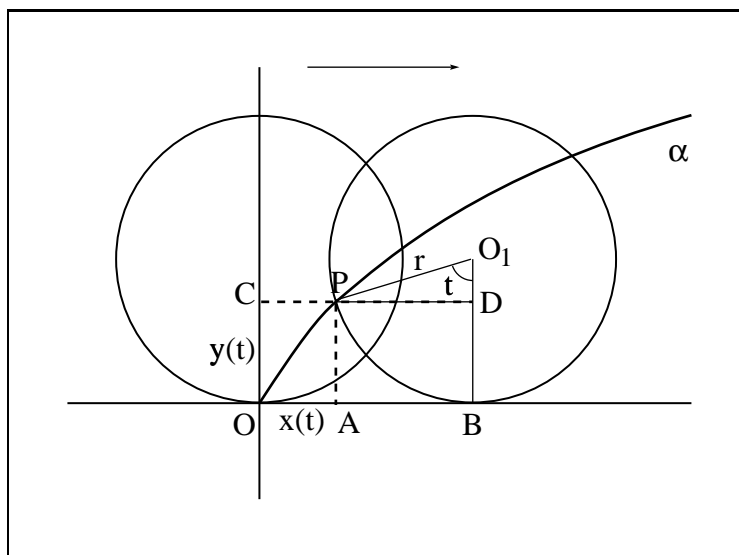


LA CICLOIDE

Un disco regular de radio r en el plano XY rueda sin deslizar a lo largo del eje OX . La figura que describe un punto P de la circunferencia del disco se llama **cicloide**. Hallar sus ecuaciones y sus puntos regulares.



RESOLUCIÓN: Eligiendo el parámetro t tal y como se muestra en la figura, busquemos determinar la curva:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Está claro que $x(t) = d(O, A) = d(O, B) - d(A, B) = d(O, B) - d(P, D) = d(O, B) - r \sin t$. Ahora bien, como el disco rueda sin deslizar, se verifica que $d(O, B)$ coincide con la longitud del arco de circunferencia entre B y P , siendo dicha longitud igual a rt . Así, $x(t) = rt - r \sin t$.

Por otra parte, $y(t) = d(O, C) = d(B, D) = d(B, O_1) - d(D, O_1) = r - r \cos t$.

Por lo tanto, la cicloide vendrá dada por:

$$\alpha(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t).$$

En cuanto a la regularidad de la cicloide, se calcula directamente que $|\alpha'(t)| = 2r|\sin t/2|$, de donde se sigue que $\alpha'(t) = 0$ si y sólo si $t = 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$. Así, cada vez que el disco completa una vuelta, se obtiene un punto singular de la cicloide.