solucionesexamenextraordinario.pdf

Alexmaths

Topología I

2º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Topología I. Convocatoria extraordinaria

Grado en matemáticas, doble grado en física y matemáticas y doble grado en ingeniería informática y matemáticas

7 de febrero de 2020

1.- (4 puntos). Sea $X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ donde $\alpha \notin \mathbb{R}$. En X se considera la topología T de la que conocemos una base $\mathcal{B}$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R},\ a<b\} \cup \{(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon) \,/\, \varepsilon>0\}.$$

a) Decidir si (X,T) es un espacio de Hausdorff.

b) Probar que $T_{|X-\{\alpha\}} = T_u$ y que $(X-\{0\}, T_{X-\{0\}})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, T_u)$.

c) Estudiar la conexión en (X,T) del conjunto $A = (a,b)\cup\{\alpha\}$.

d) ¿Es el conjunto $C = [-1,1]$ cerrado en (X,T)? ¿Es C compacto en (X,T)?

2.- (2 puntos). Sean (X,T) e (Y,T') espacios topológicos. Probar que el espacio producto $(X\times Y, T\times T')$ es conexo si y sólo si (X,T) e (Y,T') son conexos.

3.- (4 puntos). Resolver de forma razonada los siguientes apartados:

a) Se considera $f : ([0,1], T_{u|[0,1]}) \to (\{0,1\}, T)$, donde $T = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ y f se define como $f = 1$ en $[0,1/2)$ y $f = 0$ en $[1/2,1]$. Probar que f es una identificación pero no es abierta ni cerrada.

b) Sea (X,T) un espacio compacto y $A \subseteq X$ infinito. Demostrar que $A' \neq \emptyset$, donde A' es el conjunto de puntos de acumulación de A en (X,T).

Duración del examen: 3 horas

Ejercicio 1

$X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ con $\alpha \notin \mathbb{R}$. $T =$ top. en X tal que:

$\mathcal{B} = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{R},\ a<b\} \cup \{(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon) / \varepsilon>0\}$

es una base de (X,T).

a) ¿(X,T) es Hausdorff? Lo será si se cumple:

$\forall x,y \in X$ con $x \neq y$ $\exists\, U,V \in T$ con $x\in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

No es difícil probar que si $x,y \in X - \{0,\alpha\}$ y $x \neq y$ entonces $\exists\, B,B' \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B$, $y \in B'$, y $B \cap B' = \emptyset$.

Veamos sin embargo que $x=0$ e $y=\alpha$ no se pueden separar por abiertos disjuntos. Así (X,T) __NO es de Hausdorff__. Vamos a probar

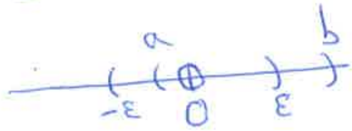
Sean $U,V \in T$ tales que $0 \in U$ y $\alpha \in V$.

que $U \cap V \neq \emptyset$.

$0 \in U$ y $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B} / 0 \in B \subseteq U$

$\alpha \in V$ y $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \exists\, B' \in \mathcal{B} / \alpha \in B' \subseteq V$.

Por la descripción de $\mathcal{B}$ tenemos que:



$B = (a,b)$ con $a<0<b$

$B' = (-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)$ para cierto $\varepsilon>0$.

Como $((a,b)\cap(-\varepsilon,\varepsilon)) - \{0\} \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \neq B \cap B' \subseteq U \cap V$.

---

b) ¿$T_{|X-\{\alpha\}} = T_u$? Como $X - \{\alpha\} = \mathbb{R}$, nos estamos preguntando si $T_{|\mathbb{R}} = T_u$.

Como $\mathcal{B}$ es, por definición, una base de (X,T), entonces:

$\mathcal{B}_{|\mathbb{R}} = \{B \cap \mathbb{R} / B \in \mathcal{B}\}$ es una base de $(\mathbb{R}, T_{|\mathbb{R}})$.

Por la descripción de $\mathcal{B}$ tenemos que:

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{ (a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a<b \} \cup \{ (-\varepsilon,0) \cup (0,\varepsilon) / \varepsilon > 0 \}.$

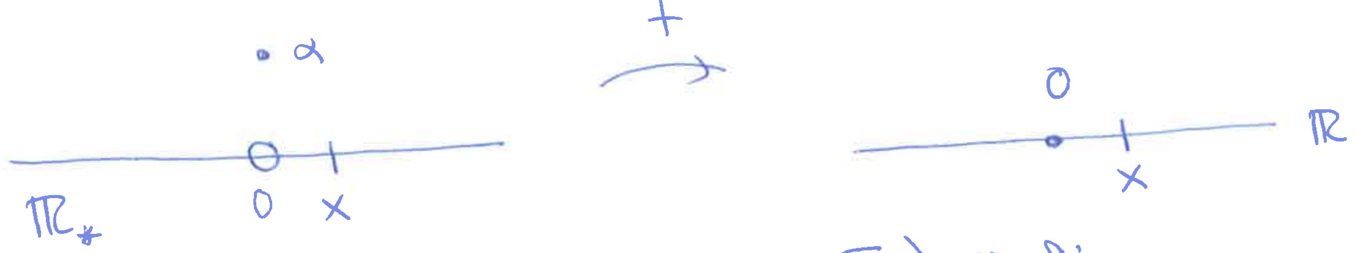
Como $\mathcal{B}_u \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow T_u \leq T_{\mathbb{R}}$.

Por otro lado, es claro que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq T_u$, de donde deducimos que $T_{\mathbb{R}} \leq T_u$.

• ¿$(\mathbb{X}-\{0\}, T_{|\mathbb{X}-\{0\}}) \cong (\mathbb{R}, T_u)$?

$\mathbb{X}_* = \mathbb{X} - \{0\} = (\mathbb{R}-\{0\}) \cup \{\alpha\} = \mathbb{R}_* \cup \{\alpha\}$.

Vamos a encontrar un homeo. bastante simple.



Definimos $f: (\mathbb{X}_*, T_{|\mathbb{X}_*}) \to (\mathbb{R}, T_u)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}_*, \text{ es decir, si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = \alpha. \end{cases}$$

Es muy sencillo comprobar que f es biyectiva, es decir, (ejercicio).

$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists_1 x \in \mathbb{X}_*$ tal que $f(x) = y$

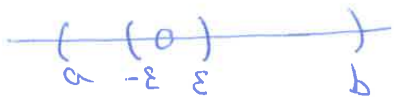
¿Es f continua? Tomo $\mathcal{B}_u = \{ (a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a<b \}$ base usual de $(\mathbb{R}, T_u)$. Es suficiente con demostrar que $f^{-1}((a,b)) \in T_{|\mathbb{X}_*}$ $\forall (a,b) \in \mathcal{B}_u$. Por la definición de f llegamos a:

$$f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} (a,b) \in \mathcal{B} \subseteq T_{\mathbb{X}_*} & \text{si } 0 \notin (a,b) \\ (a,0) \cup \{\alpha\} \cup (0,b) & \text{si } 0 \in (a,b). \end{cases}$$

¿$(a,0) \cup \{\alpha\} \cup (0,b) \in T$? Veamos que todos sus puntos son interiores en $(\mathbb{X}_*, T_{|\mathbb{X}_*})$. Basta comprobarlo con $x = \alpha$

Como $0\in(a,b)$ y $(a,b)\in T_u$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 \,/\, (-\varepsilon,\varepsilon)\subseteq(a,b)$



Entonces $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\in T$

y $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\subseteq X_*$.

Concluimos que $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\in T_{|X_*}$, contiene a α,

y $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\subseteq(a,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,b)$.

¿Es f abierta? Basta comprobar que $f(B)\in T_u$ $\forall B\in\mathcal{B}_{|X_*}$

$\mathcal{B}_{|X_*}=\{B\cap X_* \,/\, B\in\mathcal{B}\}$.

Por un lado tenemos:

$f((a,b))=(a,b)$ $\forall (a,b)\in\mathcal{B}_{|X_*}=\{(a,b)\,/\,a,b\in\mathbb{R}, a<b, 0\notin(a,b)\}$
$\cup\{(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\,/\,\varepsilon>0\}$

y por otro:

$f((-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon))=f((-\varepsilon,0))\cup\{f(\alpha)\}\cup f((0,\varepsilon))$
$=(-\varepsilon,0)\cup\{0\}\cup(0,\varepsilon)=(-\varepsilon,\varepsilon)\in T_u$.

---

c) Estudiar la conexión en (X,T) de $A=(a,b)\cup\{\alpha\}$.

Vamos a distinguir 2 casos:

c1) $0\in[a,b]$. ← cierre de (a,b) en (X,T)

Veamos que $\alpha\in\overline{(a,b)}$. Por definición de cierre, basta ver que $B\cap(a,b)\neq\emptyset$ $\forall B\in\mathcal{B}$ con $\alpha\in B$.

Dado $B\in\mathcal{B}$ con $\alpha\in B\Rightarrow B=(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)$ con $\varepsilon>0$.

y claramente $B\cap(a,b)\neq\emptyset$ porque $0\in[a,b]$.

Por otro lado nótese que (a,b) es conexo en (X,T).

En efecto; como $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ y $T_{|\mathbb{R}}=T_u$, entonces:

(a,b) es conexo en $(X,T)\iff(a,b)$ es conexo en $(\mathbb{R},T_u)$,

lo que se cumple porque (a,b) es un intervalo.

Finalmente, como $\alpha \in \overline{(a,b)}$ tenemos

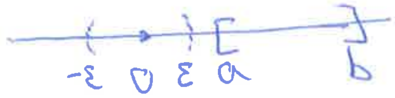
$$\underbrace{(a,b)}_{\text{conexo}} \subseteq (a,b)\cup\{\alpha\} = A \subseteq \overline{(a,b)},$$

y por un resultado de clase se sigue que A es conexo.

c2) $0 \notin [a,b]$.

En este caso A no es conexo en $(\mathbb{X},T)$: encontraremos abiertos inducidos $U_A, V_A \in T_{|A}$ tales que $A = U_A \cup V_A$, $U_A \cap V_A = \emptyset$ y $U_A, V_A \neq \emptyset$.

Como $0 \notin [a,b]$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que se cumple $(-\varepsilon,\varepsilon)\cap[a,b] = \emptyset$



y se verifica que $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon) \in \mathcal{B} \subseteq T$. Así

$$((-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon))\cap A = \{\alpha\}$$

Esto prueba que $\{\alpha\}\in T_{|A}$. Como $(a,b)\in\mathcal{B}\subseteq T$ y $(a,b)\subseteq A \Rightarrow (a,b)\in T_{|A}$. Así, la separación no trivial buscada para A es $U_A = (a,b)$ y $V_A = \{\alpha\}$.

———o———

d) Sea $G = [-1,1]$. ¿$G \in C_T$? Nótese que $G^c = \mathbb{X} - G = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)\cup\{\alpha\}$. G^c no es abierto, puesto que α no es un punto interior: $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon) \not\subseteq G^c$ para cada $\varepsilon > 0$ pequeño.

¿G compacto en $(\mathbb{X},T)$? Como $G \subseteq \mathbb{R}$ y $T_{|\mathbb{R}} = T_u$, G compacto en $(\mathbb{X},T) \iff$ lo es en $(\mathbb{R},T_u)$, entonces G es compacto por el teorema de Heine-Borel

Y esto último se cumple ya que $G \in C_u$ y G es acotado.

EJERCICIO 2

Resultado de teoría demostrado en los apuntes de clase.

EJERCICIO 3

a) Se define $f : ([0,1], T_u|_{[0,1]}) \to (\{0,1\}, T)$
donde $T = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ y f viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

• Veamos que f es una identificación.
¿f sobreyectiva? Evidente.
¿f continua? Veamos que $f^{-1}(U') \in T_u|_{[0,1]}$ $\forall U' \in T$.
Esto es fácil de comprobar ya que en T hay 3 abiertos.
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_u|_{[0,1]}$, $f^{-1}(\{0,1\}) = [0,1] \in T_u|_{[0,1]}$
$f^{-1}(\{1\}) = [0, 1/2) = (-\infty, 1/2) \cap [0,1] \in T_u|_{[0,1]}$.
¿$T_f = T$? Como f es continua sabemos que $T \subseteq T_f$.
¿$T_f \subseteq T$? Recordemos que $T_f = \{U' \subseteq \{0,1\} / f^{-1}(U') \in T_u|_{[0,1]}\}$
$P(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.
Como $f^{-1}(\{0\}) = [1/2, 1] \notin T_u|_{[0,1]} \Rightarrow T_f \subseteq T$.

• Veamos que f no es abierta ni cerrada.
$U = (1/2, 1) = (1/2, 1) \cap [0,1] \in T_u|_{[0,1]}$ y $f(U) = \{0\} \notin T$
Así, f no es abierta.
$F = [0, 1/4] = [0, 1/4] \cap [0,1] \in C_u|_{[0,1]}$ y $f(F) = \{1\} \notin C_T$
porque $\{1\}^c = \{0\} \notin T$.

$C_T = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$

b) $(\mathbb{X},T)$ compacto $\overset{¿?}{\Longrightarrow}$ $A'\neq\emptyset$.
$A\subseteq\mathbb{X}$ infinito

Recuerda: $x\in A' \Leftrightarrow \forall\, \mathcal{U}\in T,\ x\in\mathcal{U}$ se cumple $(\mathcal{U}-\{x\})\cap A\neq\emptyset$.

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos $A'=\emptyset$. Entonces, $\forall x\in\mathbb{X}$ se cumple que $x\notin A'$. Así, $\forall x\in\mathbb{X}$ $\exists\, \mathcal{U}_x\in T$ con $x\in\mathcal{U}_x$ tal que $(\mathcal{U}_x-\{x\})\cap A=\emptyset$. Claramente $\{\mathcal{U}_x\}_{x\in\mathbb{X}}\subseteq T$ y $\mathbb{X}\subseteq\bigcup_{x\in\mathbb{X}}\mathcal{U}_x$. Así, la compacidad de $(\mathbb{X},T)$ implica la existencia de $J\subseteq\mathbb{X}$ finito tal que $\mathbb{X}\subseteq\bigcup_{x\in J}\mathcal{U}_x$. Y como $A\subseteq\mathbb{X}$, entonces $A\subseteq\bigcup_{x\in J}\mathcal{U}_x$. Finalmente, el hecho de que $(\mathcal{U}_x-\{x\})\cap A=\emptyset$ $\forall x\in\mathbb{X}$ implica que $A\subseteq\bigcup_{x\in J}\{x\}$, lo que contradice que A es infinito.