

Procesamiento de Imágenes

Ingeniería Biomédica

Unidad 4: Filtrado en el dominio frecuencial

Repaso:

- ☐ Serie de Fourier
- ☐ Transformada de Fourier continua
- ☐ Teorema de la convolución temporal
- ☐ Teorema de la convolución frecuencial
- ☐ Muestreo en el dominio temporal. Aliasing. Teorema de Nyquist.
- ☐ Transformada de Fourier Discreta (DFT) 1D y 2D
- ☐ Ruido Periódico

Filtrado frecuencial

- ☐ Filtros de suavizado: PB ideal, Butterworth de orden n y Gaussiano
- ☐ Filtros de realce: PA ideal, Butterworth de orden n y Gaussiano

Serie de Fourier

Toda señal **periódica** puede reconstruirse a partir de sinusoides cuyas frecuencias son **múltiplos enteros** de una **frecuencia fundamental**, eligiendo las amplitudes y fases adecuadas.

La serie de Fourier describe señales periódicas como una **combinación de señales armónicas**.

Permite analizar el **contenido frecuencial** de la señal.



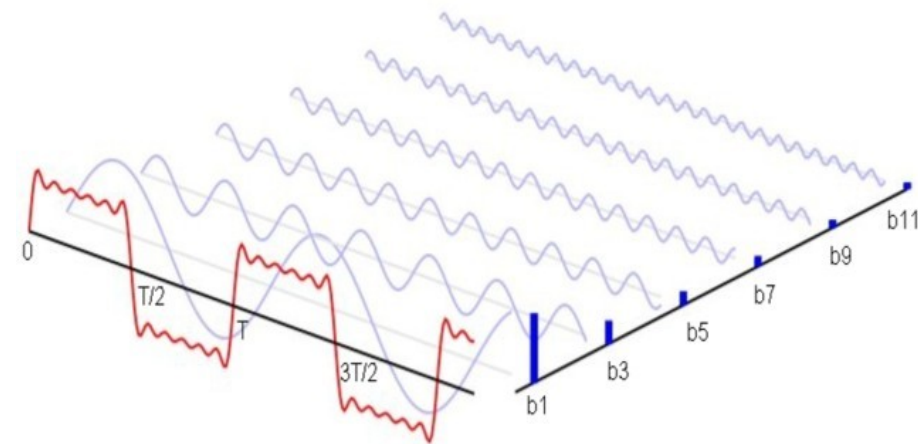
Matemático francés Joseph Fourier
(1768-1830)

Forma trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$



Transformada continua de Fourier

$$H(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (\text{ecuación de análisis})$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(w) \cdot e^{i\omega t} dw$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot e^{i2\pi f t} df$$

(ecuaciones de síntesis) $w = 2\pi f$

Teorema de la convolución temporal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \xLeftrightarrow{TF} \begin{cases} Y(f) = H(f)X(f) \\ Y(\omega) = 2\pi H(\omega)X(\omega) \end{cases}$$

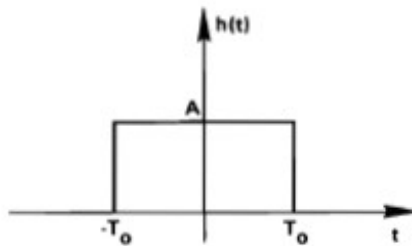
Teorema de la convolución frecuencial

$$y(t) = x(t)h(t) \xLeftrightarrow{TF} \begin{cases} Y(f) = H(f) * X(f) \\ Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\omega) * X(\omega) \end{cases}$$

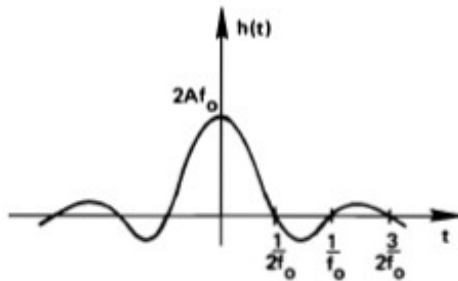
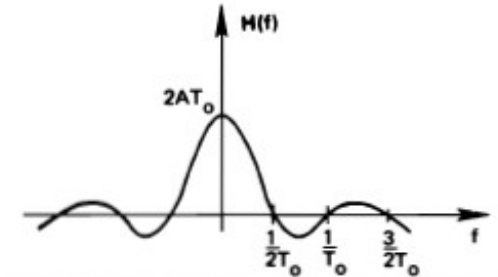
Algunos funciones y sus trasformadas

Time Domain

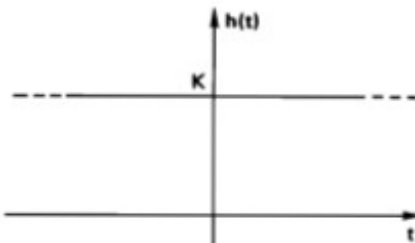
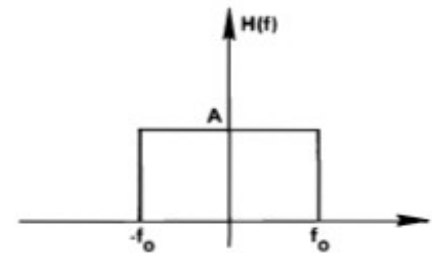
Frequency Domain



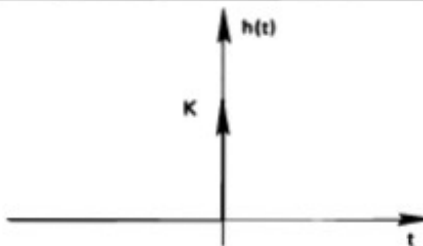
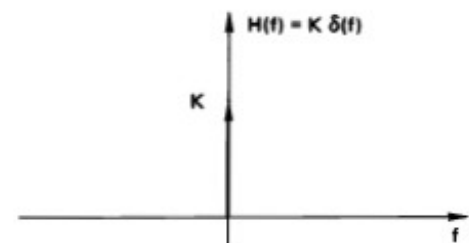
$$h(t) = \begin{cases} A & |t| < T_0 \\ \frac{A}{2} & |t| = T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \Leftrightarrow H(f) = 2AT_0 \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$



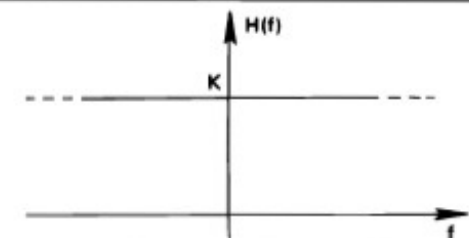
$$h(t) = 2Af_0 \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} \Leftrightarrow H(f) = \begin{cases} A & |f| < f_0 \\ \frac{A}{2} & |f| = f_0 \\ 0 & |f| > f_0 \end{cases}$$



$$h(t) = K \Leftrightarrow H(f) = K\delta(f)$$



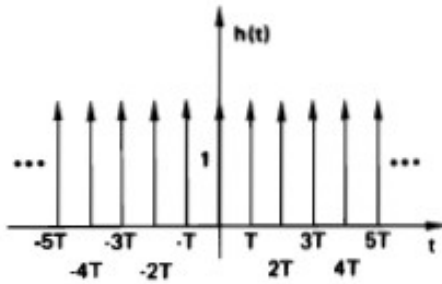
$$h(t) = K\delta(t) \Leftrightarrow H(f) = K$$



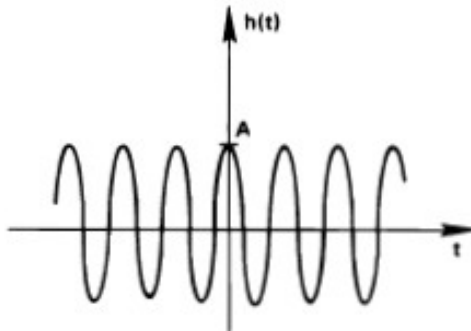
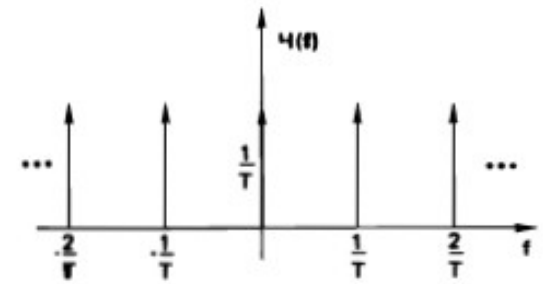
Algunos funciones y sus trasformadas

Time Domain

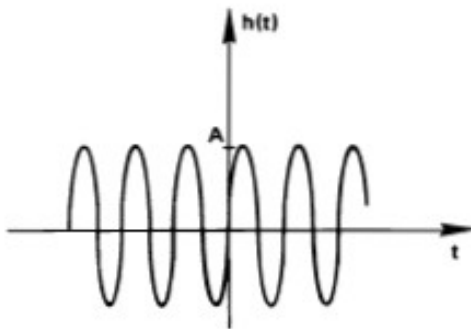
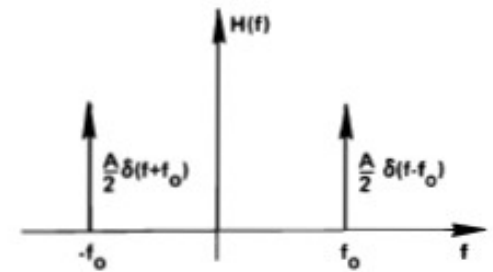
Frequency Domain



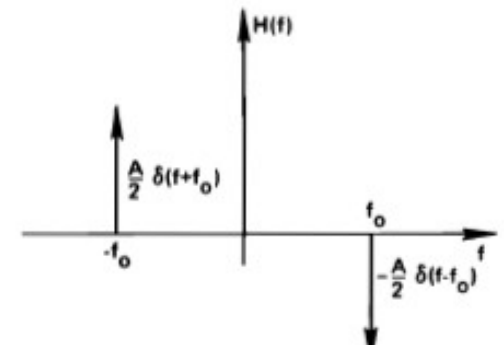
$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Leftrightarrow H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



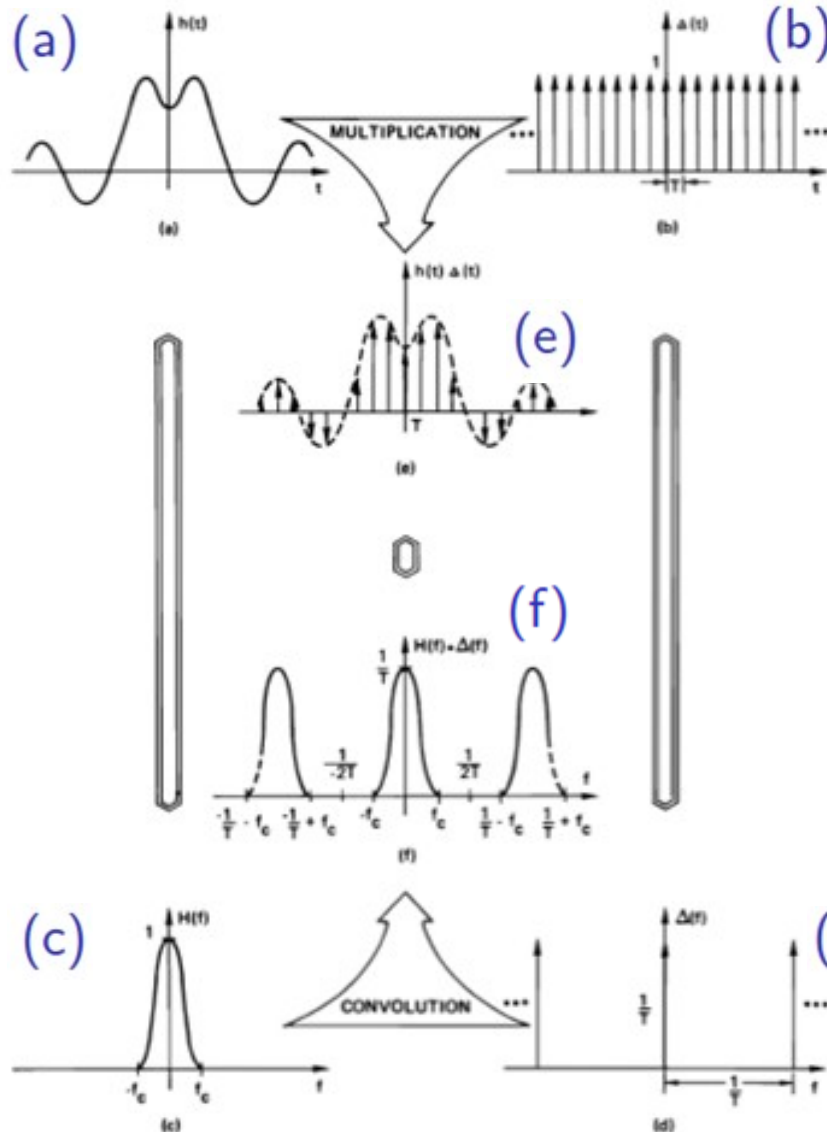
$$h(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow H(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$



$$h(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow H(f) = -j \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + j \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$



Muestreo en el dominio temporal

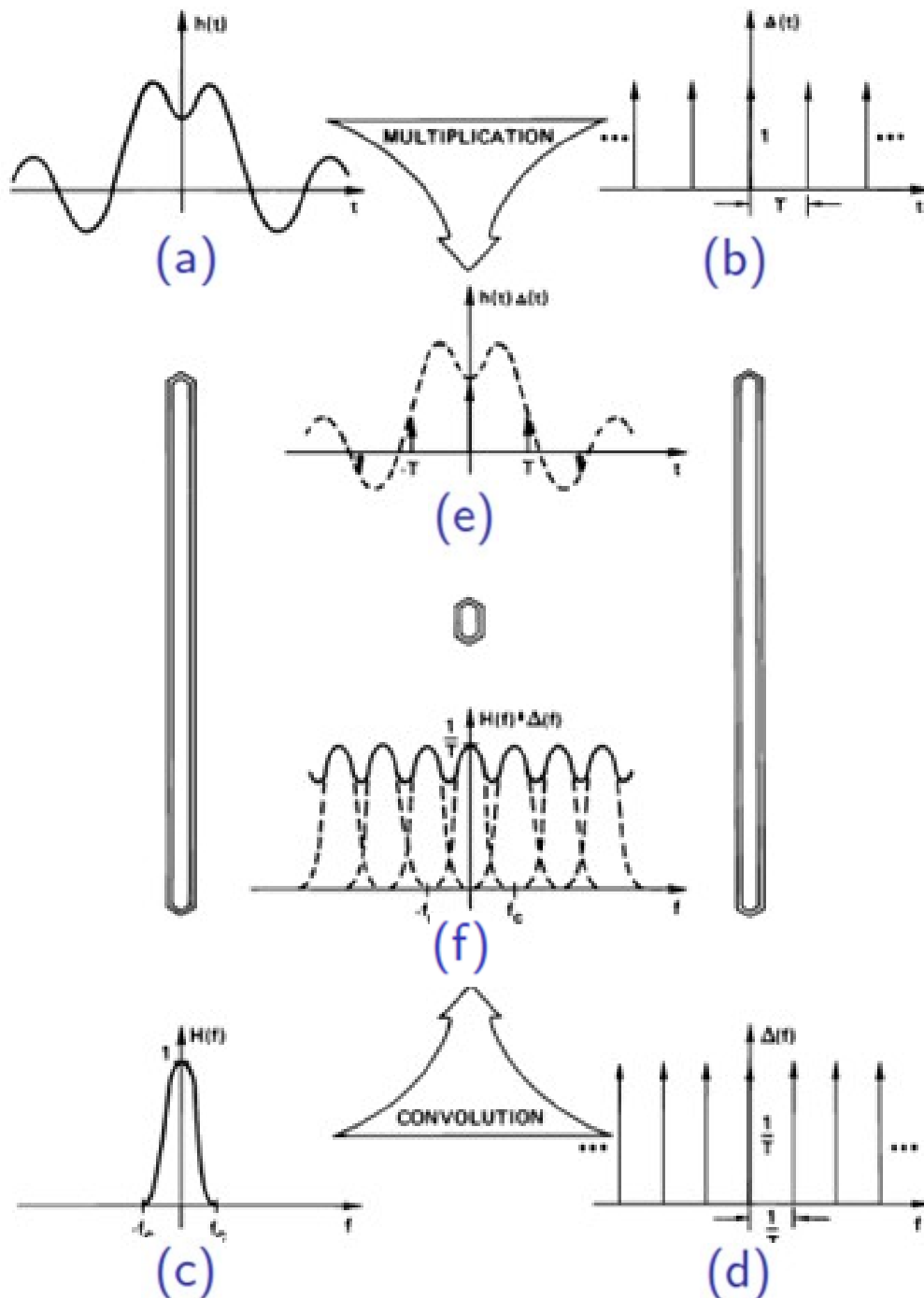


- (a) Señal que queremos muestrear, $h(t)$ (muestreamos cada T seg)
- (b) Tren de impulsos $\Delta(t)$.
- (e) Muestreo de $h(t)$ = producto de $h(t)$ y el tren de impulsos $\Delta(t)$.
- (c) Transformada de Fourier de $h(t)$, $H(f)$.
- (d) Transformada de Fourier del tren de impulsos $\Delta(t)$, $\Delta(f)$.
- (f) Convolución de $H(f)$ y $\Delta(f)$: la T. F. del producto es la convolución.

La señal (f) es la transformada de Fourier de la señal muestreada (e).

“Discretizar en un dominio hace periódico el otro”

Aliasing



Se repite el mismo proceso que en la figura anterior, pero ahora la frecuencia de muestreo, $1/T$, es menor que $2f_c$, y por tanto aparece solapamientos en la transformada de Fourier de la señal muestreada. La señal obtenida en (e) está distorsionada debido a los solapamientos, y no es posible recuperar la señal original $h(t)$ a partir de sus muestras $h(t) \cdot \Delta(t)$. A este fenómeno se conoce como ALIASING.

Teorema de Nyquist o del muestreo

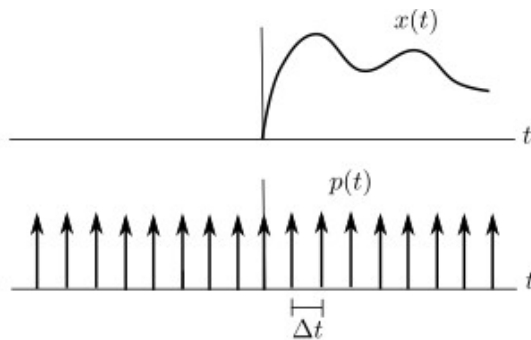
Sea $x(t)$ una señal continua que cumple con:

$$X(f) = 0 \text{ para } |f| \geq f_m$$

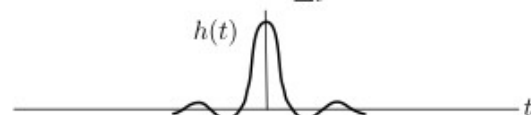
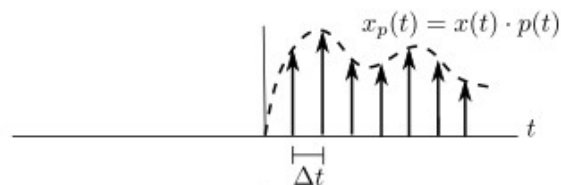


$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \geq 2f_{\max}$$

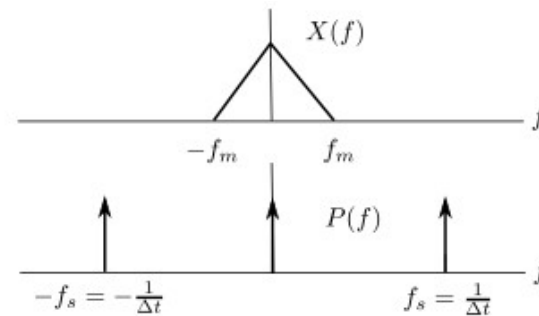
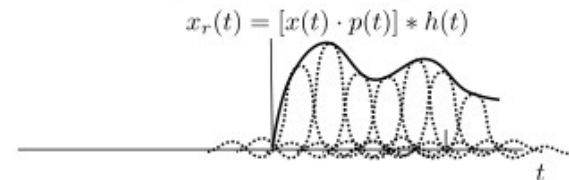
donde f_s es la **frecuencia de muestreo** y f_{\max} es la **frecuencia máxima** de $X(f)$ (f_m en el espectro mostrado abajo).



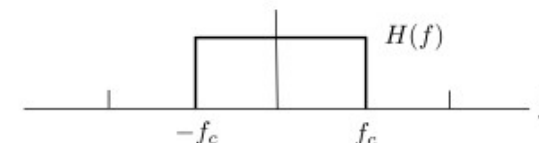
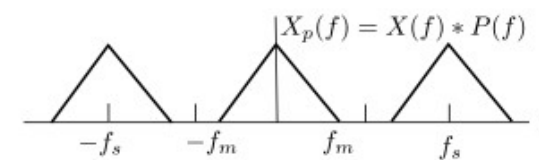
MULTIPLICACION



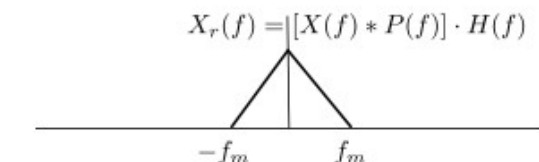
CONVOLUCION



CONVOLUCION



MULTIPLICACION



Tr. Fou.
Tr. Fou. Inv.

Interpretación gráfica de la DFT

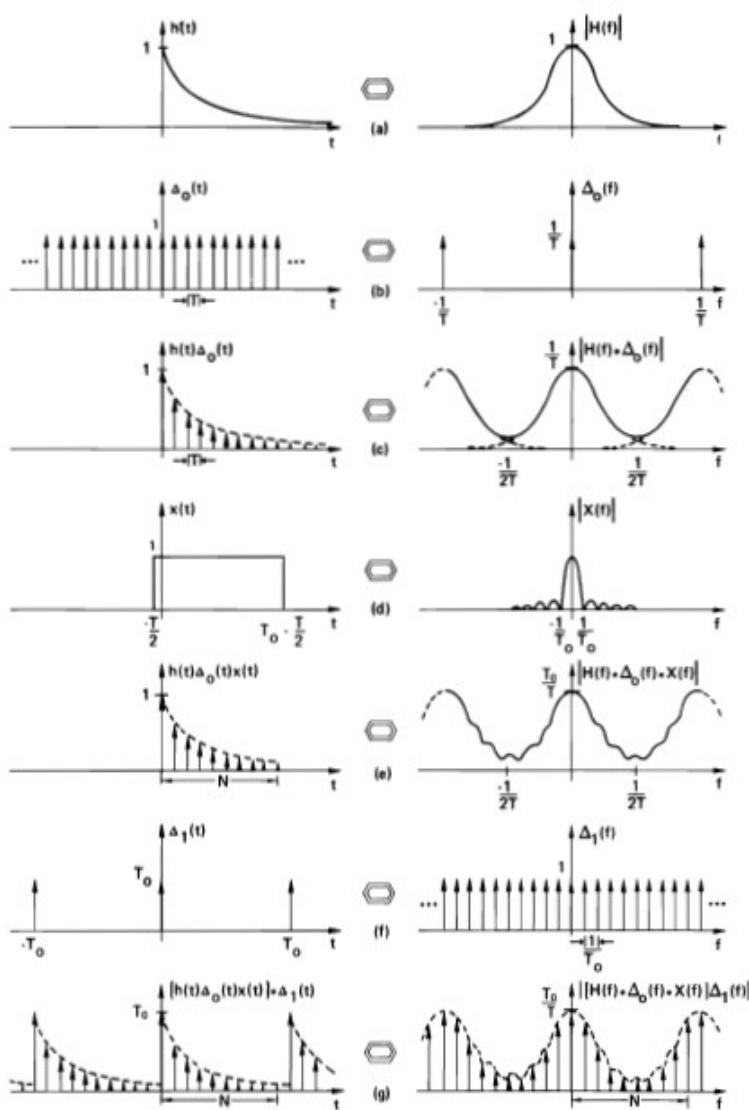


Figure 6.2 Graphical derivation of the discrete Fourier transform pair.

- (a) Función en el tiempo $h(t)$ y su transformada de Fourier, $H(f)$.
- (b) Tren de impulsos $\Delta_0(t)$ y su transformada de Fourier $\Delta_0(f)$.
- (c) Muestreo de $h(t)$, $h(t) \cdot \Delta_0(t)$, y su transformada de Fourier $H(f) * \Delta_0(f)$.
- (d) Las señales no son infinitas: la truncamos multiplicando en el tiempo por una ventana $x(t)$ de altura unidad. Esta ventana también tiene T. Fourier.
- (e) $h(t) \cdot \Delta_0(t) \cdot x(t)$ y su T. Fourier $H(f) * \Delta_0(f) * X(f)$
- (f) Muestreamos en frecuencia multipl. por un tren de impulsos, $\Delta_1(f)$.
- (g) $\tilde{h}(t) = [h(t) \cdot \Delta_0(t) \cdot x(t)] * \Delta_1(t)$
 $\tilde{H}(f) = [H(f) * \Delta_0(f) * X(f)] \cdot \Delta_1(f)$

Transformada de Fourier Discreta (DFT-1D)

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$

x y u: 0,1, 2, ... M-1

DFT

(en coordenadas polares)

$$|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I(u)^2}$$

Módulo

$$F(u) = |F(u)| e^{-j\phi(u)}$$

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

Fase

$$|F(u)|^2 = R(u)^2 + I(u)^2$$

Potencia

IDFT

(reconstrucción señal original)

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M}$$

x y u: 0,1, 2, ... M-1

En Matlab la DFT1D se calcula con el comando fft y la inversa con ifft

Filtrado en el dominio frecuencial usando DFT 1D

- Ejercicio 1: Calcule y grafique el espectro de magnitud de la suma de dos sinusoides (utilice el algoritmo fft de matlab)
- Ejercicio 2: A la señal del punto anterior agréguele ruido aleatorio y observe como se modifica su espectro de magnitud.
- Ejercicio 3: Sume 3 señales sinusoidales de diferente frecuencia angular y amplitud. Filtre las señales de mayor y menor frecuencia, eliminándolas. Grafique el resultado de la anti-transformada de Fourier.
- Ejercicio 4: A una señal sinusoidal con ruido aleatorio, hágala pasar por un filtro pasa bajos (dominio espacial). Observe como se modificó su espectro de magnitud.
- Ejercicio 5: Idem ejercicio 4, pero con un filtro pasa altos.

Transformada de Fourier Discreta (DFT-2D)

Sea $f(x,y)$ una imagen de dimensión $M \times N$, su DFT-2D es:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

donde: ($x = 0, 1, \dots, M-1$) e ($y = 0, 1, \dots, N-1$)
($u = 0, 1, \dots, M-1$) y ($v = 0, 1, \dots, N-1$)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

Espacio

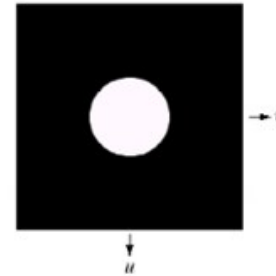


Frecuencia

Filtros frecuenciales

Pasa-bajo ideal:

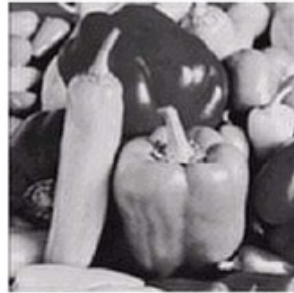
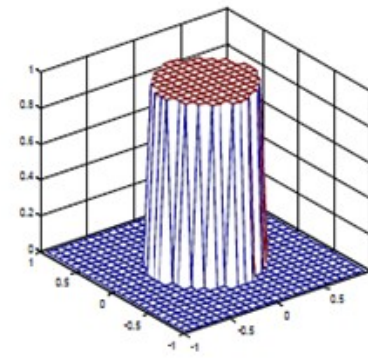
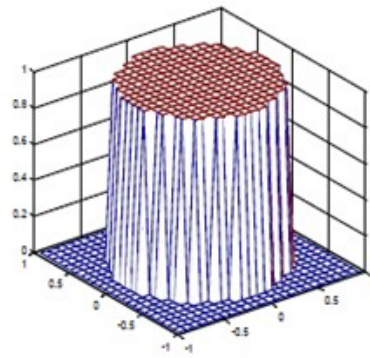
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



- ☐ D_0 es la **frecuencia de corte**, y $D(u, v)$ es la **distancia Euclídea** desde el punto (u, v) hasta el origen del plano de frecuencia.
- ☐ Las componentes de alta frecuencia en una imagen son transiciones bruscas en los niveles de intensidad.
- ☐ Suavizar significa atenuar o eliminar componentes de alta frecuencia espacial.



Original



D_0 grande

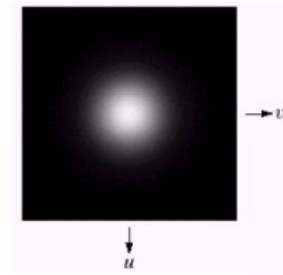


D_0 pequeño

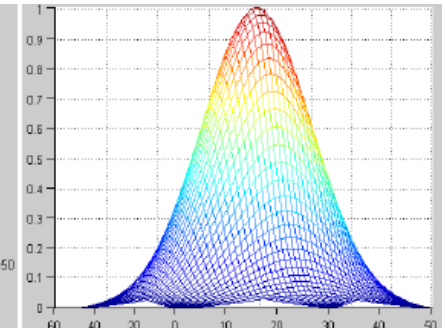
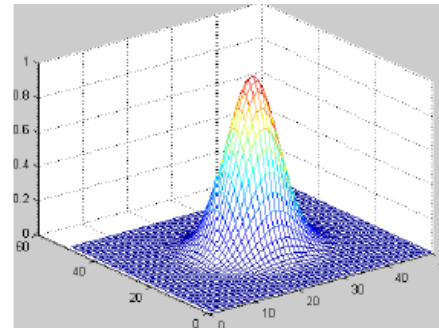
Fenómeno de Gibbs:
característico de los
filtros ideales por la
discontinuidad de la
función de transferencia.

Pasa-bajo Gaussiano:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$



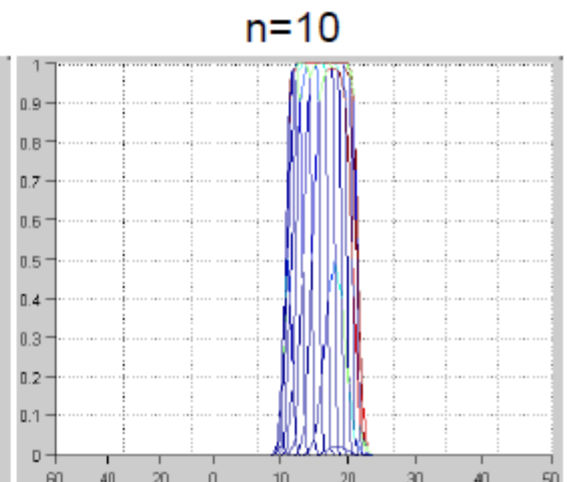
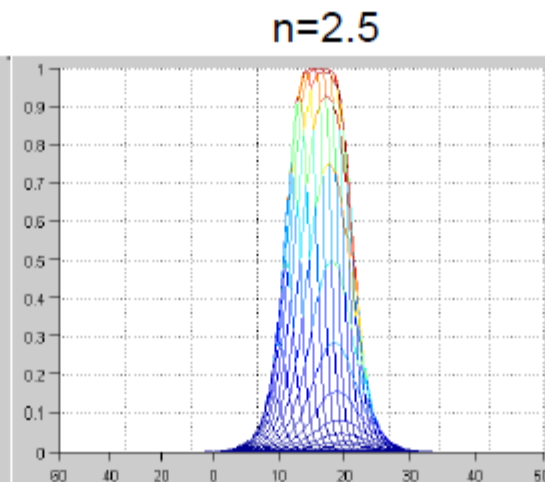
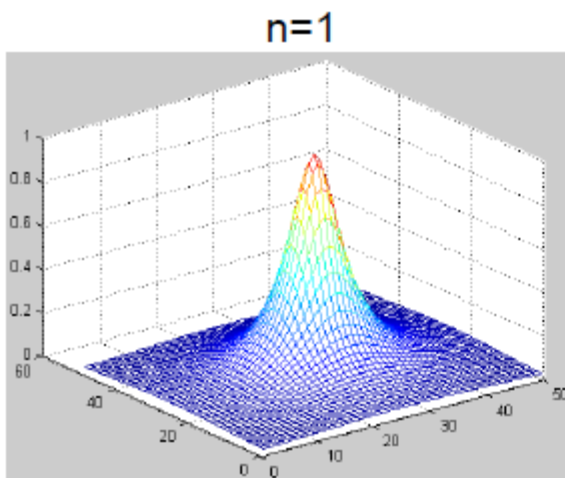
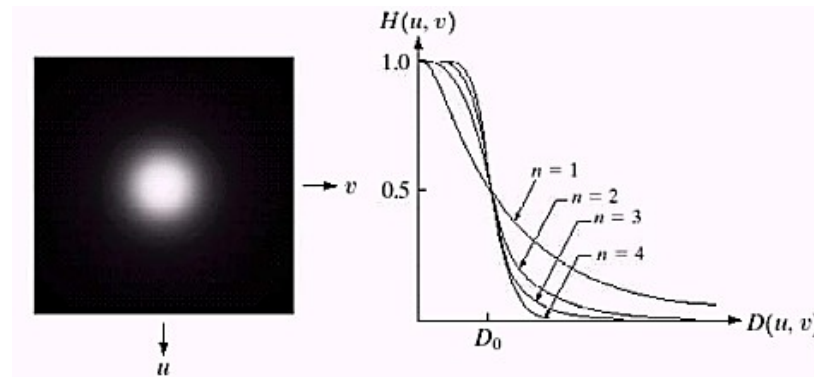
- ❑ Cae al **60,7%** de su máximo en la frecuencia de corte D_0
- ❑ Las transiciones a la frecuencia de corte no son bruscas (no se observa el fenómeno de Gibbs)
- ❑ D_0 es equivalente a la dispersión (σ) de la curva gaussiana



Pasa-bajo Butterworth de orden n:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

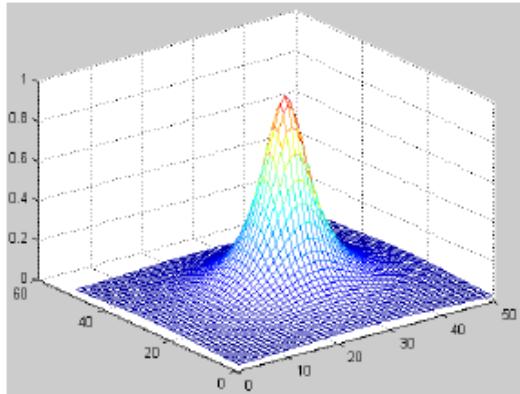
- ❑ Cae al **50%** de su máximo en la **frecuencia de corte**, $D(u, v) = D_0$
- ❑ Las **transiciones** a la frecuencia de corte D_0 **no son bruscas** (no se observa fenómeno de Gibbs)



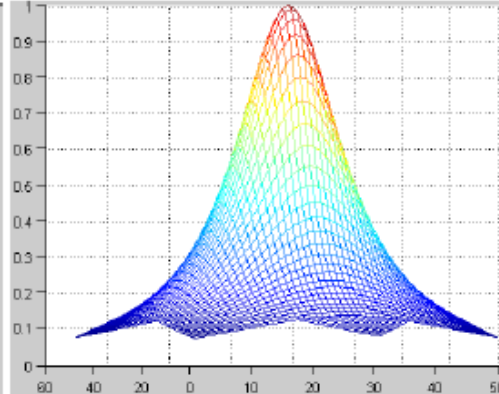
Diferentes n , iguales D_0

Diferentes D_0 , mismo n

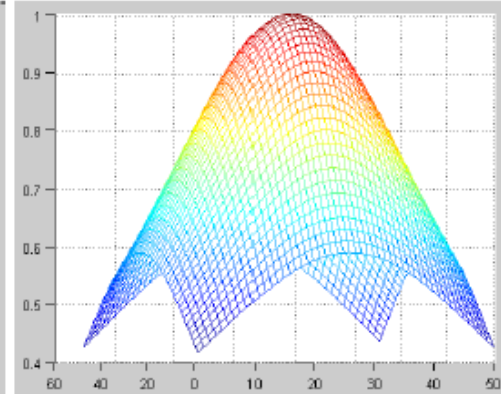
$D_0=50$



$D_0=100$

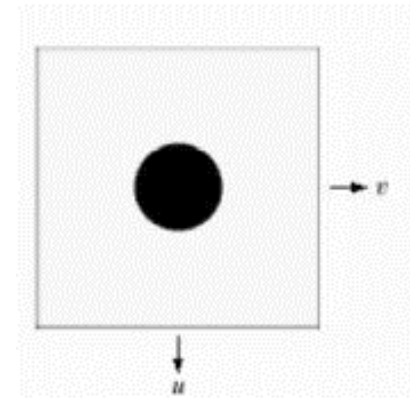
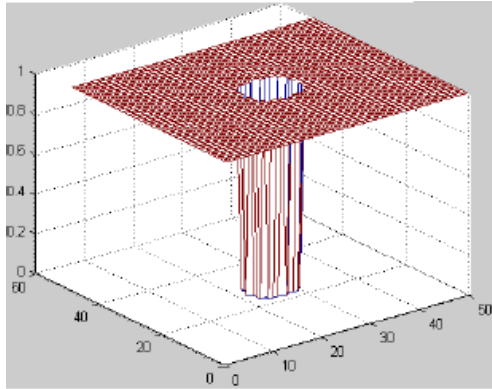


$D_0=300$



Pasa-alto ideal:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

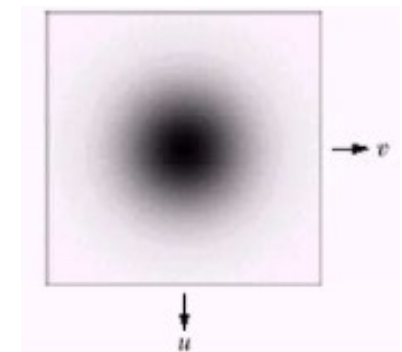
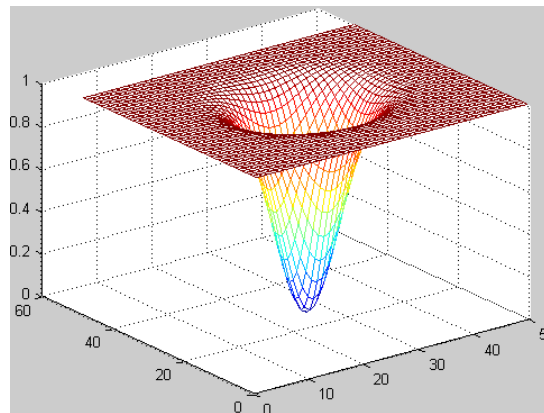


Al igual que en el filtro pasa bajos ideal, se observa la aparición del fenómeno de Gibbs.

Pasa-alto Gaussiano:

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$

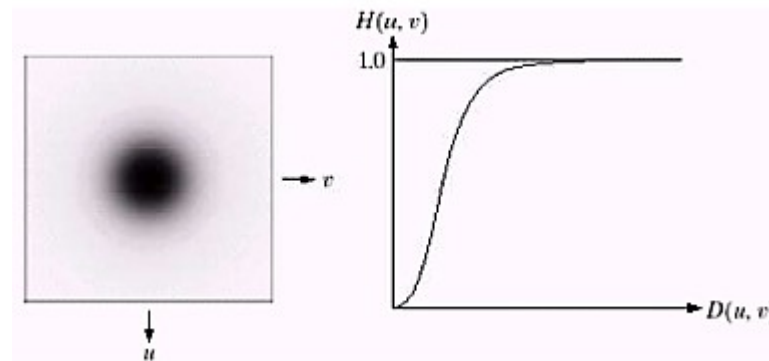
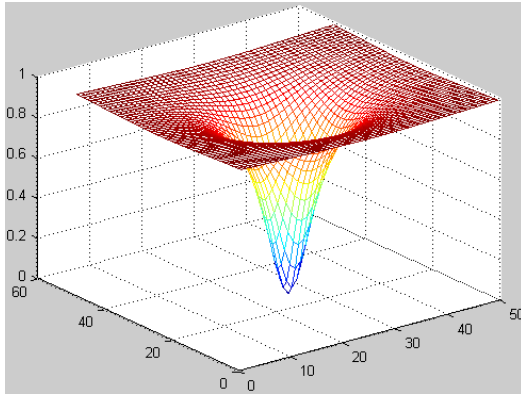
$D_0^2 = \sigma^2$ = varianza de la Gaussiana,
 $\sigma = D_0$ = desvío estándar



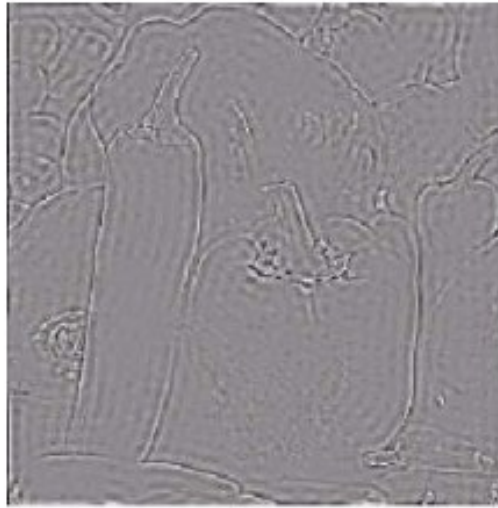
Pasa-alto Butterworth de orden n:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

Como el filtro PB, para orden bajo ($n < 20$) no se observa el fenómeno de Gibbs.



Original



Ideal



Butterworth

Ruido periódico

- Ruido con **dependencia espacial**
- Presente como *interferencia* eléctrica o electromecánica durante la *adquisición*.

Modelo de ruido periódico: senoide 2D

$$r(x, y) = A \cdot \sin \left[\frac{2\pi u_0 (x + B_x)}{M} + \frac{2\pi v_0 (y + B_y)}{N} \right]$$

A = amplitud

x = 0, 1, 2, ..., M-1

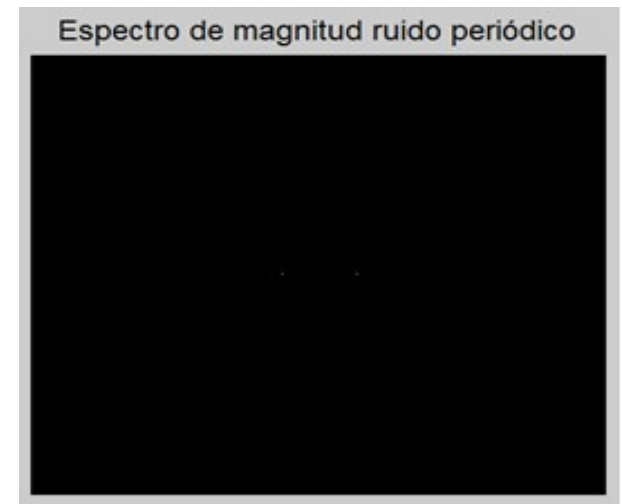
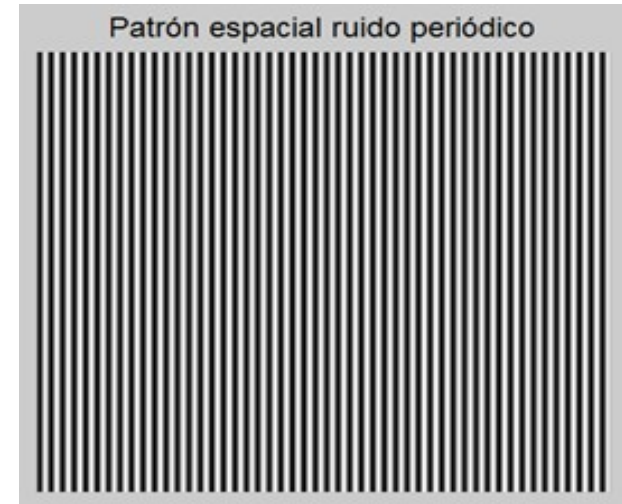
y = 0, 1, 2, ..., N-1

u₀ y **v₀** determinan las frecuencias de la senoide respecto al eje-x y el eje-y, respectivamente

La DFT2D de este ruido es:

$$R(u, v) = j \frac{AMN}{2} [e^{-j2\pi(u_0 B_x/M + v_0 B_y/N)} \delta(u + u_0, v + v_0) - e^{j2\pi(u_0 B_x/M + v_0 B_y/N)} \delta(u - u_0, v - v_0)]$$

$u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ y $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$,
par de impulsos unitarios ubicados en
($u + u_0, v + v_0$) y ($u - u_0, v - v_0$)
(ver **script imnoise3.m**)



Filtrado de imágenes usando DFT 2D

- Ejercicio 6: Abra una imagen y calcule su DFT 2D (utilice la función `fft2`). Visualice la imagen y su espectro de magnitud.
- Ejercicio 7: Genere en el dominio frecuencial diferentes tipos de filtros pasa bajos (ideal, Gaussiano, Butterworth). Visualice la respuesta de cada filtro usando `imagesc` y `mesh`.
- Ejercicio 8: Idem punto anterior, pero con filtros pasa altos.
- Ejercicio 9: Abra una imagen y aplíquela los diferentes filtros generados. Presente la imagen original y las procesadas, con sus respectivos espectro de magnitud.
- Ejercicio 10: Genere ruido periódico y observe su DFT2D
- Ejercicio 11: Abra una imagen y súmele ruido periódico. Filtre la imagen en el dominio frecuencial.