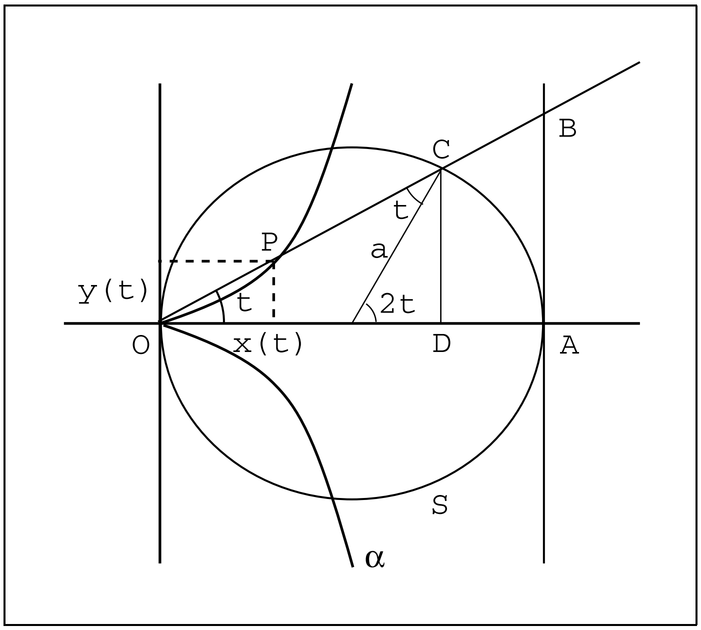
LA CISOIDE DE DIOCLES

Se considera una circunferencia S de radio a. Sean O y A dos puntos de S diametralmente opuestos. Una semirrecta r parte de O, cortando a S en C y a la tangente a S en A en un punto B. En el segmento OB se considera el punto P tal que $d(O,P) = d(B,C)$. Al variar la semirrecta, el punto P describe una curva, denominada **cisoide de Diocles**. Hallar sus ecuaciones y sus puntos regulares.



RESOLUCIÓN: Eligiendo el parámetro t tal y como se muestra en la figura, buscamos determinar la curva:

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t)). \end{array}$$

Está claro que $x(t) = d(O,P)\cos t$ e $y(t) = d(O,P)\,\mathrm{sen}\, t$, por lo que bastará determinar $d(O,P)$. Para ello, observamos que, de acuerdo con la definición de la curva, $d(O,P) = d(B,C) = d(O,B) - d(O,C)$, siendo:

$$d(O,B) = \frac{d(O,A)}{\cos t} = \frac{2a}{\cos t},$$

$$d(O,C) = \frac{d(C,D)}{\operatorname{sen} t} = \frac{a \operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} t} = 2a \cos t.$$

Así, se tiene que $d(O,P) = 2a \operatorname{sen}^2 t / \cos t$ y la cisoide vendrá dada por:

$$\alpha(t) = (2a \operatorname{sen}^2 t, 2a \operatorname{sen}^2 t \tan t).$$

Por otra parte, si consideramos la reparametrización

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbf{R} & \longrightarrow & (-\pi/2, \pi/2) \\ & r & \longmapsto & \arctan r, \end{array}$$

la cisoide puede describirse también mediante la curva reparametrizada $\beta = \alpha \circ g$, es decir,

$$\begin{array}{rccc} \beta: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & r & \longmapsto & (\frac{2ar^2}{1+r^2}, \frac{2ar^3}{1+r^2}). \end{array}$$

En cuanto a la regularidad de la cisoide, es fácil probar que $\beta'(r) = 0$ si y sólo si $r = 0$, es decir, su único punto singular es el $(0,0)$.