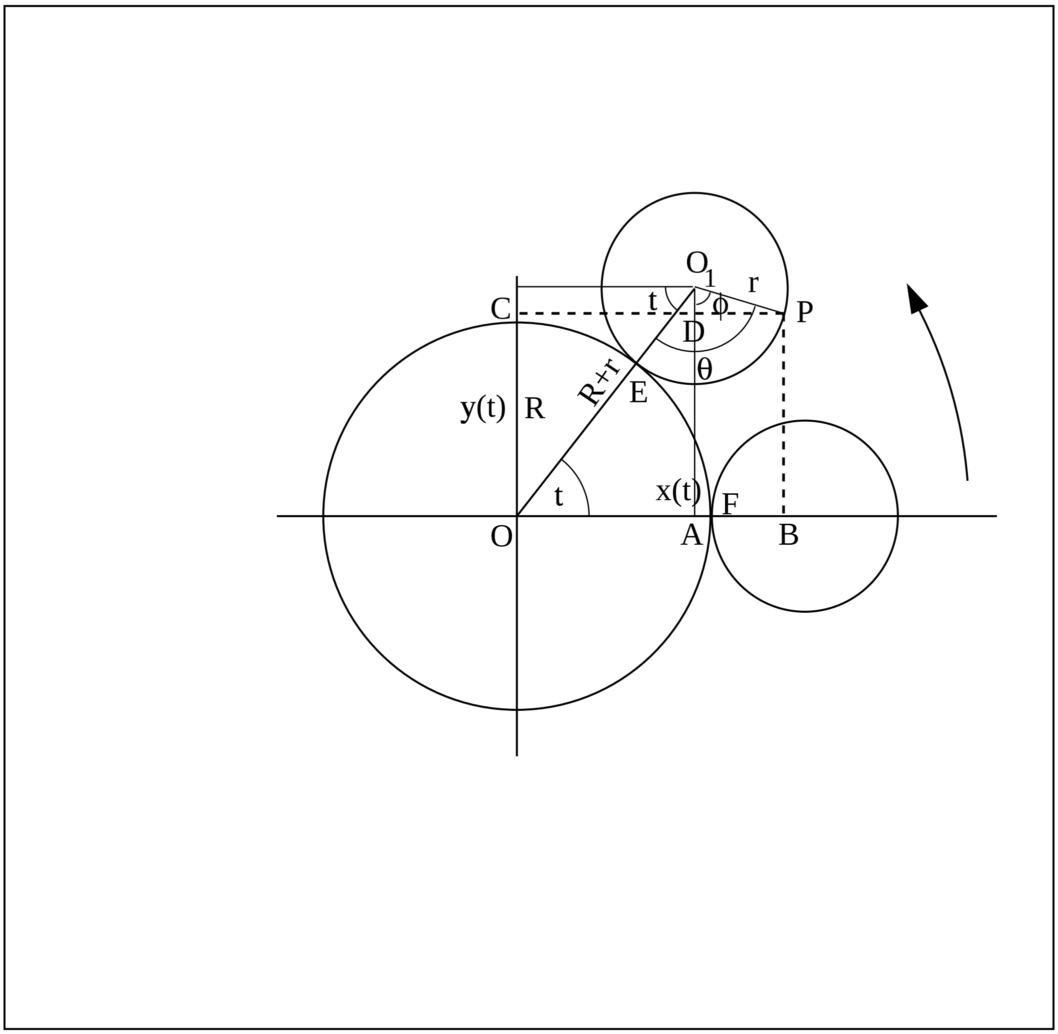
LA EPICICLOIDE

Un disco regular de radio r en el plano XY rueda sin deslizar por el exterior de otro disco fijo de radio R. La curva que describe un punto fijo P de la circunferencia del disco que rueda se denomina **epicicloide**. Hallar sus ecuaciones y sus puntos regulares.



Resolución: Eligiendo el parámetro t tal y como se muestra en la figura, buscamos determinar la curva:

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t)). \end{array}$$

Está claro que:

$$x(t) = d(O,B) = d(O,A) + d(D,P) = (R+r)\cos t + r \operatorname{sen}\phi,$$

$$y(t) = d(O,C) = d(A,D) = d(A,O_1) - d(D,O_1) = (R+r)\operatorname{sen} t - r\cos\phi.$$

Para determinar el ángulo ϕ, observamos que, de acuerdo con la figura anterior, $\phi = \theta - (\pi/2 - t)$. Ahora bien, como el disco rueda sin deslizar, se verifica que la longitud del arco de la circunferencia que rueda entre P y E coincide con la longitud del arco de la circunferencia fija entre F y E, es decir, $\theta r = tR$, por lo que $\theta = (R/r)\,t$. Así, operando se obtiene que $\operatorname{sen}\phi = -\cos((R+r)t/r)$ y $\cos\phi = \operatorname{sen}((R+r)t/r)$.

Por lo tanto, la epicicloide vendrá dada por:

$$\alpha(t) \;=\; ((R+r)\cos t - r\cos(\frac{R+r}{r}t), (R+r)\operatorname{sen} t - r\operatorname{sen}(\frac{R+r}{r}t)).$$

En cuanto a la regularidad de la epicicloide, se calcula directamente que $|\alpha'(t)| = 2(R+r)|\operatorname{sen}\frac{R}{2r}t|$, de donde se sigue que $\alpha'(t) = 0$ si y sólo si $t = \frac{2r}{R}k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$. Como $\theta = (R/r)\,t$, obtenemos que los puntos singulares de la epicicloide son los que se obtienen cada vez que el disco que rueda completa una vuelta, estando todos situados sobre la circunferencia del disco fijo.

Por otra parte, es fácil ver que la epicicloide se cierra si y sólo si existen $m, n \in \mathbf{Z}$ tales que $2\pi n = (2\pi r/R)m$, es decir, si y sólo si $R/r \in \mathbf{Q}$.

Finalmente, observemos que la longitud de un lóbulo de la epicicloide viene dada por:

$$L \;=\; \int_o^{\frac{2\pi r}{R}} |\alpha'(t)|dt \;=\; \frac{8r(R+r)}{R}.$$

En el caso en que $R/r = m \in \mathbf{N}$, la epicicloide se cierra en una vuelta, con m lóbulos, con lo que su longitud total será $L_T = 8(1 + (1/m))R$ y $\lim_{m\to\infty} L_T = 8R > 2\pi R$. Esto ocurre pues, al aumentar el número de lóbulos, la epicicloide tendería a una circunferencia de puntos singulares.