Tema 5

Funciones medibles

Iniciamos en este tema el camino hacia la teoría de la integración, tal y como la desarrolló Lebesgue a principios del siglo XX, mejorando de forma decisiva las nociones de integral que se habían usado durante el siglo anterior. Por tanto, nuestro objetivo es construir la que se conoce como *integral de Lebesgue*, para funciones reales de una o varias variables reales.

Empezamos definiendo las funciones a las que en principio va dirigido el proceso de la integración, que son las *funciones medibles*. Partimos de una noción muy general de función medible, con valores en un espacio topológico, para descender enseguida a los casos que más nos interesan, *las funciones reales medibles*, y más concretamente, las funciones medibles con valores en $[0, \infty]$, que se conocen como *funciones medibles positivas*. Aquí es donde aparece la idea clave que distingue a la integral de Lebesgue de cualquiera de las nociones de integral estudiadas previamente. Se trata de una idea muy elemental, consistente en expresar cualquier función con valores positivos como límite puntual de una sucesión creciente de funciones con imagen finita. El resultado se conoce como *teorema de aproximación de Lebesgue* y abre el camino para definir la integral de Lebesgue.

5.1. Noción general de función medible

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, para estudiar la integración de funciones definidas en Ω y con valores en $\mathbb{R}$. Tal estudio podrá hacerse para un tipo de funciones que conviene definir en un contexto más general.

Dado un espacio topológico Y, diremos que $f : \Omega \to Y$ es una **función medible**, cuando la imagen inversa por f de todo subconjunto abierto de Y, sea un conjunto medible, es decir:

$$G = G^\circ \subset Y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$$

Por ejemplo, toda función continua $h : \Omega \to Y$ es medible, pues dado un abierto $G \subset Y$, se tiene que $h^{-1}(G)$ es abierto en Ω, es decir, $h^{-1}(G) = A \cap \Omega$ donde A es un abierto de $\mathbb{R}^N$, luego $h^{-1}(G)$ es medible, por serlo A y Ω.

Debe quedar claro desde el principio que la medibilidad es una propiedad muy débil. Para convencerse basta recordar el comentario que hicimos en su momento sobre los conjuntos no medibles. Sin usar el axioma de elección, no es posible probar la existencia de conjuntos no medibles, luego cualquiera que sea el espacio topológico Y, tampoco se puede probar que exista una función de Ω en Y que no sea medible. En la práctica, cualquier función que tenga una definición explícita, que no involucre de alguna forma el axioma de elección, va a ser medible, aunque en cada caso concreto debamos comprobarlo.

En el contexto general, antes de descender a los casos que realmente nos interesan, conviene hacer la siguiente observación, que será muy útil.

- *Sean Y, Z espacios topológicos. Si $f : \Omega \to Y$ es una función medible y $g : Y \to Z$ es continua, entonces $g \circ f$ es medible.*

Para cualquier conjunto $H \subset Z$, observamos que $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}\big(g^{-1}(H)\big)$. Si H es abierto en Z, la continuidad de g nos dice que $g^{-1}(H)$ es abierto en Y. Como f es medible, concluimos que $f^{-1}\big(g^{-1}(H)\big) \in \mathcal{M}$, y esto prueba que $g \circ f$ es medible. ■

También será útil la siguiente observación sobre funciones medibles con valores en $\mathbb{R}^2$. Ni que decir tiene, en $\mathbb{R}^2$ consideramos siempre la topología usual, igual que hacemos en $\mathbb{R}$.

- *Dadas dos funciones $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, consideremos la función $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\Phi(x) = \big(f(x), g(x)\big) \qquad \forall x \in \Omega$$

  Entonces Φ es medible si, y sólo si, lo son f y g.

Es claro que $f = \pi_1 \circ \Phi$ y $g = \pi_2 \circ \Phi$, donde π_1, y π_2 son las proyecciones coordenadas. Si Φ es medible, el resultado anterior nos dice que f y g también lo son, ya que π_1 y π_2 son continuas.

Recíprocamente, supongamos que f y g son medibles, para probar que Φ también lo es. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo semiabierto $I = [a, b[$ es una intersección numerable de intervalos abiertos, luego $f^{-1}(I), g^{-1}(I) \in \mathcal{M}$, por ser intersecciones numerables de conjuntos medibles. Para un intervalo diádico $J \subset \mathbb{R}^2$ se tiene $J = I_1 \times I_2$ donde I_1, I_2 son intervalos semiabiertos del tipo anterior, de donde deducimos que $\Phi^{-1}(J) = f^{-1}(I_1) \bigcap g^{-1}(I_2) \in \mathcal{M}$. Finalmente, todo abierto $G \subset \mathbb{R}^2$ se expresa como unión numerable de intervalos diádicos, de donde deducimos que $\Phi^{-1}(G)$ es medible, como se quería. ■

Con análoga demostración se probaría que, para todo $n \in \mathbb{N}$, una función de Ω en $\mathbb{R}^n$ es medible si, y sólo si, lo son todas sus componentes, pero sólo usaremos el caso $n = 2$.

5.2. Funciones reales medibles

Denotaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$, a las que llamaremos **funciones reales medibles**. Vamos a comprobar que $\mathcal{L}(\Omega)$ es estable por una amplia gama de operaciones.

Empecemos recordando que el conjunto $\mathcal{F}(\Omega)$, de todas las funciones de Ω en $\mathbb{R}$, es un anillo conmutativo, y también un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones definidas de la manera natural. Concretamente, para cualesquiera $f,g \in \mathcal{F}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \Omega$, se tiene

$$\big(f+g\big)(x) = f(x)+g(x)\,, \quad \big(f\,g\big)(x) = f(x)\,g(x)\,, \quad \big(\alpha f\big)(x) = \alpha f(x)$$

Nótese que αf coincide con el producto de f por la función constantemente igual a α, con lo que de alguna forma, la estructura de espacio vectorial queda englobada en la de anillo. Pues bien, vamos a comprobar que $\mathcal{L}(\Omega)$ es un subanillo, y un subespacio vectorial, de $\mathcal{F}(\Omega)$.

- *La suma y el producto de funciones reales medibles también son funciones medibles.*

Si $f,g \in \mathcal{L}(\Omega)$, sabemos que la función $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida por $\Phi(x) = \big(f(x)\,,\,g(x)\big)$ para todo $x \in \Omega$, es medible. Además, las funciones $\sigma,\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas, para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, por $\sigma(u,v) = u+v$ y $\pi(u,v) = uv$, son continuas. Deducimos que $\sigma \circ \Phi$ y $\pi \circ \Phi$ son funciones medibles, pero es claro que $\sigma \circ \Phi = f+g$ y $\pi \circ \Phi = f\,g$. ■

Veamos ahora la estabilidad por operaciones que tienen que ver con la relación de orden natural entre funciones. Concretamente, para $f,g \in \mathcal{F}(\Omega)$ se define

$$f \leqslant g \quad \iff \quad f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in \Omega$$

y es obvio que así se obtiene una relación de orden en $\mathcal{F}(\Omega)$. A cada función $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ podemos asociar la función $|f|$, **valor absoluto** de f, dada por

$$|f|(x) = |f(x)| = \text{máx}\,\big\{\,f(x)\,,\,-f(x)\,\big\} \qquad \forall x \in \Omega$$

y es claro que, en el conjunto ordenado $\mathcal{F}(\Omega)$, se tiene $|f| = \sup\big\{\,f\,,\,-f\,\big\}$. Nótese que el conjunto $\{f,-f\}$ puede no tener máximo. Definimos ahora dos funciones $f^+,f^- : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ escribiendo, para todo $x \in \Omega$,

$$f^+(x) = \text{máx}\,\big\{\,f(x)\,,\,0\,\big\} \qquad \text{y} \qquad f^-(x) = \text{máx}\,\big\{\,-f(x)\,,\,0\,\big\}$$

de forma que $f^+ = \sup\big\{\,f\,,\,0\big\}$ y $f^- = \sup\big\{\,-f\,,\,0\,\big\}$. Se dice que f^+ es la **parte positiva** de f, mientras que f^- es la **parte negativa** de f. Se relacionan directamente con f y $|f|$ mediante dos igualdades inmediatas:

$$f^+ - f^- = f \qquad \text{y} \qquad f^+ + f^- = |f|$$

Pues bien, veamos que el conjunto $\mathcal{L}(\Omega)$ es estable por las tres operaciones recién definidas.

- *El valor absoluto, la parte positiva y la parte negativa de una función real medible, son también funciones medibles.*

Para $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ se tiene que $|f| = \varphi \circ f$ donde $\varphi(u) = |u|$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Como f es medible y φ es continua, deducimos que $|f|$ es medible. Para la parte positiva y la parte negativa, basta tener en cuenta que $f^+ = (1/2)\big(|f|+f\big)$ y $f^- = (1/2)\big(|f|-f\big)$. ■

En sentido opuesto, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$, verifica que f^+ y f^- son medibles, entonces f también lo es, ya que $f = f^+ - f^-$. En gran medida, esto reduce el estudio de las funciones reales medibles al caso de funciones con valores no negativos, lo que será muy útil para la integración. Por otra parte, puede ocurrir que $|f|$ sea medible sin que f lo sea, como veremos más adelante.

Enseguida veremos la estabilidad de $\mathcal{L}(\Omega)$ por otro tipo de operaciones, relativas a las sucesiones de funciones, pero para ello conviene trabajar en un contexto diferente.

5.3. Funciones medibles positivas

En lo que sigue prestamos atención sobre todo a las funciones medibles con valores reales no negativos. Sin embargo, las propiedades fundamentales de la integral adoptan una forma mucho más sencilla y elegante, si permitimos que dichas funciones tomen el valor ∞. Por ello, considerando en $[0, \infty]$ la topología usual estudiada en su momento, vamos a trabajar con funciones medibles de Ω en $[0, \infty]$, a las que llamaremos **funciones medibles positivas**. Denotaremos por $\mathcal{L}^+(\Omega)$ al conjunto de tales funciones.

Es claro que no hay ninguna inclusión entre los conjuntos $\mathcal{L}(\Omega)$ y $\mathcal{L}^+(\Omega)$, pero conviene hacer una aclaración sobre su intersección. En general, si tenemos un espacio topológico Z y un subconjunto $Y \subset Z$, en el que consideramos la topología inducida, una función $f : \Omega \to Y$ es medible si, y sólo si, es medible como función de Ω en Z. Para convencerse, basta observar que $f^{-1}(G) = f^{-1}(G \cap Y)$ para todo abierto $G \subset Z$. En el caso particular que nos interesa, como $\mathbb{R}$ y $[0, \infty]$ inducen la misma topología en $\mathbb{R}_0^+$, se tiene que $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ es una función real medible si, y sólo si, es una función medible positiva.

Veamos una útil caracterización de las funciones medibles positivas:

- *Para una función $f : \Omega \to [0, \infty]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (i) *f es medible*
  (ii) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) < \alpha\}$ es medible*
  (iii) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\}$ es medible*
  (iv) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\}$ es medible*
  (v) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \alpha\}$ es medible*

La demostración es sencilla, usando que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Para $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} = \Omega \setminus \{x \in \Omega : f(x) < \alpha\}$$

de donde se deduce claramente que $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Análogo razonamiento prueba que $(iv) \Leftrightarrow (v)$. También es claro que

$$\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha + (1/n)\}$$

$$\{x \in \Omega : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f(x) \leqslant n\alpha/(n+1)\}$$

La primera de las igualdades anteriores nos hace ver que $(iii) \Rightarrow (iv)$, y de la segunda deducimos que $(v) \Rightarrow (ii)$. Con esto hemos probado que las cuatro últimas afirmaciones del enunciado son equivalentes. Por otra parte, es claro que $(i) \Rightarrow (ii)$, pues para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $[0, \alpha[$ es abierto en $[0, \infty]$, luego $\{x \in \Omega : f(x) < \alpha\} = f^{-1}\big([0, \alpha[\big)$ es medible. Sólo queda probar que $(ii) \Rightarrow (i)$.

Usando (ii) vemos que los conjuntos $f^{-1}\big(\{0\}\big)$ y $f^{-1}\big(\{\infty\}\big)$ son medibles, ya que

$$f^{-1}\big(\{0\}\big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f(x) < 1/n\} \quad \text{y} \quad f^{-1}\big(\{\infty\}\big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(\Omega \setminus \{x \in \Omega : f(x) < n\}\big)$$

Considerando los cuatro casos que pueden darse, deducimos que $f^{-1}(E)$ es medible, para todo conjunto $E \subset \{0, \infty\}$.

De (ii) deducimos también que, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ con $\alpha < \beta$, el conjunto

$$f^{-1}\big([\alpha, \beta[\big) = \{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \bigcap \big(\Omega \setminus \{x \in \Omega : f(x) < \alpha\}\big)$$

es medible, como intersección de un conjunto medible con la diferencia entre otros dos. En particular, $f^{-1}(J)$ es medible para todo intervalo diádico $J \subset \mathbb{R}^+$. Si G es un abierto de $\mathbb{R}^+$, luego también de $\mathbb{R}$, basta expresar G como unión numerable de intervalos diádicos, para obtener que $f^{-1}(G)$ es medible, como unión numerable de conjuntos medibles.

Finalmente, si H es abierto en $[0, \infty]$ tomamos $G = H \cap \mathbb{R}^+$, que es un abierto de $\mathbb{R}^+$, y tenemos $H = G \cup E$ con $E \subset \{0, \infty\}$. Concluimos que $f^{-1}(H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(E)$ es medible, como unión de dos conjuntos medibles. ■

Conviene observar que las funciones reales medibles admiten una caracterización análoga, salvo que las afirmaciones (ii) a (v) se enuncian para $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario, y no sólo para $\alpha \in \mathbb{R}^+$. La demostración es la misma, e incluso la última parte se puede abreviar bastante.

La utilidad del resultado anterior se pone de manifiesto al comprobar que el conjunto de las funciones medibles positivas es estable por determinadas operaciones: supremo e ínfimo, límites superior e inferior, y límite puntual, de una sucesión de funciones.

- *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas, también son medibles las cuatro funciones definidas como sigue:*

$$\begin{aligned} g &= \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, & g(x) &= \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in \Omega \\ h &= \inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, & h(x) &= \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in \Omega \\ \varphi &= \limsup_{n\to\infty} f_n, & \varphi(x) &= \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega \\ \psi &= \liminf_{n\to\infty} f_n, & \psi(x) &= \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

En particular, cuando $\{f_n\}$ converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to [0, \infty]$, se tiene que f es medible.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se tiene claramente que

$$g^{-1}\big([0,\alpha]\big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}\big([0,\alpha]\big) \quad \text{y} \quad h^{-1}\big([\alpha,\infty]\big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}\big([\alpha,\infty]\big)$$

Usando la caracterización anterior, vemos que $g^{-1}\big([0,\alpha]\big)$ y $h^{-1}\big([\alpha,\infty]\big)$ son medibles, como intersecciones numerables de conjuntos medibles. La misma caracterización nos dice entonces que g y h son funciones medibles. Para φ y ψ basta usar lo anterior, ya que

$$\varphi = \inf\big\{ \sup\{f_k : k \geqslant n\} \,:\, n \in \mathbb{N}\big\} \quad \text{y} \quad \psi = \sup\big\{ \inf\{f_k : k \geqslant n\} \,:\, n \in \mathbb{N}\big\}$$

Cuando $\{f_n(x)\} \to f(x)$ para todo $x \in \Omega$, se tiene obviamente $f = \varphi = \psi$. ■

Resaltamos la última afirmación del enunciado anterior, que es la más importante: *el límite puntual de una sucesión de funciones medibles positivas es una función medible positiva.*

Por otra parte, podríamos probar un resultado análogo al anterior, para funciones reales medibles, pero imponiendo a la sucesión $\{f_n\}$ la condición natural que permita definir cada una de las funciones que aparecen en el enunciado. Preferimos destacar la última parte, que no requiere repetir la demostración, se puede deducir del caso ya resuelto:

- *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales medibles, que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, entonces f es medible.*

Para $x \in \Omega$, de $\{f_n(x)\} \to f(x)$ deducimos que $\{f_n^+(x)\} \to f^+(x)$ y $\{f_n^-(x)\} \to f^-(x)$. Por tanto, $\{f_n^+\}$ y $\{f_n^-\}$ son sucesiones de funciones medibles positivas, que convergen puntualmente en Ω a f^+ y f^- respectivamente. El resultado anterior nos dice que f^+ y f^- son medibles, luego $f = f^+ - f^-$ también lo es. ■

La estabilidad de $\mathcal{L}^+(\Omega)$ por operaciones algebraicas se podría probar de manera similar a como lo hicimos para funciones reales, pero será muy evidente cuando hayamos completado una construcción de todas las funciones medibles positivas.

5.4. Funciones simples positivas

Para hacer la construcción recién anunciada, partimos de las funciones que sólo toman los valores 0 y 1. Concretamente, denotamos por $\chi_B : \mathbb{R}^N \to \{0,1\}$ a la **función característica** de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$, definida por

$$\chi_B(x) = 1 \quad \forall x \in B \qquad \text{y} \qquad \chi_B(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, es claro que $\chi_B^{-1}\big(\,]\alpha,\infty]\big) = B$ si $\alpha < 1$, y $\chi_B^{-1}\big(\,]\alpha,\infty]\big) = \emptyset$ si $\alpha \geqslant 1$. Por tanto, χ_B es una función medible positiva si, y sólo si, el conjunto B es medible. Tenemos aquí un ejemplo de función no medible: para cada conjunto no medible $W \subset \mathbb{R}^N$, la función χ_W no es medible. Además, definiendo $f(x) = 2\chi_W(x) - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, vemos que $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tampoco es medible, pero $|f|$ sí lo es, pues de hecho $|f(x)| = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Por otra parte, podemos ya mostrar ejemplos de funciones medibles que están muy lejos de ser continuas. Tomando $B = \mathbb{Q}^N$, la función χ_B es medible, pero no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}^N$.

A partir de las funciones características de conjuntos medibles, podemos ahora construir fácilmente nuevas funciones medibles positivas.

Llamaremos **función simple positiva** a toda combinación lineal de funciones características de conjuntos medibles, cuyos coeficientes sean números reales no negativos, es decir, a toda función de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \, \chi_{C_i} \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{N}, \ \ \rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{R}_0^+ \ \ \text{y} \ \ C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{M} \tag{1}$$

Está claro que s es una función medible positiva, y su imagen es un conjunto finito $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$. Recíprocamente, sea $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ una función medible positiva con imagen finita. Podemos entonces escribir $s(\mathbb{R}^N) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \subset \mathbb{R}_0^+$ donde $p \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$. Para cada $k \in \Delta_p$, el conjunto $A_k = \{x \in \mathbb{R}^N : s(x) = \alpha_k\}$ es medible y se tiene claramente

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, \chi_{A_k} \tag{2}$$

luego s es una función simple positiva. Diremos que (2) es la **descomposición canónica** de la función simple positiva s. Observemos que las funciones características de conjuntos medibles no son linealmente independientes, luego la descomposición de una función simple positiva que aparece en (1) no es única, pero en (2) hemos elegido una descomposición que sí está determinada de manera única por la función s, cuya utilidad se verá más adelante.

5.5. Aproximación por funciones simples

Es obvio que si $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ y s, t son funciones simples positivas, entonces ρs y $s + t$ también lo son. Además, como $\chi_A \chi_B = \chi_{A \cap B}$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, el producto st es también una función simple positiva. Por tanto, las operaciones algebraicas no nos permiten ampliar la familia de funciones medibles positivas que por ahora hemos construido.

Sin embargo, queda el recurso de considerar, por ejemplo, límites puntuales de sucesiones de funciones simples positivas. Pues bien, vamos a ver que de esta forma, podemos obtener todas las funciones medibles positivas. Ello es consecuencia del teorema que ahora vamos a estudiar, en el que aparece la idea clave usada por Lebesgue para definir su integral.

Las nociones de monotonía, que conocemos para sucesiones de elementos de $[0, \infty]$, se trasladan de forma natural a las sucesiones de funciones. Concretamente, una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de Ω en $[0, \infty]$ es **creciente** cuando, para cada $x \in \Omega$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es creciente, es decir, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente, $\{f_n\}$ es **decreciente** cuando $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \Omega$. Por último, decimos que $\{f_n\}$ es una sucesión **monótona**, cuando es creciente o decreciente.

Pues bien, si $\{f_n\}$ es una sucesión monótona de funciones de Ω en $[0,\infty]$, sabemos que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en $[0,\infty]$ para todo $x \in \Omega$, es decir, $\{f_n\}$ converge puntualmente en Ω. Si denotamos entonces por $f : \Omega \to [0,\infty]$ a su límite puntual, escribiremos $\{f_n\} \nearrow f$ cuando $\{f_n\}$ sea creciente, y $\{f_n\} \searrow f$ cuando sea decreciente. Usaremos frecuentemente esta notación, para sucesiones crecientes de funciones simples y, aunque tales funciones están definidas en todo $\mathbb{R}^N$, puede interesarnos solamente su comportamiento en Ω. Así pues, dada una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples, y una función $f : \Omega \to [0,\infty]$, escribimos $\{s_n\} \nearrow f$ para indicar que $\{ s_n(x) \} \nearrow f(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Pasamos ya a demostrar el primer resultado fundamental en la teoría de la integración.

Teorema de aproximación de Lebesgue. *Toda función medible positiva es el límite puntual en Ω de una sucesión creciente de funciones simples positivas.*

Demostración. Si $f : \Omega \to [0,\infty]$ es medible, para $n,k \in \mathbb{N}$ con $1 \leqslant k \leqslant n2^n$ definimos

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant n\} \qquad \text{y} \qquad E_{n,k} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}$$

y vemos claramente que, tanto F_n como $E_{n,k}$ son conjuntos medibles. Definimos ahora

$$s_n = n\,\chi_{F_n} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\,\chi_{E_{n,k}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Evidentemente, $\{s_n\}$ es una sucesión de funciones simples positivas, y la demostración se concluirá probando que $\{s_n\} \nearrow f$. Se tiene $s_n(x) = 0$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$, pero sólo nos interesa lo que ocurre en Ω. Para que se comprenda mejor el razonamiento, conviene hacer una sencilla observación acerca de la igualdad (3). Fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$[0,\infty] = [n,\infty] \biguplus \left(\biguplus_{k=1}^{n2^n} \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right[\right), \qquad \text{luego} \qquad \Omega = F_n \biguplus \left(\biguplus_{k=1}^{n2^n} E_{n,k} \right)$$

Por tanto, dado $x \in \Omega$, al usar (3) para calcular $s_n(x)$, aparece a lo sumo un sumando no nulo. Así pues, si $x \in F_n$ tendremos $s_n(x) = n$, y en otro caso existe un único $k \in \{1,2,\ldots,n2^n\}$ tal que $x \in E_{n,k}$, con lo que $s_n(x) = (k-1)\,2^{-n}$.

Fijados $x \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$, para comprobar que $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x)$, cabe distinguir tres casos, dependiendo del valor de $f(x)$. Empezamos por el más sencillo:

$$n+1 \leqslant f(x) \implies x \in F_{n+1} \subset F_n \implies s_n(x) = n < n+1 = s_{n+1}(x)$$

Si $n \leqslant f(x) < n+1$, existe un único $k \in \mathbb{N}$, con $1 \leqslant k \leqslant (n+1)2^{n+1}$, tal que $x \in E_{n+1,k}$. Entonces $k > 2^{n+1} f(x) \geqslant 2^{n+1} n$, luego $k-1 \geqslant 2^{n+1} n$, y deducimos que

$$s_n(x) = n \leqslant \frac{k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$$

Supongamos por último que $f(x) < n$ y sea $k \in \mathbb{N}$, con $1 \leqslant k \leqslant n2^n$, tal que $x \in E_{n,k}$. Entonces $2k-2 \leqslant 2^{n+1} f(x) < 2k$, es decir, $j-1 \leqslant 2^{n+1} f(x) < j+1$, donde $j = 2k-1$ verifica que $1 \leqslant j \leqslant n2^{n+1} - 1 < (n+1)2^{n+1}$, con lo que caben dos posibilidades:

$$\begin{aligned} j-1 \leqslant 2^{n+1} f(x) < j \quad &\Longrightarrow \quad s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{j-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x) \\ j \leqslant 2^{n+1} f(x) < j+1 \quad &\Longrightarrow \quad s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{j}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Comprobado que $\{s_n\}$ es creciente, fijamos $x \in \Omega$ para ver que $\{s_n(x)\} \to f(x)$. Esto es evidente si $f(x) = \infty$, pues entonces $s_n(x) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En otro caso, para $n > f(x)$ se tiene que $x \notin F_n$, luego $x \in E_{n,k}$ con $1 \leqslant k \leqslant n2^n$. Por tanto:

$$n \in \mathbb{N}, \ n > f(x) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant f(x) - s_n(x) \leqslant 1/2^n \tag{4}$$

lo que claramente implica que $\{s_n(x)\} \to f(x)$. ■

En un caso particular importante, la demostración anterior contiene una información que merece ser destacada:

Teorema de aproximación uniforme. *Si f es una función medible positiva, verificando que $\sup f(\Omega) < \infty$, entonces existe una sucesión creciente de funciones simples positivas que converge uniformemente a f en Ω.*

Demostración. Nótese que las funciones simples positivas nunca toman el valor ∞, y por hipótesis se tiene $f(x) < \infty$ para todo $x \in \Omega$, luego tiene sentido decir que $\{s_n\}$ converge uniformemente a f en Ω. Definiendo $\{s_n\}$ como en (3), comprobaremos enseguida dicha convergencia uniforme. Basta para ello tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \sup f(\Omega)$, con lo cual, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m$, vemos en (4) que

$$0 \leqslant f(x) - s_n(x) \leqslant 1/2^n \qquad \forall x \in \Omega$$

y esto prueba que $\{s_n\}$ converge uniformemente a f en Ω. ■

Cabe resaltar que, en las demostraciones anteriores, el hecho de que Ω sea un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$, y f una función medible, sólo se usa para asegurar que s_n es también medible, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si Ω es cualquier conjunto no vacío, y $f : \Omega \to [0, \infty]$ cualquier función, podemos definir la sucesión $\{s_n\}$ como lo hemos hecho antes, con lo que $\{s_n\}$ es creciente y converge puntualmente a f. Nuevamente, cuando $\sup f(\Omega) < \infty$, la convergencia es uniforme. Por tanto, tenemos un método general para aproximar puntualmente funciones definidas en un conjunto arbitrario Ω y con valores en $[0, \infty]$, por funciones de Ω en $\mathbb{R}_0^+$ que tienen imagen finita, aproximación que es uniforme en muchos casos.

La construcción usada en el teorema anterior es muy intuitiva en un caso concreto, que permite entender mejor el caso general. Suponiendo que $\sup f(\Omega) < 1$, para cada $x \in \Omega$ disponemos de un desarrollo binario $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{2^n}$, donde, $a_n(x) \in \{0, 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n(x) = 0\}$ es infinito, lo que garantiza la unicidad.

Pues bien, si $\{s_n\}$ es la sucesión definida en (3), en este caso se comprueba fácilmente por inducción que $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{2^k}$ para cualesquiera $x \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$. Ahora es evidente que la sucesión $\{s_n\}$ es creciente y converge a f uniformemente en Ω. Está claro que, en este caso particular, la aproximación que hemos hecho no puede ser más sencilla e intuitiva. También es claro que, en lugar del desarrollo binario, se podría usar un desarrollo decimal. En el caso general hemos usado una sencilla adaptación de esta idea, que renunciando a la convergencia uniforme, permite trabajar con funciones no acotadas, que incluso pueden tomar el valor ∞.

Como ya sabíamos que el límite puntual de una sucesión de funciones medibles positivas es una función medible, tenemos una caracterización de las funciones medibles positivas que conviene resaltar:

- *Una función de Ω en $[0,\infty]$ es medible si, y sólo si, es el límite puntual en Ω de una sucesión creciente de funciones simples positivas.*

La estabilidad de las funciones medibles positivas por operaciones algebraicas es ya casi evidente. Para dos funciones $f,g : \Omega \to [0,\infty]$, podemos definir la suma $f+g$ así como el producto fg, en la forma natural, usando la suma y el producto de $[0,\infty]$. Concretamente, basta escribir $\big(f+g\big)(x) = f(x) + g(x)$ y $\big(fg\big)(x) = f(x)g(x)$, para todo $x \in \Omega$.

- *Si f y g son funciones medibles positivas, entonces $f+g$ y fg también lo son.*

Existen dos sucesiones crecientes $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ de funciones simples positivas, que convergen puntualmente en Ω a f y g respectivamente.

Entonces, para todo $x \in \Omega$, tenemos $\{s_n(x)\} \nearrow f(x)$ y $\{t_n(x)\} \nearrow g(x)$, de donde

$$\{s_n(x) + t_n(x)\} \nearrow f(x) + g(x) \qquad \text{y} \qquad \{s_n(x)\,t_n(x)\} \nearrow f(x)\,g(x)$$

Vemos que $\{s_n + t_n\}$ y $\{s_n t_n\}$ son sucesiones de funciones simples positivas que convergen puntualmente en Ω a $f+g$ y fg respectivamente, luego $f+g$ y fg son medibles. ■