<u>EL PROBLEMA DEL FLUJO MÁXIMO</u>

Sea G un grafo con n nodos N= {1,2,3,…,n} y un conjunto de m aristas. Asociado a cada arco (i,j) tenemos un flujo mínimo l_{ij} y máximo u_{ij}. Para empezar supondremos que l_{ij}=0 en todos los caso (más tarde veremos el caso de que no sea así). El problema es encontrar el flujo máximo entre el nodo 1 y el nodo n, respetando las restricciones del problema. Se busca un flujo factible máximo.

Sea x_{ij} la variable que determina el flujo que va desde i a j.

La primera cuestión es formular el problema como un PPL.

Max F

s.a.

$\sum_{j=2}^{n} x_{1j}$ - $\sum_{k=2}^{n} x_{k1}$= F

$\sum_{j=1}^{n-1} x_{nj}$ - $\sum_{k=2}^{n} x_{kn}$= -F

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ - $\sum_{k=1}^{n} x_{ki}$= 0

0 ≤ x_{ij} ≤ u_{ij}

<u>Definición</u> Un conjunto de corte X es un conjunto de nodos de forma que 1 ϵ X y n ϵ N-X=$\bar{X}$. Llamamos capacidad de X a la suma de las capacidades u_{ij} de los arcos que van de X a $\bar{X}$

C(X, $\bar{X}) = \sum_{i \,\epsilon\, X, j \,\epsilon \bar{X}} u_{ij}$

Obviamente

$\sum_{i \,\epsilon\, X, j \,\epsilon \bar{X}} x_{ij}$ - $\sum_{i \,\epsilon\, X, j \,\epsilon \bar{X}} x_{ji}$ = F

Y además 0 ≤ x_{ij} ≤ u_{ij}

Por tanto

$$\sum_{i \in X, j \in \bar{X}} u_{ij} - 0 \ \geq F$$

Así pues, tenemos que cualquier flujo factible es menor o igual que la capacidad de corte mínima. Cuando coinciden tenemos el flujo máximo buscado.

Algoritmo de Ford Fulkerson para el flujo máximo.

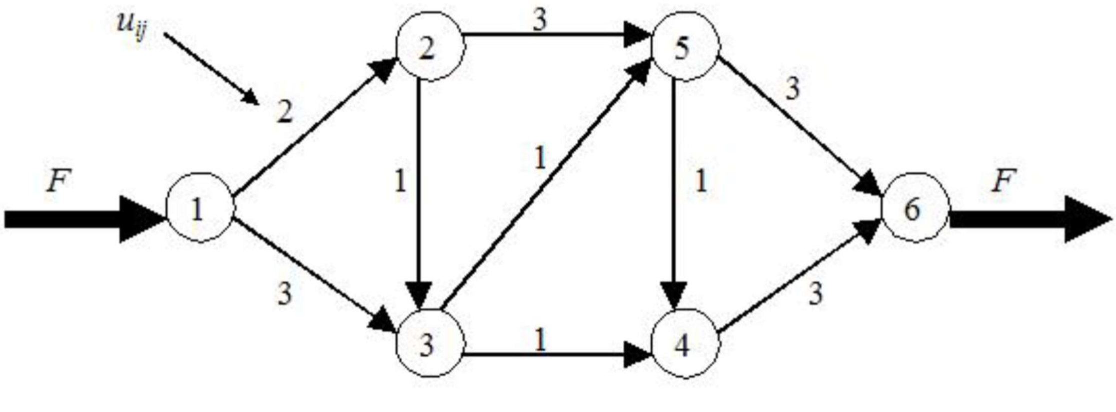
Se busca un flujo factible x_{ij} =0 y se construye un Grafo G' de la siguiente manera

1. Si el arco (i,j) está en G con x_{ij}=0 y x_{ij}< u_{ij}, entonces se admite un cambio de flujo igual Δ_{ij}= u_{ij}
2. Si el arco (i,j) está en G con x_{ij} > 0, entonces (j,i) esté en G' con flujo Δ_{ji}= x_{ij} (hacia atrás) y (i,j) con flujo $u_{ij} - x_{ij}$. (arco hacia adelante)

En G' existen dos posibilidades:

1. Existe un camino de 1 a n. Se calcula $\Delta = Min$ {Δ_{ji}/ (i,j) está en el camino} y se construye un nuevo flujo como sigue
   a) Se añade Δ a los arcos hacía adelante
   b) Se les resta Δ a los hacia atrás.
   c) Ir al paso 1
2. No existe camino. Stop. En ese caso X={1 y nodos que se alcanzan desde 1 en G'}. $\bar{X}$ son los restantes.

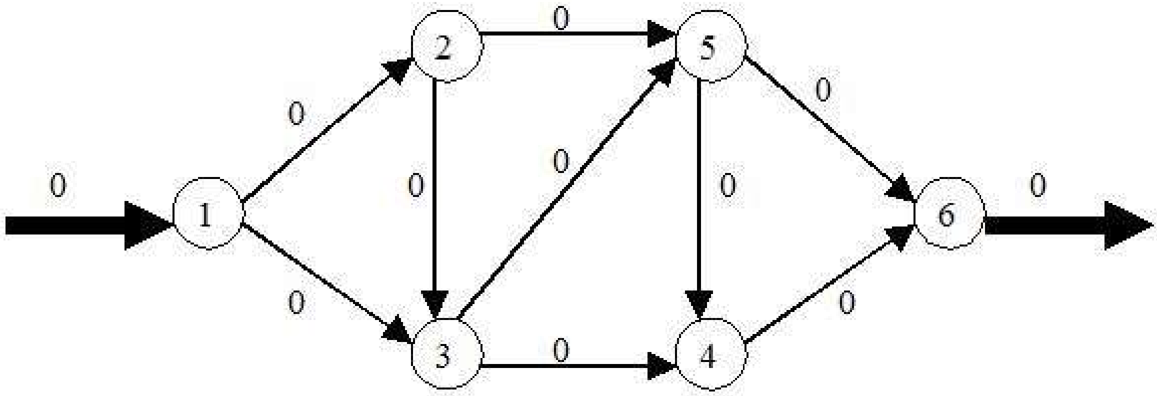
Consideremos el siguiente Grafo



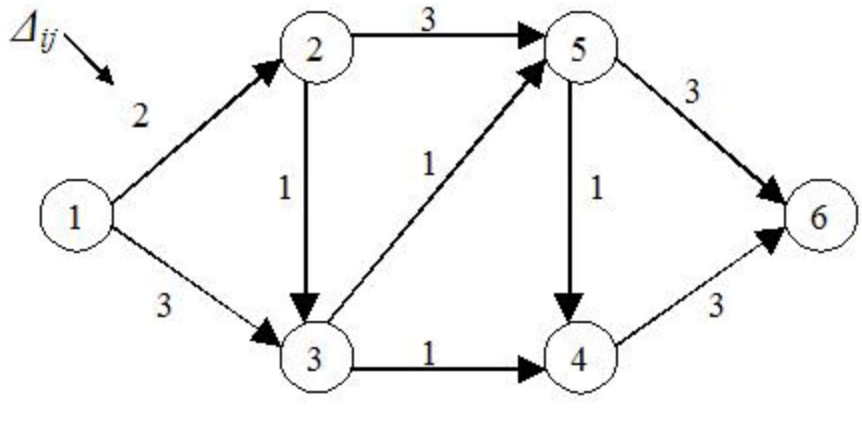
G

El flujo factible inicial es x_{ij}= 0, con F=0

Iteración 1

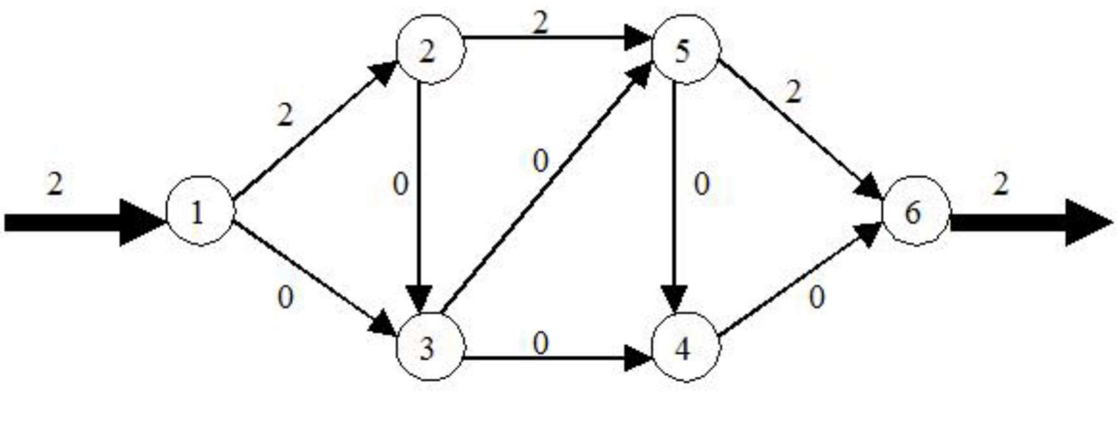


G

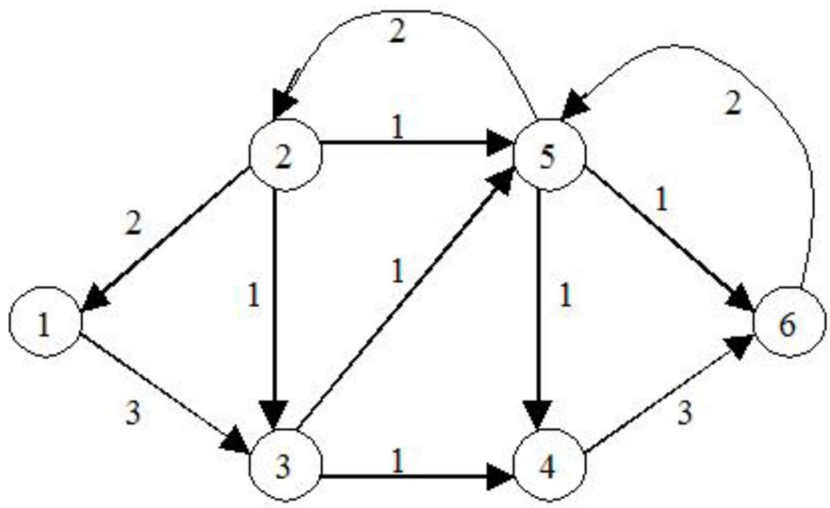


G'

Buscamos un camino de 1 a 6. C=1-2-5-6. Δ=Min {2,3,3} =2, por lo que en la iteración 2 queda



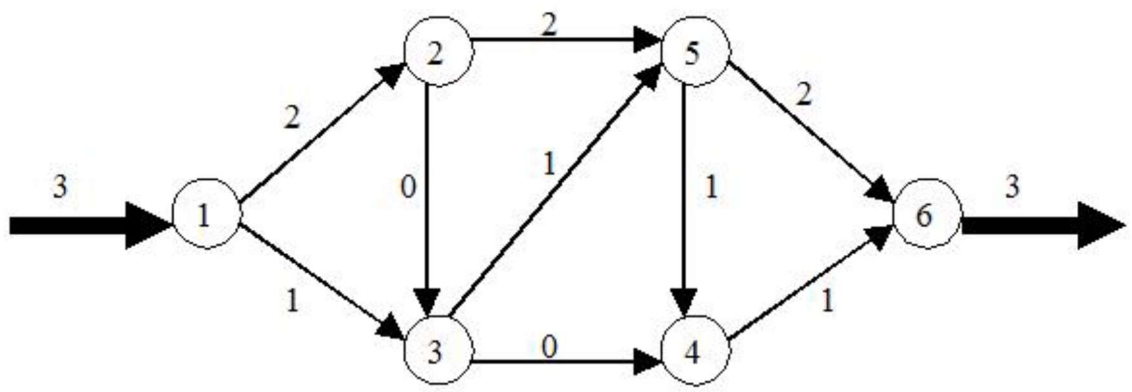
G



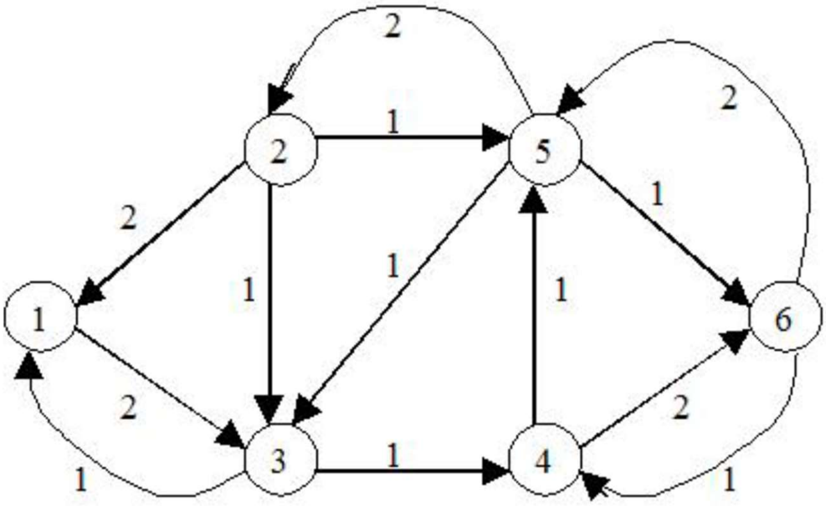
G’

Buscamos un nuevo camino

C=1-3-5-4-6. Obviamente Δ=1. Por lo que la iteración 3

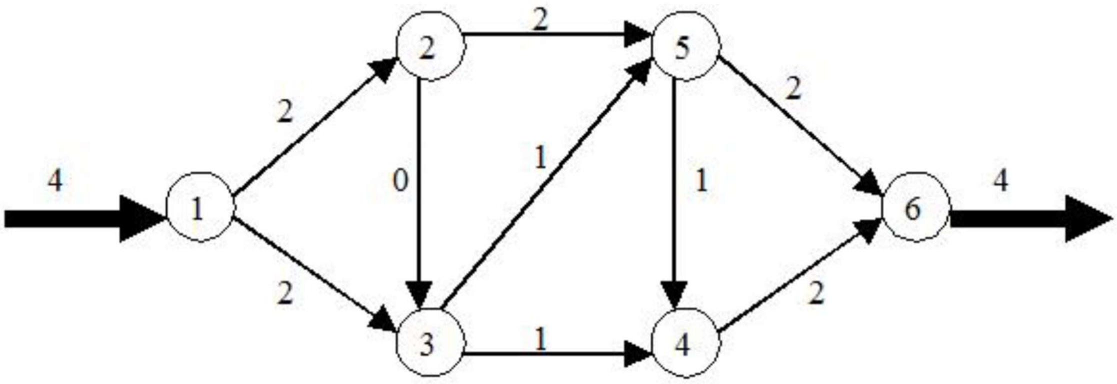


G

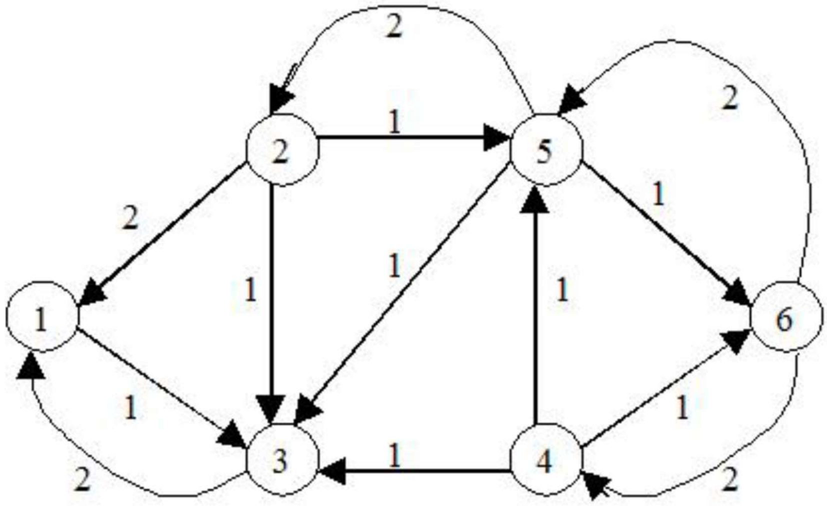


G'

Ahora el camino es C=1-3-4-6. Δ=1 Y en la iteración 4 queda



G



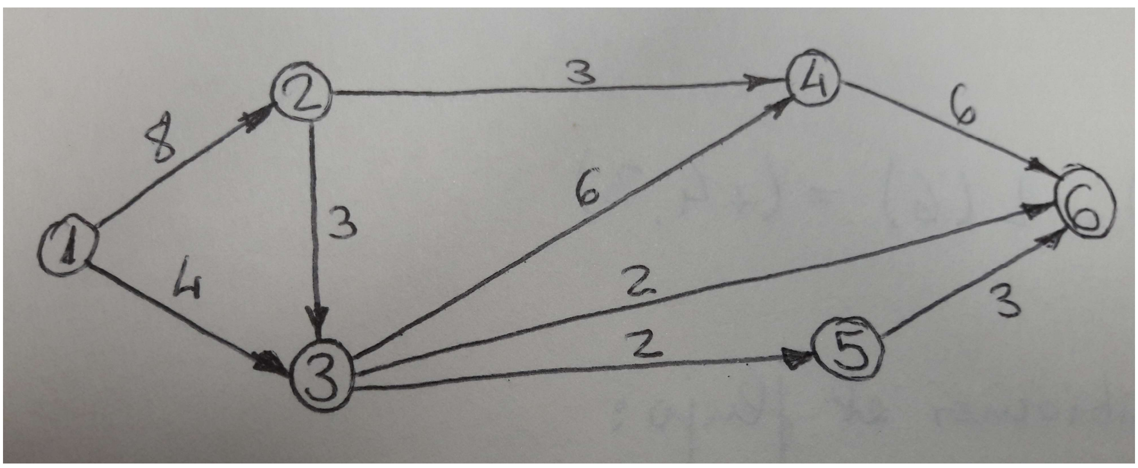
G'

Como ya no hay más caminos, tenemos la solución final en G.

X={1,3}

C(X, $\bar{X}$)=2+1+1=4 y se comprueba el teorema.

Aplica el algoritmo de F-F al siguiente grafo



Flujo factible inicial

A partir de un grafo G con flujo x_{ij} , verificando l_{ij} ≤ x_{ij} ≤ u_{ij} se construye un Grafo auxiliar G' de la siguiente manera:

- Se agrega un nuevo arco que vaya desde el nodo n al 1.
- Se agregan nodos artificiales: uno origen a y un nodo destino b.
- Para cada nodo i ϵ N se agregan dos arcos artificiales (a,i) y (b,i).

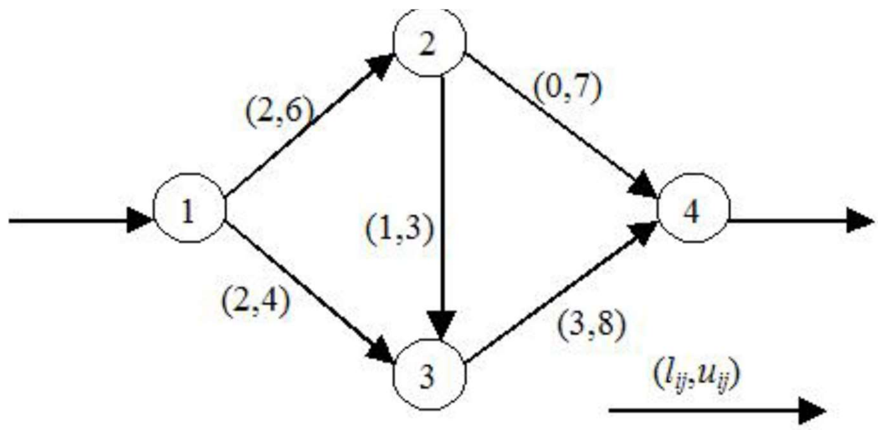
Las capacidades inferiores de G' se definen iguales a 0 y las capacidades superiores se definen de la siguiente manera:

- u'_{ij}= u_{ij}- l_{ij} para cada (i,j) ϵ G
- u'_{ai}= $\sum_{k\,\epsilon\,N} l_{ki}$ para (a,i) para i ϵ N
- u'_{ib}= $\sum_{k\,\epsilon\,N} l_{ik}$ para (i,b) para i ϵ N
- u'_{n1}= ∞

Se procede a determinar el flujo máximo F' por el algoritmo de F-F en G'.

- Si F' < $\sum_{(i,j)\,\epsilon\,G'} l_{ij}$, entonces la red no admite un flujo factible.
- Si F' = $\sum_{(i,j)\,\epsilon\,G'} l_{ij}$ entonces el vector de flujos f_{ij}= f'_{ij}+ l_{ij} es un flujo factible para la red original.

Ejemplo



1
2
3
4
(2,6)
(2,4)
(1,3)
(0,7)
(3,8)
(l_{ij}, u_{ij})