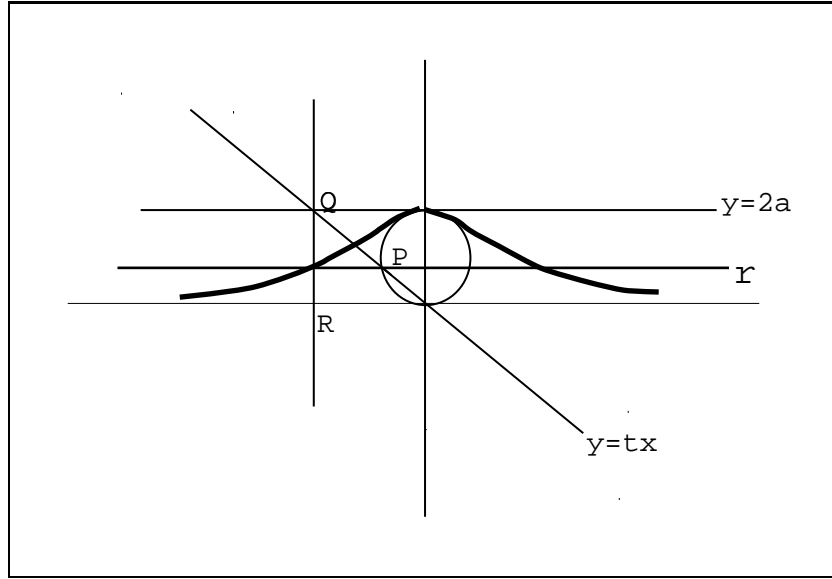


LA BRUJA DE AGNESI

Consideramos la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ay$ de radio a y de centro $(0, a)$, siendo $a > 0$. Cada recta de la forma $x = ty$ pasa por el origen y corta a la circunferencia en un punto P y a la recta $y = 2a$ en un punto Q . La horizontal que pasa por P corta a la vertical que pasa por Q en un punto R , tal y como se puede observar en la figura. Así se construye la curva conocida como Bruja de Agnesi. Hallar sus ecuaciones y puntos singulares.



RESOLUCIÓN: Calculemos las ecuaciones paramétricas de la curva, que denotamos por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. En primer lugar, vamos a obtener los puntos P , que surgen de la intersección de la circunferencia y la recta $x = ty$. Tomemos $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ y en ella, sustituimos la ecuación de la recta $x = ty$, con lo cual, nos queda $t^2y^2 + y^2 - 2ay = 0$, es decir; $(t^2 + 1)y^2 - 2ay = 0$. De donde se deduce que o bien $y = 0$, lo cual no aporta información, o bien $y = \frac{2a}{t^2 + 1}$, que, junto con $x = ty$, tenemos que los puntos P tienen la forma:

$$P = \left(\frac{2at}{t^2 + 1}, \frac{2a}{t^2 + 1} \right).$$

Veamos ahora los puntos Q que se originan mediante la intersección de cada recta $x = ty$ con $y = 2a$. Sustituyendo $y = 2a$ en la otra ecuación obtenemos

$x = 2at$. Luego, los puntos Q tienen la forma: $Q = (2at, 2a)$. Por lo tanto, dado que la curva α se determina por los puntos R obtenidos mediante la intersección de la recta horizontal que pasa por cada punto P y la recta vertical que pasa por cada punto Q , se deduce que los puntos de α tendrán la misma abscisa que Q y la misma ordenada que P . Es decir, los puntos de la curva vienen dados por:

$$\alpha(t) = (2at, \frac{2a}{t^2 + 1}).$$

Respecto a la regularidad de la curva “Bruja de Agnesi” sólo cabe comentar que no tiene puntos singulares, tarea que se deja propuesta ya que se comprueba fácilmente.

CURIOSIDAD: ¿Por qué se llama “Bruja de Agnesi”? La curva conocida como “Bruja de Agnesi” fue estudiada por la matemática italiana María Caëtana Agnesi. Fueron varios los autores que investigaron acerca de por qué se conoce a la curva por la “Bruja de Agnesi”. Quizás la teoría que más peso ha tenido a lo largo del tiempo ha sido la formulada por Grand en 1703. Se sabe que la curva se conocía con el término latino “la versiera”, que significa “curva que da la vuelta”. Pero fue John Colson, traductor reconocido en aquella época, al traducir los trabajos de Agnesi del latín al francés, quien cometió un error de traducción, sustituyendo el término anterior por “L’aversiera” que significa “bruja” o “hechicera”.

Redactado por: Rocío Moreno Casablanca.