}$$

pero hay que comprobar que la suma anterior no depende de la forma de expresar A como unión finita de intervalos acotados, dos a dos disjuntos.

Sea pues $A = \biguplus_{j=1}^{m} H_j$ otra descomposición de ese tipo. Para cada $k\in\Delta_n$ se tiene entonces que $I_k = \biguplus_{j=1}^{m}(I_k\cap H_j)$, de donde $M(I_k) = \sum_{j=1}^{m} M(I_k\cap H_j)$, ya que M es finitamente aditiva.

Análogamente, para cada $j \in \Delta_m$ se tiene $H_j = \biguplus_{k=1}^{n} (I_k \cap H_j)$, luego $M(H_j) = \sum_{j=1}^{m} M(I_k \cap H_j)$. Usando las dos igualdades recién obtenidas, concluimos que

$$\sum_{k=1}^{n} M(I_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M(I_k \cap H_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M(I_k \cap H_j) = \sum_{j=1}^{m} M(H_j)$$

Esto prueba que la definición (21) es correcta, y es evidente que $\widetilde{M}$ extiende a M.

Para probar (20), razonamos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es obvio, así que lo probamos para $n > 2$, suponiendo que se verifica para $n-1$. Para ello tenemos $A = B \uplus A_n$ donde $B = \biguplus_{k=1}^{n-1} A_k$, y la hipótesis de inducción nos dice que $\widetilde{M}(B) = \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{M}(A_k)$. Por otra parte, podemos escribir

$$B = \biguplus_{j=1}^{p} I_j \quad \text{y} \quad A_n = \biguplus_{j=p+1}^{p+q} \qquad \text{donde} \qquad p,q \in \mathbb{N},\ I_j \in \mathfrak{J}\ \ \forall j \in \Delta_{p+q}$$

Se tiene entonces $A = \biguplus_{j=1}^{p+q} I_j$, y la definición de $\widetilde{M}$ nos dice que

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(A) &= \sum_{j=1}^{p+q} M(I_j) = \sum_{j=1}^{p} M(I_j) + \sum_{j=p+1}^{p+q} M(I_j) \\ &= \widetilde{M}(B) + \widetilde{M}(A_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{M}(A_k) + \widetilde{M}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}(A_k)\end{aligned}$$

que es la igualdad buscada. ■

En realidad, la función $\widetilde{M}$ del resultado anterior sólo nos interesa para comprobar con más comodidad la propiedad clave de M, que es la siguiente:

- *Dado $I \in \mathfrak{J}$, supongamos que $I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ donde $n \in \mathbb{N}$ e $I_k \in \mathfrak{J}$ para todo $k \in \Delta_n$. Se tiene entonces que $M(I) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M(I_k)$.*

Para poder usar el resultado anterior, expresamos I como unión finita de figuras elementales dos a dos disjuntas. Concretamente definimos

$$A_1 = I \cap I_1 \qquad \text{y} \qquad A_k = I \bigcap \left(I_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} I_j \right) \quad \forall k \in \Delta_n \setminus \{1\}$$

De esta forma tenemos $I = \biguplus_{k=1}^{n} A_k$, donde $A_k \in \mathcal{E}$ y $A_k \subset I_k$ para todo $k \in \Delta_n$. Usando dos veces el resultado anterior, obtenemos la desigualdad buscada:

$$M(I) = \widetilde{M}(I) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\widetilde{M}(A_k) + \widetilde{M}(I_k \setminus A_k) \right) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}(I_k) = \sum_{k=1}^{n} M(I_k) \qquad ■$$

A la hora de calcular la medida exterior, necesitamos usar recubrimientos numerables, pero el resultado anterior sólo se refiere a un recubrimiento finito. Ello sugiere poner en juego la noción de compacidad, para lo cual usaremos la siguiente observación, que permite aproximar intervalos acotados por intervalos compactos o abiertos, según convenga.

- *Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, con $K \subset I \subset J$, tales que K es compacto con $M(I) < M(K) + \varepsilon$, mientras que J es abierto con $M(J) < M(I) + \varepsilon$.*

Suponemos que $I \neq \emptyset$, pues en otro caso basta tomar $K = J = \emptyset$, y para cada $k \in \Delta_N$, escribimos $a_k = \text{ínf}\, \pi_k(I)$ y $b_k = \sup \pi_k(I)$. Con vistas a encontrar J, para $t \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$U(t) = \prod_{k=1}^{N}]\, a_k - t\,,\, b_k + t\,[$$

y está claro que $U(t)$ es un intervalo abierto y acotado con $I \subset U(t)$. Además, se tiene

$$\lim_{t \to 0} M\big(U(t)\big) = \lim_{t \to 0} \prod_{k=1}^{N} \big(b_k - a_k + 2t\big) = \prod_{k=1}^{N} \big(b_k - a_k\big) = M(I)$$

Por tanto, existe un $\delta > 0$ tal que, para $0 < t < \delta$, se tiene que $M\big(U(t)\big) < M(I) + \varepsilon$. Basta entonces tomar, por ejemplo, $J = U(\delta/2)$.

Para K, el razonamiento es similar. Si $a_k = b_k$, para algún $k \in \Delta_N$, se tiene que $M(I) = 0$, y podemos tomar $K = \emptyset$. En otro caso tomamos $\rho = \text{mín}\,\big\{\, (b_k - a_k)/2 : k \in \Delta_N \,\big\} > 0$ y, para cada $t \in \mathbb{R}^+$ con $t < \rho$, definimos

$$V(t) = \prod_{k=1}^{N} [\, a_k + t\,,\, b_k - t\,]$$

Está claro que $V(t)$ es un intervalo compacto, con $V(t) \subset I$, y de nuevo tenemos

$$\lim_{t \to 0} M\big(V(t)\big) = \lim_{t \to 0} \prod_{k=1}^{N} \big(b_k - a_k - 2t\big) = \prod_{k=1}^{N} \big(b_k - a_k\big) = M(I)$$

Si $\delta \in]\,0, \rho\,[$ verifica que $M\big(V(t)\big) > M(I) - \varepsilon$ para $0 < t < \delta$, tomamos $K = V(\delta/2)$. ■

Del resultado anterior, vamos a deducir una propiedad de la medida exterior de Lebesgue, que tendrá mucha utilidad: para calcular dicha medida exterior, basta usar recubrimientos por intervalos abiertos. Denotamos por A° al interior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$.

- *Para todo conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene:*

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n) \;:\; J_n^\circ = J_n \in \mathcal{J} \;\; \forall n \in \mathbb{N},\;\; E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\}$$

Llamando $\alpha(E)$ al segundo miembro de la igualdad anterior, se tiene $\lambda^*(E) \leqslant \alpha(E)$, ya que el ínfimo de un conjunto es menor o igual que el de cualquier subconjunto no vacío. Para la otra desigualdad, suponemos que $\lambda^*(E) < \infty$, pues en otro caso tal desigualdad es obvia.

Fijado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos acotados, verificando que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) < \lambda^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el resultado previo nos da un $J_n \in \mathcal{J}$, con $I_n \subset J_n = J_n^\circ$, verificando también que $M(J_n) < M(I_n) + \varepsilon/2^{n+1}$. Entonces $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, y por definición de $\alpha(E)$, tenemos

$$\alpha(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(M(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda^*(E) + \varepsilon$$

En vista de la arbitrariedad de ε, deducimos que $\alpha(E) \leqslant \lambda^*(E)$, como se quería. ■

Podemos ya probar el resultado que nos habíamos propuesto como objetivo:

- *La medida de Lebesgue extiende a la medida elemental de los intervalos acotados, es decir:* $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$ *y* $\lambda(I) = M(I)$ *para todo* $I \in \mathcal{J}$.

Empezamos probando que ciertos semiespacios son conjuntos medibles. Concretamente, fijado $k \in \Delta_N$, consideremos el conjunto $E = \pi_k^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R}^N : x(k) \in S\}$, donde S es una semirrecta en $\mathbb{R}$, con lo que $\mathbb{R} \setminus S$ es otra. Para probar que E es medible, fijamos $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ y una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos acotados verificando que $W \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos que $I_n \cap E = \{x \in I_n : x(k) \in S\}$ e $I_n \setminus E = \{x \in I_n : x(k) \in \mathbb{R}^N \setminus S\}$, son intervalos acotados disjuntos, cuya unión es I_n, luego $M(I_n) = M(I_n \cap E) + M(I_n \setminus E)$.

Además, la sucesiones $\{I_n \cap E\}$ y $\{I_n \setminus E\}$ recubren a $W \cap E$ y $W \setminus E$ respectivamente, luego por definición de λ^* se tiene

$$\lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n \setminus E) = \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n)$$

La arbitrariedad de la sucesión $\{I_n\}$ nos permite deducir que $\lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \leqslant \lambda^*(E)$, y en vista de (9), esto implica que $E \in \mathcal{M}$, como se quería.

Dado $I \in \mathcal{J}$, para cada $k \in \Delta_N$, podemos escribir $\pi_k(I) = S_k \cap T_k$, donde S_k y T_k son semirrectas. Por lo ya demostrado, los conjuntos $E_k = \pi_k^{-1}(S_k)$ y $F_k = \pi_k^{-1}(T_k)$ son medibles. Pero es claro que

$$I = \{x \in \mathbb{R}^N : x(k) \in \pi_k(I) \ \ \forall k \in \Delta_N\} = \bigcap_{k=1}^{N} \left(E_k \cap F_k\right)$$

luego I es medible, por ser intersección finita de conjuntos medibles.

La desigualdad $\lambda^*(I) \leqslant M(I)$ es obvia, pues tomando $I_1 = I$ con $I_{n+1} = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene una sucesión de intervalos acotados que recubren a I. Para probar la otra desigualdad, fijamos $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{J_n\}$ de intervalos abiertos acotados, tal que $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Por un resultado previo, existe un intervalo compacto $K \subset I$ tal que $M(I) < M(K) + \varepsilon$. Vemos entonces que $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento de K por abiertos, del que se podrá extraer un subrecubrimiento finito. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k$.

Usando la propiedad clave de M, probada anteriormente, obtenemos que

$$M(K) \leqslant \sum_{k=1}^{m} M(J_k) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n)$$

Como, según hemos visto, $\lambda^*(I)$ puede calcularse usando sólo recubrimientos por intervalos abiertos, tenemos $M(K) \leqslant \lambda^*(I)$, de donde $M(I) \leqslant \lambda^*(I) + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, deducimos que $M(I) \leqslant \lambda^*(I)$, concluyendo así la demostración. ■

Este resultado contribuye a que podamos ver la medida de Lebesgue como la forma correcta de formalizar, y de generalizar, algunas nociones intuitivas. Concretamente, para un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$, podemos decir que $\lambda(E)$ es la **longitud** de E, generalizando así la noción de longitud de un segmento, pues cuando $E = I$ es un intervalo acotado, $\lambda(I) = M(I)$ es la longitud de un segmento. Del mismo modo, para un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^2$, podemos decir que $\lambda(E)$ es el **área** de E, pues cuando $E = I$ es un intervalo acotado, $\lambda(I) = M(I)$ es el área de un rectángulo. Análogamente, para un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^3$, podemos decir que $\lambda(E)$ es el **volumen** de E.

Por otra parte, el resultado anterior hace casi evidentes afirmaciones que antes no sabíamos probar. Por ejemplo, $\lambda(\mathbb{R}^N) \geqslant \lambda\big([0,n]^N\big) = n^N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\lambda(\mathbb{R}^N) = \infty$. Para un conjunto numerable $E \subset \mathbb{R}^N$, sabíamos que $E \in \mathcal{M}$, luego $\mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$, y que $\lambda(E) = 0$. Como $\lambda(\mathbb{R}^N \setminus E) + \lambda(E) = \lambda(\mathbb{R}^N) = \infty$, vemos ahora que $\lambda(\mathbb{R}^N \setminus E) = \infty$. Por ejemplo, en el caso $N = 1$, sabíamos que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, pero ahora también sabemos que $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \infty$.

Finalmente, ahora podemos completar una observación anterior, referente a la continuidad decreciente de la medida de Lebesgue. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar, por ejemplo, el semiespacio $S_n = \big\{x \in \mathbb{R}^N : x(1) \geqslant n\big\}$. Para todo $\rho > 0$ se tiene que $[n, n+\rho]^N \subset S_n$, de donde deducimos que $\lambda(S_n) \geqslant \rho^N$. Por tanto $\lambda(S_n) = \infty$, lo cual es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $\{S_n\} \searrow \emptyset$, pero $\{\lambda(S_n)\}$ no converge a $\lambda(\emptyset) = 0$.