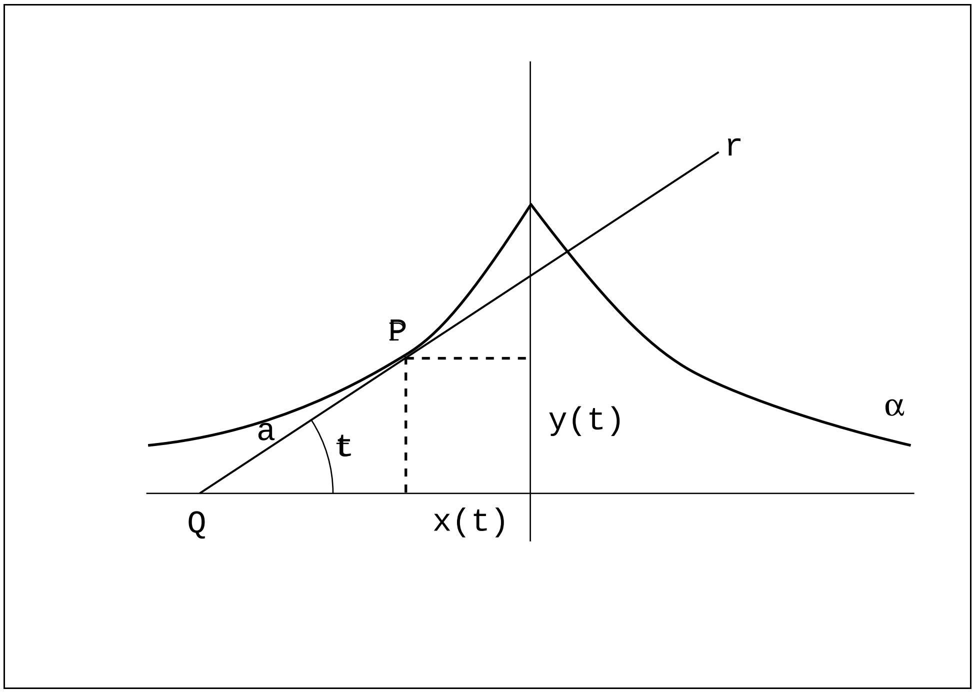
LA TRACTRIZ

Se denomina **tractriz** a la curva descrita por los puntos P del plano tales que el segmento de tangente a la curva en P comprendido entre dicho punto P y una recta fija, es constante. Hallar sus ecuaciones y sus puntos regulares.



RESOLUCIÓN: Eligiendo el parámetro t tal y como se muestra en la figura, buscamos determinar la curva:

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & (0,\pi) & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t)). \end{array}$$

Está claro que $y(t) = a \operatorname{sen} t$. Para determinar $x(t)$, calculamos la recta tangente r en el punto arbitrario P e imponemos la condición del enunciado.

Como $\alpha'(t) = (x'(t), a\cos t)$, se tiene que:

$$r(\lambda) \;=\; (x(t), a \operatorname{sen} t) + \lambda(x'(t), a\cos t) \;=\; (x(t) + \lambda x'(t), a(\operatorname{sen} t + \lambda \cos t)).$$

Para calcular el punto de corte de r con el eje OX, imponemos que $a(\operatorname{sen} t + \lambda\cos t) = 0$, de donde se deduce que $\lambda = -\tan t$. Así, dicho punto de corte será $Q = (x(t) - \tan t\, x'(t), 0)$. Ahora, teniendo en cuenta la figura, observamos que

$$x(t) \;=\; (x(t) - \tan t\, x'(t)) + a\cos t,$$

y por tanto

$$x'(t) \;=\; a\frac{\cos t}{\tan t} \;=\; a(\frac{1}{\operatorname{sen} t} - \operatorname{sen} t),$$

de donde, integrando, se deduce que

$$x(t) \;=\; a(\log(\tan(t/2)) + \cos t),$$

usando la condición inicial $x(\pi/2) = 0$.

Por lo tanto, la tractriz es la curva dada por:

$$\alpha(t) \;=\; (a(\log(\tan(t/2)) + \cos t), a\operatorname{sen} t).$$

En cuanto a sus puntos regulares, es fácil ver que, de todos los valores del intervalo $(0, \pi)$, el único que anula a $\alpha'(t)$ es $t = \pi/2$, siendo $\alpha(\pi/2)$ la cúspide de la tractriz.